مدرسان شریف

فصل اول

« هندسه تحلیلی و جبرخطی »

درسنامه: ماتریس و خواص آن

مثال ۱: فرض کنیم $A=\begin{pmatrix}\frac{۱}{۲} & ۰ & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{۳} & ۰\\ ۰ & ۰ & \frac{۳}{۵}\end{pmatrix}$ و $B=\sum_{n=۰}^{\infty}A^n$ باشد. مقدار trB کدام است؟

۱) ۲ ‏ ۲) ۳ ‏ ۳) ۴ ‏ ۴) ۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» می‌دانیم که اگر A ماتریس قطری باشد، ماتریس A^n همان ماتریس A است که درایه‌هایش به توان n رسیده‌اند. البته این موضوع برای همه‌ی ماتریس‌ها صحیح نیست، بلکه ماتریس‌های قطری این ویژگی را دارند. از طرفی می‌دانیم که $\sum_{n=۰}^{\infty} trA^n = tr\sum_{n=۰}^{\infty}A^n$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$A^n=\begin{pmatrix}(\frac{۱}{۲})^n & ۰ & ۰\\ ۰ & (\frac{۱}{۳})^n & ۰\\ ۰ & ۰ & (\frac{۳}{۵})^n\end{pmatrix} \Rightarrow trB=tr\sum_{n=۰}^{\infty}A^n=\sum_{n=۰}^{\infty}tr(A^n)=\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۱}{۲^n}+\frac{۱}{۳^n}+\frac{۳^n}{۵^n})$$

یادآوری می‌کنیم که وقتی $|x|<۱$ باشد، تساوی $\sum_{n=۰}^{\infty}x^n=\frac{۱}{۱-x}$ برقرار است. پس داریم:

$$trB=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}}+\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۳}}+\frac{۱}{۱-\frac{۳}{۵}}=۶$$

مثال ۲: ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}i & ۲i\\ ۱+i & ۰\end{bmatrix}$ در معادله‌ی $iB+۲A=\begin{bmatrix}z+y & x\\ i+۵ & y\end{bmatrix}$ صدق می‌کنند. مقدار z کدام است؟

۱) ۵ ‏ ۲) -۵ ‏ ۳) $۵i$ ‏ ۴) $-۵i$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با انجام ضرب اسکالر و سپس جمع کردن دو ماتریس خواهیم داشت:

$$iB+۲A=i\begin{bmatrix}i & ۲i\\ ۱+i & ۰\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i^۲ & ۲i^۲\\ i+i^۲ & ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۲ & ۴\\ ۶ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & -۲\\ i-۱ & ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۲ & ۴\\ ۶ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳ & ۲\\ i+۵ & ۲\end{bmatrix}$$

بنابراین داریم: $\begin{bmatrix}-۳ & ۲\\ i+۵ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z+y & x\\ i+۵ & y\end{bmatrix}$ و از این تساوی به نتایج $x=۲$، $y=۲$ و $z+y=-۳$ می‌رسیم که نشان می‌دهند $z=-۵$ است.

مثال ۳: اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ باشد ماتریس $A^{۱۰۰}$ عبارت است از: (مکانیک ـ آزاد ۸۰)

۱) $\begin{bmatrix}۱۰۰ & ۲\\ ۰ & ۱۰۰\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۱ & ۲۰۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۱۰۰ & ۲۰۰\\ ۰ & ۱۰۰\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱ & ۲^{۱۰۰}\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۳}=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۶\\ ۰ & ۱\end{bmatrix},\dots$$

مثال ۴: در معادله $\begin{bmatrix}۱\\ ۲\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۱\\ ۴ & ۱ & ۳\\ ۲ & -۲ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ مجهول x چقدر است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$\begin{cases}۲x-y+z=۱\\ ۴x+y+۳z=۲\\ ۲x-۲y-z=۱\end{cases}\xrightarrow[\text{جمع دو برابر معادله (۲) با (۳)}]{\text{جمع معادله (۱) و (۲)}}\begin{cases}۶x+۴z=۳\\ ۱۰x+۵z=۵\end{cases}\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\,,\ z=۰$$

مثال ۵: اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}$ از رابطه‌ی $X.A=۲A^{t}$ ماتریس X کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\begin{bmatrix}-۱ & ۵\\ ۲ & -۶\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۶ & ۵\\ -۲ & -۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۱ & ۵\\ -۲ & -۶\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۶ & -۲\\ ۵ & -۱\end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» قرار می‌دهیم $X=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ در این صورت داریم:

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}۲a+۴b & ۳a+۵b\\ ۲c+۴d & ۳c+۵d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۸\\ ۶ & ۱۰\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}۲a+۴b=۴\\ ۳a+۵b=۸\\ ۲c+۴d=۶\\ ۳c+۵d=۱۰\end{cases}$$

از روابط فوق $a=۶\,,\ b=-۲\,,\ c=۵\,,\ d=-۱$ به دست می‌آید.

درسنامه۲: دترمینان و کاربردهایش

مثال۱: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ i & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 1+2i & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه $|A^{102}|$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون ماتریس A پائین مثلثی است در نتیجه دترمینان آن به راحتی قابل محاسبه است و برابر حاصل‌ضرب عناصر روی قطر اصلی ماتریس A می‌باشد: $|A|=(1)(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})=\frac{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}{4}=1$ بنابراین داریم: $|A^{102}|=|A|^{102}=1^{102}=1$.

مثال۲: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ -5 & 0 & \alpha\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$ و بدانیم B معکوس ماتریس A است، مقدار α کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر B وارونِ A باشد باید داشته باشیم $AB=I$ بنابراین داریم:

$$\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ -5 & 0 & \alpha\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

پس حاصل‌ضرب سطر اولِ A در ستون سوم B باید صفر شود: $\frac{1}{10}(2-\alpha+3)=0 \Rightarrow \alpha=5$

مثال۳: دترمینان ماتریس A کدام است؟

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 6 & 4 & 5 & 6\\ -1 & 1 & 1 & 2 & 3\\ -1 & 3 & 4 & 5 & 6\\ -1 & 1 & 2 & 3 & -1\\ -2 & 2 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

۱) ۱۶
۲) ۱۲
۳) ۱۶-
۴) ۱۲-

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا سطر سوم را از سطر اول کم می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}-3 & 3 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 2 & 3\\ -1 & 3 & 4 & 5 & 6\\ -1 & 1 & 2 & 3 & -1\\ -2 & 2 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{اکنون ستون اول را با ستون دوم جمع می‌کنیم}}\begin{bmatrix}0 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

با استفاده از گسترش روی سطر اول خواهیم داشت:

$$\det A=0-3\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5 & 6\\ 0 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{vmatrix}+0-0+0$$

حال در این ماتریس 4×4 از گسترش روی ستون اول استفاده می‌کنیم:

$$\det A=-3(0-2\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}+0-0)\Rightarrow \det A=6\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

حالا با استفاده از روش ساروس خواهیم داشت:

$$\det A=6(3-2+12-9-4+2)=12$$

مثال ۴: اگر برای ماتریس A داشته باشیم $A^2 - A + I = 0$، آن‌گاه A^{-1} کدام است؟

۱) I ۲) $I + A$ ۳) A^2 ۴) $I - A$

پاسخ: گزینه «۴» از تساوی $A^2 - A + I = 0$ خواهیم داشت $A - A^2 = I$ بنابراین $A(I - A) = I$. از طرفی می‌دانیم که اگر $AB = I$ باشد، B وارونِ A است. پس داریم:

$$A(I - A) = I \Rightarrow A^{-1} = I - A$$

مثال ۵: اگر A یک ماتریس 3×3 باشد و $|A| \neq 0$ و همچنین در تساوی‌های $AA' = A'A$ و $B = A^{-1}A'$ صدق کند، آن‌گاه BB' برابر با کدام گزینه است؟

۱) I ۲) $1 + B$ ۳) $(B^{-1})'$ ۴) $3I$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به تساوی $B = A^{-1}A'$ خواهیم داشت:

$$BB' = (A^{-1}A')(A^{-1}A')' = (A^{-1}A')(A')'(A^{-1})'$$

اما می‌دانیم که: $(A')' = A$ و $(A^{-1})' = (A')^{-1}$ است. بنابراین داریم:

$$BB' = (A^{-1})(A'A)(A')^{-1}$$

حال از فرضِ $A'A = AA'$ استفاده می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$BB' = (A^{-1})(AA')(A')^{-1} = (A^{-1}A)(A'A'^{-1}) = II = I$$

توجه کنید برای ماتریس معکوس‌پذیر A داریم $AA^{-1} = I$.

مثال ۶: برای آن که دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + 4y = 6 \\ 3x + 8y = 12 \end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» طبق نکته فوق برای آن که این دستگاه دو معادله و دو مجهولی بی‌شمار جواب داشته باشد باید $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد، یعنی داریم:

$$\frac{a}{3} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

مثال ۷: مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ را به دست آورید و بردارهای ویژه‌ی مربوط به مقدار ویژه‌ی کوچکتر را تعیین کنید.

پاسخ: ابتدا ماتریس $A - \lambda I$ را تشکیل داده و چند جمله‌ای مشخصه را به‌دست می‌آوریم.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow f(\lambda) = |A - \lambda I| = (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad (\text{معادله‌ی مشخصه})$$

ریشه‌های معادله‌ی مشخصه عبارتند از $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 3$. برای یافتن بردارهای ویژه‌ی مربوط به $\lambda_1 = 2$ دستگاه $AX = 2X$ را حل می‌کنیم. فرض کنیم $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ باشد.

$$AX = 2X \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x - y = 2x \\ 2x + y = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2x$$

هر دو معادله به نتیجه‌ی $y = 2x$ می‌رسند. بنابراین هر برداری که به صورت $X = \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix}$ باشد، یک بردار ویژه برای $\lambda_1 = 2$ است. همان‌طور که گفتیم، هر مقدار ویژه دارای بی‌شمار بردار ویژه است. مثلاً $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ یا $X = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ یا $X = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ همگی بردارهای ویژه‌ی مربوط به $\lambda_1 = 2$ هستند.

مثال ۸: مجموع و حاصل‌ضرب مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ به ترتیب کدامند؟

۱) 4، -5 ۲) 5، -4 ۳) 6، -4 ۴) -6، 6

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا معادله‌ی مشخصه را تشکیل داده و مقادیر ویژه را تعیین می‌کنیم:

$$f(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 8 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = (3-\lambda)(1-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \;,\; \lambda_2 = 5$$

پس مجموع مقادیر ویژه $\lambda_1 + \lambda_2 = 4$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $\lambda_1\lambda_2 = -5$ است. حالا از شما می‌خواهیم که $\det A$ و trA را محاسبه کنید. می‌بینیم که $trA = 3 + 1 = 4$ و $\det A = 3 - 8 = -5$ است.

مثال۹: مجموع مقادیر ویژه‌ی $A=\begin{bmatrix} m & ۰ & ۱ \\ ۰ & m-۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & m-۲ \end{bmatrix}$ برابر صفر بوده؛ حاصل‌ضرب مقادیر ویژه، «چه عددی» است؟

۱) ۳ ۲) ۲- ۳) ۴- ۴) ۱

پاسخ : گزینه «۳» مجموع مقادیر ویژه ماتریس، برابر با حاصل‌جمع درایه‌های روی قطر اصلی است، لذا داریم:

$$m+(m-۱)+(m-۲)=۰ \Rightarrow ۳m=۳ \Rightarrow m=۱$$

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{همان دترمینان ماتریس است}]{\text{حاصل‌ضرب مقادیر ویژه}} |A|=۱\times(۰-۴)+۱\times(۰-۰)=-۴$$

مثال۱۰: اگر $\lambda=۱$ مقدار ویژه مکرر مرتبه سوم ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۵ & -۳ & -۲ \\ ۸ & -۵ & -۴ \\ -۴ & ۳ & a \end{bmatrix}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۳ ۴) ۳-

پاسخ : گزینه «۳» طبق فرض، مقادیر ویژه همگی برابر ۱ هستند و می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه برابر مجموع عناصر قطر اصلی هستند، بنابراین داریم:

$$۵-۵+a=۱+۱+۱ \Rightarrow a=۳$$

مثال۱۱: مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۳ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۲، ۱-، ۲- ۲) ۲، ۱، ۰ ۳) ۲، ۱، ۲- ۴) ۲، ۱، ۱-

پاسخ : گزینه «۴»

روش اول: معادله‌ی مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۳ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda & ۰ & ۰ \\ ۰ & \lambda & ۰ \\ ۰ & & \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲-\lambda & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱-\lambda & ۰ \\ -۳ & -۱ & -۱-\lambda \end{bmatrix}$$

$$f(\lambda)=|A-\lambda I|=۰ \Rightarrow (۲-\lambda)(۱-\lambda)(-۱-\lambda)=۰ \Rightarrow \lambda_۱=۱\,,\ \lambda_۲=-۱\ ,\ \lambda_۳=۲$$

روش دوم: مقادیر trA و $\det A$ را محاسبه می‌کنیم. $trA=۲+۱-۱=۲$ است و با استفاده از دستور ساروس $\det A=(-۲+۰+۰)-(۰+۰+۰)=-۲$ به‌دست می‌آید. بنابراین می‌دانیم که $\lambda_۱+\lambda_۲+\lambda_۳=۲$ و $\lambda_۱\lambda_۲\lambda_۳=-۲$ است. این نشان می‌دهد که گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال۱۲: اگر A یک ماتریس ۵×۵ بوده و $|xI-A|=(x-۱)(x+۲)^۳x$ باشد، مقدار $tr(A)$ چقدر است؟

۱) ۵- ۲) ۵+ ۳) ۰ ۴) ۱۰

پاسخ : گزینه «۱» مقادیر ویژه ماتریس A از حل معادله‌ی $(x-۱)(x+۲)^۳x=۰$ به‌دست می‌آیند و اعداد ۰، ۱، ۲-، ۲-، ۲- می‌باشند و مجموع مقادیر ویژه برابر $tr(A)$ است، بنابراین داریم:

$$tr(A)=-۲-۲-۲+۱+۰=-۵$$

مثال۱۳: اگر A یک ماتریس با چند جمله‌ای مشخصه $f(x)=x^۵+x^۲-۳$ باشد، $\det(A)$ چقدر است؟

۱) ۳- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ : گزینه «۴» طبق قضیه‌ی همیلتون، ماتریس A در معادله‌ی مشخصه‌اش صدق می‌کند یعنی $A^۵+A^۲-۳I=۰$ است. طبق نکته‌ای که پیش از این گفته‌ایم خواهیم داشت:

$$\det A=(-۱)^n\frac{a_۰}{a_۵}=(-۱)^۵\frac{(-۳)}{۱}=۳$$

مثال۱۴: قطری شده‌ی ماتریس $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا مقادیر ویژه A را به دست می‌آوریم:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} -۱-\lambda & ۲ \\ ۱ & ۰-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^۲+\lambda-۲=۰ \Rightarrow \lambda=۱,-۲$$

درایه‌های واقع روی قطر اصلی ماتریس قطری شدنی، مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشند. بنابراین گزینه (۲) می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

مثال ۱۵: اگر ماتریس A متعامد باشد دترمینان آن کدام است؟

۱) ۰ ۲) ± ۱ ۳) ± ۲ ۴) ± ۳

پاسخ : گزینه «۲» می‌دانیم که اگر A متعامد باشد آن‌گاه $A^t = A^{-۱}$ همچنین $\det A^t = \det A$ بنابراین داریم:

$$A^t = A^{-۱} \Rightarrow \det A^t = \det A^{-۱} \Rightarrow \det A = \frac{۱}{\det A} \Rightarrow (\det A)^۲ = ۱ \Rightarrow \det A = \pm ۱$$

مثال ۱۶: می‌دانیم که $\lambda = ۱$ مقدار ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & -\frac{۵}{۴} & -\frac{۱}{۴} \\ ۱ & -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ ۴ & -\frac{۱۱}{۴} & -\frac{۱}{۴} \end{bmatrix}$ است و علاوه بر این ماتریس A دارای وارون نیست. دو مقدار ویژه دیگر ماتریس A کدامند؟ (عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) ۰ و $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۳}{۴}$ ۳) -۱ و $\frac{۵}{۴}$ ۴) ۰ و $\frac{۵}{۴}$

پاسخ : گزینه «۱» ماتریس A وارون‌پذیر نیست، پس دترمینان A برابر صفر است از طرفی حاصل‌ضرب مقادیر ویژه یک ماتریس برابر دترمینان ماتریس می‌باشد، پس یکی از مقادیر ویژه برابر صفر است. از طرفی مجموع مقادیر ویژه برابر مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس می‌باشد، بنابراین داریم:

$$۱ + ۰ + \lambda_۳ = ۲ - \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴} \Rightarrow \lambda_۳ = \frac{۱}{۴}$$

مثال ۱۷: اگر $A = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۲ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$ باشد، آن‌گاه $\det(A)$ برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۸)

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) -۲

پاسخ : گزینه «۳» دترمینان ماتریس را با روش ساروس به‌دست می‌آوریم:

$$\left|\begin{array}{ccc:ccc} ۱ & ۰ & -۱ & ۱ & ۰ & -۱ \\ -۲ & ۱ & ۱ & -۲ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ & -۱ \end{array}\right| = (-۱ + ۰ + ۲) - (۰ + ۱ + ۰) = ۰$$

مثال ۱۸: دترمینان ماتریس $\begin{vmatrix} -۱۸ & ۴ & -۱ & ۵ & ۹ \\ ۱۹ & -۴۵ & ۱۴ & -۲۳ & -۱۱ \\ ۳۷ & -۴۰ & ۱۲ & ۷۸ & ۶۲ \\ -۱۸ & ۴ & -۱ & ۵ & ۹ \\ ۱۳ & ۴۷ & -۱۳ & -۹۲ & ۱۸ \end{vmatrix}$: (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۸)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱۰ ۴) بی‌نهایت

پاسخ : گزینه «۱» سطر اول و سطر چهارم ماتریس با هم برابرند، پس دترمینان ماتریس برابر صفر است.

مثال ۱۹: کدام بردار یک بردار ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۲ \\ -۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا مقادیر ویژه ماتریس داده شده را به دست می‌آوریم:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} ۵-\lambda & ۴ \\ ۱ & ۲-\lambda \end{vmatrix} = (۵-\lambda)(۲-\lambda) - ۴ = \lambda^۲ - ۷\lambda + ۶ = ۰ \Rightarrow \lambda = ۱,۶$$

حال بردارهای ویژه متناظر با مقادیر فوق را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ۱ \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۵x + ۴y = x \\ x + ۲y = y \end{cases} \Rightarrow y = -x$$

بنابراین (۱- و ۱) و هر مضربی از آن یک بردار ویژه ماتریس مزبور می‌باشد.

مثال ۲۰: اگر $\lambda = 1$ مقدار ویژه مکرر مرتبه سوم ماتریس $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 5 \\ -4 & -5 & 8 \\ a & 3 & -4 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار a کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۳ ۴) ۳-

پاسخ : گزینه «۳» می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه برابر مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس می‌باشد، بنابراین داریم: $1+1+1 = 5-5+a \Rightarrow a = 3$

مثال ۲۱: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ عنصر سطر سوم و ستون دوم از ماتریس A^{-1} کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۹)

۱) $-\frac{5}{3}$ ۲) $-\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{5}{3}$

پاسخ : گزینه «۴» به سادگی می‌توان نشان داد $|A| = -3$. برای محاسبه درایه سطر سوم و ستون دوم ماتریس A^{-1}، لازم است همسازه درایه a_{23} ماتریس A را به دست آوریم.

$$a_{23}\ \text{همسازه درایه} = (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow A^{-1}\ \text{در}\ a_{32}\ \text{درایه} = \frac{-5}{|A|} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$$

مثال ۲۲: اگر A و B ماتریس‌های $n \times n$ متقارن باشند، در این صورت می‌توان گفت .... (مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) A معکوس‌پذیر است. ۲) $(A+B)$ متقارن است. ۳) B معکوس‌پذیر است. ۴) $(A-B)$ معکوس‌پذیر نیست.

پاسخ : گزینه «۲»

$$(A+B)' = A' + B' = A + B$$

مثال ۲۳: مطلوبست محاسبه کثیرالجمله مشخصه و مقادیر خاص، ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. (مکانیک ـ آزاد ۸۰)

۱) $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1\ ,\ \lambda_2 = 1\ ,\ \lambda_1 = 1$
۲) $P_2(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1\ ,\ \lambda_2 = -1\ ,\ \lambda_1 = -1$
۳) $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4\ ,\ \lambda_2 = 2\ ,\ \lambda_1 = 2$
۴) $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5\ ,\ \lambda_2 = 5\ ,\ \lambda_1 = 1$

پاسخ : گزینه «۴»

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 5$$

مثال ۲۴: ماتریس $A = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 10 & -6 \end{bmatrix}$ را قطری کنید. (مکانیک ـ آزاد ۸۰)

۱) $D = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ۲) $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ۳) $D = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ۴) $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

پاسخ : گزینه «۲» می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه برابر مجموع درایه‌های قطر اصلی و حاصل‌ضرب مقادیر ویژه برابر دترمینان ماتریس است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 2 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 + 5 + 3 \\ 2\lambda_2\lambda_3 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 9 \\ \lambda_2\lambda_3 = 18 \end{cases} \Rightarrow \lambda_2 = 3\ ,\ \lambda_3 = 6$$

مثال ۲۵: می‌دانیم که $\lambda_1 = 2$ یک مقدار ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ است و دترمینان A برابر است با ۳۶، مقدار ویژه دیگر A کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) $\lambda_2 = 1\ ,\ \lambda_3 = 18$ ۲) $\lambda_2 = 3\ ,\ \lambda_3 = 6$ ۳) $\lambda_2 = 2\ ,\ \lambda_3 = 9$ ۴) $\lambda_2 = 2\ ,\ \lambda_3 = 7$

پاسخ : گزینه «۳»

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 9 \\ -6 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+5)(\lambda-10) + 54 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 4$$

درایه‌های قطر اصلی ماتریس قطری موردنظر همان مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشند، بنابراین داریم: $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

مثال ۲۶: اگر $\lambda = ۳$ یکی از مقادیر ویژه $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}$ باشد، بردار ویژه متناظر با آن موازی کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۰)

۱) $\vec{i} - \vec{j} - ۲\vec{k}$ ۲) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ۳) $۲\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ۴) $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$AX = \lambda X \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳x \\ ۳y \\ ۳z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲x + z = ۰ \\ x - y + z = ۰ \\ x + y = ۰ \end{cases} \Rightarrow y = -x \ , \ z = -۲x$$

پس بردار ویژه $(x, -x, -۲x)$ و یا $x(۱, -۱, -۲)$ خواهد بود.

مثال ۲۷: اگر $A = \begin{pmatrix} ۲ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}$ عنصر سطر اول و ستون دوم ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۰)

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) ۰ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ : گزینه «۳» چون ماتریس بالا مثلثی است پس دترمینان آن حاصل‌ضرب قطر اصلی خواهد بود، یعنی $|A| = ۸$. برای محاسبه درایه $a_{۱۲}$ در ماتریس $A^{-۱}$، لازم است همسازه درایه $a_{۲۱}$ در ماتریس A را به دست آوریم. $a_{۲۱}$ همسازه $= (-۱)^{۲+۱} \times \begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix} = ۲ \Rightarrow A^{-۱}$ در $a_{۲۱}$ درایه $= \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$

مثال ۲۸: اگر $A = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & a \end{vmatrix}$ و دترمینان ماتریس $A^۲$ برابر ۹ باشد، a کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۱)

۱) $-۱, ۱$ ۲) $۵, -۱$ ۳) $۵, -۵$ ۴) $۱, -۵$

پاسخ : گزینه «۴»

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & a \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a + ۲ \Rightarrow |A^۲| = |A|^۲ = (a + ۲)^۲ = ۹ \Rightarrow a = ۱ \ , \ -۵$$

مثال ۲۹: مقادیر ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ کدام‌اند؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) ۳- و ۲- و ۱- ۲) ۳ و ۲ و ۱ ۳) ۱- و ۱- و ۱- ۴) ۱ و ۱ و ۱

پاسخ : گزینه «۴» در ماتریس‌های بالا مثلثی یا پایین مثلثی، درایه‌های قطر اصلی مقادیر ویژه ماتریس می‌باشند.

مثال ۳۰: دو مقدار از مقادیر مشخصه (eigenvalue) ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۲ & -۱ & ۳ \\ ۶ & ۵ & -۶ \\ ۲ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$، $\lambda_۱ = ۱$ و $\lambda_۲ = ۲$ می‌باشد، مقدار مشخصه سوم آن $\lambda_۳$ برابر است با: (عمران ـ آزاد ۸۲)

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

پاسخ : گزینه «۲» می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه یک ماتریس برابر مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس می‌باشد. بنابراین داریم:

$$۱ + ۲ + \lambda_۳ = -۲ + ۵ - ۱ \Rightarrow \lambda_۳ = -۱$$

مثال ۳۱: یکی از مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}$ برابر $\lambda = ۳$ است. اگر $x_۱ = c$ انتخاب شود، بردار ویژه مربوطه برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۲)

۱) $ci + cj - ۲ck$ ۲) $ci - cj - ۲ck$ ۳) $۲ci + ۲cj$ ۴) $ci - cj + ck$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۳\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲x_۱ + x_۳ = ۰ \\ x_۱ - x_۲ + x_۳ = ۰ \\ x_۱ + x_۲ = ۰ \end{cases}$$

از دستگاه معادلات فوق نتیجه می‌شود $x_۲ = -x_۱$ و $x_۳ = -۲x_۱$. بنابراین $(c, -c, -۲c)$ بردار ویژه مربوطه می‌باشد.

مثال۳۲: اگر $A=\begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix}$، به ازاء چه مقادیری از λ دترمینان ماتریس $A-\lambda I$ که $I=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ صفر می‌شود؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) ۱ و ۲ ۲) ۱ و ۳ ۳) ۲ و ۳ ۴) ۱ و ۲ و ۳

پاسخ : گزینه «۱»

روش اول:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} ۱-\lambda & ۰ \\ -۱ & ۲-\lambda \end{vmatrix}=(۱-\lambda)(۲-\lambda)=۰ \Rightarrow \lambda=۱,۲$$

روش دوم: در ماتریس بالا مثلثی یا پایین مثلثی مقادیر ویژه همان درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس می‌باشند.

مثال۳۳: مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ عبارتند از: (هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) ۱ و ۰ ۲) ۶- و ۱ ۳) ۶ و ۱- ۴) ۶ و ۱

پاسخ : گزینه «۴»

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} ۵-\lambda & ۴ \\ ۱ & ۲-\lambda \end{vmatrix}=(۵-\lambda)(۲-\lambda)-۴=\lambda^۲-۷\lambda+۶=۰ \Rightarrow \lambda=۱,۶$$

مثال۳۴: به ازای چه مقدار b بردار $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} b & -۱ & ۱ \\ ۲ & -۳ & ۲ \\ ۳ & -۳ & ۴ \end{bmatrix}$ می‌باشد؟ (عمران ـ آزاد ۸۳)

۱) $b=۱$ ۲) $b=۲$ ۳) $b=-۱$ ۴) $b=۰$

پاسخ : گزینه «۲»

$$AX=\lambda X \Rightarrow \begin{bmatrix} b & -۱ & ۱ \\ ۲ & -۳ & ۲ \\ ۳ & -۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b-۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda \\ ۰ \\ -\lambda \end{bmatrix}$$

از تساوی فوق نتیجه می‌شود $\lambda=۱$ و بنابراین $b=۲$.

مثال۳۵: زاویه امتدادهای ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۳)

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\text{Arctg}۲$

پاسخ : گزینه «۳» چون ماتریس A متقارن می‌باشد، لذا بردارهای ویژه بر هم عمودند.

مثال۳۶: اگر دترمینان ماتریس A برابر ۲ باشد دترمینان ماتریس $۲A+۴(A^{-۱})^۲+A^t$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ : هیچ‌کدام از گزینه صحیح نیست. به چند دلیل مسأله اشکال دارد. اول اینکه تعداد سطر و ستون‌های ماتریس A داده نشده، ثانیاً دترمینان جمع و تفریق چند ماتریس را نمی‌توان برحسب دترمینان خود آن ماتریس‌ها پیدا کرد.

مثال۳۷: ماتریس مرتبه سوم $M=\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \delta & \sigma \\ \gamma & \sigma & \mu \end{bmatrix}$ غیر صفر فرض می‌شود که در آن درایه‌های ماتریس حقیقی هستند. کدامیک از گزینه‌های درست است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) ماتریس مذکور مقادیر ویژه‌ی حقیقی با سه بردار ویژه متعامد مستقل خطی دارد.
۲) ماتریس مقادیر ویژه حقیقی دارد اما ممکن است تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی کمتر از ۳ باشد.
۳) یک مقدار ویژه حقیقی دارد اما ممکن است دو مقدار ویژه دیگر مزدوج مختلط یکدیگر باشند.
۴) با فرض‌های مذکور در حالت کلی نمی‌توان درباره تعداد مقادیر ویژه حقیقی و نوع بردارهای ویژه اظهارنظر کرد.

پاسخ : گزینه «۱» ماتریس M یک ماتریس متقارن می‌باشد، بنابراین سه بردار ویژه متعامد مستقل خطی دارد.

مثال ۳۸: فرض کنید $A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -3 & 4 & 1\end{bmatrix}$، مقادیر ویژه‌ی ماتریس A عبارتند از: (معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) $0, 2, -2$ ۲) $0, 1, -1$ ۳) $2, -1, 1$ ۴) $2, 3, \frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۱» برای محاسبه دترمینان، حول ستون اول بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda & 3 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1\\ -3 & 4 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (-2-\lambda)((1-\lambda)(1-\lambda)-4)-3\underbrace{(3-(1-\lambda))}_{2+\lambda}=0 \Rightarrow (-2-\lambda)((1-\lambda)^2-1)=0 \Rightarrow \lambda=-2, 2, 0$$

مثال ۳۹: اگر $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ و $B^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ باشد در این صورت $-3AB$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۴)

۱) $\begin{bmatrix}9 & -3\\ -12 & 3\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}9 & 3\\ -12 & 3\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

پاسخ : گزینه «۱» نیازی به به دست آوردن ماتریس‌های A، B نمی‌باشد. توجه کنید که $|A^{-1}|=1\,,\,|B^{-1}|=-1$، بنابراین $|A|=1$ و $|B|=-1$. در نتیجه داریم:
$|-3AB|=9|A||B|=9\times1\times-1=-9$

در بین گزینه‌ها، تنها دترمینان ماتریس گزینه (۱) برابر ۹- می‌باشد.

مثال ۴۰: حاصل دترمینان $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+c\end{vmatrix}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۴)

۱) $(1+a)(1+b)(1+c)$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) abc

پاسخ : گزینه «۴»

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+c\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0 & c\end{vmatrix}=1\times a\times b\times c=abc$$

مثال ۴۱: به ازای چه مقادیری از a دستگاه $\begin{cases}x-y+az=0\\ 3x-y+2z=0\\ 6x-4y+5z=0\end{cases}$ بی‌نهایت جواب دارد؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۵)

۱) $a=-1$ ۲) $a=0$ ۳) $a=1$ ۴) $a=2$

پاسخ : گزینه «۳» شرط داشتن بی‌نهایت جواب برای یک دستگاه همگن آن است که دترمینان ضرایب برابر صفر باشد.

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ 3 & -1 & 2\\ 6 & -4 & 5\end{vmatrix}=0 \Rightarrow 1(-5+8)+1(15-12)+a(-12+6)=+3+3-6a=0 \Rightarrow a=1$$

مثال ۴۲: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -6 & -4\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & -6 & -3\end{bmatrix}$ باشد، بردار ویژه نظیر کوچکترین مقدار ویژه آن کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۵)

۱) $\begin{bmatrix}1\\ -3\\ 2\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 3\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -6 & -4\\ 0 & 4-\lambda & 2\\ 0 & -6 & -3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)((4-\lambda)(-3-\lambda)+12)=(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=0,1$$

بنابراین $\lambda=0$ کوچکترین مقدار ویژه می‌باشد. برای به دست آوردن بردار ویژه بایستی دستگاه $AX=\lambda X$ را حل کنیم.

$$AX=0 \Rightarrow \begin{cases} x-6y-4z=0 \\ 4y+2z=0 \\ -6y-3z=0 \end{cases}$$

از معادله‌ی دوم $z=-2y$ به دست می‌آید، که با جایگزینی در معادله اول $x=-2y$ به دست می‌آید، بنابراین $(-2y,y,-2y)$ و یا $(2,-1,2)$ بردار ویژه موردنظر می‌باشد.

مثال ۴۳: بردار ویژه نظیر بزرگترین مقادیر ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & -3 \end{bmatrix}$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۶)

۱) $\begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ 2a \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 0 \\ -2a \\ 3a \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2a \\ 3a \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2a \\ 3a \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» ابتدا مقادیر ویژه ماتریس را به دست می‌آوریم:

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 6 & 4 \\ 0 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & -6 & -3-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (-1-\lambda)((4-\lambda)(-3-\lambda)+12)=0 \Rightarrow \lambda=-1,0,1$$

پس $\lambda=1$ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس می‌باشد.

$$AX=\lambda X \Rightarrow \begin{cases} -x+6y+4z=x \\ 4y+2z=y \\ -6y-3z=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y-2z=0 \\ 3y+2z=0 \\ 3y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow (0,-2a,3a)$$

مثال ۴۴: اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ از رابطه $AX=A-2I$، دترمینان ماتریس X کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

با توجه به اینکه $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$، بنابراین $A-2I=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$. حال با توجه به اینکه $|A|=3\times5-2\times8=-1$ و $|A-2I|=1\times3-2\times8=-13$.

پس داریم: $AX=A-2I \Rightarrow |AX|=|A-2I| \Rightarrow |A||X|=|A-2I| \Rightarrow |X|=13$

مثال ۴۵: به ازای کدام مقدار k دستگاه معادلات $\begin{cases} 5x-3y+kz=0 \\ 3x-2y+z=0 \\ -x+y+2z=0 \end{cases}$ جواب‌های غیر صفر دارد؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۹۰)

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» دترمینان ضرایب دستگاه را برابر صفر قرار می‌دهیم در این صورت دستگاه جواب غیرصفر دارد.

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & k \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-25+21+k=0 \Rightarrow k=4$$

درسنامه۳: رتبه‌ی ماتریس

مثال۱: اگر سطرهای $A_1=[1\ \ 1\ \ 2]$، $A_2=[a\ \ 2\ \ 1]$، $A_3=[2\ \ 3\ \ 4]$ از ماتریس $A_{3\times3}$ وابسته خطی باشند، آن‌گاه a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» اگر سطرهای ماتریس A وابسته‌ی خطی باشند باید دترمینان A صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (8+3+4a)-(6a+2+8)=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

مثال۲: رتبه‌ی ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» بسیار خب! به نظر نمی‌رسد رابطه‌ی ساده‌ای بین سطرها برقرار باشد. اگر بخواهیم از هم‌اکنون سراغ دترمینان برویم، مجبور می‌شویم دترمینان ماتریس مربعِ ۴×۴ را حساب کنیم. برای فرار از این سرنوشت شوم! سعی می‌کنیم حداقل یکی از سطرها را به شکل مفهومی کنار بگذاریم. اگر سطر دوم را منهای سطر اول کنیم و سطر چهارم را منهای سطر سوم کنیم، به ماتریس مقابل می‌رسیم. پس سطر چهارم مضرب سطر دوم است. اگر سطر دوم را در ۳- ضرب کنید سطر چهارم به‌دست می‌آید. پس متوجه شدیم سطر چهارم وابسته‌ی خطی است. حالا با کنار گذاشتن آن می‌توانیم روی سه سطر بالایی تمرکز کنیم. زیرماتریس‌های مربعِ ۳×۳ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}=0 \quad , \quad \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}=0$$

بنابراین رتبه‌ی این ماتریس کمتر از ۳ است. حالا به زیرماتریس‌های ۲×۲ توجه کنید.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=-3\neq 0$$

پس مطمئن شدیم که $\text{rank}(A)=2$ است.

توجه: در این مثال اگر از این نکته استفاده کنیم که رتبه‌ی سطری با رتبه‌ی ستونی فرقی ندارد، می‌توانیم به جای سطرها روی ستون‌های A تمرکز کنیم. با یک نگاه متوجه می‌شویم که A دارای دو ستون تکراری است. بنابراین A دو ستون مستقل و دو ستون وابسته خطی دارد و در نتیجه $\text{rank}(A)=2$ است.

مثال۳: رتبه یا rank ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از روش حذفی گاوس استفاده می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\xrightarrow{(1)}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & 6 & -7 & 11 \end{bmatrix}\xrightarrow{(2)}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & -7 & 11 \end{bmatrix}\xrightarrow{(3)}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}\xrightarrow{(4)}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در مرحله دوم برای ادامه قاعده سطری ـ اشلی، سطرهای دوم و سوم را جابه‌جا کردیم، زیرا درایه $a_{22}=0$ بود. در نهایت سه سطر غیرصفر باقی می‌ماند، پس رتبه‌ی ماتریس A برابر ۳ است.

مثال ۴: اگر A یک ماتریس m در n، B یک ماتریس m در m ناتکین یا وارون‌پذیر باشد و C یک ماتریس $n\times n$ ناتکین باشد، کدام گزینه در مورد رتبه‌ی ماتریس‌ها صحیح است؟ (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) $r(AC)=r(BA)\neq r(A)$

۲) $r(BAC)\neq r(AC)=r(BA)$

۳) $r(BAC)=r(AC)=r(BA)=r(A)$

۴) $r(BAC)\neq r(AC)\neq r(A)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ماتریس‌های B و C طبق فرض وارون‌پذیرند و می‌دانیم ضرب کردن یک ماتریس وارون‌پذیر در یک ماتریس، رتبه آن ماتریس را تغییر نمی‌دهد.

درسنامه۴: بردارها در فضای سه بعدی

مثال۱: اگر $\vec{A}=(1,3,4)$ و $\vec{B}=(2,1,2)$ باشد، آن‌گاه حاصل $\vec{C}=3\vec{B}-2\vec{A}$ کدام است؟

۱) $(4,9-2)$ ۲) $(4,-3,-2)$ ۳) $(8,9,14)$ ۴) $(8,9,2)$

پاسخ: گزینه «۲» با محاسبه‌ی ضرب‌های اسکالر داده شده، داریم:
$$\vec{C}=3(2,1,2)-2(1,3,4)=(6,3,6)+(-2,-6,-8)=(4,-3,-2)$$

امتداد نیمساز دو بردار: برداری که امتداد نیمساز بردارهای غیرصفر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را نشان می‌دهد به صورت $\vec{C}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}+\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$ نوشته می‌شود. برای مثال اگر $\vec{A}=(2,2,1)$ و $\vec{B}=(0,3,4)$ باشند داریم:
$$\vec{C}=\frac{(2,2,1)}{3}+\frac{(0,3,4)}{5}=(\frac{2}{3},\frac{19}{15},\frac{17}{15})$$

مثال۲: زاویه بین دو بردار $\vec{V}_1(10,11,-2)$ و $\vec{V}_2=(3,0,4)$ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) $\text{Arc}\cos\frac{1}{3}$ ۴) $\text{Arc}\cos\frac{22}{75}$

پاسخ: گزینه «۴»
$$\cos\theta=\frac{(3\times10)+(11\times0)-(4\times2)}{\sqrt{100+121+4}.\sqrt{9+16}}=\frac{22}{15\times5}=\frac{22}{75}\Rightarrow\theta=\text{Arc}\cos(\frac{22}{75})$$

مثال۳: اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهای یکه باشند و در تساوی $|\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{b}-\vec{c}|^2+|\vec{c}-\vec{a}|^2=9$ صدق کنند، آن‌گاه مقدار $|2\vec{a}+5\vec{b}+5\vec{c}|$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱» برای هر بردار دلخواه $\vec{V}$ داریم: $|\vec{V}|^2=\vec{V}.\vec{V}$. پس تساوی $|\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{b}-\vec{c}|^2+|\vec{c}-\vec{a}|^2=9$ را می‌توان چنین نوشت:
$$(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})+(\vec{b}-\vec{c}).(\vec{b}-\vec{c})+(\vec{c}-\vec{a}).(\vec{c}-\vec{a})=9\ \Rightarrow\ \vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{c}-\vec{c}.\vec{b}+\vec{c}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{c}-\vec{a}.\vec{c}-\vec{c}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{a}=9$$

اما $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ است و $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2$. به همین ترتیب برای سایر بردارها خواهیم داشت:
$$\Rightarrow\ 2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2+2|\vec{c}|^2-2\vec{a}.\vec{b}-2\vec{b}.\vec{c}-2\vec{a}.\vec{c}=9$$

بردارهای a و b و c یکه هستند پس: $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$.
$$\Rightarrow\ 6-2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c})=9\ \Rightarrow\ \vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}=-\frac{3}{2}$$

اکنون می‌توانیم اندازه‌ی بردار خواسته شده را حساب کنیم. برای این کار ابتدا نشان می‌دهیم بردار $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ بردار صفر است:
$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}+\vec{c}.\vec{c}+2\vec{a}.\vec{b}+2\vec{a}.\vec{c}+2\vec{b}.\vec{c})$$
$$=(|a|^2+|b|^2+|c|^2+2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}))=(3+2(-\frac{3}{2}))=3-3=0$$

پس $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=0$ است یعنی $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ به این ترتیب خواهیم داشت:
$$|2\vec{a}+5\vec{b}+5\vec{c}|=|5\vec{a}+5\vec{b}+5\vec{c}-3\vec{a}|=|5(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-3\vec{a}|=|0-3\vec{a}|=|3\vec{a}|=3|\vec{a}|=3$$

مثال۴: طول تصویر بردار $\vec{A}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ بر بردار $\vec{B}=\frac{\vec{i}+\vec{k}}{\sqrt{2}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱» طبق فرمول داریم:
$$\text{Proj}_B^A=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}=\frac{(\frac{1}{\sqrt{2}}\times1)+(\frac{1}{\sqrt{2}}\times1)}{\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

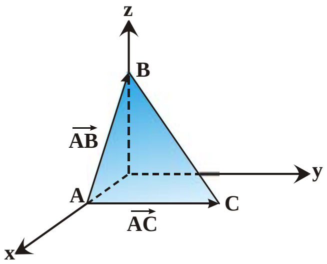
مثال۵: اگر $\vec{A}(1,-1,2)$ و $\vec{B}(2,1,3)$ باشد.آن‌گاه حاصل $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ کدام است؟

۱) $-5\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ ۲) $-5\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ ۳) $\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}$ ۴) $-\vec{i}+7\vec{j}+\vec{k}$

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از دترمینان ماتریس زیر ضرب خارجی را حساب می‌کنیم:
$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&2\\2&1&3\end{vmatrix}=[(-1\times3)-(2\times1)]\vec{i}+[(2\times2)-(3\times1)]\vec{j}+[(1\times1)-(-1\times2)]\vec{k}=-5\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$$

مثال۶: مساحت مثلثی که سه رأس آن به ترتیب $A(۲,۰,۰)$، $B(۰,۰,۲)$ و $C(۱,۲,۰)$ باشد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



پاسخ : گزینه «۳» بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ دو ضلع این مثلث هستند، آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\overrightarrow{AB}=(۰-۲,۰-۰,۲-۰)=(-۲,۰,۲)\quad,\quad \overrightarrow{AC}=(۱-۲,۲-۰,۰-۰)=(-۱,۲,۰)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-۲&۰&۲\\-۱&۲&۰\end{vmatrix}=-۴\vec{i}-۲\vec{j}-۴\vec{k}\Rightarrow|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=۶$$

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=۳$$

مثال۷: عبارت $(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})$ با کدامیک از عبارات زیر همواره برابر است؟

۱) $(\vec{A}.\vec{C}\times\vec{D})\vec{B}+(\vec{B}.\vec{C}\times\vec{D})\vec{A}$ ۲) $(\vec{A}.\vec{C}\times\vec{D})\vec{B}-(\vec{B}.\vec{C}\times\vec{D})\vec{A}$ ۳) $(\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C})\vec{D}+(\vec{D}.\vec{A}\times\vec{B})\vec{C}$ ۴) $(\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C})\vec{D}+(\vec{D}.\vec{A}\times\vec{C})\vec{C}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا فرض می‌کنیم $\vec{V}=\vec{C}\times\vec{D}$، در این صورت طبق تعریف حاصلضرب سه‌گانه داریم:

$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{V}=-\vec{V}\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{A}.\vec{V})\vec{B}-(\vec{B}.\vec{V})\vec{A}$ یا $(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}.\vec{C}\times\vec{D})\vec{B}-(\vec{B}.\vec{C}\times\vec{D})\vec{A}$

مثال۸: اگر $\vec{A}$ برداری یکه باشد، حاصل $\vec{A}\times(\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{B}))$ برابر است با:

۱) $(\vec{A}.\vec{B})\vec{A}$ ۲) $-\vec{A}\times\vec{B}$ ۳) $(\vec{A}.\vec{B})\vec{B}$ ۴) $(\vec{A}.\vec{B})(\vec{A}\times\vec{B})$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که: $\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{A}.\vec{B})\vec{A}-(\vec{A}.\vec{A})\vec{B}=(\vec{A}.\vec{B})\vec{A}-\vec{B}$

بنابراین داریم: $\vec{A}\times(\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{B}))=\vec{A}\times((\vec{A}.\vec{B})\vec{A}-\vec{B})=(\vec{A}.\vec{B})(\vec{A}\times\vec{A})-\vec{A}\times\vec{B}=(\vec{A}.\vec{B})(\vec{۰})-\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{A}\times\vec{B}$

مثال۹: بردارهای $\vec{V}_۱=(۱,۱,۲,۴)$ و $\vec{V}_۲=(۲,-۱,-۵,۲)$ و $\vec{V}_۳=(۱,-۱,-۴,۰)$ و $\vec{V}_۴=(۲,۱,۱,۶)$ در فضای برداری حقیقی $\mathbb{R}^۴$ مفروضند. $\dim<\vec{V}_۱,\vec{V}_۲,\vec{V}_۳,\vec{V}_۴>$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا ماتریسی می‌نویسیم که بردارهای داده شده، سطرهای آن باشند:

$$A=\begin{bmatrix}۱&۱&۲&۴\\۲&-۱&-۵&۲\\۱&-۱&-۴&۰\\۲&۱&۱&۶\end{bmatrix}$$

رتبه‌ی این ماتریس، نشان می‌دهد که بُعد زیرفضای تولیدشده توسط بردارهای فوق چند است؟ برای آن‌که محاسبه‌ی رتبه‌ی A ساده‌تر شود، سعی می‌کنیم با انجام اعمال سطری ـ مقدماتی برخی از درایه‌ها را صفر کنیم:

$$\begin{bmatrix}۱&۱&۲&۴\\۲&-۱&-۵&۲\\۱&-۱&-۴&۰\\۲&۱&۱&۶\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{\text{سطر چهارم، منهای دوبرابر سطر اول}\\\text{سطر سوم، منهای سطر اول}}]{\text{سطر دوم، منهای دوبرابر سطر اول}}\begin{bmatrix}۱&۱&۲&۴\\۰&-۳&-۹&-۶\\۰&-۲&-۶&-۴\\۰&-۱&-۳&-۲\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{سطر سوم، منهای }\frac{۲}{۳}\text{ برابر سطر دوم}]{\text{سطر چهارم، منهای }\frac{۱}{۳}\text{ برابر سطر دوم}}\begin{bmatrix}۱&۱&۲&۴\\۰&-۳&-۹&-۶\\۰&۰&۰&۰\\۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}$$

حالا که ماتریس، بالا مثلثی شده است، معلوم است که رتبه‌ی آن برابر با ۲ است، زیرا دو سطر غیرصفر دارد. پس $\dim<\vec{V}_۱,\vec{V}_۲,\vec{V}_۳,\vec{V}_۴>=۲$. در ضمن بردارهای $(۱,۱,۲,۴)$ و $(۰,-۳,-۹,-۶)$ که سطرهای غیرصفر A هستند، پایه‌ی این زیرفضا را به ما می‌دهند.

مثال۱۰: دستگاه همگن $\begin{cases}x_۱-x_۳+۲x_۴=۰\\۲x_۱+x_۲+x_۳-x_۴=۰\\۳x_۱+x_۲+x_۴=۰\end{cases}$ را در نظر بگیرید. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر پایه‌ای برای فضای جواب این دستگاه است؟

۱) $\{(۱,-۳,۱,۰),(-۲,۵,۰,۱)\}$ ۲) $\{(۱,۰,۱,۰),(۲,۰,۰,۱)\}$

۳) $\{(-۴,۱۰,۰,۲),(-۲,۵,۰,۱)\}$ ۴) $\{(۱,۱,۰,۱),(۱,۳,-۱,۰),(-۲,۵,۰,-۱)\}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا باید بُعد فضای جواب را پیدا کنیم تا معلوم شود که پایه‌ی جواب چند عضو دارد. ماتریس ضرایب را می‌نویسیم و روش حذفی گاوس را اجرا می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}۱&۰&-۱&۲\\۲&۱&۱&-۱\\۳&۱&۰&۱\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{سطر سوم، منهای سه‌برابر سطر اول}]{\text{سطر دوم، منهای دوبرابر سطر اول}}\begin{bmatrix}۱&۰&-۱&۲\\۰&۱&۳&-۵\\۰&۱&۳&-۵\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{سطر سوم، منهای سطر دوم}}\begin{bmatrix}۱&۰&-۱&۲\\۰&۱&۳&-۵\\۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}$$

این ماتریس دارای ۴ ستون است، اما رتبه‌ی آن ۲ است زیرا دو سطر غیرصفر دارد. بنابراین داریم: $۲ = ۲ - ۴ =$ بُعد فضای جواب دستگاه

حالا می‌دانیم که پایه‌ی این فضا باید دو عضوی باشد. هر مجموعه‌ای که شامل ۲ بردار باشد و بردارهایش مستقل خطی باشند و در این دستگاه صدق کنند، می‌تواند پایه‌ی جواب باشد. گزینه‌ی (۱) همه‌ی این ویژگی‌ها را دارد، بنابراین پایه‌ی جواب است. گزینه‌ی (۴)، سه عضوی است پس نمی‌تواند صحیح باشد. گزینه‌ی (۲) در این دستگاه صدق نمی‌کند. گزینه‌ی (۳) هم این ایراد را دارد که بردارهایش وابسته‌ی خطی هستند، زیرا یکی از آن‌ها مضرب دیگری است.

مثال ۱۱: حجم چهار وجهی به رئوس $(۱,۳,۰)$، $(۲,-۱,۳)$، $(-۲,۲,-۱)$ و $(-۱,۱,۲)$ کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

☑ **پاسخ:** هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. رئوس داده شده را به ترتیب A، B، C و D فرض می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\overline{AB} = (۱,-۴,۳)\ ,\ \overline{AC} = (-۳,-۱,-۱)\ ,\ \overline{AD} = (-۲,-۲,۲) \Rightarrow \overline{AB}.(\overline{AC}\times\overline{AD}) = \begin{vmatrix} ۱ & -۴ & ۳ \\ -۳ & -۱ & -۱ \\ -۲ & -۲ & ۲ \end{vmatrix} = -۲۴$$

بنابراین حجم چهار وجهی موردنظر برابر است با: $V = \frac{۱}{۶}|\overline{AB}.(\overline{AC}\times\overline{AD})| = \frac{۱}{۶}\times ۲۴ = ۴$

مثال ۱۲: برداری که در جهت بردار $\vec{A} = ۲\vec{i} - \vec{j} + ۲\vec{k}$ بوده و طولش برابر ۹ می‌باشد، کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۹)

۱) $۴\vec{i} - \vec{j} + ۴\vec{k}$ ۲) $۹\vec{i} - ۳\vec{j} + ۹\vec{k}$ ۳) $۶\vec{i} - ۳\vec{j} + ۶\vec{k}$ ۴) $۳\vec{i} - \vec{j} + ۳\vec{k}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» $\vec{A} = ۲\vec{i} - \vec{j} + ۲\vec{k} \Rightarrow |\vec{A}| = \sqrt{۴+۱+۴} = ۳$

چون طول بردار $\vec{A}$ برابر ۳ است، پس بردار موردنظر ۳A خواهد بود.

مثال ۱۳: مختصات بردار یکه $\vec{N}$ عمود بر دو بردار $\vec{A} = ۴\vec{i} - \vec{j} + ۳\vec{k}$ و $\vec{B} = -۲\vec{i} + \vec{j} - ۲\vec{k}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۰)

۱) $(۱,-۲,۲)$ ۲) $(\frac{۱}{۳},-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})$ ۳) $(-\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})$ ۴) $(-۱,۲,۲)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای به دست آوردن بردار عمود بر $\vec{A}$ و $\vec{B}$، کافی است $\vec{A}\times\vec{B}$ را به‌دست آوریم.

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۴ & -۱ & ۳ \\ -۲ & ۱ & -۲ \end{vmatrix} = -\vec{i} + ۲\vec{j} + ۲\vec{k} \Rightarrow \vec{N} = \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \frac{۱}{۳}(-۱,۲,۲)$$

مثال ۱۴: اگر داشته باشیم $\vec{A} = \vec{i} + \vec{j}$ و $B = ۲\vec{k}$ آن‌گاه کدام بردار، مماس بر $\vec{A}\times\vec{B}$ خواهد شد؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\vec{i} + \vec{j}$ ۲) $\vec{i} - \vec{j}$ ۳) $۲(\vec{i} - \vec{j})$ ۴) $۲(\vec{i} + \vec{j})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲ و ۳» طراح سؤال از اصطلاحِ «مماس» استفاده کرده است و به احتمال قوی منظورش «موازی» بوده است.

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{vmatrix} = ۲\vec{i} - ۲\vec{j} = ۲(\vec{i} - \vec{j})$$

بردار $۲\vec{i} - ۲\vec{j}$ و هر مضربی از آن پاسخ مسأله می‌باشد، زیرا بردارهایی که مضرب $\vec{A}\times\vec{B}$ باشند با آن موازی هستند.

مثال ۱۵: برای هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در فضا کدام رابطه همواره درست است؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\vec{a}.\vec{b} \le |\vec{a}||\vec{b}|$ ۲) $\vec{a}.\vec{b} > |\vec{a}||\vec{b}|$ ۳) $\vec{a}.\vec{b} \le \vec{a}\times\vec{b}$ ۴) $\vec{a}.\vec{b} \ge |\vec{a}||\vec{b}|$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» خاصیت ضرب داخلی: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \le |\vec{a}||\vec{b}|$

مثال ۱۶: کدام بردار عمود بر بردارهای $u = ۴\vec{i} - \vec{j} + ۳\vec{k}$ و $v = ۲\vec{i} + ۳\vec{j} - \vec{k}$ است؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $۸\vec{i} - ۳\vec{j} - ۲\vec{k}$ ۲) $۶\vec{i} - ۲\vec{j} - ۲\vec{k}$ ۳) $۶\vec{i} + ۲\vec{j} + ۲\vec{k}$ ۴) $-۸\vec{i} + ۱۰\vec{j} + ۱۴\vec{k}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» حاصل‌ضرب خارجی دو بردار، بر دو بردار اولیه عمود است، بنابراین داریم:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۴ & -۱ & ۳ \\ ۲ & ۳ & -۱ \end{vmatrix} = -۸\vec{i} + ۱۰\vec{j} + ۱۴\vec{k}$$

مثال ۱۷: اگر a و b و c سه بردار و b و c غیر موازی و $a.(b\times c)=0$، کدام گزاره درست است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) یک بردار عمود بر صفحه دو بردار دیگر است.
۲) $a=0$ یا $b=0$ یا $c=0$
۳) صفحه a و b بر صفحه b و c عمود است.
۴) یک بردار موازی صفحه دو بردار دیگر است.

پاسخ: گزینه «۴» از $a.(b\times c)=0$ نتیجه می‌شود سه بردار هم صفحه‌اند و چون b و c طبق فرض غیرموازی‌اند پس یک صفحه از آنها عبور می‌کند و چون a در همان صفحه قرار دارد پس با صفحه حاصل از آنها موازی است.

مثال ۱۸: بردارهای $\vec{A}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ و $\vec{B}=-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{C}=3\vec{i}+\vec{j}$ مفروض است. مقدار t را طوری پیدا کنید که بردار $\vec{A}+t\vec{B}$ بر بردار $\vec{C}$ عمود باشد. (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۲)

۱) $t=-5$
۲) $t=5$
۳) $t=1$
۴) $t=-1$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\vec{A}+t\vec{B}=(1-t,2+2t,3+t)\ \Rightarrow (\vec{A}+t\vec{B}).\vec{C}=3-3t+2+2t=0$$

که از معادله فوق $t=5$ به‌دست می‌آید.

مثال ۱۹: حجم متوازی‌السطوح حاصل از سه بردار $a=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$، $b=-\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ و $c=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

پاسخ: گزینه «۱»

$$\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}2&-1&1\\-1&-1&-2\\-1&1&-1\end{vmatrix}=3$$

مثال ۲۰: اگر بردار $\vec{A}+\vec{B}$ بر بردار $\vec{A}-\vec{B}$ عمود باشد داریم: (تاریخ و فلسفه علم ـ آزاد ۸۵)

۱) $|\vec{A}|=\frac{1}{2}|\vec{B}|$
۲) $|\vec{A}|=2|\vec{B}|$
۳) $|\vec{A}|=\frac{1}{3}|\vec{B}|$
۴) $|\vec{A}|=|\vec{B}|$

پاسخ: گزینه «۴» اگر بردار $\vec{A}+\vec{B}$ بر $\vec{A}-\vec{B}$ عمود باشد خواهیم داشت:

$$(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}-\vec{B})=0\ \Rightarrow \vec{A}.\vec{A}-\vec{A}.\vec{B}+\vec{B}.\vec{A}-\vec{B}.\vec{B}=0$$

حالا توجه کنید که $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$ است زیرا مقدار ضرب داخلی با جابه‌جا کردن بردارها تغییری نمی‌کند. همچنین $\vec{A}.\vec{A}=|\vec{A}|^2$ و $\vec{B}.\vec{B}=|\vec{B}|^2$ پس داریم:

$$|\vec{A}|^2-\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{B}-|\vec{B}|^2=0\ \Rightarrow |\vec{A}|^2=|\vec{B}|^2\ \Rightarrow |\vec{A}|=|\vec{B}|$$

توجه کنید که اندازه‌ی بردار هیچ‌گاه منفی نمی‌شود پس لازم نیست حالت $|\vec{A}|=-|\vec{B}|$ را در نظر بگیرید.

مثال ۲۱: نقاط C,B,A و D در یک صفحه واقع‌اند اگر: (معماری کشتی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=0$
۲) $\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=0$
۳) $\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC})=0$
۴) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=0$

پاسخ: گزینه «۳» اگر نقاط A، B، C و D در یک صفحه باشند حجم متوازی‌السطوح تشکلیل شده توسط سه بردار $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AD}$ صفر است. یعنی داریم:

$$\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC})=0$$

مثال ۲۲: فرض کنید $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ یک تبدیل خطی باشد و $T=(1,0,0)=(2,3)$ و $T(0,1,0)=(-1,4)$ و $T(0,0,1)=(5,-3)$ حاصل $T(3,-4,5)$ کدام است؟ (ریاضی محض ـ آزاد ۸۷)

۱) $(35,-22)$
۲) $(35,22)$
۳) $(22,35)$
۴) $(-22,35)$

پاسخ: گزینه «۱» طبق متن درس، تبدیل‌های خطی دارای این ویژگی هستند که $T(c_1\vec{V}_1+c_2\vec{V}+c_3\vec{V})=c_1T(\vec{V}_1)+c_2T(\vec{V}_2)+c_3T(\vec{V}_3)$.

بنابراین با انتخاب $\vec{V}_1=(1,0,0)$، $\vec{V}_2=(0,1,0)$ و $\vec{V}_3=(0,0,1)$ داریم:

$$T(3,-4,5)=T(3\vec{V}_1-4\vec{V}_2+5\vec{V}_3)=3T(\vec{V}_1)-4T(\vec{V}_2)+5T(\vec{V}_3)=3(2,3)-4(-1,4)+5(5,-3)$$
$$=(6,9)+(4,-16)+(25,-15)=(35,-22)$$

درسنامه۵: خط و صفحه در فضا

مثال۱: نقطه $A(5,4,3)$ و خط L به معادله $\frac{x}{-1}=\frac{y}{2}=z$ مفروضند. از نقطه A خطی عمود بر L رسم شده است. معادله خط عمود کدام است؟

۱) $\frac{x+1}{6}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{2}$ ۲) $\frac{x+1}{-6}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{2}$ ۳) $\frac{x+1}{6}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{-2}$ ۴) $\frac{x+1}{-6}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» نقطه دلخواه $B(-t,2t,t)$ را روی خط L در نظر می‌گیریم. چون می‌خواهیم $\overrightarrow{AB}$ بر خط L عمود باشد، پس باید ضرب داخلی بردار AB و بردار هادی خط برابر صفر باشد.

$$\underbrace{(-1,2,1)}_{\text{بردار هادی}}\underbrace{(5+t,4-2t,3-t)}_{\text{بردار } AB}=-5-t+8-4t+3-t=0\Rightarrow t=1$$

یعنی نقطه $B=(-1,2,1)$ می‌باشد، و در این صورت بردار $\overrightarrow{AB}=(6,2,2)$ می‌باشد و بنابراین معادله خط $\frac{x+1}{6}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{2}$ است.

مثال۲: فاصله‌ی دو خط موازی $D_1:\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-2}$ و $D_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{-2}$، چقدر است؟

۱) $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ ۲) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ۴) $5\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۳» نقطه $P(0,2,3)$ روی خط D_1 قرار دارد. کافی است فاصله این نقطه را تا خط D_2 به‌دست آوریم. نقطه $Q(1,-1,2)$ روی خط D_2 قرار دارد. فاصله موردنظر برابر $\frac{|\overrightarrow{PQ}\times\vec{V}|}{|\vec{V}|}$ است که در آن $\vec{V}$ بردار هادی خط D_2 است.

$$PQ=(1,-3,-1)\Rightarrow\overrightarrow{PQ}\times\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-3&-1\\2&-1&-2\end{vmatrix}=(5,0,5)$$

$$\text{فاصله}=\frac{|\overrightarrow{PQ}\times\vec{V}|}{|\vec{V}|}=\frac{\sqrt{25+0+25}}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$$

مثال۳: بر خط L به معادله‌ی $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z-2$، چند نقطه هستند که فاصله‌شان از صفحه‌ی $2x+2y-z+3=0$، برابر با ۴ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۲» خط L را به صورت پارامتری $x=2t+1, y=3t, z=t+2$ می‌نویسیم. در این صورت نقطه $A(2t+1,3t,t+2)$ روی خط قرار دارد و فاصله آن تا صفحه موردنظر برابر است با:

$$\frac{|2(2t+1)+2(3t)-(t+2)+3|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=4\Rightarrow\left|\frac{9t+3}{3}\right|=4\Rightarrow|3t+1|=4$$

از حل معادله فوق $t=1$ و $t=\frac{-5}{3}$ به‌دست می‌آید. پس دو نقطه با این ویژگی، روی خط وجود دارد.

مثال۴: اگر نقطه $(1,0,-1)$ مرکز یک مکعب و صفحه $x-2y+2z=3$ یکی از وجوه آن باشد، حجم مکعب چقدر است؟

۱) $\frac{8}{27}$ ۲) $\frac{64}{27}$ ۳) $\frac{512}{27}$ ۴) $\frac{27}{8}$

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا فاصله نقطه داده شده را از صفحه موردنظر به دست می‌آوریم:

$$d=\frac{|1\times1+(-2)\times0+2(-1)-3|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{4}{3}$$

و با توجه به آنکه فاصله مرکز مکعب از هر یک از وجوه آن، نصف طول یال مکعب است، بنابراین هر یال این مکعب به طول $2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$ بوده و حجم مکعب برابر است با:

$$V=(2\times\frac{4}{3})^3=\frac{512}{27}$$

مثال۵: اگر دو صفحه‌ی $P:(2-a)x+y-2z=2$ و $P':2x+(b+1)y-2z=1$ با هم موازی باشند، آن‌گاه حاصل $\frac{2a-b+3}{3}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) $\frac{14}{3}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴»

$$\frac{2-a}{2}=\frac{1}{b+1}=\frac{-2}{-2}\Rightarrow\begin{cases}b+1=1\\2-a=2\end{cases}\Rightarrow a=b=0\Rightarrow\frac{2a-b+3}{3}=\frac{3}{3}=1$$

مثال۶: فاصله‌ی بین صفحه P به معادله‌ی $3x-y+2z=4$ از صفحه‌ای که از نقطه‌ی $A(1,2,-3)$ عبور می‌کند و با صفحه‌ی P موازی است، چقدر است؟

۱) $\frac{4}{\sqrt{14}}$ ۲) $\frac{2}{\sqrt{14}}$ ۳) $\frac{3}{\sqrt{14}}$ ۴) $\frac{9}{\sqrt{14}}$

پاسخ: گزینه «۴» صفحه‌ی دوم را که از نقطه‌ی A می‌گذرد و با صفحه‌ی P موازی است، با P' نشان می‌دهیم. از آنجا که صفحات P و P' با هم موازی هستند و A نقطه‌ای روی P' است، اگر فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P را حساب کنیم، همین عدد، فاصله‌ی صفحه‌ی P' از صفحه‌ی P را نشان می‌دهد. برای محاسبه‌ی فاصله‌ی نقطه $A(x_0,y_0,z_0)$ از صفحه $P:ax+by+cz+d=0$ فرمول زیر را داریم:

$$h=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

در این مثال $A:(x_0,y_0,z_0)=(1,2,-3)$ است و معادله‌ی صفحه‌ی P به صورت $3x-y+2z-4=0$ داده شده است. پس داریم:

$$\Rightarrow h=\frac{|3(1)-1(2)+2(-3)-4|}{\sqrt{9+1+4}}=\frac{9}{\sqrt{14}}$$

مثال۷: خط به معادله $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$، صفحه به معادله $x+y+z=15$ را در نقطه (x_0,y_0,z_0) قطع کرده است. x_0 کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۴» نقطه برخورد خط و صفحه روی هر دو آنها واقع است، بنابراین داریم:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}\Rightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\ ,\ z=2x+1$$

با جایگذاری در معادله صفحه خواهیم داشت:

$$x+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}+2x+1=15\Rightarrow x=3$$

مثال۸: معادله‌ی خطی که از نقطه $p(-4,3,1)$ عبور کرده و موازی با صفحه $x+2y-z+1=0$ باشد و خط $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-2}{-2}$ را قطع کند، کدام است؟

۱) $\frac{x+4}{9}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{5}$ ۲) $\frac{x+4}{-9}=\frac{y-3}{-2}=\frac{2(z-1)}{5}$ ۳) $\frac{x+4}{-9}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{5}$ ۴) $\frac{x+4}{9}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{5}$

پاسخ: گزینه «۴» معادله‌ی پارامتری خط داده شده را می‌نویسیم:

$$\frac{x+1}{-3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-2}{-2}=t\Rightarrow x=-3t-1\ ,\ y=2t+5\ ,\ z=-2t+2$$

اکنون نقطه دلخواه $Q(-3t-1,2t+5,-2t+2)$ را روی خط در نظر می‌گیریم.

در این صورت $\overrightarrow{PQ}(-3t+3,2t+2,-2t+1)$ بر بردار نرمال صفحه یعنی $(1,2,-1)$ باید عمود باشد.

$$(1,2,-1).(-3t+3,2t+2,-2t+1)=0\Rightarrow -3t+3+4t+4+2t-1=0\Rightarrow t=-2$$

به ازای $t=-2$ داریم $\overrightarrow{PQ}(9,-2,5)$ و معادله خط به صورت $\frac{x+4}{9}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{5}$ در می‌آید.

مثال۹: اگر نقطه‌ی $A(a,b,c)$ روی فصل مشترک سه صفحه‌ی زیر قرار داشته باشد، آن‌گاه مقدار «$2a+b^2+4c$» کدام است؟

$P_1=x-y+3z=3\ ,\ P_2:3x+y+5z=7\ ,\ P_3:3x+y+z=5$

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینه «۱» برای به‌دست آوردن نقطه‌ی $A(a,b,c)$ که روی فصل مشترک سه صفحه قرار دارد کافی است دستگاه معادلات صفحات را حل کنیم. می‌توان این دستگاه را با استفاده از ماتریس افزوده دستگاه و اعمال سطری ـ اشلی ساده‌تر کرد.

$$\begin{cases}x-y+3z=3\\3x+y+5z=7\\3x+y+z=5\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&3&3\\3&1&5&7\\3&1&1&5\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&3&3\\0&4&-4&-2\\0&4&-8&-4\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&3&3\\0&4&-4&-2\\0&0&-4&-2\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}x-y+3z=3 & (1)\\4y-4z=-2 & (2)\\-4z=-2\Rightarrow z=\frac{1}{2}\xrightarrow{(2)}y=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)}x-0+\frac{3}{2}=3\Rightarrow x=\frac{3}{2}\Rightarrow A(\frac{3}{2},0,\frac{1}{2})\Rightarrow 2a+b^2+4c=3+0+2=5$$

مثال ۱۰: فاصله‌ی نقطه (۱- و ۳ و ۱-) از خط به معادله $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» نقطه $A(1,1,0)$ روی خط قرار دارد.

$$\overrightarrow{AB} = (-2,2,-1) \Rightarrow AB \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2,0,-4) \Rightarrow d = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{4+0+16}}{\sqrt{4+0+1}} = 2$$

مثال ۱۱: فاصله عمودی بین دو صفحه به معادله‌های $4x-8y-z+9=0$ و $4x-8y-z=6$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$d = \frac{|-6-9|}{\sqrt{4^2+(-8)^2+(-1)^2}} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

مثال ۱۲: فاصله نقطه $(-1,3,-1)$ از خط $\begin{cases} x-2z=7 \\ y=1 \end{cases}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{2}{5}\sqrt{35}$ ۲) $\frac{3}{5}\sqrt{35}$ ۳) $\frac{3}{5}\sqrt{70}$ ۴) $\frac{2}{5}\sqrt{70}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» می‌دانیم فاصله نقطه دلخواه P_0 از خط d از فرمول روبرو به دست می‌آید: $\text{فاصله} = \frac{|PP_0 \times u|}{|u|}$

که در آن P نقطه دلخواهی روی خط می‌باشد.

نقطه $P(3,1,-2)$ روی خط داده شده قرار دارد و $u(2,0,1)$ بردارهای خط می‌باشد، بنابراین داریم:

$$PP_0 = (-4,2,1) \Rightarrow PP_0 \times u = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2,6,-4) \Rightarrow \text{فاصله} = \frac{|PP_0 \times u|}{|u|} = \frac{\sqrt{4+36+16}}{\sqrt{4+1}} = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{70}}{5}$$

مثال ۱۳: معادله‌ی صفحه‌ای که از نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}1\\2\\3\end{vmatrix}$ می‌گذرد و به بردار $V=(1,-1,3)$ عمود می‌باشد کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $x+y+3z=1$ ۲) $x-y+3z=6$ ۳) $x-y+3z=8$ ۴) $2x-y+3z=9$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$1\times(x-1)-1\times(y-2)+3(z-3)=0 \Rightarrow x-y+3z=8$$

مثال ۱۴: خط L که معادلاتش عبارتند از $y-2z=0$ و $x-2z-3=0$، صفحه $x+3y-z+4=0$ را در نقطه P قطع می‌کند. معادله خطی را که در این صفحه بر نقطه P می‌گذرد و بر L عمود است به دست آورید. (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{2}$ ۲) $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-9}{2}$ ۳) $\frac{x-2}{-5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-9}{2}$ ۴) $\frac{x-1}{-5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» بردار هادی خط موردنظر برابر حاصل‌ضرب خارجی بردار هادی خط L و بردار نرمال صفحه می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (\frac{-5}{2}, \frac{3}{2}, 2) = \frac{1}{2}(-5,3,4)$$

توجه کنید که با همین بردار نرمال نیز می‌توان جواب درست را تشخیص داد، زیرا تنها خطی که بردار نرمال آن موازی $\vec{u}$ است گزینه‌ی (۴) می‌باشد.

برای به دست آوردن نقطه P دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x+3y-z+4=0 \\ y-2z=0 \\ x-2z-3=0 \end{cases} \Rightarrow y=2z\,,\ x=2z+3 \xrightarrow{\text{جایگزینی در معادله اول}} 2z+3+6z-z+4=0 \Rightarrow z=-1\,,\ y=-2\,,\ x=1 \Rightarrow P(1,-2,-1)$$

بنابراین معادله خط موردنظر به صورت روبرو است: $\frac{x-1}{-5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{4}$

مثال ۱۵: دو خط متنافر L_1 و L_2 در فضا مفروض است. خط L_1 از نقطه (۱,۰,۱) می گذرد و با بردار (۱,۲,۱) موازی است. خط L_2 از نقطه (۲,۱,۴) می‌گذرد و با بردار (۱,۱-,۱) موازی است. کوتاهترین فاصله بین این دو خط در فضا برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۱)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌نهایت

پاسخ: هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. می‌دانیم فاصله بین دو خط متنافر که نقاط A و B روی آنها قرار دارند $\vec{v}$ و $\vec{v}'$ بردارهای هادی آنها می‌باشند، از فرمول روبرو به دست می‌آید:

$$d=\frac{|\overrightarrow{AB}.(\vec{v}\times\vec{v}')|}{|\vec{v}\times\vec{v}'|}$$

$$\vec{v}\times\vec{v}'=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۱&۲&۱\\ ۱&-۱&۱\end{vmatrix}=(۳,۰,-۳)\quad,\quad AB=(۱,۱,۳)\ \Rightarrow d=\frac{|۳\times۱+۰\times۱-۳\times۳|}{\sqrt{۹+۰+۹}}=\frac{۶}{\sqrt{۱۸}}=\sqrt{۲}$$

مثال ۱۶: دو خط $\begin{cases}z=۱\\ ۲x+y=۲\end{cases}$ و $\begin{cases}x+۲y=-۱\\ ۳y+z=۱\end{cases}$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) متقاطع هستند. ۲) موازی هستند. ۳) متنافر هستند. ۴) برهم منطبق هستند.

پاسخ: گزینه «۳» دو خط موازی نیستند زیرا بردارهای هادی آنها با هم موازی نیست.

حال به بررسی متقاطع یا متنافر بودن دو خط می‌پردازیم. اگر دو خط متقاطع باشند، لازم است دستگاه زیر جواب داشته باشد.

$$\begin{cases}z=۱\\ ۲x+y=۲\\ x+۲y=-۱\\ ۳y+z=۱\ \xrightarrow{z=۱} y=۰\ \Rightarrow x=۱\ ,\ x=-۱\end{cases}$$

چون دو مقدار مختلف برای x به دست می‌آید، پس نقطه تقاطع وجود ندارد.

مثال ۱۷: معادله صفحه‌ای که شامل محل تقاطع دو صفحه $۳x-۲y+۴z=۵$ و $۲x+۴y-z=۷$ بوده و از نقطه (۲,۱,۲) بگذرد، کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۲)

۱) $۱۷x+۲۶y-۳z+۵۴=۰$ ۲) $۵x+۲y+۳z-۱۸=۰$ ۳) $۱۷x+۲۶y-۳z-۵۴=۰$ ۴) $۱۳x+۱۸y-z-۴۲=۰$

پاسخ: گزینه «۳»

روش اول: صفحه‌ای که از فصل مشترک دو صفحه‌ی $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=۰\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=۰\end{cases}$ می‌گذرد، باید در معادله‌ای به این صورت صدق کند:

$$(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+k(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=۰$$

$$۲x+۴y-z-۷+k(۳x-۲y+۴z-۵)=۰\ \Rightarrow(۳k+۲)+(-۲k+۴)y+(۴k-۱)z-۵k-۷=۰\ (*)$$

این صفحه طبق صورت سؤال از نقطه (۲,۱,۲) نیز می‌گذرد، پس داریم:

$$(۳k+۲)(۲)+(-۲k+۴)(۱)+(۴k-۱)(۲)-۵k-۷=۰\ \Rightarrow k=\frac{۱}{۷}$$

با جایگذاری $k=\frac{۱}{۷}$ در معادله (*) خواهیم داشت:

$$۱۷x+۲۶y-۳z-۵۴=۰$$

روش دوم (تستی): نقطه (۳,۰,۱-) در محل تلاقی دو صفحه قرار دارد، در بین گزینه‌ها، تنها گزینه‌ای که نقطه (۳,۰,۱-) در آن صدق می‌کند، گزینه (۳) می‌باشد.

مثال ۱۸: فاصله دو صفحه موازی $\begin{cases}P_1: x-y+۲z+۱=۰\\ P_2: ۲x-۲y+۴z+۶=۰\end{cases}$ را به دست آورید. (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۹}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۳»

$$P_1: x-y+۲z+۱=۰\ ,\ P_2: x-y+۲z+۳=۰$$

$$d=\frac{|۱-۳|}{\sqrt{۱+۱+۴}}=\frac{۲}{\sqrt{۶}}=\frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

مثال ۱۹: معادله خط گذرنده از مبدأ مختصات و موازی صفحه $x+y-z=0$ و عمود بر خط $x=2y=z+1$ از کدام نقطه زیر می‌گذرد؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۳)

۱) $(1,2,3)$ ۲) $(3,-2,1)$ ۳) $(3,-4,-1)$ ۴) $(-3,4,1)$

پاسخ: گزینه «۳ و ۴» بردار هادی خط موردنظر برابر حاصل‌ضرب خارجی بردار نرمال صفحه و بردار هادی خط داده شده می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & \frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}=(\frac{3}{2},-2,\frac{-1}{2})$$

در نتیجه معادله خط موردنظر به صورت روبرو می‌باشد:

$$\frac{x}{\frac{3}{2}}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{\frac{-1}{2}}\Rightarrow\frac{2x}{3}=\frac{y}{-2}=-2z$$

می‌توان ملاحظه کرد هر دو نقطه $(3,-4,-1)$ و $(-3,4,1)$ در معادله فوق صدق می‌کند.

مثال ۲۰: صفحه گذرنده بر خط به معادله $z=\frac{y+1}{-1}=\frac{x-1}{2}$ و نقطه (۱ و ۱ و ۲) محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» نقطه $A(1,-1,0)$ روی خط داده شده قرار دارد و بنابراین روی صفحه موردنظر قرار دارد از طرفی نقطه $B(2,1,1)$ نیز طبق فرض روی صفحه موردنظر واقع است، بنابراین بردار $\overrightarrow{AB}=(1,2,1)$ روی صفحه قرار دارد. از طرفی بردار هادی خط داده شده یعنی $\vec{V}(2,-1,1)$ نیز در صفحه واقع است. بنابراین بردار نرمال صفحه برابر است با:

$$\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=3\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k}$$

پس معادله صفحه موردنظر به صورت روبرو است:

$$3(x-2)+1\times(y-1)-5(z-1)=0\Rightarrow 3x+y-5z=2$$

در نقطه تقاطع با محور x ها، $y=z=0$ بنابراین $x=\frac{2}{3}$.

مثال ۲۱: خط به معادله $\begin{cases}x+2y=1\\ 2y-z=2\end{cases}$ موازی صفحه‌ی $x+my+(m-1)z=1$ است. m کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه «۲» برای اینکه خط موازی صفحه باشد، باید بردار هادی خط بر بردار نرمال صفحه عمود باشد. $\vec{u}=(-2,1,2)\ ,\ \vec{N}=(1,m,m-1)$

$$\vec{u}.\vec{N}=0\Rightarrow -2+m+2(m-1)=0\Rightarrow m=\frac{4}{3}$$

مثال ۲۲: خط به معادله $\frac{z-3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{x-1}{2}$ صفحه $x+y+z=15$ را در نقطه (x_0,y_0,z_0) قطع کرده است. مقدار x_0 چقدر است؟ (معدن ـ سراسری ۸۹)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ: گزینه «۲» معادله پارامتری خط داده شده به صورت $\begin{cases}x=2t+1\\ y=3t+2\\ z=4t+3\end{cases}$ است که با جایگزینی در معادله صفحه نتیجه می‌شود:

$$2t+1+3t+2+4t+3=15\Rightarrow 9t=9\Rightarrow t=1\Rightarrow x=3,y=5,z=7$$

مثال ۲۳: فاصله بین مبدأ و فصل مشترک صفحات $x+2y-z-5=0$ و $x-y+z-3=0$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\sqrt{51}}{2}$ ۲) $\sqrt{51}$ ۳) $\frac{51}{4}$ ۴) $\frac{51}{2}$

پاسخ: هیچ‌کدام از گزینه‌های صحیح نیست.

روش اول: فرض کنیم (x,y,z) یک نقطه دلخواه روی فصل مشترک دو صفحه باشد. پس فاصله این نقطه تا مبدأ برابر است با $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ برای یافتن فاصله مبدأ تا فصل مشترک دو صفحه باید حداقل مقدار $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ را محاسبه کنیم. برای این منظور این عبارت را بر حسب یک متغیر می‌نویسیم. با استفاده از معادلات دو صفحه نتایج زیر به دست می‌آید:

$$\left.\begin{matrix} x-y+z-۳=۰ \\ x+۲y-z-۵=۰\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} ۲x+y-۸=۰ \\ ۳y-۲z-۲=۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۸-y}{۲}=۴-\frac{y}{۲} \\ z=\frac{۳y-۲}{۲}=\frac{۳}{۲}y-۱\end{cases} \Rightarrow d=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=\sqrt{(۴-\frac{y}{۲})^۲+y^۲+(\frac{۳}{۲}y-۱)^۲}$$

برای یافتن حداقل مقدار عبارت فوق می‌بایست نقطه مینیمم آن را بیابیم:

$$d'=\frac{-(۴-\frac{y}{۲})+۲y+۳(\frac{۳}{۲}y-۱)}{۲\sqrt{(۴-\frac{y}{۲})^۲+y^۲+(\frac{۳}{۲}y-۱)^۲}}=۰ \Rightarrow \frac{y}{۲}+۲y+\frac{۹}{۲}y=۷ \rightarrow y=۱ \Rightarrow d=\sqrt{(۴-\frac{۱}{۲})^۲+۱+(\frac{۳}{۲}-۱)^۲}=\sqrt{\frac{۵۴}{۴}}=\frac{\sqrt{۵۴}}{۲}$$

روش دوم: می‌دانیم فصل مشترک دو صفحه یک خط می‌باشد که بردار هادی آن خط برابر حاصل‌ضرب خارجی بردارهای نرمال دو صفحه است، بنابراین:

$$\text{بردار هادی فصل مشترک}: \vec{V}=\vec{N}_۱\times\vec{N}_۲=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱\end{vmatrix}=\vec{i}-۲\vec{j}-۳\vec{k}$$

نقطه $A(۴,۰,-۱)$ در هر دو صفحه قرار دارد، پس روی فصل مشترک دو صفحه قرار دارد، بنابراین معادله فصل مشترک دو صفحه به صورت $\frac{x-۴}{۱}=\frac{y}{-۲}=\frac{y+۱}{-۳}$ است. فاصله مبدأ مختصات از این خط برابر $\frac{|\overrightarrow{OA}\times\vec{V}|}{|\vec{V}|}$ می‌باشد.

$$\overrightarrow{OA}\times\vec{V}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۴ & ۰ & -۱ \\ ۱ & -۲ & -۳\end{vmatrix}=-۲\vec{i}+۱۱\vec{j}-۸\vec{k} \Rightarrow \text{فاصله}=\frac{|\overrightarrow{OA}\times\vec{V}|}{|\vec{V}|}=\frac{\sqrt{۴+۱۲۱+۶۴}}{\sqrt{۱+۴+۹}}=\frac{\sqrt{۱۸۹}}{\sqrt{۱۴}}=\frac{\sqrt{۵۴}}{۲}$$

مثال ۲۴: **مکان هندسی نقاطی که از نقطه $(۰,۰,c)$ و صفحه $z=-c$ به یک فاصله‌اند عبارت است از:** (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۰)

۱) $x^۲-y^۲+۲z^۲=۲c^۲+۲cz$
۲) $x^۲+y^۲+۲z^۲=c^۲+۴cz$
۳) $x^۲-y^۲=۲cz$
۴) $x^۲+y^۲=۴cz$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» نقاط مربوط به مکان هندسی موردنظر را (x,y,z) در نظر می‌گیریم:

$$\text{فاصله نقاط } (x,y,z) \text{ از نقطه } (۰,۰,c)=\sqrt{(x-۰)^۲+(y-۰)^۲+(z-c)^۲}$$

$$\text{فاصله نقاط } (x,y,z) \text{ از صفحه } z=-c \;=z+c$$

عبارات فوق را مساوی قرار می‌دهیم. بنابراین داریم: $\sqrt{x^۲+y^۲+(z-c)^۲}=z+c \Rightarrow x^۲+y^۲+z^۲-۲cz+c^۲=z^۲+۲cz+c^۲ \Rightarrow x^۲+y^۲=۴cz$

مثال ۲۵: **برای چه مقدار پارامتر m، خط $۳x=۲y=z$ روی صفحه $mx+y+z=۰$ قرار می‌گیرد؟** (آمار ـ سراسری ۹۰)

۱) -۹
۲) $-\frac{۹}{۲}$
۳) $\frac{۹}{۲}$
۴) ۹

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

روش اول: برای اینکه خط $۳x=۲y=z$ روی صفحه $mx+y+z=۰$ قرار گیرد باید موازی با صفحه $mx+y+z=۰$ باشد و همچنین خط و صفحه با هم تلاقی داشته باشند. لذا بردار هادی خط مذکور $(\vec{U})$ بر بردار نرمال صفحه $(\vec{N})$ عمود است. ضمناً معادله خط را به صورت استاندارد (فرم متقارن) می‌نویسیم:

$$۳x=۲y=z \longrightarrow \frac{۳x}{۶}=\frac{۲y}{۶}=\frac{z}{۶} \Rightarrow \frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶} \Rightarrow \vec{U}=(۲,۳,۶) \text{ بردار هادی خط}$$

از طرفی بردار نرمال صفحه برابر است با: $\vec{N}=(m,۱,۱)$

چون $\vec{U}$ بر $\vec{N}$ عمود است پس $\vec{U}\cdot\vec{N}=۰$

$$(۲,۳,۶)\cdot\overbrace{(m,۱,۱)}^{\vec{N}}=۰ \Rightarrow ۲m+۳(۱)+۶(۱)=۰ \Rightarrow m=-\frac{۹}{۲}$$

روش دوم: همانطور که در بالا بیان شد برای اینکه خط بر روی صفحه قرار گیرد باید خط و صفحه با هم تلاقی داشته باشند، بنابراین داریم:

$$۳x=۲y=z \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{z}{۳} \\ y=\frac{z}{۲}\end{cases}$$

با قرار دادن معادله خط در صفحه داریم: $mx+y+z=\frac{mz}{۳}+\frac{z}{۲}+z=۰ \Rightarrow \frac{m}{۳}=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow m=-\frac{۹}{۲}$

مدرسان شریف

فصل دوم

«رویه‌ها، خم‌ها و توابع برداری»

درسنامه: انواع رویه‌ها در فضای سه بعدی

مثال ۱: معادله رویه‌ای که از دوران منحنی $x^{\frac{۳}{۲}}+y^{\frac{۳}{۲}}=۱$ حول محور xها پدید می‌آید، کدام است؟

۱) $x^{\frac{۳}{۲}}+y^{\frac{۳}{۲}}+z^{\frac{۳}{۲}}=۱$　　۲) $x^{\frac{۳}{۲}}+(y^۲+z^۲)^{\frac{۳}{۴}}=۱$　　۳) $(x^۲+z^۲)^{\frac{۳}{۴}}+y^{\frac{۳}{۲}}=۱$　　۴) $x^۳+y^۳+z^۳=۱$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» متغیرهای فعلی x و y هستند. پس از دوران در معادله‌ی رویه متغیر جدید z نیز ظاهر خواهد شد. دوران حول محور x انجام می‌شود. بنابراین با متغیر x کاری نداریم اما به جای y باید $\sqrt{y^۲+z^۲}$ را قرار بدهیم:

$$x^{\frac{۳}{۲}}+y^{\frac{۳}{۲}}=۱\Rightarrow x^{\frac{۳}{۲}}+(\sqrt{y^۲+z^۲})^{\frac{۳}{۲}}=۱\Rightarrow x^{\frac{۳}{۲}}+(y^۲+z^۲)^{\frac{۳}{۴}}=۱$$

مثال ۲: نمودار به معادله $۲z^۲-y^۲-x^۲=۱$ در فضا کدام است؟

۱) هذلولی‌وار یک‌پارچه　　۲) هذلولی‌وار دوپارچه　　۳) سهمی‌وار یک‌پارچه　　۴) مخروط

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با قرار دادن $x=۰$ در معادله‌ی رویه به $۲z^۲-y^۲=۱$ می‌رسیم که هذلولی است. همچنین با قرار دادن $y=۰$ در معادله به $۲z^۲-x^۲=۱$ می‌رسیم که هذلولی است. پس این رویه یک هذلولی‌وار (هذلولی‌گون) است. همان‌طور که در متن درس توضیح داده شده است، وقتی ثابت سمت راست معادله مثبت باشد، تعداد منفی‌ها در سمت چپ تساوی، چند تکه بودن رویه را نشان می‌دهد. در این مثال $۲z^۲-y^۲-x^۲=۱$ دارای دو جمله‌ی منفی در سمت چپ است پس هذلولی‌وار دو پارچه است. در مورد گزینه (۴) دقت کنید که در معادله‌ی مخروط اگر $x=۰$ یا $y=۰$ قرار دهید باید دو خط متقاطع به‌دست آید. در حالی که در این معادله وقتی $x=۰$ قرار می‌دهیم هذلولی به‌دست می‌آید. در مورد گزینه‌ی (۳) دقت کنید که در سهمی‌وار هذلولی وقتی $x=۰$ و $y=۰$ قرار می‌دهیم باید سهمی به‌دست آید اما در این معادله چه $x=۰$ و چه $y=۰$ هر دو به معادله‌ی هذلولی می‌رسند. پس رویه‌ی داده شده هذلولی‌وار است.

مثال ۳: معادله $z^۲=xy$ مربوط به کدام‌یک از اشکال زیر است؟

۱) مخروط　　۲) سهمی‌گون　　۳) استوانه　　۴) هذلولی‌گون

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا معادله را به‌صورت $۲z^۲-۲xy=۰$ می‌نویسیم، ماتریس مربوط به این معادله به‌صورت $A=\begin{bmatrix}۰&-۱&۰\\-۱&۰&۰\\۰&۰&۲\end{bmatrix}$ است، مقادیر ویژه A را به‌دست می‌آوریم.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda&-۱&۰\\-۱&-\lambda&۰\\۰&۰&۲-\lambda\end{vmatrix}=(۲-\lambda)(\lambda^۲-۱)=۰\Rightarrow\lambda=۲\,,۱\,,-۱$$

اگر مختصات جدید را $Y=\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}$ در نظر بگیریم، معادله به‌صورت $2x'^2+y'^2-z'^2=0$ درمی‌آید. یعنی $z'^2=2x'^2+y'^2$ که مربوط به یک مخروط است.

توجه کنید که نمی‌توانیم با اطمینان بگوییم که کدام مقدار ویژه در x'^2، کدام در y'^2 و کدام‌یک در z'^2 ضرب می‌شود. این بستگی به نحوه‌ی نامگذاری محورها در دستگاه جدید دارد. در این مثال اگر بگوییم معادله به‌صورت $x'^2+2y'^2-z'^2=0$ در می‌آید جمله‌ی نادرستی نگفته‌ایم. البته در هر صورت یک مخروط به‌دست خواهد آمد.

مثال۴: منحنی $\begin{cases}xz=1\\y=0\end{cases}$ هادی یک استوانه است، معادله‌ی استوانه کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) $xz=1$ ۲) $x^2z^2=1$ ۳) $x+z=1$ ۴) $x^2+z^2=1$

پاسخ: گزینه «۱» استوانه یک منحنی است که یکی از مؤلفه‌های آن بدون قید و محدودیت می‌باشد. معادله‌ی یک استوانه، مانند معادله‌ی هادی آن است، فقط به جای صفحه در فضا رسم می‌شود. پس معادله‌ی استوانه به‌صورت $xz=1$ است، فقط شرط $y=0$ از آن برداشته می‌شود.

مثال۵: کدام معادله معرف یک مخروط است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۴)

۱) $x^2+y^2=z^2$ ۲) $y^4=x^3+z^2$ ۳) $x^2-2xy+y^2=z$ ۴) $x^2+y^2+z^2=1$

پاسخ: گزینه «۱» اگر در معادله‌ی مخروط $x=0$ یا $y=0$ قرار دهیم باید دو خط متقاطع به‌دست بیاید. در گزینه‌ی (۱) وقتی $x=0$ قرار می‌دهیم $z=\pm y$ به‌دست می‌آید.

مثال۶: کدام معادله معرف یک رویه دوار است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۷)

۱) $z=2y^4+y$ ۲) $\frac{x^3}{4}+\frac{y^2}{5}=1$ ۳) $z^2+x^2-2y^2=y$ ۴) $z=2(x^2+y^2)^2+\sqrt{x^2+y^2}$

پاسخ: گزینه «۳ و ۴» در گزینه‌ی (۴) عبارت x^2+y^2 تکرار شده است. اگر منحنی $z=2x^4+x$ را حول محور z دوران دهیم به رویه‌ی دوار زیر می‌رسیم:

$$z=2(\sqrt{x^2+y^2})^4+\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow z=2(x^2+y^2)^2+\sqrt{x^2+y^2}$$

اما گزینه‌ی (۳) نیز شامل عبارت x^2+z^2 است. اگر منحنی $x^2-2y^2=y$ را حول محور y دوران دهیم. به رویه‌ی دوار زیر می‌رسیم:

$$(\sqrt{x^2+z^2})^2-2y^2=y\Rightarrow x^2+z^2-2y^2=y$$

بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) هر دو صحیح هستند.

درسنامه۲: منحنی‌های پارامتری و تعریف توابع برداری

مثال۱: تابع $f: R \to R^3$ با ضابطه $\vec{F}(t) = \frac{\cos 2t}{\sin 4t}\vec{i} + \sin t\vec{j} + \frac{\sin t}{2\cos t}\vec{k}$ مفروض است، حد تابع در نقطه $t_0 = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) حد موجود نیست. ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}(i + \vec{j} + k)$ ۳) $\frac{1}{2}(\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + \vec{k})$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}} \vec{F}(t)$ باید از همه‌ی مؤلفه‌های $\vec{F}(t)$ حد بگیریم:

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \vec{F}(t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2t}{\sin 4t}\vec{i} + \lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \sin t\vec{j} + \lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{2\cos t}\vec{k}$$

در اولین مؤلفه، حالت مبهم $\frac{0}{0}$ ایجاد می‌شود، پس از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2t}{\sin 4t} = \lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \frac{-2\sin 2t}{4\cos 4t} = \frac{1}{2}$$

در سایر مؤلفه‌ها حالت مبهم ایجاد نمی‌شود و مقدار حد معلوم است.

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \vec{F}(t) = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + \vec{k})$$

مثال۲: ذره‌ای روی منحنی با معادله‌ی $\vec{R}(t) = \vec{i} - 4t^2\vec{j} + 3t^2\vec{k}$ حرکت می‌کند، اندازه‌ی سرعت و شتاب ذره به ترتیب کدام است؟

۱) ۱۰ و صفر ۲) $6t$ و t ۳) $8t$ و ۸ ۴) $10t$ و ۱۰

پاسخ: گزینه «۴»

$$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = -8t\vec{j} + 6t\vec{k} \Rightarrow |\vec{V}(t)| = \sqrt{(-8t)^2 + (6t)^2} = 10t$$

$$\vec{a}(t) = \vec{V}'(t) = -8\vec{j} + 6\vec{k} \Rightarrow |\vec{a}(t)| = \sqrt{(-8)^2 + (6)^2} = 10$$

مثال۳: بردار مکان ذره‌ای در لحظه‌ی t، به صورت $\vec{R}(t) = Ln(t^2+1)\vec{i} + (tg^{-1}t)\vec{j} + [sech(3t)]\vec{k}$، می‌باشد. زاویه‌ی بین بردارهای سرعت و شتاب این ذره در $t = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» بردارهای سرعت و شتاب عبارتند از: $\vec{V} = \vec{R}'$ و $\vec{a} = \vec{R}''$. با مشتق‌گیری از $\vec{R}(t)$ داریم:

$$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1}{1+t^2}, -3\,sech 3t . tgh 3t\right)$$

$$\vec{a}(t) = \vec{R}''(t) = \left(\frac{2-2t^2}{(t^2+1)^2}, \frac{-2t}{(1+t^2)^2}, -3(-3\,sech 3t . tgh^2 3t + sech 3t . 3(1 - tg^2 h 3t))\right)$$

با توجه به صورت سؤال، بردارهای سرعت و شتاب را در لحظه‌ی $t = 0$ به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{V} = (0, 1, 0) \quad , \quad \vec{a} = (2, 0, -9)$$

فرض کنید زاویه‌ی بین این بردارها θ باشد. داریم:

$$\cos\theta = \frac{\vec{V}.\vec{a}}{|\vec{V}||\vec{a}|} = \frac{0+0+0}{\sqrt{1}\times\sqrt{85}} = 0$$

$\cos\theta = 0$، بنابراین $\theta = \frac{\pi}{2}$ است.

مثال۴: طول قوس منحنی $\vec{R}(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$ از $t = 0$ تا $t = 1$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}(e-1)}{2}$ ۲) $\sqrt{2}(e-1)$ ۳) $\sqrt{3}(e+1)$ ۴) $\sqrt{3}(e-1)$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا باید با مشتق‌گیری از $\vec{R}(t)$ بردار سرعت را تعیین کنیم. با کمی دقت متوجه می‌شویم که می‌توان تابع حقیقی e^t را از این بردار خارج کرد. $\vec{R}(t) = e^t(\cos t, \sin t, 1)$

حالا از قواعد مشتق‌گیری استفاده می‌کنیم:

$$\vec{R}'(t) = e^t(\cos t, \sin t, 1) + e^t(-\sin t, \cos t, 0) = e^t[\cos t - \sin t, \cos t + \sin t, 1]$$

اندازه‌ی این بردار را حساب می‌کنیم:

$$|\vec{R}'(t)| = \sqrt{e^{2t}[(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 + 1]} = e^t\sqrt{2\cos^2 t + 2\sin^2 t + 1} = \sqrt{3}\,e^t$$

با انتگرال‌گیری از این عبارت می‌توانیم طول قوس را به‌دست آوریم. توجه کنید که حدود t در صورت سؤال داده شده‌اند.

$$s = \int_0^1 \sqrt{3}e^t\,dt = \sqrt{3}\,e^t\Big|_0^1 = \sqrt{3}e^t\Big|_0^1 = \sqrt{3}(e-1)$$

مثال ۵: طول منحنی C که از فصل مشترک کره $x^2+y^2+z^2=1$ و استوانه‌ی بیضوی $x^2+2z^2=1$، پدید می‌آید، کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) 2π ۳) 3π ۴) 4π

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از معادلات داده شده، منحنی C را پارامتری می‌کنیم. ابتدا از معادله‌ی $x^2+2z^2=1$ که در صفحه‌ی xoz یک بیضی به مرکز مبدأ با شعاع‌های ۱ و $\frac{1}{\sqrt{2}}$ است استفاده می‌کنیم. طبق متن درس داریم: $x=0+\cos t$ و $z=0+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t$ در ضمن برای یک دور کامل از بیضی باید $0\le t\le 2\pi$ باشد. حالا با قرار دادن این نتایج در معادله‌ی کره، y را برحسب t به‌دست می‌آوریم.

$$x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow y^2=1-\cos^2 t-\frac{1}{2}\sin^2 t \Rightarrow y^2=\sin^2 t-\frac{1}{2}\sin^2 t \Rightarrow y^2=\frac{1}{2}\sin^2 t \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t$$

به این ترتیب منحنی C را به صورت $\vec{R}(t)=(\cos t,\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t,\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t)$ پارامتری می‌کنیم، اکنون داریم:

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sin t)^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t)^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}dt=2\pi$$

مثال ۶: منحنی C با معادله‌ی پارامتری $\vec{R}(t)=(\frac{2}{3}t^3,\frac{\sqrt{3}}{3}t^3,\frac{\sqrt{2}}{3}t^3)$ در محدوده‌ی $0\le t\le 2$ مشخص شده است. معادله‌ی این منحنی برحسب پارامتر طول قوس (s) کدام است؟

۱) $\underset{0\le s\le 2}{\vec{R}(s)}=(\frac{3}{2}s^2,\sqrt{3}s^2,\frac{\sqrt{3}}{2}s^2)$

۲) $\underset{0\le s\le 2}{\vec{R}(s)}=(\frac{2}{3}s,\frac{\sqrt{3}}{3}s,\frac{\sqrt{2}}{3}s)$

۳) $\underset{0\le s\le 8}{\vec{R}(s)}=(\frac{2}{3}s^2,\frac{\sqrt{3}}{3}s^2,\frac{\sqrt{2}}{3}s^2)$

۴) $\underset{0\le s\le 8}{\vec{R}(s)}=(\frac{2}{3}s,\frac{\sqrt{3}}{3}s,\frac{\sqrt{2}}{3}s)$

پاسخ: گزینه «۴» از آنجا که محدوده‌ی داده شده برای t از $t=0$ آغاز شده است، فرمول طول قوس را برای بازه‌ی $[0,t]$ می‌نویسیم:

$$s=\int_0^t\sqrt{x'^2(u)+y'^2(u)+z'^2(u)}\,du=\int_0^t\sqrt{(2u^2)^2+(\sqrt{3}u^2)^2+(\sqrt{2}u^2)^2}\,du=\int_0^t 3u^2du=\left[u^3\right]_0^t=t^3$$

اکنون از رابطه‌ی $s=t^3$ می‌توانیم t را برحسب s به‌دست آورده و در $\vec{R}(t)$ قرار دهیم. با قرار دادن $t=\sqrt[3]{s}$ به معادله‌ی پارامتری $\vec{R}(s)=(\frac{2}{3}s,\frac{\sqrt{3}}{3}s,\frac{\sqrt{2}}{3}s)$ می‌رسیم. در ضمن چون $0\le t\le 2$ است، بنابراین $0\le t^3\le 8$ یعنی $0\le s\le 8$ است.

مثال ۷: اگر بخواهیم منحنی $\vec{R}(t)=(a\cos^3 t)\vec{i}+(a\sin^3 t)\vec{j}+(b\cos 2t)\vec{k}$ را برای $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ برحسب طول قوس منحنی (s) مجدداً پارامتری کنیم، معادله‌ی پارامتری بر حسب s کدام است؟

۱) $\vec{R}(t)=a(1-\frac{2s}{\sqrt{9a^2+16b^2}})^{\frac{3}{2}}\vec{i}+a(\frac{2s}{\sqrt{9a^2+16b^2}})^{\frac{3}{2}}\vec{j}+b(1-\frac{4s}{\sqrt{9a^2+16b^2}})\vec{k}$

۲) $\vec{R}(t)=a(1-\frac{2s}{\sqrt{9a^2+16b^2}})^{\frac{3}{2}}\vec{i}+a(\frac{2s}{\sqrt{9a^2+16b^2}})^{\frac{3}{2}}\vec{j}+b(1+\frac{2s}{\sqrt{9a^2+16b^2}})\vec{k}$

۳) $\vec{R}(t)=a(1-\frac{s}{\sqrt{9a^2+16b^2}})^{\frac{3}{2}}\vec{i}+a(\frac{s}{\sqrt{9a^2+16b^2}})^{\frac{3}{2}}\vec{j}+b(1-\frac{2s}{\sqrt{9a^2+16b^2}})\vec{k}$

۴) $\vec{R}(t)=a(1-\frac{s}{\sqrt{9a^2+16b^2}})^{\frac{3}{2}}\vec{i}+a(\frac{s}{\sqrt{9a^2+16b^2}})^{\frac{3}{2}}\vec{j}+b(1+\frac{2s}{\sqrt{9a^2+16b^2}})\vec{k}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا طول قوس منحنی $\vec{R}(t)$ را به دست می‌آوریم. طول قوس منحنی $\vec{R}(t)$ را با s نمایش می‌دهیم و برابر است با:

$$s=\int_0^t\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt=\int_0^t\sqrt{(-3a\sin t\cos^2 t)^2+(3a\cos t\sin^2 t)^2+(-2b\sin 2t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^t\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(9a^2+16b^2)}\,dt=\sqrt{9a^2+16b^2}\int_0^t\sin t\cos t\,dt=\sqrt{9a^2+16b^2}\,.\frac{1}{2}\sin^2 t\Rightarrow\frac{2s}{\sqrt{9a^2+16b^2}}=\sin^2 t$$

حال با استفاده از روابط مثلثاتی داریم:

$$\sin^3 t = \left(\frac{2s}{\sqrt{9a^2+16b^2}}\right)^{\frac{3}{2}} \ , \ \cos^3 t = (\cos^2 t)^{\frac{3}{2}} = (1-\sin^2 t)^{\frac{3}{2}} = \left(1-\frac{2s}{\sqrt{9a^2+16b^2}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t = 1 - \frac{4s}{\sqrt{9a^2+16b^2}}$$

بنابراین معادله پارامتری $\vec{R}(t)$ برحسب s به صورت مقابل است:

$$\vec{R}(s) = a\left(1-\frac{2s}{\sqrt{9a^2+16b^2}}\right)^{\frac{3}{2}}\vec{i} + a\left(\frac{2s}{\sqrt{9a^2+16b^2}}\right)^{\frac{3}{2}}\vec{j} + b\left(1-\frac{4s}{\sqrt{9a^2+16b^2}}\right)\vec{k}$$

مثال ۸: فرض کنیم $\Delta\vec{T} = \vec{T}_1 - \vec{T}_0$ میزان تغییر بردار مماس واحد $(\vec{T})$ بر خم $\vec{R}(t) = (\cos^3 t)\vec{i} + (\sin^3 t)\vec{j}$ از نقطه‌ی $t = 0$ تا $t = \frac{\pi}{2}$، باشد. طول $\Delta\vec{T}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا با مشتق‌گیری، بردار $\vec{R}'(t)$ را به‌دست می‌آوریم. سپس با تقسیم آن بر اندازه‌اش، بردار $\vec{T}(t)$ را تعیین می‌کنیم.

$$\vec{R}'(t) = (-3\sin t.\cos^2 t, 3\sin^2 t.\cos t)$$

$$|\vec{R}'(t)| = \sqrt{9\sin^2 t.\cos^4 t + 9\sin^4 t.\cos^2 t} = \sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} = 3\sin t.\cos t$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|} = \frac{(-3\sin t\cos^2 t\ ,\ 3\sin^2 t.\cos t)}{3\sin t.\cos t} = (-\cos t, \sin t) \Rightarrow \begin{cases} t = 0 & \Rightarrow \vec{T}_0 = (-1,0) \\ t = \frac{\pi}{2} & \Rightarrow \vec{T}_1 = (0,1) \end{cases}$$

$$\Delta\vec{T} = \vec{T}_1 - \vec{T}_0 = (0,1) - (-1,0) = (1,1) \Rightarrow |\Delta\vec{T}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

مثال ۹: معادله‌ی صفحه بوسان (مماس) بر خم فضایی $\vec{R}(t) = (\cosh t)\vec{i} + (\sinh t)\vec{j} + t\vec{k}$ در نقطه‌ی نظیر $t = 0$ کدام است؟

۱) $x + y = 2z + 1$ ۲) $y + z = 0$ ۳) $x + y + z = 1$ ۴) $y = z$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا با جایگذاری $t = 0$ در معادله خم، مختصات نقطه موردنظر را می‌یابیم.

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \cosh 0 = 1 \\ y = \sinh 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1,0,0)$$

صفحه موردنظر از نقطه $A(1,0,0)$ عبور می‌کند و بردار نرمال آن $\vec{R}' \times \vec{R}''$ است.

$$\vec{R}'(t) = (\sinh t, \cosh t, 1) \Rightarrow \vec{R}'(0) = (0,1,1) \quad , \quad \vec{R}''(t) = (\cosh t, \sinh t, 0) \Rightarrow \vec{R}''(0) = (1,0,0)$$

$$\vec{R}' \times \vec{R}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{n} = (0,1,-1)$$

معادله صفحه بوسان: $0(x-1) + (y-0) - (z-0) = 0 \Rightarrow y - z = 0$

مثال ۱۰: می‌دانیم بردار سرعت متحرکی در مختصات قطبی به صورت $\vec{V} = U_r.\frac{d\vec{r}}{dt} + U_\theta.\vec{r}\frac{d\theta}{dt}$ است. مؤلفه شتاب آن در امتداد شعاع حامل قطبی کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ ۲) $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{d\vec{r}}{dt}$ ۳) $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \vec{r}(\frac{d\theta}{dt})^2$ ۴) $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \vec{r}(\frac{d\theta}{dt})^2$

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم شتاب یک ذره در مختصات از فرمول مقابل به دست می‌آید:

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \vec{r}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)u_r + \left(\vec{r}\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\vec{r}}{dt}.\frac{d\theta}{dt}\right)u_\theta$$

بنابراین مؤلفه شتاب در امتداد شعاع حامل برابر $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \vec{r}(\frac{d\theta}{dt})^2$ می‌باشد.

مثال ۱۱: اگر نیروی مؤثر بر متحرک با بردار موضع $\vec{R}$، نیروی جاذبه‌ای باشد، آن‌گاه بردار $\vec{R}\times\frac{d\vec{R}}{dt}$ چگونه است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) بردار ثابت ۲) با افزایش نیرو کاهش دارد. ۳) با افزایش نیرو افزایش دارد. ۴) فقط اندازه آن ثابت

پاسخ: گزینه «۱» چون تنها نیروی مؤثر بر جسم نیروی جاذبه می‌باشد، لذا بردار مکان در راستای نیرو خواهد بود و داریم:

$$\vec{F}=m\vec{a}=\lambda\vec{R}\ \Rightarrow \vec{a}=\frac{\lambda}{m}\vec{R}$$

از طرفی توجه کنید که:

$$\frac{d}{dt}(\vec{R}\times\frac{d\vec{R}}{dt})=\frac{d\vec{R}}{dt}\times\frac{d\vec{R}}{dt}+\vec{R}\times\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}=0+\vec{R}\times\vec{a}=\vec{R}\times\frac{\lambda}{m}\vec{R}=\frac{\lambda}{m}(\vec{R}\times\vec{R})=0$$

که از رابطه فوق نتیجه می‌شود $\vec{R}\times\frac{d\vec{R}}{dt}=C$. (برای اطلاعات بیشتر به کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی توماس مراجعه کنید.)

مثال ۱۲: مکان هندسی نقطه $P:\begin{cases}r=2\\ \theta=t\\ z=t\end{cases}$ وقتی $t\in\mathbb{R}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) استوانه ۲) کره ۳) مارپیچ مخروطی ۴) مارپیچ استوانه‌ای

پاسخ: گزینه «۴» از معادله‌ی $r=2$ داریم $\sqrt{x^2+y^2}=2$ پس $x^2+y^2=4$ بنابراین x و y را می‌توان به صورت $x=2\cos\theta$ و $y=2\sin\theta$ نوشت که معادلات پارامتری یک دایره به شعاع ۲ و مرکز مبدأ هستند. حالا از صورت سؤال داریم $\theta=t$ پس $x=2\cos t$ و $y=2\sin t$. از طرفی طبق صورت سؤال $z=t$ است. پس معادلات پارامتری این منحنی به این صورت هستند: $\vec{R}(t)=(2\cos t,\ 2\sin t\ ,\ t)$

همان‌طور که در متن درس آمده است، این منحنی مارپیچ ارشمیدس است که شکلی مانند فنر دارد. در واقع یک مارپیچ است که روی سطح استوانه‌ی $x^2+y^2=4$ قرار دارد. گزینه‌ی (۴) این منحنی را مارپیچ استوانه‌ای نامیده است که صحیح هم هست.

مثال ۱۳: طول منحنی زنجیری $\vec{r}(t)=t\vec{i}+\cosh t\vec{j}=(t,\cosh t)$ از نقطه $(0,1)$ تا نقطه $(x,\cosh x)$، $x>0$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) $\cosh x$ ۲) $1-\sinh x$ ۳) $\sinh x$ ۴) $\sinh x-1$

پاسخ: گزینه «۳» تابع برداری $\vec{r}(t)=X(t)\vec{i}+Y(t)\vec{j}+Z(t)\vec{k}$ که در آن X، Y و Z توابعی اسکالر هستند را در نظر بگیرید طول تابع برداری $\vec{r}(t)$ از $t=t_0$ تا $t=t_1$ از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید:

$$L=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{X'^2(t)+Y'^2(t)+Z'^2(t)}\,dt$$

حال با توجه به مطالب فوق به حل سؤال می‌پردازیم، داریم:

$$L=\int_0^x\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\int_0^x\sqrt{1+\sinh^2 t}\,dt=\int_0^x\cosh t\,dt=\sinh t\Big|_0^x=\sinh x$$

مثال ۱۴: اگر $\vec{r}(t)=(t,\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}},t^2)$ نمایش پارامتری یک منحنی C باشد، به ازای چه مقدار b مثبت، طول منحنی C از $t=0$ تا $t=b$ برابر ۳۰ واحد است؟ (عمران ـ سراسری ۸۲)

۱) $b=3$ ۲) $b=4$ ۳) $b=5$ ۴) $b=6$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\vec{r}(t)=(t,\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}},t^2)\ \Rightarrow \vec{V}(t)=(1,2t^{\frac{1}{2}},2t)\ \Rightarrow|\vec{V}(t)|=\sqrt{1+4t+4t^2}=1+2t$$

$$\Rightarrow\int_0^b|\vec{V}(t)|dt=30\ \Rightarrow\int_0^b(1+2t)dt=30\ \Rightarrow b^2+b=30\ \Rightarrow b=5$$

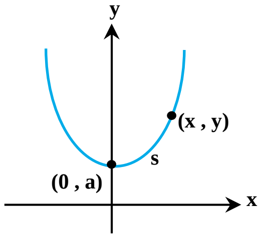
مثال ۱۵: اگر V سرعت متحرکی باشد که روی منحنی $[x(t)=3t\ ,\ y(t)=4t, z(t)=2]$ حرکت می‌کند، $|\vec{V}|$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۲)

۱) ۵ ۲) $|3t|+|4t|+2$ ۳) $\sqrt{7}$ ۴) $\sqrt{25t^2+4}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\vec{R}(t)=(3t,4t,2)\ \Rightarrow\vec{V}(t)=R'(t)=(3,4,0)\ \Rightarrow|\vec{V}(t)|=5$$

مثال ۱۶: اگر قوس s منحنی زنجیری $y=a\cosh(\frac{x}{a})$ از پایین‌ترین نقطه‌ی آن سنجیده شده باشد، مقدار $\frac{dy}{dx}$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۲)



۱) $\frac{s}{a}$

۲) $\frac{s}{2a}$

۳) as

۴) $2as$

پاسخ: گزینه «۱» منظور از پایین‌ترین نقطه، نقطه $(0,a)$ روی منحنی می‌باشد، که طول قوس از این نقطه تا نقطه دلخواه x,y برابر است با:

$$s=\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^x\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}\,dx=\int_0^x\cosh\frac{x}{a}\,dx=a\sinh\frac{x}{a}$$

از طرفی داریم:

$$y=a\cosh\frac{x}{a}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\sinh\frac{x}{a}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{s}{a}$$

مثال ۱۷: جزء طول قوس ds برای منحنی با معادلات پارامتری $x=e^t\sin t, y=e^t\cos t$ برابر است با: (هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) $e^t dt$ ۲) $2e^t dt$ ۳) $2e^{2t}(dt)^2$ ۴) $\sqrt{2}e^t dt$

پاسخ: گزینه «۴»

$$ds=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dt=\sqrt{(e^t\sin t+e^t\cos t)^2+(e^t\cos t-e^t\sin t)^2}\,dt=\sqrt{2}e^t dt$$

مثال ۱۸: اگر $\vec{F}(t)=\frac{2t}{1+t^2}\vec{i}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\vec{j}+\vec{k}$ یک تابع برداری باشد، آن‌گاه زاویه بین $\vec{F}(t)$ و $\vec{F}'(t)$ برابر است با: (هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که $\vec{F}'(t)=\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\vec{i}+\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\vec{j}$ است و چون $\vec{F}(t).\vec{F}'(t)=0$، بنابراین $\vec{F}$ و $\vec{F}'$ بر هم عمودند.

مثال ۱۹: سرعت یک ذره متحرک در لحظه t در امتداد خطی مستقیم برابر است با $v(t)=3t^2-2t+4$ فاصله‌ی بین مواضع ذره در لحظات $t=2$ و $t=5$ را بیابید. (معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) ۶۰ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۲

پاسخ: گزینه «۲» با انتگرال‌گیری از اندازه‌ی سرعت می‌توانیم میزان جابجایی یعنی همان طول قوس را حساب کنیم:

$$s=\int_2^5(3t^2-2t+4)dt=(t^3-t^2+4t)\Big|_2^5=108$$

مثال ۲۰: اگر $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ یک منحنی پارامتری با طول قوس L و $A=\{(t_1,t_2)\,|\,\vec{r}(t_1)=\vec{r}(t_2)\}$. در این صورت کدام حکم در مورد A صحیح است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) اگر A نامتناهی باشد آن‌گاه $L=\infty$.

۲) ممکن است A نامتناهی باشد ولی $L<\infty$.

۳) اگر A متناهی باشد آن‌گاه $L<\infty$.

۴) همواره A نامتناهی است یا $L=\infty$.

پاسخ: گزینه «۲» مجموعه A تعداد نقاط تلاقی خم با خودش را نشان می‌دهد. منحنی پارامتری $\vec{R}(t)=(\cos t,\sin t)$، $0\le t\le 4\pi$، یک دایره را نشان می‌دهد که دو بار طی شده است و بنابراین بی‌نهایت بار خودش را قطع کرده است و این در حالی است که طول خم برابر 4π می‌باشد.

مثال ۲۱: طول قوس منحنی زنجیری به معادله $a > 0$ و $y = a\cosh(\frac{x}{a})$ از نقطه $(0,a)$ تا نقطه (x_1,y_1)، $x_1 > 0$، برابر است با: (عمران ـ سراسری ۸۵)

۱) $\sinh(\frac{x_1}{a})$ ۲) $a\sinh(\frac{x_1}{a})$ ۳) $\frac{1}{a}\sinh(\frac{x_1}{a})$ ۴) $a^2\sinh(\frac{x_1}{a})$

پاسخ: گزینه «۲»

$$ds = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}dx = \sqrt{\cosh^2\frac{x}{a}}dx = \cosh\frac{x}{a}dx \Rightarrow s = \int_0^{x_1}\cosh\frac{x}{a}dx = a\sinh\frac{x}{a}\Big|_0^{x_1} = a\sinh\frac{x_1}{a}$$

مثال ۲۲: بردار یکه قائم اصلی یعنی $\vec{N}(t)$ برای مارپیچ $\vec{R}(t) = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j} + t\vec{k}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $(-\cos t)i + (\sin t)j$ ۲) $(-\cos t)i + (-\sin t)j$ ۳) $(\cos t)i + (-\sin t)j$ ۴) $(\cos t)i + (\sin t)j$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\vec{R}(t) = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j} + t\vec{k}$$

$$\vec{V}(t) = (-\sin t)\vec{i} + (\cos t)\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{T} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = (\frac{-1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|} = \frac{(\frac{-1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{-1}{\sqrt{2}}\sin t, 0)}{\sqrt{\frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{1}{2}\sin^2 t}} = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

مثال ۲۳: صفحه قائم بر منحنی به معادلات $x = t^2 - t$ ،$y = t^2 + t$ ،$z = t^3$ در نقطه نظیر $t = 1$ محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۸)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۹

پاسخ: گزینه «۴» بردار مماس بر خم $\vec{R}(t) = (t^2 - t, t^2 + t, t^3)$ به‌صورت $\vec{R}'(t) = (2t-1, 2t+1, 3t^2)$ می‌باشد که در نقطه $t = 1$ به‌صورت $\vec{N}(1,3,3)$ در می‌آید، این بردار همان بردار نرمال صفحه قائم بر خم می‌باشد، پس معادله صفحه مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$1(x-0) + 3(y-2) + 3(z-1) = 0 \Rightarrow x + 3y + 3z = 9$$

برای به‌دست آوردن نقطه تلاقی صفحه با محور x ها قرار می‌دهیم $y = z = 0$ که در این صورت $x = 9$ حاصل می‌شود.

مثال ۲۴: طول قوسی از منحنی $y = 4e^{\frac{1}{2}t}$ و $x = e^t - t$ از $t = 0$ تا $t = 2$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۸)

۱) $e^2 - 3$ ۲) $2e^2 - 1$ ۳) $e^2 - 1$ ۴) $e^2 + 1$

پاسخ: گزینه «۴» طول قوس منحنی $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$، $a \le t \le b$ از فرمول $s = \int_a^b \sqrt{f'^2 + g'^2}\, dt$ به‌دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$s = \int_0^2 \sqrt{(e^t - 1)^2 + (2e^{\frac{1}{2}t})^2}\, dt = \int_0^2 \sqrt{(e^t + 1)^2}dt = \int_0^2 (e^t + 1)dt = (e^t + t)\Big|_0^2 = e^2 + 1$$

مثال ۲۵: طول قوس منحنی به معادله $0 \le t \le 2,\ x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\sqrt{2}e^2 - 1$ ۲) $\sqrt{2}e^2 - 2$ ۳) $\sqrt{2}(e^2 - 1)$ ۴) $\sqrt{2}(e^2 - 2)$

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم طول قوس منحنی پارامتری از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$s = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = \int_0^2 \sqrt{(e^t\cos t - e^t\sin t)^2 + (e^t\sin t + e^t\cos t)^2}dt = \int_0^2 \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}e^t\Big|_0^2 = \sqrt{2}(e^2 - 1)$$

مثال ۲۶: کدام‌یک از گزینه‌های زیر معادله خط مماس بر منحنی $x=t^3+1$ و $y=t^3+1$ و $z=2t+1$ در نقطه $A(2,2,3)$ می‌باشد؟

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۹)

۱) $z=\frac{x-2}{3}$ ۲) $\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{3}$ ۳) $\frac{x-2}{3}=\frac{z-3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}x-1=\frac{1}{3}z-1$

پاسخ: هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد. بردار هادی خط مماس بر منحنی پارامتری داده شده از مشتق‌گیری آن حاصل می‌شود.

$$\vec{R}(t)=(t^3+1,t^3+1,2t+1)\ \Rightarrow\ \vec{R}'(t)=(3t^2,3t^2,2)$$

توجه کنید که نقطه $A(2,2,3)$ متناظر $t=1$ در رابطه پارامتری می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\text{بردار هادی خط مماس}=\vec{R}'(1)=(3,3,2)\ \Rightarrow\ \text{معادله خط مماس}:\frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{2}$$

مثال ۲۷: مشتق سویی تابع $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ در امتداد مماس بر منحنی بـا معـادلات $z=t^4$ و $y=-2t$ و $x=\frac{1}{4}t^2$، در نقطـه $(\frac{1}{4},-2,1)$ کدام است؟

(مواد ـ سراسری ۸۹)

۱) $-\frac{1040}{6561}$ ۲) $-\frac{4^5}{9^4}$ ۳) $-\frac{520}{729}$ ۴) $-(\frac{4}{9})^4$

پاسخ: گزینه «۱» مشتق سویی تابع $f(x,y,z)$ در امتداد بردار یکه $\vec{u}$ در نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ به‌صورت حاصل ضـرب داخلـی بـردار $\vec{u}$ در بـردار گرادیان f در نقطه p_0 به‌دست می‌آید. بردار گرادیان f نیز به صورت $\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$ محاسبه می‌شود. برای یافتن امتـداد مماس بـر منحنـی داده شده می‌بایست مشتق آن را محاسبه کنیم:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}t\ ,\ \frac{dy}{dt}=-2\ ,\ \frac{dz}{dt}=4t^3$$

پس مقدار t را با توجه به نقطه داده شده، جایگذاری می‌کنیم:

$$y=-2\ \Rightarrow -2t=-2\ \Rightarrow t=1$$

در نتیجه امتداد مماس بر منحنی به صورت $(\frac{1}{2}(1),-2,4(1)^3)=(\frac{1}{2},-2,4)$ می‌باشد. این بردار را یکه می‌کنیم:

$$\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+4+16}}(\frac{1}{2},-2,4)$$

بنابراین $\vec{u}=\frac{2}{9}(\frac{1}{2},-2,4)$ از طرفی داریم:

$$\vec{\nabla}f=\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{i}-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{j}-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{k}$$

لذا به ازای نقطه داده شده داریم:

$$\vec{\nabla}f\Big|_{(\frac{1}{4},-2,1)}=\frac{-\frac{1}{4}}{(\frac{81}{16})^{\frac{3}{2}}}i+\frac{2}{(\frac{81}{16})^{\frac{3}{2}}}j-\frac{1}{(\frac{81}{16})^{\frac{3}{2}}}k$$

در نتیجه مشتق سویی f در امتداد مماس بر منحنی داده شده برابر است با:

$$\vec{\nabla}f.\vec{u}\Big|_{(\frac{1}{4},-2,1)}=-\frac{1040}{6561}$$

مثال ۲۸: طول قوسی از منحنی پارامتری $(x=t^2,y=\frac{1}{3}t^3-t)$ از نقطه $t=0$ تا $t=3$ کدام است؟

(کشاورزی ـ سراسری ۹۰)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه «۴» در صورتی که $\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases}$ باشد آن‌گاه طول قوس برابر است با:

$$s=\int_0^3\sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,dt$$

با مشتق‌گیری از $f(t)$ و $g(t)$ و قرار دادن در رابطه‌ی طول قوس فوق نتیجه می‌شود که:

$$s=\int_0^3\sqrt{4t^2+(t^2-1)^2}\,dt=\int_0^3\sqrt{t^4+4t^2-2t^2+1}\,dt=\int_0^3\sqrt{t^4+2t^2+1}\,dt$$

$$\Rightarrow s=\int_0^3\sqrt{(t^2+1)^2}\,dt=\int_0^3(t^2+1)dt=\frac{t^3}{3}+t\Big|_0^3=9+3=12$$

درسنامه ۳: انحناء و تاب

مثال ۱: انحنای منحنی $\vec{R}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+t\vec{k}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۴) $\sqrt{2}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\vec{R}'(t)=-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow|\vec{R}'(t)|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}=\sqrt{2}$$

$$\vec{R}''(t)=-\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j}$$

$$\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-\sin t&\cos t&1\\-\cos t&-\sin t&0\end{vmatrix}=\sin t\vec{i}-\cos t\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}=\sqrt{2}$$

$$\kappa=\frac{|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)|}{|\vec{R}'(t)|^3}=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

مثال ۲: انحنای منحنی $z=t\sqrt{2}$ ، $y=e^{-t}$ و $x=e^t$ در چه نقطه‌ای ماکزیمم است؟

۱) $(1,1,0)$ ۲) $(-1,1,0)$ ۳) $(-1,-1,0)$ ۴) $(1,-1,0)$

پاسخ : گزینه «۱» معادله‌ی پارامتری منحنی را می‌نویسیم و بردارهای $\vec{R}'(t)$ و $\vec{R}''(t)$ را حساب می‌کنیم:

$$\vec{R}(t)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=e^t\vec{i}+e^{-t}\vec{j}+t\sqrt{2}\vec{k}\Rightarrow\vec{R}'(t)=e^t\vec{i}-e^{-t}\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}\Rightarrow\vec{R}''(t)=e^t\vec{i}+e^{-t}\vec{j}$$

$$\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\e^t&-e^{-t}&\sqrt{2}\\e^t&e^{-t}&0\end{vmatrix}=(-\sqrt{2}e^{-t})\vec{i}+(\sqrt{2}e^t)\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\Rightarrow|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)|=\sqrt{2e^{-2t}+2e^{2t}+4}=\sqrt{2}.\sqrt{e^{-2t}+e^{2t}+2}=\sqrt{2}.\sqrt{(e^{-t}+e^t)^2}=\sqrt{2}(e^{-t}+e^t)$$

$$|\vec{R}'(t)|=\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2}=\sqrt{(e^t+e^{-t})^2}=e^{-t}+e^t\Rightarrow\kappa=\frac{|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)|}{|\vec{R}'(t)|^3}=\frac{\sqrt{2}(e^{-t}+e^t)}{(e^t+e^{-t})^3}=\frac{\sqrt{2}}{e^{2t}+e^{-2t}+2}$$

برای ماکزیمم شدن باید از تابع انحنا مشتق بگیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{d\kappa}{dt}=\frac{-\sqrt{2}(2e^{2t}-2e^{-2t})}{(e^{2t}+e^{-2t}+2)^2}=0\Rightarrow e^{2t}-e^{-2t}=0\Rightarrow e^{2t}=e^{-2t}\Rightarrow e^{4t}=1\Rightarrow t=0$$

اکنون در معادله‌ی منحنی $t=0$ قرار می‌دهیم: $x=e^0=1\ ,\ y=e^0=1\ ,\ z=0$ ، بنابراین مختصات نقطه مطلوب $(1,1,0)$ می‌باشد.

مثال ۳: عرض نقطه‌ای روی منحنی $y=e^x$ که در آن نقطه انحنای منحنی بیشترین مقدار خود را دارد، کدام است؟

۱) $-\frac{\text{Ln}2}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\text{Ln}2$

پاسخ : گزینه «۳»

$$y'=e^x\ ,\ y''=e^x\Rightarrow\kappa=\frac{y''}{|1+(y')^2|^{\frac{3}{2}}}=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$$

برای این که نقطه با انحنای max را به دست آوریم مشتق κ برحسب x را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow\frac{e^x(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}}[3e^{2x}-(1+e^{2x})]}{(1+e^{2x})^3}=0\Rightarrow 2e^{2x}=1\Rightarrow e^{2x}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=-\frac{\text{Ln}2}{2}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال ۴: انحنای یک دایره به معادله‌ی $x^2+y^2=R^2$ را در نقطه‌ی (x,y) واقع بر آن محاسبه کنید.

پاسخ: با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی داریم $y'=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$ اکنون با مشتق‌گیری دوباره از طرفین خواهیم داشت:

$$y''=-\frac{y-xy'}{y^2}$$

حالا با جایگذاری $y'=-\frac{x}{y}$ در فرمول y'' داریم:

$$y''=-\frac{y+\frac{x^2}{y}}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=-\frac{R^2}{y^3}$$

در نتیجه انحنای منحنی برابر است با:

$$\kappa=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{R^2}{y^3}}{[1+\frac{x^2}{y^2}]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{R^2}{y^3}}{[\frac{y^2+x^2}{y^2}]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{R^2}{y^3}}{\frac{R^3}{y^3}}=\frac{1}{R}$$

بهتر است نتیجه‌ی به‌دست آمده در این مثال را به یاد داشته باشید. انحنای هر دایره به شعاع R برابر با $\kappa=\frac{1}{R}$ است.

مثال ۵: خمیدگی منحنی با ضابطه $x(t)=2\cos^3 t$ و $y(t)=2\sin^3 t$ در نقطه $t=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$x'(t)=-6\cos^2 t\sin t \Rightarrow x'(\frac{\pi}{4})=-6\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$x''(t)=12\cos t\sin^2 t-6\cos^3 t \Rightarrow x''(\frac{\pi}{4})=12\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^3-6\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^3=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$y'(t)=6\sin^2 t\cos t \Rightarrow y'(\frac{\pi}{4})=6\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$y''(t)=12\cos^2 t\sin t-6\sin^3 t \Rightarrow y''(t)=12\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-6\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^3=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\kappa(\frac{\pi}{4})=\frac{|-\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}|}{27}=\frac{|-\frac{9}{2}-\frac{9}{2}|}{27}=\frac{|-9|}{27}=\frac{1}{3}$$

مثال ۶: اگر $r(t)$ خم منظمی در $\mathbb{R}^3$ با انحنای κ باشد و $v(t)=\|\frac{dr}{dt}\|$، کدام رابطه برقرار است؟

۱) $\kappa^2v^4=\|\frac{d^2r}{dt^2}\|^2-(\frac{dv}{dt})^2$ ۲) $\kappa^2v^4=\|\frac{d^2r}{dt^2}\|^2+(\frac{dv}{dt})^2$ ۳) $\kappa v^2=\|\frac{d^2r}{dt^2}\|^2-\frac{dv}{dt}$ ۴) $\kappa v^2=\|\frac{d^2r}{dt^2}\|^2+\frac{dv}{dt}$

پاسخ: گزینه «۱» طبق صورت سؤال $\vec{v}(t)=|\vec{r}'(t)|$ است. بنابراین $\vec{v}(t)$ همان $\frac{ds}{dt}$ است و داریم:

$$\vec{v}(t)=\frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$$

حالا به تساوی $|\vec{r}''(t)|^2=a_T^2+a_N^2$ توجه کنید:

$$|\vec{r}''(t)|^2=a_T^2+a_N^2 \Rightarrow |\vec{r}''(t)|^2=(\frac{d}{dt}|\vec{r}'(t)|)^2+\kappa^2|\vec{r}'(t)|^4 \Rightarrow |\vec{r}''(t)|^2=(\frac{dv}{dt})^2+\kappa^2v^4(t)$$

تساوی به‌دست آمده همان گزینه‌ی یک است.

$$\kappa^2v^4(t)=|\vec{r}''(t)|^2-(\frac{dv}{dt})^2$$

مثال ۷: شعاع انحنا و معادله دایره بوسان منحنی $y=e^x$ را در نقطه $P(0,1)$ به‌دست آورید.

پاسخ : ابتدا مرکز دایره بوسان را پیدا می‌کنیم:

$$x_c=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=x-\frac{e^x(1+e^{2x})}{e^x}\xrightarrow{x=0}x_c=-2 \quad , \quad y_c=y+\frac{1+y'^2}{y''}=e^x+\frac{1+e^{2x}}{e^x}\xrightarrow{x=0}y_c=3$$

پس معادله دایره بوسان به‌صورت $(x+2)^2+(y-3)^2=\rho^2$ خواهد بود، برای پیدا کردن شعاع دایره بوسان می‌توان از رابطه $\rho=\frac{1}{\kappa}$ استفاده کرد. اما یک راه ساده‌تر هم وجود دارد. می‌دانیم که این دایره از نقطه‌ی $(0,1)$ عبور می‌کند پس می‌توانیم این نقطه را در معادله‌ی دایره قرار دهیم:

$$(0+2)^2+(1-3)^2=\rho^2 \Rightarrow \rho=2\sqrt{2} \Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=8$$

مثال ۸: شعاع انحنای منحنی $۴x^۲ + ۲y^۲ = ۸$ در نقطه $(\sqrt{۲},۰)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه‌ی شعاع انحنا، ابتدا باید انحنای منحنی را حساب کنیم. طبق فرمول انحنا داریم: $\kappa = \frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^۲+y'^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$. محاسبه‌ی مشتق دوم برای منحنی‌های ضمنی کمی وقت‌گیر است. بهتر است از معادله‌ی پارامتری بیضی استفاده کنیم. معادله‌ی $۲x^۲ + y^۲ = ۴$ را به صورت $\frac{x^۲}{۲}+\frac{y^۲}{۴}=۱$ می‌نویسیم. یک بیضی با شعاع‌های $a = \sqrt{۲}$ و $b = ۲$ داریم. معادله‌ی پارامتری آن چنین است: $(x = \sqrt{۲}\cos t , y = ۲\sin t)$. در نقطه‌ی $(\sqrt{۲},۰)$ داریم $\sqrt{۲}\cos t = \sqrt{۲}$ پس $t = ۰$ است.

$$\begin{cases} x' = -\sqrt{۲}\sin t \Rightarrow x'' = -\sqrt{۲}\cos t \\ y' = ۲\cos t \Rightarrow y'' = -۲\sin t \end{cases} \xrightarrow{t=۰} \begin{cases} x' = ۰ \ , \ x'' = -\sqrt{۲} \\ y' = ۲ \ , \ y'' = ۰ \end{cases} \Rightarrow \kappa = \frac{|۰+۲\sqrt{۲}|}{(۰+۴)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۸}$$

شعاع انحناء، معکوس انحناء است، در نتیجه داریم:

$$\rho = \frac{۱}{\kappa} \Rightarrow \rho = \frac{۸}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

مثال ۹: متحرکی بر روی یک مسیر تحت معادله‌ی مقابل حرکت می‌کند:

$$x = ۳\int_۰^t \sin(u^۲)du \ , \ y = ۵\int_۰^t \cos(u^۲)du \ , \ z = ۴\int_۰^t \sin(u^۲)du$$

شعاع انحنای مسیر فوق در نقطه‌ی $t = ۱$ کدام است؟ $(t \ge ۰)$

۱) $\frac{۵}{۱۲۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۵۰}{۱۲۵}$

پاسخ: گزینه «۳» فرض کنیم $\vec{R}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. با مشتق‌گیری از انتگرال‌ها داریم:

$$\vec{R}'(t) = (x'(t) \ , \ y'(t) \ , \ z'(t)) = (۳\sin t^۲ \ , ۵\cos t^۲ \ , ۴\sin t^۲) \ , \quad \vec{R}''(t) = (x''(t) \ , \ y''(t) \ , \ z''(t)) = (۶t\cos t^۲ \ , -۱۰t\sin t^۲ \ , ۸t\cos t^۲)$$

به ازای $t = ۱$ داریم: $\vec{R}' = (۳\sin(۱) \ , ۵\cos(۱) \ , ۴\sin(۱))$ و $\vec{R}'' = (۶\cos(۱) \ , -۱۰\sin(۱) \ , ۸\cos(۱))$ پس داریم:

$$\vec{R}'\times\vec{R}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۳\sin(۱) & ۵\cos(۱) & ۴\sin(۱) \\ ۶\cos(۱) & -۱۰\sin(۱) & ۸\cos(۱) \end{vmatrix}$$

$$= (۴۰\cos^۲(۱)+۴۰\sin^۲(۱))\vec{i} - (۲۴\sin(۱)\cos(۱) - ۲۴\sin(۱)\cos(۱))\vec{j} + (-۳۰\sin^۲(۱) - ۳۰\cos^۲(۱))\vec{k} = ۴۰\vec{i} - ۳۰\vec{k}$$

بنابراین $|\vec{R}'\times\vec{R}''| = \sqrt{۴۰^۲+۳۰^۲}$ و $|\vec{R}'| = \sqrt{۹\sin^۲(۱)+۲۵\cos^۲(۱)+۱۶\sin^۲(۱)} = \sqrt{۲۵(\sin^۲(۱)+\cos^۲(۱))} = \sqrt{۲۵} = ۵$. حال انحنای منحنی را در $t = ۱$ به‌دست می‌آوریم:

$$\kappa = \frac{|\vec{R}'\times\vec{R}''|}{|\vec{R}'|^۳} = \frac{\sqrt{۳۰^۲+۴۰^۲}}{۵^۳} = \frac{۵۰}{۱۲۵} = \frac{۲}{۵}$$

شعاع انحنا برابر با وارونِ انحنا است: $\rho = \frac{۱}{\kappa} = \frac{۵}{۲}$.

مثال ۱۰: دایره‌ای بر منحنی $y = x^۲+۱$ در نقطه $(۱,۲)$ مماس است و مقدار y'' برای هر دو منحنی در آن نقطه برابر است، شعاع دایره کدام است؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۵\sqrt{۵}}{۲}$

پاسخ : گزینه «۴» در این مثال دایره‌ی موردنظر بر منحنی $y = x^۲+۱$ مماس است. پس در نقطه‌ی تماس مقدار y' برای دایره و این منحنی یکسان است. مقدار y'' هم طبق صورت سؤال برای هر دوی آن‌ها یکی شده است. در نتیجه انحنای آن‌ها و شعاع انحنای آن‌ها با هم برابر می‌شود. با توجه به تذکر فوق دایره‌ی موردنظر همان دایره‌ی بوسان است پس شعاع دایره در واقع همان شعاع انحنای خم است:

$$y = x^۲+۱ \Rightarrow y' = ۲x \ , \ y'' = ۲ \ , \ \rho = \frac{۱}{\kappa} = \frac{(۱+(y')^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{|y''|} = \frac{(۱+۴)^{\frac{۳}{۲}}}{۲} = \frac{۵\sqrt{۵}}{۲}$$

مثال ۱۱: تاب خم $\vec{R}(t)=(\cos t,\sin t,t)$ کدام است؟

۱) $\sin 2t$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\cos 2t$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\vec{R}'(t)=(-\sin t,\cos t,1)\ ,\ \vec{R}''(t)=(-\cos t,-\sin t,0)\ ,\ \vec{R}'''(t)=(\sin t,-\cos t,0)$$

$$\Rightarrow \vec{R}'\times\vec{R}''=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-\sin t&\cos t&1\\-\cos t&-\sin t&0\end{vmatrix}=(\sin t,-\cos t,1)\Rightarrow|\vec{R}'\times\vec{R}''|=\sqrt{2}\ ,\ (\vec{R}'\times\vec{R}'').\vec{R}'''=1\Rightarrow\tau=\frac{(\vec{R}'\times\vec{R}'').\vec{R}'''}{|\vec{R}'\times\vec{R}''|^2}=\frac{1}{2}$$

مثال ۱۲: تاب خم $\vec{R}(t)=(2+\cos t,3+\sin t,\cos t+\sin t)$ در نقطه $t=1$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\sin 1$ ۴) $\cos 1$

پاسخ : گزینه «۱» اگر t را بین پارامترهای x، y و z حذف کنیم، داریم: $x+y-z=2+\cos t+3+\sin t-\cos t-\sin t=5$
به عبارت دیگر خم بر یک صفحه واقع است و تاب برابر صفر است.

مثال ۱۳: به ازای چه مقادیری از t، منحنی پارامتری $x=t^2$، $y=1-3t$ و $z=4t-2$ در یک صفحه قرار دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) به ازای تمام مقادیر t

پاسخ: گزینه «۴» همان‌طور که در متن درس آمده است، برای آن که یک منحنی در صفحه قرار داشته باشد، باید تاب آن برابر با صفر شود. از طرفی فرمول محاسبه‌ی تاب به صورت $\tau=\frac{\vec{R}'(t).(\vec{R}''(t)\times\vec{R}'''(t))}{|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)|^2}$ است. برای آن که $\tau=0$ باشد، باید صورت کسر صفر شود:

$$\vec{R}'(t).(\vec{R}''(t)\times\vec{R}'''(t))=0\Rightarrow\begin{vmatrix}x'_t&y'_t&z'_t\\x''_t&y''_t&z''_t\\x'''_t&y'''_t&z'''_t\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}2t&-3&4\\2&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow 0=0$$

این تساوی به ازای هر مقدار از t برقرار است. در واقع اگر x و y و z برحسب t حداکثر از درجه‌ی ۲ باشند آن‌گاه $x'''_t=0$، $y'''_t=0$ و $z'''_t=0$ است و تاب در این حالت، صفر می‌شود.

مثال ۱۴: اگر C خم فصل مشترک رویه‌های $z+y\sqrt{3}=1$ و $x^2+4y^2=4$ باشد، آن‌گاه انحنا و تاب خم C به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) ۴ و $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ و $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ و ۰ ۴) $\frac{1}{2}$ و ۰

پاسخ: گزینه «۴» منحنی C فصل مشترک رویه‌های $z+y\sqrt{3}=1$ و $x^2+4y^2=4$ است. با استفاده از این دو معادله، منحنی C را به شکل پارامتری می‌نویسیم. قرار می‌دهیم $y=t$ در این صورت داریم:

$$z=1-y\sqrt{3}=1-t\sqrt{3}\ ,\ x^2=4-4y^2\Rightarrow x=\sqrt{4-4t^2}$$

برای محاسبه‌ی تاب و انحنا به بردارهای $\vec{R}'(t)$، $\vec{R}''(t)$ و $\vec{R}'''(t)$ نیاز داریم:

$$\vec{R}(t)=\sqrt{4-4t^2}\,\vec{i}+t\,\vec{j}+(1-t\sqrt{3})\vec{k}\Rightarrow\vec{R}'(t)=\frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}\vec{i}+\vec{j}-\sqrt{3}\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow\vec{R}''(t)=\frac{-2\sqrt{1-t^2}-(-2t)\times\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}}{1-t^2}\vec{i}=\frac{-2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{i}\Rightarrow\vec{R}'''(t)=-2\times(-2t)\times\frac{-3}{2}(1-t^2)^{\frac{-5}{2}}\vec{i}=-6t(1-t^2)^{\frac{-5}{2}}\vec{i}$$

حاصل‌ضرب خارجی $\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)$ را حساب می‌کنیم:

$$\vec{R}'\times\vec{R}''=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}} & 1 & -\sqrt{3}\\ \frac{-2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 & 0\end{vmatrix}=-\vec{j}\left(\frac{-2\sqrt{3}}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)+\vec{k}\left(\frac{2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$|\vec{R}'\times\vec{R}''|=\sqrt{\frac{4\times 3}{(1-t^2)^3}+\frac{4}{(1-t^2)^3}}=\sqrt{\frac{16}{(1-t^2)^3}}\Rightarrow \kappa(t)=\frac{|\vec{R}'\times\vec{R}''|}{|\vec{R}'|^3}=\frac{\sqrt{\frac{16}{(1-t^2)^3}}}{\left(\sqrt{\frac{4t^2}{1-t^2}+1+3}\right)^3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

برای محاسبه‌ی تاب، با توجه به آن که بردارهای $\vec{R}''(t)$ و $\vec{R}'''(t)$ فقط دارای مؤلفه‌ی $\vec{i}$ هستند، داریم:
$\vec{R}''\times\vec{R}'''=0\Rightarrow\tau=0$

مثال ۱۵: اگر خم هموار C برحسب پارامتر طول قوس به‌صورت $\vec{R}(s)$ پارامتری شده باشد مقدار $(\vec{R}'\times\vec{R}'').\vec{R}'''$ کدام است؟

۱) κ ۲) $\kappa^2\tau$ ۳) τ^2 ۴) 0

پاسخ: گزینه «۲»

روش اول: ابتدا یادآوری می‌کنیم که وقتی معادله پارامتری را برحسب طول قوس می‌نویسیم، همواره تندی حرکت برابر با یک است یعنی $|\vec{R}'(s)|=|\vec{V}(s)|=1$ است. حالا از فرمول $\vec{T}(s)=\frac{\vec{R}'(s)}{|\vec{R}'(s)|}$ نتیجه می‌شود که $\vec{T}(s)=\vec{R}'(s)$ پس $\vec{R}''(s)=\vec{T}'(s)$ است. طبق فرمول فرنه $\vec{T}'(s)=\kappa\vec{N}$ است پس داریم: $\vec{R}''(s)=\kappa\vec{N}$.

$\vec{R}'\times\vec{R}''=\vec{T}\times\kappa\vec{N}=\kappa(\vec{T}\times\vec{N})=\kappa\vec{B}$

تا اینجا $\vec{R}'\times\vec{R}''$ را حساب کردیم فقط باید بتوانیم $\vec{R}'''(s)$ را نیز محاسبه کنیم.

$\vec{R}''(s)=\kappa(s)\vec{N}(s)\Rightarrow\vec{R}'''(s)=\kappa'(s)\vec{N}(s)+\kappa(s)\vec{N}'(s)$

طبق فرمول فرنه $\vec{N}'(s)=-\kappa\vec{T}+\tau\vec{B}$ است. پس داریم:

$\vec{R}'''=\kappa'\vec{N}-\kappa^2\vec{T}+\kappa\tau\vec{B}$

حالا می‌توانیم $(\vec{R}'\times\vec{R}'').\vec{R}'''$ را حساب کنیم. دقت کنید که ضرب داخلی بردارهای عمود بر هم برابر است با صفر:

$$(\vec{R}'\times\vec{R}'').\vec{R}'''=\kappa\vec{B}.(\kappa'\vec{N}-\kappa^2\vec{T}+\kappa\tau\vec{B})=\kappa\kappa'\vec{B}.\vec{N}-\kappa^3\vec{B}.\vec{T}+\kappa^2\tau\vec{B}.\vec{B}=0-0+\kappa^2\tau|\vec{B}|^2=\kappa^2\tau$$

روش دوم: از فرمول محاسبه‌ی تاب استفاده می‌کنیم. طبق این فرمول، پارامتر داده شده هر چه که باشد خواهیم داشت: $\tau=\frac{(\vec{R}'\times\vec{R}'').\vec{R}'''}{|\vec{R}'\times\vec{R}''|^2}$ بنابراین به تساوی مقابل می‌رسیم:

$(\vec{R}'\times\vec{R}'').\vec{R}'''=\tau|\vec{R}'\times\vec{R}''|^2 \quad (1)$

حالا باید بتوانیم مقدار $|\vec{R}'\times\vec{R}''|^2$ را برحسب انحناء و تاب محاسبه کنیم. طبق فرمول انحناء داریم $\kappa=\frac{|\vec{R}'\times\vec{R}''|}{|\vec{R}'|^3}$ پس $|\vec{R}'\times\vec{R}''|=\kappa|\vec{R}'|^3$ است.

اما می‌دانیم که وقتی پارامتر استفاده شده، طول قوس باشد، تندی حرکت برابر با یک است یعنی $|\vec{R}'|=|\vec{V}|=1$ و در نتیجه داریم: $|\vec{R}'\times\vec{R}''|=\kappa$

با استفاده از نتیجه‌ی اخیر و قرار دادن آن در رابطه‌ی (۱) داریم: $(\vec{R}'\times\vec{R}'').\vec{R}'''=\tau\kappa^2$

مثال ۱۶: انحناء منحنی $\vec{R}(t)=e^t\cos t\vec{i}+e^t\sin t\vec{j}+e^t\vec{k}$ در $t=0$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

پاسخ: گزینه «۲»

$\vec{V}(t)=(e^t\cos t-e^t\sin t\,,\,e^t\sin t+e^t\cos t\,,\,e^t)\Rightarrow\vec{V}(0)=(1,1,1)$

$\vec{a}(t)=(-2e^t\sin t,2e^t\cos t,e^t)\Rightarrow\vec{a}(0)=(0,2,1)$

$$\vec{V}(0)\times\vec{a}(0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-1,-1,2)$$

$$\kappa=\frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{|\vec{V}|^3}=\frac{\sqrt{1+1+4}}{(\sqrt{1+1+1})^3}=\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

مثال ۱۷: انحنای منحنی $t>0$ ، $\vec{r}(t)=(\frac{t^3}{3},\frac{t^2}{2},0)$ ، برابر با کدام رابطه است؟ (عمران ـ سراسری ۷۹)

۱) $\kappa=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ ۲) $\kappa=\frac{1}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ ۳) $\kappa=\frac{t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ ۴) $\kappa=\frac{1}{t(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\vec{r}(t)=(\frac{t^3}{3},\frac{t^2}{2},0)\Rightarrow \vec{V}(t)=(t^2,t,0)\Rightarrow \vec{a}(t)=(2t,1,0)$$

$$\vec{V}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ t^2&t&0\\ 2t&1&0\end{vmatrix}=(0,0,-t^2)\Rightarrow \kappa=\frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{|\vec{V}|^3}=\frac{t^2}{(t^4+t^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{t(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال ۱۸: انحناء منحنی $\vec{R}(t)=(\sin t,\cos t,\frac{1}{2}t^2)$ در نقطه $t=0$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۳»

$$\vec{R}(t)=(\sin t,\cos t,\frac{1}{2}t^2)\Rightarrow \vec{V}=\frac{d\vec{R}}{dt}=(\cos t,-\sin t,t)\Rightarrow \vec{V}(0)=(1,0,0)$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=(-\sin t,-\cos t,1)\Rightarrow a(0)=(0,-1,1)$$

چون دو بردار $\vec{V}(0)$ و $\vec{a}(0)$ بر هم عمودند، پس $|\vec{V}\times\vec{a}|=|\vec{V}||\vec{a}|=\sqrt{2}$. در نتیجه داریم:

$$\kappa=\frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{|\vec{V}|^3}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$$

مثال ۱۹: شعاع انحنای منحنی $x^2+xy+y^2=3$ در نقطه $(1,1)$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) ۶ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $\frac{5\sqrt{10}}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که:

$$x^2+xy+y^2=3\Rightarrow 2x+y+xy'+2yy'=0\xrightarrow[y=1]{x=1}y'=-1$$

$$2+y'+y'+xy''+2y'^2+2yy''=0\xrightarrow[y'=-1]{x=y=1}y''=\frac{-2}{3}$$

از طرفی $\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ ، بنابراین داریم:

$$\kappa=\frac{\frac{2}{3}}{(1+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\Rightarrow \rho=\frac{1}{\kappa}=3\sqrt{2}$$

مثال ۲۰: انحناء سهمی به معادله $y=x^2$ در رأس سهمی کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۴» رأس سهمی $y=x^2$ نقطه $(0,0)$ می‌باشد.

$$y=x^2\Rightarrow y'=2x\ ,\ y''=2$$

$$\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}\bigg|_{(0,0)}=2$$

مثال۲۱: انحنای منحنی $y = Lnx$ در نقطه $(1,0)$ کدام مقدار است؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$$y = Lnx \Rightarrow y' = \frac{1}{x}\ ,\ y'' = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow y'\Big|_{(1,0)} = 1\ ,\ y''\Big|_{(1,0)} = -1$$

از طرفی داریم:

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

مثال۲۲: حرکت متحرکی در صفحه xoy با رابطه $R = \vec{i}\cos t + \vec{j}t\sin t$ داده شده است. مؤلفه قائم شتاب کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ ۲) $\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}$ ۳) $\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}$ ۴) $\frac{t^2+2}{\sqrt{t^2+1}}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\vec{R} = (t\cos t, t\sin t) \Rightarrow \vec{V} = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t) \Rightarrow |\vec{V}| = \sqrt{t^2+1}$$

$$\vec{a} = (-2\sin t - t\cos t, 2\cos t - t\sin t) \Rightarrow \vec{V}\times\vec{a} = (0,0,t^2+2)$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{|\vec{V}|^3} = \frac{t^2+2}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow a_N = \kappa|\vec{V}^2| = \frac{t^2+2}{\sqrt{t^2+1}}$$

مثال۲۳: انحنای منحنی C به معادلات پارامتری $y = f(t)$، $x = g(t)$ که درلحظه t در معادلات $y' = 2t$ و $x' = 2$ صدق کند، در لحظه $t = 0$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۴)

۱) $k = 0$ ۲) $k = 1$ ۳) $k = 2$ ۴) $k = \frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|2\times 2 - 0\times 2t|}{(2^2+(2t)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{(4+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{t=0} = \frac{1}{2}$$

مثال۲۴: خمیدگی (یا انحناء) $\kappa(t)$ خم با معادله برداری $\vec{r}(t) = (t+\cos t)\vec{i} + (t-\cos t)\vec{j} + (\sqrt{2}\sin t)\vec{k}$ در یک نقطه کلی خم برابر است با: (معدن ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۴) $|\sin 2t|$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\vec{r}(t) = (t+\cos t, t-\cos t, \sqrt{2}\sin t) \Rightarrow \vec{V}(t) = (1-\sin t, 1+\sin t, \sqrt{2}\cos t)$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = (-\cos t, \cos t, -\sqrt{2}\sin t)\ ,\ |\vec{V}| = \sqrt{(1-\sin t)^2 + (1+\sin t)^2 + 2\cos^2 t} = 2$$

$$\vec{V}(t)\times\vec{a}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1-\sin t & 1+\sin t & \sqrt{2}\cos t \\ -\cos t & \cos t & -\sqrt{2}\sin t \end{vmatrix} = (-\sqrt{2}\sin t - \sqrt{2})\vec{i} + (\sqrt{2}\sin t - \sqrt{2})\vec{j} + 2\cos t\vec{k}$$

$$\Rightarrow |\vec{V}\times\vec{a}| = \sqrt{2(\sin t+1)^2 + 2(\sin t - 1)^2 + 4\cos^2 t} = 2\sqrt{2}$$

انحناء منحنی پارامتری از فرمول $\kappa = \frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{|\vec{V}|^3}$ به دست می‌آید، بنابراین $\kappa = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

مثال ۲۵: انحنای منحنی $\begin{cases} x=\cos u \\ y=\sin u \\ z=u \end{cases}$ در نقطهٔ کلی $\vec{P}(u)$ برابر است با: (مکانیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲»

$$\vec{V}(u)=(-\sin u,\cos u,1),\ \vec{a}(u)=(-\cos u,-\sin u,0)$$

$$\vec{V}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\sin u & \cos u & 1\\ -\cos u & -\sin u & 0\end{vmatrix}=(\sin u,-\cos u,1)\ \Rightarrow |\vec{V}\times\vec{a}|=\sqrt{2},\ |\vec{V}|=\sqrt{2}$$

بنابراین داریم:

$$\kappa=\frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{|\vec{V}|^3}=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3}=\frac{1}{2}$$

مثال ۲۶: انحنای مسیر $\vec{r}(t)=3\cos t\vec{i}+3\sin t\vec{j}+4t\vec{k}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{25}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۲»

$$\vec{r}(t)=(3\cos t,3\sin t,4t)\Rightarrow\vec{V}(t)=(-3\sin t,3\cos t,4)\ \Rightarrow\vec{a}(t)=(-3\cos t,-3\sin t,0)$$

$$\vec{V}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3\sin t & 3\cos t & 4\\ -3\cos t & -3\sin t & 0\end{vmatrix}=(12\sin t,-12\cos t,9)\ \Rightarrow|\vec{V}\times\vec{a}|=15\ ,\ |\vec{V}|=5$$

$$\kappa=\frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{|\vec{V}|^3}=\frac{15}{5^3}=\frac{3}{25}$$

مثال ۲۷: اگر یک متحرک بر روی مسیری با خمیدگی $\kappa(t)\neq 0$ در فضا با سرعت $\vec{V}(t)$ و شتاب $\vec{a}(t)$ حرکت کند، آن‌گاه $\vec{V}\times\vec{a}=\alpha\vec{B}$، که در آن $\vec{B}$ قائم دوم بر خم است. در این صورت ثابت α برابر است با: (هسته‌ای ـ سراسری ۸۵)

۱) $\kappa(t)\|\vec{V}(t)\|$ ۲) $\kappa(t)\|\vec{V}(t)\|^2$ ۳) $\kappa(t)\|\vec{V}(t)\|^3$ ۴) $\kappa(t)$

پاسخ: گزینه «۳» همان‌طور که در متن درس گفتیم، در برخی از منابع، اندازه‌ی بردار $\vec{V}$ را با علامت $\|\vec{V}\|$ نشان می‌دهند.

$$\vec{B}=\frac{\vec{V}\times\vec{a}}{\|\vec{V}\times\vec{a}\|}\ \Rightarrow\vec{V}\times\vec{a}=\vec{B}\|\vec{V}\times\vec{a}\|$$

بنابراین $\alpha=\|\vec{V}\times\vec{a}\|$. از طرفی داریم:

$$\kappa(t)=\frac{\|\vec{V}\times\vec{a}\|}{\|\vec{V}\|^3}\ \Rightarrow\|\vec{V}\times\vec{a}\|=\kappa(t)\|\vec{V}\|^3$$

مثال ۲۸: مقدار انحناء در هر نقطه مارپیچ $\vec{r}(t)=(a\cos\omega t)\vec{i}+(a\sin\omega t)\vec{j}+(b\omega t)\vec{k}$، که در آن a و ω اعدادی ثابت و مثبت هستند، برابر است با: (معدن ـ سراسری ۸۵)

۱) $\kappa=\frac{a^2+b^2}{b}$ ۲) $\kappa=\frac{a^2+b^2}{a}$ ۳) $\kappa=\frac{a}{a^2+b^2}$ ۴) $\kappa=\frac{b}{a^2+b^2}$

پاسخ: گزینه «۳»

روش اول:

$$\vec{V}(t)=(-a\omega\sin\omega t\ ,\ a\omega\cos\omega t\ ,\ b\omega)\ ,\ \vec{a}(t)=(-a\omega^2\cos\omega t,-a\omega^2\sin\omega t,0)$$

$$\vec{V}(t)\times\vec{a}(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -a\omega\sin\omega t & a\omega\cos\omega t & b\omega\\ -a\omega^2\cos\omega t & -a\omega^2\sin\omega t & 0\end{vmatrix}=(ab\omega^3\sin\omega t\ ,\ -ab\omega^3\cos\omega t\ ,\ a^2\omega^3)$$

$$\Rightarrow|\vec{V}\times\vec{a}|=a\omega^3\sqrt{a^2+b^2}\quad,\quad|\vec{V}|=\omega\sqrt{a^2+b^2}$$

$$k=\frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{|\vec{V}|^3}=\frac{a\omega^3\sqrt{a^2+b^2}}{(\omega\sqrt{a^2+b^2})^3}=\frac{a}{a^2+b^2}$$

روش دوم: با فرض $b=0$، خم به صورت روبرو در می‌آید: $\vec{r}(t)=(a\cos\omega t\ ,\ a\sin\omega t\ ,\ 0)$

یعنی در این حالت خم یک دایره به شعاع a می‌باشد که انحناء آن $\frac{1}{a}$ خواهد بود و در بین گزینه‌ها، تنها گزینه (۳) به ازای $b=0$ برابر $\frac{1}{a}$ می‌باشد. پس فقط گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۲۹: انحنای منحنی $y=\frac{1}{6}x^3$ در نقطه $x=1$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{5}{8}$ ۲) 8 ۳) $\frac{8}{5\sqrt{5}}$ ۴) $\frac{5\sqrt{5}}{8}$

پاسخ: گزینه «۳» انحنای منحنی $y=f(x)$ از فرمول مقابل به دست می‌آید: $\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$y=\frac{1}{6}x^3\Rightarrow y'=\frac{1}{2}x^2\Rightarrow y''=x\Rightarrow\kappa=\frac{|x|}{(1+\frac{1}{4}x^4)^{\frac{3}{2}}}\xrightarrow{x=1}\frac{1}{(\frac{5}{4})^{\frac{3}{2}}}=\frac{8}{5\sqrt{5}}$$

مثال ۳۰: برای تابع برداری با ضابطه $\vec{F}(t)=(\cos t,\sin t,t)$ مقدار $\frac{(\vec{F}'\times\vec{F}'').\vec{F}'''}{|\vec{F}'\times\vec{F}''|^2}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) 1

پاسخ: گزینه «۲» مقدار مورد نظر همان تاب منحنی $\vec{F}$ می‌باشد.

$$\vec{F}'(t)=(-\sin t,\cos t,1)\ ,\ \vec{F}''(t)=(-\cos t,-\sin t,0)\ ,\ \vec{F}'''(t)=(\sin t,-\cos t\ ,0)$$

$$\vec{F}'\times\vec{F}''=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-\sin t&\cos t&1\\-\cos t&-\sin t&0\end{vmatrix}=(\sin t,-\cos t,1)$$

$$\Rightarrow|\vec{F}'\times\vec{F}''|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}=\sqrt{2}\ ,\ (\vec{F}'\times\vec{F}'').\vec{F}'''=\sin^2 t+\cos^2 t=1\Rightarrow\frac{(\vec{F}'\times\vec{F}'').\vec{F}'''}{|\vec{F}'\times\vec{F}''|^2}=\frac{1}{(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2}$$

مثال ۳۱: اندازه انحناء مارپیچ $z=\frac{1}{3}t^3$ و $x=t,y=\frac{1}{2}t^2$ در نقطه $A(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{9}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$$\vec{R}(t)=(t,\frac{t^2}{2},\frac{t^3}{3})\Rightarrow\vec{V}(t)=(1,t,t^2)\Rightarrow\vec{a}(t)=(0,1,2t)$$

بنابراین در $t=1$ خواهیم داشت:

$$\vec{V}=(1,1,1)\ ,\ \vec{a}=(0,1,2)\Rightarrow\vec{V}\times\vec{a}=(1,-2,1)\Rightarrow\kappa=\frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{|\vec{V}|^3}=\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

مثال ۳۲: انحناء (یا خمیدگی) خم $\vec{r}(t)=(t+\cos t)\vec{i}+(t-\cos t)\vec{j}+\sqrt{2}\sin t\vec{k}$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\vec{V}(t)=(1-\sin t)\vec{i}+(1+\sin t)\vec{j}+\sqrt{2}\cos t\vec{k}$$

$$\vec{a}(t)=-\cos t\vec{i}+\cos t\vec{j}-\sqrt{2}\sin t\vec{k}$$

$$\vec{V}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1-\sin t&1+\sin t&\sqrt{2}\cos t\\-\cos t&\cos t&-\sqrt{2}\sin t\end{vmatrix}=(-\sqrt{2}\sin t-\sqrt{2})\vec{i}+(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin t)\vec{j}+2\cos t\vec{k}$$

$$|\vec{V}\times\vec{a}|=\sqrt{2(\sin t+1)^2+2(\sin t-1)^2+4\cos^2 t}=\sqrt{8}$$

$$|\vec{V}|=\sqrt{(1-\sin t)^2+(1+\sin t)^2+2\cos^2 t}=2\Rightarrow\kappa=\frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{|\vec{V}|^3}=\frac{\sqrt{8}}{2^3}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

مثال ۳۳: اگر $xy=1$ معادله منحنی C باشد، شعاع انحناء C در نقطه $(1,1)$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) ۱
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۴) $\sqrt{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» عکس انحناء یعنی $\frac{1}{\kappa}$ را شعاع انحناء می‌گویند. حال توجه کنید که:

$$y=\frac{1}{x}\Rightarrow y'=\frac{-1}{x^2},\ y''=\frac{2}{x^3}\Rightarrow y'(1)=-1,\ y''(1)=2$$

$$\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{(1+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow r=\frac{1}{\kappa}=\sqrt{2}$$

مثال ۳۴: خمیدگی منحنی $x=\text{Ln}(\sec y)$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۸)

۱) $|\sin y|$
۲) $|\cos y|$
۳) $|\sec y|$
۴) $|tgy|$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم که اگر منحنی به صورت $x=f(y)$ باشد، خمیدگی (انحناء) از فرمول $\kappa=\frac{|f''(y)|}{(1+f'^2(y))^{\frac{3}{2}}}$ به دست می‌آید.

$$x=\text{Ln}(\sec y)\Rightarrow x'=tgy\Rightarrow x''=1+tg^2y\Rightarrow\kappa=\frac{1+tg^2y}{(1+tg^2y)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2y}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 y}}}=|\cos y|$$

مثال ۳۵: مقدار انحناء منحنی به معادله $y=\sqrt{x}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{2}{27}$
۲) $\frac{3}{16}$
۳) $\frac{2}{9}$
۴) $\frac{3}{8}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» انحناء منحنی $y=f(x)$ از فرمول $\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ به دست می‌آید.

$$y=\sqrt{x}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow y'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2}},\ y''=\frac{-1}{4x\sqrt{x}}\Rightarrow y''(2)=\frac{-1}{8\sqrt{2}}$$

$$\kappa=\frac{\frac{1}{8\sqrt{2}}}{(1+\frac{1}{8})^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{8\sqrt{2}}}{\frac{27}{16\sqrt{2}}}=\frac{2}{27}$$

مثال ۳۶: انحنای خم $\vec{R}(t)=(t+\cos t,t-\cos t,\sqrt{2}\sin t)$ در یک نقطه به پارامتر t کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۹)

۱) $\kappa=\frac{\sqrt{2}}{4}$
۲) $\kappa=\frac{\sqrt{2}}{4}t$
۳) $\kappa=\frac{\sqrt{2}}{8}$
۴) $\kappa=\frac{\sqrt{2}}{8}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» انحنای منحنی از رابطه $\kappa=\frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{|\vec{V}|^3}$ به دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)=(1-\sin t,1+\sin t,\sqrt{2}\cos t)$$

$$\vec{a}(t)=\vec{R}''(t)=(-\cos t,\cos t,-\sqrt{2}\sin t)$$

$$\vec{V}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1-\sin t&1+\sin t&\sqrt{2}\cos t\\-\cos t&\cos t&-\sqrt{2}\sin t\end{vmatrix}=(-\sqrt{2}\sin t-\sqrt{2})\vec{i}+(\sqrt{2}\sin t-\sqrt{2})\vec{j}+(2\cos t)\vec{k}$$

$$\Rightarrow|\vec{V}\times\vec{a}|=\sqrt{(\sqrt{2}\sin t+\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}\sin t-\sqrt{2})^2+(2\cos t)^2}=2\sqrt{2}$$

$$|\vec{V}|=\sqrt{(1-\sin t)^2+(1+\sin t)^2+(\sqrt{2}\cos t)^2}=2$$

$$\Rightarrow\kappa=\frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{|\vec{V}|^3}=\frac{2\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

مثال ۳۷: فرض کنید $\vec{R}(t)=(e^t\sin t)\vec{i}+(e^t\cos t)\vec{j}+t\vec{k}, t\in\mathbb{R}$ در اینصورت خمیدگی منحنی فوق در نقطه $t=0$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ ۲) $(\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}}$ ۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۴) $(\frac{2}{3})^{\frac{3}{2}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» خمیدگی منحنی $\vec{R}(t)$ در نقطه $t=0$ برابر است با $\kappa=\frac{|\vec{V}(0)\times\vec{a}(0)|}{|\vec{V}(0)|^3}$ که در آن $\vec{V}(0)=\frac{d\vec{R}(t)}{dt}\Big|_{t=0}$ و $\vec{a}(0)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\Big|_{t=0}$ می‌باشد. با توجه به منحنی داده شده به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{V}(t)=(e^t\sin t+e^t\cos t)\vec{i}+(e^t\cos t-e^t\sin t)\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow \vec{v}(0)=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

$$\vec{a}(t)=(e^t(\sin t+\cos t)+e^t(\cos t-\sin t))\vec{i}+(e^t(\cos t-\sin t)+e^t(-\sin t-\cos t))\vec{j}\Rightarrow \vec{a}(0)=2\vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(0)\times\vec{a}(0)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\2&0&0\end{vmatrix}=2\vec{j}-2\vec{k}\Rightarrow|\vec{V}(0)\times\vec{a}(0)|=2\sqrt{2}$$

$$|\vec{V}(0)|=\sqrt{3}\Rightarrow|\vec{V}(0)|^3=3\sqrt{3}\Rightarrow t=0 \text{ خمیدگی منحنی در } =\kappa=\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=(\frac{2}{3})^{\frac{3}{2}}$$

مثال ۳۸: بیشترین مقدار انحنای منحنی به معادله $y=\mathrm{Ln}(\sec x)$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» انحنای منحنی $y=f(x)$، از رابطه $\kappa=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$ به‌دست می‌آید. با توجه به اینکه $\kappa=\cos x$ است پس بیشترین مقدار انحنای منحنی برابر ۱ خواهد بود.

مثال ۳۹: مقدار انحنای منحنی تابع $f(x)=xe^{-x}$ در مبداء مختصات کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۰)

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای تابع $y=f(x)$، انحنای از رابطه مقابل محاسبه می‌شود:

$$\kappa(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

انحنای تابع $f(x)=xe^{-x}$ را محاسبه می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}y'=e^{-x}-xe^{-x}\xrightarrow{x=0}y'(0)=e^0=1\\ y''=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=-2e^{-x}+xe^{-x}\xrightarrow{x=0}y''(0)=-2e^0=-2\end{cases}$$

مقادیر فوق را در رابطه انحنای جایگذاری می‌کنیم.

$$\kappa(x)\Big|_{x=0}=\frac{|y''(0)|}{(1+y'^2(0))^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{(1+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال ۴۰: خمیدگی (انحنای) خم با معادلهٔ $\vec{R}(t)=(3\cos 3t)\vec{i}+(3\sin 3t)\vec{j}+2t\vec{k}$ چقدر است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{9}{85}$ ۲) $\frac{27}{85}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{9}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» خمیدگی منحنی $\vec{R}(t)$ از رابطه مقابل محاسبه می‌شود.

$$\kappa=\frac{|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)|}{|\vec{R}'(t)|^3}$$

$$\vec{R}'(t)=(-9\sin 3t, 9\cos 3t, 2)\ ,\ \vec{R}''(t)=(-27\cos 3t, -27\sin 3t, 0)$$

$$\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-9\sin 3t&9\cos 3t&2\\-27\cos 3t&-27\sin 3t&0\end{vmatrix}=(54\sin 3t, -54\cos 3t, 243)$$

اندازه بردار فوق را محاسبه می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)|=\sqrt{(54\sin 3t)^2+(-54\cos 3t)^2+(243)^2}=\sqrt{61965}$$

اندازه بردار $\vec{R}'(t)$ برابر است با:

$$|\vec{R}'(t)|=\sqrt{(-9\sin 3t)^2+(9\cos 3t)^2+4}=\sqrt{85}$$

حال مقادیر فوق را در رابطه خمیدگی منحنی جایگذاری می‌کنیم:

$$\kappa=\frac{\sqrt{61965}}{85\sqrt{85}}=\frac{(\sqrt{729})(\sqrt{85})}{85(\sqrt{85})}=\frac{27}{85}$$

مدرسان شریف

فصل سوم

«توابع چند متغیره»

درسنامه: دامنه، برد، حد و پیوستگی توابع چند متغیره

مثال ۱: اگر تابع $f:\mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۲$، با ضابطه $f(x,y,z)=(xy,yz)$ و تابع $g:\mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۳$ با ضابطه $g(x,y)=(e^{x+y},e^{x-y},e^{y})$ تعریف شده باشد، در این صورت fog را به‌دست آورید.

۱) $(e^{۲x},e^{x})$ ۲) (e^{x},e^{y},e^{x+y}) ۳) (e^{x-y},e^{x+y}) ۴) (e^{x},e^{x+y})

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مشابه توابع یک متغیره منظور از fog این است که $f(g(x,y))$ را به‌دست آوریم، یعنی داریم:

$$fog=f(g(x,y))=f(e^{x+y},e^{x-y},e^{y})=(e^{x+y}.e^{x-y},e^{x-y}.e^{y})=(e^{۲x},e^{x})$$

مثال ۲: دامنه تعریف تابع $f(x,y)=\sqrt{xy}+\sin^{-۱}x$ کدام است؟

۱) $D=\{(x,y)\,|\,-۱\le x\le ۱$ و x و y هم علامت‌اند$\}$

۲) $D=\{(x,y)\,|\,x\in\mathbb{R}^{+}$ و x و y هم علامت‌اند$\}$

۳) $D=\{(x,y)\,|\,-\frac{\pi}{۲}\le x\le \frac{\pi}{۲}$ و x و y هم علامت‌اند$\}$

۴) $D=\{(x,y)\,|\,-۱< x< ۱$ و x و y هم علامت‌اند$\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» عبارت زیر رادیکال، یعنی xy باید نامنفی باشد، بنابراین x و y باید هم علامت باشند. عبارت مقابل $\sin^{-۱}$ همواره باید بین ۱- و ۱ باشد یعنی $-۱\le x\le ۱$.

مثال ۳: برد تابع دو متغیره $z=\sqrt{۹-x^۲-y^۲}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^{+}$ ۳) $[۰,۳]$ ۴) $\mathbb{R}-\{۰\}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» از آنجائیکه $-x^۲-y^۲$ همواره کوچکتر یا مساوی صفر می‌باشد، پس مقدار زیر رادیکال کوچکتر یا مساوی ۹ خواهد بود. لذا مقدار z از عدد ۳ نمی‌تواند بیشتر باشد، و همچنین واضح است که z منفی نیست؛ چون رادیکال با فرجه‌ی زوج نمی‌تواند منفی باشد.

مثال ۴: برد تابع دو متغیره $z=\sqrt{۱۲-۴x^۲-y^۲+۱۲x+۴y}$ کدام بازه است؟

۱) $[۰,۵]$ ۲) $[۰,۴]$ ۳) $[۱,۵]$ ۴) $\left[۱,۲\sqrt{۳}\right]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» عبارت زیر رادیکال را مربع کامل می‌کنیم.

$$۱۲-۴x^۲-y^۲+۱۲x+۴y=۱۲-۴(x-\frac{۳}{۲})^۲-(y-۲)^۲+۱۳=۲۵-۴(x-\frac{۳}{۲})^۲-(y-۲)^۲\le ۲۵$$

از طرفی عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد و لذا این عبارت در بازه $[۰,۲۵]$ و بنابراین z در بازه $[۰,۵]$ قرار می‌گیرد.

مثال ۵: با چه شرطی حد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^p}$ **وجود دارد؟ (p، m و n اعدادی طبیعی هستند.)**

۱) $m+n \ge 2p$ ۲) $m+n > 2p$ ۳) $m+n > 2p+1$ ۴) $m+n \ge 2p+1$

پاسخ: گزینه «۲»

روش اول: حد موردنظر به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است و برای وجود حد لازم است که درجه صورت از درجه مخرج بزرگ‌تر باشد. درجه صورت برابر $m+n$ و درجه مخرج برابر $2p$ می‌باشد؛ بنابراین باید $m+n > 2p$ باشد.

روش دوم: با توجه به وجود x^2+y^2 در مخرج، از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. با جایگذاری $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ داریم:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^{m+n}\cos^m\theta\sin^n\theta}{r^{2p}} = \lim_{r\to 0} r^{m+n-2p}\cos^m\theta\sin^n\theta$$

با این شرط که $m+n > 2p$ باشد، مقدار حد صفر می‌شود و به θ بستگی نخواهد داشت.

مثال ۶: مقدار حد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{y+x^2}$ **چقدر است؟**

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) حد وجود ندارد.

پاسخ: گزینه «۴» در این مثال تنها ریشه‌ی مخرج، مبدأ نیست، بلکه روی مسیر $y=-x^2$ مخرج کسر صفر می‌شود؛ بنابراین حد وجود ندارد. اما اگر بخواهیم با انتخاب مسیر، مسأله را حل کنیم روی مسیرهای معمولی $y = mx$ ، $y = 0$ یا $x = 0$ مقدار حد صفر می‌شود. بهتر است مسیری را انتخاب کنیم که جملات صورت و مخرج را هم‌درجه کند. برای رسیدن به این هدف باید x^2 را از مخرج حذف کنیم؛ پس مسیر $y=-x^2+mx^3$ مناسب است.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+(-x^2+mx^3)^3}{(-x^2+mx^3)+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^6(-1+mx)^3}{mx^3} \xrightarrow{\text{کمترین درجه}} \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{mx^3} = \frac{1}{m}$$

بنابراین حد وجود ندارد.

مثال ۷: اگر $A = \lim\limits_{(x,y)\to(1,\infty)} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2y^2+1}$ **و** $B = \lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2+1}{x^2y^2+1}$ **، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟**

۱) $A = B = 1$ ۲) $A = B = 0$ ۳) $A - B = 1$ ۴) $B - A = 1$

پاسخ: گزینه «۲» برای محاسبه‌ی A با جایگذاری $x=1$ و $y\to\infty$ نتیجه می‌شود:

$$A = \lim_{(x,y)\to(1,\infty)} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2y^2+1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

برای محاسبه‌ی B روی مسیر $y = x$ ، حد را حساب می‌کنیم:

$$B = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^4} = 0$$

بنابراین $A = B = 0$ است.

مثال ۸: در مورد حد $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)} \frac{x^2-9}{y+1}$ **کدام گزینه صحیح است؟**

۱) حد موجود و برابر -3 است. ۲) حد موجود و برابر ۶ است. ۳) حد موجود و برابر ۱ است. ۴) حد وجود ندارد.

پاسخ: گزینه «۴» نقطه‌ی $(3,-1)$ تنها ریشه‌ی مخرج نیست، بلکه روی خط $y=-1$ مخرج صفر می‌شود؛ پس حد وجود ندارد. با این حال مسأله را از طریق مسیرها هم بررسی می‌کنیم. اگر روی مسیر $x = 3$ به نقطه $(3,-1)$ میل کنیم، در این صورت حد به‌صورت مقابل درمی‌آید: $\lim\limits_{y\to -1}\frac{9-9}{y+1} = \lim\limits_{y\to -1}\frac{0}{y+1} = 0$

ولی اگر روی مسیر $x=-3y$ به نقطه $(3,-1)$ نزدیک شویم، در این صورت حد به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{y\to -1}\frac{(-3y)^2-9}{y+1} = \lim_{y\to -1}\frac{9y^2-9}{y+1} = \lim_{y\to -1} 9(y-1) = -18$$

چون روی دو مسیر مختلف جواب‌های متفاوتی به‌دست آمد، پس حد وجود ندارد.

توضیح: ممکن است دانشجو از خود بپرسد مسیر $x=-3y$ بر چه اساسی انتخاب شد؟ در واقع $x=-3y$ خطی است که از نقطه $(3,-1)$ عبور می‌کند. شما می‌توانید هر خط یا منحنی دیگری را که از این نقطه می‌گذرد، انتخاب کنید، مثلاً $x = 3y^2$ یا $y = x-4$.

مثال ۹: مقدار حد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^3+y^3}$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 0 ۳) ∞ ۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینه «۴» دانشجوی عجول ممکن است بلافاصله گزینه (۲) را انتخاب کند؛ چون درجه صورت از مخرج بیشتر است. ولی توجه کنید که تنها ریشه مخرج مبدأ مختصات نیست. در واقع روی خط $y=-x$ این تابع تعریف نشده است؛ بنابراین حد وجود ندارد. اما اگر بخواهیم با انتخاب مسیر، مسأله را حل کنیم، روی همه‌ی مسیرهای معمول مقدار حد صفر می‌شود. مسیری را انتخاب می‌کنیم که باعث شود صورت و مخرج هم‌درجه شوند (البته منظور کوچک‌ترین درجه از صورت و مخرج است). صورت از درجه ۵ است؛ پس انتخاب مسیر $y^3=-x^3+mx^5$ مناسب است. با جایگذاری این مسیر، x^3 از مخرج حذف می‌شود و mx^5 باقی می‌ماند:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^3+y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(-x^3+mx^5)}{x^3-x^3+mx^5} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-x^5+mx^7}{mx^5}\right) \xrightarrow{\text{کمترین درجه}} \lim_{x\to 0}\frac{-x^5}{mx^5} = -\frac{1}{m}$$

بنابراین حاصل حد برابر $\frac{-1}{m}$ به‌دست می‌آید و چون مقدار حد وابسته به m است، حد وجود ندارد.

مثال ۱۰: وضعیت تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ; (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; (x,y)=(0,0)\end{cases}$ در نقطه $(0,0)$ چگونه است؟

۱) پیوسته است. ۲) حد دارد اما پیوسته نیست. ۳) حد وجود ندارد. ۴) تابع در این نقطه تعریف نشده است.

پاسخ: گزینه «۱»

روش اول: با توجه به صورت سؤال f در $(0,0)$ تعریف شده است و $f(0,0)=0$ می‌باشد. توجه کنید که حد f در نقطه $(0,0)$ برابر صفر است؛ زیرا درجه صورت بیشتر از درجه مخرج است و تنها ریشه مخرج $(0,0)$ است و جملات مخرج هم‌درجه هستند؛ پس مقدار حد با مقدار $f(0,0)$ برابر است و f در مبدأ پیوسته است.

روش دوم: با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos^2\theta\times r^2\sin^2\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^2\cos^2\theta\sin^2\theta = 0$$

مثال ۱۱: کدام تابع را در نقطه $(0,0)$ می‌توان طوری تعریف کرد که تابع در این نقطه پیوسته شود؟

۱) $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ ۲) $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ ۳) $f(x,y)=\frac{xy}{x-y}$ ۴) $f(x,y)=\frac{x^2}{x+y}$

پاسخ: گزینه «۲» تنها گزینه (۲) در $(0,0)$ حدی برابر صفر دارد و سایر گزینه‌ها در $(0,0)$ حد ندارند و در نتیجه نمی‌توانند در $(0,0)$ پیوسته باشند. در گزینه (۱) درجه صورت و مخرج برابرند؛ پس حد وجود ندارد. در گزینه (۳) روی خط $y=x$ و در گزینه‌ی (۴) روی خط $y=-x$ مخرج صفر می‌شود؛ پس حد وجود ندارد.

مثال ۱۲: مقدار $f(0,0)$ چقدر باشد تا تابع $f(x,y)=\frac{\sin x\sin^3 y}{1-\cos(x^2+y^2)}$ در نقطه $(0,0)$ پیوسته شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) 0 ۴) ممکن نیست.

پاسخ: گزینه «۴» در روی مسیر $y=0$، حد f برابر صفر است ولی در روی مسیر $y=x$ با استفاده از هم‌ارزی‌های $\sin u \sim u$ و $1-\cos u \sim \frac{u^2}{2}$ داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x.\sin^3 x}{1-\cos(2x^2)} \overset{\text{هم‌ارزی}}{\sim} \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

پس حد وجود ندارد و بنابراین f نمی‌تواند در نقطه $(0,0)$ پیوسته شود.

مثال ۱۳: تابع $f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$ در کجا پیوسته <u>نیست</u>؟

۱) محور x ها ۲) محور y ها ۳) مبدأ مختصات ۴) روی خط $y=x$

پاسخ: گزینه «۱» تابع در کلیه نقاط دامنه پیوسته است، بنابراین فقط در ریشه مخرج یعنی $y=0$ (محور x ها) تابع پیوسته نیست.

مثال ۱۴: تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x^3-y} & ; \quad y\neq x^3\\ 1 & ; \quad y=x^3\end{cases}$ در نقطه $(1,1)$ چگونه است؟

۱) حد دارد. ۲) پیوسته است. ۳) ناپیوسته است. ۴) دارای حد $\frac{1}{3}$ است.

پاسخ : گزینه «۳» حد f را روی دو مسیر $y=x$ و $y=x^2$ که هر دو از نقطه $(1,1)$ می‌گذرند به‌دست می‌آوریم:

روی مسیر $y=x$: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x-y}{x^3-y}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x}{x^3-x}=0$

روی مسیر $y=x^2$: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x-y}{x^3-y}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^2}{x^3-x^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(1-x)}{x^2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{x}=-1$

چون روی دو مسیر مختلف حد به‌دست آمده برابر نیست، پس حد وجود ندارد و بنابراین تابع پیوسته نیست.

مثال ۱۵: مقدار $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xye^{xy}}{x^2+y^2}$ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۸)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) وجود ندارد.

پاسخ : گزینه «۴» اگر روی خط $y=mx$ به مبدأ نزدیک شویم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xye^{xy}}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2e^{mx^2}}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{me^{mx^2}}{1+m^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

چون حاصل حد به m بستگی دارد، پس حد وجود ندارد.

مثال ۱۶: اگر $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{|x|+|y|} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ a & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ بر $\mathbb{R}^2$ پیوسته باشد، a کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) 2

پاسخ : گزینه «۱»

روش اول: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{|x|+|y|}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(\dfrac{x}{|x|+|y|})\times y=($محدود بین ۱- و ۱$)\times 0=0$

بنابراین برای پیوستگی لازم است $a=0$ باشد.

روش دوم: درجه صورت برابر ۲ و درجه مخرج برابر ۱، و تنها ریشه مخرج مبدأ مختصات یعنی $(0,0)$ است بنابراین حد f در مبدأ موجود و برابر صفر است و در نتیجه برای پیوستگی لازم است $a=0$.

مثال ۱۷: اگر $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ با ضابطه $f(x,y)=(x+y,x,y)$ و $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ با ضابطه $g(x,y,z)=(x+y,y+z)$ مفروض باشند، (gof) کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) $gof(x,y)=(x+y,2x+y)$ ۲) $gof(x,y)=(2x+y,x+y)$

۳) $gof(x,y)=(x+2y,x+y)$ ۴) $gof(x,y)=(x+y,x+2y)$

پاسخ : گزینه «۲» در تابع $g(x,y,z)$ باید به جای x، y و z به ترتیب $x+y$، x و y را قرار بدهیم:

$$gof(x,y)=g(x+y,x,y)=(x+y+x,x+y)=(2x+y,x+y)$$

مثال ۱۸: حد تابع $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{y}$ چقدر است؟ (آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) حد برابر ۱- است. ۲) حد برابر صفر است. ۳) حد برابر ۱ است. ۴) حد وجود ندارد.

پاسخ : گزینه «۴» در امتداد مسیر $x=0$، حد را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}=\pm\infty$$

چون در امتداد مسیر $x=0$، حد وجود ندارد، پس تابع f در $(0,0)$ حد ندارد.

مثال ۱۹: در مورد $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \dfrac{\mathrm{Arctg}(3xy-3y)}{\mathrm{Arcsin}(2xy-6x)}$ کدام گزینه صحیح است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) حد موجود و برابر $\frac{1}{2}$ است. ۲) حد موجود نیست. ۳) حد موجود و برابر $\frac{3}{2}$ است. ۴) حد موجود و برابر ۱ است.

پاسخ: گزینه «۲» چون کمان‌های مقابل Arctg و Arcsin به سمت صفر میل می‌کنند، می‌توانیم از هم‌ارزی استفاده کنیم:

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{\mathrm{Arctg}(3xy-3y)}{\mathrm{Arcsin}(2xy-6x)} = \lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{3xy-3y}{2xy-6x}$$

حال توجه کنید که روی مسیر $x=1$ حد برابر ۰ می‌شود، اما روی مسیر $y=3x$ داریم $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{9x^2-9x}{6x^2-6x} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{9x(x-1)}{6x(x-1)} = \dfrac{9}{6}$. بنابراین حد وجود ندارد.

مثال ۲۰: در مورد $\lim\limits_{(x,y)\to(4,\pi)} x^2 \sin(\frac{y}{x})$ کدام گزینه صحیح است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) حد موجود و برابر 8π است. ۲) حد موجود و برابر $8\sqrt{2}$ است. ۳) حد موجود و برابر $4\pi^2$ است. ۴) حد موجود نیست.

پاسخ: گزینه «۲» با جایگذاری مقدار حد به‌دست می‌آید:

$$\lim_{(x,y)\to(4,\pi)} x^2 \sin(\frac{y}{x}) = 16\sin\frac{\pi}{4} = 8\sqrt{2}$$

مثال ۲۱: حاصل $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) وجود ندارد. ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۳» بر روی مسیر $x=0$، مقدار حد برابر صفر می‌شود و در روی مسیر $y=x^2$ داریم:

$$I = \lim_{x\to0} \frac{2x^4}{x^4+x^4} = 1$$

چون بر روی دو مسیر مختلف، دو مقدار مختلف برابر حد به‌دست آمد، بنابراین حد وجود ندارد.

مثال ۲۲: کدامیک از توابع زیر در نقطه $(0,0)$ دارای حد می‌باشند؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۸۵)

الف) $\dfrac{x-y}{x+y}$ ب) $\dfrac{xy}{|xy|}$ ج) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ د) $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

۱) فقط د ۲) ج و د ۳) فقط ب ۴) د و الف

پاسخ: گزینه «۱»

روش اول: موارد (الف)، (ج)، روی خط $y=mx$، دارای حد وابسته به m خواهند بود، مثلاً برای (ج) روی مسیر $y=mx$ داریم:

$$\lim_{x\to0} \frac{x(mx)}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to0} \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

بنابراین حد ندارند. برای (ب) با توجه به علامت x و y مقادیر ±1 به‌دست می‌آید پس حد وجود ندارد. حال نشان می‌دهیم مورد (د)، در $(0,0)$ دارای حد است.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (\frac{x^2}{x^2+y^2})y^2 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0$$

روش دوم: چون درجه صورت بیشتر از مخرج و تنها ریشه مخرج مبدأ یعنی $(0,0)$ و جملات مخرج هم درجه هستند، بنابراین حد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ موجود و برابر صفر است.

مثال ۲۳: تابع $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ وقتی که $(x,y)\to(0,0)$ دارای حدی: (عمران ـ سراسری ۸۶)

۱) برابر ۱- است. ۲) برابر ۱ است. ۳) برابر ∞ است. ۴) نیست.

پاسخ: گزینه «۴»

روش اول: درجه‌ی جملات صورت و مخرج برابر است، پس حد در $(0,0)$ وجود ندارد.

روش دوم: حد تابع داده شده را روی مسیر $y=mx$ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

با توجه به اینکه حاصل حد به مقدار m بستگی دارد، پس تابع در $(0,0)$ دارای حد نیست.

مثال ۲۴: کدام تابع در نقطه $(0,0)$ پیوسته است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی سراسری ۸۸)

۱) $x^2+y^2 \neq 0$ و $f(x,y)=\dfrac{xy\sin x}{x^2+y^2}$ و $f(0,0)=0$

۲) $x^2+y^2 \neq 0$ و $g(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2-y^2}$ و $g(0,0)=0$

۳) $(x,y)\neq(0,0)$ و $h(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ و $h(0,0)=0$

۴) $(x,y)\neq(0,0)$ و $k(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ و $k(0,0)=0$

پاسخ : گزینه «۱» به کمک هم‌ارزی $\sin x \sim x$، می‌توان نوشت:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$$ (چون درجه صورت از مخرج بیشتر است.)

و چون $f(0,0)=0$ پس این تابع پیوسته است.

در گزینه (۲) و (۴) درجه صورت و مخرج برابرند پس این توابع فاقد حد در مبدأ بوده و لذا ناپیوسته‌اند. گزینه (۳) در مبدأ حد ندارد، زیرا روی مسیر $x=y^2$ مقدار حد برابر $\frac{1}{2}$ و روی مسیر $x=0$، حد آن برابر صفر می‌شود، بنابراین h در $(0,0)$ پیوسته نیست.

مثال ۲۵: مقدار $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x-y}{x^2-y^2}$ کدام است؟ (ریاضی ـ آزاد ۸۸)

۱) صفر
۲) ۲
۳) موجود نیست.
۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۳» درجه‌ی جملات مخرج بیشتر از جملات صورت است؛ پس حد در $(0,0)$ وجود ندارد.

مثال ۲۶: اگر $f(x,y)=\dfrac{3xy^2}{x^2+y^4}$ آن‌گاه مقدار $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۹۰)

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۳
۴) موجود نیست

پاسخ : گزینه «۴» مسیری را انتخاب می‌کنیم که درجه‌ی جملات مخرج را یکسان کند. پس روی مسیر $x=my^2$ به سمت نقطه $(0,0)$ میل می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{3my^2\times y^2}{(my^2)^2+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{3my^4}{m^2y^4+y^4}=\frac{3m}{m^2+1}$$

از آنجایی که پاسخ حد وابسته به مقدار m می‌باشد بنابراین حد تابع موجود نیست.

مثال ۲۷: حد تابع $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ در نقطه $(0,0)$ در امتداد خط $y=2x$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۹۰)

۱) ۰/۲
۲) ۰/۴
۳) ۰/۶
۴) ۰/۸

پاسخ : گزینه «۲» برای یافتن حد در مسیر داده شده کافی است که رابطه $y=2x$ را در تابع داده شده قرار دهیم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}\xrightarrow{y=2x}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\times 2x}{x^2+4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{5x^2}=0/4$$

درسنامه۲: مشتق جزئی توابع چند متغیره

مثال۱: تابع f به‌صورت $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^۲-y^۲)}{x^۲+y^۲} & ; \quad (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & ; \quad (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ تعریف شده است. در این صورت حاصل $\dfrac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۰,۰)$ و $\dfrac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}(۰,۰)$ بـه ترتیـب کدام است؟

۱) ۰ و ۰ ۲) ۱ و ۱- ۳) ۱- و ۱ ۴) ۱ و ۱

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ را در همه نقاط به‌دست می‌آوریم، توجه کنید که برای محاسبه این مقادیر در مبدأ باید از تعریف اسـتفاده کنـیم چون ضابطه تابع f در مبدأ تغییر می‌کند. ولی برای محاسبه $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ در سایر نقاط فقط کافی است از ضابطه بالایی مشتق بگیرید.

$$f_x(۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(h,۰)-f(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۰-۰}{h}=۰$$

به همین ترتیب $f_y(۰,۰)=۰$ به‌دست می‌آید.

$$f_x=\begin{cases}\dfrac{y(x^۴+۴x^۲y^۲-y^۴)}{(x^۲+y^۲)^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}\qquad f_y=\begin{cases}\dfrac{x(x^۴-۴x^۲y^۲-y^۴)}{(x^۲+y^۲)^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

حال اگر f_x به‌دست آمده در بالا را به عنوان یک تابع بر حسب x و y در نظر بگیریم، می‌توانیم مشتق جزئی آن را نسبت به y در مبدأ محاسبه کنیم.

$$f_{xy}(۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f_x(۰,h)-f_x(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-h-۰}{h}=-۱$$

از محاسبه بالا نتیجه می‌شود که $\dfrac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}(۰,۰)=-۱$ می‌باشد، با انجام محاسبات مشابه نتیجه می‌شود که $\dfrac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۰,۰)=۱$ می‌باشد.

سؤال دانشجو: پس چرا در این سؤال $\dfrac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}$ ، $\dfrac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}$ برابر نیستند، مگر نگفتید این دو همواره برابرند؟

پاسخ: می‌دانیم در اغلب سؤال‌ها این دو یعنی $\dfrac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}$ و $\dfrac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}$ (مشتقات مخلوط) با هم برابرند ولی این در حالت کلـی برقـرار نیسـت و بـرای برابـری لازم است این مشتق‌ها پیوسته باشند. بهتر است این مثال را به خاطر بسپارید چون بارها سؤال آمده و در کل سؤال جالب و مهمی است.

مثال۲: کدام گزینه در مورد تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^۲+y^۲} & ; \quad (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & ; \quad (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ در مبدأ صحیح است؟

۱) f مشتق‌پذیر است. ۲) f پیوسته است. ۳) f فاقد مشتق‌های نسبی است. ۴) f حد ندارد.

پاسخ: گزینه «۴» چون درجه صورت و مخرج با هم برابر است، پس f در مبدأ حد ندارد و لذا پیوسته و مشتق‌پذیر نیسـت. توجـه کنیـد کـه f در مبدأ دارای مشتق‌های نسبی است، زیرا داریم:

$$f_x(۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(h,۰)-f(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۰-۰}{h}=۰$$

به طور مشابه $f_y(۰,۰)=۰$ است.

مثال۳: از رابطه $f(x,y)=۲\mathrm{Arctg}\dfrac{y}{x}$ ، دیفرانسیل کامل تابع در نقطه (۱و۱) کدام است؟

۱) $dx+dy$ ۲) $-dx-dy$ ۳) $-dx+dy$ ۴) $dx-dy$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ را در نقطه (۱و ۱) به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\frac{-۲y}{x^۲}}{۱+\frac{y^۲}{x^۲}}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\frac{۲}{x}}{۱+\frac{y^۲}{x^۲}}\xrightarrow{(x,y)=(۱,۱)}\frac{\partial f}{\partial x}=-۱\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}=۱$$

بنابراین دیفرانسیل کامل تابع برابر است با:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=-dx+dy$$

مثال ۴: اگر $u = x^y$ باشد آن‌گاه دیفرانسیل کامل u کدام است؟

۱) $du = x^y \operatorname{Ln} x dx + yx^{y-1} dy$ ۲) $du = yx^{y-1}dx + yx^{y-1}dy$ ۳) $du = x^y \operatorname{Ln} x dx + x^{y-1}\operatorname{Ln} y dy$ ۴) $du = yx^{y-1}dx + x^y \operatorname{Ln} x dy$

پاسخ : گزینه «۴»

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = yx^{y-1}dx + x^y \operatorname{Ln} x dy$$

مثال ۵: دیفرانسیل تابع دو متغیری $z = \frac{x+y}{x-y}$ در نقطه (۱، ۲) در امتداد مسیری که تغییرات y نصف تغییرات x باشد، کدام است؟

۱) $-dx$ ۲) dx ۳) صفر ۴) $2dx$

پاسخ: گزینه «۳» چون $z_x = \frac{-2y}{(x-y)^2} = -2$ و $z_y = \frac{2x}{(x-y)^2} = 4$ و $dy = \frac{1}{2}dx$ داریم:

$$dz = z_x dx + z_y dy = -2dx + 4dy = -2dx + 2dx = 0$$

مثال ۶: هرگاه $z = av$ و $y = u\sin v$ و $x = u\cos v$ باشد، d^2z برابر است با:

۱) $d^2z = \frac{ax^2}{(x^2+y^2)^2}dx^2 + \frac{2axy}{(x^2+y^2)^2}dxdy + \frac{ay^2}{(x^2+y^2)^2}dy^2$

۲) $d^2z = \frac{2axy}{(x^2+y^2)^2}dx^2 + \frac{-2axy}{(x^2+y^2)}dy^2$

۳) $d^2z = \frac{2axy}{(x^2+y^2)^2}dx^2 + \frac{2a(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}dxdy - \frac{2axy}{(x^2+y^2)^2}dy^2$

۴) $d^2z = \frac{2ax^2}{(x^2+y^2)^2}dx^2 + \frac{-2ay^2}{(x^2+y^2)}dy^2$

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم d^2z یعنی دیفرانسیل دوم تابع z، برابر است با:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a\frac{\partial v}{\partial x} \text{ و } \frac{\partial z}{\partial y} = a\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial v}{\partial x}\right) = a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \text{ و } \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = a\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} \text{ و } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

بنابراین باید مشتقات پاره‌ای مرتبه دوم v را نسبت به x و y محاسبه کنیم، به همین جهت v را بر حسب x و y به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} v \Rightarrow v = \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} \text{ و } \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \text{ و } \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \text{ و } \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

با توجه به محاسبات بالا نتیجه می‌شود:

$$d^2z = a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx^2 + 2a\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}dxdy + a\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}dy^2 = \frac{2axy}{(x^2+y^2)^2}dx^2 + \frac{2a(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}dxdy - \frac{2axy}{(x^2+y^2)^2}dy^2$$

مثال ۷: مقدار تقریبی $f(x,y) = \sqrt{e^{2x}+y^2-1}$ در نقطه $A(0/03, 2/94)$ چقدر است؟

۱) ۲/۹۵ ۲) ۲/۹۶ ۳) ۳/۰۲ ۴) ۳/۰۳

پاسخ: گزینه «۱» در این مثال $x = 0/03$ و $y = 2/94$ است. در نزدیکی آن‌ها $x_0 = 0$ و $y_0 = 3$ را انتخاب می‌کنیم. پس $\Delta x = x - x_0 = 0/03$ و $\Delta y = y - y_0 = -0/06$ است. حالا مقادیر $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را در نقطه $(0,3)$ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left.\frac{2e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}+y^2-1}}\right|_{(0,3)} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left.\frac{2y}{2\sqrt{e^{2x}+y^2-1}}\right|_{(0,3)} = 1$$

$$f(0/03, 2/94) \approx f(0,3) + df = \sqrt{1+9-1} + \frac{0/03}{3} - 0/06 = 3 + 0/01 - 0/06 = 2/95$$

مثال ۸: فرض کنید $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$، در این صورت مقدار تقریبی $f(5/02,2/96)$ چقدر است؟

۱) ۳/۹۹۷ ۲) ۴/۰۱۵ ۳) ۴/۰۵۵ ۴) ۳/۹۹۵

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به نکته فوق قرار می‌دهیم $x_0=5$، $y_0=3$، $\Delta x=0/02$ و $\Delta y=-0/04$، در این صورت:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-y^2}}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(5,3)=\frac{5}{4}\quad,\quad\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-2y}{2\sqrt{x^2-y^2}}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(5,3)=\frac{-3}{4}$$

$$\Rightarrow f(5/02,2/96)\sim f(5,3)+\frac{5}{4}\times 0/02-\frac{3}{4}\times(-0/04)=4+0/025+0/03=4/055$$

مثال ۹: فرض کنید $f(x,y,z)=e^{xy-z^2}$ ، در این صورت مقدار تقریبی $f(4/03,1/02,1/95)$ چقدر است؟

۱) ۱/۲۹ ۲) ۱/۳۱ ۳) ۱/۳۴ ۴) ۱/۳۶

پاسخ: گزینه «۲» چون تابع f، سه متغیره می‌باشد از همان فرمول تقریب خطی بالا در حالت سه متغیره استفاده می‌کنیم، یعنی داریم:

$$f(x,y,z)\approx f(x_0,y_0,z_0)+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$

در این مثال $(x,y,z)=(4/03,1/02,1/95)$ داده شده است پس داریم $x_0=4, y_0=1, z_0=2$ در نتیجه $\Delta x=0/03, \Delta y=0/02, \Delta z=-0/05$ و حالا $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}$ را در نقطه $(4,1,2)$ به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{xy-z^2}\Big|_{(4,1,2)}=1\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}=xe^{xy-z^2}\Big|_{(4,1,2)}=4\quad و\quad\frac{\partial f}{\partial z}=-2ze^{xy-z^2}\Big|_{(4,1,2)}=-4$$

$$\Rightarrow f(4/03,1/02,1/95)\approx f(4,1,2)+1\times 0/03+4\times 0/02+(-4)(-0/05)=e^{4\times1-2^2}+0/03+0/08+0/2=1/31$$

مثال ۱۰: فرض کنید $w=\frac{x^2y^3}{z^4}$، در این صورت مقدار w چند درصد کاهش یا افزایش پیدا می‌کند اگر مقدار x به میزان ۱%، y به میزان ۲% و z به میزان ۳% زیاد شود؟

۱) w تغییر نمی‌کند. ۲) w به میزان ۲۰% افزایش می‌یابد. ۳) w به میزان ۴% کاهش می‌یابد. ۴) w به میزان ۲% زیاد می‌شود.

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که:

$$w=\frac{x^2y^3}{z^4}\Rightarrow\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{2xy^3}{z^4}=\frac{2w}{x},\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{3x^2y^2}{z^4}=\frac{3w}{y},\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{4x^2y^3}{z^5}=-\frac{4w}{z}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz\Rightarrow dw=\frac{2w}{x}dx+\frac{3w}{y}dy-\frac{4w}{z}dz\Rightarrow\frac{dw}{w}=2\frac{dx}{x}+3\frac{dy}{y}-4\frac{dz}{z}$$

از آنجا که x به میزان ۱% زیاد می‌شود، بنابراین $\frac{dx}{x}=\frac{1}{100}$ و به همین ترتیب $\frac{dy}{y}=\frac{2}{100}$ و $\frac{dz}{z}=\frac{3}{100}$. در نتیجه داریم:

$$\frac{\Delta w}{w}\approx\frac{dw}{w}=2\times\frac{1}{100}+3\times\frac{2}{100}-4\times\frac{3}{100}=\frac{-4}{100}$$

یعنی w به میزان ۴% کاهش می‌یابد.

مثال ۱۱: بسط مک لورن تابع $f(x,y)=e^{x-2y}$ تا درجه دوم به کدام صورت زیر است؟

۱) $1+x-2y+\frac{1}{2}x^2-2xy+2y^2$ ۲) $1+x-2y+x^2-2xy+4y^2$ ۳) $1+x-2y+\frac{x^2}{2}-xy+y^2$ ۴) $1+x-2y+x^2-2xy-4y^2$

پاسخ: گزینه «۱»

روش اول: می‌توانیم این مثال را نیز مانند مثال قبل به کمک فرمول بسط مک‌لورن توابع دو متغیره حل کنیم، ولی با تغییر متغیر $u=x-2y$ تابع f به‌صورت e^u در می‌آید و می‌دانیم بسط مک لورن e^u به‌صورت $1+u+\frac{u^2}{2!}+\cdots$ است، بنابراین با جایگذاری $(x-2y)$ به جای u در بسط e^u نتیجه می‌شود:

$$e^{x-2y}=1+x-2y+\frac{1}{2!}(x-2y)^2=1+(x-2y)+\frac{1}{2}x^2-2xy+2y^2$$

روش دوم: ابتدا تابع f را به‌صورت $f(x,y)=e^x.e^{-2y}$ می‌نویسیم، حال بسط مک لورن e^x و e^{-2y} را نوشته و درهم ضرب می‌کنیم:

$$e^x.e^{-2y}=(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)(1-2y+\frac{4y^2}{2!}+\cdots)=\underbrace{1+x-2y+\frac{x^2}{2}-2xy+2y^2}_{\text{بسط مک‌لورن تا درجه ۲}}\underbrace{+2xy^2-x^2y+x^2y^2}_{\text{حذف}}$$

مثال ۱۲: کدام گزینه چندجمله‌ای اول از بسط تیلور تابع $f(x,y)=x^2y+\sin y+e^x$ حول نقطه‌ی $(1,\pi)$ را به درستی نشان می‌دهد؟

۱) $(\pi+e)+(2\pi-e)(x-1)+\frac{1}{2}[(2\pi+e)(x-1)^2-4(x-1)(y-\pi)]+\cdots$

۲) $(\pi+e)+(2\pi-e)(x-1)+\frac{1}{2}[(2\pi+e)(x-1)^2+4(x-1)(y-\pi)]+\cdots$

۳) $(\pi+e)+(2\pi+e)(x-1)+\frac{1}{2}[(2\pi+e)(x-1)^2-4(x-1)(y-\pi)]+\cdots$

۴) $(\pi+e)+(2\pi+e)(x-1)+\frac{1}{2}[(2\pi+e)(x-1)^2+4(x-1)(y-\pi)]+\cdots$

پاسخ: گزینه «۴» بسط تیلور $f(x,y)$ را حول نقطه‌ی $(x_0,y_0)=(1,\pi)$ می‌خواهیم، بنابراین مقدار f و مشتق‌های جزئی مرتبه‌ی اول و مرتبه‌ی دوم آن را در این نقطه به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} f(x,y)=x^2y+\sin y+e^x=\pi+\sin\pi+e=\pi+e \\ f_x=2xy+e^x=2\pi+e \\ f_y=x^2+\cos y=1+\cos\pi=1-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}=2y+e^x=2\pi+e \\ f_{yy}=-\sin y=-\sin\pi=0 \\ f_{xy}=2x=2 \end{cases}$$

با جایگذاری این مقادیر در فرمول بسط تیلور حول نقطه‌ی $(1,\pi)$ داریم:

$$f(x,y)=f(1,\pi)+(x-1)f_x(1,\pi)+(y-\pi)f_y(1,\pi)+\frac{1}{2!}[(x-1)^2f_{xx}(1,\pi)+2(x-1)(y-\pi)f_{xy}(1,\pi)+(y-\pi)^2f_{yy}(1,\pi)]+\cdots$$

$$\Rightarrow x^2y+\sin y+e^x=(\pi+e)+(2\pi+e)(x-1)+\frac{1}{2}[(2\pi+e)(x-1)^2+4(x-1)(y-\pi)]+\cdots$$

مثال ۱۳: تابع f با ضابطه $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{y}$ در کدام نقاط مشتق‌پذیر است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) بر R

۲) در هر نقطه از دامنه‌اش

۳) بر مجموعه $\{(x,y):(x,y)\neq(0,0)\}$

۴) بر مجموعه $\{(x,y):x\neq 0$ یا $y\neq 0\}$

پاسخ: گزینه «۲» تابع f در کلیه نقاط، به جز نقاطی که مخرج را صفر می‌کنند مشتق‌پذیر می‌باشد، یعنی در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است.

مثال ۱۴: اگر $f(x,y)=e^xy-y\cosh xy$ حاصل $f_{xy}(1,0)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) -1 ۲) 0 ۳) e ۴) 1

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا بر حسب x و سپس بر حسب y مشتق می‌گیریم.

$$f(x,y)=e^xy-y\cosh xy \Rightarrow f_x=e^xy-y^2\sinh xy$$

$$f_{xy}=e^x-2y\sinh xy-y^2x\cosh xy\Big|_{(1,0)}=e$$

مثال ۱۵: اگر $f(x,y)=x\cos 2y+ye^{2x}$ باشد مقدار $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ را به‌دست آورید: (عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) $-2\sin 2y+2e^{2x}$ ۲) $2x\sin 2y+2e^{2x}$ ۳) $x\sin 2y+2e^{2x}$ ۴) $2x\sin 2y-2e^{2x}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$f(x,y)=x\cos 2y+ye^{2x} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=\cos 2y+2ye^{2x} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2\sin 2y+2e^{2x}$$

مثال ۱۶: تابع f با ضابطه $f(x,y)=\sqrt[5]{x^5+y^5}$ داده شده است، در این صورت: (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) f در همه نقاط $\mathbb{R}^2$ مشتق‌پذیر است.

۲) f در هیچ نقطه از $\mathbb{R}^2$ مشتق‌پذیر نیست.

۳) f در نقطه $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

۴) f در نقطه $(0,0)$ مشتق پذیر است.

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم اگر f تابعی همگن از مرتبه ۱ باشد، شرط لازم و کافی برای مشتق‌پذیری در مبدأ آن است که f خطی باشد یعنی $f(x,y)=ax+by$ و چون f خطی نیست پس مشتق‌پذیر هم نیست.

مثال ۱۷: اگر $\phi(x,y)=e^{xy^۲}$ باشد $\frac{\partial^۲\phi}{\partial x\partial y}$ کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) $۲ye^{xy^۲}+۲xy^۳e^{xy^۲}$ ۲) $۲xy^۳e^{xy^۲}+e^{xy^۲}$ ۳) $۲y^۳e^{xy^۲}+۲ye^{xy^۲}$ ۴) $۲y^۲e^{xy^۲}+۲ye^{xy^۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا از تابع بر حسب x، سپس بر حسب y مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=y^۲e^{xy^۲}\Rightarrow\frac{\partial^۲\phi}{\partial x\partial y}=۲ye^{xy^۲}+۲xy^۳e^{xy^۲}$$

مثال ۱۸: اگر $f(x,y)=\begin{cases}x & ; \quad (۰<y\le x^۲ \text{ یا } x\le ۰),(y\ge ۰)\\ ۰ & ; \quad \text{بقیه نقاط}\end{cases}$ در این صورت $f_x(۰,۱)$، $f_y(۰,۱)$ به ترتیب (از راست به چپ) چگونه است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ـ۰ ۲) وجود ندارد ـ ۰ ۳) وجود ندارد ـ ۱ ۴) وجود ندارد ـ وجود ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون ضابطه f در همسایگی نقطه (۰,۱) عوض می‌شود، بنابراین حد چپ و راست را مجزا به‌دست می‌آوریم:
چون حد چپ و راست با هم برابر نیست، پس حد $f_x(۰,۱)$ وجود ندارد.

$$\begin{cases}f_x(۰,۱)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{f(x,۱)-f(۰,۱)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{۰-۰}{x}=۰\\ f_x(۰,۱)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{f(x,۱)-f(۰,۱)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{x}{x}=۱\end{cases} \quad \text{و} \quad f_y(۰,۱)=\lim_{y\to ۱}\frac{f(۰,y)-f(۰,۱)}{y-۱}=\lim_{y\to ۱}\frac{۰-۰}{y-۱}=۰$$

مثال ۱۹: اگر $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y} & x+y\ne ۰\\ \alpha & x+y=۰\end{cases}$، به ازای کدام مقدار α، $f_x(۱,-۱)$ موجود نیست؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) هر مقدار α

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$f_x(۱,-۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x,-۱)-f(۱,-۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{-x}{x-۱}-\alpha}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{-x-\alpha(x-۱)}{(x-۱)^۲}$$

به ازای تمام مقادیر α حد فوق وجود ندارد.

مثال ۲۰: هرگاه $z=\text{Arctg}\dfrac{۶x+y}{۳-۲xy}$ باشد، $\dfrac{\partial^۲z}{\partial x\partial y}$ برابر است با: (آمار ـ آزاد ۸۳)

۱) $\dfrac{۸y^۲+۷۲x}{(۹+۴x^۲y^۲+۳۶x^۲+y^۲)^۲}$ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) $\dfrac{۳۶x+۸xy^۲}{(۹+۴x^۲y^۲+۳۶x^۲+y^۲)^۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» توجه کنید که $z=\text{Arctg}\dfrac{۲x+\frac{y}{۳}}{۱-\frac{۲}{۳}xy}$ چون $\frac{۲}{۳}xy$ برابر حاصل‌ضرب عبارات موجود در صورت است.

با استفاده از $\text{Arctg}\,a+\text{Arctg}\,b=\text{Arctg}\dfrac{a+b}{۱-ab}$ داریم:

$$z=\text{Arctg}۲x+\text{Arctg}\frac{y}{۳}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{۱}{۳}}{۱+\frac{y^۲}{۹}}=\frac{۳}{۹+y^۲}\Rightarrow\frac{\partial^۲z}{\partial x\partial y}=۰$$

مثال ۲۱: کدام تابع در معادله لاپلاس $\dfrac{\partial^۲f}{\partial x^۲}+\dfrac{\partial^۲f}{\partial y^۲}=۰$ صدق می‌کند؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۴)

۱) $x^۲y^۲$ ۲) $\sqrt{x^۲+y^۲}$ ۳) $tg^{-۱}\dfrac{y^۲}{x^۲}$ ۴) $tg^{-۱}\dfrac{y}{x}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$\left.\begin{array}{l}f(x,y)=\text{Arctg}\dfrac{y}{x}\to\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\frac{-y}{x^۲}}{۱+\frac{y^۲}{x^۲}}=\dfrac{-y}{x^۲+y^۲}\Rightarrow\dfrac{\partial^۲f}{\partial x^۲}=\dfrac{۲xy}{(x^۲+y^۲)^۲}\\ f(x,y)=\text{Arctg}\dfrac{y}{x}\to\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\frac{۱}{x}}{۱+\frac{y^۲}{x^۲}}=\dfrac{x}{x^۲+y^۲}\Rightarrow\dfrac{\partial^۲f}{\partial y^۲}=\dfrac{-۲xy}{(x^۲+y^۲)^۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\partial^۲f}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲f}{\partial y^۲}=۰$$

مثال ۲۲: تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases} ye^{-\frac{1}{x^2}} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0\end{cases}$ در کدامیک از گزاره‌های زیر صدق می‌کند؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) f بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است.
۲) f در نقطه $(0,0)$ فقط مشتق‌پذیر مرتبه‌ی اول است.
۳) f در نقطه $(0,0)$ دارای بردار گرادیان نیست.
۴) f دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته نیست.

پاسخ: گزینه «۱» همان‌طور که در زیر نشان داده‌ایم، تابع داده شده را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب دو تابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر $g(x)$ و $h(y)$ نوشت و چون حاصل‌ضرب دو تابع مشتق‌پذیر، تابعی مشتق‌پذیر است، بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

$$g(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0\end{cases} \ ,\ h(y)=y \ \Rightarrow f(x,y)=g(x)h(y)$$

این‌که تابع $h(y)=y$ بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است، امری واضح است. اما در مورد تابع $g(x)$ بـا محاسبـه‌ی $g'(x)$ در $x\neq 0$ داریـم $g'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ و

در $x=0$ از راه تعریف مشتق داریم:
$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

با تغییر متغیر $t=\frac{1}{x}$ داریم $t\to\pm\infty$ و در نتیجه داریم:
$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{e^{-t^2}}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{t}{e^{t^2}}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{2te^{t^2}}=0$$

پس داریم: $g'(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & ; x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$. به همین ترتیب مشتق‌های مرتبه‌ی بالاتر آن هم وجود دارند. به این ترتیب $f(x)$ بی‌نهایت مرتبه مشـتق‌پـذیر است. در نتیجه ضمن اثبات گزینه‌ی (۱)، سایر گزینه‌ها هم رد می‌شوند.

توجه: تابع $g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0\end{cases}$ یک مثال خاص از توابع مشتق‌پذیر است که همه‌ی مشتق‌های آن از هر مرتبه، در $x=0$ موجود و برابر با صفر هستند.

مثال ۲۳: دیفرانسیل تابع $z=2x^2-3xy-y^2$ کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۴)

۱) $4x-3y$
۲) $-3x-2y$
۳) $(4x-3y)-(3x+2y)\frac{dy}{dx}$
۴) $(4x-3y)dx-(3x+2y)dy$

پاسخ: گزینه «۴»
$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(4x-3y)dx+(-3x-2y)dy$$

مثال ۲۴: اگر $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-xy}{x+y} & ; (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; (x,y)=(0,0)\end{cases}$ باشد، مقدار $\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}$ در نقطه $(0,0)$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۵)

۱) -1
۲) 0
۳) 1
۴) تعریف نشده

پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ باید از تعریف مشتق جزئی استفاده کنیم.
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=1 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

مثال ۲۵: اگر $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{|x|+|y|} & ; (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & ; (x,y)=(0,0)\end{cases}$، $f_x(0,0)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) 0
۲) 1
۳) ∞
۴) $\frac{y|y|}{(|x|+|y|)^2}$

پاسخ: هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.
$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-1}{h}=\pm\infty \Rightarrow$$ بنابراین $f_x(0,0)$ موجود نیست

مثال ۲۶: فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^3}{x^{12}+y^4} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$، در این صورت کدام گزاره درست است؟ (معدن ـ سراسری ۸۶)

۱) f در $(0,0)$ پیوسته است.
۲) f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است.
۳) $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ وجود ندارند.
۴) $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ وجود دارند ولی f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

پاسخ: گزینه «۴» f در $(0,0)$ پیوسته نیست. دو مسیر $x=0$ و $y=x^3$ را در نظر بگیرید و بنابراین f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \text{ روی مسیر } \Rightarrow \text{حد} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0y^3}{0+y^4}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0}{y^4}=0 \\ y=x^3 \text{ روی مسیر } \Rightarrow \text{حد} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3(x^3)^3}{x^{12}+(x^3)^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{12}}{2x^{12}}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{حد وجود ندارد}$$

$f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ به کمک تعریف به ترتیب برابرند با:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0 \quad \text{و} \quad f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

مثال ۲۷: $f_1(x,y)$ و $f_2(x,y)$ به وسیله دستگاه $\begin{cases}f_1-yf_2=0\\ f_1+f_2=x\end{cases}$ تعریف شده است. d^2f_2 برابر است با: (ریاضی محض ـ آزاد ۸۷)

۱) $d^2f_2=\dfrac{y}{(1+y)^2}dx^2+\dfrac{f_2}{(1+y)^2}dy^2$
۲) $d^2f_2=-\dfrac{2}{(1+y)^2}dxdy+\dfrac{2f_2}{(1+y)^2}dy^2$
۳) $d^2f_2=\dfrac{2}{(1+y)^2}dxdy-\dfrac{2f_2}{(1+y)^2}dy^2$
۴) $d^2f_2=\dfrac{f_1}{(1+y)^2}dx^2+\dfrac{f_2}{(1+y)^2}dxdy$

پاسخ: گزینه «۲» معادله اول را در منفی ضرب و به معادله دوم اضافه می‌کنیم، در این صورت $(1+y)f_2=x$ و یا $f_2(x,y)=\dfrac{x}{1+y}$ بنابراین داریم:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}=\frac{1}{1+y},\frac{\partial f_2}{\partial y}=-\frac{x}{(1+y)^2}\Rightarrow \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}=\frac{2x}{(1+y)^3}=\frac{2f_2}{(1+y)^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{(1+y)^2}$$

$$\Rightarrow d^2f_2=\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}dy^2=-\frac{2}{(1+y)^2}dxdy+\frac{2f_2}{(1+y)^2}dy^2$$

مثال ۲۸: تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(x^2+y^2)}{y^2+(x^2+y^2)^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ در کدام گزاره صدق می کند؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۸)

۱) در نقطه $(0,0)$ حد ندارد.
۲) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=2$
۳) حد f در مسیرهای مستقیم منتهی به $(0,0)$، $\dfrac{1}{2}$ است.
۴) حد f در مسیری دایره‌ای شکل که به $(0,0)$ منتهی می‌شود، 0 است.

پاسخ: گزینه «۱» حد داده شده را روی دو مسیر مختلف به‌دست می‌آوریم.

$$y=0 \text{ مسیر } \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{0(x^2+0)}{0+(x^2+0)^2}=0$$

$$y=x^2 \text{ مسیر } \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^2+x^4)}{x^4+(x^2+x^4)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+x^6}{2x^4+2x^6+x^8}=\frac{1}{2}$$

چون حد در روی دو مسیر متفاوت به‌دست آمده پس حد وجود ندارد.

مثال ۲۹: فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$، کدام گزاره درست است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) f در $(0,0)$ پیوسته نمی‌باشد.
۲) f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.
۳) ماکزیمم افزایش f در $(0,0)$ در جهت بردار $(1,1)$ است.
۴) f در $(0,0)$ در سوی هر بردار یکانی دارای مشتق سوئی یک است.

پاسخ: گزینه «۲» تابع f یک تابع همگن از درجه یک می‌باشد و می‌دانیم شرط لازم و کافی برای مشتق‌پذیری توابع همگن از درجه یک در مبدأ این است که خطی باشند یعنی به‌صورت $f(x,y)=\alpha x+\beta y$ باشد که چون f خطی نیست پس در مبدا مختصات یعنی $(0,0)$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

مثال ۳۰: برای تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مقدار $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ چقدر است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۸)

۱) ۱ـ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) موجود نیست.

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به دو ضابطه‌ای بودن f در مبدأ برای محاسبه $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ در مبدأ از تعریف مشتق جزئی نسبت به x استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{\sin^2 h}{|h|}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sin^2 h}{h|h|}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\lim_{h\to0}\frac{h^2}{h|h|}=\lim_{h\to0}\frac{h}{|h|}$$

حد اخیر وجود ندارد، زیرا حد راست برابر ۱ و حد چپ آن برابر ۱- است، پس $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ در مبدأ موجود نیست.

مثال ۳۱: تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مفروض است. وضعیت مشتق‌های جزئی و پیوستگی f در نقطه $(0,0)$ کدام است؟

(صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۸)

۱) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ در مبدأ مختصات موجود است و لیکن تابع در این نقطه ناپیوسته است.

۲) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ در مبدأ مختصات موجود نیست و تابع در این نقطه ناپیوسته است.

۳) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ در مبدأ مختصات موجود نیست و تابع دراین نقطه پیوسته است.

۴) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ در مبدأ مختصات موجود است و تابع در این نقطه پیوسته است.

پاسخ: گزینه «۱» واضح است که f در نقطه $(0,0)$ حد ندارد (زیرا درجه صورت و مخرج با هم برابر است)، بنابراین f در $(0,0)$ پیوسته نیست. برای محاسبه $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ از تعریف استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0\quad,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$$

بنابراین مشتق‌های جزئی در مبدأ وجود دارند.

مثال ۳۲: دیفرانسیل کامل $z=e^{x-2y}+\mathrm{Ln}(3y-x)$ در نقطه $(2,1,1)$ کدام است؟ (صنایع‌غذایی ـ سراسری ۸۹)

۱) dx ۲) dx − dy ۳) dx + dy ۴) dy

پاسخ: گزینه «۴»

$$dz=\left(e^{x-2y}+\frac{-1}{3y-x}\right)dx+\left(-2e^{x-2y}+\frac{3}{3y-x}\right)dy\Big|_{(2,1,1)}=dy$$

مثال ۳۳: کدام گزاره در مورد تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ درست است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) مشتقات جزئی f در $(0,0)$ موجود و پیوسته‌اند.

۲) مشتقات جزئی f کراندارند و در $(0,0)$ موجود می‌باشند.

۳) مشتقات جزئی f بی‌کرانند و در $(0,0)$ موجود می‌باشند.

۴) مشتقات جزئی f در $(0,0)$ موجودند و لذا تابع f در $(0,0)$ پیوسته‌است.

پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ در $(0,0)$ از تعریف مشتق جزئی استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$$

بنابراین مشتق‌های جزئی در مبدأ وجود دارند. در ضمن در نقاط به جز مبدأ $f_x=\dfrac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ است که تابعی کراندار نیست.

مثال ۳۴: اگر $z = x\cos y - y\cos x$ آن‌گاه $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ برابر است با: (علوم دریایی و اقیانوسی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{x}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{1}{y}\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$
۲) $\frac{1}{y}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{1}{x}\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$
۳) $-\left(\frac{1}{x}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{1}{y}\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)$
۴) $-\left(\frac{1}{y}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{1}{x}\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x\sin y - \cos x \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin y + \sin x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x\cos y \ ,\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x\sin y \ ,\ \frac{\partial z}{\partial x} = \cos y + y\sin x \ ,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y\cos x \ ,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = -y\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin y + \sin x = -\frac{1}{x}\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} - \frac{1}{y}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = -\left(\frac{1}{y}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{1}{x}\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)$$

مثال ۳۵: اگر $A = x^2 y\vec{i} - 2y^2 z\vec{j} + xy^2 z^2 \vec{k}$ اندازه بردار $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}$ در نقطه $(2,1,-2)$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۰)

۱) ۸
۲) ۱۶
۳) $8\sqrt{5}$
۴) $16\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا هر یک از مشتقات جزئی را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = (2xy, 0, y^2 z^2) \Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = (2y, 0, 0)\Big|_{(2,1,-2)} = (2,0,0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial y} = (x^2, -4yz, 2yxz^2) \Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = (0, -4z, 2xz^2)\Big|_{(2,1,-2)} = (0,8,16)$$

حال با جایگذاری مقادیر فوق، ضرب خارجی موردنظر را محاسبه می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 16 \end{vmatrix} = -32\vec{j} + 16\vec{k} \Rightarrow \left|\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right| = 16\sqrt{5}$$

مثال ۳۶: در تابع $z = \mathrm{Ln}\sqrt{x^2 + y^2} + \mathrm{Arctg}\frac{y}{x}$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $y = 2$ و $x = -1$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۹۰)

۱) $-0/8$
۲) $0/4$
۳) $0/2$
۴) $-0/6$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{x-y}{x^2+y^2} \xRightarrow[y=2]{x=-1} \frac{-1-2}{1+4} = \frac{-3}{5} = -0/6$$

مثال ۳۷: در تابع $z = \sin(x\sqrt{y})$ مقدار $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ و $y = 4$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{-\pi}{2}$
۲) $\frac{5\pi}{6}$
۳) $\frac{\pi}{3}$
۴) $\frac{-2\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» عبارت $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ را به روش ساده‌تری هم می‌توان محاسبه کرد که در درسنامه‌ی بعدی مطالعه می‌شود. در حال حاضر این عبارت را با محاسبه‌ی مستقیم به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{y}\cos(x\sqrt{y}) \xrightarrow{(x,y)=(\frac{\pi}{4},4)} 2(-\frac{1}{2}) = -1 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}}\cos(x\sqrt{y}) \xrightarrow{(x,y)=(\frac{\pi}{4},4)} \frac{\frac{\pi}{3}}{2\times 2}(-\frac{1}{2}) = \frac{-\pi}{24}$$

سپس با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه موردنظر داریم:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = (\frac{\pi}{3})(-1) + 4\times(-\frac{\pi}{24}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{-2\pi-\pi}{6} = -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$$

مثال ۳۸: در تابع $z=\frac{x}{y}-xy^2$ مقدار dz در نقطه $(2,-1)$ به ازای $(dy=0/02, dx=0/01)$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۹۰)

۱) $-0/03$ ۲) $-0/01$ ۳) $0/02$ ۴) $0/03$

پاسخ: گزینه «۳» دیفرانسیل کامل برابر است با:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}-y^2\big|_{(2,-1)}=-1-1=-2 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x}{y^2}-2xy\big|_{(2,-1)}=-2+4=2$$

با قراردادن مشتقات نسبی مقدار dz در نقطه $(2,-1)$ محاسبه می‌شود:

$$dz=-2dx+2dy\xrightarrow[dy=0/02]{dx=0/01}dz=-0/02+0/04=0/02$$

مثال ۳۹: هرگاه $f(x,y)=|x|+|y|$ ، آن‌گاه f در $(0,0)$: (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۰)

۱) پیوسته نیست و مشتقات جزئی در $(0,0)$ موجود نیست.
۲) پیوسته و دارای مشتقات جزئی پیوسته در $(0,0)$ می‌باشد.
۳) پیوسته هست ولی مشتقات جزئی آن در $(0,0)$ موجود نیست.
۴) پیوسته نیست ولی مشتقات جزئی در $(0,0)$ موجودند.

پاسخ: گزینه «۳» واضح است که حد f در $(0,0)$ برابر صفر است و چون $f(0,0)=0$، بنابراین f در $(0,0)$ پیوسته است. بـرای محاسـبه $f_x(0,0)$، چون $f(x,0)=|x|$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست پس $f_x(0,0)$ وجود ندارد و به طور مشابه $f_y(0,0)$ هم موجود نیست. (توابع قدر مطلقی در ریشه‌های ساده درون قدر مطلق مشتق ندارند.)

مثال ۴۰: فرض کنید $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ به‌صورت $f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & ;\ (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & ;\ (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$ تعریف شده است. در آن صورت f در مبـدأ پیوسـته.... و مشتقات جزئی آن در مبدأ موجود.........
(نساجی ـ سراسری ۹۰)

۱) است، است. ۲) است، نیست. ۳) نیست، است. ۴) نیست، نیست.

پاسخ: گزینه «۱» درجه صورت از مخرج بیشتر و بنابراین حد f در مبدأ موجود و برابر $f(0,0,0)=0$ است و f در مبدأ پیوسته است از طرفی برای محاسبه $f_x(0,0,0)$ با استفاده از تعریف باید از $f(x,0,0)=0$ نسبت به x در $x=0$ مشتق بگیریم و لذا $f_x(0,0,0)$ و با استدلال مشـابه f_y و f_x در مبـدأ موجود و برابر صفر می‌باشند.

مثال ۴۱: مقدار تقریبی $\sqrt{(2/01)^2+(1/96)^2+1}$ با کمک دیفرانسیل کامل کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۰)

۱) ۲/۹۶ ۲) ۲/۹۷ ۳) ۲/۹۸ ۴) ۲/۹۹

پاسخ: گزینه «۳» قرار می‌دهیم $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}$ برای محاسبه $f(2/01,1/96)$ قرار می‌دهیم:
$(x_0,y_0)=(2,2)$ و $\Delta x=0/01\ ,\ \Delta y=-0/04$ در این صورت داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,2)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}=\frac{2}{3} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,2)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}=\frac{2}{3}$$

$$f(2/01,1/96)\simeq f(2,2)+\frac{\partial f}{\partial x}(2,2)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(2,2)\Delta y=3+\frac{2}{3}(0/01)+\frac{2}{3}(-0/04)=2/98$$

یادآوری: $f(x_0+\Delta x,y_0,\Delta y)\sim f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).\Delta y$

مثال ۴۲: هرگاه $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{t}dt$ آن‌گاه $\frac{\partial F}{\partial x}(2,\frac{\pi}{4})$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{\pi}$ ۳) $\frac{4}{\pi}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۱» از قاعده مشتق گرفتن از انتگرال در حالت کلی استفاده می‌کنیم.

$$F(x,y)=\int_{f(x,y)}^{g(x,y)}R(t)dt \Rightarrow \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}R(g(x,y))+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}R(f(x,y))$$

حال با جایگذاری در رابطه بالا داریم:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(xy)\times\frac{\sin(xy)}{xy}+0=y\frac{\sin(xy)}{xy}=\frac{\sin(xy)}{x}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(2,\frac{\pi}{4})=\frac{\sin(2\times\frac{\pi}{4})}{2}=\frac{1}{2}$$

درسنامه ۳: مشتق زنجیره‌ای و ضمنی

مثال ۱: اگر $z=u^2+v^2+uv$ و $u=x^2-y^2$ و $v=xy$ باشد، در این صورت مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ به ازای $x=3$ و $y=2$ چقدر است؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۴۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که به ازای $x=3$ و $y=2$، مقدار $u=5$ و $v=6$ به‌دست می‌آید. حال با استفاده از قاعده مشتق‌گیری زنجیری داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=(2u+v)(2x)+(2v+u)(y)=(2\times5+6)(2\times3)+(2\times6+5)(2)=130$$

مثال ۲: اگر $z=u^2+v^2$ و $u=e^{x^2+y^2}$, $v=\frac{x}{y}$ باشد، در این صورت $z'_x(1,1)$ کدام است؟

۱) $4e^4+2e^2$ ۲) $4e^4+2e$ ۳) $4e^4+2$ ۴) $4e^4$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در نقطه‌ی $(x,y)=(1,1)$ داریم $u=e^2$ و $v=1$. حالا از قاعده‌ی مشتق زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}=(2u)(2xe^{x^2+y^2})+(2v)(\frac{1}{y})\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=4e^4+2$$

مثال ۳: اگر $x=u+v$، $y=uv$ و $z=u^2+v^2$، که u و v توابعی از x و y هستند. آن‌گاه $\frac{\partial z}{\partial y}$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{v-u}$ ۲) $\frac{1}{u-v}$ ۳) -2 ۴) 4

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر بخواهیم از قاعده‌ی زنجیره‌ای استفاده کنیم، ابتدا باید از معادلات $x=u+v$ و $y=uv$ استفاده کرده و u و v را برحسب x و y پیدا کنیم. بنابراین برای ساده‌تر شدن مسأله، به جای مشتق‌گیری زنجیره‌ای، ابتدا z را بر حسب x و y به‌دست می‌آوریم، در این صورت داریم:

$$z=u^2+v^2=(u+v)^2-2uv=x^2-2y\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=-2$$

مثال ۴: فرض کنید $z=f(x,y)$، و مقادیر $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه $A(1,1)$ به ترتیب برابر ۵ و ۲- باشند. اگر (r,θ) مؤلفه‌های دستگاه قطبی باشند، مقدار $\frac{\partial z}{\partial\theta}$ چقدر است؟

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $-3\sqrt{2}$ ۳) $-4\sqrt{2}$ ۴) -7

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» نقطه $A(1,1)$ در مختصات قطبی به‌صورت $r=\sqrt{2}$ و $\theta=\frac{\pi}{4}$ در می‌آید. در مختصات قطبی $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ می‌باشد، بنابراین $\frac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta$ و $\frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta$. پس طبق قاعده مشتق‌گیری زنجیری $\frac{\partial z}{\partial\theta}$ برابر است با:

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial\theta}=-r\sin\theta.\frac{\partial z}{\partial x}+r\cos\theta.\frac{\partial z}{\partial y}=(-\sqrt{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})(5)+(\sqrt{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})(-2)=-7$$

مثال ۵: اگر $z=f(\frac{x}{y})$ آن‌گاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(x,y)=(2,2)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}f'(1)$ ۲) $\frac{1}{2}f'(1)$ ۳) $f'(1)$ ۴) $\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» فرض کنیم $u=\frac{x}{y}$ باشد. می‌دانیم که مشتق $f(u)$ برابر $u'f'(u)$ می‌باشد که در این مثال منظور ما از u' همان u'_x است زیرا مشتق نسبت به x را می‌خواهیم.

$$z=f(\frac{x}{y})\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}f'(\frac{x}{y})\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}(2,2)=\frac{1}{2}f'(\frac{2}{2})=\frac{f'(1)}{2}$$

مثال ۶: اگر $z=yf(x^2-y^2)$، آن‌گاه کدام‌یک از معادلات زیر صحیح است؟

۱) $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$ ۲) $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y}$ ۳) $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{z}$ ۴) $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y^2}{z}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\times 2xf'(x^2-y^2)\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=f(x^2-y^2)+y\times(-2y)f'(x^2-y^2)$$

در این صورت $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}$ برابر است با:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=2yf'(x^2-y^2)+\frac{1}{y}f(x^2-y^2)-2yf'(x^2-y^2)=\frac{1}{y}f(x^2-y^2)=\frac{z}{y^2}$$

توضیح: از درس ریاضی (۱) به خاطر دارید که مشتق $f(u)$ نسبت به x برابر $u'f'(u)$ است که در آن u تابعی بر حسب x است.

مثال ۷: معادله $2\frac{\partial f}{\partial x}-3\frac{\partial f}{\partial y}=0$ با تغییر متغیرهای $r=2y-3x$ و $D=2y+3x$ به کدام صورت بیان می‌شود؟

۱) $\frac{\partial f}{\partial r}=0$ ۲) $\frac{\partial f}{\partial D}=0$ ۳) $\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\partial f}{\partial D}=0$ ۴) $\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial D}=0$

پاسخ: گزینه «۱» طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای عمل می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial D}.\frac{\partial D}{\partial x}=-3\frac{\partial f}{\partial r}+3\frac{\partial f}{\partial D}\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial D}.\frac{\partial D}{\partial y}=2\frac{\partial f}{\partial r}+2\frac{\partial f}{\partial D}\end{aligned}\right\}\Rightarrow 2\frac{\partial f}{\partial x}-3\frac{\partial f}{\partial y}=-12\frac{\partial f}{\partial r}=0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial r}=0$$

مثال ۸: تابع $u=f(4x^2-5y^3)$ مفروض است. کدام رابطه صحیح است؟

۱) $15y^2\frac{\partial u}{\partial x}+8x\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ۲) $4y^2\frac{\partial u}{\partial x}+5y^3\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ۳) $5y^2\frac{\partial u}{\partial x}+4y^3\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ۴) $3y^2\frac{\partial u}{\partial x}-5y^3\frac{\partial u}{\partial y}=0$

پاسخ: گزینه «۱» u_x و u_y را تشکیل می‌دهیم.

$$u_x=8xf'(4x^2-5y^3)\ ،\ u_y=-15y^2f'(4x^2-5y^3)\Rightarrow 15y^2u_x+8xu_y=0$$

مثال ۹: فرض کنید $z=f(x^2-2y)$، در این صورت حاصل عبارت $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

۱) $4xyf'$ ۲) $f''+f'$ ۳) $f''-f'$ ۴) 0

پاسخ: گزینه «۴» فرض می‌کنیم $u=x^2-2y$ باشد. بنابراین $z=f(u)$ است و u تابعی دو متغیره برحسب x و y می‌باشد. پس $\frac{\partial z}{\partial x}=u'_xf'(u)$ و $\frac{\partial z}{\partial y}=u'_yf'(u)$. به همین ترتیب مشتق‌های مرتبه‌ی دوم را با رعایت مشتق حاصل‌ضرب و قاعده‌ی زنجیره‌ای محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'(x^2-2y)\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'(x^2-2y)+4x^2f''(x^2-2y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-2f'(x^2-2y)\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xf''(x^2-2y)$$

حال با جایگذاری عبارات فوق نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}=2f'+4x^2f''-4x^2f''-2f'=0$$

مثال ۱۰: با فرض $w=f(u,v)$ و $u=x+y$ و $v=x-y$ مقدار $\frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial w}{\partial y}$ کدام است؟

۱) $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$ ۲) $\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial f}{\partial v}$ ۳) $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$ ۴) $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$

پاسخ: گزینه «۴» توجه کنید که w همان f است. پس فرقی بین $\frac{\partial w}{\partial u}$ با $\frac{\partial f}{\partial u}$ وجود ندارد. با توجه به قاعده مشتق زنجیره‌ای داریم:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x}&=\frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\\ \frac{\partial w}{\partial y}&=\frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}\right.\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}\frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial w}{\partial y}=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

مثال ۱۱: عبارت $w=f(y-z\,,z-x\,,x-y)$ جواب کدام معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی است؟

۱) $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=1$
۲) $\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}$
۳) $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$
۴) $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}$

پاسخ : گزینه «۳» با استفاده از قاعده مشتق‌گیری زنجیره‌ای داریم:

$$u=y-z\ ,\ v=z-x\ ,\ t=x-y$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial x}=0-\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial t}\quad,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}+0-\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}+0$$

لذا با جمع طرفین تساوی‌های فوق داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}=0$$

مثال ۱۲: هرگاه داشته باشیم $z=r^2 Lnr$ و $r=\sqrt{x^2+y^2}$ اگر $u=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ حاصل $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ برابر کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) $\frac{1}{r}$
۴) $\frac{2}{r}$

پاسخ: گزینه «۱» چون $\frac{x}{r}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\partial r}{\partial x}$ پس خواهیم داشت:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dr}.\frac{\partial r}{\partial x}=\left(2rLnr+r\right)\frac{x}{r}=2xLnr+x\ \Rightarrow\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2Lnr+2x.\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}+1=1+2Lnr+\frac{2x^2}{r^2}$$

و به خاطر تقارن ضابطه‌ی z نسبت به x و y داریم $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1+2Lnr+\frac{2y^2}{r^2}$، بنابراین خواهیم داشت:

$$u=2+4Lnr+\frac{2(x^2+y^2)}{r^2}=4+4Lnr$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dr}.\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{4}{r}.\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{4x}{r^2}=\frac{4x}{x^2+y^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{4(x^2+y^2)-8x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

و بنا به تقارن $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{4(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ و لذا مجموع آن‌ها صفر است.

مثال ۱۳: معادله $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ با تغییر متغیر $u=\frac{w}{r}$ به کدام‌یک از معادلات زیر تبدیل می‌شود؟

۱) $r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}=\frac{\partial w}{\partial t}$
۲) $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}=\frac{\partial w}{\partial t}$
۳) $\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}=\frac{\partial w}{\partial t}$
۴) $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial t}$

پاسخ: گزینه «۲» از معادله داده شده مشخص است که u تابعی از r و t می‌باشد، یعنی r و t متغیرهای مستقل می‌باشند.

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}w_r-\frac{1}{r^2}w\ \Rightarrow\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{1}{r}w_{rr}-\frac{1}{r^2}w_r-\frac{1}{r^2}w_r+\frac{2}{r^3}w=\frac{1}{r}w_{rr}-\frac{2}{r^2}w_r+\frac{2}{r^3}w$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{r}w_t$$

با جایگذاری مقادیر به‌دست آمده در بالا، در معادله داده شده نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{r}w_{rr}-\frac{2}{r^2}w_r+\frac{2}{r^3}w+\frac{2}{r^2}w_r-\frac{2}{r^3}w=\frac{1}{r}w_t\ \Rightarrow\frac{1}{r}w_{rr}=\frac{1}{r}w_t\ \Rightarrow w_{rr}=w_t\ \Rightarrow\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial t}$$

مثال ۱۴: در رابطه $x^2z+2y+e^{x-y-2z}=0$ متغیرهای x و y مستقل از یکدیگرند، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(1,-1,1)$ کدام است؟

۱) ۳-
۲) ۲-
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ : گزینه «۴»

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{2xz+e^{x-y-2z}}{x^2-2e^{x-y-2z}}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1,1)=-\frac{2\times1\times1+e^{1+1-2}}{1-2e^{1+1-2}}=3$$

مثال ۱۵: هرگاه $x^y+y^z+z=3$ باشد، حاصل z'_y در نقطه $A(1,1,1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱- ۴) تابع مشتق ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» همه‌ی جملات داده شده را به یک طرف منتقل می‌کنیم:

$$F(x,y,z)=x^y+y^z+z-3=0$$

حالا با مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{x^y Lnx+zy^{z-1}}{y^z Lny+1}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}(1,1,1)=-1$$

مثال ۱۶: فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بوده و z به عنوان تابعی بر حسب x و y توسط معادله ضمنی $f(x+y,z-y)=0$ داده شده باشد. در این صورت z در کدامیک از معادلات زیر صدق می‌کند؟

۱) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$ ۲) $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=-1$ ۳) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$ ۴) $\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}=0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» باید z_x و z_y را محاسبه کنیم. فرمول داده شده را F می‌گیریم و از مشتق ضمنی استفاده می‌کنیم. اگر f_1 مشتق f نسبت به مؤلفه اول و f_2 مشتق f نسبت به مؤلفه دوم باشد، داریم:

$$z_x=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{f_1+0}{0+f_2}=-\frac{f_1}{f_2}\Rightarrow z_y=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{f_1-f_2}{0+f_2}=1-\frac{f_1}{f_2}\Rightarrow z_x-z_y=-1$$

مثال ۱۷: اگر $u=xLn(xy)$ باشد و داشته باشیم $x^3+y^3+3xy=1$ مقدار $\frac{du}{dx}$ کدام است؟

۱) $1-\frac{x(x^2+y)}{y(y^2+x)}$ ۲) $1+Lnxy-\frac{x(x^2+y)}{y(y^2+x)}$ ۳) $1+Lnxy+\frac{y(y^2+x)}{x(x^2+y)}$ ۴) $1+\frac{y(y^2+x)}{x(x^2+y)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با فرض آنکه y تابعی از x باشد از $F:x^3+y^3+3xy-1=0$ داریم:

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{3x^2+3y}{3y^2+3x}=-\frac{x^2+y}{y^2+x}$$

حال از $u=xLn(xy)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{du}{dx}=Lnxy+x\frac{y+xy'}{xy}=1+Lnxy+\frac{xy'}{y}=1+Lnxy-\frac{x(x^2+y)}{y(y^2+x)}$$

مثال ۱۸: هرگاه $f(x,y)=(x^2+y^2)tg(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}})$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$ کدام است؟

۱) f ۲) 2f ۳) 3f ۴) صفر

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به خواسته مسأله ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا تابع f همگن است:

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda^2x^2+\lambda^2y^2)tg(\frac{\sqrt{\lambda x}-\sqrt{\lambda y}}{\sqrt{\lambda x+\lambda y}})=\lambda^2(x^2+y^2)tg(\frac{\sqrt{\lambda}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{\lambda}\sqrt{x+y}})=\lambda^2 f(x,y)$$

تابع f تابعی همگن از درجه ۲ می‌باشد، لذا طبق قضیه اویلر داریم:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=2f(x,y)$$

مثال ۱۹: کدام تابع در معادله $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=2f$ صدق می‌کند؟

۱) $f(x,y)=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ۲) $f(x,y)=1+\sin\frac{x}{y}$ ۳) $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{xy}$ ۴) $f(x,y)=x^2Ln\frac{x}{y}-xy$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» طبق قضیه اویلر، باید تابعی را انتخاب کنیم که همگن از درجه ۲ باشد، تنها گزینه ۴، همگن از درجه دو می‌باشد (گزینه (۱) از درجه $\frac{1}{2}$ است و گزینه‌های (۲) و (۳) همگن از درجه ۰ می‌باشند.)

مثال ۲۰: در تابع $z=\dfrac{\log x-\log y}{x^2+y^2}$ اگر $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}+az=0$ باشد، a کدام است؟

۱) $\log e$ ۲) $Ln10$ ۳) -2 ۴) 2

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا توجه کنید با استفاده از رابطه‌ی $\log x-\log y=\log\dfrac{x}{y}$، عبارت را بازنویسی می‌کنیم:

$$z=\frac{\log x-\log y}{x^2+y^2}=\frac{\log\frac{x}{y}}{x^2+y^2}\Rightarrow z=\frac{\log\frac{\lambda x}{\lambda y}}{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2}=\frac{\log\frac{x}{y}}{\lambda^2(x^2+y^2)}=\lambda^{-2}\left(\frac{\log\frac{x}{y}}{x^2+y^2}\right)$$

پس z تابعی همگن از درجه ۲- می‌باشد، و در نتیجه طبق قضیه اویلر داریم:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-2z\Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+2z=0\Rightarrow a=2$$

مثال ۲۱: هرگاه $f(x,y)=\sin\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{x}{y}$ ۲) $\dfrac{y}{x}$ ۳) $-\dfrac{x}{y}$ ۴) $-\dfrac{y}{x}$

پاسخ: گزینه «۴» توجه کنید که تابع f همگن از درجه صفر است، زیرا داریم:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\sin\frac{\sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)}}{\lambda(x+y)}=\sin\frac{\lambda\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda(x+y)}=\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}=f(x,y)$$

بنابراین طبق قضیه اویلر داریم:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0\Rightarrow x\frac{\partial f}{\partial x}=-y\frac{\partial f}{\partial y}\Rightarrow\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{y}{x}$$

مثال ۲۲: در تابع $z=\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{x}{x+y}$ حاصل $A=x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{x^2}{y}$ ۲) $\dfrac{x}{y}$ ۳) z ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۱» توجه شود تابع z از جمع جبری دو تابع $z_1=\dfrac{x^2}{y}$ و $z_2=-\dfrac{x}{x+y}$ حاصل می‌گردد که تابع z_1 همگن از درجه یک و تابع z_2 همگن از درجه صفر می‌باشد، لذا طبق قضیه اویلر مقدار A برابر خواهد بود با:

$$A=1\times z_1+0\times z_2=\frac{x^2}{y}$$

مثال ۲۳: اگر $u=Arctg\dfrac{x^3-y^3}{x+y}$، حاصل $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}$ کدام است؟

۱) $\cos 2u$ ۲) $\sin 2u$ ۳) $2u$ ۴) $2tgu$

پاسخ: گزینه «۲» تابع داده شده در صورت سوال همگن نیست، ولی $tgu=\dfrac{x^3-y^3}{x+y}$ می‌باشد که یک عبارت همگن از درجه ۲ است، بنابراین قرار می‌دهیم $F(u)=tgu$ در این صورت طبق نکته فوق داریم:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2\times\frac{tgu}{1+tg^2u}=\sin 2u$$

مثال ۲۴: اگر $u=Arcsin(\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}})$ آن‌گاه حاصل $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}$ کدام است؟

۱) $\cos u$ ۲) $\sin u$ ۳) $\dfrac{1}{2}tgu$ ۴) tgu

پاسخ: گزینه «۳»

$$u=Arc\sin(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}})\Rightarrow F(u)=\sin u=\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

تابع $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ همگن از درجه $n=\dfrac{1}{2}$ می‌باشد، لذا داریم:

$$x.\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}.\frac{F(u)}{F'(u)}=\frac{1}{2}\times\frac{\sin u}{\cos u}=\frac{tgu}{2}$$

مثال ۲۵: تابع $z = yf(\frac{x}{y}) + \frac{y}{x}F(\frac{x}{y})$ در کدامیک از معادلات زیر صدق می‌کند؟

۱) $x^2 z_{xx} + 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy} = 0$ ۲) $x^2 z_{xx} + y^2 z_{yy} = 0$ ۳) $z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 0$ ۴) $z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = 0$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» تابع z از جمع جبری دو تابع $z_1 = yf(\frac{x}{y})$ و $z_2 = \frac{y}{x}F(\frac{x}{y})$ حاصل می‌گردد که تابع z_1 همگن از درجه یک و تابع z_2 همگـن از درجه صفر است، لذا داریم:

$$x^2 z_{xx} + 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy} = 1(1-1)\times z_1 + 0(0-1)\times z_2 = 0$$

مثال ۲۶: اگر (r,θ) مختصات قطبی باشد و داشته باشیم $u = Ar + B$ که A و B ثابت هستند کدام حکم زیر نتیجه می‌شود؟

۱) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ ۲) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

۳) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ۴) $\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» چون $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ پس $u = A\sqrt{x^2+y^2} + B$. توجه کنید که $\sqrt{x^2+y^2}$ همگن از درجه $n = 1$ و B همگـن از درجـه $n = 0$ است. بنابراین طبق نکته‌ی گفته شده در این مورد، نتیجه می‌شود:

$$x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = n(n-1)u = 0$$

با جایگذاری $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ و تقسیم طرفین بر r^2 خواهیم داشت:

$$\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

مثال ۲۷: اگر $v = 2xy$ ، $u = x^2 - y^2$ ، $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ باشد، حاصل $\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}$ کدام است؟

۱) $2r^2$ ۲) $4r^2$ ۳) $2r^3$ ۴) $4r^3$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا u و v را برحسب r و θ به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} v = 2xy = 2r^2\sin\theta\cos\theta = r^2\sin 2\theta \\ u = x^2 - y^2 = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = r^2\cos 2\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} 2r\cos 2\theta & -2r^2\sin 2\theta \\ 2r\sin 2\theta & 2r^2\cos 2\theta \end{vmatrix} = 4r^3$$

مثال ۲۸: اگر $u = x^2 + y^2 + z^2$ ، $v = x + y + z$ ، $w = xy + yz + zx$ حاصل $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) xyz ۴) $x^2y^2z^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{روش ساروس}} 2x(x+y) + 2y(y+z) + 2z(x+z) - 2z(y+z) - 2y(x+y) - 2x(x+z) = 0$$

توضیح: در حالتی که $x = y = z$ باشد، سطرهای اول و سوم ماتریس با هم برابر می‌شوند؛ پس دترمینان صفر است. حال در گزینه‌ها هر کدام از آن‌ها کـه به ازای $x = y = z$ برابر صفر شد، جواب است، لذا فقط گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۲۹: اگر $u = xyz$ ، $v = xy + yz + zx$ ، $w = x + y + z$ ، آن‌گاه حاصل $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۰
۳) $(x-y)(y-z)(z-x)$
۴) $(y-x)(y-z)(z-x)$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا دترمینان مربوطه را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ y+z & x+z & y+x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz-xy & xz-xy & xy \\ z-x & z-y & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

در تساوی فوق ستون سوم را از ستون‌های اول و دوم کم کردیم:

$$\begin{vmatrix} y(z-x) & x(z-y) & xy \\ z-x & z-y & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (z-x)(z-y)\begin{vmatrix} y & x & xy \\ 1 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (z-x)(z-y)[(-1)^{3+3}(y\times 1 - x\times 1)]$$

با توجه به وجود دو صفر در سطر سوم، بسط مناسب دترمینان را با توجه به این سطر نوشته و حاصل دترمینان برابر با $y-x$ می‌شود و لذا حاصل ژاکوبین برابر با مقدار مقابل است: $(z-x)(z-y)(y-x) = (z-x)(-1)(y-z)(-1)(x-y) = (z-x)(y-z)(x-y)$

مثال ۳۰: اگر $u^2 + v = x - y$ و $u + v^2 = x + y$ باشد، آن‌گاه $(\frac{\partial u}{\partial x})_y$ کدام است؟

۱) $\frac{2v+1}{4uv-1}$
۲) $\frac{2v-1}{4uv-1}$
۳) $\frac{2u+1}{4uv-1}$
۴) $\frac{2u-1}{4uv-1}$

پاسخ: گزینه «۲» نماد $(\frac{\partial u}{\partial x})_y$ یعنی از u بر حسب x مشتق بگیریم در حالی که متغیر دیگر y فرض شده است، یعنی u و v توابعی از x و y هستند.

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = u^2 + v - x + y = 0 \\ G(x,y,u,v) = u + v^2 - x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 1 \\ 1 & 2v \end{vmatrix}} = \frac{2v-1}{4uv-1}$$

مثال ۳۱: اگر $x - y + u^2 + v^2 = 1$ و $x + y + u^3e^v = 2$ باشد، آن‌گاه $(\frac{\partial u}{\partial y})_x$ کدام است؟

۱) $\frac{u^3 - 2ve^{-v}}{2u^4 - 6u^2v}$
۲) $\frac{u^3 + 2ve^{-v}}{2u^4 - 6u^2v}$
۳) $\frac{u^3 + 2ve^{-v}}{2u^4 + 6u^2v}$
۴) $\frac{u^3 - 2ve^{-v}}{2u^4 + 6u^2v}$

پاسخ: گزینه «۲» نماد $(\frac{\partial u}{\partial y})_x$ یعنی از u بر حسب y مشتق بگیریم در حالی که x نیز متغیر است. بنابراین در این مثال x و y متغیرها و u و v دو تابع برحسب x و y هستند.

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = x - y + u^2 + v^2 - 1 = 0 \\ G(x,y,u,v) = x + y + u^3e^v - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2v \\ 1 & u^3e^v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 3u^2e^v & u^3e^v \end{vmatrix}} = \frac{u^3e^v + 2v}{2u^4e^v - 6u^2ve^v} = \frac{u^3 + 2ve^{-v}}{2u^4 - 6u^2v}$$

مثال ۳۲: فرض کنید در یک همسایگی از نقطه‌ی $(x,y)=(1,1)$ توابع $z=z(x,y)$ و $w=w(x,y)$ در معادله‌های $2x^2+y^2+z^2-zw=0$ و $x^2+y^2+2z^2+zw-8=0$ صدق کنند، مقادیر $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial w}{\partial x}$ در نقطه مذکور کدام‌اند؟

۱) ±1 و ±6 ۲) -1 و ±2 ۳) ±1 و ±4 ۴) ±4 و ±2

پاسخ: گزینه «۱» معادلات داده شده را به ترتیب F_1 و F_2 فرض می‌کنیم، در این صورت:

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,w)}=\begin{vmatrix}2z-w & -z\\ 4z+w & z\end{vmatrix}=6z^2$$

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,w)}=\begin{vmatrix}4x & -z\\ 2x & z\end{vmatrix}=6xz\ ,\ \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix}2z-w & 4x\\ 4z+w & 2x\end{vmatrix}=-12xz-6wx$$

در همسایگی نقطه $(1,1)$، مقادیر $w=4$ ، $z=1$ یا $w=-4$ ، $z=-1$ به‌دست می‌آیند، بنابراین داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,w)}}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,w)}}=-\frac{6xz}{6z^2}=-\frac{x}{z}=\pm1 \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,w)}}=-\frac{-12xz-6wx}{6z^2}=\frac{x(2z+w)}{z^2}=\pm6$$

مثال ۳۳: روابط $\begin{cases}xy-e^{z-x}=0\\ x^2y+x^3z^2-2z=0\end{cases}$ بین سه متغیر x و y و z داده شده‌اند، می‌دانیم که در نزدیکی نقطه $(x,y,z)=(1,1,1)$ می‌توان y,z را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x در نظر گرفت. در این صورت کدام حکم در نقطه $(1,1,1)$ درست است؟

۱) $\frac{dy}{dx}=3\ ,\ \frac{dz}{dx}=2$ ۲) $\frac{dy}{dx}=-3\ ,\ \frac{dz}{dx}=-2$ ۳) $\frac{dy}{dx}=-5\ ,\ \frac{dz}{dx}=-3$ ۴) $\frac{dy}{dx}=5\ ,\ \frac{dz}{dx}=3$

پاسخ: گزینه «۳» روابط داده شده را با $F:xy-e^{z-x}=0$ و $G:x^2y+x^3z^2-2z=0$ نشان می‌دهیم. داریم:

$$\begin{cases}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}x & -e^{z-x}\\ x^2 & 2x^3z-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1\\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}=\begin{vmatrix}y+e^{z-x} & -e^{z-x}\\ 2xy+3x^2z^2 & 2x^3z-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & 0\end{vmatrix}=5\\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}y+e^{z-x} & x\\ 2xy+3x^2z^2 & x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-3\end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}=-\frac{5}{1}=-5\ ,\ \frac{dz}{dx}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,y)}}=-\frac{-3}{-1}=-3$$

توجه کنید که $\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,y)}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=-1$ است.

مثال ۳۴: اگر $F(x,y,z,u,v)=xy^2+zv+v^2-3$ ، $G(x,y,z,u,v)=x^3z+2y-uv-2$ و $H(x,y,z,u,v)=xu+yv-xyz-1$ آن‌گاه مقدار $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(y,x,z)}$ ، در نقطه‌ی $x=y=z=u=v=1$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 4 ۳) 2 ۴) -4

پاسخ: گزینه «۴» ژاکوبین موردنظر برابر است با:

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(y,x,z)}=\begin{vmatrix}2xy & y^2 & v\\ 2 & 3x^2z & x^3\\ v-xz & u-yz & -xy\end{vmatrix}\xrightarrow{x=y=z=u=v=1}\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=-4$$

مثال ۳۵: با کدام شرط زیر می‌توان از روابط $\begin{cases}u=x^2+y^2\\ v=xy\end{cases}$ ، متغیرهای y,x را به عنوان تابعی از v,u در نظر گرفت؟

۱) $x^2=y^2$ ۲) $x^2\neq y^2$ ۳) $xy=1$ ۴) $xy\neq1$

پاسخ: گزینه «۲» طبق نکته فوق بایستی $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq0$ باشد، یعنی داریم:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}2x & 2y\\ y & x\end{vmatrix}=2x^2-2y^2\neq0\Rightarrow x^2\neq y^2$$

مثال ۳۶: در کدام نقاط (u,v) نمی‌توان دستگاه معادلات $y=uv-v^2$ و $x=u^2+v^2$ را بر حسب u و v (به عنوان توابعی از x و y) حل نمود؟

۱) $u=2v$ ۲) $uv=v^2$ ۳) $u^2-uv-v^2=0$ ۴) $u^2-2uv-v^2=0$

پاسخ: گزینه «۴» اگر $F_1=u^2+v^2-x=0$ و $F_2=uv-v^2-y$ با توجه به قضیه تابع ضمنی شرط آنکه u و v توابعی از x و y باشند آن است که:

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}\neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ v & u-2v \end{vmatrix}=2u^2-4uv-2v^2\neq 0 \Rightarrow u^2-2uv-v^2\neq 0$$

مثال ۳۷: در کدامیک از نواحی زیر تابع $f(x,y)=(x^2+y^2+xy,1+xy)$ معکوس دارد؟

۱) کل ناحیه $\mathbb{R}^2$ به جزء مبدأ ۲) کل ناحیه $\mathbb{R}^2$ به جز محور xها و yها

۳) کل ناحیه $\mathbb{R}^2$ به جز نیمساز ربع اول و سوم و نیمساز ربع دوم و چهارم ۴) کل ناحیه $\mathbb{R}^2$

پاسخ: گزینه «۳» قرار می‌دهیم $\begin{cases} u=x^2+y^2+xy \\ v=xy+1 \end{cases}$ ، برای معکوس‌پذیری تابع فوق لازم است ژاکوبین یا به عبارتی $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ مخالف صفر باشد، یعنی داریم:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} 2x+y & 2y+x \\ y & x \end{vmatrix}=2x^2+xy-2y^2-xy=2(x^2-y^2)\neq 0$$

در نتیجه $x^2\neq y^2$ یا به عبارتی $x\neq \pm y$ باشد.

مثال ۳۸: اگر $z=x^2+2xy+y^2$ و $x=t\cos t$ و $y=t\sin t$، مقدار $\frac{dz}{dt}$ در $t=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\pi(1-\frac{\pi}{2})$ ۲) $\pi(2-\frac{\pi}{2})$ ۳) $\pi(1+\frac{\pi}{2})$ ۴) $\pi(2+\frac{\pi}{2})$

پاسخ: گزینه «۱» می‌توانیم از قاعده مشتق‌گیری زنجیری استفاده کنیم، ولی جایگذاری و محاسبه مستقیم ساده‌تر می‌باشد.

$$z=t^2\cos^2 t+2t\cos t\times t\sin t+t^2\sin^2 t=t^2+t^2\sin 2t \Rightarrow \frac{dz}{dt}=2t+2t\sin 2t+2t^2\cos 2t \xrightarrow{t=\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{dt}=\pi-\frac{\pi^2}{2}=\pi(1-\frac{\pi}{2})$$

مثال ۳۹: اگر $z=f(u,v)$ و $u=x-y$ و $v=x^2y$ باشد، $\frac{\partial z}{\partial x}$ برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{\partial z}{\partial u}+y\frac{\partial z}{\partial v}$ ۲) $\frac{\partial z}{\partial u}+2\frac{\partial z}{\partial v}$ ۳) $-y\frac{\partial z}{\partial u}+2xy\frac{\partial z}{\partial v}$ ۴) $2xy\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}$

پاسخ: گزینه «۴» از قاعده مشتق‌گیری زنجیری استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}.1+\frac{\partial z}{\partial v}2xy=2xy\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}$$

مثال ۴۰: اگر $u=x^2+y^2+z^2$، $v=x+y+z$، $w=xy+yz+zx$، حاصل $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) xyz ۴) $x^2y^2z^2$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix}$$

دترمینان ماتریس فوق به ازای $x=y=z=1$ برابر صفر می‌شود و با توجه به گزینه‌ها، فقط گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۴۱: اگر $z=x^5 f(\frac{y}{x^2})$ حاصل عبارت $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}-5z$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۹)

۱) $-z$ ۲) 0 ۳) $\frac{-y}{x^3}+f'(\frac{y}{x^2})$ ۴) $\frac{y}{x}.f'(\frac{y}{x^2})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$$z=x^5f(\frac{y}{x^2}) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=5x^4f(\frac{y}{x^2})-2yx^2f'(\frac{y}{x^2}),\frac{\partial z}{\partial y}=x^3f'(\frac{y}{x^2})$$

بنابراین داریم:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}-5z=5x^5f(\frac{y}{x^2})-2yx^3f'(\frac{y}{x^2})+2yx^3f'(\frac{y}{x^2})-5z=0$$

مثال ۴۲: اگر $f(x,y)=x^2+y^2$ و $x=r+s$ و $y=r-s$، مقدار $\frac{\partial f}{\partial s}$ در نقطه $s=-\frac{1}{2}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۹)

۱) -4 ۲) 2 ۳) -2 ۴) 4

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با جایگزینی x و y برحسب r و s در تابع f خواهیم داشت:

$$f(r,s)=2r^2+2s^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial s}=4s\Big|_{s=\frac{-1}{2}}=-2$$

مثال ۴۳: اگر f و F دو تابع چند متغیره و دارای مشتقات نسبی مرتبه اول باشند، بعلاوه $F(x,y)=f(u,v)$ که در آن $u=x-y$ و $v=-x+y$ آن‌گاه مقدار $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(2,2)}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) صفر ۲) $(f_u+f_v)_{(0,0)}$ ۳) $2(f_u+f_v)_{(0,0)}$ ۴) $2(f_u-f_v)_{(0,0)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از روش مشتق‌گیری زنجیری استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}=f_u\times 1+f_v\times(-1)=f_u-f_v \quad و \quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}=f_u\times(-1)+f_v\times 1=f_v-f_u$$

بنابراین $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}=0$.

مثال ۴۴: اگر $z=\sin^{-1}\frac{x}{y}$ باشد، کدام رابطه برقرار است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ ۲) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$ ۳) $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ ۴) $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تابع z همگن از درجه ۰ می‌باشد، پس طبق قضیه اویلر گزینه (۲) صحیح است.

$$f(x,y)=\sin^{-1}\frac{x}{y} \Rightarrow f(\lambda x,\lambda y)=\sin^{-1}\frac{\lambda x}{\lambda y}=\sin^{-1}\frac{x}{y}=f(x,y)$$

مثال ۴۵: اگر $u=\frac{x^2y^2}{x+y}$ باشد، مقدار $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{u}{3}$ ۲) $3u$ ۳) $3u^2$ ۴) $6u$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تابع u، تابع همگن از مرتبه ۳ می‌باشد، بنابراین طبق قضیه اویلر داریم:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3u$$

مثال ۴۶: اگر $z=x^2-2y^2$ و $x=3s+2r$ و $y=3s-2r$ آن‌گاه $\frac{\partial z}{\partial r}$ به ازای $r=2$ و $s=1$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۰)

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۲۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» به ازای $r=2$ و $s=1$، مقادیر $x=7$ و $y=-1$ به‌دست می‌آید.

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}=2x.2+(-4y)\times(-2)=20$$

مثال ۴۷: اگر $z=x^{۲}+y^{۲}$، $x=\sin t$ و $y=e^{t}$، مقدار $\frac{dz}{dt}$ در $t=\circ$ کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که به ازای $t=\circ$، مقادیر $x=\circ$ و $y=۱$ به‌دست می‌آیند.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}=(۲x\times\cos t+۲y\times e^{t})\Big|_{t=\circ}=۲$$

مثال ۴۸: هرگاه $f(x,y)=(x^{۲}+y^{۲})\operatorname{tg}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$، عبارت $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$ برابر است با: (معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) $۲f$ ۲) صفر ۳) $x^{۲}+y^{۲}$ ۴) $y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}$

پاسخ: گزینه «۱» تابع f همگن از درجه ۲ است و بنابراین طبق قضیه اویلر، $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=۲f$ می‌باشد.

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda^{۲}x^{۲}+\lambda^{۲}y^{۲})\operatorname{tg}\frac{\sqrt{\lambda x}-\sqrt{\lambda y}}{\sqrt{\lambda x+\lambda y}}=\lambda^{۲}(x^{۲}+y^{۲})\operatorname{tg}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}=\lambda^{۲}f(x,y)$$

مثال ۴۹: اگر $f(x,y,z)=\circ$ و $xyz=c$ (c ثابت) و f تابع مشتق پذیر باشد آن‌گاه $\frac{dy}{dx}$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{-y(xf_x-zf_z)}{x(yf_y-zf_z)}$ ۲) $\frac{y(xf_x+zf_z)}{x(yf_y-zf_z)}$ ۳) $\frac{-x(yf_y-zf_x)}{y(xf_x-zf_z)}$ ۴) $\frac{x(yf_y+zf_z)}{y(xf_x-zf_z)}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا رابطه $xyz=c$ را به‌صورت $g(x,y,z)=xyz-c=\circ$ می‌نویسیم. در این صورت داریم:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}}=-\frac{\begin{vmatrix}f_x & f_z\\ yz & xy\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}f_y & f_z\\ xz & xy\end{vmatrix}}=-\frac{xyf_x-yzf_z}{xyf_y-xzf_z}$$

مثال ۵۰: $\frac{dw}{dt}$ را بر حسب تابعی از t به‌دست آورید اگر $w=xy+z$، $x=\cos t$، $y=\sin t$ و $z=t$ باشد. (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $۱+\cos ۲t$ ۲) $\cos ۲t$ ۳) $\sin ۲t$ ۴) $۱-\sin ۲t$

پاسخ: گزینه «۱»

$$w=xy+z=\sin t\cos t+t=\frac{۱}{۲}\sin ۲t+t\ \Rightarrow \frac{dw}{dt}=\cos ۲t+۱$$

مثال ۵۱: اگر $u=x^{۲}+y^{۲}$ و $x=۴s-۳t$ و $y=st^{۲}$ مقدار $\frac{\partial^{۲}u}{\partial t^{۲}}$ در نقطه $s=\circ$ و $t=\circ$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۱)

۱) ۰ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه «۴» می‌توان از قاعده مشتق زنجیره‌ای استفاده کرد ولی جایگزینی و محاسبه مستقیم ساده‌تر است:

$$u=(۴s-۳t)^{۲}+s^{۲}t^{۴}\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}=-۶(۴s-۳t)+۴s^{۲}t^{۳}\ \Rightarrow \frac{\partial^{۲}u}{\partial t^{۲}}=۱۸+۱۲s^{۲}t^{۲}\ \Rightarrow \frac{\partial^{۲}u}{\partial t^{۲}}\Big|_{s=t=\circ}=۱۸$$

مثال ۵۲: چنانچه $u=f(x-y,y-x)$ باشد، آن‌گاه: (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\circ$ ۲) $۲\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\circ$ ۳) $\frac{\partial u}{\partial x}+۲\frac{\partial u}{\partial y}=\circ$ ۴) $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\circ$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا قرار می‌دهیم $v=x-y$ و $w=y-x$، در این صورت داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial v}-\frac{\partial u}{\partial w}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial w}\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\circ$$

مثال ۵۳: چنانچه $u=f(\frac{1}{2}bx^2-\frac{1}{3}ay^3)$ باشد، آن‌گاه: (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۱)

۱) $ay^2\frac{\partial u}{\partial x}+bx\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ۲) $ay\frac{\partial u}{\partial x}+bx\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ۳) $ax\frac{\partial u}{\partial x}+by\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ۴) $ay^2\frac{\partial u}{\partial x}+bx^2\frac{\partial u}{\partial y}=0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» فرض می‌کنیم $v=\frac{1}{2}bx^2-\frac{1}{3}ay^3$ باشد. در این‌صورت $u=f(v)$ است بنابراین داریم: $\frac{\partial u}{\partial x}=v_x f'(v)$ و $\frac{\partial u}{\partial y}=v_y f'(v)$ پس داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=bxf'(v)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-ay^2f'(v)\Rightarrow ay^2\frac{\partial u}{\partial x}+bx\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

مثال ۵۴: اگر $u=x^2+y^2$ و $x=4s-3t$ و $y=st^2$، مقدار $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ در نقطه $s=0$ و $t=0$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۱)

۱) ۰ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}=2x\times(-3)+2y\times 2st=-24s+18t+4s^2t^3\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=18+12s^2t^2\Big|_{(0,0)}=18$$

مثال ۵۵: رابطه $z=x^nf(\frac{y}{x})$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $y\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}+nz=0$ ۲) $y\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}-nz=0$ ۳) $\frac{\partial z}{\partial x}-n\frac{\partial z}{\partial y}=0$ ۴) $\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}-nz=0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تابع داده شده یک تابع همگن از درجه n می‌باشد، بنابراین طبق قضیه اویلر گزینه (۲) صحیح است.

مثال ۵۶: مشتق‌های جزئی $\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$ برای $z=\cos(x^2+y^2)$ که $\begin{cases}x=u\cos v\\ y=u\sin v\end{cases}$ به ترتیب عبارتند از: (MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) $-2u\sin u^2$ و ۰ ۲) $-2u\sin v^2$ و $2u\cos v^2$ ۳) ۰ و $2u\cos v^2$ ۴) $-2u\sin u^2$ و $2u\cos u^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» می‌توان از مشتق‌گیری زنجیری استفاده کرد ولی اگر به جای x و y برحسب u و v جایگزین کنیم سریعتر و ساده‌تر به جواب می‌رسیم.

$$z=\cos(x^2+y^2)=\cos(u^2\cos^2 v+u^2\sin^2 v)=\cos u^2$$
$$\frac{\partial z}{\partial u}=-2u\sin u^2\ ,\ \frac{\partial z}{\partial v}=0$$

مثال ۵۷: معادله $2\frac{\partial f}{\partial x}-3\frac{\partial f}{\partial y}=0$ با تغییر متغیرهای $r=2y-3x$ و $\rho=2y+3x$ به کدام صورت بیان می‌شود؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{\partial f}{\partial r}=0$ ۲) $\frac{\partial f}{\partial \rho}=0$ ۳) $\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\partial f}{\partial \rho}=0$ ۴) $\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial \rho}=0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial r}\times\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \rho}\times\frac{\partial \rho}{\partial y}=2\frac{\partial f}{\partial r}+2\frac{\partial f}{\partial \rho}\quad \text{و}\quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \rho}\times\frac{\partial \rho}{\partial x}=-3\frac{\partial f}{\partial r}+3\frac{\partial f}{\partial \rho}$$

با جایگزینی روابط فوق در معادله داده شده، نتیجه می‌شود $\frac{\partial f}{\partial r}=0$.

مثال ۵۸: اگر $u=\frac{x^2y^2}{x+y}$ باشد، مقدار عبارت $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{u}{3}$ ۲) $3u^2$ ۳) $3u$ ۴) $6u$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» تابع u، یک تابع همگن مرتبه ۳ می‌باشد، بنابراین طبق قضیه اویلر گزینه (۳) صحیح است.

مثال ۵۹: در تابع دو متغیره $z=x^2\text{Arctg}\dfrac{y}{x}$ حاصل $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ به ازای $x=\sqrt{3}$ و $y=1$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۳)

۱) π ۲) $\dfrac{\pi}{2}$ ۳) $\dfrac{\pi}{3}$ ۴) $\dfrac{2\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» تابع داده شده، یک تابع همگن از درجه ۲ می‌باشد، بنابراین طبق قضیه اویلر داریم:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z\Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2\text{Arctg}\frac{y}{x}\Big|_{(\sqrt{3},1)}=2(\sqrt{3})^2\text{Arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\pi$$

مثال ۶۰: اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند از رابطه $g(z-x)+f(y-z)=0$ حاصل $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $g'-f'$

پاسخ: گزینه «۳» از روش مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-g'(z-x)}{g'(z-x)-f'(y-z)}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f'(y-z)}{g'(z-x)-f'(y-z)}\ \Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

مثال ۶۱: اگر $z=e^x\cos y$ و $\begin{cases}x^3+e^x-t^2-t=1\\ yt^2+y^2t-t+y=0\end{cases}$، مقدار $\dfrac{dz}{dt}$ در $t=0$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱- ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که به ازای $t=0$، $x=0$ و $y=0$ به‌دست می‌آید. از طرفی داریم:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}=e^x\cos y\frac{dx}{dt}-e^x\sin y\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}$$

بنابراین کافی است $\dfrac{dx}{dt}$ را در $t=0$ به‌دست آوریم:

$$x^3+e^x-t^2-t=1\Rightarrow 3x^2\frac{dx}{dt}+e^x\frac{dx}{dt}-2t-1=0$$

به ازای $t=0$ و $x=0$، از رابطه فوق نتیجه می‌شود $\dfrac{dx}{dt}=1$.

مثال ۶۲: جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ کدامیک از توابع زیر است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $z=f(\dfrac{x}{y})$ ۲) $z=f(x,y)$ ۳) $z=f(x-y)$ ۴) $z=f(x^2-y^2)$

پاسخ: گزینه «۴»

$$z=f(x^2-y^2)\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'(x^2-y^2)\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-2yf'(x^2-y^2)\ \Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

مثال ۶۳: تابع $w=f(y-z,z-x,x-y)$ جواب کدام معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی است؟ (مکانیک ـ آزاد ۸۴)

۱) $\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=1$ ۲) $\dfrac{\partial w}{\partial z}=\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial y}$ ۳) $\dfrac{\partial w}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial x}=0$ ۴) قابل محاسبه به فرم فوق نیست.

پاسخ: گزینه «۳»

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x}&=\frac{\partial(z-x)}{\partial x}\times f_2'+\frac{\partial(x-y)}{\partial x}f_3'=-f_2'+f_3'\\ \frac{\partial w}{\partial y}&=\frac{\partial(y-z)}{\partial y}\times f_1'+\frac{\partial(x-y)}{\partial y}f_3'=+f_1'-f_3'\\ \frac{\partial w}{\partial z}&=\frac{\partial(y-z)}{\partial z}\times f_1'+\frac{\partial(z-x)}{\partial z}f_2'=-f_1'+f_2'\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=-f_2'+f_3'+f_1'-f_3'-f_1'+f_2'=0$$

مثال ۶۴: تابع $z=yf(\frac{x}{y})+F(\frac{x}{y})$ در کدامیک از معادلات دیفرانسیل زیر صدق می‌کند؟ (مکانیک ـ آزاد ۸۴)

۱) $z_{xx}+2z_{xy}+z_{yy}=0$
۲) $z_{xx}-2z_{xy}+z_{yy}=0$
۳) $x^2z_{xx}+2xyz_{xy}+y^2z_{yy}=0$
۴) $x^2z_{xx}-2xyz_{xy}+y^2z_{yy}=0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» تابع z از جمع جبری دو تابع $z_1=yf(\frac{x}{y})$ و $z_2=F(\frac{x}{y})$ حاصل می‌شود که تابع z_1 همگن از درجه یک و تابع z_2 همگن از درجه صفر است، بنابراین طبق قضیه اویلر داریم:

$$x^2z_{xx}+2xyz_{xy}+y^2z_{yy}=1(1-1)z_1+0(0-1)z_2=0$$

مثال ۶۵: معادله $u_{tt}-u_{xx}=0$ با تغییر متغیر $r=x+t$ و $s=x-t$ به کدام یک از صورت‌های زیر تبدیل می‌گردد؟ (فرض کنید مشتقات پاره‌ای u پیوسته می‌باشند.) (مکانیک ـ آزاد ۸۴)

۱) $u_{rr}=0$
۲) $u_{rs}+u_r=0$
۳) $u_{rs}=0$
۴) $u_{ss}=0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از روش مشتق زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم:

$$u_t=\frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial s}.\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial s}\Rightarrow u_{tt}=\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial s})=\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial r})-\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial s})$$

$$=(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}.\frac{\partial r}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial r}.\frac{\partial s}{\partial t})-(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial s}.\frac{\partial r}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}.\frac{\partial s}{\partial t})=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial r}-\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial s}-\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=u_{rr}-2u_{sr}+u_{ss}$$

توجه کنید که چون مشتق‌های جزئی پیوسته‌اند پس $\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial r}=\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial s}$. به طور مشابه می‌توان نشان داد که $u_{ss}=u_{rr}+2u_{sr}+u_{ss}$، که با جایگذاری در معادله $u_{tt}-u_{xx}=0$ نتیجه می‌شود $4u_{sr}$ و یا $u_{sr}=0$.

روش دوم: معادله مشخصه معادله داده شده به‌صورت $\lambda^2-1=0$ است که از آن $\lambda=\pm1$ حاصل می‌شود، بنابراین به کمک تغییر متغیرهای $r=x+t$ و $s=x-t$ معادله به‌صورت $u_{sr}=0$ در می‌آید.

مثال ۶۶: دو معادله $\begin{cases}2x=v^2-u^2\\ y=uv\end{cases}$، u و v را به عنوان تابعی از x و y تعریف می‌کنند. $\frac{\partial u}{\partial x}$ برابر با چیست؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{u}{u^2+v^2}$
۲) $\frac{v}{u^2+v^2}$
۳) $-\frac{u}{u^2+v^2}$
۴) $-\frac{v}{u^2+v^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» روابط داده شده را به‌صورت $F_1=v^2-u^2-2x=0$ و $F_2=uv-y=0$ می‌نویسیم. در این صورت داریم:

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}-2u & 2v\\ v & u\end{vmatrix}=-2(u^2+v^2)\quad و\quad \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}=\begin{vmatrix}-2 & 2v\\ 0 & u\end{vmatrix}=-2u$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}}=-\frac{-2u}{-2(u^2+v^2)}=-\frac{u}{u^2+v^2}$$

مثال ۶۷: اگر $u=tg^{-1}(\frac{y^2}{x})$ باشد، مقدار $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ در نقطه $(3,2)$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{3}{5}$
۲) $\frac{8}{15}$
۳) $\frac{16}{25}$
۴) $\frac{12}{25}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

روش اول:

$$u=tg^{-1}(\frac{y^2}{x})\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\frac{-y^2}{x^2}}{1+(\frac{y^2}{x})^2}=\frac{-y^2}{x^2+y^4}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\frac{2y}{x}}{1+(\frac{y^2}{x})^2}=\frac{2xy}{x^2+y^4}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\frac{12}{25}$$

روش دوم: می‌دانیم که اگر $F(u)=f(x,y)$ و f تابع همگن از درجه n باشد، آن‌گاه $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=n\frac{F(u)}{F'(u)}$.

حال توجه کنید که $F(u)=tgu=\frac{y^2}{x}$ به‌دست می‌آید که عبارت $\frac{y^2}{x}$ همگن از درجه یک است، پس طبق نکته فوق داریم:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{tgu}{1+tg^2u}=\frac{\frac{y^2}{x}}{1+(\frac{y^2}{x})^2}\xrightarrow{x=3\ ,\ y=2}\frac{12}{25}$$

مثال ۶۸: جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ کدامیک از توابع زیر است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۵)

۱) $z=f(\frac{x}{y})$ (f تابع دلخواه ولی مشتق‌پذیر)
۲) $z=f(x^2-y^2)$ (f تابع دلخواه ولی مشتق‌پذیر)
۳) $z=f(xy)$ (f تابع دلخواه ولی مشتق‌پذیر)
۴) $z=f(x-y)$ (f تابع دلخواه ولی مشتق‌پذیر)

پاسخ: گزینه «۲»

$$z=f(x^2-y^2)\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=2xf'(x^2-y^2)\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-2yf'(x^2-y^2)\Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

مثال ۶۹: اگر $\begin{cases}x=2u-v+w\\ y=u+v-w\\ z=3u+3v+w\end{cases}$ آن‌گاه $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ برابر است با: (معماری کشتی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۸
۲) ۱۲
۳) $\frac{1}{8}$
۴) $\frac{1}{12}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&1&-1\\3&3&1\end{vmatrix}=12\Rightarrow \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\frac{1}{12}$$

مثال ۷۰: اگر $z=x^2+\mathrm{Arctg}\frac{y}{x}$ و $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial r}$ به ازای $\theta=\frac{\pi}{4}$ و $r=1$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۰
۲) $\sqrt{2}$
۳) ۱
۴) ۲

پاسخ: گزینه «۳» مقدار $\frac{\partial z}{\partial r}$ را می‌توان به روش مشتق‌گیری زنجیری محاسبه کرد، ولی جایگزینی و سپس مشتق‌گیری ساده‌تر می‌باشد.

$$z=r^2\cos^2\theta+\mathrm{Arctg}\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=r^2\cos^2\theta+\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial r}=2r\cos^2\theta+0=2r\cos^2\theta\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial r}(1,\frac{\pi}{4})=2\times1\times\cos^2\frac{\pi}{4}=1$$

مثال ۷۱: با تغییر متغیر $v=y$ و $z=x+y$ معادله $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}=0$ به کدام شکل تبدیل می‌شود؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۵)

۱) $u_{vv}=0$
۲) $u_{vz}=0$
۳) $u_{zz}=0$
۴) $u_{zz}+u_{vv}=0$

پاسخ: گزینه «۱» از قاعده مشتق‌گیری زنجیری نتیجه می‌شود:

$$u_x=u_vv_x+u_zz_x=0+u_z=u_z$$

به همین ترتیب، به طور مشابه با مشتق‌گیری زنجیری خواهیم داشت:

$$\Rightarrow u_{xx}=u_{zz}\quad ,\quad u_{xy}=u_{zv}+u_{zz}$$

$$u_y=u_vv_y+u_zz_y=u_v+u_z\Rightarrow u_{yy}=u_{vv}+u_{vz}+u_{zv}+u_{zz}=u_{vv}+2u_{zv}+u_{zz}$$

با جایگزینی در معادله داده شده به‌دست می‌آید:

$$(u_{zz})-2(u_{vz}+u_{zz})+u_{vv}+2u_{zv}+u_{zz}=u_{vv}=0$$

مثال ۷۲: فرض کنید x و y و u و v به وسیله روابط $\begin{cases}u=x^2+3xy\\ x^2-y^2=c\end{cases}$ با هم مرتبط باشند آن‌گاه $\frac{\partial x}{\partial u}$ هنگامی که c یک عدد ثابت باشد در نقطه $(x,y)=(2,-1)$ برابر است با: (کنکور دکتری دانشگاه امیرکبیر ـ سال ۸۵)

۱) $-\frac{1}{11}$
۲) $\frac{1}{13}$
۳) -12
۴) $-\frac{1}{12}$

پاسخ: گزینه «۱» با فرض $F:u-x^2-3xy=0$ و $G:x^2-y^2=c$ داریم:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u&F_y\\G_u&G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_x&F_y\\G_x&G_y\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}1&-3x\\0&-2y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2x-3y&-3x\\2x&-2y\end{vmatrix}}=-\frac{-2y}{2y(2x+3y)+6x^2}$$

پس به ازای $(x,y)=(2,-1)$ داریم:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{-2}{-2+24}=-\frac{1}{11}$$

مثال ۷۳: اگر $u=f(x,y)$ و $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح می‌باشد؟ (پزشکی ـ بیومکانیک ـ آزاد ۸۶)

۱) $u_x^2+u_y^2=u_r^2+u_\theta^2$ ۲) $u_x^2+u_y^2=\frac{1}{r^2}u_r^2+u_\theta^2$ ۳) $u_x^2+u_y^2=u_r^2+r^2u_\theta^2$ ۴) $u_x^2+u_y^2=\frac{1}{r^2}u_\theta^2+u_r^2$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» می‌دانیم در مختصات قطبی $\vec{\nabla}f=\frac{\partial u}{\partial r}\vec{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\vec{\theta}$، و چون بردارهای یکه $\vec{r}$ و $\vec{\theta}$ متعامد هستند بنابراین طول برابر گرادیان برابر است با:

$$|\vec{\nabla}f|=(\frac{\partial u}{\partial r})^2+(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta})^2=u_r^2+\frac{1}{r^2}u_\theta^2$$

یادآوری: اگر $u=f(x,y)$، آن‌گاه $\vec{\nabla}f=(u_x\vec{i},u_y\vec{j})$ و بنابراین $|\vec{\nabla}f|=u_x^2+u_y^2$.

یادآوری: اگر $\vec{v}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n$، که $\vec{v}_1$، $\vec{v}_2$ و ... $\vec{v}_n$ همگی بردار یکه و دوبه‌دو بر هم عمودند آن‌گاه $|\vec{v}|=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2$.

مثال ۷۴: اگر $u=f(x+2t)+f(x-2t)$ آن‌گاه $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-4\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$ برابر است با: (معدن ـ آزاد ۸۶)

۱) صفر ۲) x^2+4t^2 ۳) x^2-4t^2 ۴) $2x^2+t^2$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با استفاده از قانون مشتق زنجیره‌ای:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2f'(x+2t)-2f'(x-2t)\Rightarrow\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=4f''(x+2t)+4f''(x-2t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(x+2t)+f'(x-2t)\Rightarrow\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=f''(x+2t)+f''(x-2t)\Rightarrow\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-4\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0$$

مثال ۷۵: اگر $u=x+y+z$ و $uv=y+z$ و $uvw=z$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{u}{v}$ ۲) $2uv$ ۳) uv^2 ۴) u^2v

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\begin{cases}z=uvw\\ y=uv-uvw\\ x=u-uv\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}1-v & -u & 0\\ v-vw & u-uw & -uv\\ vw & uw & uv\end{vmatrix}=u^2v$$

مثال ۷۶: اگر $z=yf(x^2-y^2)$، f تابعی مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}$ برابر است با: (عمران ـ سراسری ۸۷)

۱) yz ۲) xy ۳) xz ۴) xyz

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$z=yf(x^2-y^2)\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=2xyf'(x^2-y^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f(x^2-y^2)-2y^2f'(x^2-y^2)\Rightarrow y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=yxf(x^2-y^2)=xz$$

مثال ۷۷: اگر $w=r^2\cos2\theta$ و $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ آن‌گاه $\frac{\partial w}{\partial y}$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۷)

۱) $-2y$ ۲) $-\frac{2}{y}$ ۳) $\frac{2}{y}$ ۴) $2y$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$w=r^2\cos2\theta=r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta=x^2-y^2\Rightarrow\frac{\partial w}{\partial y}=-2y$$

مثال ۷۸: فرض کنید f مشتق‌پذیر و $f(x,y,z)=0$ باشد و $4x+3y-2z=c$ که c عدد ثابت است. در اینصورت $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟

(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۷)

۱) $-\frac{2f_x+4f_z}{2f_y+3f_z}$ ۲) $-\frac{4f_x+2f_z}{f_x+2f_z}$ ۳) $-\frac{4f_x+3f_z}{4f_y+2f_z}$ ۴) $-\frac{3f_x+2f_z}{f_y+2f_z}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» قرار می‌دهیم $g(x,y,z)=4x+3y-2z-c=0$، در این صورت طبق فرمول مشتق ضمنی با استفاده از ژاکوبین داریم:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}}=-\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ 4 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ 3 & -2\end{vmatrix}}=-\frac{2f_x+4f_z}{2f_y+3f_z}$$

مثال ۷۹: اگر $u=\mathrm{Ln}\sqrt{x^2+y^2}$ و $x=re^s$ و $y=re^{-s}$ باشند، $\frac{\partial u}{\partial r}$ کدام گزینه است؟

(مکانیک ـ آزاد ۸۷)

۱) $\frac{xe^s+ye^{-s}}{x^2+y^2}$ ۲) $\frac{r(xe^s-ye^{-s})}{x^2+y^2}$ ۳) $\frac{r(e^s-e^{-s})}{x^2+y^2}$ ۴) $\frac{xe^s-ye^{-s}}{x^2+y^2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» توجه کنید که $u=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(x^2+y^2)$، از قانون مشتق زنجیره‌ای:

$$\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{x}{x^2+y^2}e^s+\frac{y}{x^2+y^2}e^{-s}=\frac{xe^s+ye^{-s}}{x^2+y^2}$$

مثال ۸۰: اگر $z=f(x-y)$ ، $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۸)

۱) 0 ۲) $f'(x-y)$ ۳) $(x-y)f'(1)$ ۴) $f'(y-x)-f'(x-y)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$z=f(x-y)\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=f'(x-y) \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-f'(x-y)$$

بنابراین $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$ است.

مثال ۸۱: اگر $z=y^2 tgx, x=t^2uv, y=u+tv^2$، $\frac{\partial z}{\partial t}$ به ازای $u=1, v=0$ و $t=2$ کدام است؟

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۸)

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) $\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که به ازای $u=1, v=0$ و $t=2$ خواهیم داشت $x=0$ و $y=1$. برای محاسبه $\frac{\partial z}{\partial t}$ از قاعده مشتق‌گیری زنجیری استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=(y^2(1+tg^2x))(2tuv)+(2ytgx)(v^2)\xrightarrow{v=0}\frac{\partial z}{\partial t}=0$$

مثال ۸۲: با فرض اینکه توابع f و g دوبار مشتق‌پذیر باشند و $z=f(x^2-y)+g(x^2+y)$ ، کدام یک از رابطه‌های زیر درست است؟ (آمار ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2}{x}\frac{\partial z}{\partial x}$ ۲) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2}{x}\frac{\partial z}{\partial x}$ ۳) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}$ ۴) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با توجه به گزینه‌ها z_x و z_{xx} و z_{yy} را محاسبه می‌کنیم.

$$z_x=2xf'(x^2-y)+2xg'(x^2+y)\ ,\ z_y=-f'(x^2-y)+g'(x^2+y)$$

$$z_{xx}=2f'+4x^2f''+2g'+4x^2g''\ ,\ z_{yy}=f''+g''\ \Rightarrow\ z_{xx}-4x^2z_{yy}=2(f'+g')=\frac{1}{x}z_x$$

مثال ۸۳: اگر $D_xf(x,y)$ بیانگر مشتق جزئی تابع $f(x,y)$ نسبت به x باشد و داشته باشیم $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$، پیوستگی $f(x,y)$ و $D_xf(x,y)$ در $(0,0)$ چگونه است؟ (آمار ـ سراسری ۸۸)

۱) $f(x,y)$ پیوسته و $D_xf(x,y)$ ناپیوسته
۲) $f(x,y)$ ناپیوسته و $D_xf(x,y)$ پیوسته
۳) هر دو ناپیوسته
۴) هر دو پیوسته

پاسخ : گزینه «۳» درجه صورت و مخرج برابر است و بنابراین تابع f در $(0,0)$ ناپیوسته است. از طرفی $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2xy^2(x^4+y^4)-4x^5y^2}{(x^4+y^4)^2}$ و درجه صورت از مخرج کمتر است و بنابراین $\frac{\partial f}{\partial x}$ نیز در $(0,0)$ ناپیوسته می‌باشد.

مثال ۸۴: جاکوبی $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\omega)}$ با تبدیل $x=u\cos v$ و $y=u\sin v$ و $z=\omega$ عبارت است از: (فرآوری و انتقال گاز ـ سراسری ۸۸)

۱) v
۲) u
۳) $u+v$
۴) $u+v+\omega$

پاسخ : گزینه «۲» از تعریف ژاکوبین داریم:

$$\text{ژاکوبین}=\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v & 0\\ \sin v & u\cos v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=u$$

مثال ۸۵: فرض کنید $z=z(x,y)$ به‌صورت $x+y-z=e^{-(x+y+z)}$ بیان شده در این صورت: (آمار ـ آزاد ۸۸)

۱) $z_x-z_y=1$
۲) $z_x+z_y=0$
۳) $z_x-z_y=0$
۴) $z_x+z_y=1$

پاسخ : گزینه «۳» اگر $F=x+y-z-e^{-(x+y+z)}=0$ از قاعده مشتق ضمنی داریم:

$$z_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{1+e^{-(x,y+z)}}{-1+e^{-(x+y+z)}}\ ,\ z_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{1+e^{-(x+y+z)}}{-1+e^{-(x+y+z)}}\Rightarrow z_x=z_y\Rightarrow z_x-z_y=0$$

مثال ۸۶: اگر $u=\frac{x+y}{1-xy}$ و $v=tg^{-1}x+tg^{-1}y$ و $xy\neq 1$ آن‌گاه $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ برابر است با: (ریاضی محض ـ آزاد ۸۸)

۱) ۱
۲) ۱ـ
۳) صفر
۴) ۲

پاسخ : گزینه «۳»

روش اول:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{1-xy+xy+y^2}{(1-xy)^2} & \frac{1-xy+xy+x^2}{(1-xy)^2}\\ \frac{1}{1+x^2} & \frac{1}{1+y^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1+y^2}{(1-xy)^2} & \frac{1+x^2}{(1-xy)^2}\\ \frac{1}{1+x^2} & \frac{1}{1+y^2}\end{vmatrix}=0$$

روش دوم: چون $v=tg^{-1}x+tg^{-1}y=tg^{-1}\frac{x+y}{1-xy}=tg^{-1}u$، پس رابطه‌ای بین u و v مستقل از x و y وجود دارد، بنابراین $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0$.

مثال ۸۷: هرگاه $x^2+y^2+z^2=1$ آن‌گاه $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ برابر است با : (عمران ـ سراسری ۸۹)

۱) $z-\frac{1}{z}$
۲) $\frac{1}{z}$
۳) $z^2+\frac{1}{z}$
۴) $z+\frac{1}{z}$

پاسخ : گزینه «۱» برای یافتن $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ از روش مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنیم.

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_x}{f_z}=-\frac{2x}{2z}=-\frac{x}{z}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f'_y}{f'_z}=-\frac{2y}{2z}=-\frac{y}{z}$$

$$\Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x(-\frac{x}{z})+y(-\frac{y}{z})=\frac{-x^2}{z}+\frac{-y^2}{z}=-(\frac{x^2+y^2}{z})=-(\frac{1-z^2}{z})=\frac{-1}{z}+z$$

مثال ۸۸: در تابع با ضابطه $z = xy + x\sqrt{xy}$ حاصل $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه $(1,4)$ واقع بر آن کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۹)

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه «۳» قضیه اویلر: اگر تابع دو متغیره $f(x,y)$، همگن از درجه n باشد آن‌گاه:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = n f(x,y)$$

همچنین تابع $z = f(x,y)$ را همگن از درجه n گویند هرگاه:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

تابع z یک تابع همگن از درجه ۲ می‌باشد زیرا:

$$z(\lambda x,\lambda y) = (\lambda x)(\lambda y) + \lambda x\sqrt{(\lambda x)(\lambda y)} = \lambda^2 xy + \lambda^2 x\sqrt{xy} = \lambda^2(xy + x\sqrt{xy}) = \lambda^2 z(x,y)$$

$$\Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z\Big|_{\substack{x=1\\ y=4}} = 2(1\times 4 + 1\sqrt{4}) = 2(6) = 12$$

مثال ۸۹: از رابطه $z^2 = e^{2x-y} + \sqrt{z+3} + y$ مقدار $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(1,2,-2)$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۹)

۱) $-\dfrac{4}{9}$ ۲) $-\dfrac{9}{4}$ ۳) $\dfrac{4}{9}$ ۴) $\dfrac{9}{4}$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از روش مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$f(x,y,z) = z^2 - e^{2x-y} - \sqrt{z+3} - y = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_z} = -\frac{-2e^{2x-y}}{2z - \dfrac{1}{2\sqrt{z+3}}}\Bigg|_{(1,2,-2)} = -\frac{4}{9}$$

مثال ۹۰: اگر $u = x^2 + y^2$ و $v = x + xy$ مقدار $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ به ازای $x = 2$ و $y = -1$ در حالی که v ثابت باشد کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۹)

۱) $-\dfrac{1}{2}$ ۲) $-\dfrac{1}{4}$ ۳) $\dfrac{1}{4}$ ۴) $\dfrac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» اگر $f(x,y,u,v) = 0$ و $g(x,y,u,v) = 0$ و $u = u(x,y)$ و $v = v(x,y)$ آن‌گاه:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} \ ; \ \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}$$

بنابراین با فرض این‌که $f(x,y,u,v) = u - x^2 - y^2 = 0$ و $g(x,y,u,v) = v - x - xy = 0$ باشد خواهیم داشت:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} -2x & 0 \\ -1-y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = 2x\Big|_{x=2} = 4 \Rightarrow \frac{dx}{du} = \frac{1}{4}$$

مثال ۹۱: متغیرهای x و y و z در معادله $x^3y^2 + z^3 + xyz - 3 = 0$ صدق می‌کنند. فرض کنید x تابعی از y و z باشد، $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ و $\dfrac{\partial x}{\partial z}$ در نقطه $(y,z) = (1,1)$ کدام است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\dfrac{\partial x}{\partial y} = -\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{\partial x}{\partial z} = -1$ ۲) $\dfrac{\partial x}{\partial y} = \dfrac{3}{4}$, $\dfrac{\partial x}{\partial z} = 1$ ۳) $\dfrac{\partial x}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial x}{\partial z} = \dfrac{3}{4}$ ۴) $\dfrac{\partial x}{\partial y} = \dfrac{3}{4}$, $\dfrac{\partial x}{\partial z} = -1$

پاسخ: گزینه «۱» با قرار دادن $z = 1$ و $y = 1$ داریم $x^3 + x - 2 = 0$ و لذا $x = 1$. اگر $F = x^3y^2 + z^3 + xyz - 3 = 0$ آن‌گاه:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{F'_z}{F'_x} = -\frac{3z^2 + xy}{3x^2y^2 + yz} = -1 \ , \ \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_x} = -\frac{2x^3y + xz}{3x^2y^2 + yz} = -\frac{3}{4}$$

مثال ۹۲: اگر $\begin{cases} x^2+y^2=u \\ x\sin y+y=v \end{cases}$ آن‌گاه حاصل $\frac{\partial x}{\partial v}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{x^2\cos y+x+y\sin y}{-y}$ ۲) $\frac{x}{x^2\cos y+x+y\sin y}$ ۳) $x\cos y+1$ ۴) $\frac{-y}{x^2\cos y+x-y\sin y}$

پاسخ: گزینه «۴» در نظر می‌گیریم x و y به عنوان متغیرهای وابسته و u و v به عنوان متغیرهای مستقل می‌باشند. بنابراین از تعریف ژاکوبین برای دستگاه معادلات $\begin{cases} F(u,v,x,y)=x^2+y^2-u=0 \\ G(u,v,x,y)=x\sin y+y-v=0 \end{cases}$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}=-\frac{\begin{vmatrix} F_v & F_y \\ G_v & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2y \\ -1 & x\cos y+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ \sin y & x\cos y+1 \end{vmatrix}} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{-2y}{2x^2\cos y+2x-2y\sin y}=\frac{-y}{x^2\cos y+x-y\sin y}$$

مثال ۹۳: اگر $z=x^2+xy-y^2$ و $x=2t-s$ و $y=t^2+s^2$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial t}$ به ازای $t=2$ و $s=3$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۹۰)

۱) ۷۵- ۲) ۴۰- ۳) ۴۵- ۴) ۷۰-

پاسخ: گزینه «۴» طبق قاعده مشتق‌گیری داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=(2x+y)(2)+(x-2y)(2t) \quad (1)$$

به ازای $t=2$, $s=3$:

$$x=2t-s=4-3=1 \quad ; \quad y=t^2+s^2=4+9=13$$

مقادیر فوق را در رابطه (۱) جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{\partial z}{\partial t}=(2\times1+13)(2)+(1-2\times13)(2\times2)=30-100=-70$$

مثال ۹۴: در تابع دو متغیره $z=\frac{x^2}{y}-\frac{x}{x+y}$ حاصل $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial x}$ برابر کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۹۰)

۱) 0 ۲) $\frac{x}{y}$ ۳) $2z$ ۴) $\frac{x^2}{y}$

پاسخ: گزینه «۴» چون x و y متغیر مستقل هستند. پس $\frac{\partial y}{\partial x}=0$.

(z_1 تابع همگن درجه ۱ و z_2 تابع همگن درجه ۰)

$$z=\frac{x^2}{y}-\frac{x}{x+y} \quad , \quad z_1=\frac{x^2}{y}, z_2=\frac{x}{x+y}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=(1)z_1+(0)z_2=z_1=\frac{x^2}{y}$$

مثال ۹۵: هرگاه $z=\arcsin\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ آن‌گاه عبارت $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $2\sin z$ ۲) $\cos z$ ۳) $2tgz$ ۴) $\cot g z$

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم که اگر $u=F(z)$ باشد که u عبارتی همگن بر حسب x و y است آن‌گاه $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=n\frac{F(z)}{F'(z)}$.

در این سؤال قرار می‌دهیم $u=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$، در این صورت $u=\sin z$ و در نتیجه داریم:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2\times\frac{\sin z}{\cos z}=2\tan z$$

مثال ۹۶: فرض کنید تابع f بر R مشتق‌پذیر است کدام گزینه برای تابع $u=f(x^{2}+y^{2})$ صحیح است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۰)

۱) $x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ۲) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ۳) $y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ۴) $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا مشتقات جزئی u نسبت به x و y را می‌یابیم.

$$x^{2}+y^{2}=v \Rightarrow u=f(v) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}=f_{v}.2x=2xf_{v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}=f_{v}.2y=2yf_{v}$$

که با بررسی گزینه‌ها، گزینه ۴ صحیح است، زیرا:

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=2xyf_{v}-2xyf_{v}=0$$

مثال ۹۷: اگر $u=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}$ در این صورت $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2(x+y)}$ ۲) $\frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x+y}$ ۳) $-\frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x+y}$ ۴) $-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2(x+y)}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به قضیه اویلر، اگر تابع $u=f(x,y)$ همگن و از مرتبه n باشد، بنابراین داریم:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=nu \qquad (1)$$

لذا ابتدا همگنی تابع $u=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\sqrt{\lambda x}-\sqrt{\lambda y}}{\lambda x+\lambda y}=\frac{\sqrt{\lambda}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\lambda(x+y)}=\lambda^{-\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y})=\lambda^{-\frac{1}{2}}f(x,y)$$

بنابراین تابع u همگن از مرتبه $n=-\frac{1}{2}$ می‌باشد، لذا با جایگذاری در رابطه (۱) داریم:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}u=-\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y})$$

مثال ۹۸: اگر $z=\frac{xy}{x^{2}+y^{2}}$ مقدار $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ برابر کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۹۰)

۱) صفر ۲) $-z$ ۳) z ۴) $(x+y)z$

پاسخ: گزینه «۱» تابع داده شده همگن از مرتبه صفر است، بنابراین طبق قضیه اویلر می‌توان نوشت:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0\times z=0$$

مثال ۹۹: از رابطه $xz^{2}+(2x-y)z=7$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(2,-1,1)$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۹۰)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه «۲» چون رابطه‌ی ضمنی بین z و x برقرار است، از تعریف مشتق ضمنی برای محاسبه‌ی $\frac{\partial z}{\partial x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_{x}}{f_{z}}=-\frac{z^{2}+2z}{2xz+(2x-y)}\Big|_{(2,-1,1)}=-\frac{3}{4+(1+4)}=-\frac{1}{3}$$

درسنامه۴: گرادیان و مشتق جهتی سوئی

مثال۱: گرادیان تابع $\phi(x,y,z)=xy+yz^2$ در نقطه‌ای با مختصات $M(2,-1,-1)$ کدام است؟

۱) $\vec{\nabla}\phi=-\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ ۲) $\vec{\nabla}\phi=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$ ۳) $\vec{\nabla}\phi=-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ ۴) $\vec{\nabla}\phi=-2\vec{i}+2\vec{k}-3\vec{j}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» اگر $\phi=\phi(x,y,z)$ آن‌گاه گرادیان ϕ بفرم $\vec{\nabla}\phi=(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z})$ می‌باشد لذا داریم:

$$\vec{\nabla}\phi=(y,x+z^2,2yz)\Rightarrow\vec{\nabla}\phi(2,-1,-1)=(-1,3,2)\Rightarrow\vec{\nabla}\phi(2,-1,-1)=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$$

مثال۲: در کدام نقطه یا نقاط، گرادیان تابع $z=\mathrm{Ln}(x+\frac{1}{y})$ برابر با $\vec{i}-\frac{16}{9}\vec{j}$ است؟

۱) $(\frac{1}{3},-\frac{3}{4})$ و $(\frac{7}{3},\frac{3}{4})$ ۲) $(-\frac{1}{3},\frac{3}{4})$ و $(\frac{7}{3},-\frac{3}{4})$ ۳) فقط $(\frac{7}{3},\frac{3}{4})$ ۴) فقط $(-\frac{1}{3},\frac{3}{4})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که $\vec{\nabla}z=(\frac{1}{x+\frac{1}{y}},\frac{\frac{-1}{y^2}}{x+\frac{1}{y}})$، بنابراین برای این که گرادیان برابر $\vec{i}-\frac{16}{9}\vec{j}$ باشد، لازم است:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x+\frac{1}{y}}=1\\[2ex] \dfrac{-\frac{1}{y^2}}{x+\frac{1}{y}}=\dfrac{-16}{9}\end{cases}\Rightarrow\frac{-1}{y^2}=\frac{-16}{9}\Rightarrow y=\pm\frac{3}{4}$$

به ازای $y=\frac{3}{4}$، از معادله $\frac{1}{x+\frac{1}{y}}=1$، نتیجه می‌شود $x=\frac{-1}{3}$، به ازای $y=\frac{-3}{4}$، نتیجه می‌شود $x=\frac{7}{3}$. بنابراین نقاط $(\frac{-1}{3},\frac{3}{4})$ و $(\frac{7}{3},\frac{-3}{4})$ نقاط موردنظر هستند.

مثال۳: مشتق سوئی تابع $\varphi(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ در نقطه $(3,4,-1)$ در امتداد بردار $\vec{A}=3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳-

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» ابتدا بردار یکه را برای $\vec{A}$ محاسبه می‌کنیم:

$$|\vec{A}|=\sqrt{(3)^2+(-2)^2+(6)^2}=\sqrt{49}=7\quad\text{و}\quad\vec{u}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}}{7}=\frac{3}{7}\vec{i}-\frac{2}{7}\vec{j}+\frac{6}{7}\vec{k}$$

گرادیان ϕ در نقطه $(3,4,-1)$ برابر است با:

$$\vec{\nabla}\varphi=2x\vec{i}+2y\vec{j}-2z\vec{k}\Rightarrow\vec{\nabla}\varphi(3,4,-1)=6\vec{i}+8\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\text{مشتق سوئی در جهت بردار }\vec{A}=\vec{u}.\vec{\nabla}\varphi(3,4,-1)=(\frac{3}{7}\vec{i}-\frac{2}{7}\vec{j}+\frac{6}{7}\vec{k}).(6\vec{i}+8\vec{j}+2\vec{k})=\frac{18}{7}-\frac{16}{7}+\frac{12}{7}=\frac{14}{7}=2$$

مثال۴: مشتق سوئی تابع $f(x,y)=e^{-xy}$ در نقطه $(1,-1)$ و در راستای $\theta=\frac{2\pi}{3}$ کدام است؟

۱) $\frac{e}{2}(1+\sqrt{3})$ ۲) $\frac{-e}{2}(1+\sqrt{3})$ ۳) $\frac{e}{2}(1-\sqrt{3})$ ۴) $\frac{e}{2}(\sqrt{3}-1)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» منظور از راستای $\theta=\frac{2\pi}{3}$، همان بردار یکه $\vec{u}_\theta=(\cos\theta,\sin\theta)=(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ می‌باشد. از طرفی داریم:

$$\vec{\nabla}f=(-ye^{-xy},-xe^{-xy})\Rightarrow\vec{\nabla}f\Big|_{(1,-1)}=(e,-e)$$

بنابراین مشتق سوئی به‌صورت مقابل خواهد بود:

$$D_{\vec{u}_\theta}f=\vec{\nabla}f.\vec{u}_\theta=(e,-e).(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{-e}{2}(1+\sqrt{3})$$

مثال ۵: فرض کنید $f(x,y,z)=xyz^2-y^3z$، در این صورت آهنگ تغییرات تابع f وقتی از نقطه $A(2,1,-1)$ به سمت نقطه $B(-1,1,3)$ حرکت می‌کنیم چقدر است؟

۱) $\frac{-17}{5}$ ۲) $\frac{-23}{5}$ ۳) -5 ۴) $\frac{-14}{5}$

پاسخ: گزینه «۲» منظور از آهنگ تغییرات همان مشتق جهتی تابع f در نقطه A، در جهت بردار $\overrightarrow{AB}$ می‌باشد. ابتدا بردار $\overrightarrow{AB}$ را به‌دست آورده و آن را یکه می‌کنیم:

$$\overrightarrow{AB}=(-3,0,4)\Rightarrow|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{9+16}=5\Rightarrow \text{بردار یکه } \vec{u}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=(\frac{-3}{5},0,\frac{4}{5})$$

گرادیان تابع f را در نقطه A به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{\nabla}f=(yz^2,xz^2-3y^2z,2xyz-y^3)\Rightarrow\vec{\nabla}f(A)=(1,5,-5)$$

بنابراین مشتق جهتی تابع f در نقطه A، در جهت بردار یکه $\vec{u}$ برابر است با:

$$D_{\vec{u}}f(A)=(\frac{-3}{5},0,\frac{4}{5}).(1,5,-5)=\frac{-3}{5}+0+\frac{-20}{5}=\frac{-23}{5}$$

مثال ۶: تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+y^3}{|x|+|y|} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ را در نظر بگیرید. مشتق سوئی تابع f در مبدأ مختصات در جهت بردار یکه $\vec{u}=\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j}$ چقدر است؟

۱) $\frac{9}{35}$ ۲) $\frac{9}{50}$ ۳) $\frac{9}{25}$ ۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینه «۱» چون ضابطه f در مبدأ مختصات تغییر می‌کند، برای محاسبه مشتق جهتی از تعریف استفاده می‌کنیم، یعنی داریم:

$$D_{\vec{u}}f(0,0)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(\frac{3}{5}h,\frac{4}{5}h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{\frac{9}{25}h^2+\frac{64}{125}h^3}{|\frac{3}{5}h|+|\frac{4}{5}h|}-0}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{9}{25}h+\frac{64}{125}h^2}{|\frac{3}{5}h|+|\frac{4}{5}h|}=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{9}{25}h+\frac{64}{125}h^2}{\frac{3}{5}h+\frac{4}{5}h}=\frac{9}{35}$$

مثال ۷: بزرگترین مشتق سوئی تابع $f(x,y,z)=x^2y^3z^4$ در نقطه $(1,1,1)$ کدام است؟

۱) 9 ۲) 29 ۳) $\sqrt{29}$ ۴) $9\sqrt{29}$

پاسخ: گزینه «۳» مقدار بزرگترین مشتق جهتی برابر اندازه بردار گرادیان است، یعنی داریم:

$$\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}=2xy^3z^4\vec{i}+3x^2y^2z^4\vec{j}+4x^2y^3z^3\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}f(1,1,1)=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}\Rightarrow|\vec{\nabla}f|=\sqrt{(2)^2+(3)^2+(4)^2}=\sqrt{29}$$

مثال ۸: مشتق تابع $f(x,y,z)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$، در امتداد خط مماس بر منحنی C به معادله‌ی $C:x=t\ ,y=2t^2$ و $z=2t^4$، در نقطه‌ی $A(1,2,2)$ کدام است؟

۱) $\frac{-16}{243}$ ۲) $\frac{32}{81}$ ۳) $\frac{-32}{81}$ ۴) $\frac{16}{243}$

پاسخ: گزینه «۱» واضح است که نقطه $A(1,2,2)$، به ازای $t=1$ روی منحنی C به‌دست آمده است. ابتدا بردار یکه مماس بر منحنی C را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{r}(t)=(t,2t^2,2t^4)\Rightarrow\vec{r}'(t)=(1,4t,8t^3)\Big|_{t=1}=(1,4,8)\Rightarrow\vec{u}=\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}=\frac{(1,4,8)}{\sqrt{1+16+64}}=(\frac{1}{9},\frac{4}{9},\frac{8}{9})$$

گرادیان تابع f در نقطه A را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{\nabla}f=\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2},\frac{-2xy}{2\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},\frac{-2xz}{2\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\right)\Bigg|_A=(\frac{8}{27},\frac{-2}{27},\frac{-2}{27})$$

بنابراین مشتق تابع f در امتداد $\vec{u}$ برابر است با:

$$D_{\vec{u}}f=\vec{\nabla}f.\vec{u}=(\frac{8}{27})(\frac{1}{9})+(\frac{-2}{27})(\frac{4}{9})+(\frac{8}{9})(\frac{-2}{27})=\frac{-16}{243}$$

مثال۹: فرض کنیم تابع $f(x,y)$ در نقطه $\{a,b\}$ مشتق‌پذیر باشد. اگر مشتق جهتی این تابع در نقطه مذکور در امتداد $\vec{i}+\vec{j}$ برابر $3\sqrt{2}$ و در امتداد $3\vec{i}-4\vec{j}$ برابر ۵ باشد، آن‌گاه بردار $\vec{\nabla}f(a,b)$ کدام است؟

۱) $7\vec{i}-\vec{j}$ ۲) $7\vec{i}+\vec{j}$ ۳) $-\vec{i}+7\vec{j}$ ۴) $\frac{12\sqrt{2}+5}{7}\vec{i}+\frac{9\sqrt{2}-5}{7}\vec{j}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» فرض می‌کنیم $\vec{\nabla}f=(f_1,f_2)$، در این صورت داریم:

$$\vec{A}=\vec{i}+\vec{j}\ \Rightarrow \vec{u}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$$

$$\vec{B}=3\vec{i}-4\vec{j}\ \Rightarrow \vec{V}=\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}=\frac{1}{5}(3\vec{i}-4\vec{j})$$

$$\begin{cases}\vec{\nabla}f.\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})=3\sqrt{2}\\ \vec{\nabla}f.\frac{1}{5}(3\vec{i}-4\vec{j})=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f_1+f_2=6\\ 3f_1-4f_2=25\end{cases}\Rightarrow f_1=7\ ,\ f_2=-1\ \Rightarrow \vec{\nabla}f=(7,-1)$$

مثال۱۰: تابع $f(x,y,z)=x^2y+yz+z^2$ را در نظر بگیرید. مشتق سوئی مرتبه دوم f در نقطه $(1,-1,1)$ در جهت بردار $\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ چقدر است؟

۱) $\frac{10}{6}$ ۲) $\frac{14}{3}$ ۳) $\frac{14}{6}$ ۴) $\frac{20}{3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» ابتدا مشتق سوئی مرتبه اول f را در نقطه دلخواه $p(x,y,z)$ به‌دست می‌آوریم. یکه شده بردار داده شده به‌صورت $\vec{u}=\frac{(1,1,2)}{\sqrt{1+1+4}}=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})$ است، بنابراین داریم: $D_{\vec{u}}f(p)=\vec{\nabla}f.\vec{u}=(2xy,x^2+z,y+2z).(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})=\frac{1}{\sqrt{6}}(2xy+x^2+z+2y+4z)$

قرار می‌دهیم $g=\frac{1}{\sqrt{6}}(2xy+x^2+5z+2y)$، در این صورت برای به‌دست آوردن مشتق سوئی مرتبه دوم f کافی است $D_{\vec{u}}g(p)$ را به‌دست آوریم:

$$D_{\vec{u}}g(p)=\vec{\nabla}g.\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{6}}(2y+2x,2x+2,5).\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)=\frac{1}{6}(2y+2x+2x+2+10)=\frac{1}{6}(4x+2y+12)$$

که در نقطه $(1,-1,1)$ مقدار مشتق سوئی برابر $\frac{14}{6}=\frac{1}{6}(4-2+12)$ است.

مثال۱۱: در مورد تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y^2}{x^6+y^4} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$، کدام گزینه درست است؟ (در گزینه‌ها $u_2\neq 0$ است.)

۱) تابع f در مبدأ پیوسته است و مشتق جهتی f در مبدأ در امتداد بردار یکه $\vec{u}=(u_1,u_2)$ برابر با $\frac{u_1^3}{u_2^2}$ می‌باشد.

۲) تابع f در مبدأ پیوسته نیست و مشتق جهتی f در مبدأ در امتداد بردار یکه $\vec{u}=(u_1,u_2)$ برابر با $\frac{u_1^3}{u_2^2}$ است.

۳) مشتقات جزئی مرتبه اول تابع f در $(0,0)$ پیوسته نیستند و مشتق جهتی f در مبدأ در امتداد بردار یکه $\vec{u}=(u_1,u_2)$، برابر با $\frac{u_1^3}{2u_2^2}$ می‌باشد.

۴) مشتقات جزئی مرتبه اول تابع f در $(0,0)$ پیوسته هستند و مشتق جهتی f در مبدأ در امتداد بردار یکه $\vec{u}=(u_1,u_2)$، برابر با $\frac{u_1^3}{2u_2^2}$ می‌باشد.

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» حد f روی مسیر $y^2=mx^3$ به‌دست می‌آوریم، در این صورت داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y^2}{x^6+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3.mx^3}{x^6+m^2x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^6}{x^6(1+m^2)}=\frac{m}{1+m^2}$$

بنابراین حد وجود ندارد و در نتیجه f در مبدأ پیوسته نیست.

مشتق جهتی f را در مبدأ جهت بردار یکه $\vec{u}=(u_1,u_2)$ به‌دست می‌آوریم:

$$D_{\vec{u}}f(0,0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(hu_1,hu_2)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{h^3u_1^3h^2u_2^2}{h^6u_1^6+h^4u_2^4}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{u_1^3u_2^2}{h^2u_1^6+u_2^4}$$

حال اگر $u_2\neq 0$، آن‌گاه حد اخیر برابر $\frac{u_1^3}{u_2^2}$ خواهد بود.

حل در این‌جا به اتمام رسیده است ولی برای اطمینان بیشتر سایر گزینه‌ها را نیز بررسی می‌کنیم، بدین منظور مشتق‌های جزئی مرتبه اول f را در مبدأ به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{3x^2y^2(x^6+y^4)-6x^5.x^3y^2}{(x^6+y^4)^2}=\frac{3x^2y^6-3x^8y^2}{(x^6+y^4)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2x^3y(x^6+y^4)-4y^3x^3y^2}{(x^6+y^4)^2}=\frac{2x^9y-2x^3y^5}{(x^6+y^4)^2}$$

چون درجه صورت از درجه مخرج کوچک‌تر یا مساوی می‌باشد پس $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در مبدأ حد ندارند و بنابراین پیوسته نیستند.

مثال ۱۲: در تابع $f(x,y,z)=axy^2+byz+cz^2x^3$ اگر ثابت‌های a و b و c را به گونه‌ای انتخاب کرده باشیم که ماکزیمم مشتق سوئی آن در نقطه $(1,2,-1)$ در جهت محور z ها و مقدار آن ۶۴ باشد آن‌گاه حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۴ ۳) -22 ۴) -24

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» می‌دانیم حداکثر مقدار مشتق جهتی در جهت بردار گرادیان و مقدار آن $|\vec{\nabla} f|$ است چون حداکثر مشتق در جهت محور z ها و اندازه آن ۶۴ است پس $\vec{\nabla} f=(0,0,64)$.

$$\vec{\nabla} f=(ay^2+3cz^2x^2,2axy+bz,by+2czx^3)=(4a+3c,4a-b,2b-2c)=(0,0,64)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}4a+3c=0\\4a-b=0\\2b-2c=64\end{cases}\Rightarrow c=-8\ ,\ b=24\ ,\ a=6\ \Rightarrow a+b+c=22$$

مثال ۱۳: مکان هندسی نقاطی که مجموع مشتق‌های سوئی تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ در جهت‌های $(1,1)$ و $(1,-1)$ برابر مقدار تابع یعنی x^2+y^2 باشد، کدام است؟

۱) $x^2+y^2=2$ ۲) $y^2+(x-\sqrt{2})^2=2$ ۳) $(x+\sqrt{2})^2+y^2=2$ ۴) $x^2+(y+\sqrt{2})^2=2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا بردارهای داده شده را یکه می‌کنیم در این صورت $\vec{u}=\frac{(1,1)}{\sqrt{1+1}}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ و $\vec{v}=\frac{(1,-1)}{\sqrt{1+1}}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})$. بنابراین مشتق سوئی تابع f در نقطه دلخواه $p(x,y)$ در جهت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ برابر است با:

$$D_{\vec{u}}f(p)=\vec{\nabla} f.\vec{u}=(2x,2y).(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{2x}{\sqrt{2}}+\frac{2y}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(x+y)$$
$$D_{\vec{v}}f(p)=\vec{\nabla} f.\vec{v}=(2x,2y).(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})=\frac{2x}{\sqrt{2}}-\frac{2y}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(x-y)$$

بنابراین مجموع مشتق‌های سوئی برابر $\sqrt{2}(x+y)+\sqrt{2}(x-y)=2\sqrt{2}x$ است که طبق خواسته سؤال می‌خواهیم برابر x^2+y^2 باشد، یعنی داریم:

$$x^2+y^2=2\sqrt{2}x\Rightarrow(x-\sqrt{2})^2+y^2=2$$

مثال ۱۴: مشتق جهت‌دار تابع $f(x,y)=2x^2-3xy+5y^2$ در نقطه $(1,2)$ در جهت بردار واحد $\vec{U}$ که با محور x ها زاویه ۴۵ درجه بسازد چقدر است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ ۳) ۱۵ ۴) $\frac{19\sqrt{2}}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\vec{\nabla} f=(4x-3y\ ,\ -3x+10y)\Rightarrow\vec{\nabla} f(1,2)=(-2,17)$$

چون بردار واحد $\vec{u}$، با محور x ها زاویه 45° می‌سازد، پس $\vec{u}=(\cos 45^\circ\ ,\ \sin 45^\circ)=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$. بنابراین مشتق سوئی f در نقطه $(1,2)$ در جهت بردار $\vec{u}$ برابر است با:

$$D_{\vec{u}}f(1,2)=(-2,17).(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{15\sqrt{2}}{2}$$

مثال ۱۵: مشتق تابع $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y$ در نقطه (۱ و ۲) و در جهتی که این نقطه را به مبدأ وصل می‌کند برابر است با: (مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ۳) $\frac{-1}{\sqrt{5}}$ ۴) $-\sqrt{5}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» بردار واحدی که نقطه (۱ و ۲) را به مبدأ وصل می‌کند $\vec{u} = (\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}})$ می‌باشد.

$$f(x,y,z) = x^2y^2 - xy^3 - 3y - z = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} f = (2xy^2 - y^3\ ,\ 2x^2y - 3xy^2 - 3\ ,\ -1) \Rightarrow \vec{\nabla} f\Big|_{(2,1)} = (3,-1,-1)$$

$$D_{\vec{u}} f = \vec{\nabla} f.\vec{u} = (3,-1,-1).(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0) = \frac{-5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$$

مثال ۱۶: مشتق سوئی تابع $f(x,y,z) = xz^2 - \sin xy$ در نقطه $(1, \frac{\pi}{2}, -1)$ در جهت بردار $\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۹)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 0 ۴) 1

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$f(x,y,z) = xz^2 - \sin xy \Rightarrow \vec{\nabla} f = (z^2 - y\cos xy, -x\cos xy, 2xz) \Rightarrow \vec{\nabla} f\Big|_{(1,\frac{\pi}{2},-1)} = (1,0,-2)$$

اگر قرار دهیم $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$، آن‌گاه داریم:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{3}(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}) = (\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3})$$

بنابراین مشتق سوئی f در نقطه $(1, \frac{\pi}{2}, -1)$ در جهت بردار $\vec{u}$ برابر است با:

$$D_{\vec{u}} f = (1,0,-2).(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}) = -1$$

مثال ۱۷: اگر $\vec{u}$ برداری که در جهت ماکزیمم مقدار مشتق جهت‌دار تابع $f(x,y) = x^2e^y$ در نقطه‌ی $(-2,0)$ باشد، در این صورت مقدار $\vec{u}$ با کدام عبارت برابر است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $\vec{u} = \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}$ ۲) $\vec{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ ۳) $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$ ۴) $\vec{u} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{j}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» جهت موردنظر، جهت بردار گرادیان می‌باشد.

$$\vec{\nabla} f = (2xe^y, x^2e^y)\Big|_{(-2,0)} = (-4,4) \Rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|} = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

مثال ۱۸: تابع با ضابطه‌ی $f(x,y) = tg^{-1}(\frac{y}{x})$ مفروض است. از نقطه‌ی $P(1,1)$ در سوی چه امتدادی حرکت کنیم تا حداکثر سرعت افزایش برای تابع f به‌دست آید؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $(\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ۲) $(-1\ ,\ 1)$ ۳) $(-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2})$ ۴) $(-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}})$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲ و ۳ و ۴» جهت $\vec{\nabla} f$، راستای بیشترین افزایش تابع می‌باشد، بنابراین داریم:

$$f(x,y) = \mathrm{Arctg}\frac{y}{x} \Rightarrow \vec{\nabla} f = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})\Big|_{(1,1)} = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$$

با توجه به اینکه سه بردار $(-1,1)$، $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ و $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ هر سه با بردار $\vec{\nabla} f$ هم‌راستا هستند، بنابراین هر سه صحیح می‌باشند و فقط گزینه (۱) درست نیست!

مثال ۱۹: معادله ارتفاع یک کوه به‌صورت $h(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^3$ است. محور xها در امتداد شرق و محور yها در امتداد شمال است. یک کوهنورد در نقطه (۲ و ۱) برای بالا رفتن از کوه به کدام سمت باید برود؟ (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) شرق ۲) غرب ۳) جنوب ۴) شمال

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\vec{\nabla} h = (4x - 2y, -2x + 3y^2)\Big|_{(1,2)} = (0,10) = 10(0,1)$$

برای حداکثر افزایش ارتفاع، باید در جهت بردار گرادیان حرکت کرد و چون بردار گرادیان با توجه به مفروضات مسأله در امتداد شمال است، پس باید کوهنورد به سمت شمال حرکت کند.

مثال ۲۰: گرادیان تابع $f(x,y)=x^3y^2$ در نقطه‌ی $(-1,2)$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $4\vec{i}-3\vec{j}$ ۲) $3\vec{i}-12\vec{j}$ ۳) $4\vec{i}+12\vec{j}$ ۴) $12\vec{i}-4\vec{j}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$f(x,y)=x^3y^2 \Rightarrow \vec{\nabla}f=(3x^2y^2,2x^3y) \Rightarrow \vec{\nabla}f\Big|_{(-1,2)}=(12,-4)$$

مثال ۲۱: مشتق سوئی تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=y^4+2xy^3+x^2y^2$ در نقطه $(0,1)$ و در جهت $\vec{i}+\vec{j}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{3}$

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا بردار داده شده را به‌صورت یکه در می‌آوریم.

$$\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$$

از طرفی داریم:

$$\vec{\nabla}f=(2y^3+2xy^2)\vec{i}+(4y^3+6xy^2+2x^2y)\vec{j} \Rightarrow \vec{\nabla}f\Big|_{(0,1)}=2\vec{i}+4\vec{j}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$D_{\vec{u}}f=(2,4).(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=3\sqrt{2}$$

مثال ۲۲: اگر $f(x,y)=3x^2-y^2+4x$ آن‌گاه مشتق جهت‌دار f در جهت بردار یکه $\vec{U}$ که با جهت مثبت محورxها زاویه $\frac{\pi}{6}$ می‌سازد کدام است؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $3x-2\sqrt{3}y$ ۲) $x-3\sqrt{3}y+2\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{3}x-y+4$ ۴) $3\sqrt{3}x-y+2\sqrt{3}$

پاسخ : گزینه «۴» بردار یکه که با جهت مثبت محور x ها زاویه $\frac{\pi}{6}$ می‌سازد به‌صورت مقابل است:

$$\vec{u}=(\cos\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{6})=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$$

$$f(x,y)=3x^2-y^2+4x \Rightarrow \vec{\nabla}f=(6x+4,-2y)$$

$$D_{\vec{u}}f=\vec{\nabla}f.\vec{u}=(6x+4,-2y).(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})=3x\sqrt{3}-y+2\sqrt{3}$$

مثال ۲۳: مشتق جهت‌دار $f(x,y)=e^x tgy+2x^2y$ در نقطه $(0,\frac{\pi}{4})$ در جهت $\vec{i}-\vec{j}$ عبارت است از: (MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) $-\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\vec{\nabla}f=(e^x tgy+4xy\ ,\ e^x(1+tg^2y)+2x^2)\Big|_{(0,\frac{\pi}{4})}=(1,2)$$

$$D_{\vec{u}}f=\vec{\nabla}f.\vec{u}=(1,2).(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

مثال ۲۴: اگر $f(x,y,z)=z^2-xe^{3x-y}$ اندازه تصویر بردار grad f در نقطه $(1,3,-1)$ بر روی بردار $\vec{A}=-\vec{i}+\vec{j}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) ۳

پاسخ : گزینه «۱»

$$\vec{\nabla}f=(-e^{3x-y}-3xe^{3x-y},xe^{3x-y},2z)\Big|_{(1,3,-1)}=(-4,1,-2)$$

$$\text{اندازه تصویر}=\frac{|\vec{\nabla}f.\vec{A}|}{|\vec{A}|}=\frac{4+1}{\sqrt{1+1}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

مثال ۲۵: بیشترین مقدار مشتق سوئی تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2+3z$ در نقطه $(3,-3,2)$ چقدر است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ : گزینه «۳» بیشترین مقدار سوئی برابر اندازه بردار گرادیان است.

$$\vec{\nabla}f=(2x,2y,3)\Big|_{(3,-3,2)}=(6,-6,3) \Rightarrow |\vec{\nabla}f|=9$$

مثال ۲۶: گرادیان تابع عکس فاصله از مبدأ در فضای سه بعدی یعنی $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$ برابر کدام‌یک از بردارهای زیر است؟ (توجه شود که $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$)

(علوم دریایی ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{\vec{r}}{r^3}$ ۲) $\frac{\vec{r}}{r^2}$ ۳) $-\frac{\vec{r}}{r^2}$ ۴) $-\frac{\vec{r}}{r^3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» می‌دانیم که اگر $w = f(r)$، که $\vec{r} = (x,y,z)$ و $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ آن‌گاه $\vec{\nabla} f(r) = f'(r).\frac{\vec{r}}{r}$.

بنابراین داریم: $\vec{\nabla}(\frac{1}{r}) = \frac{-1}{r^2}.\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

مثال ۲۷: تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$ در کدامیک از گزاره‌های زیر صدق می‌کند؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) f در $(0,0)$ پیوسته است. ۲) f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است.

۳) f در $(0,0)$ دارای مشتق سوئی در هر جهت می‌باشد. ۴) f در $(0,0)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول بوده ولی پیوسته نمی‌باشد.

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» ابتدا نشان می‌دهیم f در $(0,0)$ حد ندارد. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y=mx}} \frac{\sin(mx^2)}{x^2+m^2x^2} \stackrel{\text{هم‌ارزی}}{=\!=\!=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$

چون مقدار حد به m وابسته است، پس حد وجود ندارد. حال به بررسی وجود مشتقات جزئی در $(0,0)$ می‌پردازیم.

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0 \quad \text{و} \quad f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

مثال ۲۸: مشتق جهت‌دار تابع $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$ در نقطه (۲ و ۱) در جهت بردار واحد u که با محور xها زاویه 45° بسازد چقدر است؟

(عمران ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) ۱۵ ۴) $\frac{19\sqrt{2}}{2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» $\vec{\nabla} f = (4x-3y\,,\,-3x+10y)\Big|_{(1,2)} = (-2,17)$

بردار یکه موردنظر $\vec{u} = (\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4})$ می‌باشد، بنابراین داریم: $D_{\vec{u}} f = \vec{\nabla} f.\vec{u} = (-2,17).(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{15\sqrt{2}}{2}$

مثال ۲۹: تابع f با ضابطه $f(x,y) = x^3 + x^2y + y^2 - 1$ در نقطه (۱ و ۱-) در امتداد کدام بردار نزولی است؟

(مکانیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $-\vec{i}+\vec{j}$ ۲) $\vec{i}-\vec{j}$ ۳) $-2\vec{i}+\vec{j}$ ۴) $4\vec{i}-\vec{j}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» $f(x,y) = x^3+x^2y+y^2-1 \Rightarrow \vec{\nabla} f = (3x^2+2xy\,,\,x^2+2y)\Big|_{(-1,1)} = (1,3)$

مشتق سوئی تابع f در جهت بردار موردنظر باید منفی باشد و با توجه به گزینه‌ها، گزینه (۲) این خاصیت را دارد. $D_{\vec{u}} f = (1,3).\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} < 0$

مثال ۳۰: در نقطه‌ی (e,1) در چه سوئی تابع $f(x,y) = x^y$ بیشترین افزایش را دارد؟

(آمار ـ سراسری ۸۵)

۱) $(-e,1)$ ۲) $(1,e)$ ۳) $(e,-1)$ ۴) $(e,1)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» جهت بیشترین افزایش، جهت بردار گرادیان می‌باشد. $f(x,y) = x^y \Rightarrow \vec{\nabla} f = (yx^{y-1}, x^y \mathrm{Ln} x)\Big|_{(e,1)} = (1,e)$

مثال ۳۱: مشتق سوئی تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-y} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ در نقطه $(0,0)$ در کدام جهت موجود است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) در جهت بردار $\vec{i}-\vec{j}$ ۲) در جهت بردار $\vec{i}+\vec{j}$ ۳) در جهت بردار $\vec{i}$ ۴) در جهت بردار $\vec{j}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» به طور کلی مشتق سوئی تابع f در نقطه دلخواه $P(0,0)$ در راستای بردار دلخواه یکه $\vec{v}=(v_1,v_2)$ از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$D_{\vec{v}}f=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(0+tv_1,0+tv_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{tv_1}{tv_1-tv_2}}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{v_1}{(v_1-v_2)t}$$

برای اینکه حد فوق موجود باشد، لازم است $v_1=0$ باشد، بنابراین بردار یکه $\vec{v}$ به‌صورت $v=(0,1)$ خواهد بود.

مثال ۳۲: اگر مشتق سوئی تابع $f(x,y,z)=x^2-2yz$ در $p(1,1,1)$ در جهت یک بردار $\vec{u}$ صفر باشد، آن‌گاه این بردار $\vec{u}$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۵)

۱) $\vec{i}-\vec{k}$ ۲) $\vec{i}+\vec{j}$ ۳) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ ۴) $\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\vec{\nabla}f=(2x,-2z,-2y)\Big|_{(1,1,1)}=(2,-2,-2)$$

بردار u را باید طوری انتخاب کنیم که $\vec{\nabla}f.\vec{u}=0$ باشد، که با توجه به گزینه‌ها، گزینه (۲) صحیح است.

مثال ۳۳: اگر $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مشتق سوئی f در مبدأ در کدام جهت موجود است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $\vec{i}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» مشتق سوئی (جهتی) را در راستای یکه $\vec{u}=(u_1,u_2)$ به‌دست می‌آوریم.

$$D_{\vec{u}}f(0,0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(hu_1,hu_2)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{u_1u_2}{h\sqrt{u_1^4+u_2^4}}$$

حد فوق فقط وقتی موجود است که $u_1=0$ یا $u_2=0$ باشد یعنی، فقط در راستای $\pm i$ و $\pm j$ حد فوق وجود دارد.

مثال ۳۴: میزان تغییرات تابع $f(x,y)=e^{-4y}\sin x$ در نقطه $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ در چه جهتی ماکزیمم است؟ (نفت ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$ ۳) $\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}-2\vec{j}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» می‌دانیم جهت حداکثر افزایش تابع f هم جهت با گرادیان است.

$$\vec{\nabla}f=(e^{-4y}\cos x,-4e^{4y}\sin x)=(\frac{\sqrt{3}}{2},-2)$$

مثال ۳۵: مشتق جهتی (سوئی) تابع $f(x,y,z)=x\,tg^{-1}\frac{y}{z}$ در نقطه $(1,0$ و $1)$، در جهت بردار $u=2i+j-2k$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۷)

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» نیازی به محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial z}$ نیست، زیرا در نقطه داده شده مقادیر آن‌ها برابر صفر است و در محاسبه مقدار مشتق سوئی تأثیری ندارند.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x\times\frac{\frac{1}{z}}{1+(\frac{y}{z})^2}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,0,1)}=1$$

$$\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\Rightarrow \text{یکه شده}\ \vec{u}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3})\Rightarrow D_{\vec{u}}f=\vec{\nabla}f.\vec{u}=\frac{1}{3}$$

مثال۳۶: مشتق سوئی تابع $w=f(x,y)$ در نقطه $P_\circ(1,2)$ به طرف $P_1(2,3)$ برابر $2\sqrt{2}$ و در سوی $P_\circ$ به طرف $P_2(1,\circ)$ برابر ۳- می‌باشد مقدار $\frac{dw}{ds}$ در سوی $P_\circ$ به طرف مبدأ کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ـ سراسری ۸۷)

۱) $-\frac{7}{\sqrt{5}}$ ۲) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ ۳) $-\frac{3}{\sqrt{5}}$ ۴) $-\frac{4}{\sqrt{5}}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» جهت $\overrightarrow{P_\circ P_1}$ را $\vec{u}$ و جهت $\overrightarrow{P_\circ P_2}$ را $\vec{v}$ می‌نامیم، در این صورت داریم:

$$\overrightarrow{P_\circ P_1}=(1,1)\ \Rightarrow\ \vec{u}=\frac{\overrightarrow{P_\circ P_1}}{|\overrightarrow{P_\circ P_1}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\ \text{و}\ \overrightarrow{P_\circ P_2}=(\circ,-2)\ \Rightarrow\ \vec{v}=\frac{\overrightarrow{P_\circ P_2}}{|\overrightarrow{P_\circ P_2}|}=(\circ,-1)$$

بنابراین $D_{\vec{u}}f=2\sqrt{2}$ و $D_{\vec{v}}f=-3$.

توجه کنید که جهتی که $P_\circ$ را به مبدأ وصل می‌کند به‌صورت مقابل است:

$$\vec{s}=\frac{\overrightarrow{P_\circ O}}{|\overrightarrow{P_\circ O}|}=\frac{(-1,-2)}{\sqrt{1+4}}=(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}})$$

حال به محاسبه $\vec{\nabla}f(P_\circ)$ می‌پردازیم. فرض می‌کنیم $\vec{\nabla}f(P_\circ)=(\alpha,\beta)$، در این صورت داریم:

$$\begin{cases}D_{\vec{u}}f(P_\circ)=\vec{\nabla}f.\vec{u}=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}+\frac{B}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\\ D_{\vec{v}}f(P_\circ)=\vec{\nabla}f.\vec{v}=-\beta=-3\end{cases}\Rightarrow\beta=3\ ,\ \alpha=1\Rightarrow\vec{\nabla}f(P_\circ)=(1,3)$$

بنابراین $\frac{dw}{ds}$ برابر است با:

$$\frac{dw}{ds}=\vec{\nabla}f(P_\circ).\vec{s}=(1,3).(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}})=\frac{-7}{\sqrt{5}}$$

مثال۳۷: اندازه بردار گرادیان برای تابع $f(x,y)=x^2e^{-y}$ در نقطه $(2,1)$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{2}{e}$ ۲) $\frac{4}{e}$ ۳) $\frac{2\sqrt{2}}{e}$ ۴) $\frac{4\sqrt{2}}{e}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$f(x,y)=x^2e^{-y}\Rightarrow\vec{\nabla}f=(2xe^{-y}\ ,\ -x^2e^{-y})\Big|_{(2\,,\,1)}=(\frac{4}{e},\frac{-4}{e})\Rightarrow|\vec{\nabla}f|=\sqrt{\frac{16}{e^2}+\frac{16}{e^2}}=\frac{4\sqrt{2}}{e}$$

مثال۳۸: نرخ تغییر تابع $f(x,y)=xe^y$ در نقطه $P(2,\circ)$ و در سوی از P به $Q(5,4)$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{11}{5}$ ۳) $\frac{5}{11}$ ۴) $\frac{7}{8}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» منظور از نرخ تغییر همان مشتق سوئی تابع f در راستای بردار $\overrightarrow{PQ}$ است.

$$\left.\begin{array}{l}f(x,y)=xe^y\ \Rightarrow\vec{\nabla}f=(e^y,xe^y)\ \Rightarrow\vec{\nabla}f\Big|_{P(2,\circ)}=(1,2)\\ \overrightarrow{PQ}=(3,4)\xrightarrow{\text{بردار یکه}}\vec{u}=\frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})\end{array}\right\}\Rightarrow\text{مشتق سوئی}=\vec{\nabla}f\cdot\vec{u}=\frac{3}{5}\times1+\frac{4}{5}\times2=\frac{11}{5}$$

مثال۳۹: مشتق سوئی تابع $z=x^2-\frac{y}{x}+y$ در نقطه $(-1,3)$ در امتداد بردار $3i-4j$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۸)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\left.\begin{array}{l}f(x,y)=x^2-\frac{y}{x}+y\ \Rightarrow\vec{\nabla}f=(2x+\frac{y}{x^2},\frac{-1}{x}+1)\Big|_{(-1,3)}=(1,2)\\ \vec{v}=3\vec{i}-4\vec{j}\ \Rightarrow\vec{u}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{3\vec{i}-4\vec{j}}{\sqrt{9+16}}=\frac{3}{5}\vec{i}-\frac{4}{5}\vec{j}\end{array}\right\}\Rightarrow D_{\vec{u}}f=\vec{\nabla}f.\vec{u}=(1,2).(\frac{3}{5},\frac{-4}{5})=\frac{3}{5}-\frac{8}{5}=-1$$

مثال۴۰: مشتق سوئی تابع $z=\frac{x^2}{y}+\frac{\sqrt{y}}{x}$ در نقطه $(-1,1)$ در امتداد بردار $-3\vec{i}+4\vec{j}$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۸)

۱) $-\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{6}{5}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» برای محاسبه مشتق سوئی لازم است گرادیان تابع را در بردار یکه ضرب داخلی کنیم.

$$f(x,y)=\frac{x^2}{y}+\frac{\sqrt{y}}{x}\Rightarrow \vec{\nabla}f=\left(\frac{2x}{y}-\frac{\sqrt{y}}{x^2},\frac{-x^2}{y^2}+\frac{1}{2x\sqrt{y}}\right)\Big|_{(-1,1)}=\left(-3,\frac{-3}{2}\right)$$

حال لازم است بردار داده شده را یکه کنیم:

$$\vec{u}=\frac{-3\vec{i}+4\vec{j}}{\sqrt{9+16}}=\left(\frac{-3}{5},\frac{4}{5}\right)\text{ یکه }\Rightarrow D_{\vec{u}}f=\left(-3,\frac{-3}{2}\right).\left(\frac{-3}{5},\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{5}$$

مثال۴۱: با فرض مشتق‌پذیری f در نقطه (x_0,y_0) بردار $\vec{\nabla}f(x_0,y_0)$ بر کدام عمود است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۸)

۱) منحنی $f(x,y)=f(x_0,y_0)$ در صفحه $z=0$
۲) سطح $z=f(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0,z_0)
۳) سطح $z=f(x_0,y_0)$ در نقطه (x_0,y_0,z_0)
۴) منحنی $f(x,y)=f(x_0,y_0)$ در صفحه $z=f(x_0,y_0)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» منحنی تراز f در صفحه $z=0$ که از نقطه $p(x_0,y_0)$ عبور می‌کند یعنی $f(x,y)=f(x_0,y_0)$ را در نظر می‌گیریم. با تعریف $g(x,y)=f(x,y)-f(x_0,y_0)$ بردار $\vec{\nabla}g(p)=(f_x(p),f_y(p))=\vec{\nabla}f(p)$ در نقطه p بر آن عمود است.

مثال۴۲: در چه جهتی تابع $f(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$ در نقطه $(1,1)$ بیشترین کاهش را دارد؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» می‌دانیم تابع در جهت بردار گرادیان بیشترین افزایش و در جهت عکس گرادیان بیشترین کاهش را دارد، بنابراین داریم:

$$f(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\Rightarrow \vec{\nabla}f=(x,y)\Rightarrow \vec{\nabla}f(1,1)=(1,1)$$

پس تابع f در جهت $(1,1)$ بیشترین افزایش و در جهت $(-1,-1)$ بیشترین کاهش را دارد که اگر جهت $(-1,-1)$ را یکه (واحد) کنیم به‌صورت $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$ در می‌آید.

مثال۴۳: مشتق سوئی تابع $z=x^2y+\sqrt{x^2+3y^2}$ در نقطه $(2,-2)$ در امتداد بردار $3\vec{i}-4\vec{j}$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۹)

۱) $-4/7$ ۲) $5/2$ ۳) $-6/8$ ۴) $-6/5$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» **یادآوری:** اگر $\vec{u}$ یک بردار یکه باشد آن‌گاه $D_{\vec{u}}f=\vec{\nabla}f(p).\vec{u}$ در اینجا داریم:

$$\vec{\nabla}z=\left(2xy+\frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}\ ,\ x^2+\frac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}z=(2\ ,\ -2)=\left(-8+\frac{2}{\sqrt{16}}\ ,\ 4-\frac{6}{\sqrt{16}}\right)=\left(-\frac{15}{2}\ ,\ \frac{5}{2}\right)\text{ و }\vec{u}=\frac{3\vec{i}-4\vec{j}}{|3\vec{i}-4\vec{j}|}=\frac{3}{5}\vec{i}-\frac{4}{5}\vec{j}$$

$$\Rightarrow f'_{\vec{u}}(2,-2)=\left(-\frac{15}{2},\frac{5}{2}\right).\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)=-\frac{13}{2}=-6/5$$

مثال۴۴: مشتق تابع $u=x^2z+\frac{y^2}{z}$ در نقطه $(3,2,1)$ در امتداد بردار $(2,-1,2)$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۰)

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$p=(3,2,1)\ ,u(x,y,z)=x^2z+\frac{y^2}{z}\ ,\ \vec{v}=(2,-1,2)$$

مشتق تابع u در نقطه p را در امتداد بردار $\vec{v}$ به‌دست می‌آوریم.

$$D_{\vec{v}}u(p)=\vec{\nabla}u(p).\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

گرادیان تابع u و بردار یکه $\vec{v}$ را محاسبه می‌کنیم، بنابراین:

$$\vec{\nabla}u=2xz\vec{i}+\frac{2y}{z}\vec{j}+\left(x^2-\frac{y^2}{z^2}\right)\vec{k}\Rightarrow \vec{\nabla}u(p)=6\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}\quad ,\quad \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{1}{3}(2,-1,2)$$

مقادیر به‌دست آمده را در رابطه فوق جایگذاری می‌کنیم.

$$D_{\vec{v}}u(p)=(6\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k})\cdot\frac{1}{3}(2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})=\frac{1}{3}(12-4+10)=\frac{18}{3}=6$$

مثال ۴۵: اگر $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ و $p=|\vec{r}|$ باشد، با فرض موجود بودن $f'(p)=\frac{df}{dp}$، گرادیان $f(p)$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{f'(p)}{p}\vec{r}$
۲) $\frac{f'(p)}{p^2}\vec{r}$
۳) $f'(p)\vec{r}$
۴) $pf'(p)\vec{r}$

پاسخ : گزینه «۱» می‌دانیم اگر $w=f(r)$ که $\vec{r}=(x,y,z)$ و $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ آن‌گاه $\vec{\nabla}w=\frac{f'(r)}{r}\cdot\vec{r}$.

مثال ۴۶: مشتق جهتی $f(x,y,z)=x^2+2y^5\sin(y^5)\cos(y^5)+z^3$ در نقطه $(-1,0,2)$ در جهت بردار $(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}})$ کدام است؟
(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۰)

۱) $-11\frac{\sqrt{3}}{3}$
۲) $-10\frac{\sqrt{3}}{3}$
۳) $8\frac{\sqrt{3}}{3}$
۴) $13\frac{\sqrt{3}}{3}$

پاسخ : گزینه «۲» بردار $\vec{u}=(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}})$ یکه است، بردار $\vec{\nabla}f$ را در نقطه $P(-1,0,2)$ به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{\nabla}f=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})=(2x,10y^4\sin y^5\cos y^5+10y^9\cos^2 y^5-10y^9\sin^2 y^5,3z^2)\Rightarrow\vec{\nabla}f(-1,0,2)=(-2,0,12)$$

بنابراین مشتق جهتی f در جهت داده شده برابر است با:

$$D_{\vec{u}}f=(-2,0,12).(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}})=-\frac{10}{\sqrt{3}}=-\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

توضیح: توجه کنید که نیازی به محاسبه $\frac{\partial f}{\partial y}$ و انجام محاسبات طولانی در بالا نبود، زیرا در نقطه $P(-1,0,1)$، مقدار y برابر صفر است و به علت وجود y^5، $\frac{\partial f}{\partial y}$ برابر صفر است.

مثال ۴۷: مشتق تابع $z=x^2-y^2+2xy$ در نقطه $(1,-2)$ در امتداد بردار $\vec{i}-\vec{j}$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۹۰)

۱) $-4\sqrt{2}$
۲) $-2\sqrt{2}$
۳) $2\sqrt{2}$
۴) $4\sqrt{2}$

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا بردار $\vec{i}-\vec{j}$ را یکه می‌کنیم $u=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j})$، حال بردار گرادیان f را در نقطه $(1,-2)$ به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{\nabla}f=(2x+2y\ ,\ -2y+2x)\Rightarrow\vec{\nabla}f\Big|_{(1,-2)}=(-2,6)$$

بنابراین مشتق جهتی برابر است با:

$$D_{\vec{u}}f=\vec{\nabla}f.\vec{u}=(-2,6).(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})=\frac{-2}{\sqrt{2}}-\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{-8}{\sqrt{2}}=-4\sqrt{2}$$

درسنامه۵: کاربردهای دیگر گرادیان

مثال۱: معادله صفحه مماس بر کره‌ی $x^2+y^2+z^2=14$ در نقطه‌ی $A(1,2,3)$ واقع بر کره کدام است؟

۱) $x+2y+3z=14$ ۲) $x+y+z=6$ ۳) $3x+2y+z=10$ ۴) $x+y+z=9$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای نوشتن معادله یک صفحه لازم است بردار نرمال صفحه مشخص باشد، می‌دانیم گرادیان رویه همان بردار نرمال صفحه مماس است. پس لازم است بردار گرادیان را به‌دست آوریم. قرار می‌دهیم $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14=0$ در این صورت داریم:

$$\vec{\nabla}f=(2x,2y,2z)\xrightarrow{x=1,y=2,z=3}\text{بردار نرمال صفحه مماس در نقطه } A=\vec{\nabla}f(1,2,3)=(2,4,6)$$

پس معادله صفحه موردنظر به‌صورت مقابل است:

$$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0\Rightarrow x+2y+3z=14$$

مثال۲: بردار یکه عمود بر سطح $xy^2z^3=8$ در نقطه $A(2,-2,1)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{14}}(2,3,1)$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{21}}(4,-2,1)$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{41}}(1,-2,6)$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{33}}(4,1,-4)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم بردار گرادیان یک رویه، بر رویه عمود است. پس کافی است بردار گرادیان سطح داده شده را به‌دست آورده و سپس آن را یکه (واحد) کنیم. بدین منظور قرار می‌دهیم $f(x,y,z)=xy^2z^3-8=0$ در این صورت داریم:

$$\vec{\nabla}f=(y^2z^3,2xyz^3,3xy^2z^2)\Rightarrow\vec{\nabla}f(2,-2,1)=(4,-8,24)=4(1,-2,6)$$

توجه کنید که بردار $(1,-2,6)$ هم جهت با گرادیان است و بنابراین بر رویه عمود است، کافی است آن را یکه کنیم:

$$\vec{u}=\frac{\vec{\nabla}f}{|\vec{\nabla}f|}=\frac{(1,-2,6)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+6^2}}=\frac{1}{\sqrt{41}}(1,-2,6)$$

مثال۳: معادله خط قائم بر رویه $x^2+\text{Arctg}y=e^z+1$ در نقطه $P(2,0,\text{Ln}3)$ کدام است؟

۱) $x+y=2\ ,\ y+z=\text{Ln}3$ ۲) $2x+y=4\ ,\ 4y+z$ ۳) $x-4y=2\ ,\ 3y+z=\text{Ln}3$ ۴) $x-y=2\ ,\ 2y+z=\text{Ln}3$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم که بردار گرادیان بر رویه عمود است و در نتیجه همان بردار هادی خط قائم بر رویه است.

قرار می‌دهیم $f(x,y,z)=x^2+\text{Arc}\tan y-e^z-1=0$ در این صورت داریم:

$$\vec{\nabla}f=(2x,\frac{1}{1+y^2},-e^z)\Rightarrow\vec{\nabla}f(2,0,\text{Ln}3)=(4,1,-3)$$

پس معادله خط قائم به‌صورت مقابل است:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z-\text{Ln}3}{-3}\Rightarrow x-4y=2,3y+z=\text{Ln}3$$

مثال۴: معادله صفحه مماس بر سطح به معادله $x^2+y^2+xz^2=2$ در نقطه $(1,0,1)$ کدام است؟

۱) $x+y+2z=3$ ۲) $x+y+z=3$ ۳) $3x+2z=5$ ۴) $2x+3z=5$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» قرار می‌دهیم $f(x,y,z)=x^2+y^2+xz^2-2=0$ در این صورت بردار گرادیان (بردار نرمال صفحه‌ی موردنظر) به‌صورت مقابل می‌باشد:

$$\vec{\nabla}f=(2x+z^2,2y,2xz)\Rightarrow\vec{\nabla}f(1,0,1)=(3,0,2)$$

و در نتیجه معادله‌ی صفحه‌ی مماس به‌صورت مقابل خواهد بود:

$$3(x-1)+2(z-1)=0\Rightarrow 3x+2z=5$$

مثال۵: اگر $f(x,y,z)=\text{Ln}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ و $\vec{n}$ بردار قائم بر نیم‌کره $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ باشد، مشتق سوئی تابع f در امتداد بردار $\vec{n}$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۲ ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$z=\sqrt{16-x^2-y^2}\Rightarrow G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-16=0 \ \text{معادله رویه}$$

$$\vec{n}=\frac{\vec{\nabla}G}{|\vec{\nabla}G|}=\frac{(2x,2y,2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}=(\frac{x}{4},\frac{y}{4},\frac{z}{4})$$

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2}\text{Ln}(x^2+y^2+z^2)\Rightarrow\nabla f=(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2})$$

بنابراین داریم:

$$\text{مشتق سوئی}=\vec{\nabla}f.\vec{n}=\frac{x^2}{4(x^2+y^2+z^2)}+\frac{y^2}{4(x^2+y^2+z^2)}+\frac{z^2}{4(x^2+y^2+z^2)}=\frac{1}{4}$$

مثال ۶: صفحه مماس بر رویه $xyz=a^3$، در هر نقطه دلخواه از آن، همراه با صفحات مختصات تشکیل یک چهار وجهی (هرم) می‌دهند، حجم این چهار وجهی چقدر است؟ $(a>0)$

۱) $\frac{16a^3}{3}$ ۲) $\frac{8a^3}{3}$ ۳) $\frac{9a^3}{2}$ ۴) $4a^3$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون در صورت سؤال گفته شده در هر نقطه دلخواه رویه این موضوع برقرار است، نقطه دلخواه را $P(a,a,a)$ در نظر می‌گیریم که در معادله رویه صدق می‌کند و معادله صفحه مماس را در این نقطه به‌دست می‌آوریم: $f=xyz-a^3=0 \Rightarrow \vec{\nabla}f=(yz,xz,xy)\Big|_P=(a^2,a^2,a^2)$

بردار نرمال صفحه مماس (a^2,a^2,a^2) یا به طور معادل $(1,1,1)$ است، بنابراین معادله صفحه به‌صورت $1(x-a)+1(y-a)+1(z-a)=0$ یعنی $x+y+z=3a$، این صفحه محورهای مختصات را به ترتیب در $A(3a,0,0)$، $B(0,3a,0)$ و $C(0,0,3a)$ قطع می‌کند و بنابراین حجم موردنظر برابر $\frac{1}{6}\times 3a\times 3a\times 3a=\frac{9a^3}{2}$ است. یادآوری می‌کنیم که حجم محدود مابین صفحه $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ و صفحات مختصات برابر $\frac{1}{6}|abc|$ است.

مثال ۷: صفحه قائم بر منحنی فضایی $3x^2y+y^2z=-2$ و $2xz-x^2y=3$ در نقطه $A(1,-1,1)$ کدام است؟

۱) $6x+4y+3z=5$ ۲) $6x+8y+2z=0$ ۳) $3x+8y+2z=-3$ ۴) $3x+16y+2z=-11$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» قرار می‌دهیم: $g(x,y,z)=2xz-x^2y-3=0\ ,\ f(x,y,z)=3x^2y+y^2z+2=0$

در این صورت بردار نرمال صفحه قائم برابر $\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}g$ است.

$$\vec{\nabla}f=(6xy,3x^2+2yz,y^2)\Rightarrow \vec{\nabla}f(1,-1,1)=(-6,1,1)$$

$$\vec{\nabla}g=(2z-2xy,-x^2,2x)\Rightarrow \vec{\nabla}g(1,-1,1)=(4,-1,2)$$

$$\text{بردار نرمال صفحه قائم}=\vec{N}=\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}g=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-6&1&1\\4&-1&2\end{vmatrix}=3\vec{i}+16\vec{j}+2\vec{k}$$

بنابراین معادله صفحه قائم به‌صورت روبرو است: $3(x-1)+16(y+1)+2(z-1)=0\Rightarrow 3x+16y+2z=-11$

مثال ۸: بردار مماس بر فصل مشترک دو رویه $z=e^{2x-y}$ و $xLnz+y^2-Lnx=4$ در نقطه $P(1,2,1)$ کدام است؟

۱) $3\vec{i}-\vec{j}+7\vec{k}$ ۲) $3\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$ ۳) $5\vec{i}+\vec{j}+9\vec{k}$ ۴) $5\vec{i}-\vec{j}+9\vec{k}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» قرار می‌دهیم $f=e^{2x-y}-z=0$ و $g=xLnz+y^2-Lnx-4=0$، در این صورت بردار مماس بر فصل مشترک دو رویه $\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}g$ خواهد بود.

$$\begin{cases}\vec{\nabla}f=(2e^{2x-y},-e^{2x-y},-1)\Rightarrow\vec{\nabla}f(1,2,1)=(2,-1,-1)\\ \vec{\nabla}g=(Lnz-\frac{1}{x},2y,\frac{x}{z})\Rightarrow\vec{\nabla}g(1,2,1)=(-1,4,1)\end{cases}\Rightarrow\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}g=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-1&-1\\-1&4&1\end{vmatrix}=3\vec{i}-\vec{j}+7\vec{k}$$

مثال ۹: خط D مماس بر فصل مشترک دو رویه‌ی $3x^2+y^2-z^2=3$ و $x^2+y^2+z=1$ در نقطه‌ی $p(1,-1,-1)$ مماس است. معادله‌ی صفحه‌ی S که از نقطه‌ی $A(2,3,4)$ عبور می‌کند و بر D عمود است، کدام است؟

۱) $2x-y+4z-17=0$ ۲) $x-y-4z+17=0$ ۳) $x+y+z-9=0$ ۴) $-x+y-4z+15=0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» قرار می‌دهیم $f=3x^2+y^2-z^2-3=0$ و $g=x^2+y^2+z^2-1=0$. در این صورت بردار هادی خط D بردار $\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}g$ می‌باشد.

$$\begin{cases}\vec{\nabla}f=(6x,2y,-2z)\Big|_p=(6,-2,2)\\ \vec{\nabla}g=(2x,2y,1)\Big|_p=(2,-2,1)\end{cases}\Rightarrow\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}g=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\6&-2&2\\2&-2&1\end{vmatrix}=(2,-2,-8)$$

چون صفحه موردنظر به خط D عمود است، پس بردار $(2,-2,-8)$، بردار نرمال صفحه S خواهد بود و معادله S به‌صورت زیر است:

$$2(x-2)-2(y-3)-8(z-4)=0\Rightarrow x-y-4z=-17$$

مثال ۱۰: زاویه بین رویه‌های $xyz=2$ و $x^2+z^2-y^2=4$ در نقطه $A(1,1,2)$ چقدر است؟

۱) 0 ۲) $\operatorname{Arc}\cos\frac{\sqrt{6}}{9}$ ۳) $\operatorname{Arc}\cos\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\operatorname{Arc}\cos\frac{\sqrt{2}}{6}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا قرار می‌دهیم $f(x,y,z)=xyz-2=0$ و $g(x,y,z)=x^2+z^2-y^2-4=0$ در این صورت داریم:

$$\vec{\nabla}f=(yz,xz,xy)\ \Rightarrow\ \vec{\nabla}f(1,1,2)=(2,2,1)$$
$$\vec{\nabla}g=(2x,-2y,2z)\ \Rightarrow\ \vec{\nabla}g(1,1,2)=(2,-2,4)$$

زاویه بین دو رویه برابر زاویه بین بردارهای گرادیان است، بنابراین داریم:

$$\cos\theta=\frac{\vec{\nabla}f.\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}f||\vec{\nabla}g|}=\frac{2\times2+2\times(-2)+1\times4}{\sqrt{4+4+1}\times\sqrt{4+4+16}}=\frac{4}{3\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{6}}{9}\ \Rightarrow\ \theta=\operatorname{Arc}\cos\frac{\sqrt{6}}{9}$$

مثال ۱۱: به ازای چه مقادیری از a دو رویه به معادلات $x^2+y^2+z^2=6$ و $ax^2+y^2-z^2=0$ در نقطه $P(1,2,1)$ متعامد هستند؟

۱) -3 ۲) 4 ۳) 3 ۴) -4

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» اگر $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6=0$ و $g(x,y,z)=ax^2+y^2-z^2$ آن‌گاه:

$$\vec{\nabla}f=(2x,2y,2z)\ \Rightarrow\vec{\nabla}f(1,2,1)=(2,4,2)$$
$$\vec{\nabla}g=(2ax,2y,-2z)\ \Rightarrow\vec{\nabla}g(1,2,1)=(2a,4,-2)$$

با توجه به اینکه زاویه بین دو رویه برابر زاویه بین بردارهای گرادیان آن‌ها است، پس لازم است بردارهای گرادیان به‌دست آمده برهم عمود باشند یعنی $\vec{\nabla}f.\vec{\nabla}g=0$، در نتیجه داریم:
$2a\times2+4\times4+2\times(-2)=0\ \Rightarrow a=-3$

مثال ۱۲: معادله صفحه مماس بر سطح $x^2=12y$ در نقطه $(6,3,1)$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $y-z=2$ ۲) $x-z=5$ ۳) $x-y=3$ ۴) $x-y+z=4$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» بردار گرادیان، بردار نرمال صفحه مماس می‌باشد، بنابراین داریم:

$$f(x,y,z)=x^2-12y=0\ \Rightarrow\vec{\nabla}f=(2x,-12,0)\Big|_{(6,3,1)}=(12,-12,0)$$
$$\Rightarrow12(x-6)-12(y-3)+0(z-1)=0\ \Rightarrow x-y-3=0$$

مثال ۱۳: معادله صفحه مماس بر سطح به معادله $3x^2+xy-2y^2=2z$ در نقطه $(1,1,1)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) $3x-4y+2z-1=0$ ۲) $3x+4y-5z-2=0$ ۳) $4x+3y-5z-2=0$ ۴) $4x-3y-2z+1=0$

☑ **پاسخ:** هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد. ابتدا معادله رویه را به‌صورت $f=3x^2+xy-2y^2-2z=0$ می‌نویسیم، در این صورت داریم:

$$\vec{\nabla}f=(6x+y\ ,\ x-4y\ ,\ -2)\ \Rightarrow\vec{\nabla}f\Big|_{(1,1,1)}=(7,-3,-2)$$

بنابراین معادله صفحه موردنظر به‌صورت روبرو است: $7(x-1)-3(y-1)-2(z-1)=0\ \Rightarrow7x-3y-2z=2$

مثال ۱۴: معادله‌ی خط مماس بر منحنی $\begin{cases}y=x^2\\z^2=16-y\end{cases}$ در نقطه $(4,16,0)$ کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $\begin{cases}4x=y\\z=0\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x=4\\y=16\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}y-x=12\\z=0\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}x+y=20\\z=0\end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» بردار هادی خط مماس برابر حاصل‌ضرب خارجی بردار نرمال دو رویه می‌باشد.

$$\begin{cases}f_1(x,y,z)=y-x^2=0\ \Rightarrow\vec{\nabla}f_1=(-2x,1,0)\Big|_{(4,16,0)}=(-8,1,0)\\[2mm] f_2(x,y,z)=z^2+y-16=0\ \Rightarrow\vec{\nabla}f_2=(0,1,2z)\Big|_{(4,16,0)}=(0,1,0)\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=\vec{\nabla}f_1\times\vec{\nabla}f_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-8&1&0\\0&1&0\end{vmatrix}=(0,0,-8)$$

بنابراین معادله خط مماس $\frac{x-4}{0}=\frac{y-16}{0}=\frac{z-0}{-8}$ یا به‌طور معادل $\begin{cases}x=4\\y=16\end{cases}$ خواهد بود.

مثال ۱۵: بردار عمود بر صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $x^۲+\frac{y^۲}{۴}+\frac{z^۲}{۹}=۳$ در نقطه‌ی (۱,۲,۳) برابر است با .... (کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $(۲,\frac{۲}{۳},\frac{۴}{۳})$ ۲) $(۲,۱,۲)$ ۳) $(۲,۱,\frac{۲}{۳})$ ۴) $۵!۵!$

پاسخ: گزینه «۳»

$$f(x,y,z)=x^۲+\frac{y^۲}{۴}+\frac{z^۲}{۹}=۳ \Rightarrow \vec{\nabla}f=(۲x,\frac{y}{۲},\frac{۲z}{۹}) \Rightarrow \vec{N}=\vec{\nabla}f\Big|_{(۱,۲,۳)}=(۲,۱,\frac{۲}{۳})$$

مثال ۱۶: معادله صفحه مماس بر سطح به معادله $\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۴}+\frac{z^۲}{۹}=۱$ در نقطه (۰,۰,۳) از کدام نقطه‌ی دیگر می‌گذرد؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) $(\sqrt{۳},۱,۲)$ ۲) $(۳,۰,۱)$ ۳) $(۳,\sqrt{۳},۰)$ ۴) $(۱,\sqrt{۳},۳)$

پاسخ: گزینه «۴»

$$f(x,y,z)=\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۴}+\frac{z^۲}{۹}-۱=۰ \Rightarrow \vec{\nabla}f=(\frac{x}{۲},\frac{y}{۲},\frac{۲z}{۹})\Big|_{(۰,۰,۳)}=(۰,۰,\frac{۲}{۳})$$

بنابراین معادله صفحه موردنظر به‌صورت روبرو است که از نقطه $(۱,\sqrt{۳},۳)$ عبور می‌کند.

$$\frac{۲}{۳}(z-۳)=۰ \Rightarrow z=۳$$

مثال ۱۷: معادله‌ی خط قائم بر سطح به معادله‌ی $۳x^۲+\mathrm{Arctg}(۲z)=e^y+۱$ در نقطه $(۱,\mathrm{Ln}۲,۰)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $۳z=(x-۱)\ ,\ z+y=\mathrm{Ln}۲$ ۲) $z=(x-۱)\ ,\ z+y=۲$ ۳) $۳z=۳x-۲\ ,\ z+y=\mathrm{Ln}۲$ ۴) $x-y=\mathrm{Ln}\frac{e}{۲}\ ,\ z+x=۱$

پاسخ: گزینه «۱»

$$f(x,y,z)=۳x^۲+\mathrm{Arctg}(۲z)-e^y-۱=۰ \Rightarrow \vec{\nabla}f=(۶x,-e^y,\frac{۲}{۱+۴z^۲})\Big|_{(۱,\mathrm{Ln}۲,۰)}=(۶,-۲,۲)$$

بنابراین معادله خط قائم عبارتست از:

$$\frac{x-۱}{۶}=\frac{y-\mathrm{Ln}۲}{-۲}=\frac{z}{۲} \Rightarrow \begin{cases} ۳z=x-۱ \\ z+y=\mathrm{Ln}۲ \end{cases}$$

مثال ۱۸: معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر مخروط به معادله‌ی $\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۹}=z^۲$ در نقطه‌ی $(۲\ ,\ \frac{۳}{۲}\ ,\ \frac{\sqrt{۵}}{۲})$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $۳x+y=۳\sqrt{۵}\,z$ ۲) $x+۳y=\sqrt{۵}\,z+۴$ ۳) $x-۳y=\sqrt{۵}\,z-۵$ ۴) $۳x-y=۳\sqrt{۵}\,z-۳$

پاسخ: گزینه «۱»

$$f(x,y,z)=\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۹}-z^۲ \Rightarrow \vec{\nabla}f=(\frac{x}{۲},\frac{۲y}{۹},-۲z)\Big|_{(۲,\frac{۳}{۲},\frac{\sqrt{۵}}{۲})}=(۱,\frac{۱}{۳},-\sqrt{۵})$$

بنابراین معادله صفحه موردنظر به‌صورت روبرو است:

$$(x-۲)+\frac{۱}{۳}(y-\frac{۳}{۲})-\sqrt{۵}(z-\frac{\sqrt{۵}}{۲})=۰ \Rightarrow x+\frac{۱}{۳}y-\sqrt{۵}z=۰$$

مثال ۱۹: صفحه‌ای را که در نقطه $P_۰(۱,-۲,۵)$ بر سطح $z=x^۲+y^۲$ مماس است به‌دست آورید. (مکانیک ـ آزاد ۸۱)

۱) $۲x-۴y-z=۵$ ۲) $۲x+۴y+z=۵$ ۳) $۲x+۲y+۲z=۴/۵$ ۴) $۲x+y-z=۲$

پاسخ: گزینه «۱»

$$f(x,y,z)=x^۲+y^۲-z=۰ \Rightarrow \vec{\nabla}f=(۲x,۲y,-۱)\Big|_{(۱,-۲,۵)}=(۲,-۴,-۱)$$

$$\Rightarrow ۲(x-۱)-۴(y+۲)-۱(z-۵)=۰ \Rightarrow ۲x-۴y-z=۵$$

مثال ۲۰: معادله صفحه مماس بر سطح $۴x^۲+y^۲+۲z^۲=۲۶$ در نقطه $(۱,-۲,۳)$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) $x-۲y+۳z=۱۳$ ۲) $۲x-y+۳z=۱۳$ ۳) $x+y+۳z=۱۳$ ۴) $۲x+y-۳z=۱۳$

پاسخ: گزینه «۲»

$$f(x,y,z)=۴x^۲+y^۲+۲z^۲-۲۶=۰ \Rightarrow \vec{\nabla}f=(۸x,۲y,۴z)\Big|_{(۱,-۲,۳)}=(۸,-۴,۱۲)$$

بنابراین معادله صفحه مماس به‌صورت روبرو می‌باشد:

$$۸(x-۱)-۴(y+۲)+۱۲(z-۳)=۰ \Rightarrow ۲x-y+۳z=۱۳$$

مثال ۲۱: معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر سطح $x^2+4y^2-4z^2-4=0$ در نقطه‌ی $(2,1,1)$ برابر است با .... (کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $x+2y-2z=2$ ۲) $x+2y+2z=6$ ۳) $x-2y-2z=-2$ ۴) $x-2y+2z=2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$f(x,y,z)=x^2+4y^2-4z^2-4=0 \Rightarrow \vec{\nabla}f=(2x,8y,-8z)\Big|_{(2,1,1)}=(4,8,-8)=4(1,2,-2)$$

بنابراین معادله صفحه مماس به‌صورت روبرو خواهد بود:

$$1(x-2)+2(y-1)-2(z-1)=0 \Rightarrow x+2y-2z=2$$

مثال ۲۲: اگر θ زاویه‌ی اشتراک سطوح $x^2+y^2-2=0$ و $x^2+y^2-2z=0$ در نقطه‌ی $(1,1,1)$ باشد در این صورت $\cos\theta$ برابر است با .... (کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» زاویه بین دو رویه برابر زاویه بین بردارهای عمود به دو رویه (بردارهای گرادیان) می‌باشد.

$$f_1(x,y,z)=x^2+y^2-2=0 \Rightarrow \vec{\nabla}f_1=(2x,2y,0)\Big|_{(1,1,1)}=(2,2,0)$$

$$f_2(x,y,z)=x^2+y^2-2z=0 \Rightarrow \vec{\nabla}f_2=(2x,2y,-2)\Big|_{(1,1,1)}=(2,2,-2)$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{\nabla}f_1.\vec{\nabla}f_2}{|\vec{\nabla}f_1||\vec{\nabla}f_2|}=\frac{4+4+0}{\sqrt{8}\times\sqrt{12}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

مثال ۲۳: در چه نقاطی از سطح $2x^3+y-z^2=5$ صفحه مماس در آن‌ها با صفحه، $24x+y-6z=3$ موازی است؟ (عمران ـ سراسری ۸۲)

۱) $(-1,24,3),(2,2,3)$ ۲) $(-1,8,1),(1,4,1)$ ۳) $(-2,25,2),(2,-7,2)$ ۴) $(-2,30,3),(2,-2,3)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در نقاط مورد نظر گرادیان تابع با بردار نرمال صفحه موازی می‌باشد.

$$\vec{\nabla}f=(6x^2,1,-2z)\ ,\ \vec{N}=(24,1,-6) \Rightarrow \frac{6x^2}{24}=\frac{1}{1}=\frac{-2z}{-6} \Rightarrow x=\pm2, z=3$$

با جایگزینی در معادله رویه y نقاط مربوطه نیز به‌دست می‌آید.

$$x=2\ ,\ z=3 \Rightarrow 16+y-9=5 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow A(2,-2,3)$$

$$x=-2\ ,\ z=3 \Rightarrow -16+y-9=5 \Rightarrow y=30 \Rightarrow B(-2,30,3)$$

مثال ۲۴: معادله صفحه مماس بر بیضوی $4x^2+y^2-16z=0$ در نقطه $(2,4,2)$ کدام است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $2x-y-2z=-4$ ۲) $2x-y+2z=2$ ۳) $2x+y-2z=4$ ۴) $2x+y+2z=12$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$f(x,y,z)=4x^2+y^2-16z=0 \Rightarrow \vec{\nabla}f=(8x,2y,-16)\Big|_{(2,4,2)}=(16,8,-16)$$

بنابراین معادله صفحه موردنظر عبارت است از:

$$16(x-2)+8(y-4)-16(z-2)=0 \Rightarrow 2x+y-2z=4$$

مثال ۲۵: صفحه‌ی مماس بر رویه به معادله‌ی $z=\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}$ در نقطه $(3,3,4)$ محور xها را در A و محور yها را در B و محـور zهـا را در C قطع می‌کند. $x_A+y_B+z_C$ چقدر است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) ۱۷ ۲) ۱۰ ۳) ۱۰- ۴) ۱۷/۵-

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$f(x,y,z)=\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}-z=0 \Rightarrow \vec{\nabla}f=(\frac{1}{2\sqrt{x+1}},\frac{1}{2\sqrt{y+1}},-1)\Big|_{(3,3,4)}=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},-1)$$

بنابراین معادله صفحه موردنظر به‌صورت روبرو است:

$$\frac{1}{4}(x-3)+\frac{1}{4}(y-3)-(z-4)=0 \Rightarrow x+y-4z=-10$$

بنابراین نقاط تلاقی با محورها به ترتیب عبارتند از: $A(-10,0,0)$ ، $B(0,-10,0)$ ، $C(0,0,2/5)$.

مثال ۲۶: **خط مماس بر منحنی فضایی C فصل مشترک دو رویه $z=x^۲-y^۲$ و $۳xy-۲z=۰$ در نقطه $(۲,۱,۳)$ موازی کدام بردار است؟**
(MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) $۲\vec{i}+\vec{j}+۶\vec{k}$ ۲) $۲\vec{i}-\vec{j}+۶\vec{k}$ ۳) $\vec{i}-۲\vec{j}+۳\vec{k}$ ۴) $۵\vec{i}+۲\vec{j}+۴\vec{k}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$f_۱(x,y,z)=x^۲-y^۲-z \Rightarrow \vec{\nabla}f_۱=(۲x,-۲y,-۱)\Big|_{(۲,۱,۳)}=(۴,-۲,-۱)$$

$$f_۲(x,y,z)=۳xy-۲z \Rightarrow \vec{\nabla}f_۲=(۳y,۳x,-۲)\Big|_{(۲,۱,۳)}=(۳,۶,-۲)$$

$$\vec{u}=\vec{\nabla}f_۱\times\vec{\nabla}f_۲=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۴&-۲&-۱\\ ۳&۶&-۲\end{vmatrix}=(۱۰,۵,۳۰)=۵(۲,۱,۶)$$

مثال ۲۷: **بردار مماس بر منحنی به معادله‌ی $\begin{cases}x+z=۲\\ x^۳=۸y\end{cases}$ در نقطه‌ی $(۴,۸,-۲)$ کدام است؟**
(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\vec{i}-۶\vec{j}-\vec{k}$ ۲) $\vec{i}+۶\vec{j}+\vec{k}$ ۳) $\vec{i}+۶\vec{j}-\vec{k}$ ۴) $\vec{i}-۶\vec{j}+\vec{k}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$f_۱(x,y,z)=x+z-۲=۰ \Rightarrow \vec{\nabla}f_۱=(۱,۰,۱)$$

$$f_۲(x,y,z)=x^۳-۸y=۰ \Rightarrow \vec{\nabla}f_۲=(۳x^۲,-۸,۰)\Big|_{(۴,۸,-۲)}=(۴۸,-۸,۰)$$

بردار مماس موردنظر برابر حاصل‌ضرب خارجی بردارهای گرادیان دو رویه می‌باشد:

$$\vec{\nabla}f_۱\times\vec{\nabla}f_۲=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۱&۰&۱\\ ۴۸&-۸&۰\end{vmatrix}=۸\vec{i}+۴۸\vec{j}-۸\vec{k}=۸(\vec{i}+۶\vec{j}-\vec{k})$$

مثال ۲۸: **بردار یکه عمود بر سطح f به معادله‌ی $f(x,y,z)=x^۳+۳xyz+۲y^۳-z^۳-۵$ در نقطه $(۱,۱,۱)$ واقع بر آن کدام است؟** (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\dfrac{۲\vec{i}+۳\vec{j}}{\sqrt{۱۳}}$ ۲) $\dfrac{۲\vec{i}+۳\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{۱۴}}$ ۳) $\dfrac{۶\vec{i}+۹\vec{j}}{\sqrt{۱۱۷}}$ ۴) $\dfrac{۶\vec{i}+۹\vec{j}+۲\vec{k}}{\sqrt{۲۶۱}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» و «۳»

$$f(x,y,z)=x^۳+۳xyz+۲y^۳-z^۳-۵ \Rightarrow \vec{\nabla}f=(۳x^۲+۳yz,۳xz+۶y^۲,۳xy-۳z^۲)\Big|_{(۱,۱,۱)}=(۶,۹,۰)$$

$$\Rightarrow \vec{N}=\frac{\vec{\nabla}f}{|\vec{\nabla}f|}=\frac{(۶,۹,۰)}{\sqrt{۶^۲+۹^۲+۰}}=(\frac{۲}{\sqrt{۱۳}},\frac{۳}{\sqrt{۱۳}},۰)$$

با ضرب صورت و مخرج کسرها در $\sqrt{۹}=۳$ متوجه می‌شویم که گزینه‌های (۳) و (۱) با هم برابرند.

مثال ۲۹: **معادله خط مماس بر مقطع دو سطح فضایی به معادله‌های $z=۲x^۲-۳y^۲+۱$ و $z=x^۲+۲y^۲$ در نقطه $(۲,۱,۶)$ از کدام نقطه می‌گذرد؟**
(ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $(-۸,۳,-۵۰)$ ۲) $(-۸,-۳,-۵۰)$ ۳) $(۸,-۳,-۵۰)$ ۴) $(-۸,-۳,۵۰)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$f_۱(x,y,z)=۲x^۲-۳y^۲+۱-z \Rightarrow \vec{\nabla}f_۱=(۴x,-۶y,-۱)\Big|_{(۲,۱,۶)}=(۸,-۶,-۱)$$

$$f_۲(x,y,z)=x^۲+۲y^۲-z \Rightarrow \vec{\nabla}f_۲=(۲x,۴y,-۱)\Big|_{(۲,۱,۶)}=(۴,۴,-۱)$$

بردار هادی خط مماس برابر $\vec{u}=\vec{\nabla}f_۱\times\vec{\nabla}f_۲=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۸&-۶&-۱\\ ۴&۴&-۱\end{vmatrix}=(۱۰,۴,۵۶)$ می‌باشد.

بنابراین معادله خط مماس به‌صورت روبرو است: $\dfrac{x-۲}{۱۰}=\dfrac{y-۱}{۴}=\dfrac{z-۶}{۵۶}$

در بین گزینه‌ها تنها نقطه $(-۸,-۳,-۵۰)$ در معادله فوق صدق می‌کند.

مثال ۳۰: معادله صفحه مماس بر سطح (رویه): $4x^2+y^2-16z=0$ در نقطه $(2,4,2)$ کدامیک از گزینه‌های زیر است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۵)

۱) $x-2y+z=2$ ۲) $x+2y-z=2$ ۳) $2x-y+2z=4$ ۴) $2x+y-2z=4$

پاسخ: گزینه «۴» بردار نرمال صفحه مورد‌نظر، بردار گرادیان رویه $F=4x^2+y^2-16z=0$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\vec{N}=\vec{\nabla}F=(8x,2y,-16)\Big|_{(2,4,2)}=(16,8,-16)$$

بنابراین معادله صفحه موردنظر به‌صورت روبرو است: $16(x-2)+8(y-4)-16(z-2)=0 \Rightarrow 2x+y-2z=4$

مثال ۳۱: معادله خط مماس بر منحنی $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\x^2+y^2-8z=0\end{cases}$ در نقطه‌ی $(2,2,1)$ کدامند؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ ۲) $x+y=4\ ,\ z=1$

۳) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}$ ۴) $x=2t+2$ و $y=2t+2$ و $z=2$، t پارامتر

پاسخ: گزینه «۲» قرار می‌دهیم $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-9=0$ و $G(x,y,z)=x^2+y^2-8z=0$ در این صورت بردار هادی خط موردنظر برابر $\vec{\nabla}F\times\vec{\nabla}G$ خواهد بود.

$$\vec{\nabla}F=(2x,2y,2z)\Big|_{(2,2,1)}=(4,4,2)\ ,\ \vec{\nabla}G=(2x,2y,-8)\Big|_{(2,2,1)}=(4,4,-8)\Rightarrow\vec{\nabla}F\times\vec{\nabla}G=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&4&2\\4&4&-8\end{vmatrix}=(-40,40,0)$$

بنابراین معادله خط موردنظر به‌صورت روبرو خواهد بود: $\frac{x-2}{-40}=\frac{y-2}{40}=\frac{z-1}{0}\Rightarrow\begin{cases}x+y=4\\z=1\end{cases}$

مثال ۳۲: صفحه قائم بر منحنی (C) فصل مشترک استوانه $x^2+y^2=5$ و رویه $z=xy$ در نقطه $(2,-1,-2)$ محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

(MBA ـ سراسری ۸۶)

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۴- ۴) ۶-

پاسخ: گزینه «۴»

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-5=0\Rightarrow\vec{\nabla}f=(2x,2y,0)$$

$$g(x,y,z)=xy-z=0\Rightarrow\vec{\nabla}g=(y,x,-1)$$

بردار نرمال صفحه موردنظر برابر است با:

$$\vec{N}=\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}g=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2x&2y&0\\y&x&-1\end{vmatrix}=(-2y,+2x,2x^2-2y^2)=(2,4,6)$$

$$\Rightarrow 2(x-2)+4(y+1)+6(z+2)=0\Rightarrow x+2y+3z+6=0$$

برای به‌دست آوردن نقطه تلاقی صفحه با محور xها قرار می‌دهیم $y=z=0$، در این صورت داریم: $x+6=0\Rightarrow x=-6$

مثال ۳۳: بردار مماس بر منحنی فصل مشترک دو رویه زیر در نقطه $(-3,2,5)$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۶)

$$z=x^2-y^2,xyz+30=0$$

۱) $9\vec{i}-46\vec{j}+130\vec{k}$ ۲) $9\vec{i}+46\vec{j}+130\vec{k}$ ۳) $9\vec{i}-46\vec{j}-130\vec{k}$ ۴) $9\vec{i}+46\vec{j}-130\vec{k}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$f(x,y,z)=xyz+30=0\Rightarrow\vec{\nabla}f=(yz,xz,xy)=(10,-15,-6)$$

$$g(x,y,z)=x^2-y^2-z=0\Rightarrow\vec{\nabla}g=(2x,-2y,-1)=(-6,-4,-1)$$

$$\vec{N}=\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}g=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\10&-15&-6\\-6&-4&-1\end{vmatrix}=-9\vec{i}+46\vec{j}-130\vec{k}$$

مثال ۳۴: معادله‌ی صفحه مماس بر سهمی‌گون $z = 2x^2 + y^2$ در نقطه $(1,1,3)$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۶)

۱) $4x - 2y - z + 3 = 0$ ۲) $4x - 2y + z + 3 = 0$ ۳) $4x + 2y - z - 3 = 0$ ۴) $4x - 2y - z + 3 = 0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» معادله سهمی‌گون را به‌صورت $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z = 0$ می‌نویسیم، در این صورت داریم:

$$\vec{\nabla} f = (4x, 2y, -1)\Big|_{(1,1,3)} = (4,2,-1) \Rightarrow 4(x-1) + 2(y-1) - (z-3) = 0 \Rightarrow 4x + 2y - z - 3 = 0$$

مثال ۳۵: معادله صفحه قائم بر منحنی C فصل مشترک دو رویه $z = x^2 + y^2$ و $x^3z - y^2 = 1$ در نقطه $(1,-2,5)$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۷)

۱) $4z - y = 22$ ۲) $2x + y + 4z = 20$ ۳) $4x - y + 2z = 16$ ۴) $3x + y = 5$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» قرار می‌دهیم $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$ و $G(x,y,z) = x^3z - y^2 - 1 = 0$، در این صورت:

$$\vec{\nabla} F \times \vec{\nabla} G = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & -1 \\ 15 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (0, -17, 68)$$ بردار مماس بر منحنی C

معادله صفحه قائم: $-17(y+2) + 68(z-5) = 0 \Rightarrow 4z - y = 22$

مثال ۳۶: معادله صفحه مماس بر رویه $z = e^{3+2x+y^2}$ در نقطه $(-6,3,1)$ کدام‌یک از موارد زیر است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $2x + 6y - z = -5$ ۲) $2x + 6y - z = 5$ ۳) $x + y - z = -2$ ۴) $x + y - z = -4$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» قرار می‌دهیم $F(x,y,z) = e^{3+2x+y^2} - z$ در این صورت داریم:

$$\vec{\nabla} F = (2e^{3+2x+y^2}, 2ye^{3+2x+y^2}, -1)\Big|_{(-6,3,1)} = (2,6,-1)$$

معادله صفحه مورد نظر: $2(x+6) + 6(y-3) + (-1)(z-1) = 0 \Rightarrow 2x + 6y - z = 5$

مثال ۳۷: معادله خط مماس بر منحنی فصل مشترک دو رویه $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ و $xyz = 1$ در نقطه $(1,1,1)$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۷)

۱) $\begin{cases} y = z \\ 2y + x = 3 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x = z \\ y + 2x = 3 \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} x = z \\ 2y + x = 3 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} y = z \\ y + 2x = 3 \end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» قرار می‌دهیم $f_1(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0$ و $f_2(x,y,z) = xyz - 1 = 0$ در این صورت داریم:

$$\vec{\nabla} f_1 = (2x, 4y, 6z) \Rightarrow \vec{\nabla} f_1\Big|_{(1,1,1)} = (2,4,6)$$

$$\vec{\nabla} f_2 = (yx, xz, xy) \Rightarrow \vec{\nabla} f_2\Big|_{(1,1,1)} = (1,1,1)$$

$$\vec{\nabla} f_1 \times \vec{\nabla} f_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow$$ معادله خط موردنظر $$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} z = x \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

مثال ۳۸: در چه نقاطی از هذلولی‌گون $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{4} = 1$ صفحه مماس با صفحه $2x + y + z = 0$ موازی می‌باشد؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۷)

۱) $\left(-2\sqrt{\frac{2}{5}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right), \left(2\sqrt{\frac{2}{5}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

۲) $\left(-4\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \left(4\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

۳) $\left(-2\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \left(2\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

۴) $\left(-4\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}, 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right), \left(4\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}}, -2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» باید بردار عمود بر صفحه مماس یعنی گرادیان با نرمال صفحه داده شده موازی باشد. اگر $g = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{4} - 1 = 0$ آن‌گاه:

$$\vec{\nabla} g = \left(\frac{x}{2}, -y, -\frac{z}{2}\right) \text{ و } n = (2,1,1) \text{ و } \vec{\nabla} g \parallel n \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}x}{2} = \frac{-y}{1} = \frac{-\frac{1}{2}z}{1} \Rightarrow x = -4y \;,\; z = 2y$$

در معادله سطح: $4y^2 - \frac{1}{2}y^2 - y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{2}{5} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$

$\Rightarrow x = \mp 4\sqrt{\frac{2}{5}} \;,\; z = \pm 2\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow$ ۴ گزینه

مثال ۳۹: معادله صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $x^3+y^3+z^3+6xyz=1$ در نقطه $(0,0,1)$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۸)

۱) $z=1$ ۲) $x+y+z=1$ ۳) $z=x+y+1$ ۴) $2z+2x+y=0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» می‌دانیم بردار گرادیان بر رویه داده شده عمود است، و این بردار همان بردار نرمال صفحه مورد نظر خواهد بود.

$$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+6xyz-1=0 \Rightarrow \vec{\nabla} f=(3x^2+6yz,3y^2+6xz,3z^2+6xy)$$

بردار نرمال صفحه مورد نظر $=\vec{\nabla} f\Big|_{(0,0,1)}=(0,0,3)\xrightarrow{\text{معادله صفحه}}3(z-1)=0 \Rightarrow z=1$

مثال ۴۰: صفحه مماس بر نمودار $z=x^2+y^4+e^{xy}$ در نقطه $(1,0,2)$ برابر کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) $z=x-2y$ ۲) $z=x+2y$ ۳) $z=2x-y$ ۴) $z=2x+y$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا رابطه داده شده را به‌صورت $f(x,y,z)=x^2+y^4+e^{xy}-z=0$ می‌نویسیم، در این صورت $\vec{\nabla} f$ در نقطه $(1,0,2)$ همان بردار نرمال صفحه مورد نظر خواهد بود. $\vec{N}=\vec{\nabla} f=(2x+ye^{xy},4y^3+xe^{xy},-1)\Big|_{(1,0,2)}=(2,1,-1)\Rightarrow 2(x-1)+1(y-0)+(-1)(z-2)=0 \Rightarrow z=2x+y$

مثال ۴۱: کدام‌یک، مقدار بردار مماس بر منحنی فصل مشترک صفحه $x+y+z=6$ و کره $x^2+y^2+z^2=14$ را نشان می‌دهد؟ (معدن ـ سراسری ۸۸)

۱) $(-1,-2,-1)$ ۲) $(1,2,1)$ ۳) $(2,-1,2)$ ۴) $(1,-2,1)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» قرار می‌دهیم $f(x,y,z)=x+y+z-6=0$ و $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14=0$، در این صورت داریم:
$\vec{\nabla} f=(1,1,1)\,,\ \vec{\nabla} g=(2x,2y,2z)$ بردار مماس بر منحنی فصل مشترک دو رویه برابر $\vec{\nabla} f\times\vec{\nabla} g$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\vec{\nabla} f\times\vec{\nabla} g=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2x & 2y & 2z\end{vmatrix}=(2z-2y)\vec{i}+(2x-2z)\vec{j}+(2y-2x)\vec{k}$$

با توجه به بردار مماس به‌دست آمده در بالا واضح است که جمع مؤلفه‌های بردار مماس همواره برابر صفر است که تنها گزینه «۴» این ویژگی را دارد.

مثال ۴۲: خط مماس بر منحنی C فصل مشترک صفحه $z=2x+y$ و استوانه $x^2+y^2=2$ در نقطه $(1,-1,1)$ صفحه xoz را با کدام ارتفاع قطع می‌کند؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۸)

۱) -3 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» بردار هادی خط مماس برابر حاصل‌ضرب خارجی بردارهای گرادیان می‌باشد.

$$2x+y-z=0 \Rightarrow \vec{N}_1=(2,1,-1)$$

$$f=x^2+y^2-2=0 \Rightarrow \vec{\nabla} f=(2x,2y,0)\Big|_{(1,-1,1)}=(2,-2,0)\Rightarrow N_2=(2,-2,0)$$

$\Rightarrow$ بردار هادی خط $\vec{V}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 0\end{vmatrix}=-2\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{k}$

معادله خط: $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{-6}$

برای به‌دست آوردن نقطه تلاقی خط با صفحه xoz، قرار می‌دهیم $y=0$ که در این صورت $z=4$ به‌دست می‌آید.

مثال ۴۳: صفحه مماس بر رویه $3x-y+xyz+1=0$ در نقطه $(1,2,-1)$ محور zها را با کدام ارتفاع قطع می‌کند؟ (MBA ـ سراسری ۹۰)

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» قرار می‌دهیم $f=3x-y+xyz+1=0$، در این صورت $\vec{\nabla} f=(3+yz\,,\,-1+xz,xy)$ که در نقطه $P(1,2,-1)$ به‌صورت $(1,-2,2)$ در می‌آید، بنابراین معادله صفحه مماس بر رویه به‌صورت مقابل است: $1(x-1)-2(y-2)+2(z+1)=0 \Rightarrow x-2y+2z=-5$

برای یافتن نقطه تلاقی صفحه با محور z، x و y را مساوی صفر قرار می‌دهیم در این صورت $z=\frac{-5}{2}$ به‌دست می‌آید.

مثال ۴۴: خط مماس بر منحنی مشترک رویه‌های $x^2+y^2=1$ و $z=1$ در نقطه $(0,1,1)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}$ ۲) $y+z=2$ ۳) $x+y=1$ ۴) $\begin{cases} y=1 \\ z=1 \end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

روش اول: توجه کنید که گزینه‌های (۲) و (۳) معادله صفحه هستند نه خط!، و نقطه داده شده یعنی $(0,1,1)$ در معادله گزینه (۱) صدق نمی‌کند، پس فقط گزینه (۴) می‌تواند جواب صحیح باشد.

روش دوم: گرادیان رویه‌های داده شده را در نقطه $P(0,1,1)$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x,y,z)=x^2+y^2-1=0 \Rightarrow \vec{\nabla} f=(2x,2y,0)\Big|_P=(0,2,0) \\ g(x,y,z)=z-1=0 \Rightarrow \vec{\nabla} g=(0,0,1) \end{cases}$$

در این صورت بردارهای خط مماس همان $\vec{\nabla} f\times\vec{\nabla} g$ است:

$$\vec{\nabla} f\times\vec{\nabla} g=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(2,0,0).$$

بنابراین معادله خط مماس به‌صورت $\dfrac{x-0}{2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{0}$ یا $\begin{cases} y=1 \\ z=1 \end{cases}$ است.

مثال ۴۵: صفحه‌ی مماس بر سطح $z=2x^2y^2-3xy^3$ در نقطه‌ی $(1,1,-1)$ برابر است با: (معماری کشتی ـ سراسری ۹۰)

۱) $x-5y-z=-3$ ۲) $2x-3y-z=0$ ۳) $x-5y+z=-5$ ۴) $x+y-3z=5$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$f=2x^2y^2-3xy^3-z=0 \Rightarrow \vec{\nabla} f=(4xy^2-3y^3,4x^2y-9xy^2,-1) \Rightarrow \vec{\nabla} f=(1,-5,-1)$$

بنابراین بردار نرمال صفحه مماس بر رویه‌ی داده شده در نقطه $(1,1,-1)$ برابر است با: $(1,-5,-1)$. لذا معادله صفحه مماس بر رویه به این صورت خواهد بود:

$$1(x-1)-5(y-1)-1(z+1)=0 \Rightarrow x-5y-z=-3$$

مثال ۴۶: صفحه مماس بر رویه $z=x^2-y^2+4$ در نقطه $(-1,2,1)$ محور z ها را با کدام ارتفاع قطع می‌کند؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۹۰)

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$f(x,y,z)=x^2-y^2-z+4=0$$

$$\vec{\nabla} f=(2x,-2y,-1)\Big|_{(-1,2,1)}=(-2,-4,-1) \Rightarrow \text{بردار نرمال صفحه مماس } \vec{\nabla} f\Big|_{(-1,2,1)}=(-2,-4,-1)$$

لذا صفحه مماس بر رویه داده شده در نقطه $(-1,2,1)$ برابر است با:

$$P:-2(x+1)-4(y-2)-(z-1)=0$$

برای به‌دست آوردن نقطه تلاقی صفحه مماس با محور z ها کافیست که در معادله صفحه مماس $x=y=0$ قرار دهیم، بنابراین داریم:

$$-2(0+1)-4(0-2)-(z-1)=0 \Rightarrow -2+8-z+1=0 \Rightarrow -z=-7 \Rightarrow z=7$$

مثال ۴۷: خط نرمال بر رویه‌ی به معادله‌ی $3x+y^2-z^2=0$ در نقطه $(3,0,3)$ رویه‌ی مذکور را در کدام نقطه دیگر قطع می‌کند؟ (آمار ـ سراسری ۹۰)

۱) $(0,0,0)$ ۲) $(3,0,-3)$ ۳) $(\frac{27}{4},0,-\frac{9}{2})$ ۴) $(-\frac{27}{4},\frac{9}{2},0)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» قرار می‌دهیم $f=3x+y^2-z^2=0$، در این صورت $\vec{\nabla} f=(3,2y,-2z)$ که در نقطه $P(3,0,3)$ به‌صورت $(3,0,-6)$ در می‌آید، بنابراین معادله خط قائم (نرمال) بر رویه به‌صورت زیر است:

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-3}{-6} \xrightarrow{\text{پارامتری}} \begin{cases} x=3t+3 \\ y=0 \\ z=-6t+3 \end{cases}$$

حال نقطه تقاطع دیگر این خط را با رویه به‌دست می‌آوریم لذا معادله پارامتری خط را در معادله رویه قرار می‌دهیم:

$$3(3+3t)+(0)^2-(3-6t)^2=0 \Rightarrow 45t-36t^2=0 \Rightarrow 9t(5-4t)=0 \Rightarrow t=\frac{5}{4}\ ,\ t=0$$

$$t=\frac{5}{4} \to (x,y,z)=(\frac{27}{4},0,-\frac{9}{2}) \text{ نقطه تقاطع خط نرمال بر رویه با رویه}$$

به ازای $t=0$ نقطه $(3,0,3)$ به‌دست می‌آید که همان نقطه داده شده در سؤال است که روی رویه نیز قرار داشت.

درسنامه۷: کرل، دیورژانس و لاپلاسین

مثال۱ (سخت): اگر $\vec{a}$ برداری ثابت باشد، آن‌گاه عبارت $\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{\nabla}\log r)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\frac{(\vec{a}.\vec{r})\vec{r}}{2r^4}$ ۲) $\frac{(\vec{a}.\vec{r})\vec{r}}{2r^3}$ ۳) $\frac{2(\vec{a}.\vec{r})\vec{r}}{r^3}$ ۴) $\frac{2(\vec{a}.\vec{r})\vec{r}}{r^4}$

پاسخ: گزینه «۴» $\log r$ یک تابع حقیقی است، ابتدا حاصل عبارت $\vec{\nabla}\log r$ را حساب می‌کنیم:

$$\vec{\nabla}\log r=(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z})\log r=(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k})=\frac{1}{r}(\frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{j}+\frac{z}{r}\vec{k})=\frac{\vec{r}}{r^2}$$

بنابراین داریم:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{\nabla}\log r)=\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\frac{\vec{r}}{r^2})=\vec{\nabla}\times(\frac{\vec{a}\times\vec{r}}{r^2})=\vec{\nabla}\times(r^{-2}\vec{A})$$

در آخرین تساوی فرض کرده‌ایم $\vec{a}\times\vec{r}=\vec{A}$ باشد، $\vec{A}$ یک میدان برداری و r^{-2} یک میدان اسکالر است، می‌توان از اتحاد زیر استفاده کرد:

$$\vec{\nabla}\times(\phi\vec{F})=\phi(\vec{\nabla}\times\vec{F})+(\vec{\nabla}\phi)\times\vec{F}$$

طبق این اتحاد داریم:

$$\vec{\nabla}\times(r^{-2}\vec{A})=r^{-2}(\vec{\nabla}\times\vec{A})+(\vec{\nabla}r^{-2})\times\vec{A}=r^{-2}\left[\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{r})\right]+(\vec{\nabla}r^{-2})\times(\vec{a}\times\vec{r})$$

$$=r^{-2}\left[(\vec{r}.\vec{\nabla})\vec{a}-\vec{r}(\vec{\nabla}.\vec{a})-(\vec{a}.\vec{\nabla})\vec{r}+\vec{a}(\vec{\nabla}.\vec{r})\right]+\left[(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z})r^{-2}\right]\times(\vec{a}\times\vec{r})$$

چون $\vec{a}$ برداری ثابت است، بنابراین داریم: $\vec{\nabla}.\vec{a}=0,(\vec{r}.\vec{\nabla})\vec{a}=0$، همچنین به سادگی معلوم است که $\vec{\nabla}.\vec{r}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$ و برای محاسبه‌ی $(\vec{a}.\vec{\nabla})\vec{r}$ فرض کنیم $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ آن‌گاه داریم:

$$(\vec{a}.\vec{\nabla})\vec{r}=(a_1\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}+a_2\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}+a_3\frac{\partial\vec{r}}{\partial z})=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}=\vec{a}$$

با این جایگذاری‌ها خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{\nabla}\log r)=r^{-2}\left[0-0-\vec{a}+3\vec{a}\right]+(-2r^{-3})\left((\vec{i}\frac{\partial r}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial r}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial r}{\partial z})\times(\vec{a}\times\vec{r})\right)$$

با توجه به تساوی $r^2=x^2+y^2+z^2$ می‌دانیم که $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$ در نتیجه داریم:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{\nabla}\log r)=r^{-2}2\vec{a}+(-2r^{-3})(\frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{j}+\frac{z}{r}\vec{k})\times(\vec{a}\times\vec{r})$$

از طرفی $\frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{j}+\frac{z}{r}\vec{k}=\frac{1}{r}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})=\frac{1}{r}\vec{r}$ در نتیجه $\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{\nabla}\log r)=r^{-2}2\vec{a}+(-2r^{-4})\vec{r}\times(\vec{a}\times\vec{r})$ در نهایت با استفاده از ویژگی‌های ضرب خارجی خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{\nabla}\log r)=r^{-2}2\vec{a}-2r^{-4}\left[(\vec{r}.\vec{r})\vec{a}-(\vec{r}.\vec{a})\vec{r}\right]=\frac{2\vec{a}}{r^2}-\frac{2\vec{a}}{r^2}+\frac{2(\vec{a}.\vec{r})\vec{r}}{r^4}=\frac{2(\vec{a}.\vec{r})\vec{r}}{r^4}$$

مثال۲: فرض کنیم u و v توابع یا مقادیر حقیقی و از کلاس C^2 باشند و F یک میدان برداری از کلاس C^2 و $\Delta=\nabla^2$ اپراتور لاپلاس باشد، کدام گزینه نادرست است؟ (عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) $grad(uv)=u\,grad\,v+v\,grad\,u$ ۲) $div(u\vec{F})=u\,div\,\vec{F}+grad\,u.\vec{F}$
۳) $\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u$ ۴) $curl(u\vec{F})=u\,curl\,\vec{F}+grad\,u\times\vec{F}$

پاسخ: گزینه «۳» گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ خواص عملگرهای گرادیان، دیورژانس و کرل می‌باشند. اتحادهای مطرح شده در متن درس را مرور کنید.

مثال۳: میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)=(x\sin xz,y,xz)$ را در نظر بگیرید. در این صورت $div\vec{F}$ (دیورژانس $\vec{F}$) در نقطهٔ $(1,1,\pi)$ برابر است با ..... (کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱ ۲) $2-\pi$ ۳) $1-\pi$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۲»

$$\vec{F}=(x\sin xz,y,xz)\ \Rightarrow div\vec{F}=\sin xz+xz\cos xz+1+x\Big|_{(1,1,\pi)}=-\pi+2$$

مثال ۴: با کدام مقادیر a و b تابع $u(x,y)=x^2+ay^2+by$ همساز است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $a=b=+1$ ۲) $a=-1$ و b دلخواه ۳) $a=-1$ و $b=0$ فقط ۴) هیچ مقدار a و b

پاسخ: گزینه «۲»

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2+2a+0=2+2a$$

برای اینکه u همساز باشد، لازم است $\nabla^2 u=0$، در نتیجه $2+2a=0$ پس $a=-1$.

مثال ۵: اگر $\vec{\nabla}=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ و $\vec{k}$ و $\vec{j}$ و $\vec{i}$ بردارهای یکه «معمول» و u یک تابع اسکالر از متغیرهای مستقل (x,y,z) و $\vec{v}$ یک بردار و تابعی از (x,y,z) و نقطه بین دو بردار، به معنی ضرب داخلی بین آن دو باشند، عبارت $\vec{\nabla}.(u\vec{v})$ به کدام عبارت زیر ساده می‌شود؟ (مکانیک ـ آزاد ۸۱)

۱) $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v})-\nabla^2\vec{v}$ ۲) $(\vec{v}.\vec{\nabla})u-u\vec{v}$

۳) $\vec{\nabla}u.\vec{v}+u\vec{\nabla}.\vec{v}$ ۴) $u\vec{\nabla}\times\vec{v}+\vec{\nabla}u\times\vec{v}$ (× به معنی ضرب خارجی بین دو بردار)

پاسخ: گزینه «۳» این اتحاد در متن درسنامه اثبات شده است.

مثال ۶: اگر $\vec{B}=xy^2\vec{i}+2x^2yz\vec{j}-3yz^2\vec{k}$، در این صورت مقدار $\text{curl}\vec{B}$ در نقطهٔ (۱,۰,۱) برابر است با .... (کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $(-3,0,0)$ ۲) $(-3,0,1)$ ۳) $(-3,1,0)$ ۴) $(-3,0,-1)$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\text{curl}\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ xy^2&2x^2yz&-3yz^2\end{vmatrix}=(-3z^2-2x^2y,0,4xyz-2xy)\Big|_{(1,0,1)}=(-3,0,0)$$

مثال ۷: اگر $\vec{F}(x,y,z)=(3x^2+y^2)\vec{i}+2xy\vec{j}-3z^2\vec{k}$، آن‌گاه مقدار $\text{curl}\vec{F}$ کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۱)

۱) بردار صفر ۲) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ ۳) $6x\vec{i}+2y\vec{j}-4z\vec{k}$ ۴) $(2y-6z)\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

پاسخ: گزینه «۱» به راحتی می‌توان دید $\text{curl}\vec{F}=0$ به‌دست می‌آید.

مثال ۸: اگر $\vec{F}(x,y)=y^2\vec{i}+x^2\vec{j}$، آن‌گاه $\text{div}\vec{F}$ و $\text{curl}\vec{F}$ به ترتیب کدام‌اند؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) صفر و $2(x+y)\vec{k}$ ۲) صفر و $2(x-y)\vec{k}$ ۳) غیر صفر و $2(x+y)\vec{k}$ ۴) غیر صفر و $2(x-y)\vec{k}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\vec{F}=y^2\vec{i}+x^2\vec{j}\Rightarrow \text{div}\vec{F}=\frac{\partial(y^2)}{\partial x}+\frac{\partial(x^2)}{\partial y}=0+0=0$$

$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ y^2&x^2&0\end{vmatrix}=(2x-2y)\vec{k}$$

مثال ۹: کدامیک از میدان‌های زیر گرادیان یک تابع است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\cos xy\vec{i}+\sin xy\vec{j}$ ۲) $e^{xy}\cos xy(y\vec{i}+x\vec{i})$

۳) $ye^{xy}\cos xy\vec{i}+xe^{xy}\sin xy\vec{j}$ ۴) $ye^{xy}(\cos xy+\sin xy)\vec{i}+xe^{xy}(\cos xy+\sin xy)\vec{j}$

پاسخ: گزینه «۴» برای اینکه میدان $\vec{F}$، گرادیان یک تابع باشد، لازم است که میدان $\vec{F}$ پایستار باشد یعنی $\text{curl}\vec{F}=0$ پس برای میدان $\vec{F}=F_1\vec{i}+F_2\vec{j}$ باید داشته باشیم: $\frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial y}$.

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=e^{xy}(\cos xy+\sin xy)+xye^{xy}(\cos xy+\sin xy)+xe^{xy}(-y\sin xy+y\cos xy)=e^{xy}(\cos xy+\sin xy+2xy\cos xy)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=e^{xy}(\cos xy+\sin xy)+xye^{xy}(\cos xy+\sin xy)+ye^{xy}(-x\sin xy+x\cos xy)=e^{xy}(\cos xy+\sin xy+2xy\cos xy)$$

مثال ۱۰: اگر $\vec{A}=A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k}$ مقدار $\mathrm{div}(\mathrm{curl}\vec{A})$ کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) $A_1+A_2+A_3$ ۳) $A_1^2+A_2^2+A_3^2$ ۴) $A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k}$

پاسخ: گزینه «۱»

روش اول: طبق متن درس می‌دانیم که $\mathrm{div}(\mathrm{curl}\vec{A})=0$ است.

روش دوم: (محاسبه‌ی مستقیم) توجه داشته باشید که A_1، A_2 و A_3 را ثابت در نظر نگیرید. ابتدا $\mathrm{curl}\vec{A}$ را می‌نویسیم:

$$\mathrm{curl}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ A_1&A_2&A_3\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z},-\frac{\partial A_3}{\partial x}+\frac{\partial A_1}{\partial z},\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

حالا از این میدان برداری، دیورژانس می‌گیریم:

$$\mathrm{div}(\mathrm{curl}\vec{F})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial A_3}{\partial x}+\frac{\partial A_1}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 A_3}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 A_3}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 A_1}{\partial z\partial y}=0$$

مثال ۱۱: اگر $\phi=2x^2y-xz^3$ باشد آن‌گاه $\nabla^2\phi$ برابر است با: (هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) $4y-6xz$ ۲) $4x-6xz$ ۳) $4y-3xz$ ۴) $4-6xz$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\phi=2x^2y-xz^3\Rightarrow\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=4y+0-6xz=4y-6xz$$

مثال ۱۲: کرل بردار $\vec{I}=3x^2y\vec{i}+7xz\vec{j}+4zy\vec{k}$، در نقطه $(1,2,3)$ برابر است با: (عمران ـ آزاد ۸۳)

۱) $5\vec{i}+19\vec{k}$ ۲) $5\vec{i}+18\vec{k}$ ۳) صفر ۴) $6\vec{i}+18\vec{k}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\mathrm{curl}\vec{I}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ 3x^2y&7xz&4yz\end{vmatrix}=(4z-7x\ ,\ 0\ ,\ 7z-3x^2)\Big|_{(1,2,3)}=(5,0,18)$$

مثال ۱۳: کدامیک از جملات زیر نادرست است؟ (عمران ـ آزاد ۸۳)

۱) گرادیان یک میدان اسکالر دارای خاصیت خطی است. ۲) کرل گرادیان صفر است.

۳) دیورژانس کرل صفر است. ۴) دیورژانس یک میدان برداری با تغییر محورهای مختصات تغییر می‌کند.

پاسخ: گزینه «۴» گزینه (۱) جمله‌ی درستی است. مفهوم خطی بودن گرادیان آن است که اگر f و g دو میدان اسکالر (توابع حقیقی) و c عددی حقیقی باشد، داریم: $\mathrm{grad}(cf+g)=c\,\mathrm{grad}(f)+\mathrm{grad}(g)$

گزینه‌های (۲) و (۳) هم جزء اتحادهای معروفی هستند که در متن درس آمده‌اند.

در مورد گزینه‌ی (۴) به یاد داشته باشید که کرل و دیورژانس با تغییر محورهای مختصات یا با انتقال مبدأ مختصات به یک نقطه‌ی دیگر تغییری نمی‌کنند.

مثال ۱۴: برای اینکه میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)=(a_1x+a_2y+a_3z)\vec{i}+(b_1x+b_2y+b_3z)\vec{j}+(c_1x+c_2y+c_3z)\vec{k}$ غیر چرخشی باشد، لازم و کافی است که: (هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) $a_2=b_2$ و $a_3=c_1$ و $b_3=c_2$ ۲) $a_2=b_1$ و $a_1=c_1$ و $b_3=c_2$ ۳) $a_2=b_1$ و $a_3=c_1$ و $b_3=c_2$ ۴) $a_2=b_1$ و $a_3=c_1$ و $b_3=c_2$

پاسخ: گزینه «۴» برای اینکه میدان $\vec{F}$ غیرچرخشی باشد، لازم است $\mathrm{curl}\vec{F}=0$، بنابراین داریم:

$$\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ a_1x+a_2y+a_3z&b_1x+b_2y+b_3z&c_1x+c_2y+c_3z\end{vmatrix}=(c_2-b_3\ ,\ a_3-c_1\ ,\ b_1-a_2)$$

برای اینکه $\mathrm{curl}\vec{F}=0$ باشد، لازم است $b_1=a_2\ ,\ a_3=c_1\ ,\ c_2=b_3$ باشد.

مثال ۱۵: اگر $\vec{F}(x,y,z)=x^{۲}y\vec{i}+۲xz\vec{j}-۳yz\vec{k}$ آن‌گاه: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\operatorname{curl}(\operatorname{curl}\vec{F})=\vec{0}$ ۲) $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\vec{F})=y$ ۳) $\operatorname{curl}(\operatorname{curl}\vec{F})=(۲x-۳)\vec{j}$ ۴) $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\vec{F})=xy$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ x^{۲}y&۲xz&-۳yz\end{vmatrix}=(-۳z-۲x)\vec{i}+(۲z-x^{۲})\vec{k}\Rightarrow \operatorname{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ -۳z-۲x&۰&۲z-x^{۲}\end{vmatrix}=(۲x-۳)\vec{j}$$

مثال ۱۶: اگر $\vec{F}(x,y,z)=\frac{m}{r^{۳}}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$، که در آن $m>۰$ ثابت و $r^{۲}=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}$، آن‌گاه $\operatorname{div}\vec{F}=\vec{\nabla}.\vec{F}$ در نقاط $r\neq ۰$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۴)

۱) صفر ۲) $-\frac{m}{r^{۲}}$ ۳) $\frac{۶m}{r^{۲}}$ ۴) $-\frac{۴m}{r^{۳}}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$F_{۱}=\frac{mx}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\Rightarrow\frac{\partial F_{۱}}{\partial x}=\frac{m(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}-۳mx^{۲}(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{۳}}=\frac{m(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})-۳mx^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{\frac{۵}{۲}}}=\frac{mr^{۲}-۳mx^{۲}}{r^{۵}}$$

به طور مشابه $\frac{\partial F_{۲}}{\partial y}$ و $\frac{\partial F_{۳}}{\partial z}$ به دست می‌آیند. در این صورت داریم:

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{mr^{۲}-۳mx^{۲}}{r^{۵}}+\frac{mr^{۲}-۳my^{۲}}{r^{۵}}+\frac{mr^{۲}-۳mz^{۲}}{r^{۵}}=\frac{۳mr^{۲}-۳m(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})}{r^{۵}}=۰$$

مثال ۱۷: حاصل $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}u)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $|u|$ ۴) $|u|^{۲}$

پاسخ: گزینه «۱» این اتحاد در متن درسنامه ثابت شده است.

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}u)=\operatorname{curl}(\operatorname{grad}(u))=۰$$

مثال ۱۸: اگر $f(x,y,z)=xyz+e^{xz}$، آن‌گاه حاصل $\operatorname{div}(\operatorname{grad}f)$ برابر است با: (معدن ـ سراسری ۸۶)

۱) $(x^{۲}+y^{۲})e^{xy}$ ۲) $(z^{۲}+y^{۲})e^{zy}$ ۳) $(x+z)e^{xz}$ ۴) $(x^{۲}+z^{۲})e^{xz}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$f(x,y,z)=xyz+e^{xz}\Rightarrow \operatorname{grad}f=(yz+ze^{xz},xz,xy+xe^{xz})$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}f)=z^{۲}e^{xz}+x^{۲}e^{xz}=(x^{۲}+z^{۲})e^{xz}$$

مثال ۱۹: می‌دانیم تابع برداری X به صورت $\vec{X}=(۲x^{۳}-۲xz^{۲},۳x^{۲}y+y^{۳}-yz^{۲},۴zx^{۲}+۲zy^{۲})$ تعریف شده، $\operatorname{curl}\vec{X}$ مساوی کدامیک از عبارات داده شده است؟ (معدن ـ سراسری ۸۶)

۱) $۶zy\vec{i}-۱۲xz\vec{j}+۶xy\vec{k}$ ۲) $۶zy\vec{i}+۱۲xz\vec{j}+۶xy\vec{k}$ ۳) $۶zy\vec{i}+۱۲xz\vec{j}-۶xy\vec{k}$ ۴) $۶zy\vec{i}-۱۲xz\vec{j}-۶xy\vec{k}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\operatorname{curl}\vec{X}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ ۲x^{۳}-۲xz^{۲}&۳x^{۲}y+y^{۳}-yz^{۲}&۴zx^{۲}+۲zy^{۲}\end{vmatrix}=(۶yz,-۱۲xz,۶xy)$$

مثال ۲۰: کدام میدان یک میدان گرادیان است؟ (صنایع سیستم ـ سراسری ۸۷)

۱) $\vec{F}(x,y)=(xy,y)$ ۲) $\vec{F}(x,y)=(4x+y,x+2y)$ ۳) $\vec{F}(x,y)=(xy,2x-y)$ ۴) $\vec{F}(x,y)=(xy+2,2x+y)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم میدان $\vec{F}=(F_1,F_2)$ ابقایی است اگر $\frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial y}$ باشد که فقط گزینه ۲ این ویژگی را دارد.

$$F_1=4x+y \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y}=1 \quad , \quad F_2=x+2y \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x}=1$$

مثال ۲۱: اگر $\vec{F}=r\vec{i}+\theta\vec{j}+z\vec{k}$، آن‌گاه مقدار $\vec{\nabla}\times\vec{F}=\mathrm{curl}(\vec{F})$ کدام است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\vec{O}$ ۲) $\sin\theta\vec{k}$ ۳) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ ۴) $(\frac{-1}{r}\sin\theta-\sin\theta)\vec{k}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به اینکه $\theta=tg^{-1}\frac{y}{x}$ و $r=\sqrt{x^2+y^2}$، پس خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ r&\theta&z\end{vmatrix}=\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)}_{\text{صفر}}\vec{i}-\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial r}{\partial z}\right)}_{\text{صفر}}\vec{j}+\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\partial r}{\partial y}\right)\vec{k}$$

بنابراین $\vec{\nabla}\times\vec{F}=\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\partial r}{\partial y}\right)\vec{k}$، از طرفی داریم:

$$\theta=tg^{-1}\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{-r\sin\theta}{r^2}=\frac{-1}{r}\sin\theta$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{r}=\sin\theta$$

مثال ۲۲: میدان برداری $\vec{F}=[\alpha(x)-\beta(y)+\alpha(x)\beta(y)]\vec{i}+[\alpha(y)-\beta(x)+\alpha(y)\beta(x)]\vec{j}$ در $\mathbb{R}^2$ در کدام حالت لزوماً یک میدان گرادیان است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) α تابعی خطی و β تابعی مشتق پذیر باشد.   ۲) β تابعی خطی و α تابعی مشتق پذیر باشد.

۳) α تابعی ثابت و β تابعی پیوسته باشد.   ۴) β تابعی خطی و α تابعی ثابت باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اگر β تابع خطی باشد آن را می‌توانیم بـه صـورت $\beta(x)=ax+b$ و α تـابع ثابـت باشـد آنرا بـه صـورت $\alpha(x)=c$ در نظر می‌گیریم در این صورت $\vec{F}$ به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\vec{F}=(c-(ay+b)+c(ay+b))\vec{i}+(c-(ax+b)+c(ax+b))\vec{j}\Rightarrow\frac{\partial F_2}{\partial x}=-a+ac \ , \ \frac{\partial F_1}{\partial y}=-a+ac$$

چون $\frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial x}$ است، پس میدان $\vec{F}$ حتماً یک میدان گرادیان است.

مثال ۲۳: اگر $z=x^2\sin y+y^2\sin x$، آن‌گاه $\nabla^2 z$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) $(2+x^2)\sin y+(2+y^2)\sin x$ ۲) $(2-x^2)\sin y+(2-y^2)\sin x$

۳) $(2+x^2)\cos y+(2+y^2)\cos x$ ۴) $(2-x^2)\cos y+(2-y^2)\cos x$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» داریم $\nabla^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ بنابراین از $z=x^2\sin y+y^2\sin x$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin y+y^2\cos x\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\sin y-y^2\sin x\\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos y+2y\sin x\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-x^2\sin y+2\sin x\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(2-x^2)\sin y+(2-y^2)\sin x$$

مثال ۲۴: اگر $\vec{F}=F_1\vec{i}+F_2\vec{j}$ یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^2$ باشد، آن‌گاه $\mathrm{div}(\vec{\nabla}\times\vec{F})$ برابر است با: (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۹)

۱) صفر   ۲) $\frac{\partial F_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}$ ۳) $\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}$ ۴) $\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» به‌طور کلی اگر F یک میدان برداری با مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد، آن‌گاه: $\mathrm{div}(\mathrm{curl}\vec{F})=0$

درسنامه ۷: نقاط بحرانی توابع چند متغیره

مثال ۱: نقطه $P(0,0)$ برای تابع $z=-\sqrt{x^2+xy+y^2}$، چگونه نقطه‌ای است؟

۱) مینیمم ۲) ماکزیمم ۳) زینی ۴) عادی

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به این که $\nabla z=(\frac{-(2x+y)}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}},\frac{-(x+2y)}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}})$، پس در نقطه P، ∇z وجود ندارد، یعنی P نقطه بحرانی است. از طرفی مقدار تابع z همواره منفی است و در نقطه $P(0,0)$، مقدار تابع z برابر صفر است، پس نقطه P نقطه ماکزیمم تابع است.

مثال ۲: نقطه‌ی بحرانی تابع $z=-2x^2-y^2+2x+3y$ کدام است و نوع نقطه چیست؟

۱) $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ مینیمم ۲) $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ ماکزیمم ۳) $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ ماکزیمم ۴) $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ مینیمم

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا نقطه‌ی بحرانی تابع را از حل معادلات $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ و $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ به‌دست می‌آوریم و سپس طبق آزمون مشتق دوم نوع نقطه‌ی بحرانی را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=-4x+2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\ ,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-4<0\ ,\ \frac{\partial z}{\partial x\partial y}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=-2y+3=0 \Rightarrow y=\frac{3}{2}\ ,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\ ,\ \Delta=z_{xx}.z_{yy}-z_{xy}^2=(-4)(-2)=8\end{cases}$$

چون Δ مثبت و $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ منفی می‌باشد پس نقطه $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ ماکزیمم است.

مثال ۳: تابع $z=x^2-xy+y^2-3x$ دارای چه نوع نقطه‌ای می‌باشد؟

۱) زینی ۲) مینیمم ۳) ماکزیمم ۴) همه‌ی نقاط آن، عادی هستند.

پاسخ: گزینه «۲» با حل دستگاه $\begin{cases}z_x=2x-y-3=0\\ z_y=-x+2y=0\end{cases}$ متوجه می‌شویم که نقطه‌ی $(2,1)$ یک نقطه‌ی بحرانی است. برای تعیین نوع نقطه‌ی بحرانی طبق آزمون مشتق دوم لازم است مبین را به‌دست آوریم.

$$\Delta=z_{xx}.z_{yy}-z_{xy}^2=2\times 2-(-1)^2=3>0$$

چون Δ مثبت و z_{xx} نیز مثبت است پس نقطه‌ی بحرانی تابع، نقطه‌ی مینیمم می‌باشد.

مثال ۴: اگر $f(x,y)=x^2y-y^2-x^3+xy$، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $(0,0)$ نقطه بحرانی نیست ۲) $(0,0)$ یک نقطه زینی است ۳) $(0,0)$ مینیمم نسبی است ۴) $(0,0)$ ماکزیمم نسبی است

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا نقاط بحرانی f را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}f_x=2xy-3x^2+y=0\\ f_y=x^2-2y+x=0\end{cases}\Rightarrow A(0,0)\rightarrow \text{نقطه بحرانی می‌باشد}$$

$$\begin{cases}f_{xx}=2y-6x\\ f_{yy}=-2\\ f_{xy}=2x+1\end{cases}\Rightarrow \Delta(0,0)=0-(1)^2=-1<0\rightarrow \text{نقطه زینی}$$

مثال۵: فرض کنید $f(x,y)=x^2+y^2+x^m+x^n-cx^my^n$ که در آن m و n اعداد صحیح بزرگتر از ۲ هستند و c یک عدد حقیقی ثابت است. کدام یک از احکام زیر درست است؟

۱) نقطه $(0,0)$ یک نقطه مینیمم موضعی برای f است.
۲) اگر دست کم یکی از m و n فرد باشد، $(0,0)$ یک نقطه زینی برای f است.
۳) اگر c صفر نباشد، نقطه $(0,0)$ یک نقطه زینی برای f است.
۴) اگر m و n هر دو فرد باشند، $(0,0)$ یک نقطه ماکسیمم موضعی برای f است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای تعیین نوع نقطه $(0,0)$ مبین را تشکیل می‌دهیم:

$$f_x=2x+mx^{m-1}+nx^{n-1}-cmx^{m-1}y^n \text{ و } f_y=2y-cnx^my^{n-1} \Rightarrow f_{xy}=-cmnx^{m-1}y^{n-1}$$

$$f_{xx}=2+m(m-1)x^{m-2}+n(n-1)x^{n-2}-cm(m-1)x^{m-2}y^n \text{ و } f_{yy}=2-cn(n-1)x^my^{n-2}$$

چون $m,n>2$ پس در نقطه $(0,0)$ داریم: $\Delta=f_{xx}.f_{yy}-f_{xy}^2=2\times2-0=4>0$ و $f_{xx}=2>0 \Rightarrow$ $(0,0)$ مینیمم نسبی است.

مثال۶: مقدار ماکزیمم تابع $w=2x+y+2z$ با شرط $x^2+y^2+z^2=36$ چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

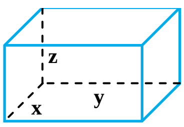
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای حل این مثال از روش لاگرانژ ساده شده استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-36=0 & (1)\\ \dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{2y}=\dfrac{2}{2z} & (2)\end{cases}$$

از معادله (۲)، (با طرفین وسطین) نتیجه می‌شود $x=z=2y$. بنابراین در معادله (۱)، به جای x و z قرار می‌دهیم 2y. در این صورت معادله (۱) به‌صورت مقابل در می‌آید: $(2y)^2+y^2+(2y)^2-36=0 \Rightarrow 9y^2=36 \Rightarrow y=\pm2$

به ازای $y=2$ ، $x=z=4$ به‌دست می‌آید یعنی به نقطه $A(4,2,4)$ می‌رسیم. به ازای $y=-2$ ، $x=z=-4$ به‌دست می‌آید یعنی به نقطه $B(-4,-2,-4)$ می‌رسیم، در نقطه A مقدار w برابر ۱۸ و در نقطه B مقدار w برابر ۱۸- به‌دست می‌آید.

مثال۷: مطابق شکل می‌خواهیم یک استخر روباز به شکل مکعب با حجم ۳۲ متر مکعب بسازیم، ابعاد این استخر برای اینکه کمترین مصالح ساختمانی در ساخت آن مصرف شود، کدام مقادیر باید باشد؟



۱) $x=4\ ,\ y=2\ ,\ z=4$ ۲) $x=2\ ,\ y=16\ ,\ z=1$
۳) $x=4\ ,\ y=4\ ,\ z=2$ ۴) $z=4\ ,\ x=2\ ,\ y=4$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» برای اینکه کمترین مقدار مصالح مصرف شود باید مساحت آن مینیمم شود. از طرفی مساحت این استخر با توجه به اینکه روباز است به‌صورت $S=xy+2yz+2zx$ قابل بیان است. لذا با شرط $V=xyz=32$ باید S مینیمم گردد:

$$\begin{cases} y+2z=\lambda(yz) & (1)\\ x+2z=\lambda(xz) & (2)\\ 2y+2x=\lambda(xy) & (3)\end{cases}$$

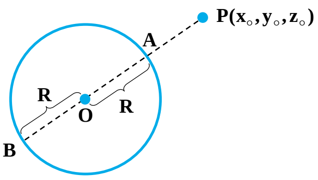
اگر رابطه (۱) را در x و رابطه (۲) را در y ضرب کرده و از هم کم کنیم، داریم: $2zx-2zy=0 \Rightarrow 2z(x-y)=0 \Rightarrow x=y$

به همین ترتیب از ترکیب روابط (۱) و (۳) خواهیم داشت $x=2z$، لذا داریم: $V=xyz=2z\times2z\times z \Rightarrow 32=4z^3 \Rightarrow z^3=8 \Rightarrow z=2 \Rightarrow x=4\ ,\ y=4$

مثال۸: فاصله نزدیکترین و دورترین نقاط روی کره $x^2+y^2+z^2=9$ از نقطه $P(4,3,12)$ چقدر است؟

۱) ۹ و ۱۵ ۲) ۱۰ و ۱۶ ۳) ۹ و ۸ ۴) ۶ و ۱۶

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»



روش اول: با توجه به شکل مقابل اگر R شعاع کره و O مرکز کره و P نقطه‌ای دلخواه درون یا بیرون کره باشد، بیشترین فاصله نقطه P از کره برابر BP یا همان $OP+R$ و کمترین فاصله نقطه از کره $AP=|OP-R|$ است. در این سؤال شعاع کره برابر ۳ و $OP=\sqrt{4^2+3^2+12^2}=13$ است، بنابراین کمترین فاصله $13-3=10$ و بیشترین فاصله $13+3=16$ است.

روش دوم: فاصله نقطه دلخواه مانند (x,y,z) روی سطح کره از نقطه $(4,3,12)$ برابر $\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2+(z-12)^2}$ می‌باشد، یعنی می‌خواهیم عبارت $(x-4)^2+(y-3)^2+(z-12)^2$ را تحت قید $x^2+y^2+z^2=9$ بهینه کنیم که در این صورت می‌توانیم از روش لاگرانژ استفاده کنیم که طولانی خواهد بود.

مثال ۹: حداقل فاصله تلاقی دو سطح $x+y+z=1$ و $z=xy+5$ از مبدأ مختصات برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۰

پاسخ: گزینه «۱» تابعی که فاصله از مبدأ مختصات را حساب می‌کند، تابع $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ است. البته برای راحتی بیشتر ابتدا تابع $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ را در نظر می‌گیریم و در پایان از جواب به‌دست آمده رادیکال می‌گیریم. پس ما می‌خواهیم کمترین مقدار تابع F را با وجود دو قید $g_1: x+y+z=1$ و $g_2: z-xy=5$ به‌دست آوریم. ابتدا از معادله g_1 داریم $z=1-x-y$ که با جایگذاری در فرمول F به تابع دو متغیره $F(x,y)=x^2+y^2+(1-x-y)^2$ می‌رسیم. همچنین این رابطه را در قید دوم جایگذاری می‌کنیم و به شرط $h(x,y)=xy+x+y+4=0$ خواهیم رسید. اکنون تابع $F(x,y)=2x^2+2y^2+2xy-2x-2y+1$ و قید $h(x,y)=xy+x+y+4=0$ را داریم. از روش ضرایب لاگرانژ برای یک قید استفاده می‌کنیم.

$\vec{\nabla}F=(4x+2y-2,4y+2x-2)$ و $\vec{\nabla}h=(y+1,x+1)$

$$\begin{cases}\vec{\nabla}F=\lambda\vec{\nabla}h\\ h(x,y)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x+2y-2=\lambda(y+1) & (1)\\ 4y+2x-2=\lambda(x+1) & (2)\\ xy+x+y+4=0 & (3)\end{cases}$$

کم کردن رابطه (۱) و (۲) از یکدیگر $\Rightarrow 2(x-y)=\lambda(y-x) \Rightarrow (y-x)(\lambda+2)=0 \Rightarrow y=x$ یا $\lambda=-2$

اگر $y=x$ از رابطه (۳) داریم $x^2+2x+4=0$ که چون $\Delta=4-16=-12<0$ پس فاقد جواب است. اگر $\lambda=-2$ با جایگذاری در رابطه (۱) داریم $x=-y$ و لذا از رابطه (۳) داریم $-x^2+4=0$ پس $x=\pm2$ و بنابراین $y=\mp2$ که با جایگذاری در $F(x,y)$ عدد ۹ برای کمترین مقدار F به‌دست می‌آید و لذا حداقل فاصله یعنی کمترین مقدار f برابر ۳ است.

مثال ۱۰: کمترین و بیشترین فاصله مبدأ مختصات از منحنی $x^2+xy+y^2=9$ چقدر است؟

۱) کمترین $\sqrt{3}$ و بیشترین $2\sqrt{3}$ ۲) کمترین $\sqrt{6}$ و بیشترین $3\sqrt{2}$ ۳) کمترین $3\sqrt{2}$ و بیشترین $6\sqrt{2}$ ۴) کمترین $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ و بیشترین $3\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۲» معادله داده شده در مختصات قطبی به‌صورت زیر در می‌آید:

$$r^2+r^2\sin\theta\cos\theta=9 \Rightarrow r^2=\frac{9}{1+\sin\theta\cos\theta}=\frac{9}{1+\frac{1}{2}\sin2\theta}=\frac{18}{2+\sin2\theta}$$

با توجه به اینکه فاصله از مبدأ در مختصات قطبی برابر r می‌باشد، پس لازم است مقادیر مینیمم و ماکزیمم تابع $r^2=\frac{18}{2+\sin2\theta}$ را به‌دست آوریم. برای به‌دست آوردن ماکزیمم r لازم است که مخرج کسر مینیمم شود یعنی $\sin2\theta=-1$ که در این‌صورت $\max(r^2)=\frac{18}{2-1}=18$ و یا $\max(r)=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ به‌دست می‌آید. به همین ترتیب r^2 وقتی مینیمم می‌شود که مخرج کسر ماکزیمم شود یعنی $\sin2\theta=1$ که در این صورت $\min(r^2)=\frac{18}{2+1}=6$ و یا $\min(r)=\sqrt{6}$ به‌دست می‌آید.

مثال ۱۱: ماکزیمم و مینیمم تابع $z=1+x+2y$ تحت قید $x^2+y^2=5$ کدامند؟

۱) $1+3\sqrt{5}$ و ۲ ۲) $5\sqrt{5}-1$ و -4 ۳) ۶ و -4 ۴) $2+2\sqrt{5}$ و ۶

پاسخ: گزینه «۳»

روش اول: قید داده شده را می‌توان به‌صورت پارامتری $\begin{cases}x=\sqrt{5}\cos t\\ y=\sqrt{5}\sin t\end{cases}$ نوشت. در این صورت تابع به شکل $z=1+\sqrt{5}\cos t+2\sqrt{5}\sin t$ در می‌آید. حال با توجه به رابطه $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\cos t+b\sin t\le\sqrt{a^2+b^2}$ نتیجه می‌شود:

$$\underbrace{-\sqrt{5+20}}_{-5}\le\sqrt{5}\cos t+2\sqrt{5}\sin t\le\underbrace{\sqrt{5+20}}_{5}\Rightarrow -4\le z\le6$$

روش دوم: در این مثال تابع $f(x,y)=1+x+2y$ و شرط (قید) $g(x,y)=x^2+y^2=5$ را داریم. از روش لاگرانژ به این صورت استفاده می‌کنیم:

$$\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}\Rightarrow\frac{1}{2x}=\frac{2}{2y}\Rightarrow y=2x$$

این نتیجه را در معادله‌ی قید قرار می‌دهیم:

$$x^2+y^2=5\Rightarrow x^2+4x^2=5\Rightarrow 5x^2=5\Rightarrow x=\pm1\Rightarrow y=\pm2$$

نقاط $(1,2)$ و $(-1,-2)$ را در f قرار می‌دهیم، خواهیم داشت:

$$\min f=f(-1,-2)=-4\ ,\quad \max f=6$$

مثال ۱۲: کمترین فاصله مبدأ مختصات تا خم $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}-1$

پاسخ: گزینه «۱»

روش اول: با توجه به رابطه $x^2+y^2=1$، می‌توانیم این شرط را به‌صورت $x=\cos t, y=\sin t$ بنویسیم و در این صورت z نیز بر حسب t به‌دست می‌آید: $z=1-x-y=1-\cos t-\sin t$

هدف یافتن مینیمم فاصله مبدأ تا خم می‌باشد. برای ساده‌تر شدن مینیمم مربع فاصله خم تا مبدأ یعنی $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ را به‌دست می‌آوریم. با جایگذاری z,y,x بر حسب پارامتری t در تابع f نتیجه می‌شود: $f(t)=\cos^2 t+\sin^2 t+(1-\sin t-\cos t)^2=1+(1-\sin t-\cos t)^2$

واضح است که کمترین مقدار f وقتی اتفاق می‌افتد که $(1-\sin t-\cos t)^2$ برابر صفر باشد (به ازای $t=0$، عبارت $(1-\sin t-\cos t)^2$ برابر صفر می‌شود)، پس مینیمم f برابر یک به‌دست می‌آید.

روش دوم: هدف یافتن کمترین مقدار تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ می‌باشد، طبق قید اول $x^2+y^2=1$ می‌باشد که در این صورت تابع f به‌صورت $f(x,y,z)=1+z^2$ در می‌آید که مینیمم آن وقتی رخ می‌دهد که $z=0$ باشد و در این صورت مینیمم f با توجه به قیود برابر ۱ است.

مثال ۱۳: ماکزیمم تابع $f(x,y)=xy-y^2$، روی قرص $x^2+y^2\le 1$، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به شرط $x^2+y^2\le 1$، قرار می‌دهیم $x=\cos t$ و $y=\sin t$. در این صورت تابع f به‌صورت زیر در می‌آید:

$$f(t)=\cos t\sin t-\sin^2 t \Rightarrow f'(t)=\cos 2t-\sin 2t=0$$

از معادله اخیر $t=\frac{\pi}{8}$ به‌دست می‌آید و در این صورت داریم:

$$f(t)=\sin t\cos t-\sin^2 t=\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1-\cos 2t}{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{8})=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

مثال ۱۴: بیشترین حجم مکعب مستطیلی که داخل یک کره به شعاع ۲ قرار می‌گیرد کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ ۲) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ ۳) $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ ۴) $\frac{8\sqrt{2}}{9}$

پاسخ: هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. (طراح سؤال فقط $\frac{1}{8}$ اول از مکعب را حساب کرده است.)

کره‌ی $x^2+y^2+z^2=4$ را در نظر بگیرید. فرض کنیم نقطه‌ی $A(x,y,z)$ در یک هشتم اول از فضای سه بعدی رأس آن مکعب مستطیل باشد. در این‌صورت حجم واقع در یک هشتم اول این مکعب برابر است با xyz پس حجم کامل مکعب با رابطه‌ی $V=8xyz$ به‌دست می‌آید. حالا می‌خواهیم بیشترین مقدار V را با قید $g: x^2+y^2+z^2=4$ به‌دست آوریم. از دستگاه لاگرانژ به این صورت استفاده می‌کنیم:

$$\frac{V_x}{g_x}=\frac{V_y}{g_y}=\frac{V_z}{g_z} \Rightarrow \frac{8yz}{2x}=\frac{8xz}{2y}=\frac{8xy}{2z} \Rightarrow \frac{yz}{x}=\frac{xz}{y}=\frac{xy}{z} \Rightarrow y^2z=x^2z\ ,\ z^2x=y^2x \Rightarrow y^2=x^2\ ,\ z^2=y^2 \Rightarrow y=\pm x\ ,\ z=\pm y$$

البته نقطه‌ی $A(x,y,z)$ در $\frac{1}{8}$ اول قرار دارد پس x، y و z مثبت هستند در نتیجه $y=x=z$ است. با جایگذاری در معادله‌ی کره داریم:

$$x^2+x^2+x^2=4 \Rightarrow x^2=\frac{4}{3} \Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

پس $x=y=z=\frac{2}{\sqrt{3}}$ و حجم مکعب حداکثر برابر است با:

$$V=8xyz=8(\frac{2}{\sqrt{3}})^3=\frac{64}{3\sqrt{3}}=\frac{64\sqrt{3}}{9}$$

توجه: به علت تقارن موجود در معادله‌ی کره و یکسان بودن توان x و y و z در فرمول $V=8xyz$ از همان اول مشخص بود که در حالت $z=y=x$ به بیشترین مقدار حجم خواهیم رسید.

مثال ۱۵: فاصله مینیمم مبدأ تا سطح $z=\sqrt{x^2-1}$ برابر است با: (عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» در واقع می‌خواهیم عبارت $d=f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ را تحت شرط $z=\sqrt{x^2-1}$ مینیمم کنیم. با توجه به شرط لازم $x\geq 1$ است، بنابراین مینیمم f در نقطه $(1,0,0)$ رخ می‌دهد، در نتیجه داریم: $\min(d)=f(1,0,0)=\sqrt{1+0+0}=1$

توجه کنید که برای حل این مسأله می‌توانستیم از روش ضرایب لاگرانژ نیز استفاده کنیم.

مثال ۱۶: به فرض اینکه تابع هزینه تولید برای یک واحد صنعتی به‌صورت $c=5x^2+2xy+3y^2+800$ است که در آن x و y و c به ترتیب میزان تولید کالای x، میزان تولید کالای y و میزان کل هزینه است. برای تولید جمعاً ۳۹ واحد از کالای x و y $(x+y=39)$ حداقل هزینه چقدر خواهد بود؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۸)

۱) $\bar{y}=17$, $\bar{x}=11$ ۲) $\bar{y}=23$, $\bar{x}=9$ ۳) $\bar{y}=24$, $\bar{x}=11$ ۴) $\bar{y}=26$, $\bar{x}=13$

پاسخ: گزینه «۴»

روش اول: می‌خواهیم تابع $C=5x^2+2xy+3y^2+800$ را تحت شرط $g=x+y-39=0$ مینیمم کنیم. از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$\vec{\nabla}C=(10x+2y,2x+6y)\quad,\quad \vec{\nabla}g=(1,1)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\nabla C=\lambda\nabla g\\ x+y-39=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10x+2y=\lambda\\ 2x+6y=\lambda\\ x+y-39=0\end{cases}$$

از حل دستگاه فوق $x=13$ و $y=26$ به‌دست می‌آید.

روش دوم: در بین گزینه‌ها، تنها گزینه‌ای که در شرط $x+y=39$ صدق می‌کند، گزینه (۴) است.

مثال ۱۷: کدام گزاره درمورد تابع دو متغیره f با ضابطه $f(x,y)=x\sin y$ درست است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) دارای نقطه زینی است اما مینیمم مطلق ندارد.
۲) نقطه زینی نداشته اما مینیمم مطلق دارد.
۳) دارای نقطه زینی است و ماکسیمم نسبی دارد.
۴) مینیمم نسبی ندارد ولی دارای ماکسیمم نسبی است.

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{cases}f_x=\sin y=0\Rightarrow y=k\pi\\ f_y=x\cos y=0\Rightarrow x=0\ \text{یا}\ y=k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow$$ نقاط $(0,k\pi)$ نقاط بحرانی تابع می‌باشند

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0-\cos^2 y=-\cos^2 y$$

چون $\Delta<0$، پس نقاط $(0,k\pi)$ نقاط زینی می‌باشند.

مثال ۱۸: مقدار q در تابع $q=K^{0/4}L^{0/5}$ با رعایت قید $3K+4L=108$ بهینه می‌گردد، مقدار L کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا قرار می‌دهیم $f=3k+4L-108=0$، بنابراین به روش ضرایب لاگرانژ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\vec{\nabla}q=\lambda\vec{\nabla}f\\ 3k+4L=108\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0/4k^{-0/6}L^{0/5}=3\lambda\\ 0/5k^{0/4}L^{-0/5}=4\lambda\\ 3k+4L=108\end{cases}$$

با تقسیم معادله‌ی اول بر معادله دوم در دستگاه فوق، به‌دست می‌آید $\frac{L}{k}=\frac{15}{16}$. با استفاده از این رابطه و معادله سوم $k=16$ و $L=15$ به‌دست می‌آید.

مثال ۱۹: در ورقه نازک فلزی با ناحیه $x^۲+y^۲\le ۹$، اندازه درجه حرارت در هر نقطه $M(x,y)$ به‌صورت $T=x^۲+۲y^۲-۴x$ است کمترین مقدار T کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۱- ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{cases}T_x=۲x-۴=۰\\T_y=۴y=۰\end{cases}\Rightarrow x=۲\ ,\ y=۰$$

بنابراین نقطه $(۲,۰)$ تنها نقطه بحرانی می‌باشد که در شرط موردنظر نیز صدق می‌کند. از طرفی داریم:

$$\Delta=T_{xx}T_{yy}-T_{xy}^۲=۲\times۴-۰=۸$$

چون $T_{xx}>۰$ و $\Delta>۰$، بنابراین $(۲,۰)$ نقطه مینیمم یا به عبارتی دارای کمترین درجه حرارت است.

$$T(۲,۰)=۴+۰-۸=-۴$$

مثال ۲۰: نقطه مینیمم تابع $f(x,y,z)=۴x^۲+y^۲+z^۲$ با شرط $۲x+۳y+z=۱۲$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $(\frac{۳۶}{۱۱},\frac{۶}{۱۱},\frac{۱۲}{۱۱})$ ۲) $(\frac{۶}{۱۱},\frac{۳۶}{۱۱},\frac{۱۲}{۱۱})$ ۳) $(\frac{۳۶}{۱۱},\frac{۱۲}{۱۱},\frac{۶}{۱۱})$ ۴) $(\frac{۱۲}{۱۱},\frac{۶}{۱۱},\frac{۳۶}{۱۱})$

پاسخ: گزینه «۲» از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}۲x+۳y+z=۱۲\\۸x=۲\lambda\\۲y=۳\lambda\\۲z=\lambda\end{cases}\Rightarrow \lambda=\frac{۲۴}{۱۱}\Rightarrow x=\frac{۶}{۱۱}\ ,\ y=\frac{۳۶}{۱۱}\ ,\ z=\frac{۱۲}{۱۱}$$

مثال ۲۱: در مورد تابع $F(x,y)=xy+Lnxy$ کدام گزینه صحیح است؟ (مکانیک ـ آزاد ۸۰)

۱) $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$ یک مینیمم نسبی تابع است.
۲) $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$ یک ماکزیمم نسبی تابع است.
۳) $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$ یک نقطه زینی است.
۴) $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$ تعریف نشده است.

پاسخ: هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\begin{cases}F_x=y+\frac{۱}{x}=۰\\F_y=x+\frac{۱}{y}=۰\end{cases}\Rightarrow$$

نقطه $(\frac{-۱}{۲},\frac{-۱}{۲})$ در معادلات روبرو صدق نمی‌کند، بنابراین نقطه بحرانی نمی‌باشد.

مثال ۲۲: نقطه بحرانی تابع $z=x+y$ با شرط $x>۰$، $y>۰$ و $x^۲+y^۲=۱$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۰)

۱) ماکزیمم ۲) مینیمم ۳) زینی ۴) با شرط مفروض فاقد نقطه بحرانی

پاسخ: گزینه «۱» شرط داده شده را می‌توان به‌صورت پارامتری روبرو نوشت:

$$x=\cos t\ ,\ y=\sin t\ ,\ ۰<t<\frac{\pi}{۲}$$

بنابراین تابع به‌صورت $z=\cos t+\sin t$ در می‌آید، که در نقطه $t=\frac{\pi}{۴}$ دارای ماکسیمم $\sqrt{۲}$ خواهد بود.

مثال ۲۳: در تابع $z=xy^۲-x^۲-y^۳+xy$ مبدأ مختصات: (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) ماکزیمم نسبی است. ۲) نقطه‌ی زینی است. ۳) مینیمم نسبی است. ۴) نقطه عادی است.

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases}z_x=y^۲-۲x+y=۰\\z_y=۲xy-۳y^۲+x=۰\end{cases}$$

واضح است که نقطه $(۰,۰)$ یکی از جوابهای دستگاه فوق می‌باشد، بنابراین $(۰,۰)$ یک نقطه بحرانی تابع می‌باشد.

$$\Delta=z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^۲=-۲\times(۲x-۶y)-(۲y+۱)^۲$$

در نقطه $(۰,۰)$، مقدار $\Delta<۰$، بنابراین $(۰,۰)$ یک نقطه زینی می‌باشد.

مثال ۲۴: نقطه (۱ و ۱) برای سطح به معادلهٔ $z = x^3 + y^3 - 3xy$ چگونه نقطه‌ای است؟ (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) ماکسیمم موضعی ۲) مینیمم موضعی ۳) زینی ۴) عادی

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{نقاط بحرانی} \quad (1,1),(0,0)$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36xy - 9$$

در نقطه (۱ , ۱)، $\Delta > 0$ و $f_{xx} > 0$ بنابراین نقطه (۱ و ۱) مینیمم موضعی است.

مثال ۲۵: کدامیک از نقاط زیر یک مینیمم نسبی تابع $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$ می‌باشد؟ (عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) $(-2,-4)$ ۲) $(4,2)$ ۳) $(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$ ۴) $(-\frac{2}{3},-\frac{4}{3})$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases} f_x = 2x - 4y = 0 \\ f_y = -4x + 3y^2 + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 3y^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق نقاط بحرانی $A(4,2)$ و $B(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$ به‌دست می‌آیند.

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 2\times 6y - (-4)^2 = 12y - 16$$

چون در نقطه A، $\Delta > 0$ و $f_{xx} > 0$ بنابراین A نقطه مینیمم می‌باشد.

مثال ۲۶: مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y + 1$ روی قرص $x^2 + y^2 \le 16$، کدامیک از مقادیر زیرند؟ (عمران ـ سراسری ۸۲)

۱) ۵۳ و ۱- ۲) ۴۹ و ۱۷ ۳) ۴۹ و ۱- ۴) ۵۳ و ۱۷

پاسخ: گزینه «۱» مقادیر ماکزیمم و مینیمم در نقاط بحرانی یا روی مرز به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} f_x = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f_y = 4y - 4 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

بنابراین $A(0,1)$ تنها نقطه بحرانی تابع می‌باشد.

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 6\times 4 - 0 = 24$$

چون $f_{xx} > 0$ و $\Delta > 0$، بنابراین A نقطه مینیمم تابع می‌باشد و $f(0,1) = -1$. در روی مرز ناحیه یعنی $x^2 + y^2 = 16$، تابع f به‌صورت زیر در می‌آید:

$$f(x,y) = 3(16 - y^2) + 2y^2 - 4y + 1 = -y^2 - 4y + 49 \Rightarrow f' = -2y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow y = -2 \,,\, x = \pm 2\sqrt{3} \Rightarrow \mathrm{Max}(f) = f(\pm 2\sqrt{3}, -2) = 53$$

مثال ۲۷: صفحه $x + y + z = 1$ استوانه $x^2 + y^2 = 2$ را در یک خم C قطع می‌کند. نقاط P و Q را روی C چنان بیابید که به ترتیب ارتفاع ماکسیمم و مینیمم را از صفحه xy داشته باشند. (MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) $Q = (\sqrt{2}, 0, 1-\sqrt{2}) \,,\, P = (0, \sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$

۲) $Q = (1,1,-1) \,,\, P = (-1,-1,3)$

۳) $Q = (-\sqrt{2}, 0, 1+\sqrt{2}) \,,\, P = (0, -\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$

۴) $Q = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}) \,,\, P = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2})$

پاسخ: گزینه «۲» در واقع می‌خواهیم مقادیر ماکسیمم و مینیمم $z = 1 - x - y$ را تحت قید $x^2 + y^2 = 2$ به‌دست آوریم. بنابراین از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ \vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (-1,-1) = \lambda(2x, 2y) \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق نقاط (۱ و ۱) و (۱- و ۱-) به عنوان نقاط بحرانی حاصل می‌شوند.

$$f(1,1) = -1 \,,\, f(-1,-1) = 3$$

مثال ۲۸: در صورتی‌که x و y و z مخالف صفر و $x + y + z = 1$ باشد، ماکزیمم xy^2z^3 کدام عدد است؟ (معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{32}$ ۲) $\frac{1}{36}$ ۳) $\frac{1}{628}$ ۴) $\frac{1}{432}$

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم وقتی $x + y + z$ برابر مقدار ثابتی باشد، عبارت $x^a y^b z^c$ وقتی ماکسیمم است که $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{6} \,,\, y = \frac{1}{3} \,,\, z = \frac{1}{2} \Rightarrow xy^2z^3 = \frac{1}{432}$$

مثال ۲۹: در مورد تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ کدام گزاره صحیح است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) اگر f در نقطه (x_0,y_0,z_0) دارای اکسترمم نسبی باشد آن‌گاه $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$

۲) اگر $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$، آن‌گاه مماس بر سطح f در نقطه (x_0,y_0,z_0) افقی است.

۳) اگر f در نقطه (x_0,y_0) مشتق‌پذیر و $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$ آن‌گاه مشتق سوئی f در نقطه (x_0,y_0) در هر جهتی صفر است.

۴) اگر f همه‌جا پیوسته و دارای دو مینیمم نسبی باشد، آن‌گاه f حداقل دارای یک ماکزیمم نسبی است.

پاسخ: گزینه «۳» اگر مشتقات جزئی برابر صفر باشند، بردار گرادیان برابر صفر است و بنابراین واضح است که مشتق سوئی نیز برابر صفر است.

اکنون سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه (۱): گزینه‌ی (۱) نادرست است برای مثال تابع $f(x,y,z)=|x|+|y|+|z|$ در نقطه‌ی $(0,0,0)$ دارای مینیمم نسبی است اما مشتق‌های جزئی آن در این نقطه صفر نمی‌شوند بلکه وجود ندارند.

بررسی گزینه (۲): گزینه‌ی (۲) نادرست است برای مثال تابع $f(x,y)=|x^3|+|y^3|$ را در نقطه‌ی $(0,0)$ در نظر بگیرید، طبق تعریف مشتق جزئی داریم:

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|^3}{\Delta x}=0$$

به همین ترتیب $f_y(0,0)=0$ اما تابع f در مبدأ مشتق‌پذیر نیست پس اصلاً صفحه‌ی مماس بر رویه f وجود ندارد.

بررسی گزینه (۴): گزینه‌ی (۴) نادرست است برای مثال تابع $f(x,y)=x^3+3xy-y^3$ فقط دارای ۳ نقطه‌ی بحرانی در $C(0,0)$، $B(1,-1)$ و $A(-1,1)$ که A و B نقاط مینیمم نسبی و C نقطه‌ی زینی است.

مثال ۳۰: تابع $f(x,y)=xy(4-x-y)$ مفروض است. کدامیک از عبارات زیر در رابطه با نقاط بحرانی این تابع صحیح است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۲)

۱) این تابع دارای سه نقطه زین اسبی و یک نقطه ماکزیمم است.

۲) این تابع دارای یک نقطه زین اسبی و یک نقطه ماکزیمم است.

۳) این تابع دارای سه نقطه زین اسبی و یک نقطه مینیمم است.

۴) این تابع دارای دو نقطه زین اسبی و یک نقطه ماکزیمم و یک نقطه مینیمم است.

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{cases}f_x=4y-2xy-y^2=0\\ f_y=4x-x^2-2xy=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y(4-2x-y)=0\\ x(4-x-2y)=0\end{cases}$$

که از معادله فوق نقاط بحرانی $A(0,0)$، $B(0,4)$، $C(4,0)$ و $D(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ به‌دست می‌آیند. حال به بررسی نوع نقاط بحرانی می‌پردازیم.

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=(-2y)\times(-2x)-(4-2x-2y)^2=4xy-(4-2x-2y)^2$$

در نقاط A، B، C مقدار $\Delta<0$، بنابراین نقاط A، B، C زینی هستند ولی در نقطه $(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$، مقدار $\Delta>0$ و $f_{xx}<0$، بنابراین D یک نقطه ماکسیمم می‌باشد.

مثال ۳۱: کوچکترین و بزرگترین مقدار تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ بر قرص بسته، $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\le 9$ کدامیک از مقادیر زیرند: (عمران ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ و ۲۵ ۲) ۰ و ۱۶ ۳) ۰ و ۱۴ ۴) ۰ و ۳۶

پاسخ: گزینه «۱» تنها نقطه‌ی بحرانی f، درون این قرص بسته، نقطه‌ی $(0,0)$ است. در واقع از حل دستگاه $\begin{cases}f_x=2x=0\\ f_y=2y=0\end{cases}$ نقطه‌ی $(0,0)$ به‌دست می‌آید و در این نقطه $f(0,0)=0$ است. واضح است که در این نقطه، کمترین مقدار $f(x,y)=x^2+y^2$ به‌دست می‌آید. برای تعیین بزرگترین مقدار f از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. می‌خواهیم تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ را تحت قید $g(x,y)=(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9$ ماکسیمم کنیم.

$$\begin{cases}(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9\\ \nabla f=\lambda\nabla g\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9\\ 2x=2\lambda(x-\sqrt{2})\\ 2y=2\lambda(y-\sqrt{2})\end{cases}\Rightarrow x=y=\frac{\sqrt{2}\lambda}{\lambda-1}$$

با جایگزینی x و y در شرط g نتیجه می‌شود، $\lambda=\frac{5}{3}$ و بنابراین $x=y=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

$$f(\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2})=\frac{25}{2}+\frac{25}{2}=25$$

مثال ۳۲: ماکزیمم عبارت $2x+y$ در صورتی که $x+y\le 4$ و $-x+y\ge -2$ باشد چیست؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۳)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

پاسخ: گزینه «۳» با ضرب کردن شرط دوم در یک علامت منفی، آن را می‌توان به‌صورت مقابل نوشت:

$$\begin{cases} x+y\le 4 \\ x-y\le 2 \end{cases} \Rightarrow 2x\le 6 \Rightarrow x\le 3$$

پس ماکسیمم مقدار برای x، که در هر دو شرط صدق کند برابر ۳ است و با توجه به شرط $x+y\le 4$، می‌توان نتیجه گرفت ماکسیمم مقدار برای y برابر ۱ است. پس ماکسیمم $2x+y$ برابر ۷ خواهد بود.

مثال ۳۳: اگر $z=2x+y^2+1$ باشد، کمترین مقدار $x-y+z^2$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $-\frac{1}{16}$ ۴) $-\frac{1}{32}$

پاسخ: گزینه «۳» با جایگزینی z از رابطه داده شده به‌دست می‌آید:

$$f(x,y)=x-y+(2x+y^2+1)^2$$

$$\begin{cases} f_x=1+4(2x+y^2+1)=0 \\ f_y=-1+4y(2x+y^2+1)=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{-9}{8}\ ,\ y=-1$$

بنابراین نقطه $A(\frac{-9}{8},-1)$ یک نقطه بحرانی تابع می‌باشد.

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=8\times(8x+12y^2+4)-64y^2$$

چون در نقطه A، مقدار $\Delta>0$ و $f_{xx}>0$، بنابراین A نقطه مینیمم f می‌باشد و مقدار f در آن برابر $\frac{-1}{16}$ می‌باشد.

مثال ۳۴: نقطه اکسترمم $f(x,y)=x^3-y^3+3xy$ چگونه است؟ (معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) (۱ و ۱-) ماکسیمم نسبی ۲) (۱- و ۱) مینیمم نسبی ۳) (۱ و ۱-) مینیمم نسبی ۴) (۱- و ۱) ماکسیمم نسبی

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases} f_x=3x^2+3y=0 \\ f_y=-3y^2+3x=0 \end{cases} \Rightarrow x^4=x \Rightarrow x=0\ ,\ x=1$$

به ازای $x=0$، مقدار $y=0$ و به ازای $x=1$، $y=-1$ خواهد بود. بنابراین نقاط بحرانی f عبارتند از (۰,۰) و (۱ , ۱-).

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=6x\times(-6y)-9=-36xy-9$$

در نقطه $(1,-1)$، $\Delta>0$ و $f_{xx}>0$ بنابراین نقطه $(1,-1)$ مینیمم نسبی است.

مثال ۳۵: اگر $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$، شرط لازم و کافی برای آنکه $f(0,0)$ ماکسیمم موضعی باشد کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $ac-b^2>0\ ,\ a<0$ ۲) $ac-b^2<0\ ,\ a<0$ ۳) $ac-b^2>0\ ,\ a>0$ ۴) $ac-b^2>0\ ,\ a>0$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$f_x=2ax+2by\ ,\ f_y=2bx+2cy\ ,\ f_{xx}=2a\ ,\ f_{yy}=2c\ ,\ f_{xy}=2b$$

بنابراین داریم:

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=2a\times 2c-4b^2=4(ac-b^2)$$

برای ماکسیمم بودن نقطه بحرانی لازم است $f_{xx}<0$ و $\Delta>0$ باشد یعنی $a<0$ و $ac-b^2>0$.

مثال ۳۶: اکسترمم‌های تابع $w=f(x,y,z)$ با شرط $\begin{cases} H(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ جواب کدام معادله نیستند؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\vec{\nabla}H.(\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}G)=0$ ۲) $\vec{\nabla}f.(\vec{\nabla}H\times\vec{\nabla}G)=0$ ۳) $\vec{\nabla}G.(\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}H)=0$ ۴) $\vec{\nabla}f-\lambda(\vec{\nabla}H\times\vec{\nabla}G)=0$

پاسخ: گزینه «۴» طبق روش ضرایب لاگرانژ، اکسترمم تابع f تحت دو شرط G و H وقتی اتفاق می‌افتد که $\vec{\nabla}f=\lambda\vec{\nabla}G+\mu\vec{\nabla}H$. و این رابطه یعنی $\vec{\nabla}f$ در صفحه دو بردار ∇G و ∇H قرار دارد (سه بردار گرادیان هم صفحه‌اند) و در نتیجه هر سه رابطه ذکر شده در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) صحیح هستند.

مثال ۳۷: مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x,y)=2xy$ بر روی قرص بسته $x^2+y^2\le 4$ برابر است با: (هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) ۸ و ۰ ۲) ۲+ و ۲- ۳) ۴+ و ۴- ۴) ۸+ و ۸-

پاسخ: گزینه «۳» مقادیر ماکسیمم و مینیمم f روی مرز و یا نقاط بحرانی رخ می‌دهد. مرز ناحیه داده شده را می‌توان به‌صورت پارامتری زیر نوشت:

$$x=2\cos t\ ,\ y=2\sin t \qquad 0\le t\le 2\pi$$

بنابراین در روی مرز، f به‌صورت $f(t)=4\sin 2t$ در می‌آید که ماکسیمم آن برابر ۴ و مینیمم آن ۴- است. از طرفی نقطه بحرانی $f(x,y)=2xy$، نقطه (۰,۰) می‌باشد و در این نقطه $f(0,0)=0$ بنابراین همان مقادیر ۴- و ۴ به ترتیب مینیمم و ماکسیمم f می‌باشد.

مثال ۳۸: اگر $f(x,y)=xe^{-(x+y^{۲})}+ye^{-y^{۲}-۱}$ باشد، حداکثر مقدار f به ازای چه مقدار y به‌دست می‌آید؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{-۱\pm\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{-۱\pm\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۴}$ ۴) $\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases} f_x=e^{-(x+y^{۲})}-xe^{-(x+y^{۲})}=e^{-(x+y^{۲})}(۱-x)=۰ \Rightarrow x=۱ \\ f_y=-۲xye^{-(x+y^{۲})}+e^{-y^{۲}-۱}-۲y^{۲}e^{-y^{۲}-۱}=۰ \end{cases}$$

با جایگزینی $x=۱$ در معادله دوم نتیجه می‌شود:

$$-۲ye^{-(۱+y^{۲})}+e^{-(۱+y^{۲})}-۲y^{۲}e^{-(۱+y^{۲})}=۰ \Rightarrow -۲y+۱-۲y^{۲}=۰ \Rightarrow y=\frac{-۱\pm\sqrt{۳}}{۲}$$

مثال ۳۹: ماکسیمم تابع $f(x,y)=۳x-۲y+۱$ با توجه به شرط $۹x^{۲}+۴y^{۲}=۱۸$ در چه نقاطی رخ می‌دهد و چقدر است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۴)

۱) $۱,\left(۱,\frac{۳}{۲}\right)$ ۲) $-۵,\left(-۱,-\frac{۳}{۲}\right)$ ۳) $۷,\left(\frac{۳}{۲},-۱\right)$ ۴) $۷,\left(۱,-\frac{۳}{۲}\right)$

پاسخ: گزینه «۴» برای تابع $f(x,y)=۳x-۲y+۱$ با قید $g(x,y)=۹x^{۲}+۴y^{۲}=۱۸$. از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۹x^{۲}+۴y^{۲}=۱۸ \\ \vec{\nabla}f=\lambda\vec{\nabla}g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۹x^{۲}+۴y^{۲}=۱۸ \\ (۳,-۲)=\lambda(۱۸x,۸y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۹x^{۲}+۴y^{۲}=۱۸ \\ ۶\lambda x=۱ \\ ۴\lambda y=-۱ \end{cases} \Rightarrow x=۱\ ,\ y=\frac{-۳}{۲}\ ,\ \lambda=\frac{۱}{۶}$$

پس نقطه ماکسیمم نقطه $(۱,\frac{-۳}{۲})$ می‌باشد و در این نقطه مقدار تابع f برابر ۷ می‌باشد.

مثال ۴۰: ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y)=x^{۲}-y^{۲}$ روی ناحیه $D=\left\{(x,y)\mid x^{۲}+y^{۲}\le ۴\right\}$ کدامند و در چه نقاطی رخ می‌دهد؟

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۴)

۱) $۰,۴$ و $(۲,۰)$ و $(۰,۰)$ ۲) $-۴,۰$ و $(۰,۰)$ و $(-۲,۰)$ ۳) $-۴,۴$ و $(\pm۲,۰)$ و $(۰,\pm۲)$ ۴) $۴,۴$ و $(۲,۰)$ و $(-۲,۰)$

پاسخ: گزینه «۳»

روش اول: واضح است که در ناحیه D تابع f می‌تواند مثبت یا منفی باشد، پس با توجه به مقادیر داده شده در گزینه‌ها فقط گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد.

روش دوم: باید نقاط مرزی و بحرانی درون ناحیه D را بررسی کنیم.

$$\begin{cases} fx=۲x=۰ \\ fy=۲y=۰ \end{cases} \Rightarrow x=y=۰\ ,\ f(۰,۰)=۰$$

با توجه به اینکه معادله مرز $x^{۲}+y^{۲}=۴$ می‌باشد در نتیجه داریم: $y^{۲}=۴-x^{۲}$، با جایگذاری $y^{۲}$ در تابع f داریم:

$$f=x^{۲}-(۴-x^{۲})=۲x^{۲}-۴\ ,\ -۲\le x\le ۲ \quad \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow f=-۴ \\ x=\pm۲ \Rightarrow f=+۴ \end{cases}$$

مثال ۴۱: مینیمم عبارت $x^{۲}+۲y^{۲}+۲xy+۲x+۳y$ با قید $x^{۲}-y=۱$ در کدام نقطه است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $(۰,-۱)$ ۲) $(-۱,۰)$ ۳) $(\frac{-۳}{۴},\frac{-۷}{۱۶})$ ۴) $(-\frac{۳}{۴},\frac{۷}{۱۶})$

پاسخ: گزینه «۳» می‌توان از روش ضرایب لاگرانژ مسأله را حل کرد. ولی جایگزینی y برحسب x در عبارت داده شده سریعتر به جواب می‌رسد.

$$f(x)=x^{۲}+۲(x^{۲}-۱)^{۲}+۲x(x^{۲}-۱)+۲x+۳(x^{۲}-۱)=۲(x^{۲}-۱)^{۲}+۲x^{۳}+۴x^{۲}-۳$$

$$f'(x)=۸x(x^{۲}-۱)+۶x^{۲}+۸x=۸x^{۳}+۶x^{۲}=x^{۲}(۸x+۶)$$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow x^{۲}(۸x+۶)=۰ \Rightarrow x=۰ \ \text{ریشه مضاعف}\ ,\ x=\frac{-۳}{۴}$$

بنابراین نقطه $(\frac{-۳}{۴},\frac{-۷}{۱۶})$ نقطه اکسترمم تابع می‌باشد و چون $f''(\frac{-۳}{۴})>۰$، پس $(\frac{-۳}{۴},\frac{-۷}{۱۶})$ نقطه مینیمم تابع می‌باشد.

مثال ۴۲: کمترین فاصله نقاط رویه $xyz=1$ از مبدأ مختصات، کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۴)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» می‌خواهیم فاصله یعنی $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ را تحت شرط $xyz=1$ مینیمم کنیم. یا به طور معادل می‌خواهیم $d^2=x^2+y^2+z^2$ را تحت شرط $x^2y^2z^2=1$ مینیمم کنیم. از طرفی می‌دانیم هرگاه حاصل‌ضرب چند متغیر ثابت باشد، مجموع آن‌ها وقتی مینیمم است که تمام متغیرها با هم برابر باشند یعنی $x^2=y^2=z^2$.

در نتیجه داریم: $x^2.x^2.x^2=1 \Rightarrow x=\pm1\,,\ y=\pm1\,,\ z=\pm1 \Rightarrow \min(d)=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

مثال ۴۳: مقدار ماکزیمم موضعی (نسبی) تابع $f(x,y)=xy-x^2-y^2-2x-2y+4$ را در صورت وجود بیابید. (معدن ـ سراسری ۸۴)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینه «۳»

$$\begin{cases} f_x=y-2x-2=0 \\ f_y=x-2y-2=0 \end{cases} \Rightarrow x=-2\ ,\ y=-2 \Rightarrow$$ بنابراین نقطه (۲- و ۲-) تنها نقطه بحرانی تابع می‌باشد.

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=(-2)(-2)-1^2=3$$

$$f(-2,-2)=4-4-4+4+4+4=8$$

چون $\Delta>0$ و $f_{xx}<0$، بنابراین نقطه (۲- و ۲-) نقطه ماکزیمم می‌باشد.

مثال ۴۴: نزدیکترین نقطه منحنی $x^2+y^2=1$ ، $x^2-xy+y^2-z^2=1$ به مبدأ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۵)

۱) $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ ۲) $(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ ۳) $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ ۴) $(0,\pm1,0)\,,\,(\pm1,0,0)$

پاسخ: گزینه «۴»

روش اول: هیچ‌کدام از گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) روی منحنی داده شده قرار ندارند. پس فقط گزینه (۴) می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

روش دوم: یا باید مینیمم $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ را تحت دو قید $x^2+y^2=1$ و $x^2-xy+y^2-z^2=1$ به‌دست می‌آوریم.

با توجه به قید $x^2+y^2=1$، تابع f به‌صورت $f(x,y,z)=1+z^2$ در می‌آید که واضح است مینیمم تابع f وقتی حاصل می‌شود که $z^2=0$ یعنی $z=0$ باشد. حال توجه کنید که اگر قید $x^2+y^2=1$ را در قید دوم جایگزین کنیم نتیجه می‌شود که $xy+z^2=0$، و چون $z=0$ به‌دست آمده پس $xy=0$ حاصل می‌شود و در این صورت $x=0$ یا $y=0$ به‌دست می‌آید، پس نقاط موردنظر به‌صورت $(\pm1,0,0)$ و $(0,\pm1,0)$ هستند.

مثال ۴۵: کدام حکم در مورد نقاط $M_1(0,-4,0)$ و $M_2(-1,-2,-4)$ متعلق به سطح $z=4xy^2+xy^3+x^2y^2$ درست است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) M_2 نقطه‌ی مینیمم است و M_1 نه ماکزیمم است و نه مینیمم. ۲) M_1 و M_2 نقطه‌های مینیمم هستند.

۳) M_1 و M_2 نقطه‌های ماکزیمم هستند. ۴) هیچ‌کدام از نقاط M_1 و M_2 اکسترمم نیست.

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{cases} f_x=4y^2+y^3+2xy^2 \\ f_y=8xy+3xy^2+2x^2y \end{cases}$$

در هر دو نقطه M_1 و M_2، مقادیر f_x و f_y برابر صفرند، پس این نقاط، نقاط بحرانی تابع f می‌باشند.

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=2y^2\times(8x+6xy+2x^2)-(8y+3y^2+4xy)^2$$

در نقطه M_1، مقدار $\Delta<0$ است، پس M_1 نقطه زینی است. در نقطه M_2، $\Delta>0$ و $f_{xx}>0$ پس M_2 نقطه مینیمم است.

مثال ۴۶: می‌خواهیم جعبه مکعب مستطیل شکل در بازی با حجم ثابت ۱۶ بسازیم. ابعاد جعبه را طوری تعیین می‌کنیم تا مساحت کل حداقل شود. مساحت جعبه کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $8\sqrt[3]{2}$ ۲) $16\sqrt[3]{2}$ ۳) $24\sqrt[3]{2}$ ۴) $64\sqrt[3]{2}$

پاسخ: گزینه «۳» طول، عرض و ارتفاع مستطیل را x، y و z فرض می‌کنیم. در این صورت حجم مکعب مستطیل $f(x,y,z)=xyz=16$ و مساحت جانبی مکعب مستطیل در باز $g(x,y,z)=xy+2xz+2yz$ است. $xyz=16 \Rightarrow x^2y^2z^2=2^8 \Rightarrow xy(2xz)(2yz)=2^{10}$

می‌دانیم اگر حاصل‌ضرب چند متغیر مقداری ثابت باشد، حاصل جمع آن‌ها وقتی مینیمم است که متغیرها با هم برابر باشند، یعنی داریم:

$$xy=2xz=2yz \Rightarrow y=2z\ ,\ x=2z\ ,\ x=y$$

از روابط فوق و $xyz=16$ نتیجه می‌شود:

$$4z^3=16 \Rightarrow z=\sqrt[3]{4}\ ,\ y=2\sqrt[3]{4}\ ,\ x=2\sqrt[3]{4} \Rightarrow S_{\text{جانبی}}=xy+2xz+2yz=4\sqrt[3]{16}+4\sqrt[3]{16}+4\sqrt[3]{16}=24\sqrt[3]{2}$$

مثال ۴۷: صفحه‌ای از نقطه A(۲,۳,۴) گذشته و حجم محصور بین آن و صفحات مختصات مینیمم شده است، این حجم کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) ۱۰۴ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۱۰ ۴) ۱۱۲

پاسخ: گزینه «۲» صفحه را به‌صورت $ax+by+cz=d$ فرض می‌کنیم، چون نقطه $A(2,3,4)$ روی صفحه قرار دارد پس $2a+3b+4c=d$، حجم محصور بین این صفحه و صفحات مختصات یک هرم تشکیل می‌دهد. نقاط تقاطع این صفحه با محورهای مختصات به ترتیب $\frac{d}{a},\frac{d}{b},\frac{d}{c}$ می‌باشد پس حجم موردنظر برابر $\frac{1}{6}\cdot\frac{d}{a}\cdot\frac{d}{b}\cdot\frac{d}{c}$ یعنی $\frac{d^3}{6abc}$ می‌باشد. بنابراین هدف مینیمم کردن $V=\frac{d^3}{6abc}$ تحت قید $2a+3b+4c=d$ خواهد بود. که با روش ضرایب لاگرانژ می‌توان به نتیجه رسید. ولی راه حل ساده‌تر آن است که ابتدا مسأله را به شکل زیر بنویسیم:

$$\begin{cases}\frac{2a}{d}+\frac{3b}{d}+\frac{4c}{d}=1\\ V=\frac{d^3}{6abc}\end{cases}$$

حال با توجه به اینکه مجموع سه متغیر $\frac{2a}{d},\frac{3b}{d},\frac{4c}{d}$ ثابت است حاصل‌ضرب آن‌ها یعنی $\frac{24abc}{d^3}$ وقتی ماکسیمم می‌شود که متغیرها با هم برابر باشند و لذا عکس آن یعنی $\frac{d^3}{24abc}$ مینیمم می‌شود.

$$\Rightarrow \frac{2a}{d}=\frac{3b}{d}=\frac{4c}{d} \Rightarrow a=\frac{d}{6}\ ,\ b=\frac{d}{9}\ ,\ c=\frac{d}{12} \Rightarrow V_{min}=108$$

مثال ۴۸: نقطه (۲,۳−) و مقدار ۱۳− برای تابع $f(x,y)=x^2+4x+y^2-6y$ چه نوع نقطه و مقداری هستند؟ (آمار ـ سراسری ۸۶)

۱) نقطه‌ی ماکسیمم و مقدار ماکسیمم نسبی ۲) نقطه‌ی مینیمم نسبی و مقدار مینیمم نسبی

۳) نقطه زینی و مقدار معمولی ۴) نقطه غیر بحرانی و مقدار معمولی

پاسخ: گزینه «۲»

$$f(x,y)=x^2+4x+y^2-6y$$

$$\begin{cases}f_x=2x+4=0 \Rightarrow x=-2\\ f_y=2y-6=0 \Rightarrow y=3\end{cases} \Rightarrow P(-2,3)\ \text{نقطه بحرانی}$$

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=2\times 2-0^2=4$$

چون $\Delta>0$ و $f_{xx}>0$، پس نقطه بحرانی، نقطه مینیمم می‌باشد.

مثال ۴۹: ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y)=x^2-y^2$ نسبت به قید $x^2+y^2=1$ کدام‌اند؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۶)

۱) ۰,۱− ۲) ۱,۱− ۳) ۰,۱ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» واضح است که ماکسیمم به ازای $x=1$ و $y=0$ به‌دست می‌آید و مقدار آن $f(1,0)=1$ است و همچنین مینیمم به ازای $x=0$ و $y=1$ حاصل می‌شود و مقدار مینیمم برابر $f(0,1)=-1$ است.

مثال ۵۰: ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y)=4x^2+2xy-3y^2$ بر روی مربع $0\le x\le 1$، $0\le y\le 1$ به ترتیب کدامند؟ (آمار ـ سراسری ۸۷)

۱) $0,0$ ۲) $0,4$ ۳) $-3,\frac{13}{3}$ ۴) $-3,3$

پاسخ: گزینه «۳» نقاط مرزی مربع نقاط $A(0,0)$، $B(1,0)$ و $C(0,1)$ و $D(1,1)$ می‌باشند که با جایگزین این نقاط در f، $f(A)=0$ و $f(B)=4$ و $f(C)=-3$ و $f(D)=3$ به‌دست می‌آید. حال لازم است مقدار f را روی اضلاع مربع نیز پیدا کنیم:

$$C_1=x=0 \quad 0\le y\le 1 \quad f_{c_1}(y)=-3y^2 \quad f'_{c_1}=-6y=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow f(0,0)=0$$

$$C_2=x=1 \quad 0\le y\le 1 \quad f_{c_2}(y)=4+2y-3y^2 \quad f'_{c_2}=2-6y=0 \Rightarrow y=\frac{1}{3} \Rightarrow f(1,\frac{1}{3})=\frac{13}{3}$$

$$C_3=y=0 \quad 0\le x\le 1 \quad f_{c_3}(y)=4x^2 \quad f'_{c_3}=8x \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0,0)=0$$

$$C_4=y=1 \quad 0\le x\le 1 \quad f_{c_4}(y)=4x^2+2x-3 \quad f'_{c_4}=8x+2 \Rightarrow x=\frac{-1}{4}\ \text{غ‌ق‌ق}$$

بنابراین ماکسیمم مطلق f برابر $\frac{13}{3}$ و مینیمم مطلق f برابر -3 می‌باشد.

مثال ۵۱: مقدار مینیمم تابع $f(x,y)=x^2-4x+y^2-y-xy$ برابر است با: (نفت ـ سراسری ۸۷)

۱) -7 ۲) 2 ۳) 7 ۴) -2

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-y-4=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2y-x-1=0\end{cases} \Rightarrow x=3\,,\ y=2 \Rightarrow f(3,2)=-7$$

مثال ۵۲: بیشترین مقدار تابع $z=x^2+2xy$ با شرط $2x+y=6$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۸)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه «۳» از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$\left|\begin{array}{l}2x+y=6\\ \dfrac{2x+2y}{2}=\dfrac{2x}{1}\end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l}2x+y=6\\ y=x\end{array}\right. \Rightarrow x=y=2 \Rightarrow z=12$$

مثال ۵۳: تابع $z=12xy-3y^2-x^2$ مفروض است. اگر داشته باشیم $x+y\le 16$، ماکزیمم این تابع چقدر است؟ (معدن ـ سراسری ۸۸)

۱) ۱۰۸ ۲) ۴۰۵ ۳) ۵۲۸ ۴) ۶۵۲

پاسخ: گزینه «۳» در واقع می‌خواهیم تابع $z=12xy-3y^2-x^2$ را تحت قید $x+y=16$ ماکزیمم کنیم. بدین منظور از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$\left|\begin{array}{l}x+y=16\\ 12y-2x=12x-6y\end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l}x+y=16\\ 9y=7x\end{array}\right. \Rightarrow x=9\,,\ y=7$$

با جایگزینی مقادیر به‌دست آمده در بالا در تابع z، مقدار تابع برابر ۵۲۸ به‌دست می‌آید.

مثال ۵۴: کدام گزینه برای تابع $f(x,y)=4xy-x^4-y^4$ درست است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) $(0,0)$ یک نقطه زینی و $(1,1)$ ماکسیمم موضعی است.
۲) $(1,1)$ یک نقطه زینی و $(0,0)$ مینیمم موضعی است.
۳) $(0,0)$ مینیمم موضعی و $(1,1)$ ماکسیمم موضعی است.
۴) $(1,1)$ مینیمم موضعی و $(0,0)$ یک نقطه زینی است.

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا نقاط بحرانی f را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}f_x=4y-4x^3=0\\ f_y=4x-4y^3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=x^3\\ x=y^3\end{cases} \Rightarrow$$ نقاط $(0,0)$ و $(1,1)$ و $(-1,-1)$ بحرانی هستند.

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=(-12x^2)(-12y^2)-4^2=144x^2y^2-16$$

در نقطه بحرانی $A(0,0)$، مقدار Δ منفی می‌باشد، پس A، نقطه زینی است.

و در نقطه $B(1,1)$ مقدار Δ مثبت و f_{xx} منفی است، پس B نقطه ماکزیمم موضعی است.

مثال ۵۵: مقدار تابع $f(x,y)=2x^3-6xy+3y^2$ در نقطه مینیمم نسبی آن کدام است؟ (صنایع‌غذایی ـ سراسری ۸۹)

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) -2 ۳) -1 ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۳» از معادله دوم $y=x$ به‌دست می‌آید که با جایگذاری در معادله اول به $x^2=x$ می‌رسیم که از آن $x=0$ و $x=1$ حاصل می‌شود بنابراین نقاط $A(0,0)$ و $B(1,1)$ نقاط بحرانی هستند.

$$\begin{cases} f_x=6x^2-6y=0 \Rightarrow 6x^2=6y \\ f_y=-6x+6y=0 \Rightarrow 6x=6y \Rightarrow x=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x,y)=(0,0) \\ (x,y)=(1,1) \end{cases}$$

$$f_{xx}=12x\ ,\ f_{yy}=6\ ,\ f_{xy}=-6$$

$(x,y)=(0,0) \Rightarrow \Delta=0-(-6)^2<0 \Rightarrow$ نقطه $(0,0)$ زینی است

$(x,y)=(1,1) \Rightarrow \Delta=(12)(6)-(36)>0, f_{xx}(1,1)=12>0 \Rightarrow$ نقطه $(1,1)$، مینیمم نسبی است. $\Rightarrow f(1,1)=2-6+3=-1$

مثال ۵۶: نقاط بحرانی تابع با ضابطه $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$ چگونه‌اند؟ (MBA ـ سراسری ۹۰)

۱) زینی ـ زینی ۲) مینیمم ـ زینی ۳) مینیمم ـ ماکسیمم ۴) ماکسیمم ـ زینی

پاسخ: گزینه «۲» با در نظر گرفتن $z(x,y)=f(x,y)=3x^2-x^3+3y^2+4y$، ابتدا نقاط بحرانی را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6x-3x^2=f_x\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=6y+4=f_y$$

حال برای نقاط بحرانی معادله $\vec{\nabla}F=0$ را حل می‌کنیم که از حل آن به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x=0\ ,\ y=-\frac{2}{3} \\ x=2\ ,\ y=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

پس $(0,-\frac{2}{3})$ ، $(2,-\frac{2}{3})$ نقاط بحرانی‌اند. طبق تعریف نوع نقاط بحرانی را مشخص می‌کنیم.

$$f_{xy}=0\quad ,\quad f_{xx}=6-6x=6\ ,\ f_{yy}=6 \Rightarrow \Delta=6(6-6x)-0=36(1-x)$$

اگر $\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$ را در نظر بگیریم، برای $x=0$, $\Delta>0$ و $f_{xx}>0$ لذا $(0,-\frac{2}{3})$ نقطه مینیمم نسبی و برای $x=2$، $\Delta<0$ نقطه $(2,-\frac{2}{3})$ یک نقطه زینی است.

مثال ۵۷: ماکزیمم و مینیمم مقید تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ نسبت به شرط $x^2-2x+y^2-4y=0$، کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\text{Max } f=20, \text{Min } f=0$ ۲) $\text{Max } f=0, \text{Min } f=-10$ ۳) $\text{Max } f=10, \text{Min } f=0$ ۴) $\text{Max } f=0, \text{Min } f=-20$

پاسخ: گزینه «۱» برای یافتن اکسترمم مطلق تابع $f(x,y)$ نسبت به شرط $g(x,y)=0$ طبق روش ضرایب لاگرانژ داریم:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}f(x,y)=\lambda\vec{\nabla}g(x,y) \\ g(x,y)=0 \end{cases}\ ,\quad f(x,y)=x^2+y^2\ ,\ g(x,y)=x^2-2x+y^2-4y$$

$$\begin{cases} 2x=\lambda(2x-2) \Rightarrow x=\lambda x-\lambda \Rightarrow \lambda=x(\lambda-1) \Rightarrow x=\frac{\lambda}{\lambda-1} & (1) \\ 2y=\lambda(2y-4) \Rightarrow y=\lambda y-2\lambda \Rightarrow 2\lambda=y(\lambda-1) \Rightarrow y=\frac{2\lambda}{\lambda-1} & (2) \\ g(x,y)=0 \Rightarrow x^2-2x+y^2-4y=0 & (3) \end{cases}$$

روابط (۱) و (۲) را در رابطه (۳) جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{\lambda^2}{(\lambda-1)^2}-2(\frac{\lambda}{\lambda-1})+\frac{4\lambda^2}{(\lambda-1)^2}-4(\frac{2\lambda}{\lambda-1})=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-2(\lambda-1)+4\lambda-8(\lambda-1))=\lambda(10-5\lambda)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ \lambda=2 \end{cases}$$

بنابراین نقاط بحرانی تابع $f(x,y)$ تحت قید $g(x,y)$ عبارتند از:

$$\begin{cases} \lambda=0 \Rightarrow x=0\ ,\ y=0 \Rightarrow (0,0) \\ \lambda=2 \Rightarrow x=2\ ,\ y=4 \Rightarrow (2,4) \end{cases}$$

حال نقاط $(0,0)$ و $(2,4)$ را در تابع $f(x,y)$ جایگذاری می‌کنیم.

$$\begin{cases} f(0,0)=0+0=0 \\ f(2,4)=4+16=20 \end{cases} \Rightarrow \min f=0\ ,\ \max f=20$$

مثال ۵۸: اکسترمم‌های تابع $f(x,y)=x^2-y^2$ با شرط $xy=1$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) ۰ و ۱−　　۲) ۱ و ۰　　۳) ۱ و ۱−　　۴) اکسترمم وجود ندارد.

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا با استفاده از شرط داده شده متغیر y را بر حسب متغیر x می‌یابیم.

$$y=\frac{1}{x}$$

با جایگذاری رابطه فوق در ضابطه تابع f آن را به یک تابع یک متغیره تبدیل می‌کنیم.

$$f(x,\frac{1}{x})=x^2-\frac{1}{x^2} \Rightarrow k(x)=\frac{x^4-1}{x^2}$$

حال برای یافتن نقاط اکسترمم تابع $k(x)$ همانند توابع یک متغیره عمل می‌کنیم.

$$k'(x)=\frac{4x^3\times x^2-2x(x^4-1)}{x^4}=\frac{4x^4-2x^4+2}{x^3}=\frac{2x^4+2}{x^3}\neq 0$$

رابطه فوق هیچگاه صفر نمی‌شود، بنابراین تابع $k(x)$ و در نتیجه تابع دو متغیره $f(x,y)$ فاقد نقطه بحرانی است، بنابراین برای این تابع اکسترمم وجود ندارد.

مثال ۵۹: کمترین مقدار تابع $z=xy+\frac{8}{x}+\frac{8}{y}$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۹۰)

۱) ۸　　۲) ۱۲　　۳) ۱۶　　۴) $8\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا نقطه بحرانی تابع z را به‌دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} f_x=y-\frac{8}{x^2}=0 \\ f_y=x-\frac{8}{y^2}=0 \quad \Rightarrow x=\frac{8}{y^2}\end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{8}{\frac{64}{y^4}}=0 \Rightarrow y^3=8 \Rightarrow y=2, x=2$$

برای تشخیص نوع نقطه بحرانی فوق داریم:

$$f_{xx}=\frac{16}{x^3}, f_{yy}=\frac{16}{y^3}, f_{xy}=1 \Rightarrow \Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\,|_{(2,2)}=2\times2-1=3>0$$

در نتیجه نقطه (۲,۲) یک نقطه اکسترمم نسبی است، از آنجایی که $f_{xx}\,|_{(2,2)}=2>0$ می‌باشد در نتیجه نقطه (۲,۲) یک نقطه مینیمم نسبی است. و مقدار تابع z در نقطه (۲,۲) برابر ۱۲ است.

مثال ۶۰: نقطه بحرانی تابع $z=x^2y-y^2+8x$ چگونه است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۹۰)

۱) زینی　　۲) ماکزیمم　　۳) مینیمم نسبی　　۴) مینیمم مطلق

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا نقاط بحرانی را به‌دست می‌آوریم:

$$z=x^2y-y^2+8x$$

$$\left.\begin{array}{l} z_x=2xy+8=0 \quad \Rightarrow y=\frac{-4}{x} \\ z_y=x^2-2y=0\end{array}\right\} \Rightarrow x^2+\frac{8}{x}=0 \Rightarrow x=-2, y=2$$

برای تعیین نوع نقاط بحرانی Δ را تشکیل می‌دهیم:

$$z_{xx}=2y, z_{yy}=-2, z_{xy}=2x$$

$$\Delta=z_{xx}z_{yy}-z_{xy}=-4y-(2x)^2\Big|_{(-2,2)}=-8-16=-24<0$$

چون $\Delta<0$ به‌دست آمده در نتیجه نقطه‌ی بحرانی (۲,۲−) یک نقطه زینی می‌باشد.

فصل چهارم

« انتگرال‌های چندگانه »

درسنامه: محاسبه‌ی انتگرال‌های دوگانه

مثال ۱: حاصل انتگرالِ دوگانه‌یِ $\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\sin(x+2y)+\sin(x-2y)]dydx$ کدام است؟

۱) 2π ۲) 2 ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

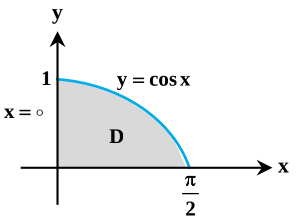
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم که $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ است. در نتیجه عبارت جلوی انتگرال برابر است با $f(x,y)=2\sin x\cos 2y$ یعنی حاصل‌ضرب دو تابع یک متغیره است. در ضمن حدود انتگرال هم اعداد ثابت هستند. پس می‌توانیم به این صورت انتگرال‌ها را جدا کنیم:

$$I=(\int_0^{\pi}\sin x dx)(\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos 2y dy)=[-\cos x]_0^{\pi}\times[\sin 2y]_0^{\frac{\pi}{4}}=2\times 1=2$$

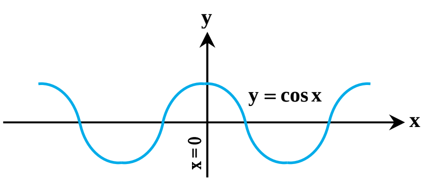
طبیعی است اگر این کار را نمی‌کردیم، حجم محاسبات کمی بیشتر می‌شد.

مثال ۲: مقدار انتگرال $I=\int_0^1\int_0^{\cos^{-1}y}\sin^{10}x\,dxdy$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{11}$ ۳) $\frac{2}{11}$ ۴) $\frac{1}{5}$

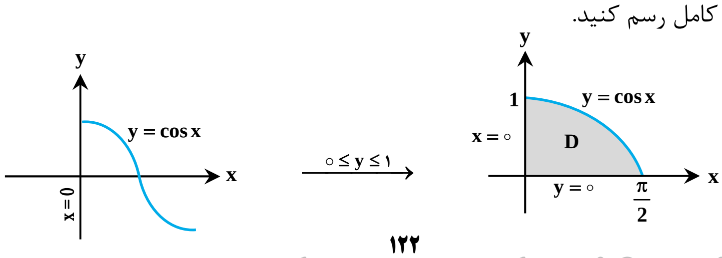


☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تابع زیر انتگرال $f(x)=\sin^{10}x$ یک متغیره و بر حسب x است. بنابراین با جابجا کردن متغیرها dy را به انتگرال میانی می‌آوریم. برای این کار ابتدا باید ناحیه‌ی D را تشخیص دهیم. پس کران‌های انتگرال میانی را رسم می‌کنیم. آن‌ها کران‌های x هستند؛ یعنی خطِ $x=0$ و منحنی $x=\cos^{-1}y$ را رسم می‌کنیم. معادله‌ی $x=\cos^{-1}y$ همان $y=\cos x$ است. به محدودیت $0\le y\le 1$ نیز که در انتگرال بیرونی داده شده توجه می‌کنیم.



در اینجا لازم است مطلبی را توضیح دهیم. اول آن که رسم منحنی $y=\cos x$ به طور کامل برخی از دانشجویان را ممکن است سردرگم کند. اگر ما بدون دقت، خط $x=0$ (محور yها) و منحنی $y=\cos x$ را رسم کنیم، به شکل مقابل می‌رسیم. حالا نواحی مختلفی به وجود می‌آیند و ممکن است در تشخیص محلِ D دچار اشتباه شویم، دیگر حتی محدودیتِ $0\le y\le 1$ نیز نمی‌تواند در یافتن ناحیه‌ی D به ما کمک کند.

برای این که دچار چنین اشکالاتی نشوید باید کمی ظرافت به خرج دهید. کران‌های انتگرال میانی مربوط به متغیر x هستند. پس، از چپ به راست، ناحیه‌ی مابین خط $x=0$ و منحنی $x=\cos^{-1}y$ (یعنی $y=\cos x$) است. بنابراین فقط ناحیه‌ای را که از $x=0$ تا منحنی کسینوس ادامه دارد در نظر بگیرید. لازم نیست منحنی $y=\cos x$ را کامل رسم کنید.



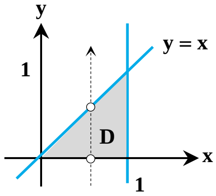
حالا محدودیت $۰ \le y \le ۱$ نیز کمک می‌کند تا محدوده‌ی دقیق مرزهای D را تعیین کنیم. به هر حال، پس از رسم ناحیه‌ی D، حدود انتگرال دوگانه را برای ترتیب $\iint_D \sin^{۱۰} x\,dydx$ مشخص می‌کنیم. ابتدا کران‌های x را به‌صورت $۰ \le x \le \frac{\pi}{۲}$ می‌نویسیم و سپس برای تشخیص حدود y از پایین به بالا حرکت می‌کنیم. $y = ۰$ مرز ورودی و $y = \cos x$ مرز خروجی است. پس $۰ \le y \le \cos x$ است و بنابراین فقط حل انتگرال باقی می‌ماند:

$$I = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \int_۰^{\cos x} \sin^{۱۰} x\,dydx = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \left[y \sin^{۱۰} x \right]_۰^{\cos x} dx = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \cos x \sin^{۱۰} x\,dx = \left[\frac{\sin^{۱۱} x}{۱۱} \right]_۰^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱}{۱۱}$$

مثال ۳: مقدار $I = \iint_D \frac{\sin x}{x} dA$ که در آن D مثلثی واقع در صفحه xoy و محدود به محور xها، خط $y = x$ و خط $x = ۱$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $۱ - \cos ۱$ ۲) $۱ + \cos ۱$ ۳) $\cos ۱ - ۱$ ۴) صفر

پاسخ : گزینه «۱» تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ یک متغیره و برحسب x است، در نتیجه ترجیح می‌دهیم dy به انتگرال میانی برود و dx مربوط به انتگرال بیرونی باشد. پس ترتیب $I = \iint_D \frac{\sin x}{x} dydx$ را انتخاب می‌کنیم. در واقع انتگرالِ $\int \frac{\sin x}{x} dx$ با روش‌های مرسوم انتگرال‌گیری قابل حل نیست. اما انتگرال $\int \frac{\sin x}{x} dy$ به سادگی حل می‌شود چون $\frac{\sin x}{x}$ به عدد ثابت تبدیل می‌شود.



در ادامه، ابتدا حدود x را به صورت دو عدد ثابت و حدود y را برحسب x پیدا می‌کنیم. با توجه به شکل $۰ \le x \le ۱$ است و اگر از پایین به بالا حرکت کنیم $y = ۰$ مرز ورودی و $y = x$ مرز خروجی است.

$$I = \int_۰^۱ \int_۰^x \frac{\sin x}{x} dydx = \int_۰^۱ [y \cdot \frac{\sin x}{x}]_۰^x dx = \int_۰^۱ \sin x dx = [-\cos x]_۰^۱ = ۱ - \cos ۱$$

مثال ۴: اگر $\iint_D e^{\sin x \cos y} dA$، که در این‌جا D دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع ۲ است، آن‌گاه کدام گزینه زیر، دقیق‌تر از سایرین، حدود تغییرات I را نشان می‌دهد؟

۱) $\frac{۴\pi^۲ e}{\sqrt{e}} < I < \frac{۴\pi^۲ e^۲}{\sqrt{e}}$ ۲) $\frac{۴\pi}{e} < I < ۴\pi e$ ۳) $\frac{۴\pi}{e} \le I \le ۴\pi e$ ۴) $\frac{۴\pi^۲ e}{\sqrt{e}} \le I \le \frac{۴\pi^۲ e^۲}{\sqrt{e}}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکته (۴) جواب به سؤال راحت است. اولاً توجه کنید که $\sin x$ و $\cos y$ هر یک بین ۱ و ۱- تغییرات دارند، در واقع داریم:

$$\left. \begin{array}{l} -۱ \le \sin x \le ۱ \\ -۱ \le \cos y \le ۱ \end{array} \right\} \Rightarrow -۱ \le \sin x \cos y \le ۱ \Rightarrow e^{-۱} \le e^{\sin x \cos y} \le e^۱$$

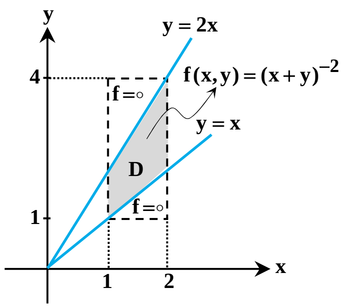
بنابراین مینیمم تابع زیر انتگرال $m = e^{-۱}$ و ماکزیمم آن $M = e^۱$ است. از طرفی مساحت ناحیه D برابر با $\pi r^۲ = \pi(۲)^۲ = ۴\pi$ است و لذا حدود I به صورت مقابل است:

$$e^{-۱} \times ۴\pi \le I \le e \times ۴\pi \Rightarrow \frac{۴\pi}{e} \le I \le ۴\pi e$$

مثال ۵: فرض کنید f روی مستطیل $Q = [۱,۲] \times [۱,۴]$ به صورت روبه‌رو تعریف شده است: $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^{-۲} & ; x \le y \le ۲x \\ ۰ & ; \text{در غیر این صورت} \end{cases}$، حاصل $\iint_Q f(x,y)dxdy$ کدام است؟

۱) $\frac{Ln ۲}{۶}$ ۲) $\frac{Ln ۲}{۳}$ ۳) $\frac{Ln ۲}{۴}$ ۴) $\frac{Ln ۲}{۲}$

پاسخ: گزینه «۱» مستطیل $Q = [۱,۲] \times [۱,۴]$ در ناحیه‌ی $۱ \le x \le ۲$ و $۱ \le y \le ۴$ قرار دارد. خطوط $y = x$ و $y = ۲x$ را نیز در نظر می‌گیریم:



مستطیل Q به سه ناحیه شکسته می‌شود که در دو تا از آن‌ها مطابق شکل مقدار $f(x,y)$ برابر با صفر است در نتیجه حاصل انتگرال روی این دو ناحیه صفر می‌شود. در نتیجه کافیست حاصل انتگرال را روی ناحیه‌ی D که بین خطوط $y = x$ و $y = ۲x$ قرار دارد و در آن $۱ \le x \le ۲$ است محاسبه کنیم:

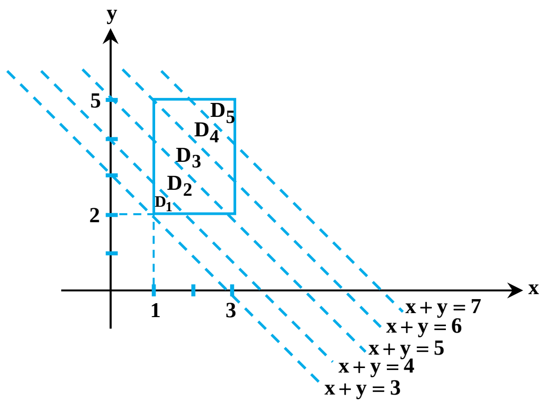
$$\iint_Q f(x,y)dydx = ۰ + ۰ + \iint_D f(x,y)dydx$$

$$= \int_۱^۲ \int_x^{۲x} (x+y)^{-۲} dydx = \int_۱^۲ \frac{-۱}{x+y} \Big|_x^{۲x} dx = \frac{۱}{۶} \int_۱^۲ \frac{dx}{x} = \frac{۱}{۶} Lnx \Big|_۱^۲ = \frac{Ln ۲}{۶}$$

مثال ۶: اگر $\lfloor x \rfloor$ نمایانگر بخش صحیح عدد x باشد، حاصل $I=\iint \lfloor x+y \rfloor dA$، در صورتی که R ناحیه $1\le x\le 3$ و $2\le y\le 5$ باشد، چقدر می‌شود؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

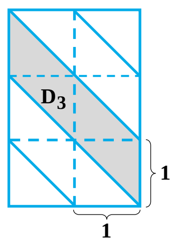
پاسخ: گزینه «۴» این‌که حاصل $\lfloor x+y \rfloor$ چه عددی باشد بستگی به این دارد که $x+y$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار بگیرد. برای مثال در ناحیه‌ای که $2\le x+y<3$ است داریم $\lfloor x+y \rfloor=2$. به همین دلیل باید خطوط $x+y=m$ را برای اعداد صحیح مختلف $m=0,1,2,\dots$ رسم کنیم و ببینیم مستطیل $1\le x\le 3$، $2\le y\le 5$ توسط این خطوط به چند ناحیه تقسیم می‌شود. مطابق شکل، ۵ ناحیه به‌دست می‌آید. در ناحیه‌ی D_1 داریم $3\le x+y<4$، پس $\lfloor x+y \rfloor=3$ است. به همین ترتیب در هر ناحیه مقدار تابع جزء صحیح را محاسبه می‌کنیم:



$$\iint \lfloor x+y \rfloor dA=\iint_{D_1}3dA+\iint_{D_2}4dA+\iint_{D_3}5dA+\iint_{D_4}6dA+\iint_{D_5}7dA$$

$$=3\times\frac{1}{2}+4\times\frac{3}{2}+5\times\frac{4}{2}+6\times\frac{3}{2}+7\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+\frac{12}{2}+\frac{20}{2}+\frac{18}{2}+\frac{7}{2}=30$$

به عنوان مثال روی ناحیه‌ی D_3 داریم: $\iint_{D_3}5dA=5\times(\text{مساحت } D_3)$



برای تعیین مساحت D_3 بهتر است آن را به تعدادی مثلث تقسیم کنید.

ناحیه‌ی D_3 از ۴ مثلث کوچک تشکیل شده است که مساحت هر کدام $\frac{1}{2}$ واحد است. پس مساحت D_3 برابر است با $\frac{4}{2}$. برای سایر نواحی هم از شمارش تعداد مثلث‌ها استفاده کنید.

مثال ۷: حاصل $I=\iint_D(2+x^3y^2)dA$ در صورتی که D درون بیضی $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ باشد، کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) 3π ۴) 4π

پاسخ: گزینه «۴» با تبدیل x به $-x$ معادله‌ی بیضی (ناحیه‌ی D) تغییر نمی‌کند، همچنین تابع x^3y^2 نسبت به x فرد است پس حاصل $\iint_D x^3y^2dA$ روی این ناحیه برابر صفر است، بنابراین مقدار I برابر $2\iint_D dA$ یا دو برابر مساحت درون بیضی است یعنی $I=2(2\pi)=4\pi$ است.

مثال ۸: اگر D ناحیه‌ی $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2\}$ باشد، آن‌گاه حاصل $I=\iint_D(x^{1396}\operatorname{tg}x+y^{1395}+697)dA$ چند برابر π است؟

۱) ۱۳۹۴ ۲) ۱۳۹۵ ۳) ۱۳۹۶ ۴) ۲۷۸۸

پاسخ: گزینه «۱» در معادله‌ی $x^2+y^2=2$ تبدیل x به $-x$ یا y به $-y$ تغییری ایجاد نمی‌کند. البته این دایره آنقدر شناخته شده است که بدون این بررسی‌ها هم می‌دانیم نسبت به محورهای x و y تقارن دارد.

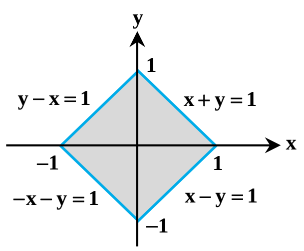
تابع $x^{1396}\operatorname{tg}x$ نسبت به x فرد است، همچنین y^{1395} نسبت به y فرد است، بنابراین داریم $\iint_D(x^{1396}\operatorname{tg}x+y^{1395})dA=0$ به این ترتیب خواهیم داشت:

$$I=\iint_D 697dA=697\times(\text{مساحت } D)=697\times 2\pi=1394\pi$$

مثال ۹: حاصل $I=\iint_{|x|+|y|\le 1}(|x|+|y|)dxdy$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» ناحیه‌ی انتگرال‌گیری نسبت به هر دو محور x و y تقارن دارد. زیرا در معادله‌ی $|x|+|y|=1$ تبدیل x به $-x$ و y به $-y$ تغییری ایجاد نمی‌کند. از طرفی تابع زیر انتگرال هم نسبت به x و y زوج است، پس می‌توانیم فقط ربع اول از این ناحیه را در نظر گرفته و جواب انتگرال را چهار برابر کنیم.



$$I=4\int_0^1\int_0^{1-x}(x+y)dydx\Rightarrow I=4\int_0^1\left[\frac{(x+y)^2}{2}\right]_0^{1-x}dx=4\int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

مثال ۱۰: اگر ناحیه D درون دایره $x^2+y^2=4$ و ناحیه بین $y=\sqrt{3}x$ و $x=\sqrt{3}y$ در ربع اول و سوم باشد، آن‌گاه حاصل $I=\iint_D \frac{\sin x^2}{\sin x^2+\sin y^2}dA$ کدام است؟

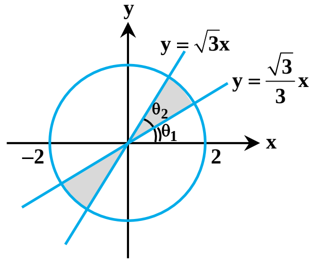
۱) $\frac{4\pi}{3}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» معادله‌ی ناحیه D، درون دایره $x^2+y^2=4$ و محدود به مرزهای $y=\sqrt{3}x$ و $x=\sqrt{3}y$ است. هرگاه در تمام این معادلات جای x و y را با هم عوض کنیم، باز هم به همین سه معادله می‌رسیم، پس انتگرال I با انتگرال مقابل برابر است:

$$I=\iint_D \frac{\sin y^2}{\sin y^2+\sin x^2}dA$$

با جمع طرفین دو رابطه‌ی فوق داریم:

$$2I=\iint_D \frac{\sin x^2+\sin y^2}{\sin x^2+\sin y^2}dA \Rightarrow I=\frac{1}{2}\iint dA=\frac{1}{2}(\text{مساحت ناحیه D})$$



حالا کافیست مساحت ناحیه D را حساب کنیم و برای این کار، مساحت یکی از دو قطاع را حساب کرده و آن را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم. اما برای به‌دست آوردن مساحت یک قطاع توجه کنید که داریم:

$$\left.\begin{aligned} y=\frac{\sqrt{3}}{3}x &\Rightarrow \theta_1=tg^{-1}(\frac{y}{x})=tg^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\pi}{6} \\ y=\sqrt{3}x &\Rightarrow \theta_2=tg^{-1}(\frac{y}{x})=tg^{-1}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta=\theta_2-\theta_1=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

پس مساحت ناحیه D، ۲ برابر مساحت ناحیه یک قطاع است. چون مساحت یک قطاع برابر با $\frac{\pi}{3}$ است، بنابراین مساحت دو قطاع $\frac{2\pi}{3}$ می‌شود.

پس خواهیم داشت:

$$I=\frac{1}{2}(\text{D مساحت})=\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{3})=\frac{\pi}{3}$$

یادآوری: مساحت یک قطاع از دایره‌ای به شعاع r، برابر با مقدار زیر است:

$$S_{\text{قطاع}}=\frac{1}{2}\times r^2\times\theta$$

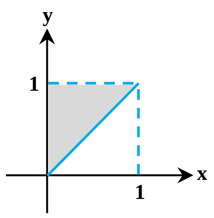
در این سؤال $\theta=\frac{\pi}{6}$ و $r=2$، بنابراین مساحت یک قطاع به‌صورت مقابل حساب شد:

$$S=\frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

مثال ۱۱: مقدار $\int_0^1\int_x^1\sqrt{1-y^2}dydx$ برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به شکل مقابل با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری داریم:

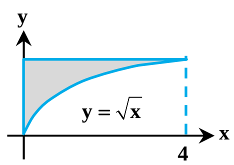


$$\int_0^1\int_x^1\sqrt{1-y^2}dydx=\int_0^1\int_0^y\sqrt{1-y^2}dxdy=\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}dy=\frac{-1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

مثال ۱۲: مقدار انتگرال دوگانه $\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2\cos(y^3)dydx$ چقدر است؟ (عمران ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{\sin 8}{6}$ ۲) $\frac{\sin 8}{3}$ ۳) $\frac{\sin 8}{2}$ ۴) ۱/۳۳۳۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به شکل مقابل ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم:

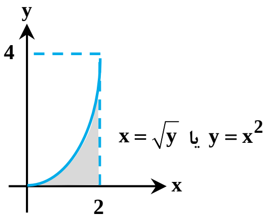


$$\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2\cos(y^3)dydx=\int_0^2\int_0^{y^2}\cos(y^3)dxdy=\int_0^2 y^2\cos(y^3)dy=\frac{1}{3}\sin(y^3)\Big|_0^2=\frac{1}{3}\sin 8$$

مثال ۱۳: مقدار $\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3+1}\,dxdy$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{17}{3}$ ۲) $\frac{26}{3}$ ۳) $\frac{26}{9}$ ۴) $\frac{52}{9}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به شکل مقابل با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری خواهیم داشت:



$$\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2\sqrt{x^3+1}\,dxdy=\int_0^2\int_0^{x^2}\sqrt{x^3+1}\,dydx=\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx=\frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{52}{9}$$

مثال ۱۴: حاصل $\iint_D e^{2y-x}dxdy$ که در آن میدان D مثلثی با سه رأس (۱ و ۲) و (۰ و ۲) و مبدأ مختصات باشد، کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{1}{2}+e^{-2}$ ۲) $1-e^{-2}$ ۳) $\frac{1}{2}(1+e^{-2})$ ۴) $\frac{1}{2}(1-e^{-2})$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\iint_D e^{2y-x}dydx=\int_0^2\int_0^{\frac{x}{2}}e^{2y-x}dydx=\int_0^2\frac{1}{2}e^{2y-x}\Big|_0^{\frac{x}{2}}dx=\int_0^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-x}\right)dx=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}e^{-x}\right)\Big|_0^2=\frac{1}{2}(1+e^{-2})$$

مثال ۱۵: اگر D مساحت مربع واحد به رئوس (۰,۰)، (۰,۱)، (۱,۰)، (۱,۱) و $f(x,y)=yx^{\frac{-1}{2}}$ باشد، مقدار انتگرال $\iint_D f(x,y)dxdy$ چقدر است؟

(مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲»

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^1\int_0^1 yx^{\frac{-1}{2}}dxdy=2\sqrt{x}\Big|_0^1\times\frac{1}{2}y^2\Big|_0^1=1$$

مثال ۱۶: تابع $f(x,y)$ با دامنه تعریف $0\le x,y\le 2$ به صورت تابع $f(x,y)=\begin{cases}x(2+y) & 0\le x\le y\\ y(1+x^2) & y\le x\le 2\end{cases}$ تعریف شده، مقدار $\iint_D f(x,y)dxdy$ چقدر می‌باشد؟ (عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) ۹/۲ ۲) ۱۰/۲ ۳) ۱۱/۲ ۴) ۱۲/۲

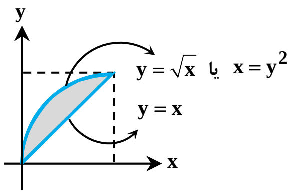
پاسخ: گزینه «۱»

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^2\int_0^y x(2+y)\,dxdy+\int_0^2\int_y^2 y(1+x^2)\,dxdy=\int_0^2\left(\frac{y^3}{2}+y^2\right)dy+\int_0^2\left(-\frac{y^4}{3}-y^2+\frac{14}{3}\right)dy=\frac{14}{3}+\frac{68}{15}=9/2$$

مثال ۱۷: حاصل $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\phi(x,y)dy$ با کدام گزینه برابر است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}\phi(x,y)dx$ ۲) $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}}\phi(x,y)dx$ ۳) $\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\phi(x,y)dx$ ۴) $\int_0^1 dy\int_0^{y}\phi(x,y)dx$

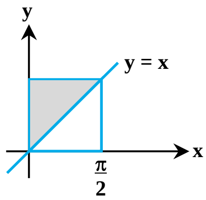
پاسخ: گزینه «۳» با توجه به ناحیه انتگرال‌گیری و تعویض ترتیب انتگرال‌گیری گزینه (۳) حاصل می‌شود.



$$\Rightarrow\int_0^1\int_x^{\sqrt{x}}\phi(x,y)dydx=\int_0^1\int_{y^2}^{y}\phi(x,y)dxdy$$

مثال۱۸: مقدار انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{y}dydx$ برابر است با: (معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) -1 ۲) 1 ۳) -2 ۴) 2



پاسخ: گزینه «۲» با توجه به شکل مقابل، با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{y}dydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{y}\frac{\sin y}{y}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin y dy=1$$

مثال۱۹: مقدار انتگرال دوگانه $\int_0^4\int_{x/2}^2 e^{y^2}dydx$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) e^3-1 ۲) e^3+1 ۳) e^4+1 ۴) e^4-1

پاسخ: گزینه «۴» ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم:

$$\int_0^4\int_{\frac{x}{2}}^2 e^{y^2}dydx=\int_0^2\int_0^{2y}e^{y^2}dxdy=\int_0^2 2ye^{y^2}dy=e^{y^2}\Big|_0^2=e^4-1$$

مثال۲۰: مقدار انتگرال دوگانه $\iint_R(x\sin y-ye^x)dxdy$، که در آن $R=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1,\ 0<y\le\frac{\pi}{2}\}$ برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۲)

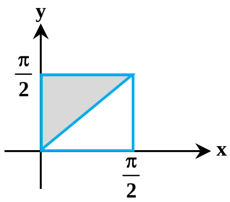
۱) $(\frac{1}{e}-e^2)\frac{\pi^2}{8}$ ۲) $(\frac{1}{e}-e^{-2})\frac{\pi^2}{8}$ ۳) $(\frac{1}{e}+e^2)\frac{\pi^2}{8}$ ۴) $(\frac{1}{e}-e)\frac{\pi^2}{8}$

پاسخ: گزینه «۴» چون تابع $x\sin y$ فرد و ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به محور y متقارن است، بنابراین انتگرال آن برابر صفر می‌شود.

$$\iint_R(x\sin y-ye^x)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{-1}^1-ye^xdxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-ydy\times\int_{-1}^1e^xdx=\frac{-\pi^2}{8}(e-\frac{1}{e})=\frac{\pi^2}{8}(\frac{1}{e}-e)$$

مثال۲۱: مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos y}{y}dydx$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) 1 ۲) 2 ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π



پاسخ: گزینه «۱» با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos y}{y}dydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{y}\frac{\cos y}{y}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos y dy=1$$

مثال۲۲: حاصل انتگرال $\iint xe^{x+y}dxdy$ روی ناحیه $(x,y)\in[1,2]\times(-\infty,-2]$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۳)

۱) e ۲) -1 ۳) 1 ۴) $e-1$

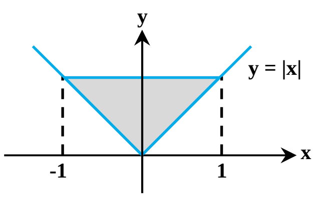
پاسخ: گزینه «۳»

$$\int_1^2\int_{-\infty}^{-2}xe^{x+y}dydx=\int_1^2xe^xdx\times\int_{-\infty}^{-2}e^ydy=(xe^x-e^x)\Big|_1^2\times e^y\Big|_{-\infty}^{-2}=e^2\times e^{-2}=1$$

مثال۲۳: انتگرال دوگانه $\int_{-1}^1\int_{|x|}^1 f(x,y)dydx$ را می‌توان به کدام صورت زیر نوشت؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۳)

۱) $\int_{-1}^1\int_{-y}^y f(x,y)dxdy$ ۲) $\int_0^1\int_{-y}^y f(x,y)dxdy$ ۳) $\int_0^1\int_0^{|y|}f(x,y)dxdy$ ۴) $\int_{-1}^1\int_0^{|y|}f(x,y)dxdy$

پاسخ: گزینه «۲»

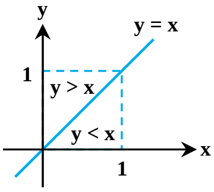


شکل ناحیه انتگرال‌گیری به صورت روبرو می‌باشد. با توجه بـه شـکل خطـوط مـوازی محـور x هـا از $x=-y$ وارد و از $x=y$ خـارج مـی‌شـوند، بنـابراین $-y\le x\le y$ حدود y نیز به‌صورت $0\le y\le 1$ است.

مثال ۲۴: اگر $f(x,y)=\operatorname{Max}\{x,y\}$ به ازای هر (x,y) در مربع D، که در آن $0\le x\le 1$، $0\le y\le 1$، آن‌گاه مقدار انتگرال دوگانه $\iint_D f(x,y)dxdy$ برابر است با: (هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به شکل در ناحیه‌ی بالایی داریم $f(x,y)=y$ و در ناحیه‌ی پایینی داریم $f(x,y)=x$ پس:

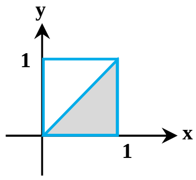


$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^x xdydx+\int_0^1\int_0^y ydxdy=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 y^2dy=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

مثال ۲۵: مقدار انتگرال $\int_0^1 dy\int_y^1 \sin\pi x^2dx$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۴)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{\pi}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» محاسبه مستقیم انتگرال امکان‌پذیر نیست، بنابراین ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم.



$$\int_0^1 dy\int_y^1 \sin(\pi x^2)dx=\int_0^1\int_0^x \sin(\pi x^2)dydx=\int_0^1 x\sin(\pi x^2)dx=\frac{-1}{2\pi}\cos(\pi x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{\pi}$$

مثال ۲۶: مقدار انتگرال $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{x^2+y^2+1}dydx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\pi}{3}\operatorname{Ln}(1+\sqrt{2})$ ۲) $\frac{\pi}{4}\operatorname{Ln}(1+\sqrt{2})$ ۳) $\frac{\pi}{4}\operatorname{Ln}(1+\sqrt{3})$ ۴) $\frac{\pi}{3}\operatorname{Ln}(1+\sqrt{3})$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1+x^2}}\frac{dydx}{(\sqrt{x^2+1})^2+y^2}=\int_0^1\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\operatorname{Arctg}\frac{y}{\sqrt{x^2+1}}\right]_0^{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\pi}{4}\operatorname{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\operatorname{Ln}(1+\sqrt{2})$$

مثال ۲۷: حاصل $\int_0^1\int_0^{\sin x}\frac{xdydx}{\sqrt{1-y^2}}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

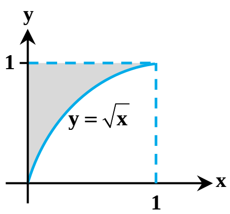
پاسخ: گزینه «۴»

$$\int_0^1\int_0^{\sin x}\frac{xdydx}{\sqrt{1-y^2}}=\int_0^1[x\operatorname{Arc}\sin y]_0^{\sin x}dx=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

مثال ۲۸: مقدار انتگرال $I=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}dy$ برابر با چیست؟ (عمران، نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۵)

۱) $e-1$ ۲) $\frac{e-1}{3}$ ۳) $\frac{e-1}{2}$ ۴) $\frac{e+1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به شکل مقابل ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم:



$$I=\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}dydx=\int_0^1\int_0^{y^2}e^{y^3}dxdy=\int_0^1 y^2e^{y^3}dy=\frac{1}{3}e^{y^3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}(e-1)$$

مثال۲۹: برای تابع f روی [a,b] کدامیک از موارد زیر درست است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{1}{2}\int_a^b(\int_a^b f(x)f(y)dy)dx=\int_a^b f^2(x)dx$

۲) $\frac{1}{2}\int_a^b(\int_a^x f(x)f(y)dy)dx=(\int_a^b f^2(x)dx)^2$

۳) $2\int_a^b(\int_a^b f(x)f(y)dy)dx=(\int_a^b f(x)dx)^2$

۴) $2\int_a^b(\int_x^b f(x)f(y)dy)dx=(\int_a^b f(x)dx)^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

روش اول: تابع دلخواه f را تابع ثابت $f(x)=1$ در نظر می‌گیریم. در این صورت به وضوح گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) برقرار نمی‌باشند و فقط در گزینه (۴) تساوی برقرار می‌شود.

$$f(x)=1\Rightarrow(\int_a^b f(x)dx)^2=(\int_a^b dx)^2=(b-a)^2$$

$$f(x)=1\Rightarrow 2\int_a^b\int_x^b f(x)f(y)dydx=2\int_a^b\int_x^b dydx=2\int_a^b(b-x)dx=(2bx-x^2)\Big|_a^b=b^2-2ab+a^2=(b-a)^2$$

روش دوم: تابع اولیه $f(x)$ را $F(x)$ در نظر می‌گیریم، در این صورت $F'(x)=f(x)$ و در نتیجه داریم:

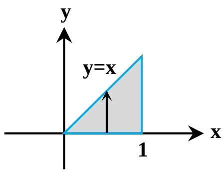
$$2\int_a^b\int_x^b f(x)f(y)dydx=2\int_a^b f(x)F(y)\Big|_x^b dx=2F(b)\int_a^b f(x)dx-\int_a^b 2\underbrace{f(x)}_{F'(x)}F(x)dx$$

$$=2F(b)F(x)\Big|_a^b-F^2(x)\Big|_a^b=F^2(b)-2F(b)F(a)+F^2(a)=(F(b)-F(a))^2=(\int_a^b f(x)dx)^2=(F(x)\Big|_a^b)^2=(F(b)-F(a))^2$$

مثال۳۰: مقدار انتگرال دوگانه $\int_0^1 dy\int_y^1 \sin\pi x^2dx$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{1}{\pi}$ ۲) $\frac{2}{\pi}$ ۳) ۱ ۴) 2π

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم:

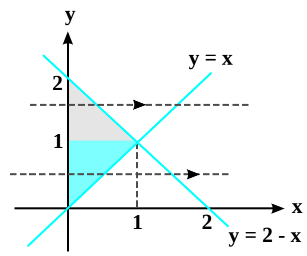


$$\int_0^1\int_y^1\sin\pi x^2dxdy=\int_0^1\int_0^x\sin\pi x^2dydx=\int_0^1 x\sin\pi x^2dx=\frac{-1}{2\pi}\cos\pi x^2\Big|_0^1=\frac{1}{\pi}$$

مثال۳۱: حاصل $\int_0^1\int_x^{2-x}\frac{x}{y}dydx$ برابر LnA است، A کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{4}{e}$ ۲) $\frac{2}{e}$ ۳) $\frac{e}{2}$ ۴) $\frac{e}{4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا ناحیه انتگرال‌گیری را مشخص می‌کنیم. حاصل انتگرال را به روش x منظم حل می‌کنیم که برای این کار باید ناحیه انتگرال‌گیری را به دو ناحیه تقسیم کنیم چراکه با توجه به ناحیه انتگرال‌گیری مرزهای خروجی خط فرضی که موازی محور x ها رسم می‌کنیم متفاوت می‌باشد. پس داریم:



$$I=\int_0^1\int_0^y\frac{x}{y}dxdy+\int_1^2\int_0^{2-y}\frac{x}{y}dxdy=\int_0^1\frac{1}{y}(\frac{x^2}{y})\Big|_0^y dy+\int_1^2\frac{1}{y}(\frac{x^2}{2})\Big|_0^{2-y}dy=\int_0^1\frac{y}{2}dy+\int_1^2\frac{(2-y)^2}{2y}dy$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{y^2}{2})\Big|_0^1+\int_1^2(\frac{y^2+4-4y}{2y})dy=\frac{1}{4}+\int_1^2(\frac{y}{2}+\frac{2}{y}-2)dy=\frac{1}{4}+(\frac{y^2}{4}+2\mathrm{Ln}y-2y)\Big|_1^2=\frac{1}{4}+((1+2\mathrm{Ln}2-4)-(\frac{1}{4}+2\mathrm{Ln}1-2))$$

$$=\frac{1}{4}+(2\mathrm{Ln}2-3+\frac{7}{4})=2\mathrm{Ln}2-1=\mathrm{Ln}4-\mathrm{Ln}e=\mathrm{Ln}(\frac{4}{e})$$

توجه داشته باشید که اگر می‌خواستیم حاصل انتگرال را به روش y منظم حل کنیم با وجود اینکه مرزهای ورود و خروج فقط یک مسیر را نشان می‌داد ولی در انتگرال اول برحسب y به Lny می‌رسیدیم که با قرار دادن حدود انتگرال به انتگرال‌های $x\mathrm{Ln}(2-x)$ و $x\mathrm{Ln}x$ می‌رسیدیم که حل ما را طولانی‌تر می‌کرد.

مثال ۳۲: مقدار $\iint_A e^{-2x-3y}dxdy$ که در آن $A=\{(x,y): x\ge 0, y\ge 0\}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) ۱ ۳) ۶ ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۱»

$$\iint_A e^{-2x-3y}dA=\int_0^\infty e^{-2x}dx\int_0^\infty e^{-3y}dy=\frac{-1}{2}e^{-2x}\Big|_0^\infty\times\frac{-1}{3}e^{-3y}\Big|_0^\infty=\frac{1}{6}$$

مثال ۳۳: مقدار انتگرال $\iint_R (x^3y^3+xy^2)dxdy$ که در آن R مستطیل $-1\le x\le 1$ و $0\le y\le 1$ می‌باشد کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

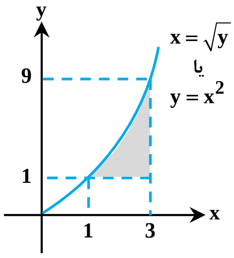
۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۱» چون تابع مقابل انتگرال نسبت به متغیر x فرد و ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به محور yها متقارن است پس انتگرال مورد نظر برابر صفر است.

مثال ۳۴: حاصل $\int_1^9\int_{\sqrt{y}}^3 \frac{e^{x^2-2x}}{x+1}dxdy$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{1}{2}(e^2+\frac{1}{e})$ ۲) $\frac{1}{2}(e^3-\frac{1}{e})$ ۳) $\frac{1}{2}(e-\frac{1}{e^2})$ ۴) $\frac{1}{2}(e+\frac{1}{e^2})$

پاسخ: گزینه «۲» محاسبه انتگرال موردنظر به ترتیب داده شده ممکن نیست. پس باید ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنیم. ناحیه انتگرال‌گیری مطابق شکل روبرو می‌باشد که اگر آن را به شکل y محدب توصیف کنیم، آن‌گاه داریم:



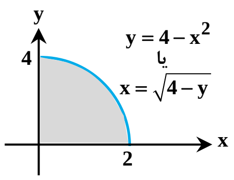
$$I=\int_1^3\int_1^{x^2}\frac{e^{x^2-2x}}{x+1}dydx=\int_1^3\frac{e^{x^2-2x}}{x+1}\times y\Big|_1^{x^2}dx$$

$$=\int_1^3\frac{e^{x^2-2x}}{x+1}(x^2-1)dx=\int_1^3 e^{\overbrace{x^2-2x}^{u}}\underbrace{(x-1)dx}_{\frac{1}{2}du}=\frac{1}{2}e^{x^2-2x}\Big|_1^3=\frac{1}{2}e^3-\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{1}{2}(e^3-\frac{1}{e})$$

مثال ۳۵: مقدار انتگرال $\int_0^2\int_0^{4-x^2}\frac{xe^{2y}}{4-y}dydx$ برابر است با: (عمران ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{1}{2}(e^4-1)$ ۲) $\frac{1}{4}(1-e^8)$ ۳) $\frac{1}{2}(1-e^8)$ ۴) $\frac{1}{4}(e^8-1)$

پاسخ: گزینه «۴» با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود:

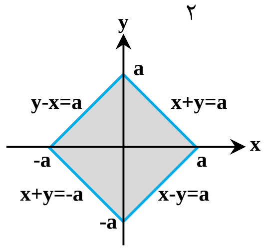


$$\int_0^2\int_0^{4-x^2}\frac{xe^{2y}}{4-y}dydx=\int_0^4\int_0^{\sqrt{4-y}}\frac{xe^{2y}}{4-y}dxdy=\frac{1}{2}\int_0^4 e^{2y}dy=\frac{1}{4}e^{2y}\Big|_0^4=\frac{1}{4}(e^8-1)$$

مثال ۳۶: مقدار انتگرال $\iint_{|x|+|y|\le a}e^{x+y}dxdy$ برابر با چیست؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۸)

۱) $a\sinh a$ ۲) $2a\sinh a$ ۳) $4a\sinh a$ ۴) $\frac{1}{2}a\sinh a$

پاسخ: گزینه «۲» ناحیه انتگرال‌گیری به شکل روبرو می‌باشد. ناحیه روبرو را می‌توان به شکل دو ناحیه y محدب مطابق زیر توصیف کرد:



$$D_1:\begin{cases}0\le x\le a\\ x-a\le y\le a-x\end{cases},\quad D_2:\begin{cases}-a\le x\le 0\\ -a-x\le y\le a+x\end{cases}$$

بنابراین انتگرال موردنظر برابر است با:

$$I=\iint_D e^{x+y}dydx=\int_0^a\int_{x-a}^{a-x}e^{x+y}dydx+\int_{-a}^0\int_{-a-x}^{a+x}e^{x+y}dydx=\int_0^a e^{x+y}\Big|_{x-a}^{a-x}dx+\int_{-a}^0 e^{x+y}\Big|_{-a-x}^{a+x}dx$$

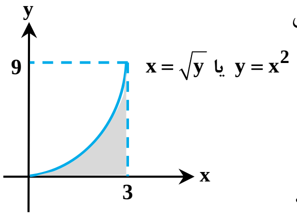
$$=\int_0^a(e^a-e^{2x-a})dx+\int_{-a}^0(e^{a+2x}-e^{-a})dx=(xe^a-\frac{1}{2}e^{2x-a})\Big|_0^a+(\frac{1}{2}e^{a+2x}-e^{-a}x)\Big|_{-a}^0$$

$$=(ae^a-\frac{1}{2}e^a+\frac{1}{2}e^{-a})+(\frac{1}{2}e^a-\frac{1}{2}e^{-a}-ae^{-a})=ae^a-ae^{-a}=a(e^a-e^{-a})=2a\sinh a$$

مثال ۳۷: مقدار انتگرال $\int_0^9\int_{\sqrt{y}}^3 \sin(\pi x^3)dxdy$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{1}{\pi}$ ۲) $\frac{2}{3\pi}$ ۳) $\frac{3}{2\pi}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۲» محاسبه مستقیم انتگرال مورد نظر غیر ممکن است. با توجه به شکل مقابل ناحیه انتگرال‌گیری را می‌توان به‌صورت $\begin{cases}0<x<3\\0<y<x^2\end{cases}$ توصیف نمود که در این صورت با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود:



$$\int_0^9\int_{\sqrt{y}}^3 \sin(\pi x^3)dxdy=\int_0^3\int_0^{x^2}\sin(\pi x^3)dydx=\int_0^3 x^2\sin(\pi x^3)dx=\frac{-1}{3\pi}\cos(\pi x^3)\Big|_0^3=\frac{2}{3\pi}$$

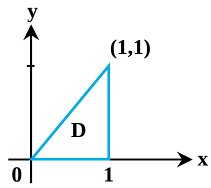
مثال ۳۸: مقدار انتگرال $\iint_D x\sin y\,dA$ روی ناحیه‌ی نشان داده شده در شکل کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۸)

۱) $\cos 1+\sin 1$

۲) $\frac{3}{2}-\sin 1-\cos 1$

۳) $\frac{1}{2}+\cos 1-\sin 1$

۴) $\frac{3}{2}+\cos 1-\sin 1$



پاسخ: گزینه «۲»

روش اول: ناحیه داده شده را می‌توان به‌صورت $\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le x\end{cases}$ توصیف کرد، در این صورت داریم:

$$\iint_D x\sin y\,dA=\int_0^1\int_0^x x\sin y\,dydx=\int_0^1(-x\cos y)\Big|_0^x dx=\int_0^1(-x\cos x+x)dx=(-x\sin x-\cos x+\frac{x^2}{2})\Big|_0^1=\frac{3}{2}-\sin 1-\cos 1$$

روش دوم: ناحیه را می‌توان به‌صورت $\begin{cases}0\le y\le 1\\y\le x\le 1\end{cases}$ توصیف کرد، در این صورت داریم:

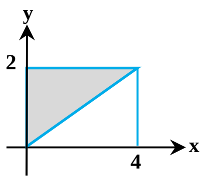
$$\iint_D x\sin y\,dA=\int_0^1\int_y^1 x\sin y\,dxdy=\int_0^1(\frac{x^2}{2}\sin y)\Big|_y^1 dy=\int_0^1(\frac{1}{2}\sin y-\frac{y^2}{2}\sin y)dy=\frac{3}{2}-\sin 1-\cos 1$$

ملاحظه می‌کنید که در روش دوم محاسبه انتگرال کمی سخت‌تر از روش اول می‌باشد.

مثال ۳۹: مقدار انتگرال $\int_0^4\int_{\frac{x}{2}}^2 e^{y^2}dydx$ برابر کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) e^3+1 ۲) e^4+1 ۳) e^3-1 ۴) e^4-1

پاسخ: گزینه «۴» با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود:



$$\int_0^4\int_{\frac{x}{2}}^2 e^{y^2}dydx=\int_0^2\int_0^{2y}e^{y^2}dxdy=\int_0^2 2ye^{y^2}dy=e^{y^2}\Big|_0^2=e^4-1$$

مثال ۴۰: اگر $f(x)=\int_0^x\frac{dy}{(x+y)^2}$ باشد حاصل $\int_1^e f(x)dx$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۸)

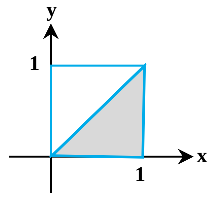
۱) $\frac{1}{2}$ ۲) e ۳) $e-\frac{1}{2}$ ۴) $e-1$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\int_0^x\frac{dydx}{(x+y)^2}=\int_1^e\frac{-1}{x+y}\Big|_0^x dx=\int_1^e\frac{1}{2x}dx=\frac{1}{2}Lnx\Big|_1^e=\frac{1}{2}$$

مثال۴۱: حاصل انتگرال دوگانه $\int_0^1 dy\int_y^1 e^{-x^2}dx$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{e-1}{e}$ ۲) $\frac{e-1}{2e}$ ۳) $\frac{e-2}{e}$ ۴) $\frac{2e-1}{2e}$



پاسخ: گزینه «۲» محاسبه انتگرال به ترتیب داده شده ممکن نیست، لازم است ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنیم.

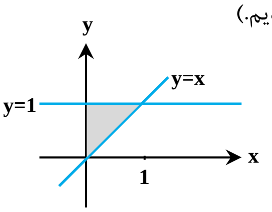
$$I=\int_0^1\int_y^1 e^{-x^2}dxdy=\int_0^1\int_0^x e^{-x^2}dydx=\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\frac{-1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})=\frac{e-1}{2e}$$

مثال۴۲: تابع $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ موجود به طوری که $F'(x)=e^{-x^2}$ و $F(1)=1$ مقدار $\int_0^1 F(x)dx$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{2}(e^{-1}+1)$ ۲) $\frac{1}{2}(1-e^{-1})$ ۳) $(1+e^{-1})$ ۴) $(1-e^{-1})$

پاسخ: گزینه «۱» از صورت سؤال داریم $F'(x)=e^{-x^2}$ پس می‌توان گفت $F'(y)=e^{-y^2}$. از رابطه‌ی $F'(y)=e^{-y^2}$ متوجه می‌شویم که $\int_a^x F'(y)dy=\int_a^x e^{-y^2}dy$.

(از نظر نگارشی درست نیست که وقتی dx داریم حدود انتگرال هم برحسب x باشند، به همین دلیل از متغیر y استفاده کردیم.)



با حل انتگرال در سمت چپ داریم:

$$[F(y)]_a^x=\int_a^x e^{-y^2}dy\Rightarrow F(x)-F(a)=\int_a^x e^{-y^2}dy$$

چون در صورت سؤال $F(1)=1$ را داده است، ما $a=1$ را در رابطه‌ی فوق قرار می‌دهیم تا $F(x)$ به دست آید:

$$F(x)-1=\int_1^x e^{-y^2}dy\Rightarrow F(x)=\int_1^x e^{-y^2}dy+1$$

با قرار دادن این نتیجه در انتگرال $\int_0^1 F(x)dx$ خواهیم داشت:

$$\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1(\int_1^x e^{-y^2}dy+1)dx\Rightarrow\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1\int_1^x e^{-y^2}dydx+\int_0^1 dx\Rightarrow\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1\int_1^x e^{-y^2}dydx+1$$

حالا به محاسبه‌ی $\int_0^1\int_1^x e^{-y^2}dydx$ می‌پردازیم.

در ناحیه‌ی انتگرال‌گیری خط $y=x$ زیر خط $y=1$ قرار دارد، پس کران‌های بالا و پایین انتگرال وسطی باید جابه‌جا شوند:

$$\int_0^1\int_1^x e^{-y^2}dydx=-\int_0^1\int_x^1 e^{-y^2}dydx$$

حالا ترتیب متغیرها را عوض می‌کنیم:

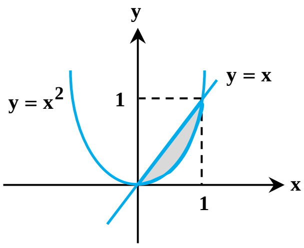
$$-\int_0^1\int_x^1 e^{-y^2}dydx=-\int_0^1\int_0^y e^{-y^2}dxdy=-\int_0^1 ye^{-y^2}dy=\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}e^{-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(e^{-1}-1)$$

با جایگذاری جواب انتگرال دوگانه در $\int_0^1 F(x)dx$ داریم:

$$\int_0^1 F(x)dx=\frac{1}{2}(e^{-1}-1)+1=\frac{1}{2}(e^{-1}+1)$$

مثال۴۳: حاصل $\iint_R\frac{x}{y}e^y dxdy$ که در آن R ناحیه محدود به $x^2\le y\le x$ و $0\le x\le 1$ می‌باشد، کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۹)

۱) $e-1$ ۲) $e-2$ ۳) $\frac{1}{2}(e-1)$ ۴) $\frac{1}{2}(e-2)$



پاسخ: گزینه «۴» ابتدا ناحیه‌ی انتگرال‌گیری (R) را رسم می‌کنیم تا حدود انتگرال‌گیری مشخص شود.

$$\iint_R\frac{x}{y}e^y dxdy=\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}}\frac{x}{y}e^y dxdy=\int_0^1\frac{e^y}{y}\times\frac{x^2}{2}\Big|_y^{\sqrt{y}}dy$$

$$=\int_0^1\frac{e^y}{y}(\frac{y}{2}-\frac{y^2}{2})dy=\frac{1}{2}\int_0^1 e^y-ye^y dy\ \overset{\text{جزء به جزء}}{=\!=\!=}\ \frac{1}{2}(e^y-ye^y+e^y)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e-2)$$

مثال ۴۴: مقدار انتگرال $\iint_R xydA$ که در آن R ناحیه محدود به محورهای مختصات و منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ می‌باشد چقدر است؟ (مواد ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{280}$ ۲) $\frac{1}{140}$ ۳) $\frac{3}{280}$ ۴) $\frac{3}{140}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\int_0^1\int_0^{(1-\sqrt{x})^2} xydydx=\int_0^1 x\frac{y^2}{2}\Big|_0^{(1-\sqrt{x})^2}dx=\int_0^1\frac{1}{2}x(1-\sqrt{x})^4dx$$

برای حل انتگرال فوق از تغییر متغیر $1-\sqrt{x}=u$ استفاده می‌کنیم.

$$1-\sqrt{x}=u\Rightarrow x=(1-u)^2\Rightarrow dx=-2\,(1-u)du\ ,\ \begin{cases}x=0\to u=1\\ x=1\to u=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int_0^1\frac{1}{2}x(1-\sqrt{x})^4dx=\int_1^0\frac{1}{2}(1-u)^2\times u^4\times -2(1-u)du=-\int_1^0 u^4(-u^3+3u^2-3u+1)du=\int_1^0(u^7-3u^6+3u^5-u^4)du$$

$$=\left[\frac{u^8}{8}-3\frac{u^7}{7}+3\frac{u^6}{6}-\frac{u^5}{5}\right]_1^0=-\left[\frac{1}{8}-\frac{3}{7}+\frac{3}{6}+\frac{1}{5}\right]=-\frac{35-120+140-56}{280}=+\frac{1}{280}$$

مثال ۴۵: حاصل $\iint_D\frac{y}{x}dxdy$ که در آن میدان D به صورت $3\le x\le 5, x\le y\le 2x$ باشد، کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۹۰)

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۱» چون کران‌های y به صورت تابعی از x تغییر می‌کنند ابتدا نحوه‌ی انتگرال‌گیری را تغییر می‌دهیم و پیش از تعریف انتگرال دوگانه برای محاسبه انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$I=\iint_D\frac{y}{x}dxdy=\int_3^5\int_x^{2x}\frac{y}{x}dydx=\int_3^5\frac{y^2}{2x}\Big|_x^{2x}dx\Rightarrow I=\int_3^5\frac{4x^2-x^2}{2x}dx=\int_3^5\frac{3}{2}xdx=\frac{3x^2}{4}\Big|_3^5=\frac{3}{4}(25-9)=\frac{3}{4}\times 16=12$$

مثال ۴۶: فرض کنید R مثلثی به رئوس (۰,۲),(۲,۲),(۱,۰) باشد. کدام گزینه برای $I=\iint_R f(x,y)dA$ نادرست است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۰)

۱) $I=\int_0^2\int_{1-\frac{y}{2}}^{1+\frac{y}{2}}f(x,y)dxdy$

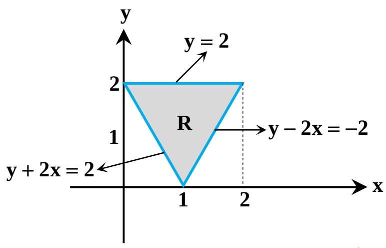
۲) $I=\int_0^1\int_{-2x+2}^{2}f(x,y)dydx+\int_1^2\int_{2x-2}^{2}f(x,y)dydx$

۳) $I=\int_0^1\int_0^{-2x+2}f(x,y)dydx+\int_1^2\int_0^{2x-2}f(x,y)dydx$

۴) $I=\int_0^1\int_{-2x+2}^{2}f(x,y)dydx+\int_0^2\int_1^{1+\frac{y}{2}}f(x,y)dxdy$

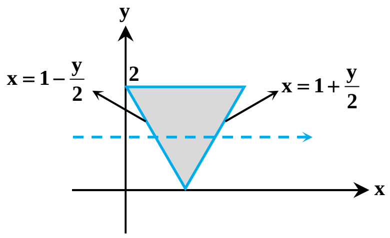
پاسخ: گزینه «۳»

ابتدا ناحیه R داده شده را رسم می‌کنیم:



حال بر حسب ترتیب انتگرال‌گیری حالات مختلف زیر امکان‌پذیر است.

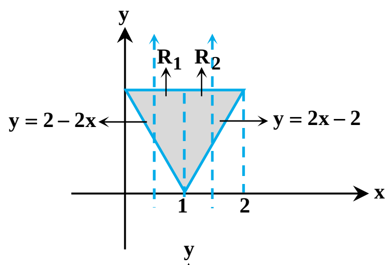
حالت ۱:



$$\Rightarrow\iint_R f(x,y)dA=\int_0^2\int_{1-\frac{y}{2}}^{1+\frac{y}{2}}f(x,y)dxdy$$

لذا گزینه ۱ صحیح است.

حالت ۲:

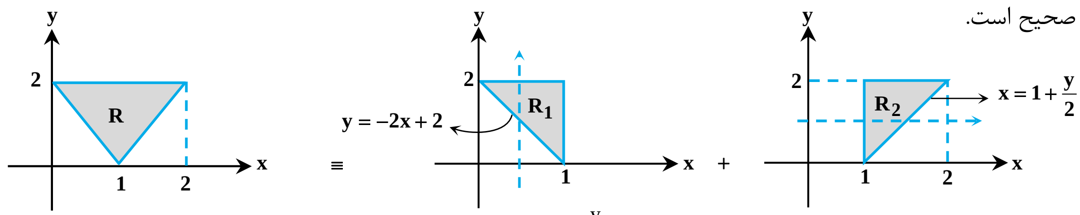


$$\Rightarrow I=\iint_R f(x,y)dA=\iint_{R_1}f(x,y)dA+\iint_{R_2}f(x,y)dA$$

$$\Rightarrow I=\int_0^1\int_{-2x+2}^{2}f(x,y)dydx+\int_1^2\int_{2x-2}^{2}f(x,y)dydx$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

حالت ۳:



بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

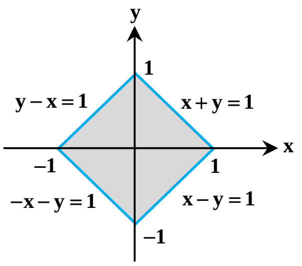
$$I=\iint_{R_1}f(x,y)dA+\iint_{R_2}f(x,y)dA=\int_0^1\int_{-2x+2}^{2}f(x,y)dydx+\int_0^2\int_1^{1+\frac{y}{2}}f(x,y)dxdy$$

درسنامه۲: تغییر متغیر در انتگرال دوگانه

مثال۱: حاصل $I=\iint_{|x|+|y|\le 1} x^2 dxdy$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» ناحیه انتگرال‌گیری به صورت زیر است، با توجه بـه اینکـه مـرز ناحیـه یعنـی نمودار $|x|+|y|=1$ از چهار خـط $x-y=\pm 1$ و $x+y=\pm 1$ تشـکیل شـده اسـت، همـان‌طـور کـه می‌دانید این نوع نواحی نسبت به هر دو محور x و y نامنظم هستند پس با توجه به معادله‌ی مرزهـا از تغییر متغیر $v=x-y$ و $u=x+y$ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:



$$-1\le u\le 1 \quad , \quad -1\le v\le 1$$

ژاکوبین به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$J_{xy}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2 \Rightarrow |J_{uv}|=\frac{1}{|J_{xy}|}=\frac{1}{2}$$

در تابع زیر انتگرال باید x^2 را برحسب u و v بنویسیم. $\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases} \Rightarrow u+v=2x \Rightarrow x=\frac{u+v}{2}$

بنابراین $x^2=\frac{(u+v)^2}{4}$ است.

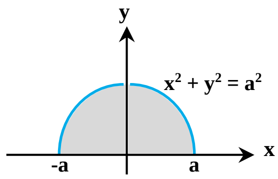
$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{(u+v)^2}{4}\times\frac{1}{2}dvdu=\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(u+v)^2 dvdu \Rightarrow I=\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\left[\frac{(u+v)^3}{3}\right]_{-1}^{1}du=\frac{1}{24}\int_{-1}^{1}[(u+1)^3-(u-1)^3]du$$

$$=\frac{1}{24}\left[\frac{(u+1)^4}{4}-\frac{(u-1)^4}{4}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{96}[2^4-0-0+2^4]=\frac{1}{3}$$

مثال۲: حاصل $\iint_R \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ در صورتی که R ناحیه $x^2+y^2\le a^2$ و $y\ge 0$ باشد چقدر است؟

۱) $\frac{\pi a^3}{2}$ ۲) $\frac{\pi a^3}{3}$ ۳) $\frac{2\pi a^3}{3}$ ۴) $\frac{4\pi a^3}{3}$

پاسخ: گزینه «۲» ناحیه‌ی انتگرال‌گیری یک نیم‌دایره به شعاع a است. عبـارت x^2+y^2 هـم در تـابع زیـر انتگرال وجود دارد. بنابراین از دستگاه قطبی استفاده می‌کنیم. برای نیم‌دایره‌ی بالایی داریم $0\le\theta\le\pi$ و حـدود r هم عبارتند از $0\le r\le a$.



$$\iint_R\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\pi}\int_0^{a} r.rdrd\theta=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{a}r^2dr=\frac{\pi a^3}{3}$$

مثال۳: مقدار انتگرال $I=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ۴) $\sqrt{\pi}$

پاسخ: گزینه «۱» به علت وجود عبارت x^2+y^2 در تابع زیر انتگرال، حدس می‌زنیم که استفاده از دستگاه قطبـی بهتـر اسـت. (در واقـع حـل ایـن انتگرال در دستگاه دکارتی، مشکل است و نیاز به تغییر متغیر و استفاده از تابع گامـا دارد) ناحیـه‌ی انتگـرال‌گیـری، ربـع اول صـفحه اسـت. در ایـن ناحیـه داریم $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ و $0\le r<\infty$:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}re^{-r^2}drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{-e^{-r^2}}{2}\right]_0^{\infty}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

مثال۴: انتگرال دوگانه $z=\cos(x^2+y^2)$ در ناحیه محصور به دایره $x^2+y^2=\frac{\pi}{6}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) 2π

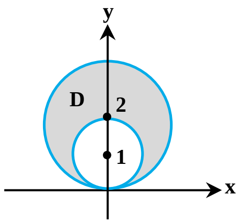
پاسخ: گزینه «۱» ناحیه‌ی داده شده درون یک دایره به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{\frac{\pi}{6}}$ است. عبارت x^2+y^2 نیز در تابع زیر انتگرال دیده می‌شود. پـس از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. درون دایره‌ای به شعاع $\sqrt{\frac{\pi}{6}}$ داریم $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le\sqrt{\frac{\pi}{6}}$.

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}\cos r^2 rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}r\cos r^2dr=2\pi\times\left[\frac{1}{2}\sin r^2\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}=\pi\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$$

مثال۵: مقدار $I=\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ در صورتی که D ناحیه‌ای بین دایره‌های $x^2+y^2=2y$ و $x^2+y^2=4y$ باشد، کدام است؟

۱) $22/5\pi$ ۲) 25π ۳) 45π ۴) 50π

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» وجود x^2+y^2 در انتگرال و دایروی بودن ناحیه‌ی D نشانه‌های استفاده از دستگاه قطبی هستند. اگر بتوانید دایره‌های $x^2+y^2=2y$ و $x^2+y^2=4y$ را رسم کنید بهتر است. اما بدون رسم شکل هم می‌توان حدود r و θ را تشخیص داد. معادله‌ی دایره‌ها را در دستگاه قطبی می‌نویسیم:



$$x^2+y^2=2y \Rightarrow r^2=2r\sin\theta \Rightarrow r=2\sin\theta$$

$$x^2+y^2=4y \Rightarrow r^2=4r\sin\theta \Rightarrow r=4\sin\theta$$

بنابراین حدود r عبارتند از $r=2\sin\theta$ و $r=4\sin\theta$ و از همین جا می‌توانیم حدود θ را هم تشخیص دهیم. متغیر r به لحاظ مفهومی نمی‌تواند منفی باشد و باید همیشه $r\ge 0$ باشد پس $\sin\theta\ge 0$ است یعنی $0\le\theta\le\pi$.

$$I=\iint_D (x^2+y^2)dxdy=\int_0^{\pi}\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^3drd\theta=\int_0^{\pi}[\frac{r^4}{4}]_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}d\theta=\int_0^{\pi}60\sin^4\theta d\theta$$

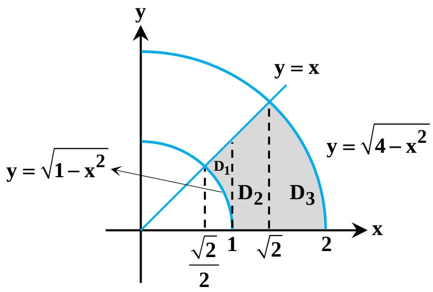
$$=60\int_0^{\pi}(\frac{1-\cos2\theta}{2})^2d\theta=15\int_0^{\pi}(1-2\cos2\theta+\cos^2 2\theta)\,d\theta=15\int_0^{\pi}(1-2\cos2\theta+\frac{1}{2}+\frac{\cos4\theta}{2})d\theta$$

$$\Rightarrow I=15[\theta-\sin2\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{1}{8}\sin4\theta]_0^{\pi}=15[\pi+\frac{\pi}{2}]=\frac{45}{2}\pi=22/5\pi$$

مثال۶: حاصل $I=\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x}xydydx+\int_1^{\sqrt2}\int_0^x xydydx+\int_{\sqrt2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}}xydydx$ کدام است؟

۱) $\frac{5\sqrt2}{4}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{15\sqrt2}{16}$ ۴) $\frac{15}{16}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را تشخیص می‌دهیم.



ابتدا با یک نگاه به کران‌های استفاده شده در این انتگرال‌ها متوجه می‌شویم که نواحی موردنظر بین خط $y=x$، نیم‌دایره‌ی $y=\sqrt{1-x^2}$ و نیم‌دایره‌ی $y=\sqrt{4-x^2}$ قرار دارند. محل برخورد خط $y=x$ با این نیم‌دایره‌ها به ترتیب در $x=\frac{\sqrt2}{2}$ و $x=\sqrt2$ است.

اکنون به ۳ انتگرال دوگانه‌ی داده شده توجه می‌کنیم.

در اولین انتگرال دوگانه داریم $\frac{\sqrt2}{2}\le x\le 1$ و $\sqrt{1-x^2}\le y\le x$، این ناحیه را D_1 می‌نامیم. در دومین انتگرال دوگانه داریم $1\le x\le\sqrt2$ و $0\le y\le x$، این ناحیه را با D_2 نشان می‌دهیم. در سومین انتگرال دوگانه داریم $\sqrt2\le x\le 2$ و $0\le y\le\sqrt{4-x^2}$، این ناحیه را D_3 می‌نامیم. اکنون به ناحیه‌ی $D=D_1\cup D_2\cup D_3$ توجه کنید. این ناحیه در مختصات قطبی به راحتی قابل بیان است. روی خط $y=x$ داریم $\theta=\frac{\pi}{4}$. بنابراین در این ناحیه $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ است و واضح است که بین دو دایره به شعاع‌های یک و دو داریم $1\le r\le 2$. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$I=\iint_D xydxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^2(r\cos\theta)(r\sin\theta)rdrd\theta=(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos\theta d\theta)(\int_1^2 r^3dr)=[\frac{\sin^2\theta}{2}]_0^{\frac{\pi}{4}}\times[\frac{r^4}{4}]_1^2=\frac{15}{16}$$

مثال۷: حاصل $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta}\rho\sin\theta d\rho d\theta$ کدام است؟

۱) 6 ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) π

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» حدود انتگرال داده شده‌اند. کافیست آن را حل کنیم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta}\rho\sin\theta\,d\rho d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta[\frac{\rho^2}{2}]_0^{\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin\theta\times\frac{\cos^2\theta}{2}]d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\cos^2\theta}_{u^2}\,\underbrace{\sin\theta d\theta}_{-du}=-\frac{1}{2}[\frac{\cos^3\theta}{3}]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{6}$$

مثال ۸: حاصل $\iint_R xydA$ وقتی R ناحیه محدود به دایره $x^2+y^2=1$ و محورهای مختصات در ربع اول باشد، کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{8}$

پاسخ: گزینه «۴» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\iint_R xydA=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\cos\theta\times r\sin\theta\times rdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2\theta d\theta\times\int_0^1 r^3dr=\frac{-1}{4}\cos 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\times\frac{1}{4}r^4\Big|_0^1=\frac{1}{8}$$

مثال ۹: مقدار انتگرال $\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$ که در آن D ناحیه محدود به بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ است، برابر است با: (عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{3}\pi ab$ ۲) $\frac{2}{3}\pi ab$ ۳) πab ۴) $\frac{4}{3}\pi ab$

پاسخ: گزینه «۲» از مختصات بیضوی استفاده می‌کنیم:

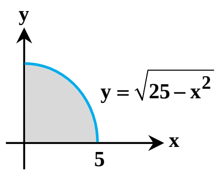
$$\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\end{cases},\quad J=abr$$

$$\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{1-r^2}\times abrdrd\theta=2\pi ab\times\frac{-1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}\pi ab$$

مثال ۱۰: حاصل $\int_0^5\int_0^{\sqrt{25-x^2}}dydx$، کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{15\pi}{2}$ ۲) $\frac{25\pi}{2}$ ۳) $\frac{15\pi}{4}$ ۴) $\frac{25\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به ناحیه انتگرال‌گیری از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:



$$\int_0^5\int_0^{\sqrt{25-x^2}}dydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^5 rdrd\theta=\frac{25\pi}{4}$$

مثال ۱۱: حاصل $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\frac{1}{1+x^2+y^2}dydx$ برابر کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{\pi}{2}\text{Ln}\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{\pi}{2}\text{Ln}5$ ۳) $\frac{\pi}{4}\text{Ln}\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{\pi}{4}\text{Ln}5$

پاسخ: گزینه «۴» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\frac{1}{1+x^2+y^2}dydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2\frac{1}{1+r^2}\times rdrd\theta=(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta)(\int_0^2\frac{r}{1+r^2}dr)=\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\times\frac{1}{2}\text{Ln}(1+r^2)\Big|_0^2=\frac{\pi}{4}\text{Ln}5$$

مثال ۱۲: اگر $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,|x|+|y|\le 1\}$ و $I=\int_{-1}^1 f(u)du$ ، $\iint_D f(x+y)dxdy$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $-I$ ۲) $\frac{1}{2}I$ ۳) I ۴) $2I$

پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه انتگرال داده شده از تغییر متغیر مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}\Rightarrow J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\end{vmatrix}=\frac{-1}{2}$$

با تغییر متغیر فوق ناحیه D در صفحه uov به صورت روبرو در می‌آید: $R:-1\le u\le 1\ ,\ -1\le v\le 1$

بنابراین داریم:

$$\iint_D f(x+y)dxdy=\iint_R f(u)\,|J(u,v)|\,dudv=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\int_{-1}^1 f(u)dudv=\frac{1}{2}\int_{-1}^1(\int_{-1}^1 f(u)du)dv=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 Idv=I$$

مثال ۱۳: مقدار $\iint \frac{x+y}{\sqrt{x^۲+y^۲}}dxdy$ روی ربع اول دایره‌ای به معادله $x^۲+y^۲=a^۲$ عبارتست از: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) πa ۲) $a^۲$ ۳) $\pi a^۲$ ۴) $\frac{a^۲}{۲}$

پاسخ: گزینه «۲» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\iint_R \frac{x+y}{\sqrt{x^۲+y^۲}}dxdy=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^a \frac{r\cos\theta+r\sin\theta}{r}\times rdrd\theta=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta\times\int_۰^a rdr=a^۲$$

مثال ۱۴: اگر D ناحیه $\begin{cases}۱\le x^۲+y^۲\le ۴\\ y\ge ۰\end{cases}$ در صفحه باشد، حاصل $\iint_D Ln(x^۲+y^۲)dA$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) $۲\pi(Ln۴-\frac{۳}{۴})$ ۲) $\pi(Ln۴-\frac{۳}{۴})$ ۳) $۴\pi(Ln۴-\frac{۳}{۴})$ ۴) $۴۲\pi(Ln۴-\frac{۳}{۴})$

پاسخ: گزینه «۱» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\iint_D Ln(x^۲+y^۲)dA=\int_۰^{\pi}\int_۱^۲ Ln(r^۲)\times rdrd\theta=۲\int_۰^{\pi}d\theta\times\int_۱^۲ rLnrdr=۲\pi(Ln۴-\frac{۳}{۴})$$

مثال ۱۵: مقدار انتگرال $\iint_D(\frac{x-۲y}{x+۲y})^۳dxdy$ که در آن D ناحیه محصور به خطوط، $x-۲y=۱$ ، $x-۲y=۲$ ، $x+۲y=۱$ و $x+۲y=۳$ می‌باشد، کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

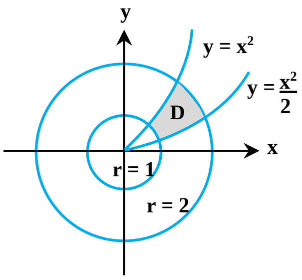
پاسخ: گزینه «۱» از تغییر متغیر $u=x-۲y$ و $v=x+۲y$ استفاده می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$\frac{۱}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}۱&-۲\\۱&۲\end{vmatrix}=۴\Rightarrow J=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین داریم:

$$\iint_D(\frac{x-۲y}{x+۲y})^۳dxdy=\int_۱^۳\int_۱^۲(\frac{u}{v})^۳\times\frac{۱}{۴}dudv=\frac{۱}{۴}\int_۱^۳\int_۱^۲\frac{u^۳}{v^۳}dudv=\frac{۱۵}{۱۶}\int_۱^۳\frac{dv}{v^۳}=\frac{۵}{۱۲}$$

مثال ۱۶: حاصل $\iint_D \frac{۲y^۲+x^۲}{x^۳}dxdy$ که در آن D به صورت زیر است، چقدر است؟ (عمران ـ آزاد ۸۲)



۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) ۱

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به مرزهای ناحیه انتگرال‌گیری از تغییر متغیر $u=\frac{y}{x^۲}$ و $v=x^۲+y^۲$ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$J_{xy}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{-۲y}{x^۳}&\frac{۱}{x^۲}\\ ۲x&۲y\end{vmatrix}=\frac{-۴y^۲}{x^۳}-\frac{۲x}{x^۲}=\frac{-۴y^۲-۲x^۲}{x^۳}\Rightarrow|J_{uv}|=\frac{x^۳}{۲x^۲+۴y^۲}$$

کران‌های ناحیه انتگرال‌گیری به صورت $\frac{۱}{۲}\le u\le ۱$ و $۱\le v<۴$ در می‌آید. در نتیجه داریم:

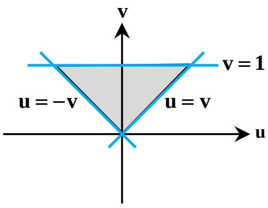
$$\iint_D\frac{۲y^۲+x^۲}{x^۳}dA=\int_۱^۴\int_{\frac{۱}{۲}}^۱\frac{۲y^۲+x^۲}{x^۳}\times\frac{x^۳}{۲x^۲+۴y^۲}dudv=\int_۱^۴\int_{\frac{۱}{۲}}^۱\frac{۱}{۲}dudv=\frac{۳}{۴}$$

مثال ۱۷: مقدار $\iint_E \sin(\frac{x-y}{x+y})dxdy$ وقتی E ناحیه محدود به $x=0$ ، $y=0$ و $x+y\le 1$ باشد کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{cases} u=x-y \\ v=x+y \end{cases} \Rightarrow J_{xy}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2 \Rightarrow J_{uv}=\frac{1}{J_{xy}}=\frac{1}{2}$$



مرزهای E عبارتند از $x=0$ ، $y=0$ و $x+y=1$. در دستگاه uov این مرزها به ترتیب تبدیل می‌شوند به خطوط $u=-v$ و $v=u$ و $v=1$. بنابراین در دستگاه uov (مطابق شکل) داریم $0\le v\le 1$ و $-v\le u\le v$.

بنابراین داریم:
$$\iint_E \sin(\frac{x-y}{x+y})dxdy=\int_0^1\int_{-v}^{v}\sin\frac{u}{v}\times\frac{1}{2}dudv$$

تابع $\sin\frac{u}{v}$، نسبت به متغیر u تابعی فرد می‌باشد و ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به u متقارن است، بنابراین حاصل انتگرال برابر صفر است.

مثال ۱۸: مقدار انتگرال دوگانه $\iint_R \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dA$ روی ناحیه $R:\frac{\pi^2}{16}\le x^2+y^2\le\frac{\pi^2}{9}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۴)

۱) $\pi\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\pi(\sqrt{2}-1)$ ۳) $\pi(\sqrt{2}+1)$ ۴) $\pi(\frac{\sqrt{2}+1}{2})$

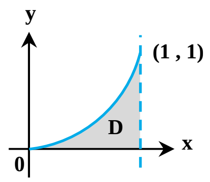
پاسخ: گزینه «۲» با توجه به دایروی بودن ناحیه انتگرال‌گیری و همچنین وجود x^2+y^2 در تابع زیر انتگرال، از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

در این صورت داریم:
$$\frac{\pi^2}{16}\le x^2+y^2\le\frac{\pi^2}{9}\Rightarrow\frac{\pi^2}{16}\le r^2\le\frac{\pi^2}{9}\Rightarrow\frac{\pi}{4}\le r\le\frac{\pi}{3}\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

$$\iint_R\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dA=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin r}{r}\times rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin rdr$$

$$=\theta\Big|_0^{2\pi}\times(-\cos r)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=2\pi\times(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})=\pi(\sqrt{2}-1)$$

مثال ۱۹: اگر $D=\{(x,y):0\le y\le x^2\ ,\ 0\le x\le 1\}$ ، آن‌گاه مقدار انتگرال دوگانه ناسره $\iint_D\frac{dA}{(x-y)^2}$ ، کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۴)



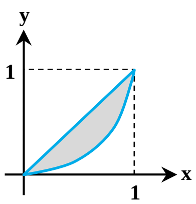
۱) صفر
۲) 1
۳) $\ln 2$
۴) ∞

پاسخ: گزینه «۴»
$$\iint_D\frac{dA}{(x-y)^2}=\int_0^1\int_0^{x^2}\frac{1}{(x-y)^2}dydx=\int_0^1\frac{1}{x-y}\Big|_0^{x^2}dx=\int_0^1(\frac{1}{x-x^2}-\frac{1}{x})dx=\int_0^1\frac{dx}{1-x}=-[\ln|1-x|]_0^1=\infty$$

مثال ۲۰: مقدار انتگرال $\int_0^1\left[\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dy\right]dx$ برابر با چیست؟ (عمران ـ سراسری ۸۵)

۱) $\sqrt{2}+1$ ۲) $2\sqrt{2}-1$ ۳) $\sqrt{2}-1$ ۴) $2\sqrt{2}-2$

پاسخ: گزینه «۳» می‌توان انتگرال را به طور مستقیم محاسبه کرد ولی شاید استفاده از مختصات قطبی بهتر باشد.



معادله $y=x^2$ را در مختصات قطبی می‌نویسیم، $y=x^2\ \Rightarrow r\sin\theta=r^2\cos^2\theta\ \Rightarrow r=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$. از طرفی روی خط $y=x$ داریم $\theta=\frac{\pi}{4}$. بنابراین با توجه به شکل، $0\le r\le\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$ و $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ است.

$$\int_0^1\int_{x^2}^{x}\frac{dydx}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta d\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1$$

مثال۲۱: اگر A ناحیه درون دایره به معادله‌ی $x^۲+y^۲=x$ باشد، مقدار $\iint_A \frac{dxdy}{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۵)

۱) $\pi-۱$ ۲) $\pi-۲$ ۳) $۲\pi-۱$ ۴) $۲\pi-۲$

پاسخ: گزینه «۲» برای محاسبه انتگرال از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. معادله دایره داده شده به صورت $r^۲=r\cos\theta$ و یا $r=\cos\theta$ در می‌آید $(-\frac{\pi}{۲}\le\theta\le\frac{\pi}{۲})$. بنابراین داریم:

$$\iint_A\frac{dxdy}{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}}=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{\circ}^{\cos\theta}\frac{rdrd\theta}{\sqrt{۱-r^۲}}=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}-\sqrt{۱-r^۲}\Big|_{\circ}^{\cos\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}(۱-|\sin\theta|)d\theta=۲\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}(۱-\sin\theta)d\theta=۲(\theta+\cos\theta)\Big|_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}=\pi-۲$$

مثال۲۲: حاصل $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$ داخل مثلثی به معادلات اضلاع $x+y=۱$، $x=\circ$ و $y=\circ$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۲}(e+\frac{۱}{e})$ ۲) $\frac{۱}{۲}(e-\frac{۱}{e})$ ۳) $\frac{۱}{۴}(e+\frac{۱}{e})$ ۴) $\frac{۱}{۴}(e-\frac{۱}{e})$

پاسخ: گزینه «۴» از تغییر متغیر $u=x+y$ و $v=x-y$ استفاده می‌کنیم. در این صورت ناحیه انتگرال‌گیری به صورت $\circ\le u\le ۱$ و $-u\le v\le u$ در می‌آید.

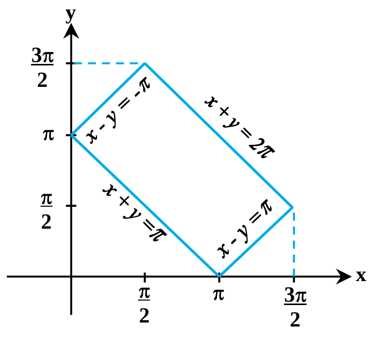
$$\frac{۱}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}۱&۱\\۱&-۱\end{vmatrix}=۲\Rightarrow|J|=\frac{۱}{۲}$$

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy=\frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{۱}\int_{-u}^{u}e^{\frac{v}{u}}dvdu=\frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{۱}ue^{\frac{v}{u}}\Big|_{-u}^{u}du=\frac{۱}{۲}(e-\frac{۱}{e})\int_{\circ}^{۱}udu=\frac{۱}{۴}(e-\frac{۱}{e})$$

مثال۲۳: اگر S یک چهار ضلعی با رئوس $(\circ,\pi)$، $(\pi,\circ)$، $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$، $(\frac{۳\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ باشد، آن‌گاه مقدار انتگرال دوگانه $\iint_S(x-y)\sin(x+y)dxdy$ برابر است با: (نفت ـ سراسری ۸۵)

۱) $-\pi$ ۲) $\circ$ ۳) π ۴) ۲π

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به تابع مقابل انتگرال از تغییر متغیرهای زیر استفاده می‌کنیم:

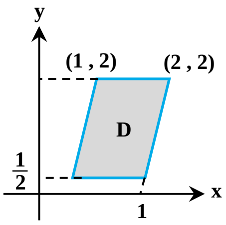


$$\begin{cases}u=x-y\\v=x+y\end{cases}\Rightarrow\frac{۱}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}۱&-۱\\۱&۱\end{vmatrix}=۲\Rightarrow|J|=\frac{۱}{۲}$$

با توجه به اینکه معادلات مرزهای ناحیه S به صورت $x+y=\pi$، $x+y=۲\pi$ و $x-y=\pm\pi$ هستند، بنابراین مرزهای S در دستگاه جدید به صورت $\pi\le v\le ۲\pi$ و $-\pi\le u\le\pi$ در می‌آیند.

$$\iint_S(x-y)\sin(x+y)dxdy=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\pi}^{۲\pi}\frac{۱}{۲}u\sin vdvdu=\frac{۱}{۲}\int_{-\pi}^{\pi}udu\times\int_{\pi}^{۲\pi}\sin vdv=\circ$$

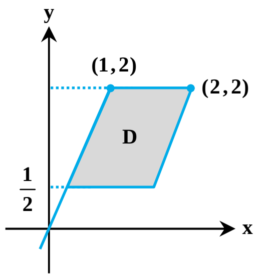
مثال ۲۴: مقدار انتگرال $I = \iint_D \frac{(y-۲x)^۶}{y^۴}dA$ که در آن D ناحیه‌ی شکل مقابل است، کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)



۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۲۱}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

☑ **پاسخ:** هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. متأسفانه شکل رسم شده دارای ایراداتی است که حل این سؤال را غیرممکن کرده است. برای حل کردن سؤال لازم است معادله‌ی مرزها را داشته باشیم. مرزهای پایینی و بالایی به وضوح $y = \frac{۱}{۲}$ و $y = ۲$ هستند، اما خطوط مایلی که مرزهای D هستند قابل تشخیص نیستند. زیرا از هر خط فقط یک نقطه‌اش را داریم. ضمن آن‌که نقطه‌ی (۱,۲) و نقطه‌ی $x = ۱$ در یک راستا قرار نگرفته‌اند که این امر غیرمنطقی است. زیرا هر دوی آن‌ها دارای طول‌های یکسانی هستند. با این حال اگر شکل را اصلاح کنیم، انتگرال به این‌صورت حل می‌شود:



خطی که از مبدأ و نقطه‌ی (۱,۲) می‌گذرد خط $y = ۲x$ است. ضلع موازی با این خط، دارای شیب ۲ است و از نقطه‌ی (۲,۲) عبور می‌کند پس معادله‌ی آن $y = ۲x - ۲$ است. مرزهای افقی هم $y = ۱$ و $y = \frac{۱}{۲}$ هستند. معادله‌ی مرزها را به این صورت می‌نویسیم: $y - ۲x = ۰$ ، $y - ۲x = -۲$ ، $y = ۱$ ، $y = \frac{۱}{۲}$. با انتخاب $u = y - ۲x$ و $v = y$ معادله‌ی مرزها به صورت $u = ۰$ ، $u = -۲$ ، $v = ۱$ و $v = \frac{۱}{۲}$ در می‌آید. ژاکوبین دستگاه جدید را حساب می‌کنیم.

$$J_{xy} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = -۲ \Rightarrow J_{uv} = \frac{۱}{-۲}$$

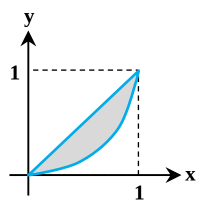
البته قدرمطلق آن یعنی $\frac{۱}{۲}$ در انتگرال ضرب می‌شود. پس داریم:

$$\text{جواب} = \int_{\frac{۱}{۲}}^{۲}\int_{-۲}^{۰}\frac{u^۶}{v^۴}\times\frac{۱}{۲}dudv = \frac{۱}{۲}\left(\int_{\frac{۱}{۲}}^{۲}\frac{dv}{v^۴}\right)\left(\int_{-۲}^{۰}u^۶du\right) = \frac{۱}{۲}\left[-\frac{۱}{۳v^۳}\right]_{\frac{۱}{۲}}^{۲}\times\left[\frac{u^۷}{۷}\right]_{-۲}^{۰} = ۲۴$$

مثال ۲۵: مقدار انتگرال $\int_۰^۱\int_{x^۲}^{x}\frac{dydx}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$ برابر با چیست؟ (عمران ـ سراسری ۸۶)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $\sqrt{۲}+۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌توان انتگرال را به طور مستقیم محاسبه کرد ولی شاید استفاده از مختصات قطبی بهتر باشد.



معادله $y = x^۲$ را در مختصات قطبی می‌نویسیم، $y = x^۲ \Rightarrow r\sin\theta = r^۲\cos^۲\theta \Rightarrow r = \frac{\sin\theta}{\cos^۲\theta}$. از طرفی روی خط $y = x$ داریم $\theta = \frac{\pi}{۴}$. بنابراین با توجه به شکل، $۰ \le r \le \frac{\sin\theta}{\cos^۲\theta}$ و $۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۴}$ است.

$$\int_۰^۱\int_{x^۲}^{x}\frac{dydx}{\sqrt{x^۲+y^۲}} = \int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\int_۰^{\frac{\sin\theta}{\cos^۲\theta}}drd\theta = \int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin\theta d\theta}{\cos^۲\theta} = \frac{۱}{\cos\theta}\Big|_۰^{\frac{\pi}{۴}} = \sqrt{۲}-۱$$

مثال ۲۶: حاصل $\iint \frac{tgh(x^۲+y^۲)}{cosh(x^۲+y^۲)}dxdy$ روی صفحه xoy کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۶)

۱) π ۲) $\frac{۲\pi}{e}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}(e+e^{-۱})$ ۴) انتگرال واگراست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به تابع مقابل انتگرال از تغییر مختصات قطبی استفاده می‌کنیم، صفحه xoy در مختصات قطبی به صورت $\begin{cases} ۰ \le r < \infty \\ ۰ \le \theta < ۲\pi \end{cases}$ توصیف می‌شود. بنابراین داریم:

$$\iint\frac{tgh(x^۲+y^۲)}{cosh(x^۲+y^۲)}dxdy = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\infty}\frac{tghr^۲}{cosh\,r^۲}.rdrd\theta = \int_۰^{۲\pi}d\theta\int_۰^{\infty}\frac{r\sinh r^۲}{cosh^۲\,r^۲}dr = (۲\pi)(\frac{۱}{۲}) = \pi$$

توضیح: برای محاسبه انتگرال دوم در بالا از تغییر متغیر $u = cosh\,r^۲$ و $du = ۲r\sinh r^۲$ استفاده کرده‌ایم که در این صورت داریم:

$$\int\frac{r\sinh r^۲}{cosh^۲\,r^۲}dr = \frac{۱}{۲}\int\frac{du}{u^۲} = \frac{-۱}{۲u}+c = \frac{-۱}{۲cosh\,r^۲}+c$$

مثال ۲۷: مقدار انتگرال $\int_0^1\int_0^{1-x}\cos(\frac{x-y}{x+y})dydx$ برابر است با: (عمران ـ سراسری ۸۷)

۱) $\sin 1$ ۲) $\frac{3}{2}\sin 1$ ۳) $\frac{1}{2}\sin 1$ ۴) $2\sin 1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از تغییر متغیر $\begin{cases}u=x-y\\v=x+y\end{cases}$, $|J|=\frac{1}{2}$ نتیجه می‌شود:

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\cos(\frac{x-y}{x+y})dydx=\frac{1}{2}\int_0^1\int_{-v}^{v}\cos\frac{u}{v}\,dudv=\frac{1}{2}\int_0^1 v\sin(\frac{u}{v})\Big|_{-v}^{v}dv=\sin 1\times\int_0^1 v\,dv=\frac{1}{2}\sin 1$$

مثال ۲۸: $\iint_D\frac{x^2}{y^4}dA$ که در آن D ناحیه محدود به هذلولی‌های $xy=2$ ، $xy=4$ و سهمی‌های $y^2=x$ و $y^2=3x$ است، کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{8}{27}$ ۴) $\frac{1}{30}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به معادله مرزهای ناحیه از تغییر متغیر $\begin{cases}u=xy\\v=\frac{y^2}{x}\end{cases}$ استفاده می‌کنیم، در این صورت $2\le u\le 4$ و $1\le v\le 3$ بدست می‌آید و ژاکوبین برابر است با:

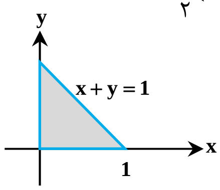
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}\\\frac{\partial v}{\partial x}&\frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y&x\\-\frac{y^2}{x^2}&\frac{2y}{x}\end{vmatrix}=\frac{3y^2}{x}\Rightarrow|J|=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{x}{3y^2}=\frac{1}{3v}$$

عبارت مقابل انتگرال در صورت مسأله یعنی $\frac{x^2}{y^4}$ برحسب متغیرهای جدید به صورت $\frac{1}{v^2}$ در می‌آید، پس داریم:

$$\iint_D\frac{x^2}{y^4}dA=\int_2^4\int_1^3\frac{1}{3v^3}dvdu=\frac{1}{3}\int_2^4du\int_1^3\frac{dv}{v^3}=\frac{8}{27}$$

مثال ۲۹: انتگرال دوگانه $I=\int_0^1\int_0^{1-x}\exp(\frac{y}{x+y})dydx$ برابر است با: (عمران ـ سراسری ۸۴ و ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{2}e-1$ ۲) $\frac{1}{2}(e-1)$ ۳) $\frac{1}{2}e+1$ ۴) $\frac{1}{2}(e+1)$



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ناحیه انتگرال‌گیری به‌صورت مقابل می‌باشد. برای محاسبه انتگرال از تغییر متغیر $\begin{cases}u=y\\v=x+y\end{cases}$ استفاده می‌کنیم، در این صورت $0\le v\le 1$ و $0\le u\le v$ حاصل می‌شود.

$$J_{xy}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=-1\Rightarrow|J_{uv}|=1\Rightarrow\int_0^1\int_0^{1-x}e^{\frac{y}{x+y}}dydx=\int_0^1\int_0^v e^{\frac{u}{v}}dudv=\int_0^1 ve^{\frac{u}{v}}\Big|_0^v dv=(e-1)\int_0^1 vdv=\frac{e-1}{2}$$

مثال ۳۰: اگر $D=\{(x,y):x,y>0,x+y<1\}$ ، مقدار $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$ چقدر است؟ (معدن ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{4}(e-e^{-1})$ ۲) $\frac{1}{4}(e^{-1}+e)$ ۳) $\frac{1}{2}(e-e^{-1})$ ۴) $\frac{1}{2}(e^{-1}+e)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به تابع تحت انتگرال از تغییر متغیر $\begin{cases}u=x-y\\v=x+y\end{cases}$ استفاده می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$J_{xy}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=2\Rightarrow|J_{uv}|=\frac{1}{2}$$

با توجه به ناحیه انتگرال‌گیری $0\le v\le 1$, $-v\le u\le v$ حاصل می‌شود، بنابراین داریم:

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy=\frac{1}{2}\int_0^1\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}dudv=\frac{1}{2}\int_0^1 ve^{\frac{u}{v}}\Big|_{-v}^{v}dv=\frac{1}{2}\int_0^1(e-e^{-1})vdv=\frac{1}{4}(e-e^{-1})v^2\Big|_0^1=\frac{1}{4}(e-e^{-1})$$

مثال ۳۱: مقدار $\iint_A (\sqrt{xy}+\sqrt{\frac{y}{x}})dxdy$، که در آن A ناحیه محصور بین هذلولی‌های $xy=۱$ ، $xy=۲$ و خطوط $y=x$ و $y=۴x$ در ربع اول می‌باشد برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) $۲\sqrt{۸}+۱$ ۲) $۲\sqrt{۸}-۱$ ۳) $-۲\sqrt{۸}-۱$ ۴) $-۲\sqrt{۸}+۱$

☑ **پاسخ:** هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با استفاده از روش تغییر متغیر به صورت $v=\frac{y}{x}$ و $u=xy$ انتگرال موردنظر را محاسبه می‌کنیم. با توجه به محدوده داده شده در سؤال داریم $۱\le u\le ۲$ و $۱\le v\le ۴$. همچنین داریم:

$$J_{uv}=\frac{۱}{J_{xy}}=\frac{۱}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{۱}{\begin{vmatrix} y & x\\ -\frac{y}{x^۲} & \frac{۱}{x}\end{vmatrix}}=\frac{۱}{\frac{y}{x}+\frac{y}{x}}=\frac{۱}{۲v}\Rightarrow \iint_A(\sqrt{xy}+\sqrt{\frac{y}{x}})dxdy=\int_۱^۴\int_۱^۲\frac{۱}{۲v}(\sqrt{u}+\sqrt{v})dudv$$

در انتگرال وسطی $\frac{۱}{۲v}$ ضریب ثابت است و می‌توان آن را از انتگرال خارج کرد:

$$\int_۱^۲(\sqrt{u}+\sqrt{v})du=\left[\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}+\sqrt{v}u\right]_۱^۲=\frac{۲}{۳}(\sqrt{۸}-۱)+\sqrt{v}$$

با قرار دادن جواب در انتگرال دوم داریم:

$$\Rightarrow\int_۱^۴\frac{\frac{۲}{۳}(\sqrt{۸}-۱)+\sqrt{v}}{۲v}dv=\left[\frac{۱}{۳}(\sqrt{۸}-۱)Lnv+\sqrt{v}\right]_۱^۴=\frac{۲}{۳}(\sqrt{۸}-۱)Ln۲+۱$$

مثال ۳۲: مقدار انتگرال $\iint_D Ln(x^۲+y^۲)dxdy$ که در آن D ناحیه بین دو دایره $x^۲+y^۲=a^۲$ و $x^۲+y^۲=b^۲$ $(۰<a<b)$ در نیم صفحه بالایی می‌باشد برابر است با: (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\pi(b^۲Lnb-a^۲Lna+\frac{۱}{۲}b^۲-\frac{۱}{۲}a^۲)$ ۲) $\pi(bLnb-aLna-\frac{۱}{۲}b^۲+\frac{۱}{۲}a^۲)$

۳) $\pi(b^۲Lnb-a^۲Lna-\frac{۱}{۲}b^۲+\frac{۱}{۲}a^۲)$ ۴) $\pi(bLnb-aLna+\frac{۱}{۲}b^۲-\frac{۱}{۲}a^۲)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای محاسبه انتگرال از تغییر مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. در این صورت ناحیه $a^۲\le x^۲+y^۲\le b^۲$ به صورت $a^۲\le r^۲\le b^۲$ یا $a\le r\le b$ در می‌آید و در نتیجه انتگرال داده شده به صورت زیر خواهد بود:

$$\iint_D Ln(x^۲+y^۲)dxdy=\int_۰^\pi\int_a^b Ln(r^۲)rdrd\theta=\int_۰^\pi d\theta\int_a^b ۲rLnrdr=\theta\Big|_۰^\pi\times(r^۲Lnr-\frac{r^۲}{۲})\Big|_a^b=\pi(b^۲Lnb-\frac{b^۲}{۲}-a^۲Lna+\frac{a^۲}{۲})$$

مثال ۳۳: حاصل $\iint_D\sqrt{x^۲+y^۲}dxdy$ که در آن D ناحیه محدود به دو دایره به مرکزهای مبدأ مختصات و شعاع‌های ۲ و ۳ واحد باشد، برابر کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۰)

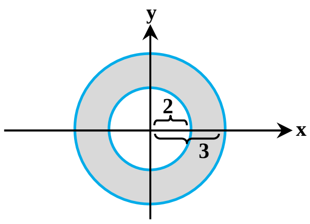
۱) $\frac{۲۲\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۳۲\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۳۸\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۲۸\pi}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ناحیه انتگرال‌گیری عبارت است از:

$$D=\{(x,y)\ ,\ ۴\le x^۲+y^۲\le ۹\}$$

برای محاسبه‌ی این انتگرال از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$r^۲=x^۲+y^۲$$
$$dxdy=rdrd\theta$$



با توجه به شکل رسم شده در بالا، حدود انتگرال دوگانه در دستگاه مختصات قطبی به صورت مقابل می‌باشد:

$$۰\le\theta\le ۲\pi\quad ,\quad ۲\le r\le ۳$$

$$D=\{(r,\theta):۲\le r\le ۳\ \ ,\ ۰\le\theta\le ۲\pi\}$$

اگر مقدار انتگرال را با I نمایش دهیم، داریم:

$$I=\iint_D\sqrt{x^۲+y^۲}\ dxdy=\int_۰^{۲\pi}\int_۲^۳ r^۲\ drd\theta=\int_۰^{۲\pi}[\frac{۱}{۳}r^۳]_۲^۳\ d\theta=\int_۰^{۲\pi}\frac{۱۹}{۳}d\theta=۲\pi(\frac{۱۹}{۳})=\frac{۳۸\pi}{۳}$$

درسنامه۳: کاربردهای انتگرال دوگانه

مثال۱: هرگاه ناحیه D درون بیضی $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ باشد و چگالی هر نقطه از ناحیه D برابر $f(x,y)=x^2y^2$ باشد. جرم جسم چقدر است؟

۱) 6π ۲) 9π ۳) 4π ۴) 12π

پاسخ: گزینه «۲» ناحیه‌ی انتگرال‌گیری یک بیضی با شعاع‌های $a=3$ و $b=2$ است. بهتر است از تغییر مختصات بیضوی بـه صـورت $x=3r\cos\theta$ و $y=2r\sin\theta$ استفاده کنیم. با این کار این بیضی تبدیل به دایره‌ی واحد می‌شود و خواهیم داشت: $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le 1$. ژاکوبین دستگاه بیضوی برابر است با: $J=abr=6r$.

$$\text{جرم}=\iint_D x^2y^2dA=\int_0^{2\pi}\int_0^1(9r^2\cos^2\theta)(4r^2\sin^2\theta)(2\times 3)rdrd\theta=216\left(\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^1 r^5dr\right)=216\times\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{6}=9\pi$$

توضیح: برای محاسبه $\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta$ می‌توانیم از تابع گاما استفاده کنیم (رجوع کنید به کتاب ریاضی عمومی (۱)) و یا به شکل زیر عمل کنیم:

$$\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta=\frac{1}{8}\left(\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{4}$$

مثال۲: جرم یک صفحه مربعی با رئوس $(0,0),(0,a),(a,0)$ و (a,a)، که چگالی آن در نقطه (x,y) سه برابر مربع فاصله آن نقطه از مبـدأ مختصـات می‌باشد، کدام است؟

۱) a^4 ۲) $2a^4$ ۳) $\frac{2}{3}a^4$ ۴) $\frac{3}{2}a^4$

پاسخ: گزینه «۲» فاصله‌ی نقطه‌ی (x,y) از مبدأ برابر است با $\sqrt{x^2+y^2}$. بنابراین تابع چگالی از ضابطه‌ی $\rho(x,y)=3(x^2+y^2)$ به دست می‌آید. در ناحیه‌ی انتگرال‌گیری مربعی است که در آن $0\le x\le a$ و $0\le y\le a$ است.

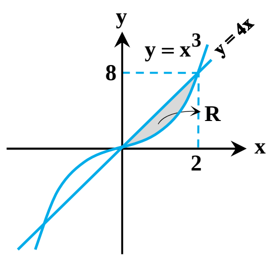
$$M=\int_0^a\int_0^a 3(x^2+y^2)dydx=3\int_0^a\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^a dx=3\int_0^a\left[x^2a+\frac{a^3}{3}\right]dx=3\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{a^3}{3}x\right]_0^a=2a^4$$

مثال۳: فاصله مرکز ناحیه محدود به منحنی $y=x^3$ و خط $y=4x$ واقع در ناحیه اول از محور y ها چقدر است؟

۱) $\frac{16}{15}$ ۲) $\frac{15}{16}$ ۳) $\frac{32}{21}$ ۴) $\frac{64}{21}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا دقت کنید که فاصله‌ی هر نقطه از محور y ها برابـر اسـت بـا قـدرمطلقِ طـول آن نقطه. اگر $(\bar{x},\bar{y})$ مختصات مرکز این ناحیه باشد، کافی است $\bar{x}$ را بـه دسـت آوریـم تـا فاصلـه‌ی ایـن نقطـه بـا محور y ها معلوم شود. برای تشخیص حدود x و y ابتدا محل برخورد منحنی‌های داده شده را تعیین می‌کنیم.

$$x^3=4x\Rightarrow 4x-x^3=0\Rightarrow x(4-x^2)=0\Rightarrow x=0,\pm 2$$



البته در ربع اول هستیم پس $0\le x\le 2$ است. حدود y نیز واضح هستند، $y=x^3$ و $y=4x$ در مسأله داده شده‌اند. این ناحیه را با R نشان داده‌ایم.

$$\bar{x}=\frac{\iint_R xdydx}{\iint_R dydx}=\frac{\int_0^2\int_{x^3}^{4x}xdydx}{\int_0^2\int_{x^3}^{4x}dydx}=\frac{\int_0^2(4x^2-x^4)dx}{\int_0^2(4x-x^3)dx}=\frac{\left(4\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2}{\left(4\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2}=\frac{\frac{64}{15}}{4}=\frac{16}{15}$$

توضیح: اگر شکل را رسم نکرده باشید برای آن‌کـه متوجـه شـوید $y=x^3$ و $y=4x$ کـدام‌یـک کـران بـالا و کـدام‌یـک کـران پـایین اسـت، کافیسـت از محدوده‌ی $0\le x\le 2$ عدد انتخاب کرده، در آن‌ها قرار دهید. مثلاً در $x=1$ داریم $4x\ge x^3$ پس $y=4x$ کران بالا و $y=x^3$ کران پایین است.

مثال ۴: مساحت مقطع بیضی‌وار $\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۹}+\frac{z^۲}{۲۵}=۱$ با صفحه $z=۴$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{۳۶\pi}{۲۵}$ ۲) $\frac{۴۲\pi}{۲۵}$ ۳) $\frac{۴۸\pi}{۲۵}$ ۴) $\frac{۵۴}{۲۵}\pi$

پاسخ: گزینه «۴» مقطع بیضی‌وار با صفحه $z=۴$، بیضی $\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۹}=\frac{۹}{۲۵}$ می‌باشد. هر چند می‌توانیم مساحت این ناحیه را با استفاده از انتگرال دوگانه‌ی $S=\iint_D dydx$ و با استفاده از تغییر دستگاه بیضوی به‌دست آوریم اما از آن‌جا که برای مساحت بیضی یک فرمول ساده‌تر وجود دارد، به جای استفاده از انتگرال دوگانه، بهتر است معادله‌ی بیضی را به صورت استاندارد نوشته و شعاع‌های آن را مشخص کنیم. معادله بیضی را به‌صورت $\frac{x^۲}{(\frac{۶}{۵})^۲}+\frac{y^۲}{(\frac{۹}{۵})^۲}=۱$ می‌نویسیم. شعاع‌های این بیضی $a=\frac{۶}{۵}$ و $b=\frac{۹}{۵}$ هستند، پس داریم:

$$S=\pi ab=\pi\times\frac{۶}{۵}\times\frac{۹}{۵}=\frac{۵۴\pi}{۲۵}$$

یادآوری: مساحت بیضی با شعاع‌های a و b برابر با $S=\pi ab$ است.

مثال ۵: جرم جسمی که درون استوانه‌ای به معادله‌ی $x^۲+y^۲=۱$ و خارج مخروط به معادله‌ی $z^۲=x^۲+y^۲$ قرار داشته با چگالی در نقطه‌ی (x,y,z) برابر $\sqrt{x^۲+y^۲}$ باشد، کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) ۲π

پاسخ: گزینه «۱» ناحیه درون دایره‌ی $x^۲+y^۲=۱$ را D می‌نامیم، در این صورت جرم جسم موردنظر برابر است با:

$$M=\iint_D\left(\int_{-\sqrt{x^۲+y^۲}}^{\sqrt{x^۲+y^۲}}\sqrt{x^۲+y^۲}\,dz\right)dxdy=\iint_D ۲(x^۲+y^۲)\,dxdy$$

برای محاسبه انتگرال فوق از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$M=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ ۲r^۲\times rdrd\theta=\int_۰^{۲\pi}d\theta\times\int_۰^۱ ۲r^۳dr=۲\pi\times\frac{۱}{۲}=\pi$$

مثال ۶: حجم ناحیه‌ی محدود به استوانه‌ای به معادله $y=x^۲$ و صفحه‌ای به معادله $y+z=۴$ و صفحات xoy و yoz و واقع در ناحیه‌ی اول از ۸ ناحیه‌ی فضا کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۱)

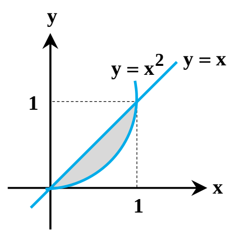
۱) $\frac{۶۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۶۴}{۳۰}$ ۳) $\frac{۱۲۸}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۲۸}{۳۰}$

پاسخ: گزینه «۳» حجم محصور زیر صفحه $z=۴-y$ مدنظر می‌باشد، بنابراین داریم:

$$V=\int_۰^۴\int_۰^{\sqrt{y}}(۴-y)\,dxdy=\int_۰^۴(۴\sqrt{y}-y\sqrt{y})dy=[۴\times\frac{۲}{۳}y^{\frac{۳}{۲}}-\frac{۲}{۵}y^{\frac{۵}{۲}}]_۰^۴=\frac{۱۲۸}{۱۵}$$

مثال ۷: کدام روش برای محاسبه مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای $y=x$ و $y=x^۲$ نادرست است؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\int_۰^۱\int_{x^۲}^{x}dxdy$ ۲) $\int_۰^۱\int_y^{\sqrt{y}}dxdy$ ۳) $\int_۰^۱\int_{x^۲}^{x}(x^۲-x)dxdy$ ۴) $\int_۰^۱(x-x^۲)dx$



پاسخ: گزینه «۳» با رسم نمودار $y=x$ و $y=x^۲$ ناحیه‌ی موردنظر را مشخص می‌کنیم. این دو منحنی در $(۰,۰)$ و $(۱,۱)$ با هم برخورد می‌کنند.

با دو ترتیب مختلف می‌توانیم مساحت این ناحیه را به کمک انتگرال دوگانه بنویسیم. با ترتیب $S=\iint_D dydx$ که در آن $۰\le x\le ۱$ است و برای حدود y از پایین به بالا که حرکت کنیم $y=x^۲$ مرز ورودی و $y=x$ مرز خروجی است. پس داریم:

$$S=\int_۰^۱\int_{x^۲}^{x}dydx$$

پس گزینه‌ی (۱) صحیح است. اگر انتگرال وسطی را حل کنیم داریم:

$$S=\int_۰^۱(x-x^۲)dx$$

پس گزینه‌ی (۴) هم صحیح است. حالا ترتیب $S=\iint dxdy$ را انتخاب می‌کنیم. $۰\le y\le ۱$ است و از چپ به راست که حرکت کنیم، $x=y$ مرز ورودی و $x=\sqrt{y}$ (یعنی $y=x^۲$) مرز خروجی است پس $S=\int_۰^۱\int_y^{\sqrt{y}}dxdy$؛ یعنی گزینه (۲) هم صحیح است. در همین انتگرال، با حل انتگرال وسطی داریم:

$$S=\int_۰^۱(\sqrt{y}-y)dy$$

اما هیچکدام از روابط به‌دست آمده برای مساحت این ناحیه، با گزینه‌ی (۳) مطابقت ندارند. در واقع از همان ابتدا نیز با یک نگاه می‌توانستیم بگوییم گزینه (۳) غلط است. زیرا در دستگاه دکارتی، وقتی مساحت یک ناحیه را با انتگرال دوگانه می‌نویسیم، تابع زیر انتگرال، تابع ثابت یک است.

مثال ۸: حجم ناحیه T محدود به سهموی به معادله‌ی $z=4-x^2-y^2$ و صفحه xoy کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) 5π ۲) 6π ۳) 7π ۴) 8π

پاسخ: گزینه «۴» محل تلاقی سهموی و صفحه xoy، دایره $D: x^2+y^2=4$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$V=\iint_D (4-x^2-y^2)\,dA \xrightarrow{\text{مختصات قطبی}} \int_0^{2\pi}\int_0^{2}(4-r^2)\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^2(4r-r^3)\,dr=8\pi$$

مثال ۹: انتگرال معین $\int_{-2}^{0}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} dydx$: (MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) مساحت ربع دایره‌ی $x^2+y^2=9$ است.

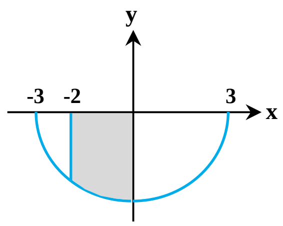
۲) مساحت نیم دایره‌ی $x^2+y^2=9$ است

۳) مساحت نواری از دایره‌ی $x^2+y^2=9$ محدود به محور y ها و خط $x=-2$ است.

۴) مساحت نیم‌نواری از دایره‌ی $x^2+y^2=9$ محدود به محور x ها و y ها و خط $x=-2$ است.

پاسخ: گزینه «۴»

انتگرال موردنظر ناحیه $\begin{cases}-2\le x\le 0\\ -\sqrt{9-x^2}\le y\le 0\end{cases}$ است، بنابراین ناحیه موردنظر به شکل روبرو خواهد بود.



مثال ۱۰: حجم محدود به رویه $z=9-x^2-y^2$، صفحه $z=0$ و داخل استوانه $x^2+y^2=4$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۳)

۱) 14π ۲) 16π ۳) 18π ۴) 28π

پاسخ: گزینه «۴» برای محاسبه، حجم موردنظر از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم، در این صورت معادله رویه به صورت $z=9-r^2$ در می‌آید.

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}(9-r^2)\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^2(9r-r^3)\,dr=28\pi$$

مثال ۱۱: اگر جسم S توسط سطوح به معادله‌های $z=xy$ و $y=x^2$ و $y^2=x$ و صفحه $z=0$ محدود شده باشد، حجم آن کدام است؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{9}$

پاسخ: گزینه «۲» از تلاقی $y=x^2$، $y^2=x$، مقادیر ۰ و ۱ برای x به دست می‌آید، بنابراین:

$$V=\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dydx=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2-x^5)\,dx=\frac{1}{12}$$

مثال ۱۲: اگر D ناحیه‌ی محصور بین منحنی‌های $y=x^2$، $y=8x^2$، $xy=1$ و $xy=2$ باشد، آن‌گاه مساحت ناحیه D برابر کدام است؟

(ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۷ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}\text{Ln}2$ ۴) $\text{Ln}2$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به منحنی‌های داده شده و ناحیه انتگرال‌گیری از تغییر متغیر $u=\frac{y}{x^2}$ و $v=xy$ استفاده می‌کنیم. با این تغییر متغیر ناحیه انتگرال‌گیری به صورت $1\le u\le 8$, $1\le v\le 2$ در می‌آید.

$$\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2}\\ y & x\end{vmatrix}=\frac{-3y}{x^2}=-3u\Rightarrow |J|=\frac{1}{3u}$$

$$S=\int_1^2\int_1^8\frac{1}{3u}\,dudv=\frac{1}{3}\int_1^2 dv\int_1^8\frac{du}{u}=\frac{1}{3}\text{Ln}8=\text{Ln}2$$

مثال ۱۳: مساحت ناحیه در صفحه محصور به سهمی‌های $y=x^۲$ ، $y=۲x^۲$ ، $x=y^۲$ و $x=۳y^۲$ برابر با کدام مورد می‌باشد؟ (عمران ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه «۱» معادله‌ی مرزها به‌صورت $\frac{x^۲}{y}=۱, \frac{x^۲}{y}=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{y^۲}{x}=۱$ و $\frac{y^۲}{x}=\frac{۱}{۳}$ نوشته می‌شوند. از تغییر متغیر $u=\frac{x^۲}{y}$ و $v=\frac{y^۲}{x}$ استفاده می‌کنیم، در این صورت معادله‌ی مرزها به ترتیب $u=۱$ ، $u=\frac{۱}{۲}$ ، $v=۱$ و $v=\frac{۱}{۳}$ است و داریم:

$$J_{xy}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{۲x}{y} & \frac{-x^۲}{y^۲}\\ \frac{-y^۲}{x^۲} & \frac{۲y}{x}\end{vmatrix}=۴-۱=۳ \Rightarrow J_{uv}=\frac{۱}{۳}$$

$$\text{مساحت}=\iint J dudv=\int_{\frac{۱}{۳}}^{۱}\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱}\frac{۱}{۳}dudv=\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۹}$$

مثال ۱۴: حجم ناحیه واقع در بالای صفحه xoy و زیر سهمی‌گون $z=۱-\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{۳\pi ab}{۲}$ ۲) πab ۳) $\frac{\pi ab}{۲}$ ۴) $۲\pi ab$

پاسخ: گزینه «۳» حجم مورد نظر برابر $V=\iint(۱-\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲})dA$ می‌باشد که در آن، ناحیه انتگرال‌گیری درون بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ می‌باشد. برای محاسبه انتگرال از تغییر مختصات بیضوی استفاده می‌کنیم، یعنی $x=ar\cos\theta$ ، $y=br\sin\theta$ ، $dA=abrdrd\theta$. در اینصورت:

$$V=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱}(۱-r^۲)abrdrd\theta=ab\int_{۰}^{۲\pi}d\theta\int_{۰}^{۱}(r-r^۳)dr=(ab)(۲\pi)(\frac{r^۲}{۲}-\frac{r^۴}{۴})\Big|_{۰}^{۱}=\frac{\pi ab}{۲}$$

درسنامه۴: انتگرال‌های سه‌گانه

مثال۱: حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^z\int_0^y \sin(x+y+z)dxdydz$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱»

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^z\int_0^y \sin(x+y+z)\,dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^z[-\cos(x+y+z)]_0^y\,dydz$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^z[-\cos(2y+z)+\cos(y+z)]dydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[-\frac{1}{2}\sin(2y+z)+\sin(y+z)]_0^z\,dz$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\frac{1}{2}\sin 3z+\sin 2z+\frac{1}{2}\sin z-\sin z)dz=[\frac{1}{6}\cos 3z-\frac{1}{2}\cos 2z-\frac{1}{2}\cos z+\cos z]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$$

مثال۲: حاصل $I=\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-x^2-2y^2-3z^2}dv$، کدام است؟

۱) $\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ۲) $\pi\sqrt{\frac{\pi}{6}}$ ۳) $\pi\sqrt{\frac{\pi}{3}}$ ۴) ۰

پاسخ: گزینه «۲» در فضای سه‌بعدی $\mathbb{R}^3$ داریم $-\infty<x,y,z<+\infty$ تابع انتگرالده قابل تفکیک به توابع یک متغیره است. کران‌ها نیز همه ثابت هستند. پس می‌توان انتگرال‌ها را تفکیک کرد:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}e^{-2y^2}e^{-3z^2}dzdydx=(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx)(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2y^2}dy)(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-3z^2}dz)$$

اکنون فرض کنیم: $F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda t^2}dt$ باشد. به علت زوج بودن $e^{-\lambda t^2}$ داریم $F(\lambda)=2\int_0^\infty e^{-\lambda t^2}dt$. با استفاده از تغییر متغیر $u=\lambda t^2$ داریم $t=\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{\lambda}}$ و لذا $dt=\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\lambda}}du$. بنابراین داریم:

$$F(\lambda)=2\times\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

پس می‌توان نوشت:

$$I=F(1)F(2)F(3)=\sqrt{\frac{\pi}{1}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{3}}=\pi\sqrt{\frac{\pi}{6}}$$

یادآوری: $\int_0^\infty u^\alpha e^{-u}du=\Gamma(\alpha+1)$

مثال۳ (سخت): ناحیه‌ی D در $\frac{1}{8}$ اول فضای $\mathbb{R}^3$ قرار دارد و با نامعادله‌ی $x+y+z\le 1$ مشخص شده است. حاصل انتگرال سه‌گانه‌ی $I=\iiint_D\sqrt{\frac{1-x-y-z}{xyz}}dxdydz$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$ ۲) $\frac{\pi^2}{4}$ ۳) $2\sqrt{2}\pi^2$ ۴) $\frac{\pi^2}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» در $\frac{1}{8}$ اول فضا، شرط $z,y,x\ge 0$ را داریم. بنابراین در ناحیه‌ی D خواهیم داشت: $0\le x+y+z\le 1$. بنابراین از فرمول دیریکله در حالت $h_1=0$ و $h_2=1$ استفاده می‌کنیم. با مرتب کردن تابع زیر انتگرال خواهیم داشت:

$$I=\iiint_D x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{2}}(1-x-y-z)^{\frac{1}{2}}dxdydz$$

پس $m=n=k=-\frac{1}{2}$ و $f(x+y+z)=(1-x-y-z)^{\frac{1}{2}}$ یعنی $f(t)=(1-t)^{\frac{1}{2}}$ است. با استفاده از فرمول داریم:

$$I=\frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)\Gamma(-\frac{1}{2}+1)\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+3)}\int_0^1(1-t)^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+2}dt=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt$$

یادآوری می‌کنیم که $\int_0^1 t^a(1-t)^b dt=\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}$ است. بنابراین داریم: $\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{3}{2})}$ و می‌دانیم که $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ و $\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ است. با این جایگذاری‌ها داریم:

$$I=\frac{(\sqrt{\pi})^3}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)}=\frac{(\sqrt{\pi})^3}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2!}=\frac{\pi^2}{4}$$

مثال ۴ (سخت): حاصل انتگرال سه‌گانه‌ی $I=\iiint_D \text{Ln}(x+y+z)dxdydz$ روی ناحیه‌ی D که به صفحات مختصات و صفحه‌ی $x+y+z=۱$ محدود شده کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$
۲) $-\frac{۱}{۹}$
۳) $\frac{۱}{۱۸}$
۴) $-\frac{۱}{۱۸}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به نامنفی بودن x، y و z در ناحیه‌ی D داریم $۰\le x+y+z\le ۱$ پس از قضیه‌ی دیریکله استفاده می‌کنیم. با توجه به عبارت زیر انتگرال $n=m=k=۰$ و $f(t)=\text{Ln}t$ است.

$$I=\iiint_D \text{Ln}(x+y+z)dxdydz=\frac{\Gamma(۱)\Gamma(۱)\Gamma(۱)}{\Gamma(۳)}\int_۰^۱ t^۲\text{Ln}tdt$$

با استفاده از روش جزءبه‌جزء داریم:

$$\begin{cases} u=\text{Ln}t & \Rightarrow du=\frac{۱}{t}dt \\ dv=t^۲dt & \Rightarrow v=\frac{۱}{۳}t^۳ \end{cases} \Rightarrow \int_۰^۱ t^۲\text{Ln}tdt=\left[\frac{۱}{۳}t^۳\text{Ln}t\right]_۰^۱-\int_۰^۱\frac{۱}{۳}t^۲dt=[۰]-\left[\frac{۱}{۹}t^۳\right]_۰^۱=-\frac{۱}{۹}$$

با جایگذاری این مقدار در I خواهیم داشت:

$$I=\frac{۰!۰!۰!}{۲!}\times(-\frac{۱}{۹})=-\frac{۱}{۱۸}$$

در مورد عبارت $\left[\frac{۱}{۳}t^۳\text{Ln}t\right]_۰^۱$ توجه کنید که به ازای $t=۱$ به وضوح $\text{Ln}۱=۰$ است و وقتی $t\to ۰$ میل می‌کند داریم:

$$\lim_{t\to ۰} t^۳\text{Ln}t=\lim_{t\to ۰}\frac{\text{Ln}t}{\frac{۱}{t^۳}}\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{t\to ۰}\frac{\frac{۱}{t}}{-\frac{۳}{t^۴}}=\lim_{t\to ۰}\frac{t^۳}{-۳}=۰$$

توضیح: در مثال‌های فوق اگر از قضیه‌ی دیریکله استفاده نکنیم، نوشتن حدود انتگرال و سپس حل آن به زمان بیشتری نیاز دارد. در اغلب آن‌ها استفاده از انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء لازم می‌شود و ما مجبور می‌شویم جزءبه‌جزء را برای هر کدام از متغیرهای x، y و z تکرار کنیم. برخی از این مثال‌ها با استفاده از تغییر دستگاه حل می‌شوند؛ اما در آن‌ها هم نحوه‌ی انتخاب u، v و w روش مشخصی ندارد و تجربی است.

مثال ۵: حاصل انتگرال سه‌گانه $I=\int_۰^۱\int_۰^۱\int_۰^۱\frac{۱}{۱-xyz}dzdydz$ برابر با کدام‌یک از سری‌های زیر است؟

۱) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$
۲) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{n^۳}$
۳) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۳}$
۴) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{n^۳}$

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانید که اگر $|u|<۱$ باشد، داریم:

$$\frac{۱}{۱-u}=\sum_{n=۰}^{\infty}u^n$$

در این مثال متغیرهای x، y و z همگی بین صفر و یک قرار دارند، پس حاصل‌ضرب آن‌ها عددی کوچکتر از یک است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{۱-xyz}=\sum_{n=۰}^{\infty}(xyz)^n \Rightarrow \frac{۱}{۱-xyz}=\sum_{n=۰}^{\infty}x^ny^nz^n$$

با استفاده از این معادله در انتگرال سه‌گانه به جای تابع $\frac{۱}{۱-xyz}$ معادل آن به صورت سری را می‌نویسیم:

$$I=\int_۰^۱\int_۰^۱\int_۰^۱\frac{۱}{۱-xyz}dzdydx=\sum_{n=۰}^{\infty}\int_۰^۱\int_۰^۱\int_۰^۱x^ny^nz^n\,dzdydx$$

حدود انتگرال اعداد ثابتی هستند؛ پس می‌توانیم انتگرال سه‌گانه را به صورت حاصل‌ضرب چند انتگرال یگانه نوشت:

$$I=\sum_{n=۰}^{\infty}(\int_۰^۱x^ndx)(\int_۰^۱y^ndy)(\int_۰^۱z^ndz)=\sum_{n=۰}^{\infty}\left[\frac{x^{n+۱}}{n+۱}\right]_۰^۱\left[\frac{y^{n+۱}}{n+۱}\right]_۰^۱\left[\frac{z^{n+۱}}{n+۱}\right]_۰^۱=\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۱}{n+۱})(\frac{۱}{n+۱})(\frac{۱}{n+۱})=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{(n+۱)^۳}$$

در نهایت از یک ویژگی سری‌ها استفاده می‌کنیم. اگر به کران‌ها یک واحد اضافه کنیم باید از متغیر سری یک واحد کم کنیم:

$$I=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۳}$$

درسنامه۵: تغییر متغیر در انتگرال‌های سه‌گانه

مثال۱ (سخت): فرض کنید $g(x,y,z)=(3y+4z\,,\,2x-3z\,,\,x+3y)$ و $S=\{(x,y,z);0\le x\le 1\,,\,0\le y\le 1\,,\,0\le z\le 1\}$، در این صورت از تساوی زیر، مقدار α کدام است؟ $\iiint_{g(S)}(2x+y-2z)dxdydz=\alpha\iiint_S zdxdydz$

۱) ۸۵ ۲) ۸۰ ۳) ۷۵ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینه «۳» دقت کنید که S ناحیه‌ی مکعب داده شده و $g(S)$ تصویر این ناحیه توسط نگاشت g است. در واقع بهتر است مختصات نقاط را در ناحیه‌ی S با (x,y,z) و در ناحیه‌ی $g(S)$ با (X,Y,Z) نشان دهیم. به عبارتی در ناحیه‌ی $g(S)$ داریم: $(X,Y,Z)=(3y+4z\,,\,2x-3z\,,\,x+3y)$

بنابراین در انتگرال روی $g(S)$ داریم: $F(X,Y,Z)=2X+Y-2Z=2(3y+4z)+(2x-3z)-2(x+3y)=5z$

اگر بخواهیم ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را از $g(S)$ (یعنی دستگاه (X,Y,Z)) به S (یعنی دستگاه (x,y,z)) تبدیل کنیم لازم است ژاکوبین دستگاه (x,y,z) را در انتگرالده ضرب کنیم:

$$J_{xyz}=\begin{vmatrix}X_x & X_y & X_z\\ Y_x & Y_y & Y_z\\ Z_x & Z_y & Z_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 3 & 4\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=15$$

پس داریم $\iiint_{g(S)}F(X,Y,Z)dZdYdX=\iiint_S 5z(15)dzdydx=75\iiint_S zdzdydx$. بنابراین $\alpha=75$ است.

مثال۲: اگر E ناحیه‌ی بین کره‌های $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=4$ در یک هشتم اول باشد، آن‌گاه حاصل $I=\iiint_E zdv$ چند برابر π است؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{15}{16}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{15}{4}$

پاسخ: گزینه «۲» در $\frac{1}{8}$ اول از کره داریم $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ و $0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$. البته در ناحیه‌ی بین دو کره به شعاع‌های ۱ و ۲ قرار داریم بنابراین $1\le\rho\le 2$ خواهد بود. در ضمن در مختصات کروی داریم $z=\rho\cos\phi$ و ژاکوبین این دستگاه $\rho^2\sin\phi$ است.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2(\rho\cos\phi)(\rho^2\sin\phi)d\rho d\phi d\theta$$

با توجه به آن که حدود انتگرال‌ها اعداد ثابت هستند می‌توانیم آنها را از هم جدا کنیم.

$$I=(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\phi\sin\phi d\phi)(\int_1^2\rho^3d\rho)=[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\times[\frac{\sin^2\phi}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}}\times[\frac{\rho^4}{4}]_1^2=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{15}{4}=\frac{15\pi}{16}$$

مثال۳ (سخت): می‌دانیم که $\int_0^1 t^a(1-t)^b dt=\beta(a+1,b+1)$ است. اگر ناحیه‌ی D، $\frac{1}{8}$ اول از کره‌ی واحد باشد حاصل انتگرال $I=\iiint_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2-z^2}{1+x^2+y^2+z^2}}dxdydz$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $\frac{\pi}{8}\left[\beta(\frac{3}{4},\frac{1}{2})-\beta(\frac{5}{4},\frac{1}{2})\right]$ ۲) $\frac{\pi}{8}\left[\beta(\frac{3}{4},\frac{3}{4})-\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\right]$ ۳) $\frac{\pi}{8}\left[\beta(\frac{3}{4},\frac{1}{2})-\beta(\frac{5}{4},\frac{1}{2})\right]$ ۴) $\frac{\pi}{8}\left[\beta(\frac{3}{4},\frac{3}{4})-\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\right]$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا تغییر متغیرهای $u=x^2$، $v=y^2$ و $w=z^2$ را انجام می‌دهیم. در این صورت معادله‌ی کره‌ی واحد یعنی $x^2+y^2+z^2=1$ به معادله‌ی صفحه‌ی $u+v+w=1$ تبدیل می‌شود و به وضوح $u,v,w\ge 0$ هستند. ژاکوبین دستگاه جدید را حساب می‌کنیم.

$$J_{xyz}=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & 0 & 0\\ 0 & 2y & 0\\ 0 & 0 & 2z\end{vmatrix}=8xyz\Rightarrow J_{uvw}=\frac{1}{J_{xyz}}=\frac{1}{8xyz}$$

در ناحیه‌ی D متغیرهای x، y و z نامنفی‌اند پس قدرمطلق لازم نیست. با ضرب کردن ژاکوبین در عبارت زیر انتگرال و نوشتن آن در دستگاه جدید خواهیم داشت:

$$I=\frac{1}{8}\iiint_D\sqrt{\frac{1-u-v-w}{1+u+v+w}}\frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{w}}dudvdw=\frac{1}{8}\iiint_D u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}w^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1-(u+v+w)}{1+(u+v+w)}}dudvdw$$

بنابراین $n=m=k=-\frac{1}{2}$ و $f(t)=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ است. با استفاده از فرمول دیریکله خواهیم داشت:

$$I=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{8\Gamma(\frac{3}{2})}\int_0^1\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,t^{\frac{1}{2}}dt$$

با قرار دادن $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ و $\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ و ضرب کردن صورت و مخرج عبارت مقابل انتگرال در $\sqrt{1-t}$ خواهیم داشت: $I=\frac{\sqrt{\pi}^3}{4\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{(1-t)}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}}dt$

اکنون تغییر متغیر $p=t^2$ را انجام می‌دهیم. $t=\sqrt{p}$ و $dt=\frac{dp}{2\sqrt{p}}$ خواهد بود. $0\le t\le 1$ پس $0\le p\le 1$ است.

$$I=\frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{1-\sqrt{p}}{(1-p)^{\frac{1}{2}}}p^{\frac{1}{4}}\frac{dp}{2\sqrt{p}}=\frac{\pi}{8}\left[\int_0^1 p^{-\frac{1}{4}}(1-p)^{-\frac{1}{2}}dp-\int_0^1 p^{\frac{1}{4}}(1-p)^{-\frac{1}{2}}dp\right]=\frac{\pi}{8}\left[\beta(\frac{3}{4},\frac{1}{2})-\beta(\frac{5}{4},\frac{1}{2})\right]$$

مثال ۴: حاصل $\iiint \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ در ناحیه بین دو کره به شعاع ۱ و ۴ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) $4\pi Ln4$　　۲) $8\pi Ln4$　　۳) $4\pi Ln2$　　۴) $8\pi Ln2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱ و ۴» از مختصات کروی استفاده می‌کنیم:

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^4 \frac{1}{\rho^3}\times\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^4\frac{1}{\rho}\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\phi d\phi\int_1^4\frac{1}{\rho}d\rho=2\pi\times 2\times Ln4=4\pi Ln4=8\pi Ln2$$

مثال ۵: مقدار انتگرال $\iiint_V e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dv$ بر روی کره $x^2+y^2+z^2=1$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{3}{4}\pi e$　　۲) $\frac{4}{3}\pi e$　　۳) $\frac{3}{4}\pi(e-1)$　　۴) $\frac{4}{3}\pi(e-1)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از مختصات کروی استفاده می‌کنیم:

$$\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dv=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 e^{\rho^3}\times\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^{\pi}\sin\phi d\phi\times\int_0^1\rho^2e^{\rho^3}d\rho=2\pi\times 2\times(\frac{1}{3}e-\frac{1}{3})=\frac{4\pi}{3}(e-1)$$

مثال ۶: مقدار انتگرال سه‌گانه $\iiint\frac{dzdydx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ روی نیم‌گوی $x^2+y^2+z^2\le 1$ و $z\ge 0$ چقدر است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۴)

۱) π　　۲) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$　　۳) $\pi\sqrt{2}$　　۴) 2π

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از دستگاه مختصات کروی استفاده می‌کنیم. در این صورت معادله گوی به صورت $\rho=1$ در می‌آید و چون $z\ge 0$ است، پس $0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$ خواهد بود و در نتیجه داریم:

$$\iiint\frac{dzdydx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\frac{1}{\rho}\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi d\phi\int_0^1\rho d\rho=(2\pi)(1)(\frac{1}{2})=\pi$$

مثال ۷: حاصل $\iiint_R\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ وقتی R ناحیه محدود به دو کره $x^2+y^2+z^2=2$ و $x^2+y^2+z^2=1$ باشد، کدام است؟

(ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $2\pi Ln2$　　۲) $4\pi Ln2$　　۳) $2\pi Ln3$　　۴) $4\pi Ln3$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از مختصات کروی استفاده می‌کنیم، در این صورت معادله کره‌ها به ترتیب $\rho=\sqrt{2}$ و $\rho=1$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\iiint_R\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{\rho^3}\times\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^{\pi}\sin\phi\times\int_1^{\sqrt{2}}\frac{d\rho}{\rho}=2\pi\times 2\times\frac{1}{2}Ln2=2\pi Ln2$$

مثال ۸: مقدار انتگرال $\iiint_B (x^2+y^2)dxdydz$ که در آن B گوی $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ می‌باشد، کدام است؟

(عمران ـ سراسری ۸۴ و عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{2\pi a^5}{5}$ ۲) $\frac{4\pi a^5}{3}$ ۳) $\frac{8\pi a^5}{5}$ ۴) $\frac{8\pi a^5}{15}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به اینکه ناحیه انتگرال‌گیری به شکل کره می‌باشد، از دستگاه مختصات کروی استفاده می‌کنیم.

$$\iint_B (x^2+y^2)dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}(\rho^2\sin^2\phi)\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\phi d\phi\int_0^{a}\rho^4 d\rho = 2\pi\times\frac{4}{3}\times\frac{a^5}{5}=\frac{8\pi a^5}{15}$$

مثال ۹: مقدار انتگرال $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$ ، که در آن D ناحیه‌ی بالای مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ محدود شده توسط کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ است، برابر کدام است؟

(مکانیک ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{\pi^2}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{2}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$ ۳) $\pi(\sqrt{2}-1)$ ۴) $\pi^2\sqrt{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به تابع مقابل انتگرال و همچنین ناحیه انتگرال‌گیری، برای محاسبه انتگرال از مختصات کروی استفاده می‌کنیم. مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ در مختصات کروی به‌صورت $\phi=\frac{\pi}{4}$ و کره $x^2+y^2+z^2=1$ در مختصات کروی به‌صورت $\rho=1$ در می‌آید. بنابراین داریم:

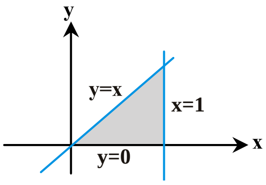
$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{1}\rho\times\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\phi d\phi\int_0^{1}\rho^3 d\rho = 2\pi(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

درسنامه ۷: کاربردهای انتگرال سه‌گانه

مثال ۱: حجم جسمی قائم که قاعده آن در صفحه xoy، محدود به محور xها و نیمساز ناحیه اول و خط $x=1$ و از بالا به صفحه $z=x+1+y$ محدود است، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا حدود z را تشخیص می‌دهیم. یکی از حدود آن به وضوح $z=1+x+y$ است و اگر دقت کنید؛ صفحه‌ی xoy یعنی $z=0$ هم در صورت سؤال داده شده است. حالا ببینیم چه معادلاتی برحسب x و y داریم تا با کمک آن‌ها حدود x و y را پیدا کنیم. محور xها یعنی $y=0$، نیمساز ناحیه‌ی اول یعنی $y=x$ و خط $x=1$ هم داده شده است. تصویر جسم بر صفحه‌ی xoy به سادگی مشخص می‌شود (شکل مقابل). بنابراین $0\le x\le 1$ و $0\le y\le x$ است.



$$V=\int_0^1\int_0^x\int_0^{x+y+1}dzdydx=\int_0^1\int_0^x(x+y+1)dydx=\int_0^1[xy+\frac{y^2}{2}+y]_0^x dx=\int_0^1(\frac{3x^2}{2}+x)dx=1$$

مثال ۲: حجم محدود به رویه $x^2+y^2+z=4$ و استوانه $x^2+y^2=2$ و صفحه‌ی $z=0$ کدام است؟

۱) 2π ۲) 4π ۳) 6π ۴) 8π

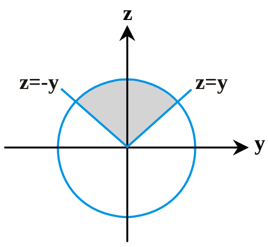
پاسخ: گزینه «۳» استوانه‌ی $x^2+y^2=2$ نشان می‌دهد که تصویر این جسم بر صفحه‌ی xoy یک دایره است پس تصمیم می‌گیریم از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم. به وضوح $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le\sqrt{2}$، کران‌های z نیز در صورت سؤال داده شده‌اند، $z=0$ و $z=4-x^2-y^2$ یعنی $z=4-r^2$، اگر تردید دارید که $z=4-r^2$ کران بالاست یا کران پایین یک مقدار دلخواه از بازه‌ی $0\le r\le\sqrt{2}$ در آن قرار دهید، مثلاً $r=0$ یا $r=1$ را انتخاب کنید می‌بینید که $4-r^2\ge 0$ است، پس $z=0$ کران پایین و $z=4-r^2$ کران بالاست.

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{4-r^2}rdzdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}[4r-r^3]drd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^{\sqrt{2}}[4r-r^3]dr=2\pi\times[2r^2-\frac{r^4}{4}]_0^{\sqrt{2}}=2\pi\times(4-1)=6\pi$$

مثال ۳: حجم محدود به کره‌ای به معادله $x^2+y^2+z^2=1$ و داخل مخروط دوار $z=\sqrt{x^2+y^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi(2-\sqrt{2})}{3}$ ۲) $\frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{3}$ ۳) $\frac{\pi(\sqrt{2}+1)}{3}$ ۴) $\frac{\pi(\sqrt{2}+2)}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» برخورد یک کره و یک مخروط را در مختصات کروی حل می‌کنیم. از آنجا که شرطی روی علامت x و y نداریم $0\le\theta\le 2\pi$ است. روی مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ داریم $\phi=\frac{\pi}{4}$ اگر در معادله‌ی کره و مخروط $x=0$ قرار دهیم و تصویر شکل را در صفحه‌ی yoz رسم کنید (مطابق شکل واضح است که $0\le\phi\le\frac{\pi}{4}$.

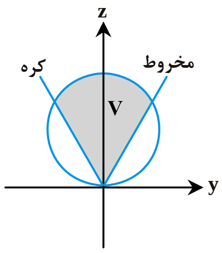


حدود ρ هم در داخل کره‌ای به شعاع یک به صورت $0\le\rho\le 1$ هستند. چون حدود انتگرال، اعداد ثابت هستند، می‌توانیم انتگرال‌ها را در هم ضرب کنیم:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\phi d\phi\times\int_0^1\rho^2d\rho=2\pi\times[-\cos\phi]_0^{\frac{\pi}{4}}\times[\frac{\rho^3}{3}]_0^1=\frac{2\pi}{3}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\pi(2-\sqrt{2})}{3}$$

مثال ۴: مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$، کره $x^2+y^2+z^2=2az$ را به دو قسمت تقسیم می‌کند. حجم قسمت بزرگتر، چند برابر حجم قسمت کوچکتر است؟ (از سؤالات پایان ترم دانشگاه علم و صنعت و دانشگاه آزاد تهران مرکز)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا حجمی که از پایین به مخروط و از بالا به کره محدود می‌شود را حساب می‌کنیم. اگر این کره، کره‌ای به مرکز مبدأ بود از مختصات کروی برای این ناحیه استفاده می‌کردیم. اما وقتی مرکز کره در مبدأ نباشد بهتر است از دستگاه استوانه‌ای استفاده کنیم. حد پایین z از مخروط به‌دست می‌آید: $z=\sqrt{r^2}=r$ و حد بالا به این صورت از معادله کره به‌دست می‌آید.

$$x^2+y^2+z^2=2az \Rightarrow r^2+z^2=2az \Rightarrow z^2-2az+r^2=0 \xrightarrow{\Delta=4a^2-4r^2} z=\frac{2a\pm\sqrt{4(a^2-r^2)}}{2}=a\pm\sqrt{a^2-r^2}$$

مقدار کوچکتر یعنی، $z=a-\sqrt{a^2-r^2}$ مربوط به نیم‌کره‌ی پایینی است و $z=a+\sqrt{a^2-r^2}$ از نیم‌کره‌ی بالایی به‌دست می‌آید. می‌دانیم که کران بالای z از نیم‌کره‌ی بالایی به دست می‌آید، پس داریم: $z=a+\sqrt{a^2-r^2}$.

حالا باید تصویر این ناحیه بر صفحه‌ی xoy را مشخص کنیم تا به کمک آن حدود r و θ را بنویسیم. هیچ‌کدام از رویه‌ها معادله‌ی دو متغیره برحسب x و y ندارند پس باید آن‌ها را برخورد بدهیم و با حذف z به رابطه‌ای برحسب x و y برسیم.

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2+z^2=2az \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+x^2+y^2=2a\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow 2(x^2+y^2)=2a\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=a \Rightarrow x^2+y^2=a^2$$

در نتیجه دایره $x^2+y^2=a^2$ تصویر این ناحیه روی صفحه xoy است. پس $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le a$.

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^a r(a+\sqrt{a^2-r^2}-r)\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{ar^2}{2}-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^a d\theta$$

$$V=2\pi\left[\left(\frac{a^3}{2}-0-\frac{a^3}{3}\right)-\left(0-\frac{1}{3}a^3-0\right)\right]=2\pi\left(\frac{a^3}{2}\right)=\pi a^3$$

حجم کل کره $\frac{4}{3}\pi a^3$ است. پس حجم قسمت زیرین مخروط برابر است با $V'=\frac{4}{3}\pi a^3-\pi a^3=\frac{1}{3}\pi a^3$. بنابراین داریم: $\frac{V}{V'}=\frac{\pi a^3}{\frac{1}{3}\pi a^3}=3$

توضیح: استفاده از مختصات کروی نیز برای حل این انتگرال ممکن است. در این صورت کافیست حجم V (حجم بالای مخروط و زیر کره) را به شکل زیر حساب کنیم: $V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2a\cos\phi}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\pi a^3$

در مورد حدود ρ توجه کنید که در مبدأ $\rho=0$ است و روی سطح کره‌ی $x^2+y^2+z^2=2az$ داریم $\rho^2=2a\rho\cos\phi$ پس $\rho=2a\cos\phi$ است.

مثال ۵: حجم ناحیه‌ای که توسط رویه‌های $z=x^2+y^2$ و $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2+1)$ محدود شده، چند برابر π است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا از برخورد دادن رویه‌ها، تصویر این ناحیه بر صفحه‌ی xoy را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2+1)=x^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2=1$$

بنابراین دایره‌ی واحد به‌دست می‌آید که در مختصات قطبی به‌صورت $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le 1$ مشخص می‌شود. از طرفی حدود z از معادله‌ی رویه‌ها معلوم می‌شود. در مختصات قطبی داریم $z=\frac{1}{2}(r^2+1)$ و $z=r^2$. اگر مقادیر $0\le r\le 1$ را در این رویه‌ها قرار دهید، معلوم می‌شود که $z=r^2$ کران پایین و $z=\frac{1}{2}(r^2+1)$ کران بالا است.

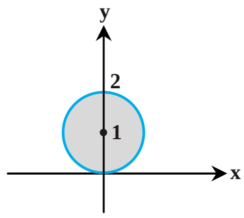
$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{\frac{1}{2}(r^2+1)} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r[z]_{r^2}^{\frac{1}{2}(r^2+1)}\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\left[\frac{1}{2}(r^2+1)-r^2\right]dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{1}{2}(r-r^3)\,dr\,d\theta$$

$$\Rightarrow V=2\pi\left[\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\right]_0^1=2\pi\times\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۶: حجم ناحیه‌ی واقع در داخل استوانه $x^۲+y^۲=۲y$ و داخل استوانه‌ی سهموی $z^۲=y$ کدام است؟

۱) $\frac{۸\sqrt{۲}}{۱۵}$ ۲) $\frac{۳۲\sqrt{۲}}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱۶\sqrt{۲}}{۱۵}$ ۴) $\frac{۶۴\sqrt{۲}}{۱۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» می‌دانیم که حجم یک ناحیه از فرمول $V=\iiint_D dzdydx$ به‌دست می‌آید. یکی از رویه‌ها استوانه است و معادله‌ی آن نشان می‌دهد که تصویر این شکل بر صفحه‌ی xoy یک دایره است. پس بهتر است از دستگاه استوانه‌ای استفاده کنیم. در نتیجه داریم: $V=\iiint_D rdzdrd\theta$



معادله‌ی $x^۲+y^۲=۲y$ در دستگاه استوانه‌ای به صورت $r^۲=۲r\sin\theta$ نوشته می‌شود یعنی $r=۲\sin\theta$ است. اگر یادمان باشد که این یک دایره با قطر ۲ است که مرکزش روی محور yها قرار دارد، با رسم شکل متوجه می‌شویم $۰\le\theta\le\pi$ است. اما اگر نتوانیم منحنی $r=۲\sin\theta$ را رسم کنیم با استفاده از این که همیشه $r\ge۰$ است می‌توانیم حدود θ را تعیین کنیم: $r\ge۰\Rightarrow\sin\theta\ge۰\Rightarrow۰\le\theta\le\pi$

به هر حال در این ناحیه داریم: $۰\le\theta\le\pi$ و $۰\le r\le۲\sin\theta$.

از استوانه سهموی $z^۲=y$ داریم $z=\pm\sqrt{y}$ که در مختصات قطبی به صورت $z=\pm\sqrt{r\sin\theta}$ در می‌آید. پس حدود تغییرات متغیرها در مختصات استوانه‌ای به صورت مقابل است: $۰\le\theta\le\pi \quad , \quad ۰\le r\le۲\sin\theta \quad , \quad -\sqrt{r\sin\theta}\le z\le\sqrt{r\sin\theta}$

بنابراین حجم برابر است با: $V=\int_۰^{\pi}\int_۰^{۲\sin\theta}\int_{-\sqrt{r\sin\theta}}^{\sqrt{r\sin\theta}}rdzdrd\theta=۲\int_۰^{\pi}\int_۰^{۲\sin\theta}r\sqrt{r\sin\theta}drd\theta$

$$=۲\int_۰^{\pi}\int_۰^{۲\sin\theta}\sqrt{\sin\theta}.r^{\frac{۳}{۲}}drd\theta=\frac{۴}{۵}\int_۰^{\pi}\sqrt{\sin\theta}[r^{\frac{۵}{۲}}]_۰^{۲\sin\theta}d\theta=\frac{۱۶\sqrt{۲}}{۵}\int_۰^{\pi}\sin^۳\theta d\theta=\frac{۱۶\sqrt{۲}}{۵}\times\frac{۴}{۳}=\frac{۶۴\sqrt{۲}}{۱۵}$$

انتگرال $\sin^۳\theta$ به‌صورت مقابل به‌دست می‌آید: $\int_۰^{\pi}\sin^۳\theta d\theta=\int_۰^{\pi}\sin^۲\theta.\sin\theta d\theta=\int_۰^{\pi}(۱-\cos^۲\theta).\sin\theta d\theta=[-\cos\theta+\frac{۱}{۳}\cos^۳\theta]_۰^{\pi}=\frac{۴}{۳}$

البته می‌توانستیم حجم را برای $۰\le z\le\sqrt{r\sin\theta}$ حساب کرده و در پایان جواب را دو برابر کنیم زیرا معادله‌ی $z^۲=xy$ با تبدیل z به $-z$ تغییر نمی‌کند.

مثال ۷: گشتاور جسم محدود به صفحات مختصات و صفحات $x=۱$ و $y=۲$ و $y+z=۴$ با تابع چگالی $\rho(x,y,z)=xy$ نسبت به صفحه xoy کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از انتگرال سه‌گانه و با توجه به این که گشتاور خواسته شده نسبت به صفحه xoy است، مقدار z در تابع چگالی یعنی در $\rho=xy$ ضرب می‌شود. برای تعیین حدود انتگرال به معادله‌ی رویه‌های داده شده توجه کنید. صفحات مختصات جزء مرزهای این ناحیه هستند یعنی صفحات $x=۰$، $y=۰$ و $z=۰$. علاوه بر آن‌ها صفحات $x=۱$، $y=۲$ و $y+z=۴$ را نیز داریم. پس برای z دو کران به صورت $z=۰$ و $z=۴-y$ وجود دارد. حدود x و y نیز واضح هستند: $۰\le x\le۱$ و $۰\le y\le۲$.

$$\text{گشتاور نسبت به صفحه‌ی xoy}=M_{xy}=\iiint_D z\rho(x,y,z)dzdydx=\int_۰^۱\int_۰^۲\int_۰^{۴-y}xyzdzdydx=\int_۰^۱\int_۰^۲xy[\frac{z^۲}{۲}]_۰^{۴-y}dydx$$

$$\Rightarrow M_{xy}=\frac{۱}{۲}\int_۰^۱\int_۰^۲xy(۴-y)^۲dydx=\frac{۱}{۲}\int_۰^۱\int_۰^۲x(۱۶y-۸y^۲+y^۳)dydx=\frac{۱}{۲}\int_۰^۱x[۸y^۲-\frac{۸}{۳}y^۳+\frac{y^۴}{۴}]_۰^۲dx=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴۴}{۳}\times[\frac{x^۲}{۲}]_۰^۱=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۴۴}{۳}=\frac{۱۱}{۳}$$

مثال ۸: گشتاور ماند جسمی همگن که دارای دانسیته (چگالی) حجمی $\rho=۱$ است و داخل مخروط $z^۲=x^۲+y^۲$ و زیر سهموی $z=۲-(x^۲+y^۲)$ قرار دارد، نسبت به محور zها چند برابر $\frac{\pi}{۱۵}$ است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» گشتاور ماند جسم همگن نسبت به محور zها از رابطه‌ی $I_z=\iiint_D(x^۲+y^۲)dzdydx$ به‌دست می‌آید. ابتدا حدود انتگرال را مشخص می‌کنیم. برخورد مخروط و سهموی را به دست می‌آوریم: $z^۲=x^۲+y^۲$ و $z=۲-(x^۲+y^۲)$ پس $\sqrt{x^۲+y^۲}=۲-(x^۲+y^۲)$ که به سادگی $x^۲+y^۲=۱$ به دست می‌آید. برای ناحیه‌ی درون دایره بهتر است از (r,θ) به جای (x,y) استفاده کنیم. پس $۰\le\theta\le۲\pi$ و $۰\le r\le۱$. حدود z نیز از معادله مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}=r$ و معادله سهموی $z=۲-(x^۲+y^۲)=۲-r^۲$ مشخص هستند.

$$I_z=\iiint_D(x^۲+y^۲)dzdydx=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱\int_r^{۲-r^۲}r^۲rdzdrd\theta=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱r^۳(۲-r^۲-r)drd\theta=\int_۰^{۲\pi}(\frac{۲}{۴}r^۴-\frac{۱}{۶}r^۶-\frac{۱}{۵}r^۵)\Big|_۰^۱d\theta=۲\pi(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۵})=\frac{۴\pi}{۱۵}$$

پس حاصل انتگرال، ۴ برابر $\frac{\pi}{۱۵}$ است.

مثال۹: حجم محدود به صفحه $z=0$ از پائین، مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ از بالا و استوانه $x^2+y^2-2ax=0$ از اطراف، با کدام رابطه برابر است؟
(عمران ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{3}{2}\pi a^3$ ۲) $\frac{8}{3}a^3$ ۳) $\frac{32}{9}a^3$ ۴) $\frac{16}{3}\pi a^3$

پاسخ: گزینه «۳» از دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این صورت معادله مخروط به صورت $z=r$ و معادله استوانه به صورت $r=2a\cos\theta$ و $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ در می‌آید. بنابراین داریم:

$$V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta}\int_0^{r} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta} r^2\,dr\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8a^3}{3}\cos^3\theta\,d\theta$$

$$=\frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta=\frac{8a^3}{3}\left(\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{32a^3}{9}$$

مثال۱۰: حجم محصور به سهمی‌گون $az=x^2+y^2$، صفحه $z=0$ و استوانه $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$، کدام است؟
(عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}\pi a^3$ ۲) $2\pi a^3$ ۳) $\frac{3}{2}\pi a^3$ ۴) $\frac{2}{3}\pi a^3$

پاسخ: گزینه «۳» از دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این صورت معادله سهمی‌گون به صورت $az=r^2$ و معادله استوانه به صورت $r=2a\cos\theta$، $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ در می‌آید. بنابراین داریم:

$$V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta}\int_0^{\frac{1}{a}r^2} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta}\frac{1}{a}r^3\,dr\,d\theta=4a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=\frac{3\pi a^3}{2}$$

مثال۱۱: اگر چگالی یک جسم مکعب شکل به ابعاد واحد در هر نقطه (x,y,z) از ناحیه‌ای که اشغال می‌کند به صورت $\delta(x,y,z)=1+x+yz$ باشد، جرم این جسم برابر است با:
(معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{5}{7}$ ۲) $\frac{4}{7}$ ۳) $\frac{7}{5}$ ۴) $\frac{7}{4}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\iiint_V\delta(x,y,z)\,dv=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(1+x+yz)\,dx\,dy\,dz=\int_0^1\int_0^1\left(\frac{3}{2}+yz\right)dy\,dz=\int_0^1\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}z\right)dz=\frac{7}{4}$$

مثال۱۲: به فرض آنکه V ناحیه محصور بین نمودارهای $z=x^2+2y+1$ و $z=y+2$ در یک هشتم اول باشد، حجم V کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{4}{15}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{2}{15}$ ۴) $\frac{2}{5}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا محل تلاقی دو رویه را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}z=x^2+2y+1\\ z=y+2\end{cases}\Rightarrow x^2+2y+1=y+2\Rightarrow y=1-x^2$$

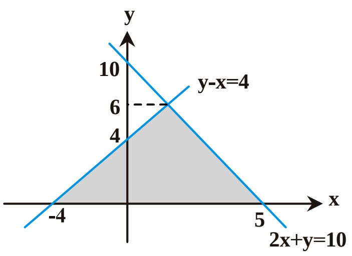
$$V=\int_0^1\int_0^{1-x^2}\int_{x^2+2y+1}^{y+2}dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{1-x^2}(1-x^2-y)\,dy\,dx=\int_0^1\frac{1}{2}(1-x^2)^2\,dx=\frac{4}{15}$$

مثال۱۳: حجم هرم مثلث القاعده‌ای که قاعده‌ی آن در صفحه $z=-6$ قرار دارد و وجوه آن صفحات قائم $y=0$ و $y-x=4$ و صفحه‌ی مورب $2x+y+z=4$ است برابر است با:
(MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) $\int_0^6\int_{y-4}^{\frac{10-y}{4}}\int_{-6}^{4-2x-y}dz\,dx\,dy$ ۲) $\int_0^6\int_{y-4}^{\frac{6-y}{4}}\int_{-6}^{4-2x-y}dz\,dx\,dy$ ۳) $\int_0^4\int_{y-4}^{\frac{10-y}{4}}\int_{-6}^{4-2x-y}dz\,dx\,dy$ ۴) $\int_0^4\int_{y-4}^{\frac{4-y}{2}}\int_{-6}^{4-2x-y}dz\,dx\,dy$

پاسخ: هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

واضح است که $-6\le z\le 4-2x-y$ می‌باشد. حال باید ناحیه را بر صفحه xoy تصویر کنیم، بدین منظور z را از روابط حذف می‌کنیم یعنی $-6=4-2x-y$ و بنابراین $2x+y=10$. پس مرزهای ناحیه موردنظر خط $2x+y=10$ و خط $y-x=4$ و $y=0$ می‌باشد در نتیجه داریم:



$$V=\int_0^6\int_{y-4}^{\frac{10-y}{2}}\int_{-6}^{4-2x-y}dz\,dx\,dy$$

مثال۱۴: حجم هرم محدود به صفحه‌ی $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ و صفحات مختصات کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۱» به طور کلی حجم هرم محدود به صفحه $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ و صفحات مختصات برابر $V=\frac{abc}{6}$ می‌باشد.

مثال۱۵: حجم محدود به دو رویه $2z=x^2+y^2$ و $z=\sqrt{x^2+y^2}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) $\frac{4\pi}{3}$ ۳) $\frac{5\pi}{3}$ ۴) $\frac{8\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۲» از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این صورت معادلات رویه‌ها به صورت $z=\frac{r^2}{2}$ و $z=r$ در می‌آید. دو رویه همدیگر را در $r=\frac{r^2}{2}$ و یا $r=2$ قطع می‌کنند، بنابراین داریم:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\frac{r^2}{2}}^{r} rdzdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2(r^2-\frac{r^3}{2})drd\theta=\int_0^{2\pi}(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{8})\Big|_0^2 d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}d\theta=\frac{4\pi}{3}$$

مثال۱۶: حجم محدود شده توسط مخروط به معادله‌ی $z^2=x^2+y^2$ و کره به معادله‌ی $x^2+y^2+z^2=4z$ و در بالای مخروط کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) 9π ۲) 8π ۳) 7π ۴) 6π

پاسخ: گزینه «۲» از مختصات کروی استفاده می‌کنیم. در مختصات کروی معادلات مخروط و کره داده شده به ترتیب $\phi=\frac{\pi}{4}$ و $\rho=4\cos\phi$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{4\cos\phi}\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{64}{3}\cos^3\phi\sin\phi d\phi d\theta=\frac{64}{3}\theta\Big|_0^{2\pi}\times\frac{-1}{4}\cos^4\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{128\pi}{3}\times(\frac{-1}{4}(\frac{+1}{4}-1))=8\pi$$

مثال۱۷: مقدار حجم ناحیه محدود به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و سهمی‌گون $x^2+y^2+3z=4$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

پاسخ: گزینه «۳» از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این صورت معادله مخروط به صورت $z=r$ و معادله سهمی‌گون به صورت $z=\frac{4-r^2}{3}$ در می‌آید. همچنین از تلاقی مخروط و سهمی‌گون یعنی از معادله $r=\frac{4-r^2}{3}$ مقدار $r=1$ به‌دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{\frac{4-r^2}{3}} rdzdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r(\frac{4-r^2}{3}-r)drd\theta=\frac{\pi}{2}$$

مثال۱۸: حجم ناحیه‌ی محدود به کره‌ی $\rho=a$ و مخروط‌های $\phi=\frac{\pi}{3}$ و $\phi=\frac{2\pi}{3}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۵)

۱) πa^3 ۲) $2\pi a^3$ ۳) $\frac{2\pi a^3}{3}$ ۴) $\frac{3\pi a^3}{4}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$V=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\int_0^a\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta.\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin\phi d\phi\int_0^a\rho^2 d\rho=2\pi\times1\times\frac{a^3}{3}=\frac{2\pi a^3}{3}$$

مثال۱۹: جرم پوسته کروی $1<\rho<2$ که چگالی جرمی نقاط مختلف آن از رابطه $\delta(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ محاسبه می‌شود کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۵)

۱) 4π ۲) 6π ۳) 8π ۴) 12π

پاسخ: گزینه «۲»

$$M=\iiint_V\delta dv=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^2\frac{1}{\rho}.\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta.\int_0^{\pi}\sin\phi d\phi.\int_1^2\rho d\rho=6\pi$$

مثال۲۰: حجم ناحیه‌ی سه بعدی D که از پایین به کره $x^2+y^2+z^2=2$ و از بالا به مخروط $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ محصور است، کدام است؟
(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{2}-1$ ۳) $\pi(2-\sqrt{3})$ ۴) $2\pi(1-\frac{2\sqrt{2}}{3})$

پاسخ: گزینه «۴» حدود z در این مثال مشخص هستند. با توجه به آن که ناحیه‌ی D از پایین به کره و از بالا به مخروط محدود است، متوجه می‌شویم $\sqrt{2-x^2-y^2}\le z\le 2-\sqrt{x^2+y^2}$. برای نوشتن حدود x و y، معادله‌ی کره و مخروط را برخورد می‌دهیم:

$$z=2-\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow x^2+y^2=(z-2)^2\xrightarrow{\text{(در معادله‌ی کره قرار می‌دهیم)}}(z-2)^2+z^2=2\Rightarrow 2z^2-4z+2=0\Rightarrow z^2-2z+1=0$$

$$\Rightarrow z=1\Rightarrow x^2+y^2=1$$

پس تصویر این ناحیه بر صفحه‌ی xoy دایره‌ی واحد است. به همین دلیل تصمیم می‌گیریم از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم. به وضوح $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le 1$ است و حدود z هم به صورت $\sqrt{2-r^2}\le z\le 2-r$ نوشته می‌شوند.

$$V=\iiint_D dzdydx=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt{2-r^2}}^{2-r} rdzdrdx=\int_0^{2\pi}\int_0^1(2r-r^2-r\sqrt{2-r^2})drd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}[r^2-\frac{r^3}{3}+\frac{1}{3}(2-r^2)^{\frac{3}{2}}]_0^1d\theta=\int_0^{2\pi}(1-\frac{2\sqrt{2}}{3})d\theta=2\pi(1-\frac{2\sqrt{2}}{3})$$

مثال۲۱: حجم جسم محدود به رویه $z=9-x^2-y^2$ در $\mathbb{R}^3$ و $z=0$ عبارت است از:
(ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{27\pi}{2}$ ۲) 18π ۳) $\frac{81\pi}{2}$ ۴) 81π

پاسخ: گزینه «۳» حجم مورد نظر را در مختصات استوانه‌ای محاسبه می‌کنیم:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-r^2}rdzdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3(9r-r^3)dr=\theta\Big|_0^{2\pi}\times(\frac{9}{2}r^2-\frac{r^4}{4})\Big|_0^3=\frac{81\pi}{2}$$

مثال۲۲: حجم محصور به دو رویه $2z=x^2+y^2+1$ و $z=x^2+y^2$ کدام است؟
(مکانیک ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{2\pi}{7}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$x^2+y^2=\frac{x^2+y^2+1}{2}\Rightarrow x^2+y^2=1$$

برای محاسبه حجم موردنظر از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$\Rightarrow V=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{\frac{r^2+1}{2}}rdzdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{r-r^3}{2}drd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\times(\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{8})\Big|_0^1=2\pi\times\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

مثال۲۳: حجم جسمی که در ناحیه اول از هشت ناحیه فضا قرار گرفته و به رویه‌های $x^2+y^2=4$ و $z^2=x^2+y^2$ محدود است، کدام است؟
(آمار ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{4\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۴» از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2\int_0^r rdzdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r^2drd\theta=\frac{4\pi}{3}$$

مثال۲۴: حجم بین استوانه $z=4-x^2$ و صفحات $x=0$ و $y=0$ و $y=6$ و $z=0$ برابر است با:
(معماری کشتی ـ سراسری ۸۷)

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینه «۳» برای یافتن تصویر ناحیه انتگرال‌گیری بر صفحه xoy، متغیر z را بین دو معادله $z=0$ و $z=4-x^2$ حذف می‌کنیم که در این صورت $x=\pm 2$ به‌دست می‌آید. پس یا $0\le x\le 2$ است، یا $-2\le x\le 0$. به علت آن‌که این ناحیه نسبت به متغیر x ها متقارن است، مقدار جواب در این دو ناحیه فرقی نمی‌کند، لذا x را مثبت فرض کرده و محدوده تغییرات آن را $0\le x\le 2$ در نظر می‌گیریم.

$$V=\int_0^6\int_0^2\int_0^{4-x^2}dzdxdy=\int_0^6dy\int_0^2(4-x^2)dx=y\Big|_0^6\times(4x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^2=32$$

مثال ۲۵: حجم بریده شده از کره $\rho = a$ توسط مخروط دوار $\phi = \frac{\pi}{۳}$ برابر کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{\pi a^۳}{۶}$ ۲) $\frac{\pi a^۳}{۲}$ ۳) $\frac{\pi a^۳}{۳}$ ۴) $\frac{\pi a^۳\sqrt{۳}}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$V = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}\int_۰^{a} \rho^۲ \sin\phi\, d\rho d\phi d\theta = \int_۰^{۲\pi} d\theta \int_۰^{\frac{\pi}{۳}} \sin\phi\, d\phi \int_۰^{a} \rho^۲ d\rho = ۲\pi \times \frac{۱}{۲} \times \frac{a^۳}{۳} = \frac{\pi a^۳}{۳}$$

مثال ۲۶: حجم محدود به رویه $z = \frac{۱}{x^۲+y^۲+۱}$ که در داخل استوانه $x^۲+y^۲=۱$ قرار می‌گیرد، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۸)

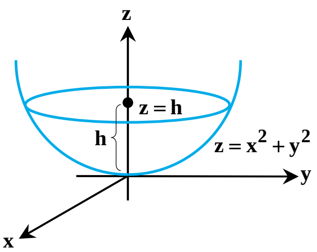
۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}\text{Ln}۲$ ۳) $\pi\text{Ln}۲$ ۴) $\frac{\pi}{۲} - \text{Ln}۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای محاسبه حجم مورد نظر از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این صورت رویه $z = \frac{۱}{x^۲+y^۲+۱}$ به صورت $z = \frac{۱}{r^۲+۱}$ در می‌آید و بنابراین حجم موردنظر برابر است با:

$$\Rightarrow V = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۱}\int_۰^{\frac{۱}{r^۲+۱}} r\,dz dr d\theta = \int_۰^{۲\pi} d\theta \int_۰^{۱} \frac{r dr}{r^۲+۱} = \theta\Big|_۰^{۲\pi} \times \frac{۱}{۲}\text{Ln}(r^۲+۱)\Big|_۰^{۱} = \pi\text{Ln}۲$$

مثال ۲۷: فرض کنید مخزنی به شکل سهمی‌گون $z = x^۲+y^۲$ با سرعت ۱ متر مکعب در ثانیه از نفت پر شود. سرعت افزایش سطح نفت در مخزن وقتی که ارتفاع نفت به یک متر رسیده باشد عبارتست از: (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{۱}{\pi}$ ۲) $\frac{۲}{\pi}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) π



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» (در صورت سؤال یک بی‌دقتی وجود دارد. طراح سؤال، سرعت افزایش ارتفاع نفت در مخزن را می‌خواهد. اما جمله‌ی به کار رفته، افزایش سطح نفت در مخزن است که ممکن است باعث ابهام شود.) ابتدا باید حجم نفت جمع شده در مخزن را وقتی که ارتفاع آن به h رسیده است، حساب کنیم. مطابق شکل، حجم داخل رویه‌ی $z = x^۲+y^۲$ و زیر صفحه‌ی $z = h$ را می‌خواهیم. برخورد آن‌ها با هم دایره‌ی $x^۲+y^۲ = h^۲$ را می‌دهد پس $۰ \le \theta \le ۲\pi$ و $۰ \le r \le h$ است. حدود z هم عبارتند از $z = x^۲+y^۲ = r^۲$ و $z = h$:

$$V = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{h}\int_{r^۲}^{h} r\,dz dr d\theta = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{h}(hr - r^۳)dr d\theta = ۲\pi\Big[\frac{hr^۲}{۲} - \frac{r^۴}{۴}\Big]_۰^{h} \Rightarrow V = \pi\Big(h^۳ - \frac{h^۴}{۲}\Big)$$

با مشتق‌گیری از طرفین نسبت به زمان داریم:

$$\frac{dv}{dt} = \pi(۳h^۲ - ۲h^۳)\frac{dh}{dt}$$

حالا از صورت سؤال می‌دانیم که $\frac{dv}{dt} = ۱$ و $h = ۱$ است. پس داریم:

$$۱ = \pi(۳-۲)\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{۱}{\pi}$$

مثال ۲۸: حجم محدود به رویه $z = x^۲+y^۲$ و صفحه $z = ۴$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{۱۶}{۳}\pi$ ۲) $\frac{۳۲}{۳}\pi$ ۳) ۴π ۴) ۸π

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای محاسبه حجم موردنظر از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این صورت معادله $z = x^۲+y^۲$ به صورت $z = r^۲$ در می‌آید. از تلاقی رویه $z = r^۲$ و صفحه $z = ۴$، $r^۲ = ۴$ و در نتیجه $r = ۲$ به‌دست می‌آید. پس حجم موردنظر برابر است با:

$$V = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲}\int_{r^۲}^{۴} r\,dz dr d\theta = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲} rz\Big|_{r^۲}^{۴} dr d\theta = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲}(۴r - r^۳)dr d\theta = \int_۰^{۲\pi} d\theta \int_۰^{۲}(۴r - r^۳)dr = \theta\Big|_۰^{۲\pi} \times \Big(۲r^۲ - \frac{r^۴}{۴}\Big)\Big|_۰^{۲} = ۸\pi$$

مثال۲۹: حجم ناحیه توپر T محدود به استوانه سهموی $z=\frac{1}{2}y^2$ و صفحه $x=0$ و صفحه $x+z=2$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{8}{15}$ ۲) $\frac{64}{15}$ ۳) $\frac{8}{5}$ ۴) $\frac{64}{5}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا کران‌های انتگرال‌گیری مربوط به تعیین حجم را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x=0 \\ x+z=2 \Rightarrow x=2-z \end{cases} \qquad 0\le x\le 2-z \ ,\ 0\le z\le 2 \qquad z=\frac{1}{2}y^2 \Rightarrow y^2=2z \Rightarrow y=\pm\sqrt{2z}$$

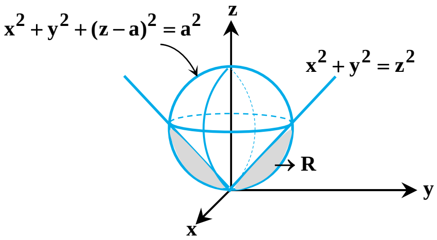
حجم V را محاسبه می‌کنیم:

$$V=\iiint_D dxdydz=\int_0^2\int_{-\sqrt{2z}}^{\sqrt{2z}}\int_0^{2-z}dxdydz=\int_0^2\int_{-\sqrt{2z}}^{\sqrt{2z}}(2-z)dydz=\int_0^2 2\sqrt{2}(2-z)\sqrt{z}dz$$

$$V=2\sqrt{2}\left[\frac{4}{3}z\sqrt{z}-\frac{2}{5}z^2\sqrt{z}\right]_0^2=2\sqrt{2}\left[\frac{8}{3}\sqrt{2}-\frac{8}{5}\sqrt{2}\right]=\frac{32}{3}-\frac{32}{5}=\frac{160-96}{15}\Rightarrow V=\frac{64}{15}$$

مثال۳۰: حجم قسمتی از کره‌ی $x^2+y^2+z^2=2az$ $(a>0)$ که خارج از مخروط $x^2+y^2-z^2=0$ می‌باشد کدام است؟
(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{4}\pi a^3$ ۲) $\frac{1}{3}\pi a^3$ ۳) $\frac{2}{3}\pi a^3$ ۴) $\frac{1}{2}\pi a^3$



پاسخ: گزینه «۲»

روش اول: ابتدا برای درک بهتر مسئله، شکل حجم خواسته شده را به صورت مقابل رسم می‌کنیم:

$$x^2+y^2+z^2=2az \Rightarrow x^2+y^2+z^2-2az+a^2=a^2 \Rightarrow x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$$

رویه فوق کره‌ای به مرکز $(0,0,a)$ و شعاع a می‌باشد و رویه $x^2+y^2=z^2$ مخروطی در راستای محور z هاست.

حال نقطه تلاقی مخروط و کره را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2az \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases} \Rightarrow 2z^2=2az \Rightarrow z^2-az=0 \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ z=a \xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطه مخروط}} x^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

سطح مقطع حاصل از تلاقی دو رویه، یک دایره به مرکز $(0,0)$ و شعاع $r=a$ در صفحه xoy می‌باشد.

لذا برای به‌دست آوردن حجم R کافیست که حجم نصف کره به شعاع $R=a$ را محاسبه کرده و حجم مخروط به ارتفاع $h=a$ و به شعاع سطح مقطع $r=a$ را از آن کم کنیم.

$$\text{حجم نصف کره}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)=\frac{2}{3}\pi r^3 \xrightarrow{r=a} V=\frac{2}{3}\pi a^3$$

$$\text{حجم مخروط}=\frac{1}{3}\pi r^2h \xrightarrow{r=a,h=a} V_2=\frac{1}{3}\pi a^2\times a=\frac{1}{3}\pi a^3$$

$$R\ \text{حجم ناحیه}: V=V_1-V_2=\frac{2}{3}\pi a^3-\frac{1}{3}\pi a^3=\frac{1}{3}\pi a^3$$

روش دوم: بعد از به‌دست آوردن محل تلاقی مخروط و کره برای محاسبه حجم R با استفاده از انتگرال سه‌گانه داریم:

$$V=\iiint_R dv=\iint_D\int_{z_1}^{z_2}dzdA$$

برای محاسبه کران‌های z_1 و z_2:

$$z_1\ \text{محاسبه}: x^2+y^2+(z-a)^2=a^2 \Rightarrow z=a\pm\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$$

که $z=a+\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$ نیمه بالایی کره است و $z=a-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$ نیمه پایینی کره می‌باشد، در نتیجه $z_1=a-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$ می‌باشد

و z_2 هم معادله مخروط است، بنابراین $z_2=\sqrt{x^2+y^2}$ است.

$$V=\iint_D\int_{a-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{x^2+y^2}}dzdA=\iint_D\left(\sqrt{x^2+y^2}-a+\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\right)dA$$

تصویر حجم ناحیه R بر روی صفحه xoy دایره $x^2+y^2=a^2$ می‌باشد، لذا برای محاسبه انتگرال فوق از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\text{تبدیل مختصات دکارتی به قطبی}: \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \to \begin{cases} 0\le r\le a \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^a\left(r-a+\sqrt{a^2-r^2}\right)rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^3}{3}-\frac{ar^2}{2}-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^a d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{2}-0+\frac{a^3}{3}\right)d\theta=\frac{a^3}{6}\times 2\pi=\frac{\pi a^3}{3}$$

مثال ۳۱: حجم ناحیه T که در یک هشتم اول قرار دارد و محدود به استوانه بیضوی $4x^2+z^2=1$ و صفحات $y=0, y=x$ و $z=0$ می‌باشد برابر است با:

(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{12}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به ناحیه T داده شده کران‌های انتگرال‌گیری برابر است با:

$$\begin{cases} z=0 \\ 4x^2+z^2=1 \Rightarrow z=\sqrt{1-4x^2} \end{cases} \Rightarrow 0\le z\le \sqrt{1-4x^2}\ ,\ 0\le x\le \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow 0\le y\le x$$

لذا با توجه به کران‌های انتگرال‌گیری فوق داریم:

$$V=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^x\int_0^{\sqrt{1-4x^2}} dzdydx=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^x z\Big|_0^{\sqrt{1-4x^2}} dydx=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^x \sqrt{1-4x^2}dydx$$

$$V=\int_0^{\frac{1}{2}} y\sqrt{1-4x^2}\Big|_0^x dx=\int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-4x^2}dx=\frac{-1}{12}(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{12}$$

مثال ۳۲: حجم ناحیه‌ی واقع در زیر رویهٔ $z=\frac{1}{x+y}$ که بالای صفحهٔ $z=0$ و ناحیه‌ی $1\le x\le 2$ و $0\le y\le x$ قرار دارد. برابر کدام است؟

(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{3}\text{Ln}2$ ۲) $\frac{1}{2}\text{Ln}2$ ۳) $\text{Ln}2$ ۴) $2\text{Ln}2$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به کران‌های داده شده برای ناحیه موردنظر داریم:

$$V=\int_1^2\int_0^x\int_0^{\frac{1}{x+y}} dzdydx=\int_1^2\int_0^x z\Big|_0^{\frac{1}{y+x}} dydx=\int_1^2\int_0^x \frac{1}{x+y}dydx$$

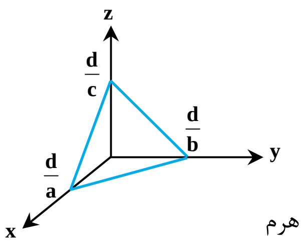
$$V=\int_1^2 \text{Ln}(x+y)\Big|_0^x dx=\int_1^2(\text{Ln}2x-\text{Ln}x)dx=\int_1^2 \text{Ln}2dx=(\text{Ln}2)x\Big|_1^2=\text{Ln}2$$

مثال ۳۳: هرگاه حجم هرم حاصل از برخورد صفحه‌ی $ax+by+cz=d$ و صفحات مختصات برابر با $\frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه حجم هرم حاصل از برخورد صفحه‌ی $2ax+3by+4cz=24d$ با صفحات مختصات کدام است؟

(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۰)

۱) ۲۸۸ ۲) ۴۳۲ ۳) ۵۷۶ ۴) ۸۶۴

پاسخ: گزینه «۱» حجم هرم حاصل از برخورد $ax+by+cz=d$ برابر است با:



$$\text{حجم هرم}=\frac{1}{6}\frac{d^3}{abc}=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{d^3}{abc}=3$$

بنابراین حجم حاصل از $2ax+3by+4cz=24d$ برابر است با:

$$\text{حجم هرم}=\frac{1}{6}\frac{(24d)^3}{(2a)(3b)(4c)}=\frac{1}{6}\frac{24^3d^3}{24abc}=\frac{1}{6}\frac{24^2d^3}{abc}=\frac{1}{6}\times 24\times 24\times 3=\frac{24\times 24}{2}=288$$

مدرسان شریف

فصل پنجم

« انتگرال روی خط یا انتگرال روی منحنی »

درسنامه: انتگرال روی خط یا انتگرال روی منحنی

مثال۱: اگر C دارای معادلات پارامتری $x = Ln(1+t^2)$ و $y = 2\text{arctg}t - t + 3$ باشد، حاصل انتگرال $I = \int_C ye^{-x}ds$، برای $0 \le t \le 1$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2}{16} - Ln2 + \frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi^2}{16} - Ln\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi^2}{4} - Ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi^2}{4} - Ln2 + \frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۲» در این سؤال $x(t)$، $y(t)$ و بازه‌ی تغییرات t داده شده و بنابراین کافیست $x'(t)$ و $y'(t)$ را حساب کنیم و در فرمول قرار دهیم:

$$x(t) = Ln(1+t^2) \Rightarrow x'(t) = \frac{2t}{1+t^2} \Rightarrow (x'_t)^2 = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \quad , \quad y(t) = 2\text{arctg}t - t + 3 \Rightarrow y'(t) = \frac{2}{1+t^2} - 1$$

$$\Rightarrow (y'_t)^2 = (\frac{1-t^2}{1+t^2})^2 \Rightarrow \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{\frac{1+t^4-2t^2+4t^2}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = 1$$

بنابراین داریم:

$$I = \int_0^1 (2\text{arctg}t - t + 3)e^{-Ln(1+t^2)}dt \xrightarrow{e^{Lnu}=u} I = \int_0^1 (2\text{arctg}t - t + 3) \times \frac{1}{1+t^2}dt = 2\int_0^1 \frac{\text{arctg}t}{1+t^2}dt - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt + 3\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow I = [(\text{arctg}t)^2]_0^1 - \frac{1}{2}[Ln(1+t^2)]_0^1 + 3[\text{arctg}t]_0^1 = (\text{arctg}1)^2 - \frac{1}{2}Ln2 + 3\text{arctg}1 = (\frac{\pi}{4})^2 - Ln2^{\frac{1}{2}} + 3 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16} - Ln\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}$$

مثال۲: هرگاه C پاره‌خطی از نقطه‌ی $A(0,0)$ تا $B(1,1)$ باشد، آن‌گاه حاصل $\int_C (x+y^2)ds$، چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{8}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» خُب ماجرا کمی سخت‌تر از حالت قبل شد، چون سؤال ضابطه‌ی $C(t)$ را به وضوح اعلام نکرده است. اما به‌دست آوردن $C(t)$ برای این سؤال چندان سخت نیست. واضح است؛ معادله‌ی خط C به‌صورت $y = x$ است و این یعنی می‌توان معادله‌ی پارامتری C را با فرض $x = t$ و در نتیجه $y = t$ به شکل زیر نوشت:

$$\vec{C}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = t\vec{i} + t\vec{j}$$

بنابراین داریم:

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \sqrt{1^2+1^2}dt = \sqrt{2}\,dt$$

از طرفی بازه و تغییرات t به‌صورت $0 \le t \le 1$ است، چرا؟ چون که ما فرض کردیم: $x = t$، بنابراین تغییرات t مانند تغییرات x است و چون x از ۰ تا ۱ تغییر کرده، t هم بازه‌ی تغییراتش از ۰ تا ۱ است، بنابراین داریم:

$$\int_C (x+y^2)ds = \int_0^1 (t+t^2)\sqrt{2}dt = \sqrt{2}[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}]_0^1 = \sqrt{2}[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}] = \frac{5}{6}\sqrt{2}$$

مثال ۳: انتگرال خط تابع برداری $\vec{F}=۶xy\vec{i}+۱۰xy\vec{j}$، در طول سهمی $y=x^۲$ از نقطه‌ی $(۱,۱)$ تا $(۲,۴)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۳۰۷}{۲}$ ۲) $\frac{۲۹۹}{۲}$ ۳) $\frac{۳۰۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲۹۳}{۲}$

پاسخ: گزینه «۴» چون تعیین منحنی C و پارامتری کردن منحنی را در قسمت قبل کامل آموزش دادم، بنابراین همه بلدید! اگر فرض کنیم $x=t$ آن‌گاه $y=t^۲$ و چون $۱\le x\le ۲$، بنابراین $۱\le t\le ۲$، پس می‌تونیم منحنی C را به راحتی به شکل مقابل بنویسیم:

$$\vec{C}(t)=t\vec{i}+t^۲\vec{j}\Rightarrow \vec{C}'(t)=۱\vec{i}+(۲t)\vec{j}$$

حالا در ضابطه‌ی $\vec{F}$ به جای تمام x ها، متغیر $\underline{t}$ و به جای تمام y ها، عبارت $\underline{\underline{t^۲}}$ را جایگزین می‌کنیم:

$$I=\int_C \vec{F}.d\vec{r}=\int_۱^۲[۶(t)(t^۲)\vec{i}+(۱۰t)(t^۲)\vec{j}].[\vec{i}+(۲t)\vec{j}]dt$$

با ضرب دو کروشه‌ی مقابل انتگرال درهم داریم:

$$\Rightarrow I=\int_۱^۲(۶t^۳+۲۰t^۴)dt=[\frac{۶t^۴}{۴}+\frac{۲۰t^۵}{۵}]_۱^۲=[\frac{۶\times۲^۴}{۴}+\frac{۲۰\times۲^۵}{۵}-\frac{۶}{۴}-\frac{۲۰}{۵}]=۲۴+۴\times۳۲-\frac{۳}{۲}-۴=۱۴۸-\frac{۳}{۲}=\mathbf{\frac{۲۹۳}{۲}}$$

مثال ۴: حاصل انتگرال خط $\int_C xydx+xdy$، که C قسمتی از منحنی $y=x^۲$ از نقطه‌ی $A(۱,۱)$ تا نقطه‌ی $B(۲,۴)$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۰۴}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱۰۹}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱۰۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱۱۸}{۱۲}$

پاسخ: گزینه «۳» با فرض $x=t$، آن‌گاه $y=t^۲$ و لذا داریم:

$$x'_t=۱\ ,\ y'_t=۲t\ ,\ ۱\le t\le ۲$$

$$\text{حاصل انتگرال}=\int_۱^۲[(t)(t^۲)(۱)+t(۲t)]dt=\int_۱^۲(t^۳+۲t^۲)dt=[\frac{t^۴}{۴}+۲\frac{t^۳}{۳}]_۱^۲=\frac{۲^۴}{۴}+۲\times\frac{۲^۳}{۳}-\frac{۱}{۴}-\frac{۲}{۳}=\frac{۳\times۱۶+۴\times۱۶-۳-۸}{۱۲}=\mathbf{\frac{۱۰۱}{۱۲}}$$

مثال ۵: در صورتی که C پاره‌خط واصل از نقطه‌ی $A(۱,۰,۱)$ به نقطه‌ی $B(۲,۳,۱)$ و سپس از نقطه‌ی $B(۲,۳,۱)$ به نقطه‌ی $D(۲,۵,۲)$ باشد، حاصل انتگرال خط $\int_C (x+y)dx+۲xdy+xydz$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۲۶ ۴) ۲۸

پاسخ: گزینه «۴» فرض کنیم $C_۱$ و $C_۲$ نشان‌دهنده‌ی پاره‌خط‌های AB و BD باشند. روی مسیر $C_۱$ داریم:

$$\vec{C}_۱(t)=A+(B-A)t=(۱,۰,۱)+(۲-۱,۳-۰,۱-۱)t=(۱+t,۳t,۱)\Rightarrow C_۱:\begin{cases}x=۱+t & \Rightarrow dx=dt\\ y=۳t & \Rightarrow dy=۳dt\ ;\ ۰\le t\le ۱\\ z=۱ & \Rightarrow dz=۰\end{cases}$$

روی مسیر $C_۲$ داریم:

$$\vec{C}_۲(t)=B+(D-B)t=(۲,۳,۱)+(۲-۲,۵-۳,۲-۱)t=(۲,۳+۲t,۱+t)\Rightarrow C_۲:\begin{cases}x=۲ & \Rightarrow dx=۰\\ y=۳+۲t & \Rightarrow dy=۲dt\ ;\ ۰\le t\le ۱\\ z=۱+t & \Rightarrow dz=dt\end{cases}$$

بنابراین انتگرال ساده‌ی مقابل را داریم:

$$\int_C(x+y)dx+۲xdy+xydz=\int_{C_۱}(x+y)dx+۲xdy+xydz+\int_{C_۲}(x+y)dx+۲xdy+xydz$$

$$=\int_۰^۱[(t+۱+۳t)dt+۲(t+۱)(۳dt)+۰]+\int_۰^۱[۰+۴(۲dt)+۲(۲t+۳)dt]$$

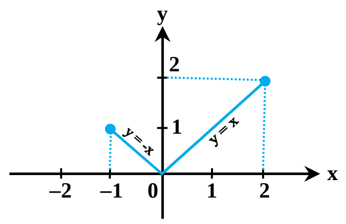
$$=\int_۰^۱(۱۰t+۷)dt+\int_۰^۱(۴t+۱۴)dt=[\frac{۱۰t^۲}{۲}+۷t]_۰^۱+[\frac{۴t^۲}{۲}+۱۴t]_۰^۱=۵+۷+۲+۱۴=\mathbf{۲۸}$$

مثال ۶: انتگرال خط میدان $\vec{F}=(x^۲+y^۲)\vec{i}+(x^۲-y)\vec{j}$، روی منحنی $y=|x|$، از نقطه‌ی $(-۱,۱)$ تا نقطه‌ی $(۲,۲)$ مساوی است با:

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳۱}{۶}$ ۳) -۲ ۴) $\frac{۴۱}{۶}$

پاسخ: گزینه «۴» مسیر موردنظر در شکل زیر نمایش داده شده است:

یعنی دو مسیر داریم که $C_۱$ خط به معادله‌ی $y=-x$ از ۱- تا ۰ است و $C_۲$ خط به معادله‌ی $y=x$ از ۰ تا ۲ می‌باشد، پس معادله‌ی پارامتری برای $C_۱$، با فرض $x=t$، $y=-t$ و برای $C_۲$ با فرض $x=t$، $y=t$ خواهد بود، لذا داریم:



$$\int_C \vec{F}.d\vec{r}=\int_{C_۱}\vec{F}.d\vec{r}+\int_{C_۲}\vec{F}.d\vec{r}=I_۱+I_۲\Rightarrow I_۱=\int_{-۱}^{۰}(t^۲+t^۲)dt+(t^۲+t)(-dt)$$

$$=\int_{-۱}^{۰}(t^۲-t)dt=[\frac{t^۳}{۳}-\frac{t^۲}{۲}]_{-۱}^{۰}=+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۶}$$

$$I_۲=\int_{۰}^{۲}(t^۲+t^۲)dt+(t^۲-t)dt=\int_{۰}^{۲}(۳t^۲-t)dt=[t^۳-\frac{t^۲}{۲}]_{۰}^{۲}=۶$$

بنابراین حاصل انتگرال $\frac{۴۱}{۶}=\frac{۵}{۶}+۶=I$ است.

مثال ۷: حاصل $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ را که در آن $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}-z\vec{j}+y\vec{k}$ و $\vec{r}(t)=۲t\vec{i}+۳t\vec{j}-t^۲\vec{k}$ از نقطه نظیر $t=-۱$ تا $t=۱$ کدام است؟

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) -۱ ۴) -۲

پاسخ: گزینه «۴» معادله‌ی پارامتری شده C به‌صورت $\vec{r}(t)=(۲t)\vec{i}+(۳t)\vec{j}-t^۲\vec{k}$ است، بنابراین میدان $\vec{F}$ روی خم داده شده به‌صورت $\vec{F}=۲t\vec{i}+t^۲\vec{j}+۳t\vec{k}$ در می‌آید و همچنین داریم: $\vec{C}(t)=۲t\vec{i}+۳t\vec{j}-t^۲\vec{k}\Rightarrow C'(t)=۲\vec{i}+۳\vec{j}-۲t\vec{k}$

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r}=\int_{-۱}^{۱}\vec{F}[C(t)]C'(t)dt=\int_{-۱}^{۱}[(۲t\vec{i}-(-t^۲)\vec{j}+(۳t)\vec{k}][۲\vec{i}+۳\vec{j}-۲t\vec{k}]dt=\int_{-۱}^{۱}[(۴t)+۳t^۲-۶t^۲]dt=\int_{-۱}^{۱}(۴t-۳t^۲)dt$$

$$=[۲t^۲-t^۳]_{-۱}^{۱}=(۲-۱)-(۲+۱)=۱-۳=-۲$$

مثال ۸: اگر منحنی C خط $y=x$ از نقطه‌ی $(۰,۰)$ تا نقطه‌ی $(۱,۱)$ باشد، در این صورت مقدار انتگرال $\int_C (x+y)dx+(x-y)dy$ برابر است با...

(کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» منحنی C را به‌صورت مقابل پارامتری می‌کنیم: $x=t,y=t,dx=dt,dy=dt,۰\le t\le ۱$

بنابراین داریم:

$$I=\int_C (x+y)dx+(x-y)dy=\int_{۰}^{۱}[(t+t)+(t-t)]dt=\int_{۰}^{۱}۲tdt=۱$$

مثال ۹: مقدار $\int_C xy^۲ds$ وقتی معادله‌ی پارامتری C به‌صورت $x=\cos t$، $y=\sin t$ و $۰\le t\le\frac{\pi}{۲}$ برابر است با ....

(کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$ds=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^۲+(\frac{dy}{dt})^۲}dt=\sqrt{(-\sin t)^۲+\cos^۲ t}dt=dt$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_C xy^۲ds=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos t\sin^۲ tdt=[\frac{۱}{۳}\sin^۳ t]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۱}{۳}$$

مثال ۱۰: اگر $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$، آن‌گاه حاصل $\int_C \vec{F}.d\vec{R}$ بر روی مسیر $z=t^۳$ و $y=t^۲$ و $x=۲t$ از نقطه نظیر $t=۰$ تا $t=۱$ کدام است؟

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۲» روی مسیر داده شده، میدان $\vec{F}$ به‌صورت $\vec{F}=۲t\vec{i}+t^۲\vec{j}+t^۳\vec{k}$ در می‌آید. از طرفی داریم:

$$\vec{C}(t)=(۲t,t^۲,t^۳)\Rightarrow d\vec{R}=C'(t)dt=(۲,۲t,۳t^۲)dt\Rightarrow \vec{F}.d\vec{R}=(۲t\vec{i}+t^۲\vec{j}+t^۳\vec{k})(۲\vec{i}+۲t\vec{j}+۳t^۲\vec{k})dt=(۴t+۲t^۳+۳t^۵)dt$$

بنابراین داریم:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{R}=\int_{۰}^{۱}(۴t+۲t^۳+۳t^۵)dt=(۲t^۲+\frac{۱}{۲}t^۴+\frac{۱}{۲}t^۶)\Big|_{۰}^{۱}=۳$$

مثال ۱۱: اگر $\vec{F}=M\vec{i}+N\vec{j}+P\vec{k}$ یک میدان برداری و C یک منحنی با معادلات پارامتری $\vec{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{r}_2=(x_2,y_2,z_2)$ باشد. در این صورت کدام حکم در مورد $\oint_C \vec{F}.d\vec{r}_1$ و $\oint_C \vec{F}.d\vec{r}_2$ صحیح است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) فقط در صورتی برابرند که $\vec{F}$ میدان گرادیان باشد.
۲) فقط در صورتی برابرند که منحنی C بسته باشد.
۳) فقط در صورتی برابرند که $\vec{F}$ میدان گرادیان و منحنی C بسته باشد.
۴) با هم برابرند.

پاسخ: گزینه «۴» کار انجام شده توسط میدان $\vec{F}$ روی خم C مستقل از نحوه پارامتری کردن خم می‌باشد، لذا حاصل هر دو انتگرال برابر است.

مثال ۱۲: حاصل $\int ydx-xdy$ در امتداد یک قوس از بیضی $x=\cos t$ و $y=2\sin t$ کدام است؟ (مکانیک ـ آزاد ۸۴)

۱) -2π ۲) -4π ۳) -3π ۴) $+\pi$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\int_C ydx-xdy=\int_0^{2\pi}(-2\sin^2 t-2\cos^2 t)dt=-2\int_0^{2\pi}dt=-4\pi$$

مثال ۱۳: مقدار انتگرال $\oint_C(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$، که در آن C مرز ناحیه محصور به وسیله منحنی‌های $y=x^2$ و $y^2=x$ است و یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است، کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{30}$ ۲) $\frac{1}{25}$ ۳) $\frac{1}{20}$ ۴) $\frac{1}{15}$

پاسخ: گزینه «۱» منحنی‌های داده شده همدیگر را در نقاط $(0,0)$ و $(1,1)$ قطع می‌کنند. خم C از دو خم $C_1:y=x^2$ و $C_2:x=y^2$ تشکیل شده است، بنابراین:

$$I=\int_0^1(2x^3-x^2)dx+(x+x^4)\times 2xdx+\int_1^0(2y^3-y^4)\times 2ydy+(y^2+y^2)dy=\left(\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^6}{3}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{4}{5}y^5-\frac{y^6}{3}+\frac{2y^3}{3}\right)\Big|_1^0=\frac{1}{30}$$

مثال ۱۴: حاصل $\int_C xy^2dy$ وقتی C سهمی به معادله‌ی $y=x^2$ از نقطه‌ی $(0,0)$ تا نقطه‌ی $(2,4)$ است، کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{257}{7}$ ۲) $\frac{256}{7}$ ۳) $\frac{255}{7}$ ۴) $\frac{254}{7}$

پاسخ: گزینه «۲» در روی منحنی $y=x^2$، داریم: $dy=2xdx$، پس $x=t$ و $y=t^2$ و $dy=2tdt$، بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_C xy^2dy=\int_0^2 t(t^2)^2\times(2tdt)=2\int_0^2 t^6dt=\frac{256}{7}$$

مثال ۱۵: اگر $\vec{F}(x,y)=(x^2-xy)\vec{i}+(y^2-xy)\vec{j}$ و از $(-1,1)$ تا $(1,1)$ روی خم سهمی C به معادله‌ی $y=x^2$ اثر کند، آن‌گاه حاصل انتگرال خطی $\int_C(\vec{F}.\vec{T})ds=\int_C Mdx+Ndy$ روی خم C کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۵)

۱) $-\frac{1}{15}$ ۲) $-\frac{2}{15}$ ۳) $\frac{1}{15}$ ۴) $\frac{2}{15}$

پاسخ: گزینه «۲» در روی خم $y=x^2$، انتگرال، منحنی‌الخط داده شده به‌صورت مقابل در می‌آید: $(dy=2tdt, dx=dt, y=t^2, x=t)$

$$\int_C Mdx+Ndy=\int_{-1}^1((t^2-t^3)dt+(t^4-t^3)2tdt)=\int_{-1}^1(2t^5-2t^4-t^3+t^2)dt=\frac{-2}{15}$$

مثال ۱۶: هرگاه C پاره‌خطی از نقطه $(0,1,-1)$ تا $(1,2,1)$ بوده، آن‌گاه حاصل $\int_C(ydx+zdy-xdz)$ برابر است با: (عمران ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲» ابتدای پاره‌خط $A(0,1,-1)$ و انتهای آن $B(1,2,1)$ است. معادله‌ی پارامتری آن را می‌نویسیم:

$$\vec{C}(t)=A+(B-A)t=(0,1,-1)+(1-0,2-1,1+1)t=(t,1+t,-1+2t)$$

و در این روش همیشه $0\le t\le 1$ است. پس داریم:

$$x=t, y=1+t, z=-1+2t \Rightarrow dx=dt, dy=dt, dz=2dt$$

$$\int_C(ydx+zdy-xdz)=\int_0^1((t+1)dt+(2t-1)dt-t\times 2dt)=\int_0^1 tdt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

مثال ۱۷: مقدار انتگرال خط $\int_C ۳ydx+xdy$ ، که در آن C نیم‌دایره $x=\cos t, y=\sin t$ ، $0\le t\le \pi$ است، کدام است؟

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۷ و ۸۸)

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) π ۳) $-\pi$ ۴) $۳\frac{\pi}{۲}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که:

$$\begin{cases} x=\cos t \Rightarrow dx=-\sin t dt \\ y=\sin t \Rightarrow dy=\cos t dt \end{cases}$$

با جایگزینی روابط بالا در انتگرال داده شده داریم:

$$\int_C ۳ydx+xdy=\int_۰^{\pi}(-۳\sin^۲ t+\cos^۲ t)dt=\int_۰^{\pi}(-۳(\frac{۱-\cos ۲t}{۲})+(\frac{۱+\cos ۲t}{۲}))dt=\int_۰^{\pi}(-۱+۲\cos ۲t)dt=-\pi$$

مثال ۱۸: مقدار $\int_C (x^۲y-z)dt$ که در آن خم C با معادله‌ی پارامتری $0\le t\le\pi$ ، $\vec{C}(t)=(\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}-t\vec{k}$ داده شده برابر است با:

(ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi^۲}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}+\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}+\frac{\pi^۲}{۲}$

پاسخ: گزینه «۴» با جایگذاری مقادیر برحسب t (با توجه به معادله خم C) مقدار انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_C (x^۲y-z)dt=\int_۰^{\pi}(\cos^۲ t\sin t+t)dt=(-\frac{\cos^۳ t}{۳}+\frac{t^۲}{۲})\Big|_۰^{\pi}=\frac{۲}{۳}+\frac{\pi^۲}{۲}$$

مثال ۱۹: اگر $\vec{F}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+x\vec{k}$ حاصل $\int_C \vec{F}.d\vec{R}$ در امتداد منحنی $\begin{cases} y=x^۲ \\ z=x^۳ \end{cases}$ از نقطه $x=0$ تا $x=۱$ کدام است؟

(MBA ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ: گزینه «۳» چون منحنی از $x=0$ تا $x=۱$ داده شده است، پس بهتر است $t=x$ در نظر گرفته شود در این صورت $y=t^۲$ و $z=t^۳$ و با جایگزینی داریم:

$$\vec{F}(\vec{C}(t))=(t^۲\times t^۳)\vec{i}+(t\times t^۳)\vec{j}+t\vec{k}\ ,\ \vec{C}(t)=t\vec{i}+t^۲\vec{j}+t^۳\vec{k}\ ,\ C'(t)=\vec{i}+۲t\vec{j}+۳t^۲\vec{k}$$

$$\int_C \vec{F}.d\vec{R}=\int_۰^۱(t^۵\vec{i}+t^۴\vec{j}+t\vec{k})(\vec{i}+۲t\vec{j}+۳t^۲\vec{k})dt=\int_۰^۱(t^۵+۲t^۵+۳t^۳)dt=\int_۰^۱(۳t^۵+۳t^۳)dt=[\frac{۳t^۶}{۶}+\frac{۳t^۴}{۴}]_۰^۱=\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}=\frac{۵}{۴}$$

مثال ۲۰: مقدار انتگرال $\int_C xdx+(x-y)dy+(x+y+z)dz$ که در آن C پاره خط از $(۱,۰,-۱)$ تا $(۲,۳,۴)$ می‌باشد برابر است با:

(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{۲۳}{۲}$ ۲) $\frac{۴۳}{۲}$ ۳) ۲۴ ۴) ۳۴

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا معادله‌ی پارامتری C را می‌نویسیم. نقطه‌ی ابتدا $A(۱,۰,-۱)$ و نقطه‌ی انتها $B(۲,۳,۴)$ است.

$$\vec{C}(t)=A+(B-A)t=(۱+t,۳t,-۱+۵t)$$

$$\Rightarrow x=۱+t, y=۳t, z=-۱+۵t \Rightarrow dx=dt, dy=۳dt, dz=۵dt$$

در این روش همواره $0\le t\le ۱$ است. با جایگذاری روابط فوق در انتگرال منحنی‌الخط داده شده داریم:

$$\int_C xdx+(x-y)dy+(x+y+z)dz=\int_۰^۱(t+۱)dt+(t+۱-۳t)(۳dt)+(t+۱+۳t+۵t-۱)(۵dt)$$

$$=\int_۰^۱(t-۶t+۴+۴۵t)dt=\int_۰^۱(۴۰t+۴)dt=(۲۰t^۲+۴t)\Big|_۰^۱=۲۰+۴=۲۴$$

درسنامه۲: تعاریف دیگر و کاربردهای انتگرال خط

مثال۱: جرم سیمی را که از تقاطع دو رویه $z = x^2$ و $z = 2 - x^2 - 2y^2$ بین نقاط $(0,1,0)$ و $(1,0,1)$ واقـع در یـک هشـتم اول دسـتگاه مختصـات دکارتی قرار دارد در صورتی که چگالی سیم در نقطه (x,y,z) برابر $\rho(x,y,z) = xy$ باشد، کدام است؟

۱) $\pi + 2$ ۲) $\frac{\pi+2}{2}$ ۳) $\frac{\pi+2}{8}$ ۴) $\frac{\pi+2}{4}$

پاسخ : گزینه «۳» ابتـدا لازم است خـم موردنظر (C) را به نحوی مناسب به شکل پارامتری در آوریم. از آنجا که خـم روی $z = x^2$ قـرار دارد و x از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند، لذا می‌توانیم قرار دهیم $x = t$ و $z = t^2$ و بنابراین داریم: $2y^2 = 2 - x^2 - z = 2 - 2t^2 \Rightarrow y^2 = 1 - t^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-t^2}$

خم داده شده در یک هشتم اول قرار دارد، پس $y \ge 0$ است و داریم $y = \sqrt{1-t^2}$. پس معادله پارامتری منحنی C به این صورت است:

$$x = t\ ,\ y = \sqrt{1-t^2}\ ,\ z = t^2$$

$$x'_t = 1\ ,\ y'_t = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\ ,\ z'_t = 2t \Rightarrow ds = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2} + 4t^2}\,dt = \frac{\sqrt{1+4t^2-4t^4}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

بنابراین جرم سیم برابر است با:

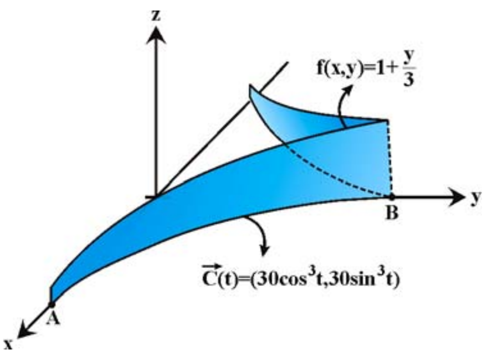
$$\text{جرم سیم} = M = \int_C \rho ds = \int_C xy ds = \int_0^1 (t\sqrt{1-t^2})\frac{\sqrt{1+4t^2-4t^4}}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2-4t^4}\,dt$$

عبارت زیر رادیکال به‌صورت $2 - (2t^2-1)^2$ نوشته می‌شود پس از تغییر متغیر $2t^2 - 1 = \sqrt{2}\sin\theta$ استفاده مـی‌کنـیم. از $0 \le t \le 1$ داریـم $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ و با مشتق‌گیری از طرفین داریم $4tdt = \sqrt{2}\cos\theta d\theta$ در نتیجه $tdt = \frac{\sqrt{2}}{4}\cos\theta d\theta$:

$$M = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{4}\cos\theta\sqrt{2-2\sin^2\theta}\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{4}\cos\theta\sqrt{2}\cos\theta d\theta \xrightarrow{\text{زوج بودن زیر انتگرال}} \frac{2\sqrt{2}\sqrt{2}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{\pi+2}{8}$$

مثال۲: نقاشی می‌خواهد دو طرف یک حصار قدیمی نشان داده شده در شکل زیر را نقاشی کند. اگر او به ازای هر ۳۰ مترمربع نقاشی، مبلـغ ۲۰۰ هزار تومان دریافت کند، درآمد او از نقاشی این حصار چند میلیون تومان است؟

۱) ۳
۲) ۶
۳) ۴/۵
۴) ۹



پاسخ: گزینه «۲» با توجه به فرمول بالا، مساحت «نصف یک طرف حصار» برابر با انتگرال $\int_C f(x,y)ds$ است. در ایـن سـؤال $f(x,y) = 1 + \frac{y}{3}$ داده شده است و بنابراین کافیست ds را حساب کنیم.

$$C'(t) = (-90\cos^2 t\sin t)\vec{i} + (90\sin^2 t\cos t)\vec{j} \Rightarrow |C'(t)| = 90\sin t\cos t \Rightarrow ds = (90\sin t\cos t)dt$$

با توجه به معادله‌ی $C(t)$، واضح است $y = 30\sin^3 t$، از طرفی برای تعیین حدود t توجه کنید که چون تابع $f(x,y) = 1 + \frac{y}{3}$ بـه x بسـتگی نـدارد، لـذا می‌توان حدود t را برای یک چهارم اول صفحه تعیین کرد و حاصل انتگرال را در عدد ۲ ضرب کرد. برای تعیین حدود t داریم:

$$\left.\begin{array}{l} A\ \text{نقطه}: y = 0 \Rightarrow 30\sin^3 t = 0 \Rightarrow t = 0 \\ B\ \text{نقطه}: x = 0 \Rightarrow 30\cos^3 t = 0 \Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

و لذا داریم:

$$S = \int_C (1+\frac{y}{3})ds = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{30\sin^3 t}{3})(90\sin t\cos t)dt = 2\times 90\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t + 10\sin^4 t)\cos t dt = 180\left[\frac{\sin^2 t}{2} + 2\sin^5 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow S = 180(\frac{1}{2}+2) = 180\times\frac{5}{2} = 450$$

چون دو طرف حصار باید رنگ شود، بنابراین مساحت قابل رنگ ۹۰۰ مترمربع است و چون برای نقاشی ۳۰ متـر مربـع، مبلـغ ۲۰۰ هـزار تومـان پرداخـت می‌شود، لذا داریم:

$$\text{درآمد نقاش} = \frac{900}{30}\times 200000 = 30\times 200000 = 6{,}000{,}000$$

مثال ۳: مساحت بخشی از استوانه $x^۲+y^۲=۱$، که بین صفحات $x+y+z+۱=۰$ و $x+y-z+۳=۰$ قرار دارد، چقدر است؟

۱) ۴π ۲) ۸π ۳) ۱۲π ۴) ۶π

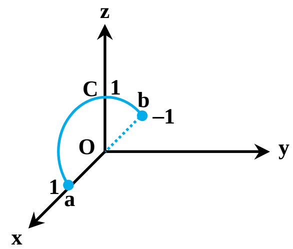
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از معادله‌های داده شده $z_۱=-۱-x-y$ و $z_۲=۳+x+y$ به‌دست می‌آید، در واقع مساحت بخشی از استوانه‌ای که روی محیط دایره $C: x^۲+y^۲=۱$ به ارتفاع $z_۲-z_۱$ تشکیل می‌شود، باید حساب شود. مساحت موردنظر برابر $\int_C (z_۲-z_۱)\,ds$ است. خم $C: x^۲+y^۲=۱$ را به‌صورت پارامتری $\vec{C}(t)=(\cos t,\sin t)$ در نظر می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$ds=\sqrt{x'^۲+y'^۲}\,dt=\sqrt{(-\sin t)^۲+(\cos t)^۲}\;dt=dt$$

بنابراین مساحت موردنظر برابر است با:

$$\int_C [(۳+x+y)-(-۱-x-y)]\,ds=\int_۰^{۲\pi}(۴+۲\cos t+۲\sin t)\,dt=۸\pi$$

مثال ۴: ذره‌ای روی نیم‌دایره شکل مقابل از نقطه‌ی a تا b تحت تأثیر نیروی $\vec{F}=-z\vec{i}+x\vec{k}$ حرکت می‌کند. کار انجام شده توسط این نیرو چقدر است؟



۱) $\frac{\pi}{۲}$

۲) π

۳) $\frac{۳\pi}{۲}$

۴) ۲π

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» منحنی C نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱ است و در صفحه xoz قرار دارد و این یعنی $y=۰$، و لذا معادله‌ی دایره‌ی کامل $z^۲+x^۲=۱$ است که می‌دانیم معادله‌ی پارامتری دایره $x=\cos t$ و $z=\sin t$ می‌باشد و به راحتی $x'(t)=-\sin t$ و $z'(t)=\cos t$، به‌دست می‌آید:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r}=\int_C(-z)dx+\int_C x\,dz=\int_۰^{\pi}(-\sin t)(-\sin t)dt+\int_۰^{\pi}(\cos t)(\cos t)dt=\int_۰^{\pi}(\sin^۲ t+\cos^۲ t)dt=\int_۰^{\pi}dt=\pi$$

مثال ۵: میدان نیروی دو بعدی $\vec{F}$ با معادله‌ی $\vec{F}(x,y)=cxy\vec{i}+x^۶y^۲\vec{j}$ مفروض است، که c مقدار ثابت مثبتی است. این نیرو بر ذره‌ای اثر می‌کند و آن را از نقطه‌ی $(۰,۰)$ تا خط $x=۱$ در طول خمی به معادله‌ی $y=ax^b$ ($a>۰$ و $b>۰$) حرکت می‌دهد. اگر کار انجام شده توسط این نیرو از b مستقل باشد، آن‌گاه مقدار a بر حسب c کدام است؟

۱) $a=\sqrt[۳]{\frac{۳}{۲}c}$ ۲) $a=\sqrt{\frac{۳c}{۲}}$ ۳) $a=\sqrt{\frac{c}{۶}}$ ۴) $a=\sqrt[۳]{\frac{c}{۶}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» معادله‌ی پارامتری خم داده شده به‌صورت $r(t)=(t,at^b)$ است، در این صورت داریم:

$$\vec{F}.d\vec{r}=(ct.at^b,t^۶.a^۲t^{۲b}).(۱,abt^{b-۱})dt=(act^{b+۱}+a^۳bt^{۳b+۵})dt$$

بنابراین کار انجام شده برابر است با:

$$\int_c \vec{F}.d\vec{r}=\int_۰^۱(act^{b+۱}+a^۳bt^{۳b+۵})dt=\left(\frac{ac}{b+۲}t^{b+۲}+\frac{a^۳b}{۳b+۶}t^{۳b+۶}\right)\Big|_۰^۱=\frac{ac}{b+۲}+\frac{a^۳b}{۳(b+۲)}=\frac{ac}{b+۲}+\frac{a^۳}{۳}-\frac{۲a^۳}{۳(b+۲)}$$

برای این که مقدار انتگرال از b مستقل باشد، بایستی مقدار عبارت $\frac{ac}{b+۲}-\frac{۲a^۳}{۳(b+۲)}$ برابر صفر باشد، که در این صورت داریم:

$$\frac{ac}{b+۲}-\frac{۲a^۳}{۳(b+۲)}=۰\Rightarrow\frac{۳ac-۲a^۳}{۳(b+۲)}=۰\Rightarrow ۳c=۲a^۲\Rightarrow a=\sqrt{\frac{۳c}{۲}}$$

سؤال دانشجو: چرا پس از حل انتگرال، جمله‌ی $\frac{a^۳}{۳}$ را جدا کردید؟

پاسخ: زیرا می‌خواهیم جملاتی که به b وابسته نیستند را کنار بگذاریم. سایر جملات به b بستگی دارند و مجموع آن‌ها باید صفر باشد.

مثال ۶: جریان میدان برداری $\vec{F}=(x+y)\vec{i}-(x^2+y^2)\vec{j}$، روی مسیر C که متشکل از دو پاره‌خط از $(1,0)$ تا $(0,-1)$ و از $(0,-1)$ تا $(-1,0)$ است، چقدر می‌باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۱» مسیر C از دو قسمت تشکیل شده است، پاره‌خط C_1 که از $A(1,0)$ به $B(0,-1)$ می‌رسد و پاره‌خط C_2 که از $B(0,-1)$ به $D(-1,0)$ می‌رسد:

$$\vec{C}_1(t)=A+(B-A)t=(1-t,-t)\Rightarrow\begin{cases}x=-t+1\Rightarrow dx=-dt\\ y=-t\Rightarrow dy=-dt\end{cases},\quad 0\le t\le 1$$

$$\vec{C}_2(t)=B+(D-B)t=(-t,-1+t)\Rightarrow\begin{cases}x=-t\Rightarrow dx=-dt\\ y=t-1\Rightarrow dy=dt\end{cases},\quad 0\le t\le 1$$

$$\text{جریان}=\int_C\vec{F}.d\vec{r}=\int_{C_1}\vec{F}.d\vec{r}+\int_{C_2}\vec{F}.d\vec{r}$$

$$I_1=\int_{C_1}\vec{F}.d\vec{r}=\int_0^1(-t+1-t)(-dt)-[(-t+1)^2+(-t)^2](-dt)=\int_0^1[(2t-1)+(t^2-2t+1+t^2)]dt$$

$$=\int_0^1(2t-1+2t^2-2t+1)dt=\int_0^1 2t^2dt=[\frac{2t^3}{3}]_0^1=\frac{2}{3}$$

$$I_2=\int_0^1[(-t+t-1)(-dt)]-[(-t)^2+(t-1)^2]dt=\int_0^1(1-2t^2+2t-1)dt=[-\frac{2t^3}{3}+t^2]_0^1=-\frac{2}{3}+1$$

چون حاصل انتگرال برابر با مجموع دو مقدار I_1 و I_2 است، لذا داریم:
$$I=I_1+I_2=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+1=\mathbf{1}$$

مثال ۷: مقدار کار انجام شده توسط میدان نیروی $\vec{F}(x,y)=y^2\vec{i}+x^2\vec{j}$ روی مسیر $y=x^2$ از نقطه $(0,0)$ تا نقطه $(1,1)$ چقدر است؟

(آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{12}{20}$ ۲) $\frac{13}{20}$ ۳) $\frac{14}{20}$ ۴) $\frac{15}{20}$

پاسخ: گزینه «۳» با فرض $x=t$، آن‌گاه $y=t^2$ و لذا $dx=dt$ و $dy=2tdt$ و بنابراین داریم:

$$\text{کار}=\int_C\vec{F}.d\vec{R}=\int_C y^2dx+x^2dy=\int_0^1(t^2)^2dt+t^2(2tdt)=\frac{14}{20}$$

مثال ۸: نیروی $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+(yz-x)\vec{k}$، در امتداد مسیر $0\le t\le 1$ و $\vec{R}(t)=2t\vec{i}+t^2\vec{j}+4t^3\vec{k}$، چند واحد کار انجام می‌دهد؟ (معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» در امتداد مسیر با معادله‌ی پارامتری $R(t)$، میدان $\vec{F}$ به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+(yz-x)\vec{k}\Rightarrow\vec{F}(\vec{R}(t))=2t\vec{i}+t^2\vec{j}+(4t^5-2t)\vec{k}$$

$$\left.\begin{aligned}&\vec{R}(t)=2t\vec{i}+t^2\vec{j}+4t^3\vec{k}\Rightarrow d\vec{R}=(2\vec{i}+2t\vec{j}+12t^2\vec{k})dt\\&\vec{F}.d\vec{R}=4t+2t^3+12t^2(4t^5-2t)=48t^7-22t^3+4t\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{مقدار کار انجام شده}=\int_0^1\vec{F}.d\vec{R}=\int_0^1(48t^7-22t^3+4t)dt=\frac{5}{2}$$

مثال ۹: کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}=3x^2\vec{i}+xy\vec{j}$ که ذره‌ای را در امتداد سهمی $y=4x^2$ از نقطه $(0,0)$ به $(1,4)$ به حرکت در می‌آورد برابر است با:

(معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) ۷ ۲) ۳۷ ۳) $\frac{37}{5}$ ۴) ۳۵

پاسخ: گزینه «۳» سهمی داده شده را می‌توان به‌صورت پارامتری $\vec{R}(t)=(t,4t^2)$ در نظر گرفت. در این صورت داریم:

$$d\vec{R}=(1,8t)dt,\ \vec{F}(\vec{R}(t))=(3t^2,4t^3)\Rightarrow\vec{F}.d\vec{R}=(3t^2+32t^4)dt$$

بنابراین داریم:
$$\text{کار انجام شده}=\int_0^1\vec{F}.d\vec{R}=\int_0^1(3t^2+32t^4)dt=\frac{37}{5}$$

مثال۱۰: کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}=(xy,yz,xz)$ در طول منحنی $\vec{C}(t)=(t,t^2,t^3)$ با فرض $0\le t\le 1$ برابر است با: (عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) ۷
۲) $\frac{32}{11}$
۳) ۱۱
۴) $\frac{27}{28}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\vec{C}(t)=(t,t^2,t^3)\Rightarrow \vec{C}'(t)=(1,2t,3t^2)\ ,\ F(\vec{C}(t))=(t^3,t^5,t^4)$$

$$\int_C \vec{F}.d\vec{R}=\int_0^1 (t^3+2t^6+3t^6)dt=\frac{27}{28}$$

مثال۱۱: کار انجام شده توسط میدان نیروی $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ روی مارپیچ $\vec{R}(t)=(\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}+t\vec{k}, 0\le t\le\frac{\pi}{2}$ برابر چیست؟ (عمران ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{\pi}{2}-1$
۲) $2\pi-1$
۳) $\pi-\frac{1}{2}$
۴) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$

پاسخ: هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$F(\vec{C}(t))=(\cos t,\sin t,t)$$

$$\vec{C}(t)=(\cos t,\sin t,t)\Rightarrow \vec{C}'(t)=(-\sin t,\cos t,1)$$

$$F(C(t)).C'(t)=-\sin t\cos t+\sin t\cos t+t=t\Rightarrow \text{کار}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}F(\vec{C}(t)).\vec{C}'(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\,dt=\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}$$

مثال۱۲: حاصل $\int_C\frac{ds}{x-y}$ بر روی پاره‌خطی از نقطه $(0,3)$ تا $(6,0)$ و ds عنصر قوس است، کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\sqrt{5}\,\text{Ln}2$
۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}\text{Ln}2$
۳) $\sqrt{5}\,\text{Ln}3$
۴) $\sqrt{3}\,\text{Ln}3$

پاسخ: گزینه «۱» معادله پارامتری خط داده شده به‌صورت $\begin{cases}x=6-2t\\y=-t\end{cases}$ و $0\le t\le 3$ می‌باشد.

$$\Rightarrow ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}\,dt=\sqrt{5}dt$$

$$\int_C\frac{ds}{x-y}=\int_0^3\frac{\sqrt{5}dt}{6-2t+t}=\sqrt{5}\int_0^3\frac{dt}{6-t}=-\sqrt{5}\text{Ln}(6-t)\Big|_0^3=-\sqrt{5}\text{Ln}3+\sqrt{5}\text{Ln}6=\sqrt{5}\text{Ln}2$$

درسنامه۳: میدان‌های پایستار

مثال۱: اگر تابع φ فقط بر حسب z باشد و میدان برداری $\vec{F}$ به‌صورت $\vec{F}=(xy-\sin z)\vec{i}+[\frac{x^۲}{۲}+e^y\varphi(z)]\vec{j}+(\frac{e^y}{z}Lnz-x\cos z)\vec{k}$ تعریف شود. ضابطه‌ی $\varphi(z)$ کدام گزینه باشد، تا حاصل $\int \vec{F}.d\vec{r}$ بین هر دو نقطه‌ی A و B مستقل از مسیر باشد؟ $(z>۰)$

۱) $Ln^۲z+C$　۲) $\frac{۱}{۲}Ln^۲z+C$　۳) $\frac{۱}{۲}Lnz+C$　۴) $Lnz+C$

پاسخ: گزینه «۲» برای این که حاصل انتگرال مستقل از مسیر باشد، باید کرل $\vec{F}$ صفر باشد.

$$curl\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}=۰\Rightarrow(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i}-(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z})\vec{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\vec{k}=۰\Rightarrow(\frac{e^yLnz}{z}-e^y\varphi'(z))\vec{i}-(-\cos z+\cos z)\vec{j}+(x-x)\vec{k}=۰$$

$$\Rightarrow[\frac{e^yLnz}{z}-e^y\varphi'(z)]\vec{i}=۰\Rightarrow\frac{e^yLnz}{z}-e^y\varphi'(z)=۰\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } e^y}\varphi'(z)=\frac{Lnz}{z}\Rightarrow\varphi(z)=\int\frac{Lnz}{z}dz=\frac{Ln^۲z}{۲}+C$$

مثال۲: اگر C خم مشترک $z=Ln(۱+x)$ و $y=x$ از نقطه‌ی $(۰,۰,۰)$ تا $(۱,۱,Ln۲)$ باشد، آن‌گاه حاصل $\int_C(۲x\sin\pi y-e^z)dx+(\pi x^۲\cos\pi y)dy-xe^zdz$ کدام است؟

۱) $Ln۲$　۲) $-Ln۲$　۳) -۲　۴) ۲

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید، داریم:

$$P=۲x\sin\pi y-e^z\ ,\ Q=\pi x^۲\cos\pi y\ ,\ R=-xe^z$$

$$curl\vec{F}=۰\vec{i}+(-e^z+e^z)\vec{j}+(۲\pi x\cos\pi y-۲\pi x\cos y\pi)\vec{k}=۰$$

کرل F صفر شد و این یعنی میدان پایستار است، لذا تابع پتانسیل را حساب می‌کنیم:

$$f=\int(۲x\sin\pi y-e^z)dx+\int ۰dy+\int ۰dz=x^۲\sin(\pi y)-xe^z$$

$$\int\vec{F}.d\vec{r}=f(\text{انتها})-f(\text{ابتدا})=\left[x^۲\sin\pi y-xe^z\right]_{(۰,۰,۰)}^{(۱,۱,Ln۲)}=-۱\times e^{Ln۲}=-۲$$

مثال۳: چه تعداد از عبارت‌های زیر، درست نیست؟

الف) مقدار $I=\int_C(۲xy+۴yz)dx+(x^۲+۴xz-۲z^۲)dy+(۴xy-۴yz)dz$، از نقطه‌ی $(-۱,۱,۲)$ تا نقطه‌ی $(۳,-۲,۱)$ برابر با ۲۳- است.

ب) اگر حاصل انتگرال منحنی‌الخط $I=\int_C z^۲dx+۲ydy+axzdz$، بر روی منحنی بسته C به معادله‌ی $x^۲+y^۲=۱$ و $x+y+z=۲$ صفر باشد، آن‌گاه مقدار a برابر با ۲- است.

ج) مقدار انتگرال خط $I=\int_C(۲xy^۳-y^۲\cos x)dx+(۱-۲y\sin x+۳x^۲y^۲)dy$، که در آن C سهمی $۲x=\pi y^۲$ از مبدأ تا نقطه‌ی $(\frac{\pi}{۲},۱)$ می‌باشد، برابر با $\frac{\pi^۲}{۴}$ است.

۱) ۰　۲) ۱　۳) ۲　۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲» هرکدام از گزینه‌های این سؤال می‌توانند یک تست مستقل باشند و ما برای تمرین بیشتر در قالب یک تست مطرح کرده‌ایم! هر ۳ مورد را بررسی می‌کنیم:

بررسی الف) ابتدا شرط پایستار بودن را کنترل می‌کنیم:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=۲x+۴z\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=۲x+۴z\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=۴y\ ,\ \frac{\partial R}{\partial x}=۴y\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=۴x-۴z\ ,\ \frac{\partial R}{\partial y}=۴x-۴y\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$$

پس میدان پایستار است و لذا انتگرال‌گیری به مسیر بستگی ندارد، با محاسبه‌ی تابع پتانسیل داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\int(2xy+4yz)\,dx = x^2y+4xyz\\ \int(-2z^2)\,dy=-2z^2y\\ \int(0)\,dz=0\end{array}\right\}\Rightarrow \phi(x,y,z)=x^2y+4xyz-2z^2y$$

بنابراین داریم:

$$I=\phi(3,-2,1)-\phi(-1,1,2)=[(3^2\times(-2)+4(3)(-2)(1)-2(1)^2(-2)]-[(-1)^2(1)+4(-1)(1)(2)-2(2)^2(1)]=[-18-24+4]-[1-8-8]=-23$$

بنابراین عبارت الف درست است.

بررسی ب) با توجه به نوع جمله‌بندی باید میدان پایستار باشد، با این حال شرط ابتدایی پایستار بودن را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0\,,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=0\ \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=2z\,,\ \frac{\partial R}{\partial x}=az\,,\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}\Rightarrow 2z=az\Rightarrow a=2$$

بنابراین عبارت (ب) غلط است.

بررسی ج) ابتدا شرط ابقایی بودن را بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial P}{\partial y}=6xy^2-2y\cos x\\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\cos x+6xy^2\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

پس میدان پایستار است و لذا با محاسبه‌ی تابع پتانسیل می‌توانیم مقدار انتگرال را حساب کنیم:

$$\int(2xy^3-y^2\cos x)\,dx=x^2y^3-y^2\sin x$$

$$\int(1)\,dy=y$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y)=x^2y^3-y^2\sin x+y\Rightarrow I=\varphi(\frac{\pi}{2},1)-\varphi(0,0)=[(\frac{\pi}{2})^2(1)^3-1^2\times\sin\frac{\pi}{2}+1]-0=\frac{\pi^2}{4}$$

بنابراین عبارت (ج) نیز صحیح است.

مثال ۴: میدان برداری $\vec F=(ax\sin(\pi y))\vec i+(x^2\cos(\pi y)+bye^{-z})\vec j+y^2e^{-z}\vec k$ پایستار است. اگر C منحنی حاصل از برخورد سهمی‌گون بیضوی $z=x^2+4y^2$ و صفحه‌ی $z=3x-2y$ از مبدأ تا نقطه‌ی $A(1,\frac{1}{2},2)$ باشد، آن‌گاه حاصل $\int_C \vec F.d\vec r$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{4}e^{-2}$　　۲) $\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}e^{-2}$　　۳) $\frac{1}{\pi}-\frac{1}{4}e^{-2}$　　۴) $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}e^{-2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا مؤلفه‌های میدان برداری را به شکل مقابل تعریف می‌کنیم: $P=ax\sin(\pi y)\,,\ Q=x^2\cos(\pi y)+bye^{-z}\,,\ R=y^2e^{-z}$

حالا مقادیر مشتق موردنظر را حساب می‌کنیم و شرایط پایستار بودن را نیز اعمال می‌کنیم:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=ax\pi\cos\pi y\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2x\cos(\pi y)\ \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow a=\frac{2}{\pi}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=-bye^{-z}\ ,\ \frac{\partial R}{\partial y}=2ye^{-z}\ \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}\ \Rightarrow -bye^{-z}=2ye^{-z}\ \Rightarrow b=-2$$

پس F به‌صورت مقابل قابل نمایش است:

$$\vec F=\underbrace{\frac{2}{\pi}x\sin(\pi y)}_{P}\vec i+\underbrace{(x^2\cos\pi y-2ye^{-z})}_{Q}\vec j+\underbrace{(y^2e^{-z})}_{R}\vec k$$

برای محاسبه‌ی تابع پتانسیل داریم:

$$f=\int\frac{2}{\pi}x\sin(\pi y)dx+\int(-2ye^{-z})dy+\int 0\,dz=\frac{x^2}{\pi}\sin\pi y-y^2e^{-z}$$

چون میدان پایستار است، بنابراین داریم:

$$\int_C\vec F.d\vec r=f(1,\frac{1}{2},2)-f(0,0,0)=\frac{1}{\pi}\times\sin\frac{\pi}{2}-(\frac{1}{2})^2e^{-2}-0=\frac{1}{\pi}-\frac{1}{4e^2}$$

مثال ۵: اگر $f(x,y)=Ln(x^2+y^2)$ و C دایره $x^2+y^2=a^2$ باشد، آن‌گاه حاصل $I=\oint_C \vec{\nabla} f.\vec{n}ds$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) 0 ‏ ۲) 2π ‏ ۳) 4π ‏ ۴) -2π

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا $\vec{\nabla} f$ را حساب می‌کنیم (توجه کنید که $\vec{\nabla} f$ همان $\vec{F}$ می‌باشد.)

$$\vec{F}=\vec{\nabla} f=\vec{\nabla} Ln(x^2+y^2)=\frac{2x}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{2y}{x^2+y^2}\vec{j}$$

$$\int \vec{F}.\vec{n}ds=\oint_C Pdy-Qdx=2\int\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

با توجه به مطالب گفته شده حاصل انتگرال فوق برابر با 2π است و چون عدد $\underline{\underline{2}}$ در پشت انتگرال ضرب می‌شود، جواب سؤال 4π است.

مثال ۶: کار انجام شده توسط میدان نیرویی به‌صورت $\vec{F}(x,y)=y^2\vec{i}+(2xy)\vec{j}$ از مبدأ تا نقطه $(1,1)$ بر مسیر دلخواه C کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) ۱ ‏ ۲) ۲ ‏ ۳) ۳ ‏ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۱» چون $\frac{\partial}{\partial y}(y^2)=2y=\frac{\partial}{\partial x}(2xy)$، بنابراین میدان $\vec{F}$ پایستار است و تابع پتانسیل آن $f(x,y)=xy^2$ می‌باشد. در نتیجه:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r}=f(1,1)-f(0,0)=1$$

مثال ۷: حاصل $\int_C (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$ که در آن منحنی C دایره‌ای به معادلات $x^2+y^2+z^2=a^2$ و $x+y+z=0$ باشد، کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۹)

۱) 0 ‏ ۲) $\frac{1}{2}$ ‏ ۳) ۱ ‏ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» قرار می‌دهیم $\vec{F}=(y+z,z+x,x+y)$، میدان $\vec{F}$ یک میدان پایستار است $(\text{curl}\vec{F}=0)$ و با توجه به اینکه مسیر C نیز یک مسیر بسته است پس حاصل انتگرال موردنظر برابر صفر است.

مثال ۸: مقدار $I=\int_C e^y dx+xe^y dy$، بر روی نیم‌دایره $y=\sqrt{1-x^2}$ در جهت مثلثاتی کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) -2 ‏ ۲) -1 ‏ ۳) ۱ ‏ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}(xe^y)=e^y \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}(e^y)=e^y$$

بنابراین میدان پایستار است و تابع پتانسیل آن $f(x,y)=xe^y$ می‌باشد. از طرفی نیم‌دایره $y=\sqrt{1-x^2}$ از نقطه $(1,0)$ آغاز و به نقطه $(-1,0)$ ختم می‌شود، بنابراین داریم:

$$I=\int_C e^y dx+xe^y dy=f(-1,0)-f(1,0)=-1-1=-2$$

مثال ۹: به ازای کدام مقادیر a و b، انتگرال $\int_A^B (2axz+y^2)dx+y(bx+az)dy+(ax^2+y^2)dz$ مستقل از مسیر است؟

(نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۹ و عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) $a=b=1$ ‏ ۲) $a=b=2$ ‏ ۳) $a=1\ ,\ b=2$ ‏ ۴) $a=2\ ,\ b=1$

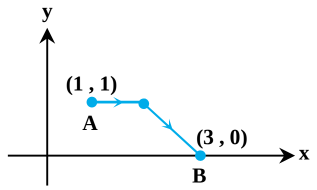
پاسخ: گزینه «۲» برای اینکه انتگرال مستقل از مسیر باشد، لازم است $\text{curl}\vec{F}=0$، بنابراین داریم:

$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2axz+y^2 & bxy+azy & ax^2+y^2\end{vmatrix}=(2y-ay\ ,\ 2ax-2ax\ ,\ by-2y)=(0,0,0)$$

از معادله فوق نتیجه می‌شود $a=b=2$.

مثال ۱۰: اگر $f(x,y)=2x^2+xy+y^2$ در این صورت مقدار انتگرال $\int_C \vec{\nabla}f(X).dX$ ، $(X=(x,y))$ که در آن C منحنی زیر از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B می‌باشد، برابر است با:

(کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)



۱) ۱۴
۲) صفر
۳) ۱۸
۴) ۱

پاسخ: گزینه «۱» انتگرال داده شده برابر کار میدان پایستار $\vec{\nabla}f$ روی مسیر C می‌باشد. چون میدان پایستار است، بنابراین انتگرال مستقل از مسیر می‌باشد و تابع پتانسیل آن برابر f است. بنابراین داریم:

$$I=\int_C \vec{\nabla}f(X).dX=f(3,0)-f(1,1)=18-4=14$$

مثال ۱۱: اگر C نیم‌دایره‌ی $x^2+y^2=1$ ، $y\ge 0$ که در جهت عقربه‌های ساعت جهت‌گذاری شده است در این صورت مقدار انتگرال $\int_C (x^2+y^2)dx+2xydy$ برابر است با:

(کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{-2}{3}$
۳) ۲
۴) ۲-

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}(2xy)=2y \;,\; \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)=2y$$

بنابراین انتگرال داده شده مستقل از مسیر است و به سادگی می‌توان نشان داده تابع پتانسیل آن به‌صورت $f(x,y)=xy^2+\frac{x^3}{3}$ می‌باشد. از طرفی نقطه $(-1,0)$ نقطه آغاز خم C و نقطه $(1,0)$ انتهای خم C می‌باشد. بنابراین داریم:

$$I=\int_C (x^2+y^2)dx+2xydy=f(1,0)-f(-1,0)=\frac{2}{3}$$

مثال ۱۲: اگر منحنی C مربع $(0,0)$، $(1,0)$، $(1,1)$ و $(0,1)$ باشد که در جهت مثلثاتی جهت‌گذاری شده است در این صورت مقدار انتگرال $\int_C e^x \sin y dx+e^x \cos y dy$ برابر است با:

(کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{\pi}{2}$
۲) π
۳) 2π
۴) صفر

پاسخ: گزینه «۴»

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y)=e^x\cos y \;,\; \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y)=e^x\cos y$$

بنابراین میدان پایستار می‌باشد و چون مسیر داده شده یک مسیر بسته است، پس مقدار انتگرال برابر صفر است.

مثال ۱۳: مقدار $\oint_C (x+y)dx+(x-y)dy$ که در آن C یک خم به معادلات پارامتری $x=\frac{t}{1+t}$ و $y=\frac{1}{1+t}$ ، $0\le t\le 2$ باشد، برابر کدام است؟

(مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $-\frac{8}{9}$
۲) $\frac{8}{9}$
۳) $\frac{5}{18}$
۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که $\frac{\partial}{\partial y}(x+y)=\frac{\partial}{\partial x}(x-y)=1$. بنابراین انتگرال مستقل از مسیر می‌باشد. تابع پتانسیل میدان مزبور $f=\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}$ می‌باشد. از طرفی دو سر خم C، $A(0,1)$ و $B(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$I=f(B)-f(A)=f(\frac{2}{3},\frac{1}{3})-f(0,1)=\frac{8}{9}$$

مثال ۱۴: مقدار انتگرال خط $\int_C (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy$ که در آن C سهمی $2x = \pi y^2$ از نقطه $(0,0)$ تا نقطه $(\frac{\pi}{2},1)$ می‌باشد، کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{\pi^2}{12}$ ۲) $\frac{\pi^2}{8}$ ۳) $\frac{\pi^2}{4}$ ۴) $\frac{\pi^2}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}(1 - 2y\sin x + 3x^2y^2) = -2y\cos x + 6xy^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy^3 - y^2\cos x) = 6xy^2 - 2y\cos x$$

بنابراین انتگرال مستقل از مسیر می‌باشد و تابع پتانسیل آن به‌صورت $f = y - y^2\sin x + x^2y^3$ می‌باشد.

$$I = \int_C (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy = f(\frac{\pi}{2},1) - f(0,0) = \frac{\pi^2}{4}$$

مثال ۱۵: اگر $\vec{F} = (e^x\cos y + yz)\vec{i} + (xz - e^x\sin y)\vec{j} + (xy + z)\vec{k}$ باشد. f را پیدا کنید به طوریکه $\vec{F} = \vec{\nabla}f$ باشد. (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $f(x,y,z) = e^x\cos y + z + c$ ۲) $f(x,y,z) = e^x\cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + c$

۳) $f(x,y,z) = e^x\sin y + xyz + c$ ۴) $f(x,y,z) = e^x\sin y + \frac{z^2}{2} + c$

پاسخ: گزینه «۲» اگر $\vec{F}$ را به‌صورت $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ در نظر بگیریم، آن‌گاه تابع پتانسیل f از فرمول زیر به‌دست می‌آید.

بنابراین داریم: $f(x,y,z) = \int(e^x\cos y + yz)dx + \int(0)dy + \int zdz = e^x\cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + c$

مثال ۱۶: اگر C قسمتی از منحنی $y = (1+x)^2$ باشد که نقطه $(-1,0)$ را به نقطه $(0,1)$ وصل می‌کند، مقدار انتگرال $\int_C (1+2xy)dx + x^2dy$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۱-

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$\frac{\partial}{\partial y}(1+2xy) = 2x \ , \ \frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x$$

بنابراین میدان پایستار است و انتگرال مستقل از مسیر می‌باشد، تابع پتانسیل $f(x,y) = x + x^2y$ می‌باشد.

(چون داریم: $f(x,y) = \int(1+2xy)dx = x + x^2y$) بنابراین داریم: $\int_C (1+2xy)dx + x^2dy = f(0,1) - f(-1,0) = 0 - (-1) = 1$

مثال ۱۷: به ازای کدام مقدار a، حاصل انتگرال $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (ax^2y - 3xy^2)dy$ بستگی به مسیر ندارد؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) ۳ ۲) هر مقدار a ۳) ۶ ۴) هیچ مقدار a

پاسخ: گزینه «۳» برای اینکه انتگرال مستقل از مسیر باشد، لازم است $\text{curl}\vec{F} = 0$. و چون میدان $\vec{F}$ دو متغیره است، کافی است $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ یعنی داریم:

$$2axy - 3y^2 = 12xy - 3y^2 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow a = 6$$

مثال ۱۸: اگر C نیم‌دایره‌ی بالائی $x^2 + y^2 = 1$ باشد، که در خلاف جهت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود، مقدار انتگرال خطی $\int_C 2xydx + x^2dy$ چیست؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱» چون $\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x = \frac{\partial}{\partial y}(2xy)$، بنابراین میدان داده شده پایستار است و تابع پتانسیل آن $f(x,y) = x^2y$ می‌باشد. از طرفی نقاط ابتدایی و انتهای مسیر $A(1,0)$ و $B(-1,0)$ می‌باشند، بنابراین داریم:

$$\int_C 2xydx + x^2dy = f(B) - f(A) = 0 - 0 = 0$$

مثال ۱۹: مقدار $\int_{(۲,۰)}^{(۰,۳)}(-۲x+۳y)dx+(۳x+۲y)dy$ روی مسیری به معادله $\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۹}=۱$ واقع در ربع اول صفحه مختصات کدام است؟

(مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) ۱۳ ۲) ۵ ۳) ۱۳- ۴) ۵-

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون $\frac{\partial}{\partial y}(-۲x+۳y)=\frac{\partial}{\partial x}(۳x+۲y)=۳$، پس انتگرال مستقل از مسیر می‌باشد و تابع پتانسیل مربوط به آن $f=-x^۲+۳xy+y^۲$ می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$\int_{(۲,۰)}^{(۰,۳)}(-۲x+۳y)dx+(۳x+۲y)dy=f(۰,۳)-f(۲,۰)=۹-(-۴)=۱۳$$

مثال ۲۰: اگر تابع اسکالر f در شرط $\vec{\nabla}f=(۲x-\frac{y}{x^۲})\vec{i}+\frac{۱}{x}\vec{j}$ صدق کند و $f(۱,۱)=۴$ باشد، حاصل $f(۲,۲)$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۳)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

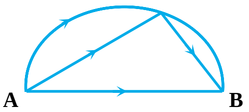
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا تابع پتانسیل را به‌دست می‌آوریم:

$$f=\int(۲x-\frac{y}{x^۲})dx=x^۲+\frac{y}{x}+c$$

بنابراین $f(x,y)=x^۲+\frac{y}{x}+c$، از رابطه $f(۱,۱)=۴$، مقدار $c=۲$ به‌دست می‌آید. در نتیجه داریم:

$$f(x,y)=x^۲+\frac{y}{x}+۲\Rightarrow f(۲,۲)=۴+۱+۲=۷$$

مثال ۲۱: نقطه اثر نیروی $\vec{F}=z^۲\vec{i}+۲y\vec{j}+۲xz\vec{k}$ در طول منحنی C از نقطه $A(۰,۱,۱)$ به نقطه $B(۱,۲,۳)$ نقل مکان می‌کند، کار انجام شده در کدام مسیر: «نیم‌دایره ـ خط شکسته ـ خط راست» کمتر است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)



۱) نیم‌دایره
۲) خط شکسته
۳) خط راست
۴) در هر سه مسیر برابر است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» میدان $\vec{F}$ پایستار می‌باشد $(\mathrm{curl}\vec{F}=۰)$. بنابراین کار انجام شده مستقل از مسیر می‌باشد.

مثال ۲۲: مقدار $\oint_C ۲xydx+(x^۲+y^۲)dy$ وقتی C بیضی به معادله $۴x^۲+۹y^۲=۳۶$ باشد، کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» میدان داده شده پایستار می‌باشد و منحنی C یک مسیر بسته می‌باشد، بنابراین مقدار انتگرال موردنظر برابر صفر است.

مثال ۲۳: انتگرال خطی $I=\int_{(۱,۴)}^{(۳,۱)}۲xy^۳dx+(۱+۳x^۲y^۲)dy$ برابر است با: (مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $I=۴۵$ ۲) $I=-۵۸$ ۳) $I=۲۸$ ۴) $I=-۳۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون $\frac{\partial}{\partial y}(۲xy^۳)=\frac{\partial}{\partial x}(۱+۳x^۲y^۲)=۶xy^۲$، بنابراین انتگرال مستقل از مسیر می‌باشد و تابع پتانسیل آن $f=y+x^۲y^۳$ است. در نتیجه داریم:

$$I=f(۳,۱)-f(۱,۴)=۱۰-۶۸=-۵۸$$

مثال ۲۴: به ازای کدام مقدار a انتگرال منحنی‌الخط $\int_C z^۲dx+۲ydy+axzdz$ بر روی منحنی بسته C به معادله $(x+y+z=۲\,,\,x^۲+y^۲=۱)$ برابر صفر است؟ (عمران ـ آزاد ۸۴)

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای اینکه انتگرال روی مسیر بسته برابر صفر باشد، کافی است $\mathrm{curl}\vec{F}=۰$ باشد:

$$\mathrm{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z^۲ & ۲y & axz\end{vmatrix}=(۰,۲z-az,۰)=(۰,۰,۰)\Rightarrow a=۲$$

مثال ۲۵: کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = y\vec{i} + (x+z)\vec{j} + y\vec{k}$ در تمام محیط بیضی فصل مشترک استوانه $x^2 + y^2 = 4$ با صفحه $z + 2x = 3$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه «۱» میدان $\vec{F}$ پایستار می‌باشد و چون مسیر یک منحنی بسته است، پس کار انجام شده برابر صفر است.

$$\operatorname{curl}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x+z & y \end{vmatrix} = (1-1)\vec{i} - (0+0)\vec{j} + (1-1)\vec{k} = 0$$

مثال ۲۶: λ باید کدامیک از مقادیر زیر باشد تا انتگرال $\int_A^B (z^2dx + 2ydy + \lambda xzdz)$ از مسیر انتگرال‌گیری مستقل باشد؟ (عمران ـ سراسری ۸۳ و ۸۵)

۱) $\lambda = 0$ ۲) $\lambda = -1$ ۳) $\lambda = 1$ ۴) $\lambda = 2$

پاسخ: گزینه «۴» قرار می‌دهیم: $\vec{F} = (z^2, 2y, \lambda xz)$. برای مستقل بودن انتگرال داده شده از مسیر، لازم است $\operatorname{curl}\vec{F} = 0$. بنابراین داریم:

$$\operatorname{curl}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & 2y & \lambda xz \end{vmatrix} = (0, 2z - \lambda z, 0) \xrightarrow{\operatorname{curl}\vec{F}=0} \lambda z = 2z \Rightarrow \lambda = 2$$

مثال ۲۷: رابطه میان ثابت‌های حقیقی a و b و c چگونه باشد تا میدان برداری $\vec{F}(x,y,z) = (ay^2 + 2czx)\vec{i} + y(bx+cz)\vec{j} + (ay^2 + cx^2)\vec{k}$ پایستار باشد؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $a = b = c$ ۲) $a = b = -c$ ۳) $2a = b = c$ ۴) $2a = b = -c$

پاسخ: گزینه «۳» برای پایستار بودن میدان $\vec{F}$، لازم است $\operatorname{curl}\vec{F} = 0$. بنابراین داریم:

$$\operatorname{curl}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ay^2 + 2czx & bxy + cyz & ay^2 + cx^2 \end{vmatrix} = (2ay - cy\ ,\ 2cx - 2cx\ ,\ by - 2ay)$$

از نتیجه $\operatorname{curl}\vec{F} = 0$ نتیجه می‌شود $2a = b = c$.

مثال ۲۸: حاصل $\int (x^2 y\cos x + 2xy\sin x)dx + x^2\sin x dy$ در امتداد منحنی به معادله $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$P(x,y) = x^2 y\cos x + 2xy\sin x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = x^2\cos x + 2x\sin x$$

$$Q(x,y) = x^2\sin x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\sin x + x^2\cos x$$

چون $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ بنابراین میدان داده شده پایستار (ابقایی) می‌باشد و مسیر موردنظر نیز بسته است، پس مقدار انتگرال موردنظر برابر صفر است.

مثال ۲۹: انتگرال منحنی‌الخط $\oint (x + 2xy)dx + (x^2 - y)dy$ بر روی منحنی $2x^2 + 3y^2 = 6$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۵)

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$Q(x,y) = x^2 - y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \quad , \quad P(x,y) = x + 2xy \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$$

بنابراین میدان پایستار است و چون مسیر داده شده بسته است، پس مقدار انتگرال برابر صفر است.

مثال۳۰: اگر C خم ساده بسته بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ در جهت مثلثاتی باشد، آن‌گاه انتگرال روی خم $\oint_C(3x^2-y)dx+(4y^3-x)dy$ برابر است با:

(هسته‌ای ـ سراسری ۸۵)

۱) ۰ ۲) $-ab$ ۳) $7ab$ ۴) (a^3+b^4)

پاسخ: گزینه «۱» قرار می‌دهیم: $P=3x^2-y$ و $Q=4y^3-x$. چون $\frac{\partial Q}{\partial x}=-1=\frac{\partial P}{\partial y}$، پس میدان پایستار می‌باشد و چون مسیر C بسته است، پس حاصل انتگرال برابر صفر است.

مثال۳۱: حاصل $I=\oint_C 2xyz^3dx+x^2z^3dy+3x^2yz^2dz$، که در آن C فصل مشترک استوانه $x^2+y^2=4$ با صفحه به معادله‌ی $x+2z=0$ باشد، کدام است؟

(MBA ـ سراسری ۸۶)

۱) ۰ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) $\frac{5\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» به راحتی واضح است میدان پایستار و در نتیجه مستقل از مسیر است و چون C یک منحنی بسته است، حاصل انتگرال صفر است.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2xz^3\ ,\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=6xyz^2\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=3x^2z^2$$

مثال۳۲: اگر $C:x^2+y^2=r^2$ در جهت مثبت، آن‌گاه حاصل $\oint_C\frac{-ydx}{x^2+y^2}+\frac{xdy}{x^2+y^2}$ برابر است با:

(معدن ـ سراسری ۸۶)

۱) صفر ۲) π ۳) 2π ۴) $2\pi r$

پاسخ: گزینه «۳»

روش اول: منحنی C را می‌توان به‌صورت پارامتری $\alpha(t)=(r\cos t,r\sin t)$، در نظر گرفت، در این صورت:

$$\alpha'(t)=(-r\sin t,r\cos t)\ \Rightarrow\vec{F}(\alpha(t))=(\frac{-r\sin t}{r^2},\frac{r\cos t}{r^2})\ \Rightarrow\vec{F}(\alpha(t)).\alpha'(t)=1\Rightarrow\int_C\frac{-ydx}{x^2+y^2}+\frac{xdy}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}1dt=2\pi$$

روش دوم: طبقه متن کتاب انتگرال موردنظر روی هر مسیر بسته‌ای که شامل مبدأ باشد، برابر 2π است.

مثال۳۳: کدام میدان پایستار است؟

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۶)

۱) $\vec{F}(x,y)=y\vec{i}-x\vec{j}$

۲) $\vec{F}(x,y)=2xy\vec{i}+xy^3\vec{j}$

۳) $\vec{F}(x,y)=(3+2xy)\vec{i}+(x^2-3y^2)\vec{j}$

۴) $\vec{F}(x,y)=(x^2+y^2)\vec{i}+(x^3+y^2)\vec{j}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$P(x,y)=3+2xy\ ,\ Q(x,y)=x^2-3y^2\ \Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=2x\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2x$$

مثال۳۴: اگر بدانیم که مقدار انتگرال $\int_C(x+2y+az)dx+(bx-3y-z)dy+(4x+cy+2z)dz$ مستقل از مسیر است، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

(ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) ۵- ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۳»

$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x+2y+az & bx-3y-z & 4x+cy+2z\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow c+1=0,a-4=0,b-2=0\ \Rightarrow a+b+c=5$$

مثال ۳۵: به ازای کدام مقدار m، میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)=(3x^2+y^2)\vec{i}+mxy\vec{j}-3z^2\vec{k}$ یک میدان پایستار است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ: گزینه «۴» برای اینکه میدان پایستار باشد، لازم است $\text{curl}\vec{F}=0$ باشد، بنابراین داریم:

$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ 3x^2+y^2&mxy&-3z^2\end{vmatrix}=(0-0)\vec{i}+(0-0)\vec{j}+(my-2y)\vec{k}=0\ \Rightarrow m=2$$

مثال ۳۶: فرض کنید $\vec{F}(x,y,z)=(e^x\cos y+ayz)\vec{i}+(axz+be^x\sin y)\vec{j}+(cxy+az)\vec{k}$. بازاء چه مقادیری از a، b و c مقدار انتگرال $\int\vec{F}.d\vec{R}$ مستقل از مسیر است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۷)

۱) $a=b=c=-1$ ۲) $a=b=c=1$ ۳) $a=b=-1, c=1$ ۴) $a=c=-1, b=1$

پاسخ: گزینه «۱» برای اینکه انتگرال موردنظر مستقل از مسیر باشد، لازم است $\text{curl}\vec{F}=0$، باشد، بنابراین داریم:

$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ e^x\cos y+ayz&axz+be^x\sin y&cxy+az\end{vmatrix}=(cx-ax)\vec{i}+(ay-cy)\vec{j}+(b+1)e^x\sin y\vec{k}$$

بنابراین لازم است $a=c$ و $b=-1$ باشد. که تنها گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۳۷: مقدار $\int_C x^2dx-y^2dy$ از نقطه $(-1,0)$ تا $(1,0)$ روی منحنی C به معادله $x^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{2}{5}}=1$ $(y\ge 0)$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) 0 ۴) $\frac{1}{5}$

پاسخ: گزینه «۲» قرار می‌دهیم $\vec{F}=(x^2,-y^2)$، واضح است که میدان $\vec{F}$ ابقایی است. (زیرا $\frac{\partial(x^2)}{\partial y}=\frac{\partial(-y^2)}{\partial x}=0$) و تابع پتانسیل آن $f(x,y)=\frac{x^3}{3}-\frac{y^3}{3}$ می‌باشد. پس داریم:

$$\int_C x^2dx-y^2dy=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{(-1,0)}^{(1,0)}=\frac{2}{3}$$

مثال ۳۸: اگر منحنی C نشان‌دهنده‌ی قسمت بالایی دایره‌ی $x^2+y^2=1$ باشد، آن‌گاه مقدار $\int_C\cos x\cosh y\,dx+\sin x\sinh y\,dy$ کدام است؟ (جهت حرکت بر روی C جهت مثلثاتی است.) (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $-2\sin 1$ ۲) $2\sin 1$ ۳) $2\cos 1$ ۴) $2\cosh 1$

پاسخ: گزینه «۱» قرار می‌دهیم $\vec{F}=(\cos x\cosh y,\sin x\sinh y)$، در این صورت میدان $\vec{F}$ یک میدان پایستار (ابقایی) می‌باشد، زیرا داریم:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=\cos x\sinh y\quad,\quad\frac{\partial F_1}{\partial y}=\cos x\sinh y$$

و تابع پتانسیل آن برابر $f(x,y)=\sin x\cosh y$ می‌باشد. با توجه به اینکه نقاط ابتدایی و انتهایی نیم‌دایره بالایی $A(1,0)$ و $B(-1,0)$ است، لذا داریم:

$$\int_C\cos x\cosh y\,dx+\sin x\sinh y\,dy=\sin x\cosh y\Big|_{(1,0)}^{(-1,0)}=-2\sin 1$$

مثال ۳۹: فرض کنید $\vec{F}=(z^3+2xy)\vec{i}+x^2\vec{j}+3xz^2\vec{k}$، اگر C مرز مستطیل با رأس‌های $(+1,\pm1,0)$ و $(0,\pm1,1)$ پیموده شده در جهت مثلثاتی از دیدگاه چشم ناظر واقع مبدأ باشد، آن‌گاه مقدار انتگرال روی منحنی $\oint_C \vec{F}.d\vec{R}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) -2 ۳) 2 ۴) 0

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به این‌که $\operatorname{curl}\vec{F}=0$ می‌باشد، پس میدان برداری $\vec{F}$ یک میدان ابقایی (پایستار) است و چون مسیر بسته است پس مقدار انتگرال برابر صفر است.

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z^3+2xy & x^2 & 3xz^2\end{vmatrix}=(0-0)\vec{i}-(3z^2-3z^2)\vec{j}+(2x-2x)\vec{k}=0$$

مثال ۴۰: مقدار انتگرال $\int_C (2x\cos y-3)dx-(x^2\sin y+z^2)dy-(2yz-2)dz$ از نقطه $A(-1,0,3)$ تا نقطه $B(1,\pi,0)$ چقدر است؟ (C خط به معادله $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{\pi}=\frac{z-3}{-3}=t$ می‌باشد.) (معدن ـ سراسری ۸۹)

۱) -14 ۲) -7 ۳) 7 ۴) 14

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» قرار می‌دهیم $\vec{F}=(2x\cos y-3,-(x^2\sin y+z^2),-(2yz-2))$ در این صورت:

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2x\cos y-3 & -(x^2\sin y+z^2) & -(2yz-2)\end{vmatrix}=(-2z+2z)i-(0,0)j+(-2x\sin y+2x\sin y)k=\vec{0}$$

چون $\operatorname{curl}\vec{F}=0$ است، پس انتگرال مستقل از مسیر است، تابع پتانسیل میدان برداری $\vec{F}$ برابر $f(x,y,z)=x^2\cos y-3x-yz^2+2z$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{R}=f(B)-f(A)=(x^2\cos y-3x-yz^2+2z)\Big|_A^B=-14$$

مثال ۴۱: مقدار انتگرال $\int_C 2xyzdx+x^2zdy+x^2ydz$ در امتداد منحنی C از نقطه $A=(1,1,1)$ تا نقطه $B=(1,2,4)$ برابر است با: (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۹)

۱) 7 ۲) 5 ۳) -5 ۴) -7

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» قرار می‌دهیم $\vec{F}=2xyz\vec{i}+x^2z\vec{j}+x^2y\vec{k}$، در این صورت داریم:

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2xyz & x^2z & x^2y\end{vmatrix}=(x^2-x^2)\vec{i}-(2xy-2xy)\vec{j}+(2xz-2xz)\vec{k}=\vec{0}$$

چون کرل میدان برداری $\vec{F}$ برابر صفر است، پس میدان پایستار است. تابع پتانسیل میدان $\vec{F}$ برابر $f(x,y,z)=x^2yz$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\int_C 2xyzdx+x^2zdy+x^2ydz=f(B)-f(A)=\left[x^2yz\right]_{(1,1,1)}^{(1,2,4)}=8-1=7$$

مثال ۴۲: هرگاه منحنی C، دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات و به شعاع $\varepsilon>0$ پیموده شده در جهت مثبت باشد، حاصل $\oint_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۹۰)

۱) -2π ۲) $-\pi$ ۳) 2π ۴) 4π

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در متن کتاب اشاره شد که حاصل این انتگرال همواره برابر با 2π است.

درسنامه۴: قضیه گرین

مثال۱: فرض کنید C مرز مستطیل $z = ۳$ ، $۰ \le y \le ۱$ و $۰ \le x \le \pi$ است که در جهت مثلثاتی در نظر گرفته شده است. مقدار انتگرال $\int_C \sin z dx - \cos x dy + \sin y dz$ ، کدام است؟

۱) ۱　　　۲) ۴　　　۳) ۲　　　۴) $\frac{۳}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون خم داده شده در صفحه‌ی $z = ۳$ قرار دارد، $dz = ۰$ است و درنتیجه انتگرال را می‌توان به‌صورت $\int_C (\sin ۳)dx - \cos x dy$، نوشت. حال از قضیه‌ی گرین استفاده می‌کنیم:

$$\int_C (\sin ۳)dx - \cos x dy = \iint_D (\sin x - ۰)\,dA = \int_۰^۱\int_۰^\pi \sin x\,dx\,dy = \int_۰^۱ dy \int_۰^\pi \sin x\,dx = ۲$$

مثال۲: حاصل $I = \int_C xdy - ydx$ که در آن C بیضی $y^۲ = ۴x - ۴x^۲$ (در جهت مثبت) است، کدام است؟

۱) ۰　　　۲) $\frac{\pi}{۲}$　　　۳) π　　　۴) ۲π

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که C یک بیضی با معادله‌ی استاندارد زیر است:

$$y^۲ + ۴x^۲ - ۴x = ۰ \Rightarrow y^۲ + ۴(x^۲ - x) = ۰ \Rightarrow y^۲ + ۴(x - \frac{۱}{۲})^۲ = ۱ \Rightarrow y^۲ + \frac{(x - \frac{۱}{۲})^۲}{\frac{۱}{۴}} = ۱$$

با استفاده از قضیه گرین داریم:

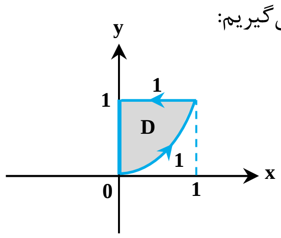
$$\int xdy - ydx = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dA = \iint_D (۱ - (-۱))\,dx\,dy = \iint ۲dx\,dy = ۲ \times (\text{مساحت ناحیه } D)$$

اما مساحت ناحیه D و یا به عبارت دیگر مساحت بیضی فوق $\frac{\pi}{۲} = \pi \times ۱ \times \frac{۱}{۲}$ است و لذا حاصل انتگرال $۲ \times \frac{\pi}{۲} = \pi$ می‌شود.

مثال۳: فرض کنید C منحنی طی شده از مبدأ به نقطه‌ی (۱,۱) در امتدا منحنی $y = x^۲$ و سپس از نقطه‌ی (۱,۱) به نقطه‌ی (۰,۱) در امتداد خط $y = ۱$ و در نهایت از نقطه‌ی (۰,۱) به مبدأ در امتداد خط $x = ۰$ باشد، در صورتی که $\vec{F} = (x + xy^۲)\vec{i} + ۲(x^۲y - y^۲\sin y)\vec{j}$ ، آن‌گاه حاصل $I = \int_C \vec{F}.d\vec{r}$ کدام است؟

۱) ۰　　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　　۳) $\frac{۱}{۳}$　　　۴) $\frac{۱}{۶}$

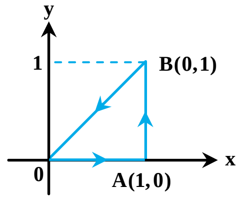
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با ترسیم ناحیه مرز C به شکل مقابل است؛ چون مسیر بسته است، لذا از قضیه‌ی گرین کمک می‌گیریم:



$$I = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dA = \iint_D (۴xy - ۲xy)dA = ۲\int_۰^۱\int_{y=x^۲}^{y=۱} xydydx = ۲\int_۰^۱ [xy^۲]_{x^۲}^{۱} dx$$

$$= \int_۰^۱ (x - x^۵)dx = [\frac{x^۲}{۲} - \frac{x^۶}{۶}]_۰^۱ = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

مثال ۴: اگر C خم شکل زیر باشد، حاصل انتگرال $\oint_C y\sqrt{x^2+y^2}dx+xdy$ کدام است؟



۱) $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۲) $1+\frac{\sqrt{2}}{3}$

۳) $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» خُب اگر بخواهیم از قضیه‌ی شما کمک بگیریم! برای حل این سؤال ابتدا با تعریف $P=y\sqrt{x^2+y^2}$ و $Q=x$، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=1\ ,\ \frac{\partial P}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}+\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\times y=\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1-\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

خُب با توجه به ناحیه‌ی داده شده و تابع به‌دست آمده فکر می‌کنم انتگرال‌گیری دوگانه کمی سخت باشد!

می‌خواهیم انتگرال مقابل را روی مثلث فوق به‌دست آوریم، با توجه به تابع تحت انتگرال از تغییر مختصات قطبی استفاده می‌کنیم، در این صورت داریم:

دقت کنید ناحیه مثلثی به‌صورت $(0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\ ,\ 0\le r\le\sec\theta)$

$$\iint_D(1-\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}})dxdy=\iint(1-\frac{r^2+r^2\sin^2\theta}{r})rdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sec\theta}(r-r^2-r^2\sin^2\theta)drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}-\frac{r^3}{3}\sin^2\theta)\Big|_0^{\sec\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{2}\sec^2\theta-\frac{1}{3}\sec^3\theta-\frac{1}{3}\sec^3\theta\sin^2\theta)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\frac{1}{2}\sec^2\theta-\frac{1}{3}\sec^3\theta-\frac{1}{3}\sec^3\theta(1-\cos^2\theta)]d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{2}\sec^2\theta-\frac{2}{3}\sec^3\theta+\frac{1}{3}\sec\theta)d\theta=[\frac{1}{2}tg\theta-\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\sec\theta tg\theta+\frac{1}{2}Ln|\sec\theta+tg\theta|)+\frac{1}{3}Ln|\sec\theta+tg\theta|]_0^{\frac{\pi}{4}}=[\frac{1}{2}tg\theta-\frac{1}{3}\sec\theta tg\theta)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\times tg\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})}\times tg(\frac{\pi}{4})-0=\frac{1}{2}-\frac{2}{3\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

حل سؤال با انتگرال روی منحنی و پارامتری‌سازی:

به راحتی داریم:

$$OA:\vec{C_1}(t)=t\vec{i}\ ,\ AB:\vec{C_2}(t)=\vec{i}+t\vec{j}\ ,\ OB:\vec{C_3}(t)=t\vec{i}+t\vec{j}$$

$$\vec{C}_1(t):\ dx=dt\ ,\ dy=0\ ,\ \vec{C}_2(t):\ dx=0,dy=dt\ ,\ \vec{C}_3(t):\ dx=dt,dy=dt$$

بنابراین داریم:

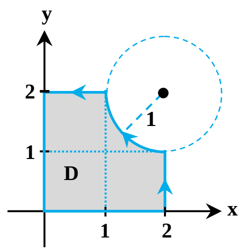
$$\Rightarrow\int_C\vec{F}.d\vec{r}=\int_0^1(0\times dx+0)+\int_0^1dt+\int_1^0t\sqrt{2t^2}dt+\int_1^0tdt=[t]_0^1+\sqrt{2}[\frac{t^3}{3}]_1^0+[\frac{t^2}{2}]_1^0=1-\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

مثال ۵: میدان برداری $\vec{F}=(y,2x+tg(tgy))$ را در صفحه‌ی xy در نظر بگیرید و خم C را مرز ناحیه‌ی محدود $D=\{0\le x\le2\ ,\ 0\le y\le2$ و $(x-2)^2+(y-2)^2\ge1\}$، که در جهت مثلثاتی جهت‌گذاری شده است، در نظر بگیرید. حاصل $\int_C\vec{F}.d\vec{r}$ کدام است؟

(از سؤالات ریاضی عمومی ۲ دانشگاه Harvard)

۱) $2+\frac{\pi}{2}$ ۲) $4-\frac{\pi}{2}$ ۳) $4-\frac{\pi}{4}$ ۴) $2-\frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به ناحیه D داده شده شکل به‌صورت مقابل است، با توجه به این که مسیر بسته است، لذا از قضیه‌ی گرین کمک می‌گیریم:



$$I=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dA=\iint_D(2-1)dA=\iint_D dA=$$ مساحت ناحیه D

اما مساحت ناحیه D برابر با مقدار زیر است:

مساحت ناحیه D = (مساحت مربعی به ضلع ۲) $-\frac{1}{4}\times$ (مساحت دایره‌ای به شعاع ۱) $=2\times2-\frac{1}{4}\times\pi\times1=\mathbf{4-\frac{\pi}{4}}$

توضیح: استفاده از روش پارامتری‌سازی به محاسبات طولانی منجر خواهد شد و این مثال هم از آن مثال‌هایی است که می‌تواند ارزش قضیه گرین را مشخص کند!

مثال ۶: چرخش بردار $\vec{V} = \frac{x}{1+x^2+y^2}\vec{i} + \frac{y}{1+x^2+y^2}\vec{j}$ در طول منحنی C به معادله‌ی $x^2+y^2-2x=1$ کدام است؟

۱) 0 ۲) π ۳) 2π ۴) 4π

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با تعریف $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ داریم: $Q = \frac{y}{1+x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}$, $P = \frac{x}{1+x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2yx}{(1+x^2+y^2)^2}$

می‌دانیم چرخش برابر با $\int_C \vec{V}.d\vec{r}$ است که چون منحنی C دایره‌ی $(x-1)^2+y^2=2$ است، لذا از قضیه گرین داریم:

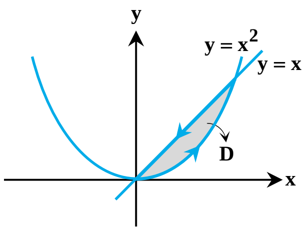
$$\int_C \vec{V}.d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = 0$$

دقت کنید $\vec{V}$ در تمام نقاط پیوسته است و بنابراین می‌توانیم از قضیه‌ی گرین استفاده کنیم.

مثال ۷: حاصل انتگرال خط $\int_C [(\text{arctg}\frac{y}{x})dy - dx]$ ، که در آن C منحنی بسته حاصل از تقاطع $y=x^2$ و $y=x$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}+1$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{4}-1$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون مسیر بسته است از قضیه گرین استفاده می‌کنیم. ناحیه‌ی درون C را با D نشان می‌دهیم:



$$\begin{cases} Q = \text{Arctg}\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2+y^2} \\ P = -1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\text{حاصل انتگرال} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_D \frac{-y}{x^2+y^2} dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) dy dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{-1}{2}\text{Ln}(x^2+y^2)\right]_{x^2}^{x} dx = \frac{-1}{2}\int_0^1 [\text{Ln}(2x^2) - \text{Ln}(x^2+x^4)]dx$$

تابع زیر انتگرال به این صورت ساده‌تر می‌شود: $\text{Ln}(2x^2) - \text{Ln}(x^2+x^4) = \text{Ln}\left(\frac{2x^2}{x^2+x^4}\right) = \text{Ln}\left(\frac{2}{1+x^2}\right) = \text{Ln}2 - \text{Ln}(1+x^2)$ پس داریم:

$$\text{حاصل انتگرال} = \frac{-1}{2}\int_0^1 [\text{Ln}2 - \text{Ln}(1+x^2)]dx = \frac{-1}{2}[x\text{Ln}2 - x\text{Ln}(1+x^2) + 2x - 2\text{Arctg}x]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 1$$

توضیح: برای حل انتگرال $\int \text{Ln}(1+x^2)dx$ از روش جزء به جزء استفاده کردیم، به این شکل که $u = \text{Ln}(1+x^2)$ و $dv = dx$ پس $du = \frac{2x}{1+x^2}$ و $v = x$ است.

$$\int \text{Ln}(1+x^2)dx = x\text{Ln}(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}dx = x\text{Ln}(1+x^2) - 2\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx$$

$$= x\text{Ln}(1+x^2) - 2\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = x\text{Ln}(1+x^2) - 2x + 2\text{Arctg}x$$

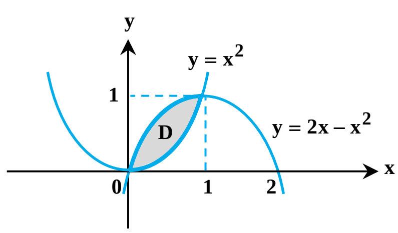
مثال ۸: اگر C مرز منحنی بسته‌ی محدود به سهمی‌های $y=x^2$ و $y=x(2-x)$ باشد که در جهت مثلثاتی پیموده شده است، آن‌گاه حاصل $I = \oint_C x^2y^2dx + (10-x-y)dy$ کدام است؟

۱) $-\frac{7}{60}$ ۲) $-\frac{7}{13}$ ۳) $-\frac{7}{15}$ ۴) $-\frac{7}{30}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا نقاط تلاقی دو سهمی را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x(2-x) \end{cases} \Rightarrow x^2 = x(2-x) \Rightarrow x^2 = 2x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 , x = 1$$

در واقع نمودار زیر را داریم و چون منحنی بسته است، حاصل انتگرال خط را با استفاده از قضیه‌ی گرین حساب می‌کنیم:



$$I = \iint_D [(-1) - (2x^2y)]dA = -\int_0^1 \int_{y=x^2}^{y=2x-x^2} (2x^2y+1)dydx = -\int_0^1 [x^2y^2+y]_{x^2}^{2x-x^2} dx$$

$$= -\int_0^1 [(x^2(2x-x^2)^2 + 2x - x^2) - (x^2 \times x^4 + x^2)]dx$$

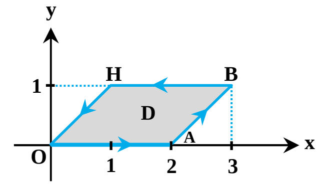
$$= -\int_0^1 [x^2(4x^2+x^4-4x^3) + 2x - x^2 - x^6 - x^2]dx = -\int_0^1 (4x^4 - 4x^5 + 2x - 2x^2)dx$$

$$= -\left[\frac{4x^5}{5} - \frac{4x^6}{6} + x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = -\left[\frac{4}{5} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{2}{3}\right] = -\left(\frac{12-10+15-10}{15}\right) = -\frac{7}{15}$$

مثال ۹: حاصل انتگرال $\oint_C (3y^2 + 2xe^{y^2})dx + (2x^2ye^{y^2})dy$، در صورتی که C مرز متوازی‌الاضلاعی به رئوس (۰,۰)، (۲,۰)، (۳,۱) و (۱,۱) باشد که در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیموده شده است، کدام است؟

۱) ۶-　　۲) ۶　　۳) ۱۲　　۴) ۱۲-

پاسخ: گزینه «۱» مرز C، مرز متوازی‌الاضلاع شکل مقابل است:



با توجه به این که مسیر بسته است، بنابراین می‌توانیم از قضیه‌ی گرین استفاده کنیم. اگر دقت کنید ناحیه نسبت به محور y ها نامنظم است و برای رفع این مشکل ابتدا لازم است معادله‌ی خطوط OH و AB تعیین شوند:

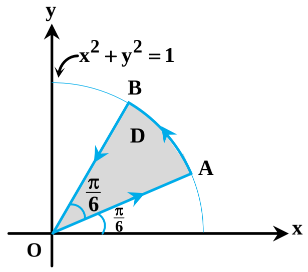
$$\text{OH معادله‌ی خط} \Rightarrow y-0=\frac{1-0}{1-0}(x-0) \Rightarrow y=x \Rightarrow x=y$$

$$\text{AB معادله‌ی خط} \Rightarrow y-0=\frac{1-0}{3-2}(x-2) \Rightarrow y=x-2 \Rightarrow x=y+2$$

و با توجه به این که کران‌های y هم از ۰ تا ۱ تغییر می‌کنند، بنابراین داریم:

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=y+2}(-6y)dxdy=\int_0^1[-6xy]_y^{y+2}dy=\int_0^1-12ydy=[-6y^2]_0^1=-6$$

مثال ۱۰: انتگرال منحنی‌الخط $\oint_C -xy^2dx + x^2ydy$ را که در آن C مرز ناحیه قطاعی D (مرز ناحیه هاشورخورده) می‌باشد، چقدر است؟



۱) ۰
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{8}$
۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به بسته بودن منحنی C، واضح است بهترین روش حل استفاده از قضیه گرین است: لذا با فرض $P=-xy^2$ و $Q=x^2y$ آن‌گاه $\frac{\partial P}{\partial y}=-2xy$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy$ و بنابراین داریم:

$$\oint_C[(-xy^2dx+x^2ydy)]=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D[2xy-(-2xy)]dxdy=\iint(4xy)dxdy$$

با توجه به منحنی داده شده، برای محاسبه‌ی انتگرال دوگانه بهتر است از مختصات قطبی استفاده کنیم. توجه کنید مطابق شکل داده شده معادله‌ی منحنی اصلی به‌صورت $x^2+y^2=1$ است، ناحیه فوق را می‌توان به شکل مقابل نوشت:

$$x^2+y^2\le 1 \Rightarrow r^2\le 1 \Rightarrow 0\le r\le 1 \quad , \quad \frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$$

و لذا انتگرال به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

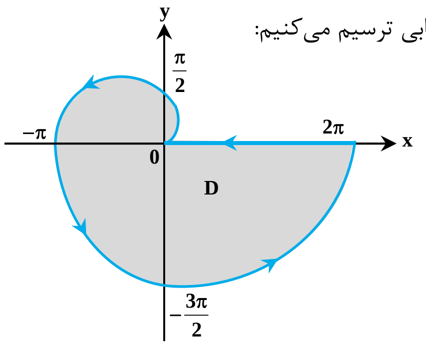
$$\iint_D 4xydxdy=4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^1(r\cos\theta)(r\sin\theta)rdrd\theta=4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^1(r^3\sin\theta\cos\theta)drd\theta=4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\sin\theta\cos\theta)d\theta\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1=4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)d\theta\times\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin 2\theta d\theta=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{4}\cos\left(2\times\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

مثال ۱۱ (سخت): فرض کنید C اجتماع نمودار تابع $r=\theta$، $(\circ \le \theta \le ۲\pi)$ و پاره‌خط از $(\circ,\circ)$ تا $(۲\pi,\circ)$ در صفحه‌ی xoy است. انتگرال میدان برداری $\vec{F}=-y^۳\vec{i}+x^۳\vec{j}$، در صورتی که C در جهت مثلثاتی طی شده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۲\pi^۴}{۵}$ ۲) $\frac{۲۴\pi^۵}{۵}$ ۳) $۱۲\pi^۴$ ۴) $۲۴\pi^۵$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا منحنی قطبی را با روش نقطه‌یابی ترسیم می‌کنیم:



θ	∘	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
r	∘	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π

(دقت کنید $r=\theta$ است)

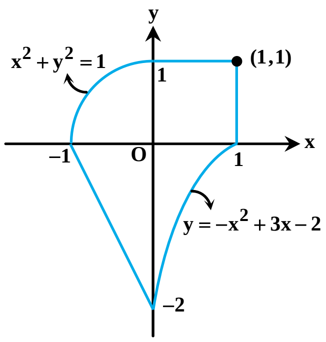
بنابراین ناحیه D به‌صورت $\circ \le r \le \theta$ و $D: \circ \le \theta \le ۲\pi$ می‌باشد. (توجه داشته باشید که پاره‌خط از $(\circ,\circ)$ تا $(۲\pi,\circ)$ جزء منحنی قطبی $r=\theta$ نیست و شکل بالا از اجتماع این پاره‌خط با نمودار منحنی قطبی $r=\theta$ حاصل شده است.) از طرفی چون منحنی بسته است، لذا برای محاسبه‌ی انتگرال خط می‌توانیم از قضیه گرین کمک بگیریم:

$$I=\oint_C \vec{F}.d\vec{r}=\oint_C -y^۳dx+x^۳dy=\iint_D \left(\frac{\partial(x^۳)}{\partial x}-\frac{\partial(-y^۳)}{\partial y}\right)dxdy=۳\iint_D (x^۲+y^۲)dxdy$$

$$\Rightarrow I=۳\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{\theta} r^۲.rdrd\theta=۳\int_\circ^{۲\pi}\left[\frac{r^۴}{۴}\right]_\circ^{\theta}d\theta=\frac{۳}{۴}\int_\circ^{۲\pi}\theta^۴d\theta=\frac{۳}{۴}\left[\frac{\theta^۵}{۵}\right]_\circ^{۲\pi}=\frac{۳\times(۲\pi)^۵}{۴\times ۵}=\frac{۲۴\pi^۵}{۵}$$

مثال ۱۲ (سخت): اگر C منحنی شکل زیر در جهت مثبت باشد،

آن‌گاه کار انجام شده به وسیله‌ی نیروی $\vec{F}=(y+\cos y-y\sin x)\vec{i}+(۲x+\cos x-x\sin y)\vec{j}$ کدام است؟

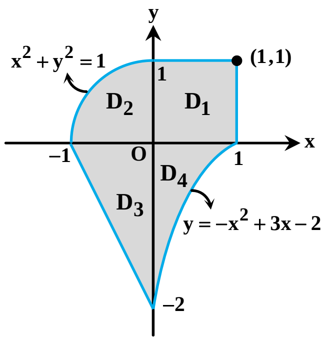


۱) $\frac{\pi}{۴}+\frac{۱۷}{۳}$

۲) $\frac{\pi}{۴}+\frac{۱۷}{۶}$

۳) $\frac{\pi}{۲}+\frac{۱۷}{۶}$

۴) $\frac{\pi}{۲}+\frac{۱۷}{۳}$



پاسخ: گزینه «۲» ابتدا ناحیه داده شده را به چهار قسمت به شکل مقابل تقسیم می‌کنیم که هر چهار منحنی بسته هستند و بنابراین برای به‌دست آوردن انتگرال خط می‌توانیم از قضیه گرین کمک بگیریم:

$$I=\int_C \vec{F}.d\vec{r}=\int_{C_۱}\vec{F}.d\vec{r}+\int_{C_۲}\vec{F}.d\vec{r}+\int_{C_۳}\vec{F}.d\vec{r}+\int_{C_۴}\vec{F}.d\vec{r}$$

اما قبل از استفاده از قضیه گرین بهتر است $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ را محاسبه کنیم:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(۲-\sin x-\sin y)-(۱-\sin y-\sin x)=۱$$

بنابراین حاصل انتگرال به‌صورت مقابل بازنویسی می‌شود:

$$I=\int_C \vec{F}.d\vec{r}=\iint_{D_۱}۱\times dxdy+\iint_{D_۲}۱\times dxdy+\iint_{D_۳}۱\times dxdy+\iint_{D_۴}۱\times dxdy$$

می‌دانیم حاصل انتگرال $\iint_D dxdy$، برابر با مساحت ناحیه D است، و چون سه انتگرال اول شکل‌هایی هستند که مساحت آن‌ها معلوم است، بنابراین لازم به انتگرال‌گیری نیست و همان عدد مساحت شکل‌های مربوطه را به جای این انتگرال‌ها وارد می‌کنیم، اما در مورد انتگرال چهارم باید حاصل انتگرال به روش انتگرال‌گیری حساب شود:

$$I=(\text{مساحت ناحیه } D_۱)+(\text{مساحت ناحیه } D_۲)+(\text{مساحت ناحیه } D_۳)+\int_\circ^۱\int_{-x^۲+۳x-۲}^{\circ}dydx=۱\times۱+\frac{۱}{۴}(\pi\times۱^۲)+\frac{۱}{۲}(۱\times۲)+\int_\circ^۱(x^۲-۳x+۲)dx$$

$$\Rightarrow I=۱+\frac{\pi}{۴}+۱+\left[\frac{x^۳}{۳}-۳\left(\frac{x^۲}{۲}\right)+۲x\right]_\circ^۱=۲+\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۳}-\frac{۳}{۲}+۲=\frac{\pi}{۴}+\frac{۱۷}{۶}$$

مثال ۱۳: اگر C مرز ناحیه محدود به منحنی‌های $y = x + 1$ ، $y = 1$ و $xy = 2$ باشد که در جهت مثلثاتی جهت‌دار شده است، آن‌گاه حاصل $I = \oint (x^2 y dx + \frac{x}{y^2} dy)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4} - \ln 2$　۲) $\frac{2}{3} - \ln 2$　۳) $\frac{1}{3} - \ln 2$　۴) $\frac{1}{4} - \ln 2$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این که منحنی بسته است، بهتر است از قضیه‌ی گرین کمک بگیریم:

$$\left.\begin{array}{l} P = x^2 y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 \\ Q = \frac{x}{y^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{y^2} - x^2$$

بنابراین حاصل انتگرال برابر با مقدار زیر است:

$$I = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \int_{y=1}^{y=2} \int_{x=y-1}^{\frac{2}{y}} (\frac{1}{y^2} - x^2) dxdy = \int_1^2 [\frac{x}{y^2} - \frac{x^3}{3}]_{y-1}^{\frac{2}{y}} dy = \int_1^2 [(\frac{\frac{2}{y}}{y^2} - \frac{(\frac{2}{y})^3}{3}) - (\frac{y-1}{y^2} - \frac{(y-1)^3}{3})] dy$$

$$= \int_1^2 [\frac{2}{y^3} - \frac{8}{3y^3} - \frac{y-1}{y^2} + \frac{(y-1)^3}{3}] dy = \int_1^2 [-\frac{2}{3}(\frac{1}{y^3}) - \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{3}(y-1)^3] dy = [\frac{1}{3y^2} - \ln y - \frac{1}{y} + \frac{1}{3}(\frac{(y-1)^4}{4})]_1^2$$

$$= (\frac{1}{3 \times 2^2} - \ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{(2-1)^4}{12}) - (\frac{1}{3} - \ln 1 - \frac{1}{1} + \frac{(1-1)^4}{12}) = (\frac{1}{12} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{3} + 1) - \ln 2 = \frac{1 - 6 + 1 - 4 + 12}{12} - \ln 2 = \frac{4}{12} - \ln 2 = \frac{1}{3} - \ln 2$$

مثال ۱۴: اگر C خم محل برخورد خم‌های $xy = 1$ ، $xy = 4$ ، $x^2 - y^2 = 9$ و $x^2 - y^2 = 16$ برای $x \ge 0$ و $y \ge 0$ باشد، آن‌گاه حاصل انتگرال $I = \oint_C (e^y - y^3) dx + (x^3 + xe^y) dy$ کدام است؟

۱) ۳۰/۵　۲) ۳۱　۳) ۳۱/۵　۴) ۳۲

پاسخ: گزینه «۳» این سؤال بیشتر یک سؤال انتگرال دوگانه و استفاده از تغییر متغیر در حل انتگرال می‌باشد و هدف از طراحی آن در این بخش آشنایی با فرم‌های مختلف انتگرال روی خط می‌باشد. با توجه به این که منحنی بسته است، لذا از قضیه‌ی گرین استفاده می‌کنیم:

$$\oint_C (e^y - y^3) dx + (x^3 + xe^y) dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy$$

در این سؤال $P = e^y - y^3$ و $Q = x^3 + xe^y$ و بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 - (-3y^2) = 3(x^2 + y^2)$$

بنابراین حاصل انتگرال خواسته شده در سؤال برابر با $I = 3\iint_D (x^2 + y^2) dxdy$ است، اما قسمت اصلی حل این سؤال از این جا به بعد است، چون ناحیه D نامنظم است، باید با استفاده از تغییر متغیر آن را منظم کنیم.

$$\begin{cases} xy = 1 \\ xy = 4 \end{cases} \Rightarrow u = xy \quad , \quad 1 \le u \le 4 \quad , \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow v = x^2 - y^2 \quad , \quad 9 \le v \le 16$$

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2y^2 - 2x^2 = -2(x^2 + y^2) \Rightarrow |J| = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$I = 3\iint_D (x^2 + y^2) dxdy = 3\int_9^{16} \int_1^4 (x^2 + y^2) \frac{1}{2(x^2 + y^2)} dudv = \frac{3}{2} \int_9^{16} \int_1^4 dudv = \frac{3}{2} \int_9^{16} [u]_1^4 dv = \frac{3}{2} \int_9^{16} 3 dv = \frac{9}{2} [v]_9^{16} = \frac{63}{2} = 31/5$$

مثال ۱۵: اگر C دایره‌ی $x^2+y^2=a^2$ باشد، آن‌گاه حاصل انتگرال خط $I=\oint_C \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx+y(xy+Ln(x+\sqrt{1+x^2+y^2}))dy$، چند برابر π است؟

۱) $\frac{a^4}{2}$ ۲) $\frac{a^4}{4}$ ۳) $\frac{a^3}{4}$ ۴) $\frac{a^3}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به این که ناحیه بسته است، بهتر است از قضیه‌ی گرین استفاده کنیم (حتی یک درصد هم فکرِ پارامتری کردن منحنی و حل این تست با آن روش را نکنید! برای صرف نظر کردن از این روش بهتر است نگاهی به تابع زیر انتگرال کنید تا ببینید پس از جایگزینی $x=a\cos t$ و $y=a\sin t$ به چه انتگرال و حشتناکی می‌رسید!! هر چند استفاده از قضیه‌ی گرین هم باعث نمی‌شود این انتگرال به سادگی حل شود، اما خیلی بهتر از روش پارامتری کردن است!) خُب بهتر است سراغ حل سؤال برویم، با توجه به P و Q داریم:

$$P=\sqrt{1+x^2+y^2}\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{1+x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

$$Q=y[xy+Ln(x+\sqrt{1+x^2+y^2})]\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=(y+\frac{\frac{x+\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{x+\sqrt{1+x^2+y^2}})y\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=(y+\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}})y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(y^2+\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}})-(\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}})=y^2$$

بنابراین حاصل انتگرال برابر با مقدار مقابل است:

$$I=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D y^2dxdy$$

اما در تعیین حدود انتگرال دقت کنید که ناحیه انتگرال‌گیری دایره‌ی $x^2+y^2=a^2$ است و بنابراین بهتر است از مختصات قطبی استفاده کنیم:

$$x^2+y^2=r^2\ ,\ 0\le r\le a\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

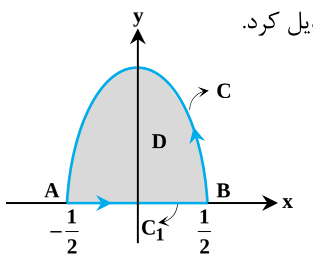
$$\iint_D y^2dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^a(r\sin\theta)^2(rdrd\theta)=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta\int_0^a r^3dr=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta[\frac{r^4}{4}]_0^a=\frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta=\frac{a^4}{4}[\frac{1}{2}\times 2\pi]=\frac{a^4}{4}(\pi)$$

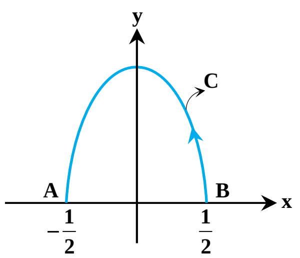
دقت کنید در محاسبات پایانی از این نکته که «حاصل انتگرال $\int_0^{k\pi}\sin^2\theta d\theta$، همواره نصف حد بالای انتگرال است» استفاده کردیم. در این سؤال حد بالا 2π بود و نصف آن $\frac{1}{2}\times 2\pi=\pi$ شد.

مثال ۱۶: اگر C نیمه بالایی بیضی $4x^2+y^2=1$ باشد که در جهت مثلثاتی طی شده است، آن‌گاه حاصل $I=\int_C(-xy)dx+(y^2+16)dy$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) 0

پاسخ: گزینه «۴» همان‌طور که در شکل می‌بینید، منحنی بسته نیست (شکل سمت چپ) اما با اضافه کردن مسیر C_1 یعنی خط AB به مسیر C، می‌توان C را به یک منحنی بسته تبدیل کرد.





خُب، حالا می‌توانیم از قضیه‌ی گرین استفاده کنیم و داریم:

$$I=\int_C Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy-\int_C Pdx-Qdy=I_1-I_2$$

هر کدام از I_1 و I_2 را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$I_1=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint[0-(-x)dxdy]=\iint_D xdxdy=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^{\sqrt{1-4x^2}}xdydx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^{\sqrt{1-4x^2}}xdydx=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x\sqrt{1-4x^2}dx=0$$

در قسمت آخر انتگرال تابعی فرد باید در بازه‌ای متقارن حساب شود که می‌دانیم همواره برابر با صفر است. حالا سراغ I_2 می‌رویم. معادله‌ی پارامتری خط AB به‌صورت $y=0$ ، $x=t$ ، و همچنین $dy=0$ و $dx=dt$ است، پس داریم: $I_2=\int_{C_1}-xydx+(y^2+16)dy=\int_{C_1}(-t)(0)dt+(0+16)\times 0=0$

پس مقدار I برابر با صفر است.

مثال ۱۷: اگر C دایره $x^2+y^2=a^2$ باشد، مقدار انتگرال خط $I=\oint_C \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx + y[xy+Ln(x+\sqrt{1+x^2+y^2})]dy$ ، کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{\pi a^4}{4}$ ۳) $-\frac{\pi a^2}{4}$ ۴) $\frac{\pi a^2}{4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اما در این مثال می‌توانیم از خاصیت نکته‌ی فوق استفاده کرده و محاسبات را ساده‌تر کنیم. همان‌طور که می‌بینید عبارت x^2+y^2 زیر انتگرال وجود دارد که برابر با a^2 است، بنابراین می‌توانیم مقدار a^2 را جایگزین آن کنیم:

$$P=\sqrt{1+a^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=0$$

$$Q=y(xy+Ln(x+\sqrt{1+a^2})) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=y(y+\frac{1}{x+\sqrt{1+a^2}})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y^2+\frac{y}{x+\sqrt{1+a^2}}$$

حال از قضیه‌ی گرین استفاده می‌کنیم:

$$I=\iint_D (y^2+\frac{y}{x+\sqrt{1+a^2}})\,dx\,dy \overset{(*)}{=} \iint_D y^2\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2\sin^2\theta(rdrd\theta)$$

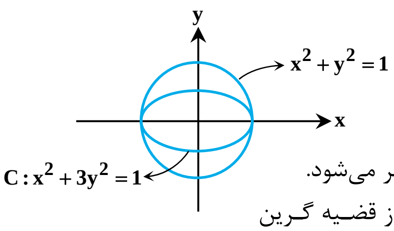
$$\Rightarrow I=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\times\int_0^a r^3\,dr=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta\times[\frac{r^4}{4}]_0^a=\frac{1}{2}[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta]_0^{2\pi}\times\frac{a^4}{4}=\frac{\pi a^4}{4}$$

توضیح: در قسمت $(*)$ چون ناحیه نسبت به y زوج است و تابع $\frac{y}{x+\sqrt{1+a^2}}$ نسبت به y فرد است. لذا حاصل $\iint_D \frac{y}{x+\sqrt{1+a^2}}dxdy$ برابر با صفر می‌شود.

مثال ۱۸: مقدار انتگرال $\oint_C \frac{y^3dx-xy^2dy}{(x^2+y^2)^2}$، که در آن C بیضی $x^2+3y^2=1$ می‌باشد، کدام است؟

۱) 0 ۲) $-\pi$ ۳) 2π ۴) -2π

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{3x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^3}$ و بنابراین می‌توان به جای خم C با معادله‌ی $x^2+3y^2=1$، برای راحتی در محاسبات C را دایره $x^2+y^2=1$ در نظر گرفت (با توجه به عبارت جلوی انتگرال) که به‌صورت پارامتری $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$ درمی‌آید. بنابراین داریم:



$$\oint_C \frac{y^3dx-xy^2dy}{(x^2+y^2)^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^3 t.(-\sin t)-\cos t\sin^2 t.(-\cos t)}{(\cos^2 t+\sin^2 t)^2}$$

$$=-\int_0^{2\pi}(\sin^4 t+\sin^2 t\cos^2 t)\,dt=-\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt=-\pi$$

سؤال دانشجو: چرا در این مثال از قضیه‌ی گرین استفاده نمی‌کنیم؟ اگر از آن استفاده کنیم حاصل انتگرال صفر می‌شود.

پاسخ: در این مثال، مخرج کسر در مبدأ صفر می‌شود و چون این نقطه درون مرز قرار دارد، پس نمی‌توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم.

مثال ۱۹: شار برون سوی میدان $\vec{F}=(3xy-\frac{x}{1+y^2})\vec{i}+(e^x+tg^{-1}y)\vec{j}$ از دلوار $r=a(1+\cos\theta)$ ، $(a>0)$ چقدر است؟

۱) 0 ۲) π ۳) $-\pi$ ۴) 2π

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا از قضیه دیورژانس در صفحه استفاده می‌کنیم و سپس از مختصات قطبی کمک می‌گیریم:

$$\text{شار}=\iint(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})dxdy=\iint_R 3ydxdy=3\int_0^{2\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2\sin\theta\,drd\theta=3\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{3}(1+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta=0$$

در انتگرال فوق با فرض $u=1+\cos\theta$، آن‌گاه $du=-\sin\theta d\theta$، برای $\theta=0$ و $\theta=2\pi$، u برابر با $\underline{\underline{2}}$ است و لذا داریم:

$$\text{شار}=-3a^3\int_2^2 u^3du=0$$

مثال ۲۰: حاصل $\oint_C 2ydx+4xdy$، وقتی c قوسی از سهمی $y=x^2$ از مبدأ تا نقطه $A(2,4)$ و پاره‌خط واصل از نقطه A تا مبدأ باشد، کدام است؟

(هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

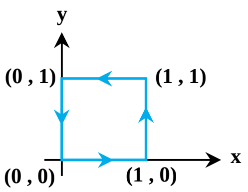
۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» چون منحنی C بسته است، می‌توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم:

$$\int_C 2ydx+4xdy=\iint_R(\frac{\partial}{\partial x}(4x)-\frac{\partial}{\partial y}(2y))dA=\int_0^2\int_{x^2}^{2x}2dydx=\int_0^2(4x-2x^2)\,dx=\frac{8}{3}$$

مثال۲۱: با استفاده از قضیه‌ی Green مقدار انتگرال خطی $\oint_C [(e^{-x^۲}+y^۲)dx+(Lny-x^۲)dy]$ را که در آن C مربع نشان داده شده است کـدام است؟

(مکانیک ـ سراسری ۸۰)



۱) -۲

۲) ۴

۳) -۱۱

۴) $۳Ln۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(Lny-x^۲)-\frac{\partial}{\partial y}(e^{-x^۲}+y^۲)\right)dA=-۲\int_۰^۱\int_۰^۱(x+y)\,dxdy=-۲\int_۰^۱\left(\frac{۱}{۲}+y\right)dy=-۲$$

مثال۲۲: مقدار انتگرال $\oint_C(۶y+x)dx+(y+۲x)dy$ که در آن C، دایره $(x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۴$ پیموده شده (یکبار) در جهت خلاف عقربه‌هـای ساعت می‌باشد، کدام است؟

(عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) -۱۶π ۲) -۴π ۳) صفر ۴) ۳۲π

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$\int_C(۶y+x)dx+(y+۲x)dy=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(y+۲x)-\frac{\partial}{\partial y}(۶y+x)\right)dA=\iint_D(۲-۶)dA=-۴\iint_D dA=-۴\times \text{مساحت دایره}=-۱۶\pi$$

مثال۲۳: حاصل $I=\oint_C[(x^۲+xy)dx+(y^۲+x^۲)dy]$ که در آن C مربعی به معادلات اضلاع $|x|=۱$ و $|y|=۱$ باشد، کدام است؟

(مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) صفر ۲) -۱ ۳) $+۱$ ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(y^۲+x^۲)-\frac{\partial}{\partial y}(x^۲+xy)\right)dA=\iint_D x\,dA=۰$$

چون x تابعی فرد و ناحیه D نسبت به x متقارن می‌باشد، پس حاصل انتگرال موردنظر برابر صفر است.

مثال۲۴: حاصل $\oint_C(e^{x^۲}+y)dx+(x^۲-Arctg\sqrt{y})dy$ وقتی C مستطیل با رئوس به مختصات (۱,۲)، (۵,۲)، (۵,۴) و (۱,۴) باشد کدام است؟

(هسته‌ای ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» چون C یک مسیر بسته است، بنابراین می‌توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم.

$$\int_C(e^{x^۲}+y)dx+(x^۲-Arctg\sqrt{y})dy=\iint_D(۲x-۱)dA=\int_۱^۵\int_۲^۴(۲x-۱)\,dydx=\int_۱^۵(۴x-۲)dx=۴۰$$

مثال۲۵: مقدار انتگرال $\int_C xydx+(\frac{۱}{۲}x^۲+xy)dy$ که در آن C از بازه $[-۱,۱]$ روی محور x و نیمه بالایی بیضی $x^۲+۴y^۲=۱$ تشکیل شده اسـت و یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است، کدام است؟

(عمران ـ سراسری ۸۲)

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{۱}{۲}x^۲+xy)-\frac{\partial}{\partial y}(xy)\right)dA=\iint_D y\,dA=\int_{-۱}^{۱}\int_۰^{\frac{۱}{۲}\sqrt{۱-x^۲}}y\,dydx=\int_{-۱}^{۱}\frac{۱}{۸}(۱-x^۲)dx=\frac{۱}{۶}$$

مثال ۲۶: فرض کنید f در معادله $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ صدق کند، C یک منحنی هموار و بسته باشد و f و مشتق‌های نسبی آن روی C و داخل آن پیوسته باشند. در این صورت مقدار $\oint_C \frac{\partial f}{\partial y}dx-\frac{\partial f}{\partial x}dy$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰ و MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) 2π

پاسخ: گزینه «۱» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial y}dx-\frac{\partial f}{\partial x}dy=\iint_D[(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{-\partial f}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})]dA=-\iint_D(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})\,dA=0$$

مثال ۲۷: فرض کنید $\vec{F}=\vec{i}(z-y)+\vec{j}(x-z)+\vec{k}(y-x)$ و منحنی C فصل مشترک $z=4-x^2-y^2$ با صفحه xoy باشد، $\oint_C \vec{F}.d\vec{R}$ کدام است؟ (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) 6π ۲) 8π ۳) 4π ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۲» خم C، دایره $x^2+y^2=4$ در صفحه $z=0$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$I=\int_C \vec{F}.d\vec{R}=\int_C(0-y)\,dx+(x-0)\,dy=\int_C -ydx+xdy\xrightarrow{\text{قضیه گرین}}$$

$$I=\iint_D(\frac{\partial}{\partial x}(x)-\frac{\partial}{\partial y}(-y))\,dA=2\iint_D dA=2\times\text{مساحت دایره}=8\pi$$

مثال ۲۸: مقدار انتگرال خط $\oint_C -x^2ydx+xy^2dy$ که در آن C دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲ است، کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۴)

۱) ۰ ۲) $\frac{4\pi}{5}$ ۳) 2π ۴) $16\frac{\pi}{3}$

پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. برای محاسبه انتگرال داده شده از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

$$I=\int_C -x^2ydx+xy^2dy=\iint_D(\frac{\partial}{\partial x}(xy^2)-\frac{\partial}{\partial y}(-x^2y))dxdy=\iint_D(y^2+x^2)dxdy$$

برای محاسبه انتگرال فوق، از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$I=\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\times rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^2 r^3dr=8\pi$$

مثال ۲۹: حاصل $\oint_C(xy^2dy-x^2ydx)$ وقتی مسیر C در جهت مثلثاتی روی نمودار تابع قطبی $r=1+\cos\theta$ باشد، کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{25}{8}\pi$ ۲) $\frac{25}{16}\pi$ ۳) $\frac{35}{8}\pi$ ۴) $\frac{35}{16}\pi$

پاسخ: گزینه «۴» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$\int_C(-x^2ydx+xy^2dy)=\iint_D(y^2+x^2)dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta}r^2\times rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta}r^3drd\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^4d\theta=\frac{35\pi}{16}$$

مثال ۳۰: مقدار انتگرال $\oint_C(2xydx-x^2ydy)$ که در آن C مثلثی است به رئوس (۰,۰)، (۱,۰) و (۱,۱) که یک بار در جهت مثلثاتی پیموده شده است، برابر با چیست؟ (عمران، نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱- ۲) $-\frac{5}{12}$ ۳) $-\frac{11}{12}$ ۴) ۴-

پاسخ: گزینه «۳» چون مسیر داده شده بسته است، پس می‌توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم.

$$P=2xy\ ,\ Q=-x^2y\ \Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2xy-2x$$

$$I=\oint_C(2xydx-x^2ydy)\stackrel{\text{قضیه گرین}}{=\!=\!=}\int_0^1\int_0^x(-2xy-2x)dydx=\int_0^1(-xy^2-2xy)\Big|_0^x dx=\int_0^1(-x^3-2x^2)dx=(\frac{-x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3)\Big|_0^1=\frac{-11}{12}$$

مثال۳۱: انتگرال خط $\int_C (x^۲+y^۲)dx+(x+۲y)^۲dy$ روی مثلث C با رأس‌های (۰,۰)، (۱,۱) و (۰,۲) در جهت مثلثاتی کدام است؟

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۵)

۱) $-\frac{۳}{۸}$ ۲) $-\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» قرار می‌دهیم $P=x^۲+y^۲$ و $Q=(x+۲y)^۲$، در این صورت طبق قضیه گرین داریم:

$$\int_C Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D ۲(x+۲y)-۲ydxdy=\int_۰^۱\int_x^{۲-x}(۲x+۲y)dydx=\frac{۸}{۳}$$

مثال۳۲: مقدار انتگرال $I=\oint_C y^۲dx+xdy$ که در آن C دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۲ می‌باشد که یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است، برابر با چیست؟

(عمران ـ سراسری ۸۶)

۱) ۴π ۲) ۳π ۳) ۲π ۴) π

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

$$\vec{F}=(y^۲,x)\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=۱-۲y$$

برای حل این انتگرال از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow I=\iint_D(۱-۲y)dA=۲=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۲(۱-۲r\sin\theta)r.drd\theta=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۲(r-۲r^۲\sin\theta)drd\theta=\int_۰^{۲\pi}[\frac{r^۲}{۲}-\frac{۲r^۳}{۳}\sin\theta]_۰^۲d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}(۲-\frac{۱۶}{۳}\sin\theta)d\theta=[۲\theta+\frac{۱۶}{۳}\cos\theta]_۰^{۲\pi}=۲\times۲\pi=۴\pi$$

مثال۳۳: مقدار انتگرال $\oint_C ydx+۳xdy$ روی خم بیضی $C:x^۲+۴y^۲=۱$ در جهت مثلثاتی کدام است؟

(مکانیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) π ۳) ۲π ۴) ۴π

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

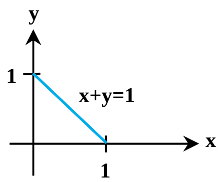
$$\int_C ydx+۳xdy=\iint(\frac{\partial(۳x)}{\partial x}-\frac{\partial(y)}{\partial y})dA=\iint ۲dA=۲\times\text{مساحت بیضی}=\pi$$

مثال۳۴: مقدار انتگرال خط $\int_C x^۴dx+xydy$ که در آن C مثلثی به رئوس (۰,۰)، (۱,۰) و (۰,۱) است و در جهت عکس عقربه‌های ساعت طی می‌شود، کدام است؟

(آمار ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از صورت دیگر قضیه گرین استفاده می‌کنیم:



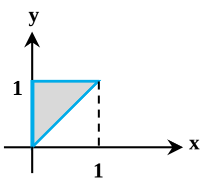
$$\int_C x^۴dx+xydy=\iint_D(\frac{\partial(xy)}{\partial x}-\frac{\partial(x^۴)}{\partial y})dA$$

$$=\int_۰^۱\int_۰^{۱-x}ydydx=\int_۰^۱\frac{(۱-x)^۲}{۲}dx=\frac{-(۱-x)^۳}{۶}\Big|_۰^۱=\frac{۱}{۶}$$

مثال۳۵: فرض کنید C مسیری مثلثی به رئوس (۰,۰)، (۱,۱) و (۰,۱) است که در جهت مثلثاتی طی می‌شود. $\int_C x^۲dx+xydy$ کدام است؟

(مکاترونیک ـ سراسری ۸۶)

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$\int_C x^۲dx+xydy=\iint_D(\frac{\partial(xy)}{\partial x}-\frac{\partial(x^۲)}{\partial y})dA=\int_۰^۱\int_۰^y ydxdy=\int_۰^۱y^۲dy=\frac{۱}{۳}$$

مثال ۳۶: شار برون‌سوی میدان $\vec{F}(x,y)=(x-y)\vec{i}+x\vec{j}$ گذرنده از دایره‌ی C بـه معـادلات پـارامتری $0\le t\le 2\pi$ و $y=\sin t$ $x=\cos t$ در جهـت مثلثاتی کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۶)

۱) 0 ۲) π ۳) 2π ۴) 2

پاسخ: گزینه «۲» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$\vec{F}(x,y)=(x-y)\vec{i}+x\vec{j}\Rightarrow \operatorname{div}\vec{F}=1+0=1\Rightarrow \int_C \vec{F}.\vec{n}d\vec{s}=\iint_D \operatorname{div}\vec{F}dA=\iint_D dA=(\text{مساحت دایره})=\pi\times 1^2=\pi$$

مثال ۳۷: گردش تابع برداری $\vec{F}(x,y)=(x-y)\vec{i}+x\vec{j}$ روی دایره واحد کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) π ۳) 2π ۴) 1

پاسخ: گزینه «۳» گردش تابع برداری برابر با $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ می‌باشد، چون مسیر بسته است از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r}=\oint Pdx+Qdy=\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\oint_C (x-y)\,dx+xdy=\iint(1-(-1))dxdy=2\iint dxdy=2\times\text{مساحت دایره}=2\pi$$

مثال ۳۸: مقدار انتگرال $\oint_C (e^x-yx^2)dx+(xy^2-e^y)dy$ که در آن C دایره $x^2+y^2-2y=0$ می‌باشد که یک بار در جهت مثلثاتی پیموده شده است، برابر با چیست؟ (عمران ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» از قضیه گرین نتیجه می‌شود:

$$\int_C (e^x-yx^2)\,dx+(xy^2-e^y)\,dy=\int_D\int(y^2+x^2)\,dxdy\ \overset{\text{مختصات قطبی}}{=\!=\!=}\ \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r^2\times rdrd\theta=\int_0^{\pi}4\sin^4\theta d\theta=3\frac{\pi}{2}$$

مثال ۳۹: اگر C دایره $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ در جهت مثلثاتی باشد، مقدار انتگرال $\int_C(6y+x^2)dx+(y^2+2x)dy$ را حساب کنید. (معدن ـ سراسری ۸۷)

۱) -16π ۲) -48 ۳) 16π ۴) 48

پاسخ: گزینه «۱» برای محاسبه انتگرال موردنظر از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$\int_C(6y+x^2)dx+(y^2+2x)dy=\iint\left(\frac{\partial}{\partial x}(y^2+2x)-\frac{\partial}{\partial y}(6y+x^2)\right)dxdy=\iint(2-6)dxdy=-4\times(\text{مساحت دایره‌ای به شعاع } 2)=-16\pi$$

مثال ۴۰: مقدار انتگرال $\int_C(\sin x+3y^2)dx+(2x-e^{-y^2})dy$ که در آن C مرز نیم قرص $y\ge 0, x^2+y^2\le a^2$ در جهت خلاف عقربـه‌هـای سـاعت می‌باشد برابر است با: (عمران ـ سراسری ۸۴ و عمران، نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۸)

۱) $2\pi a^2$ ۲) $(\pi-6)a^2$ ۳) πa^2-4a^3 ۴) πa^2-6a^3

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اینکه مرز C بسته می‌باشد، می‌توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم:

$$\int_C Qdx+Pdy=\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint\left(\frac{\partial(2x-e^{-y^2})}{\partial x}-\frac{\partial(\sin x+3y^2)}{\partial y}\right)dxdy=\iint(2-6y)dxdy\xrightarrow{\text{مختصات قطبی}}$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{a}(2-6r\sin\theta)rdrd\theta=\int_0^{\pi}(r^2-2r^3\sin\theta)\Big|_0^a d\theta=\int_0^{\pi}(a^2-2a^3\sin\theta)d\theta=(a^2\theta+2a^3\cos\theta)\Big|_0^{\pi}=\pi a^2-4a^3$$

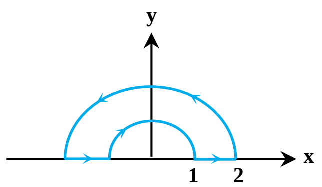
مثال۴۱: فرض کنید C منحنی بسته متشکل از دو نیم‌دایره به شعاع‌های ۱ و ۲ و دو پاره‌خط مطابق شکل زیر باشد. مقدار $I=\int_C y^3dx-x^3dy$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۸)

۱) $-\frac{۳۵}{۳}\pi$

۲) -۱۲π

۳) $-\frac{۴۵}{۴}\pi$

۴) -۱۱π



پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اینکه C یک منحنی بسته است می‌توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم.

$$I=\int_C Pdx+Qdy=\iint(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dA=\iint -۳(x^۲+y^۲)dA$$

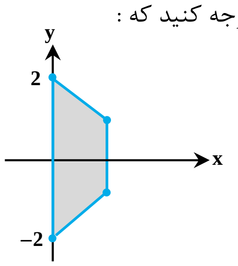
برای محاسبه انتگرال فوق با توجه به ناحیه انتگرال‌گیری و همچنین عبارت مقابل انتگرال، مختصات قطبی مناسب است، بنابراین داریم:

$$I=\int_۰^\pi\int_۱^۲ -۳r^۲\times rdrd\theta=\int_۰^\pi d\theta\int_۱^۲ -۳r^۳dr=\pi\times\frac{-۴۵}{۴}=\frac{-۴۵\pi}{۴}$$

مثال۴۲: مقدار انتگرال $\oint_C(x\sin y^۲-y^۲)dx+(x^۲y\cos y^۲+۳x)dy$ که در آن C ذوزنقه به رئوس (۲-,۰)، (۱-,۱)، (۱,۱)، (۰,۲) می‌باشد که یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است، کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۴،۸۵ و ۸۹)

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به اینکه مسیر مورد نظر یک مسیر بسته می‌باشد پس از قضیه گرین استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که :



$$F_۱=x\sin y^۲-y^۲\Rightarrow\frac{\partial F_۱}{\partial y}=۲xy\cos y^۲-۲y$$

$$F_۲=x^۲y\cos y^۲+۳x\Rightarrow\frac{\partial F_۲}{\partial x}=۲xy\cos y^۲+۳$$

حال طبق قضیه گرین:

$$I=\int_C F_۱dx+F_۲dy=\iint(\frac{\partial F_۲}{\partial x}-\frac{\partial F_۱}{\partial y})dxdy=\iint(۳+۲y)dxdy$$

چون ناحیه انتگرال گیری نسبت به محور xها متقارن است پس انتگرال ۲y روی این ناحیه برابر صفر می‌باشد (۲y تابع فرد نسبت به متغیر y است).

در نتیجه:

$$I=\iint ۳dxdy=۳\times(\text{مساحت ذوزنقه})=۳\times(\frac{۱\times(۴+۲)}{۲})=۹$$

مثال۴۳: فرض کنید C بیضی $۹x^۲+۴y^۲=۴$ در جهت مثلثاتی باشد در این صورت مقدار انتگرال $\int_C(۲xy^۳+\cos x)dx+(۳x^۲y^۲+۵x)dy$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{-۱۰\pi}{۳}$ ۲) ۳π ۳) ۵π ۴) $\frac{۱۰\pi}{۳}$

پاسخ: گزینه «۴» فرض کنیم R ناحیه محدود به درون و روی C باشد و فرض کنیم که $P(x,y)=۲xy^۳+\cos x\ ,\ Q(x,y)=۳x^۲y^۲+۵x$ چون P و Q و مشتقات جزئی مرتبه اول آن‌ها در R پیوسته است لذا طبق قضیه گرین:

$$\oint_C Pdx+Qdy=\iint_R(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

$$\iint(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_R(۶xy^۲+۵-۶xy^۲)dxdy=۵\iint_R dxdy=۵\times(\text{مساحت بیضی})=۵\times\frac{۲\pi}{۳}=\frac{۱۰\pi}{۳}$$

توضیح: به‌طور کلی مساحت بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ برابر πab می‌باشد، پس بیضی موردنظر را به‌صورت $\frac{x^۲}{(\frac{۲}{۳})^۲}+y^۲=۱$ می‌نویسیم در این صورت $S=\frac{۲\pi}{۳}$ خواهد بود.

مثال ۴۴: فرض کنید C خط مستقیم از نقطه‌ی (۰,۰,۱) تا نقطه‌ی (۰,۱,۱) باشد. مقدار انتگرال $\int_C (3x^2-6yz)dx+(2y+3xz)dy+(1-4xyz^2)dz$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۹)

۱) ۱- ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۳» معادله پارامتری خط موردنظر را می‌توانیم به‌صورت روبرو در نظر بگیریم: $r(t)=(x(t),y(t),z(t))=(0,t,1) \quad 0\le t\le 1$

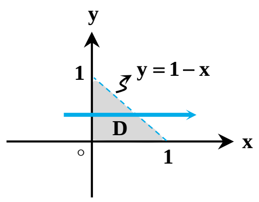
در این صورت $dx=dz=0$ و $dy=dt$ به‌دست می‌آید، پس مقدار انتگرال برابر است با: $\text{انتگرال}=\int_0^1 (2t)dt=t^2\Big|_0^1=1$

مثال ۴۵: حاصل $\int_C y^2dx+x^2dy$ بر روی اضلاع مثلثی محصور به خطوط $x=0$، $y=0$ و $x+y=1$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۰)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» ناحیه درون این شکل، ناحیه‌ای همبند و ساده در صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ است پس با توجه به اینکه توابـع $P(x,y)=y^2$ و $Q(x,y)=x^2$ دارای مشتقات جزئی پیوسته از هر مرتبه‌اند می‌توان از قضیه‌ی گرین استفاده نمود:

$$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$



منحنی بسته C و ناحیه بسته D داخل آن به‌صورت مقابل است:

حدود انتگرال‌گیری عبارتند از:

$$\begin{cases}0\le x\le 1-y\\ 0\le y\le 1\end{cases}$$

در نتیجه در قضیه گرین جایگذاری می‌کنیم:

$$\int_C y^2dx+x^2dy=\iint_D 2(x-y)dxdy=\int_0^1\int_0^{1-y}2(x-y)dxdy$$

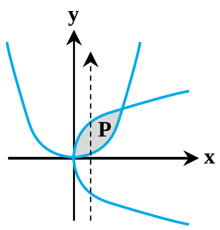
$$=2\int_0^1\left(\left(\frac{1}{2}x^2-xy\right)\Big]_0^{1-y}\right)dy=2\int_0^1\left(\frac{1}{2}(1-y)^2-y(1-y)\right)dy=\left[2\left(\frac{-1}{6}(1-y)^3-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y^3\right)\right]_0^1=0$$

مثال ۴۶: مقدار انتگرال $\oint_C xydx+x^2dy$ که در آن C منحنی بسته محدود به سهمی‌های $y=x^2$ و $y^2=x$ است که یک‌بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است برابر است با: (عمران ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{3}{20}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{27}{20}$

پاسخ: گزینه «۱» بر طبق قضیه گرین داریم:

$$\oint_C Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$



که D سطح داخل منحنی بسته C است، بنابراین داریم:

$$\oint_C \underbrace{xy}_{P}dx+\underbrace{x^2}_{Q}dy=\iint_D(2x-x)dA=\iint_D xdydx=\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}xdydx$$

$$=\int_0^1 x(\sqrt{x}-x^2)dx=\int_0^1\left(x^{\frac{3}{2}}-x^3\right)dx=\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{2}{5}-\frac{1}{4}=\frac{3}{20}$$

مثال ۴۷: فرض کنید C دایره با معادله‌ی $(x-1)^2+y^2=25$ باشد که در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته شده است، مقدار انتگرال $\oint_C (2xye^{x^2}+e^{\cos x})dx+(e^{y^2}+e^{x^2}+x)dy$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۰)

۱) 0 ۲) π ۳) 12π ۴) 25π

پاسخ: گزینه «۴» خم C یک خم ساده بسته و قطعه به قطعه هموار می‌باشد و همچنین میدان برداری داده شده بر روی این خم پیوسته است و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته می‌باشد، لذا طبق قضیه گرین داریم:

$$\oint_C Pdx+Qdy=\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\quad,\quad \begin{cases}P=2xye^{x^2}+e^{\cos x}\\ Q=e^{y^2}+e^{x^2}+x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial y}=2xe^{x^2}\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2xe^{x^2}+1\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\oint_C(2xye^{x^2}+e^{\cos x})dx+(e^{y^2}+e^{x^2}+x)dy=\iint_R(1+2xe^{x^2}-2xe^{x^2})dxdy$$

$$\Rightarrow I=\iint_R dxdy=(\text{مساحت داخل منحنی } C)=\pi(5)^2=25\pi$$

مثال ۴۸: فرض کنید C مرز بیضی به معادله $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ باشد. در این صورت حاصل انتگرال $\oint_C xdy$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) 2π ۴) 4π

پاسخ: گزینه «۳» از آنجایی که مشتقات نسبی مرتبه‌ی اول میدان در ناحیه‌ی داده شده پیوسته هستند، لذا شرط استفاده از قضیه گرین برقرار است، لذا طبق قضیه گرین داریم:

$$\oint_C Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA\Rightarrow\oint_C xdy=\iint_D dA=A\ (\text{مساحت بیضی})\Rightarrow\oint_C xdy=\pi\times2\times1=2\pi$$

مثال ۴۹: هرگاه $\vec F=(y-z)\vec i+(z-x)\vec j+(x-y)\vec k$ و C منحنی فصل مشترک کرهٔ $x^2+y^2+z^2=3$ و سهمی‌گون به معادله $x^2+y^2=2z$ باشد، مقدار انتگرال $\oint_C \vec F\cdot d\vec R$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۹۰)

۱) -2π ۲) $-\pi^2$ ۳) π ۴) -4π

پاسخ: گزینه «۴»

$$\vec F=(y-z)\vec i+(z-x)\vec j+(x-y)\vec k$$

ابتدا فصل مشترک کره و سهمی‌گون را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{فصل مشترک}:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3\\ x^2+y^2=2z\quad(1)\end{cases}\Rightarrow z^2+2z-3=0\Rightarrow\begin{cases}z=-3\\ z=1\end{cases}\xrightarrow{(1)},\ z\ge0\Rightarrow z=1\Rightarrow x^2+y^2=2$$

بنابراین منحنی C (فصل مشترک کره و سهمی‌گون) دایره‌ای به شعاع $\sqrt2$ و به مرکز مبدأ در صفحه xoy می‌باشد.

از طرفی با توجه به این‌که $\vec F.d\vec R=\vec F.(\vec i dx+\vec j dy+\vec k dz)$ بنابراین داریم: $\vec F.d\vec R=(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$

چون فصل مشترک یک دایره در صفحه xoy است و $z=1$ می‌باشد، بنابراین $dz=0$ است. این مقدار را در انتگرال جایگذاری می‌کنیم:

$$\oint_C\vec F.d\vec R=\oint(y-1)dx+(1-x)dy$$

بنابراین طبق قضیه گرین داریم:

$$\oint_C\vec F.d\vec R=\iint_D(-1-1)dA=-2\iint_D dA=-2\iint dxdy$$

$\iint dxdy$ همان مساحت دایره است یعنی πr^2 که $r=\sqrt2$ بنابراین داریم:

$$\oint_C\vec F.d\vec R=-2\times\pi\times2=-4\pi$$

تذکر: البته یک روش دیگر حل این سؤال، استفاده از قضیه استوکس است که در فصل انتگرال روی سطح به آن اشاره می‌شود.

مدرسان شریف

فصل ششم

« انتگرال روی سطح »

درسنامه: انتگرال روی سطح برای توابع حقیقی و کاربردهای آن

مثال۱: انتگرال $\iint_S xzd\sigma$ را که در آن S بخشی از سطح $z=x^2$ است و در یک هشتم اول فضای سه بعدی و داخل سهمی‌گون $z=1-3x^2-y^2$ قرار دارد، چقدر است؟

۱) $\frac{1}{192}$ ۲) $\frac{1}{48}$ ۳) $\frac{1}{96}$ ۴) $\frac{1}{92}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که معادله‌ی سطح S به‌صورت $g: x^2-z=0$ است بنابراین $\vec{\nabla}g=(2x)\vec{i}-\vec{k}$ و لذا $|\vec{\nabla}g|=\sqrt{4x^2+1}$

اگر صفحه تصویر را صفحه xoy در نظر بگیریم، در این صورت داریم: $d\sigma=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=\sqrt{4x^2+1}\,dA$

تصویر ناحیه S روی صفحه xoy از تلاقی سهمی‌گون و سطح $z=x^2$ حاصل می‌شود: $x^2=1-3x^2-y^2 \Rightarrow 4x^2+y^2=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{1}=1$

یک بیضی با شعاع افقی $\frac{1}{2}$ و شعاع عمودی $\underline{1}$ داریم. البته فقط ربع اول از این بیضی موردنظر است. پس $0\le x\le\frac{1}{2}$ و $0\le y\le\sqrt{1-4x^2}$ است.

بنابراین انتگرال موردنظر برابر است با:

$$\iint_S xzd\sigma=\iint_D x.x^2\sqrt{4x^2+1}dA=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\sqrt{1-4x^2}}x^3\sqrt{1+4x^2}dydx=\int_0^{\frac{1}{2}}x^3\sqrt{1-16x^4}dx=\frac{-1}{96}[(1-16x^4)^{\frac{3}{2}}]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{96}$$

مثال۲: حاصل انتگرال $\iint_S yd\sigma$، که در آن S بخشی از صفحه $z=1+y$ است که داخل مخروط $z=\sqrt{2(x^2+y^2)}$ قرار دارد، چقدر است؟

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) 4π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) 2π

پاسخ: گزینه «۴» برای به‌دست آوردن تصویر S روی صفحه xoy، z را از بین معادله‌ها حذف می‌کنیم:

$$1+y=\sqrt{2(x^2+y^2)} \Rightarrow 2(x^2+y^2)=(y+1)^2 \Rightarrow 2x^2+y^2-2y=1 \Rightarrow x^2+\frac{(y-1)^2}{2}=1$$

ناحیه D تصویر S روی صفحه xoy، درون بیضی $x^2+\frac{(y-1)^2}{2}=1$ است، حالا $d\sigma$ را حساب می‌کنیم، چون z به طور صریح بر حسب y داده شده داریم:

$$z=1+y \Rightarrow d\sigma=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dA=\sqrt{1+1^2}dA=\sqrt{2}dA$$

$$\iint yd\sigma=\sqrt{2}\iint_D ydA=\sqrt{2}\iint_D((y-1)+1)dA=\sqrt{2}\iint dA=\sqrt{2}\times(\text{مساحت بیضی})=2\pi$$

توجه کنید که انتگرال عبارت $(y-1)$ روی بیضی موردنظر به دلیل تقارن صفر است.

مثال ۳: حاصل $I=\iint_{\Sigma}(x+y+z)d\sigma$ در صورتی که Σ سطح مکعب $۰\le x\le ۱$ ، $۰\le y\le ۱$ و $۰\le z\le ۱$ باشد، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» این مکعب دارای ۶ وجه می‌باشد؛ سقف آن صفحه‌ی $z=۱$ و کف آن صفحه‌ی $z=۰$ است، ابتدا حاصل انتگرال را روی این دو وجه حساب می‌کنیم. انتگرال سطح بر روی قاعده‌ی تحتانی یعنی صفحه‌ی $z=۰$ برابر با مقدار زیر است:

$$\int_۰^۱\int_۰^۱(x+y+۰)dxdy=\int_۰^۱[\frac{x^۲}{۲}+xy]_۰^۱dy=\int_۰^۱(\frac{۱}{۲}+y)dy=[\frac{۱}{۲}y+\frac{y^۲}{۲}]_۰^۱=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

اما انتگرال سطح بر روی قاعده‌ی فوقانی یعنی صفحه‌ی $z=۱$ برابر با مقدار زیر است:

$$\int_۰^۱\int_۰^۱(x+y+۱)dxdy=\int_۰^۱[\frac{x^۲}{۲}+yx+x]_۰^۱dy=\int_۰^۱(\frac{۳}{۲}+y)dy=[\frac{۳}{۲}y+\frac{y^۲}{۲}]_۰^۱=\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}=۲$$

حاصل‌جمع دو انتگرال فوق برابر با $۳=۱+۲$ است، حالا دقت کنید که تابع زیر انتگرال نسبت به همه‌ی متغیرهای x، y و z تقارن دارد؛ مثلاً تبدیل y به z و z به y معادله‌ی $x+y+z$ را تغییر نمی‌دهد. بنابراین حاصل انتگرال روی وجه‌های $y=۰$ و $y=۱$ مانند حاصل انتگرال روی وجه‌های $z=۰$ و $z=۱$ است. به این ترتیب حاصل انتگرال روی هر جفت از وجوه $(z=۱,z=۰)$، $(y=۱,y=۰)$ و $(x=۱,x=۰)$ برابر با ۳ است در نتیجه داریم: $I=۳+۳+۳=۹$

مثال ۴ (سخت): اگر S قسمتی از رویه $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ باشد که داخل استوانه بـه معادلـه‌ی $x^۲+y^۲=۲ax$ قـرار گرفتـه اسـت، آن‌گـاه حاصل $I=\iint_S(xy+yz+zx)d\sigma$، چند برابر $a^۴$ است؟

۱) $\frac{۶۴\sqrt{۲}}{۱۵}$ ۲) $\frac{۶۴}{۱۵}$ ۳) $\frac{۳۲\sqrt{۲}}{۵}$ ۴) $\frac{۱۶}{۱۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که ناحیه D درون استوانه $x^۲+y^۲=۲ax$ در صفحه‌ی xoy است، از طرفی با توجه به معادله‌ی رویه کـه z بـه طور صریح بر حسب x و y داده شده به راحتی $d\sigma$ را به‌صورت زیر حساب می‌کنیم:

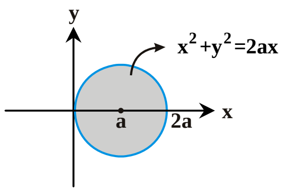
$$d\sigma=\sqrt{۱+z_x^۲+z_y^۲}dydx=\sqrt{۱+\frac{x^۲}{x^۲+y^۲}+\frac{y^۲}{x^۲+y^۲}}dydx=\sqrt{\frac{x^۲+y^۲+x^۲+y^۲}{x^۲+y^۲}}dydx=\sqrt{\frac{۲(x^۲+y^۲)}{x^۲+y^۲}}dydx=\sqrt{۲}dydx$$

از طرفی در تابع زیر انتگرال باید به جای z، معادل آن یعنی $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ را قرار دهیم. فرض کنیم ناحیه‌ی R درون دایره‌ی $x^۲+y^۲=۲ax$ باشد.

$$I=\iint_S(xy+yz+zx)d\sigma=\iint_R(xy+y\sqrt{x^۲+y^۲}+x\sqrt{x^۲+y^۲})\sqrt{۲}dydx$$

اما اگر کمی دقت کنید؛ از معادله‌ی $x^۲+y^۲=۲ax$ معلوم است که این ناحیه نسبت به محور x تقـارن دارد یعنـی تغییـر y بـه $-y$ معـادله آن را عـوض نمی‌کند. پس برای هر مقدار مثبتِ y یک مقدار منفی هم داریم. می‌توانید با رسم این ناحیه، از این نکته اطمینان پیدا کنید. علامت x همواره مثبت است اما y تغییر علامت می‌دهد. بنابراین عبارت‌های yx و $y\sqrt{x^۲+y^۲}$ نسبت به y فرد هستند و حاصل انتگرال برای آن‌ها صفر خواهد بود.

$$\iint_D(yx+y\sqrt{x^۲+y^۲})dydx=۰$$



بنابراین فقط کافیست از عبارت $x\sqrt{x^۲+y^۲}$ انتگرال بگیریم و چون درون انتگرال $\sqrt{x^۲+y^۲}$ داریم و ناحیه D هـم دایـره‌ای در صفحه‌ی xoy می‌باشد، بهتر است از مختصات قطبی کمـک بگیـریم. در مختصـات قطبـی داریـم $-\frac{\pi}{۲}\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ و $۰\le r\le ۲a\cos\theta$

(دقت کنید که معادله‌ی $x^۲+y^۲=۲ax$ در دستگاه قطبی به $r^۲=۲ar\cos\theta$ تبدیل می‌شود، یعنی $r=۲a\cos\theta$.)

$$I=\sqrt{۲}\iint_R x\sqrt{x^۲+y^۲}dydx=\sqrt{۲}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{۲a\cos\theta}r\cos\theta\sqrt{r^۲}(rdrd\theta)=\sqrt{۲}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{۲a\cos\theta}r^۳\cos\theta drd\theta=\sqrt{۲}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\cos\theta d\theta\times[(\frac{r^۴}{۴})]_۰^{۲a\cos\theta}$$

$$\Rightarrow I=۴a^۴\sqrt{۲}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\cos^۵\theta d\theta\xrightarrow{\text{زوج است } \cos^۵\theta}I=۸a^۴\sqrt{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos^۵\theta d\theta$$

$$\Rightarrow I=۸a^۴\sqrt{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos^۴\theta\cos\theta d\theta=۸a^۴\sqrt{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}(۱-\sin^۲\theta)^۲\cos\theta d\theta$$

$$\Rightarrow I=۸a^۴\sqrt{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}(۱-۲\sin^۲\theta+\sin^۴\theta)\cos\theta d\theta=۸a^۴\sqrt{۲}[\sin\theta-\frac{۲}{۳}\sin^۳\theta+\frac{\sin^۵\theta}{۵}]_۰^{\frac{\pi}{۲}}=۸a^۴\sqrt{۲}(۱-\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۵})=\frac{۶۴\sqrt{۲}}{۱۵}a^۴$$

مثال ۵: مساحت قسمتی از رویه‌ی مخروطی $x^2+y^2=z^2$ را که بین دو صفحه‌ی $z=0$ و $x+2z=3$ قرار دارد، کدام است؟

۱) $2\pi\sqrt{3}$ ۲) $2\pi\sqrt{6}$ ۳) $\pi\sqrt{3}$ ۴) $\pi\sqrt{6}$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم برای مخروط $z^2=x^2+y^2$، داریم $d\sigma=\sqrt{2}dA$، که صفحه تصویر را صفحه xoy در نظر می‌گیریم، از تلاقی صفحه $x+2z=3$ و مخروط معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$x^2+y^2=\left(\frac{3-x}{2}\right)^2 \Rightarrow 4x^2+4y^2=9+x^2-6x$$

$$\Rightarrow 3x^2+6x+4y^2=9 \Rightarrow 3(x+1)^2+4y^2=12 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{2^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{3})^2}=1$$

مساحت بیضی به‌دست آمده که همان تصویر است برابر $2\pi\sqrt{3}$ می‌باشد و بنابراین مساحت مورد نظر برابر است با:

$$S=\iint_D \sqrt{2}dA=\sqrt{2}\times(\text{مساحت بیضی})=2\pi\sqrt{6}$$

مثال ۶: مساحت قسمتی از سطح $z=x^2-y^2$، که داخل استوانه‌ی $x^2+y^2=4$، قرار دارد، برابر $\frac{\pi}{6}(A\sqrt{A}-1)$ می‌باشد. مقدار A کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۷ ۳) ۱۵ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه «۲» می‌خواهیم $\iint_S d\sigma$ را روی ناحیه درون $x^2+y^2=4$ به‌دست آوریم. $d\sigma$ به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$d\sigma=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dA=\sqrt{1+(2x)^2+(-2y)^2}\,dA=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dA$$

برای محاسبه انتگرال، از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. دقت کنید ناحیه D همان استوانه‌ی $x^2+y^2\le 4$ در صفحه‌ی xoy است.

$$\iint_S d\sigma=\iint_D \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^2\sqrt{4r^2+1}.rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r\sqrt{4r^2+1}dr=2\pi\left(\frac{1}{12}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^2=\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)$$

مثال ۷: فرض کنید S بخشی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ باشد که بین صفحات $z=1$ و $z=4$ واقع است و نیز چگالی در هر نقطه‌ی p از سطح S مساوی فاصله‌ی p تا صفحه‌ی $z=0$ باشد. در این صورت جرم کل S، مختصات طول مرکز جرم S و همچنین گشتاور ماند S حول محور zها را حساب کنید.

پاسخ: اولاً توجه کنید که چگالی برابر با z است (فاصله‌ی p تا صفحه‌ی $z=0$) پس $\delta=z$، طبق فرمول گفته شده داریم:

$$M=\iint_S \delta d\sigma=\iint_S zd\sigma$$

چون سطح مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است، لذا $d\sigma=\sqrt{2}dA$ و بنابراین داریم:

$$M=\iint_S\sqrt{x^2+y^2}(\sqrt{2}dA)$$

دقت کنید با توجه به این که $1\le z\le 4$، لذا $1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 4$ و یا $1\le x^2+y^2\le 16$ و بنابراین در مختصات استوانه‌ای $1\le r\le 4$ و $0\le\theta\le 2\pi$ است و خواهیم داشت:

$$M=\sqrt{2}\iint_S\sqrt{x^2+y^2}dA=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^4\sqrt{r^2}(rdrd\theta)=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^4 d\theta=\sqrt{2}(2\pi)\times\frac{63}{3}=42\sqrt{2}\pi$$

حالا طول مرکز جرم صفحه‌ی S را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{\iint_S x\delta d\sigma}{M}=\frac{1}{M}\left(\iint_S xzd\sigma\right)=\frac{1}{M}\iint_S x\sqrt{x^2+y^2}(\sqrt{2}dA)=\frac{\sqrt{2}}{M}\iint_S x\sqrt{x^2+y^2}dA=\frac{\sqrt{2}}{M}\int_0^{2\pi}\int_1^4 r^3\cos\theta drd\theta$$

$$\bar{x}=\frac{\sqrt{2}}{M}[\sin\theta]_0^{2\pi}\times\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^4=0$$

و بالاخره گشتاور لختی حول محور zها از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود:

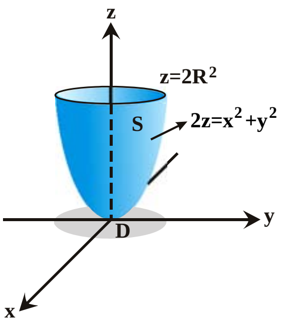
$$I_z=\iint_S(x^2+y^2)\delta d\sigma=\iint_S(x^2+y^2)z(\sqrt{2}dA)=\sqrt{2}\iint_S(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}dA=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^4 r^2.r(rdrd\theta)$$

$$\Rightarrow I_z=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^4 r^4drd\theta=\sqrt{2}\times 2\pi\times\left[\frac{r^5}{5}\right]_1^4=\frac{2(4^5-1)\sqrt{2}\pi}{5}=\frac{2046\sqrt{2}\pi}{5}$$

مثال ۸: جسمی از سهمی‌گون به معادله‌ی $x^۲+y^۲=۲z$، به وسیله‌ی صفحه‌ای به معادله‌ی $z=۲R^۲$ جدا می‌شود. جرم جسم حاصل با فرض این که چگالی $\delta(x,y)=k$ باشد، کدام است؟

۱) $۲k\pi[\frac{(۴R^۲+۱)^{\frac{۳}{۲}}}{۳}]$
۲) $۲k\pi[\frac{(۴R^۲+۱)^{\frac{۳}{۲}}-۱}{۳}]$
۳) $۴k\pi[\frac{(۴R^۲+۱)^{\frac{۳}{۲}}}{۳}]$
۴) $۴k\pi[\frac{(۴R^۲+۱)^{\frac{۳}{۲}}-۱}{۳}]$

پاسخ: گزینه «۲» جسم موردنظر ما قسمتی از سطح سهمی‌گون $۲z=x^۲+y^۲$ است. قبل از هر کاری باید تصویر آن را به‌دست بیاوریم، چون z به‌طور صریح برحسب x و y بیان شده است، صفحه‌ی تصویر را xoy در نظر می‌گیریم و z را بین دو معادله حذف می‌کنیم:



$$\begin{cases} z=۲R^۲ \\ z=\frac{x^۲+y^۲}{۲} \end{cases} \Rightarrow ۲R^۲=\frac{x^۲+y^۲}{۲} \Rightarrow x^۲+y^۲=۴R^۲=(۲R)^۲$$

پس تصویر سطح داده شده بر صفحه‌ی xoy، داخل دایره‌ای به شعاع $۲R$ است. حالا باید $d\sigma$ را به‌دست بیاوریم،

$d\sigma=\sqrt{۱+(\frac{\partial z}{\partial x})^۲+(\frac{\partial z}{\partial y})^۲}\,dA=\sqrt{۱+x^۲+y^۲}\,dA$ حال جرم به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$M=\iint_S \delta d\sigma=k\iint_S d\sigma=k\iint_D\sqrt{x^۲+y^۲+۱}\,dA=k\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲R}\sqrt{r^۲+۱}\,rdrd\theta=k\int_۰^{۲\pi}d\theta[\frac{۱}{۲}\frac{(r^۲+۱)^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}}]_۰^{۲R}=۲k\pi[\frac{(۴R^۲+۱)^{\frac{۳}{۲}}-۱}{۳}]$$

مثال ۹: مقدار $\iint_\Sigma (x+y+z)ds$، که در آن Σ قسمتی از صفحه‌ی $x+y=۱$ با شرط $x,y\geq ۰$ و $۰\leq z\leq ۱$ برابر کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$
۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

پاسخ: گزینه «۱» انتگرال داده شده، یک انتگرال رویه‌ای می‌باشد. صفحه تصویر را صفحه xoz در نظر می‌گیریم تصویر ناحیه Σ در صفحه xoz، مربع $۰\leq x\leq ۱$ و $۰\leq z\leq ۱$ می‌باشد. اگر Σ را به صورت $g(x,y,z)=x+y-۱=۰$ در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم:

$$ds=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{j}|}dxdz=\sqrt{۲}dxdz$$

بنابراین داریم:

$$I=\iint_\Sigma (x+y+z)ds=\int_۰^۱\int_۰^۱(x+(۱-x)+z)\sqrt{۲}dxdz=\sqrt{۲}\int_۰^۱\int_۰^۱(۱+z)dxdz=\sqrt{۲}x\Big|_۰^۱\times(z+\frac{z^۲}{۲})\Big|_۰^۱=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

مثال ۱۰: مساحت آن قسمت از نیم‌کره $x^۲+y^۲+z^۲=۲$ ، $z\geq ۰$ که به وسیله مخروط $z^۲=x^۲+y^۲$ قطع می‌شود، چقدر است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\sqrt{۲}\pi$
۲) $\pi(۲-\sqrt{۲})$
۳) $۲\pi(۲-\sqrt{۲})$
۴) $\pi(۲+\sqrt{۲})$

پاسخ: گزینه «۳» صفحه تصویر را صفحه xoy در نظر می‌گیریم. برای به دست آوردن ناحیه تصویر در صفحه xoy به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲+z^۲=۲ \\ z^۲=x^۲+y^۲ \end{cases} \Rightarrow x^۲+y^۲+x^۲+y^۲=۲ \Rightarrow x^۲+y^۲=۱$$

بنابراین ناحیه تصویر درون دایره $x^۲+y^۲=۱$ می‌باشد. از طرفی توجه کنید که داریم:

$$ds=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=\frac{\sqrt{۴x^۲+۴y^۲+۴z^۲}}{۲z}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲-x^۲-y^۲}}dA$$

$$\text{مساحت}=\iint_S ds=\iint_D\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲-x^۲-y^۲}}dxdy=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲-r^۲}}\times rdrd\theta=\sqrt{۲}\int_۰^{۲\pi}d\theta\times\int_۰^۱\frac{r}{\sqrt{۲-r^۲}}dr=\sqrt{۲}\times\theta\Big|_۰^{۲\pi}\times(-\sqrt{۲-r^۲})\Big|_۰^۱$$

$$\Rightarrow \text{مساحت}=۲\pi(۲-\sqrt{۲})$$

مثال۱۱: مساحت قسمتی از رویه‌ی $z=x^2+y^2$ که بین صفحات $z=0$ و $z=4$ قرار دارد کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17}+1)$ ۲) $\frac{1}{6}\pi(\sqrt[3]{17}-1)$ ۳) $\pi(17\sqrt{17}+1)$ ۴) $\frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17}-1)$

پاسخ: گزینه «۴» معادله رویه داده شده را به صورت $g(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$ می‌نویسیم، و صفحه تصویر را صفحه xoy در نظر می‌گیریم. در این صورت تصویر ناحیه موردنظر داخل دایره $x^2+y^2=4$ خواهد بود. از طرفی داریم:

$$g(x,y,z)=x^2+y^2-z=0 \Rightarrow \vec{\nabla}g=(2x,2y,-1)$$

$$ds=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=\frac{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}{1}dA=\sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dA$$

بنابراین مساحت ناحیه موردنظر برابر است با:

$$\iint_D\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=\iint_D\sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dA$$

با توجه به ناحیه انتگرال‌گیری و عبارت مقابل انتگرال بهتر است از مختصات قطبی برای محاسبه استفاده کنیم:

$$\iint_D\sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^2\sqrt{4r^2+1}\times rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r\sqrt{4r^2+1}\,dr=\theta\Big|_0^{2\pi}\times\frac{1}{12}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17}-1)$$

مثال۱۲: مساحت قسمتی از رویه $x^2-y^2=z^2$ در ناحیه $x>0$ و $y>0$ و $z>0$ محدود به صفحه $y+z=a$، کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) $2a^2$ ۲) $\frac{1}{2}a^2$ ۳) $\sqrt{2}a^2$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$

پاسخ: گزینه «۴» صفحه تصویر را، صفحه yoz انتخاب می‌کنیم بنابراین بردار یکه عمود بر صفحه تصویر بردار $\vec{i}$ می‌باشد. در این صورت ناحیه تصویر مثلث محدود به خطوط $y=0$، $z=0$ و $y+z=a$ خواهد بود. رویه داده شده را به صورت $g(x,y,z)=-x^2+y^2+z^2=0$ می‌نویسیم. در این صورت:

$$ds=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{i}|}dA=\frac{|(-2x,2y,2z)|}{2x}=\frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2x}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x}=\frac{\sqrt{x^2+x^2}}{x}=\sqrt{2}$$

بنابراین داریم:

$$S=\iint_D\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{i}|}dA=\sqrt{2}\iint_D dA=\sqrt{2}\times\text{مساحت}=\sqrt{2}\times\frac{a^2}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$$

مثال۱۳: مساحت قسمتی از سطح، $z=2-(x^2+y^2)$ که در بالای صفحه xoy قرار دارد چقدر است؟ (عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{11\pi}{3}$ ۲) $\frac{13\pi}{3}$ ۳) $\frac{11\pi}{5}$ ۴) $\frac{13\pi}{5}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$g(x,y,z)=x^2+y^2+z-2 \Rightarrow \vec{\nabla}g=(2x,2y,1) \Rightarrow ds=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dA$$

$$\text{مساحت}=\iint_D\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\times rdrd\theta=\frac{13\pi}{3}$$

مثال۱۴: قسمتی از مساحت رویه $z=\sqrt{x^2+y^2}$ داخل استوانه $x^2+y^2=2x$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) $\pi\sqrt{2}$ ۳) 2π ۴) $2\pi\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۲» صفحه تصویر را صفحه xoy در نظر می‌گیریم، در این صورت ناحیه تصویر درون دایره $x^2+y^2=2x$ می‌باشد. معادله مخروط را به صورت $g(x,y,z)=x^2+y^2-z^2=0$ می‌نویسیم. در این صورت داریم:

$$ds=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=\frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2z}dA=\frac{\sqrt{4z^2+4z^2}}{2z}dA=\sqrt{2}dA$$

بنابراین داریم:

$$\text{مساحت}=\iint_D\sqrt{2}dA=\sqrt{2}\times(\text{مساحت دایره})=\sqrt{2}\pi$$

توجه کنید که معادله دایره $x^2+y^2=2x$ را می‌توان به صورت $(x-1)^2+y^2=1$ نوشت که دایره‌ای به شعاع ۱ می‌باشد.

مثال ۱۵: اگر سطح Γ بخشی از رویه $z=\sqrt{x^2+y^2}$ محدود به $z=0$ و $z=1$ باشد، آن‌گاه انتگرال رویه‌ای $\iint_\Gamma (x^2+y^2)d\sigma$ کدام است؟

(معدن ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{9}{10}\pi$ ۲) $\frac{2\pi(\sqrt{2}+1)}{15}$ ۳) $\frac{4\pi(\sqrt{2}+1)}{15}$ ۴) $\frac{2\pi(2\sqrt{2}-1)}{3}$

☑ **پاسخ:** هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. صفحه تصویر را صفحه xoy انتخاب می‌کنیم در این صورت ناحیه تصویر درون دایره $x^2+y^2=1$ خواهد بود. رویه داده شده را به صورت $g(x,y,z)=x^2+y^2-z^2=0$ می‌نویسیم، در این صورت داریم:

$$d\sigma=\frac{|\vec{\nabla} g|}{|\vec{\nabla} g.\vec{k}|}=\frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2z}dA=\frac{\sqrt{8z^2}}{2z}dA=\sqrt{2}dA$$

بنابراین داریم:

$$\iint_\Gamma (x^2+y^2)\,d\sigma=\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\sqrt{2}dA=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\times r dr d\theta=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

مثال ۱۶: فرض کنیم $f=Ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$، مطلوب است $\iint_S \frac{\partial f}{\partial n}d\sigma$ که در آن $\vec{n}$ بردار واحد قائم بر رویه S می‌باشد، و $d\sigma$ جزء سطح است و S قسمت واقع شده از کره $\rho^2=a^2$ در $\frac{1}{8}$ اول فضا است.

(نفت ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{\pi a}{4}$ ۲) $\frac{\pi a^2}{6}$ ۳) $\frac{\pi^2 a}{36}$ ۴) $\frac{\pi^2 a^2}{36}$

☑ **پاسخ:** هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. منظور از $\frac{\partial f}{\partial n}$، مشتق سوئی f در جهت بردار واحد $\vec{n}$ می‌باشد. بنابراین داریم: $\iint_S \frac{\partial f}{\partial n}d\sigma=\iint_S \vec{\nabla} f.\vec{n}d\sigma$

صفحه تصویر را صفحه xoy در نظر می‌گیریم. تصویر $\frac{1}{8}$ اول از کره بر صفحه xoy داخل دایره $x^2+y^2=a^2$ در ربع اول خواهد بود. از طرفی داریم:

$$f=Ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}Ln(x^2+y^2+z^2)\Rightarrow \vec{\nabla} f=\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

اگر معادله کره داده شده را به صورت $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0$ در نظر بگیریم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\vec{n}=\frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g|}=\frac{(2x,2y,2z)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{(x,y,z)}{a}\Rightarrow \vec{\nabla} f.\vec{n}=\left(\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2+z}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\right)\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \iint_S \frac{\partial f}{\partial n}d\sigma=\iint_S \frac{1}{a}d\sigma=\frac{1}{a}\times(\text{مساحت } S)$$

مساحت کره‌ای به شعاع a برابر است با $4\pi a^2$، در نتیجه مساحت $\frac{1}{8}$ اول آن یعنی S برابر است با $\frac{1}{8}4\pi a^2=\frac{\pi a^2}{2}$، بنابراین داریم:

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial n}d\sigma=\frac{1}{a}\frac{\pi a^2}{2}=\frac{\pi a}{2}$$

مثال ۱۷: مطلوب است مساحت قسمتی از کره $\rho^2=4a^2$ که به وسیله استوانه $r^2=2ar\sin\theta$ بریده می‌شود (قسمت بالای صفحه xoy) $a\neq 1$.

(نفت ـ سراسری ۸۵)

۱) 4π ۲) $a^2\pi$ ۳) $4a^2$ ۴) $4a^2(\pi-2)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» معادله کره داده شده در مختصات دکارتی $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4a^2=0$ و معادله استوانه $x^2+(y-a)^2=a^2$ می‌باشد.

صفحه تصویر را صفحه xoy در نظر می‌گیریم. واضح است که تصویر سطح کره بر صفحه xoy درون دایره‌ی $x^2+(y-a)^2=a^2$ قرار دارد. از طرفی داریم:

$$ds=\frac{|\vec{\nabla} g|}{|\vec{\nabla} g.\vec{k}|}dA=\frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2z}dA=\frac{2a}{z}dA=\frac{2a}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dA$$

بنابراین داریم:

$$\text{مساحت}=\iint\frac{|\vec{\nabla} g|}{|\vec{\nabla} g.\vec{k}|}dA\xrightarrow{\text{مختصات قطبی}}\int_0^\pi\int_0^{2a\sin\theta}\frac{2a}{\sqrt{4a^2-r^2}}\times r dr d\theta=2a\int_0^\pi -\sqrt{4a^2-r^2}\Big|_0^{2a\sin\theta}d\theta$$

$$=2a\int_0^\pi(2a-2a|\cos\theta|)d\theta=4a^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos\theta)d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi(1+\cos\theta)d\theta\right)=4a^2(\pi-2)$$

مثال ۱۸: **مساحت قسمتی از رویه $z=x^۲-y^۲$ که در داخل استوانه $x^۲+y^۲=۴$ قرار دارد، کدام است؟** (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{۳\pi}{۲}(\sqrt{۱۷}-۱)$ ۲) $\frac{۷\pi}{۶}(\sqrt{۱۷}-۱)$ ۳) $\frac{۱۷\pi}{۶}(\sqrt{۱۷}-۱)$ ۴) $\frac{\pi}{۶}(۱۷\sqrt{۱۷}-۱)$

پاسخ: گزینه «۴» لازم است از انتگرال روی سطح استفاده کنیم، بنابراین مساحت موردنظر برابر $\iint_S ds$ است. قرار می‌دهیم $f=x^۲-y^۲-z=۰$،

در این صورت داریم: $ds=\frac{|\vec{\nabla} g|}{\vec{\nabla} g.\vec{k}}dxdy=\sqrt{۱+۴x^۲+۴y^۲}\,dxdy$

برای محاسبه $\iint_D ds$ از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم: $\text{مساحت}=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۲\sqrt{۱+۴r^۲}\times rdrd\theta=\frac{\pi}{۶}(۱۷\sqrt{۱۷}-۱)$

مثال ۱۹: **مساحت قسمتی از رویه به معادله $z=\sqrt{۱-x^۲-y^۲}$ وقتی که تصویر این قسمت از رویه بر صفحه xoy ناحیه محدود به دایره‌ی $۴x^۲+۴y^۲=۱$ باشد کدام است؟** (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $(\sqrt{۳}-۱)\pi$ ۲) $(۲-\sqrt{۳})\pi$ ۳) $(\sqrt{۳}+۱)\pi$ ۴) $(۲+\sqrt{۳})\pi$

پاسخ: گزینه «۲» در واقع می‌خواهیم $\iint_D ds$ را محاسبه کنیم که ناحیه انتگرال‌گیری درون دایره $x^۲+y^۲=\frac{۱}{۴}$ می‌باشد که در مختصات قطبی به صورت $r=\frac{۱}{۲}$ در می‌آید. رویه $z=\sqrt{۱-x^۲-y^۲}$ در واقع قسمت بالایی کره به شعاع ۱ می‌باشد. بنابراین $ds=\frac{dxdy}{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}}$ و در نتیجه داریم:

$$\text{مساحت}=\iint_D ds=\iint\frac{dxdy}{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}}\xlongequal{\text{مختصات قطبی}}\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{۱}{۲}}\frac{rdrd\theta}{\sqrt{۱-r^۲}}=\int_۰^{۲\pi}d\theta\int_۰^{\frac{۱}{۲}}\frac{rdr}{\sqrt{۱-r^۲}}=\pi(۲-\sqrt{۳})$$

مثال ۲۰: **مساحت بخشی از رویه‌ی $z=x^۲+y^۲$ که زیر صفحه $z=۲$ قرار دارد، کدام است؟** (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{۳}{۱۳}$ ۲) $\frac{۱۳\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۱۳}{۳}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۱۳}$

پاسخ: گزینه «۲» اگر سطح S به صورت $z=h(x,y)$ باشد، آن‌گاه داریم: $ds=\sqrt{۱+(\frac{\partial z}{\partial x})^۲+(\frac{\partial z}{\partial y})^۲}$

و مساحت رویه برابر $\int ds$ است. بنابراین داریم: $ds=\sqrt{۱+(۲x)^۲+(۲y)^۲}=\sqrt{۱+۴(x^۲+y^۲)}\xrightarrow{\text{قطبی}}ds=\sqrt{۱+۴r^۲}$

$$\Rightarrow\text{مساحت}=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\sqrt{۲}}r\sqrt{۱+۴r^۲}drd\theta=\int_۰^{۲\pi}d\theta\int_۰^{\sqrt{۲}}r\sqrt{۱+۴r^۲}dr=\theta\Big|_۰^{۲\pi}\times\frac{۱}{۱۲}(۱+۴r^۲)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_۰^{\sqrt{۲}}=۲\pi(\frac{۲۷}{۱۲}-\frac{۱}{۱۲})=\frac{۱۳\pi}{۳}$$

مثال ۲۱: **مساحت بخشی از رویه‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ که توسط استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۱$ جدا می‌شود چقدر است؟** (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) ۲π ۲) ۶π ۳) ۸π ۴) ۱۰π

پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. معادله‌ی سطح S به‌صورت $g:x^۲+y^۲+z^۲=۱$ است. استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۱$ نشان می‌دهد که تصویر S بر صفحه‌ی xoy یعنی ناحیه‌ی D درون دایره‌ی واحد است. اما دقت کنید که از معادله‌ی سطح S داریم $z=\pm\sqrt{۱-x^۲-y^۲}$ در واقع S دارای دو نیمه‌ی متقارن در $z\ge۰$ و $z\le۰$ است. ما مساحت قسمت بالایی را با معادله‌ی $z=\sqrt{۱-x^۲-y^۲}$ حساب کرده و دو برابر می‌کنیم. چون تصویر روی صفحه‌ی xoy افتاده است پس $\vec{p}=\vec{k}$ خواهد بود.

$$d\sigma=\frac{|\vec{\nabla} g|}{|\vec{\nabla} g.\vec{k}|}dA=\frac{\sqrt{(۴x^۲+۴y^۲+۴z^۲)}}{|۲z|}dA=\frac{۲\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}{۲\sqrt{۱-x^۲-y^۲}}dA=\frac{dA}{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}}$$

$$S\ \text{مساحت}=۲\iint_S d\sigma=۲\iint_D\frac{dA}{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}}$$

با استفاده از مختصات قطبی داریم $dxdy=rdrd\theta$ و $۰\le\theta\le۲\pi$ و $۰\le r\le۱$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$S\ \text{مساحت}=۲\iint_{x^۲+y^۲\le۱}\frac{۲dxdy}{\sqrt{۴-x^۲-y^۲}}=۲\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱\frac{۲rdrd\theta}{\sqrt{۴-r^۲}}=۲(\int_۰^{۲\pi}d\theta)(\int_۰^۱\frac{۲rdr}{\sqrt{۴-r^۲}})=۴\pi(-۲\sqrt{۴-r^۲})\Big|_۰^۱=۸\pi(۲-\sqrt{۳})$$

مثال ۲۲: **مساحت قسمتی از کره به معادله $x^۲+y^۲+z^۲=۴$، بریده شده با استوانه $x^۲+y^۲=۲y$ کدام است؟** (کشاورزی ـ سراسری ۸۹)

۱) $۲(\pi-۲)$ ۲) $۴(\pi-۲)$ ۳) $۸(\pi-۲)$ ۴) $۴(\pi-۱)$

پاسخ: گزینه «۳» به‌طور کلی مساحت قسمتی از کره $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲$، که درون استوانه $x^۲+y^۲=ax$ یا $x^۲+y^۲=ay$ قرار می‌گیرد برابر $۲a^۲(\pi-۲)$ می‌باشد.

توضیح: مثال فوق بارها در تست‌های چند سال اخیر مورد سئوال قرار گرفته است. پیشنهاد می‌شود نتیجه آن حفظ شود.

درسنامه۲: انتگرال سطح برای توابع برداری و قضیه دیورژانس

مثال۱ (سخت): فرض کنید S رویه‌ی پارامتری زیر باشد که در آن D ناحیه $u^2+v^2=1$ برای $u\ge 0$ و $v\ge 0$ می‌باشد.

$$S:\vec{r}(u,v)=(u^2+v^2)\vec{i}+(u^2-v^2)\vec{j}+u^2v^2\vec{k}$$

و $\vec{F}=\frac{1}{2}(x+y)\vec{i}+(y^2+4z)\vec{j}+\frac{1}{2}z\vec{k}$، در این صورت حاصل $I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{24}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}=(2u,2u,2uv^2)\quad,\quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}=(2v,-2v,2vu^2)$$

$$\vec{n}d\sigma=(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v})dudv=4uv[(u^2+v^2)\,,\,-(u^2-v^2)\,,\,-2]dudv$$

$$\text{میدان روی سطح}=\vec{F}(\vec{r}(u,v))=(u^2,(u^2+v^2)^2,\frac{u^2v^2}{2})$$

$$I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_D 4uv(u^2(u^2+v^2)-(u^2-v^2)(u^2+v^2)^2-u^2v^2)dudv \xrightarrow{u^2+v^2=1} I=\iint_D 4uv(u^2-u^2+v^2-u^2v^2)dudv$$

$$\Rightarrow I=\iint_D 4uv(v^2-u^2v^2)du=\iint_D 4uv^3(1-u^2)dudv \xrightarrow{1-u^2=v^2} I=\iint_D 4uv^5dudv$$

با استفاده از تغییر متغیر $u=r\cos\theta$ و $v=r\sin\theta$ و $dudv=rdrd\theta$ داریم. $0\le r\le 1$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$، پس حاصل انتگرال به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$\iint_D 4uv^5dudv=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4r\cos\theta)(r^5\sin^5\theta)rd\theta dr=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}4r^7\cos\theta\sin^5\theta d\theta dr=[\frac{4r^8}{8}]_0^1\times[\frac{\sin^6\theta}{6}]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{12}$$

مثال۲ (سخت): اگر S سطح بیضوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ باشد، آن‌گاه حاصل $I=\iint_S(\frac{dydz}{x}+\frac{dxdz}{y}+\frac{dxdy}{z})$، چند برابر abc است؟ $(a,b,c>0)$

۱) $\pi(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})$ ۲) $2\pi(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})$ ۳) $3\pi(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})$ ۴) $4\pi(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})$

پاسخ: گزینه «۴» برای میدان برداری $\vec{F}=(P,Q,R)$ داریم:

$$\iint_S(P\,dydz+Q\,dxdz+Rdxdy)=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma$$

در این مثال برای میدان برداری $\vec{F}=(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z})$ داریم:

$$I=\iint_S(\frac{dydz}{x}+\frac{dxdz}{y}+\frac{dxdy}{z})=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma$$

حالا لازم است $\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ را به‌دست آوریم که $\vec{n}$ بردار یکه‌ی قائم بر سطح بیضی‌گونِ S با معادله‌ی $g:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ است. معادله بیضی‌گون برای $\pm z$ تغییری نمی‌کند، بنابراین S دارای دو نیمه‌ی متقارن در $z>0$ و $z<0$ است. از این تقارن استفاده می‌کنیم و مقدار انتگرال را روی نیمه‌ی بالایی آن (که آن را S_1 می‌نامیم) حساب کرده و نتیجه را ۲ برابر می‌کنیم. اگر در معادله‌ی بیضی‌گون، $z=0$ قرار دهیم، می‌بینیم که تصویر S_1 روی صفحه xoy بیضیِ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ است که آن را با D نشان می‌دهیم. برای صفحه‌ی xoy داریم $\vec{p}=\vec{k}$ در نتیجه داریم:

$$\vec{n}d\sigma=\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=\frac{(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2})}{|\frac{2z}{c^2}|}dydx=\frac{(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2})}{\frac{1}{c^2}z}dydx\Rightarrow\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{c^2}z}$$

البته روی سطح S_1 داریم؛ $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ بنابراین خواهیم داشت:

$$I=2\iint_{S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=2(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\iint_D\frac{dydx}{\frac{1}{c}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

اکنون تغییر دستگاه بیضوی $(u,v)=(\frac{x}{a},\frac{y}{b})$ را انجام می‌دهیم. ژاکوبین دستگاه جدید برابر با $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}a&0\\0&b\end{vmatrix}=ab$ است.

$$I=2(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\iint_{D'}\frac{abc}{\sqrt{1-u^2-v^2}}dudv$$

از معادله‌ی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ داریم $u^2+v^2=1$ پس ناحیه‌ی D در دستگاه جدید تبدیل به ناحیه‌ی D' می‌شود که درون دایره‌ی واحد است. بنابراین از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow I=2(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{abc}{\sqrt{1-r^2}}rdrd\theta=2abc(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\int_0^{2\pi}[-(1-r^2)^{\frac{1}{2}}]_0^1d\theta=4\pi abc(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})$$

مثال ۳: شار گذرنده برون‌سوی میدان $\vec{F}=(x,y,z)$ از کره $x^2+y^2+z^2=9$، کدام است؟

۱) 360π ۲) 36π ۳) 108π ۴) 324π

پاسخ: گزینه «۳» شار گذرنده برون‌سوی از میدان $\vec{F}$ برابر $\iint \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ است، که چون ناحیه بسته است پس طبق قضیه دیورژانس شار برابر است با:

$$\vec{F}=(x,y,z)\Rightarrow \operatorname{div}\vec{F}=1+1+1=3$$

$$\text{شار}=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_V 3dv=3\times(\text{حجم کره‌ای به شعاع ۳})=3[\frac{4}{3}\pi(3)^3]=108\pi$$

مثال ۴: اگر $\vec{F}=-y^2\vec{i}+x^2\vec{j}+z^3\vec{k}$ حاصل $\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ که در آن S سطح کره $x^2+y^2+z^2=1$ و $\vec{n}$ بردار قائم یکه بر کره به طرف بیرون می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{2\pi}{5}$ ۲) $\frac{4\pi}{5}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۲» برای محاسبه انتگرال مورد نظر از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V\operatorname{div}\vec{F}dv=\iiint_V 3z^2dv$$

برای محاسبه انتگرال فوق از تغییر مختصات کروی استفاده می‌کنیم:

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 3\rho^2\cos^2\phi\times\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}3\cos^2\phi\sin\phi d\phi\int_0^1\rho^4d\rho=2\pi\times2\times\frac{1}{5}=\frac{4\pi}{5}$$

مثال ۵: اگر S سطح کره به معادله‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ با قائم رو به خارج باشد، همچنین بردار $\vec{F}$ به‌صورت $\vec{F}=[2x^3+Ln(y^3+z^3)]\vec{i}+[2y^3+Ln(z^3+x^3)]\vec{j}+[2z^3+Ln(x^3+y^3)]\vec{k}$ تعریف شود، آن‌گاه شار میدان نیروی $\vec{F}$ کدام است؟

۱) $\frac{8\pi}{5}$ ۲) $\frac{4\pi}{5}$ ۳) $\frac{12\pi}{5}$ ۴) $\frac{24\pi}{5}$

پاسخ: گزینه «۴» چون ناحیه بسته است پس می‌توان از قضیه دیورژانس کمک گرفت، ابتدا $\operatorname{div}\vec{F}$ را حساب می‌کنیم:

$$\operatorname{div}\vec{F}=6x^2+6y^2+6z^2=6(x^2+y^2+z^2)\Rightarrow \text{شار}=6\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dzdydx$$

با توجه به ناحیه و عبارت زیر انتگرال بهتر است از مختصات کروی استفاده کنیم:

$$\text{شار}=6\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1\rho^2(\rho^2\sin\varphi)d\rho d\varphi d\theta\Rightarrow \text{شار}=(\int_0^{2\pi}d\theta)(\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi)(\int_0^1 6\rho^4d\rho)=2\pi\times[-\cos\varphi]_0^{\pi}\times[\frac{6\rho^5}{5}]_0^1=2\pi\times2\times\frac{6}{5}=\frac{24\pi}{5}$$

مثال ۶: شار رو به خارج $\vec{F}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ در سراسر مرز ناحیه توپر چهار وجهی $z\geq 0$، $y\geq 0$، $x\geq 0$ و $x+y+z\leq 3$، کدام است؟

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{81}{4}$ ۴) $\frac{81}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» چون $\vec{F}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$، بنابراین $\operatorname{div}\vec{F}=2x+2y+2z$. چون ناحیه موردنظر بسته است، پس طبق قضیه دیورژانس داریم:

$$\text{شار}=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint(\operatorname{div}\vec{F})dv=2\iiint(x+y+z)dv$$

از شرطهای داده شده نتیجه می شود $0\leq z\leq 3-x-y$، و با حذف z بین روابط داده شده در سؤال به رابطه $x+y\leq 3$ می‌رسیم که $\begin{cases}0\leq y\leq 3-x\\0\leq x\leq 3\end{cases}$ به‌دست می‌آید.

$$\text{شار}=2\int_0^3\int_0^{3-x}\int_0^{3-x-y}(x+y+z)dzdydx=2\int_0^3\int_0^{3-x}((x+y)(3-x-y)+\frac{(3-x-y)^2}{2})dydx$$

$$\text{شار}=\int_0^3\int_0^{3-x}(9-(x+y)^2)dydx=\int_0^3(9y-\frac{(x+y)^3}{3})\Big|_0^{3-x}dx=\int_0^3(9(3-x)-9+\frac{x^3}{3})dx=\int_0^3(18-9x+\frac{x^3}{3})dx$$

$$\Rightarrow \text{شار}=(18x-\frac{9}{2}x^2+\frac{x^4}{12})\Big|_0^3=\frac{81}{4}$$

مثال ۷: اگر S ناحیه محدود به صفحات $x=y=z=۰$ و $۲x+۲y+z=۶$ باشد، آن‌گاه با فرض $\vec{F}=(۲xy+z)\vec{i}+y^۲\vec{j}-(x+۳y)\vec{k}$، حاصل $I=\oiint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳۵}{۲}$ ۲) ۲۷ ۳) $\frac{۲۷}{۲}$ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه «۲» حل مستقیم سؤال با توجه به ناحیه داده شده، بسیار پر زحمت و مستلزم حل چهار انتگرال سطح می‌باشد، اما استفاده از قضیه دیورژانس کار را نسبتاً راحت‌تر است:

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial(۲xy+z)}{\partial x}+\frac{\partial(y^۲)}{\partial y}+\frac{\partial(-x-۳y)}{\partial z}=۲y+۲y+۰=۴y$$

در انتگرال سه‌گانه، حدود z عبارتند از $z=۰$ و $z=۶-۲x-۲y$. برای تعیین حدود x و y باید صفحه‌ی $z=۶-۲x-۲y$ را با صفحه‌ی $z=۰$ برخورد دهیم که خط $۲x+۲y=۶$، یعنی $x+y=۳$ به‌دست می‌آید. بنابراین در صفحه‌ی xoy، خطوط $x=۰$، $y=۰$ و $x+y=۳$ را داریم. مثلثی به‌وجود می‌آید که در آن $۰\le x\le ۳$ و $۰\le y\le ۳-x$ است.

$$\Rightarrow I=\int_۰^۳\int_۰^{۳-x}\int_۰^{۶-۲x-۲y}۴y\,dz=dydx=\int_۰^۳dx\int_۰^{۳-x}۴y[۶-۲x-۲y]dydx$$

$$\Rightarrow I=۸\int_۰^۲\int_۰^{۳-x}(۳-x)(۳-x-y)-(۳-x-y)^۲dydx=۸\int_۰^۳[(۳-x)(-\frac{(۳-x-y)^۲}{۲})+\frac{۱}{۳}(۳-x-y)^۳]_۰^{۳-x}dx$$

$$\Rightarrow I=۸\int_۰^۳[+\frac{۱}{۲}(۳-x)^۳-\frac{۱}{۳}(۳-x)^۳]dx=\frac{۸}{۶}\int_۰^۳(۳-x)^۳dx=-\frac{۱}{۳}[(۳-x)^۴]_۰^۳=۲۷$$

مثال ۸: فرض کنید S سطحی باشد که ناحیه V را به وسیله‌ی صفحات $z=۰$، $y=۰$ و $y=e$ و سهمی $z=۱-x^۲$ محصور کرده است. اگر $\vec{n}$ قائم سطح S و رو به خارج باشد، آن‌گاه با فرض $\vec{F}=(x+\cos y, y+\sin z, z+e^x)$، حاصل $I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۸e}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}e$ ۴) $۴e$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به این که ناحیه S سطحی بسته است بنابراین می‌توان از قضیه دیورژانس استفاده کرد. ابتدا $\operatorname{div}\vec{F}$ را حساب می‌کنیم:

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial(x+\cos y)}{\partial x}+\frac{\partial(y+\sin z)}{\partial y}+\frac{\partial(z+e^x)}{\partial z}=۱+۱+۱=۳$$

پس داریم:

$$I=\iiint_V ۳dv=۳\int_{-۱}^{۱}\int_۰^e\int_۰^{۱-x^۲}dzdydx=۳\int_{-۱}^{۱}\int_۰^e[z]_۰^{۱-x^۲}dydx=۳\int_{-۱}^{۱}\int_۰^e(۱-x^۲)dydx=۳\int_{-۱}^{۱}(۱-x^۲)dx\times\int_۰^e dy$$

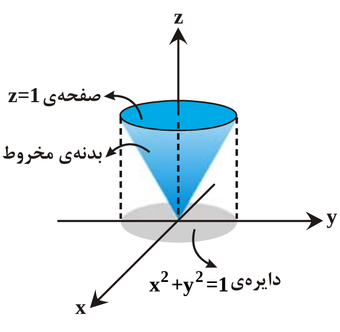
$$\Rightarrow I=۳\times۲\int_۰^۱(۱-x^۲)dx\times[y]_۰^e=۶[x-\frac{x^۳}{۳}]_۰^۱\times e=۴e$$

مثال ۹: اگر رویه S محدود به مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و صفحه‌ی $z=۱$ با بردار قائم رو به خارج $\vec{n}$ باشد و $\vec{F}$ میدان برداری $\vec{F}=(x^۳+۲y^۲)\vec{i}+(y^۳+۲z)\vec{j}+(z^۳+۲x^۲)\vec{k}$ باشد، آن‌گاه حاصل $I=\oiint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi}{۵}$ ۲) $\frac{۴\pi}{۵}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۱۰}$ ۴) $\frac{۹\pi}{۱۰}$

پاسخ: گزینه «۴» حل مستقیم انتگرال روی سطح پر زحمت است، اما استفاده از قضیه دیورژانس کمک زیادی به ما می‌کند.

$$I=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv=۳\iiint_V(x^۲+y^۲+z^۲)dxdydz$$



ناحیه‌ی V از پایین به مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و از بالا به صفحه‌ی $z=۱$ محدود شده است. برای این ناحیه از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. از برخورد مخروط با صفحه‌ی $z=۱$، دایره‌ی $x^۲+y^۲=۱$ به‌دست می‌آید. پس $۰\le\theta\le۲\pi$ و $۰\le r\le۱$ است. کران پایین z از معادله‌ی مخروط به‌دست می‌آید: $z=\sqrt{x^۲+y^۲}=r$ و کران بالای آن $z=۱$ است.

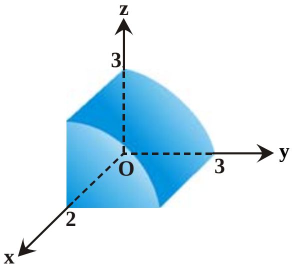
$$I=۳\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱\int_r^۱(r^۲+z^۲)rdzdrd\theta=۳\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱[r^۳z+r\frac{z^۳}{۳}]_r^۱drd\theta=۳\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱(r^۳+\frac{r}{۳}-\frac{۴r^۴}{۳})drd\theta$$

$$\Rightarrow I=۳\int_۰^{۲\pi}[\frac{r^۴}{۴}+\frac{r^۲}{۶}-\frac{۴}{۱۵}r^۵]_۰^۱d\theta=۳(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}-\frac{۴}{۱۵})(۲\pi)\Rightarrow I=\frac{۹\pi}{۱۰}$$

مثال ۱۰ (سخت): اگر S سطح ناحیه‌ی محدود به استوانه $y^2+z^2=9$ و صفحه‌ی $x=2$ و صفحات مختصات در یک هشتم اول با بردار قائم رو به خارج $\vec{n}$ باشد و $\vec{F}=(2x^2y)\vec{i}-y^2\vec{j}+4xz\vec{k}$، آن‌گاه حاصل $I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) $72+18\pi$ ۳) $36+18\pi$ ۴) 18π

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ناحیه موردنظر در شکل مقابل نشان داده شده است، سطح S از ۵ قسمت تشکیل شده است، قسمتی از استوانه‌ی $y^2+z^2=9$، قسمتی از صفحه‌ی $x=2$، همچنین صفحات مختصات یعنی $x=0$، $y=0$ و $z=0$، پس اگر بخواهیم انتگرال سطح را مستقیماً حل کنیم، باید پنج انتگرال را حل کنیم!؟ اما استفاده از قضیه دیورژانس به مراتب راحت‌تر است. زیرا با استفاده از این قضیه، به جای ۵ انتگرال روی سطح، فقط یک انتگرال سه‌گانه روی حجم موردنظر می‌گیریم:



$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial(2x^2y)}{\partial x}+\frac{\partial(-y^2)}{\partial y}+\frac{\partial(4xz)}{\partial z}=4xy-2y+4x$$

بنابراین داریم:

$$I=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv=\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-z^2}}\int_0^2(4xy-2y+4x)dxdydz$$

$$I=\int_0^3dz\int_0^{\sqrt{9-z^2}}dy\int_0^2(4xy-2y+4x)dx=\int_0^3dz\int_0^{\sqrt{9-z^2}}dy[2x^2y-2xy+2x^2]_0^2=\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-z^2}}(4y+8)dy=\int_0^3dz\Big[2y^2+8y\Big]_0^{\sqrt{9-z^2}}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^3[18-2z^2+8\sqrt{9-z^2}]dz=\int_0^3[18-2z^2]dz+8\int_0^3\sqrt{9-z^2}dz=[18z-\frac{2z^3}{3}]_0^3+8\int_0^3\sqrt{9-z^2}dz=18\times3-\frac{2\times3^3}{3}+8\int_0^3\sqrt{9-z^2}dz$$

$$I=36+8\int_0^3\sqrt{9-z^2}dz$$

برای حل انتگرال باقیمانده از تغییر متغیر $z=3\cos\theta$ استفاده می‌کنیم که $dz=-3\sin\theta$ را نتیجه می‌دهد و طبیعی است حدود θ هم از $\frac{\pi}{2}$ تا صفر می‌شود.

$$\int_0^3\sqrt{9-z^2}dz=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{9-9\cos^2\theta}(-3\sin\theta)d\theta=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\sin\theta)(-3\sin\theta)d\theta=+9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1-\cos2\theta}{2})d\theta$$

$$=\frac{9}{2}[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{9\pi}{4}$$

پس داریم: $I=36+8\times\frac{9\pi}{4}=36+18\pi$.

مثال ۱۱ (سخت): حاصل $I=\iint_S(x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy$ که در آن S طرف بیرونی سطح $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ است، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» فرض کنیم D ناحیه محدود شده توسط سطح بسته S باشد، همان‌طور که می‌بینید میدان برداری $\vec{F}=(P,Q,R)=(x-y+z,y-z+x,z-x+y)$ را داریم که $\operatorname{div}\vec{F}$ برابر است با: $\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1+1+1=3$، می‌دانیم بنابر قضیه دیورژانس انتگرال داده شده برابر است با $\iiint_V\operatorname{div}\vec{F}dv$. بنابراین داریم: $I=\iiint_V3dv$. با توجه به آن‌که مرز V دارای معادله‌ی $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ است، نوشتن حدود انتگرال برحسب x، y و z ساده نیست. بهتر است با استفاده از تغییر متغیر مناسب، این معادله را ساده‌تر کنیم. با استفاده از تغییر دستگاه به صورت $u=x-y+z$ و $v=y-z+x$ و $w=z-x+y$ داریم: $|u|+|v|+|w|=1$.

ژاکوبین دستگاه جدید را حساب می‌کنیم:

$$J_{xyz}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}=4\Rightarrow J_{uvw}=\frac{1}{J_{xyz}}=\frac{1}{4}$$

بنابراین در دستگاه جدید، ناحیه‌ی V درونِ رویه‌ی $|u|+|v|+|w|=1$ قرار دارد و داریم:

$$I=\iiint_V3dzdydx=\iiint_V3(\frac{1}{4})dwdvdu=\frac{3}{4}\times(V\text{ حجم})$$

محاسبه‌ی حجم V ساده است. در معادله‌ی $|u|+|v|+|w|=۱$ تبدیل u به $-u$، v به $-v$، w به $-w$ تغییری ایجاد نمی‌کند پس این ناحیه نسبت به همه‌ی محورها متقارن است. حجم واقع در $\frac{۱}{۸}$ اول را حساب کرده و ۸ برابر می‌کنیم. در $\frac{۱}{۸}$ اول داریم $u+v+w=۱$ و طبق فرمولی که در بخش انتگرال‌های سه‌گانه داشتیم، حجم محدود به این صفحه در $\frac{۱}{۸}$ اول برابر است با $\frac{۱}{۶}$. در نتیجه حجم V برابر است با $۸\times\frac{۱}{۶}=\frac{۸}{۶}$ و با جایگذاری در I داریم:

$$I=\frac{۳}{۴}\times(\text{حجم } V)=\frac{۳}{۴}\times\frac{۸}{۶}=۱$$

یادآوری: حجم محدود به صفحه‌ی $ax+by+cz=d$ در $\frac{۱}{۸}$ اول برابر با $\frac{d^۳}{۶abc}$ است.

مثال ۱۲: حاصل انتگرال $\iint_S(۳xz^۲\vec{i}-x\vec{j}-y\vec{k}).\vec{n}ds$، در صورتی که S بخشی از استوانه $y^۲+z^۲=۱$ باشد که در یک هشتم اول و بین صفحات $x=۰$ و $x=۱$ قرار دارد، کدام است؟

۱) ۰　　۲) $-\frac{۱}{۲}$　　۳) $\frac{۳\pi}{۱۶}$　　۴) -۱

پاسخ: گزینه «۴» دقت کنید که سطح S بسته نیست، چون سؤال گفته بخشی از استوانه که **بین** صفحات $x=۰$ و $x=۱$ قرار دارد و لذا نمی‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم؛ اما اگر صفحات مختصات و صفحه‌ی $x=۱$ را به آن اضافه کنیم، سطح بسته می‌شود و می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، در این صورت داریم:

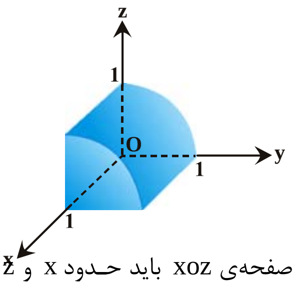
$$I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}\,ds=\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}dv=\iiint_V ۳z^۲dv$$

برای محاسبه‌ی این انتگرال از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. البته با کمی تفاوت نسبت به حالت معمولی دستگاه استوانه‌ای! معمولاً وقتی ناحیه‌ی انتگرال‌گیری بخشی از استوانه‌ی $x^۲+y^۲=a^۲$ باشد، از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. به این ترتیب که x و y را به صورت $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ قطبی می‌کنیم و با متغیر z کاری نداریم. در واقع به جای (x,y,z) از (r,θ,z) استفاده می‌کنیم. اما در این مثال، استوانه‌ی $y^۲+z^۲=۱$ را داریم که قاعده‌ی آن در صفحه yoz قرار دارد. یعنی در صفحه‌ی yoz یک ربع دایره داریم نه در صفحه‌ی xoy. بنابراین y و z را به صورت $y=r\sin\theta$ و $z=r\cos\theta$ قطبی می‌کنیم و با متغیر x کاری نداریم. در صفحه‌ی yoz داریم $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ و $۰\le r\le ۱$ و حدود x هم به وضوح $x=۰$ و $x=۱$ هستند.

$$I=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^۱\int_۰^۱ ۳(r\cos\theta)^۲\,r\,dx\,dr\,d\theta$$

از آن‌جا که حدود انتگرال اعداد ثابت هستند، می‌توان آن‌ها را به صورت زیر نوشت و در هم ضرب کرد:

$$I=(\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos^۲\theta d\theta)(\int_۰^۱ ۳r^۳dr)(\int_۰^۱dx)=(\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۲}(۱+\cos ۲\theta)d\theta)\times[\frac{۳}{۴}r^۴]_۰^۱\times[x]_۰^۱=[\frac{۱}{۲}(\theta+\frac{\sin ۲\theta}{۲})]_۰^{\frac{\pi}{۲}}\times\frac{۳}{۴}\times۱=\frac{۳\pi}{۱۶}$$



حالا باید شار گذرنده از صفحات مختصات و صفحه $x=۱$ را محاسبه و از مقدار به دست آمده در بالا کم کنیم.

در روی صفحه $z=۰$، بردار قائم برونسو $(-\vec{k})$ است و $\vec{F}.\vec{n}=y$ به دست می‌آید، از طرفی در صفحه‌ی $z=۰$ یعنی صفحه‌ی xoy باید حدود x و y را تشخیص دهیم. طبق صورت سؤال داریم $۰\le x\le ۱$ و اگر استوانه‌ی $y^۲+z^۲=۱$ را با $z=۰$ برخورد دهیم، $y=\pm ۱$ به‌دست می‌آید. البته ما $\frac{۱}{۸}$ اول را می‌خواهیم پس $۰\le y\le ۱$ خواهد بود، بنابراین داریم:

$$\iint_S\vec{F}.\vec{n}\,ds=\int_۰^۱\int_۰^۱ y\,dy\,dx=\frac{۱}{۲}$$

در روی صفحه $y=۰$، بردار قائم برونسو $(-\vec{j})$ می‌باشد و $\vec{F}.\vec{n}=x$ به‌دست می‌آید، از طرفی در صفحه‌ی $y=۰$ یعنی صفحه‌ی xoz باید حدود x و z را تشخیص دهیم. به وضوح $۰\le x\le ۱$ است. از برخورد استوانه‌ی $y^۲+z^۲=۱$ و صفحه‌ی $y=۰$ داریم $z=\pm ۱$ البته ما $\frac{۱}{۸}$ اول را می‌خواهیم پس $۰\le z\le ۱$.

بنابراین داریم:

$$\iint_S\vec{F}.\vec{n}ds=\int_۰^۱\int_۰^۱ x\,dx\,dz=\frac{۱}{۲}$$

در روی صفحه $x=۰$، بردار قائم $(-\vec{i})$ می‌باشد و $\vec{F}.\vec{n}=۰$ به دست می‌آید و در نتیجه شار صفر است.

بالاخره در روی صفحه $x=۱$، بردار قائم برونسو $\vec{i}$ می‌باشد و $\vec{F}.\vec{n}=۳z^۲$ به دست می‌آید، از طرفی برای تعیین حدود y و z از معادله‌ی $y^۲+z^۲=۱$ و این‌که در $\frac{۱}{۸}$ اول قرار داریم، استفاده می‌کنیم. پس در مختصات قطبی داریم $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ و $۰\le r\le ۱$. بنابراین داریم:

$$\iint_S\vec{F}.\vec{n}\,ds=\iint_D ۳z^۲\,dA=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^۱ ۳r^۲\cos^۲\theta.r\,dr\,d\theta=(\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos^۲\theta d\theta)(\int_۰^۱ ۳r^۳dr)=(\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۲}(۱+\cos ۲\theta)d\theta)(\int_۰^۱ ۳r^۳dr)=(\frac{\pi}{۴})(\frac{۳}{۴})=\frac{۳\pi}{۱۶}$$

از محاسبات بالا نتیجه می‌شود شار گذرنده از سطح S برابر $\frac{۳\pi}{۱۶}-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}-\frac{۳\pi}{۱۶}=-۱$ است.

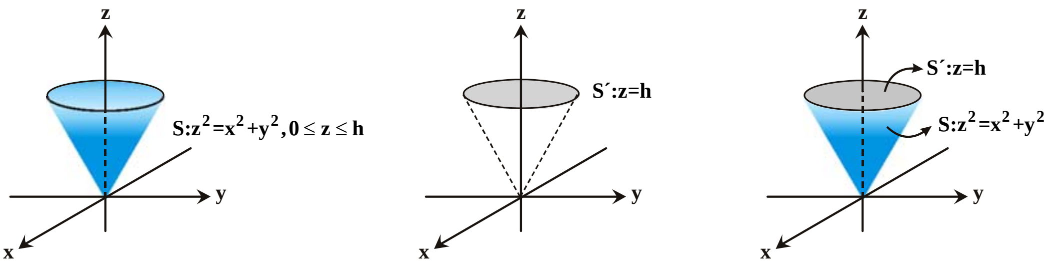
مثال ۱۳: اگر S سطح خارجی مخروط $x^2+y^2=z^2$ (برای $0\le z\le h$) باشد، آن‌گاه حاصل زیر کدام است؟

$$I=\iint_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$$

۱) 0　　۲) $\frac{h}{2}$　　۳) $\frac{h}{3}$　　۴) $\frac{h^2}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» همان‌طور که می‌دانیم برای میدان برداری $\vec{F}=(P,Q,R)$ داریم:

$$P=y-z\ ,\ Q=z-x\ ,\ R=x-y \qquad I=\iint_S (Pdydz+Qdxdz+Rdxdy)=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$$



مخروط بدون درپوش　　می‌خواهیم بخشی از صفحه‌ی z=h را به مخروط اضافه کنیم　　با ترکیب این دوسطح به یک سطح بسته می‌رسیم

توجه کنید که سطح S فقط شامل بخشی از بدنه‌ی مخروط است، بنابراین **بسته نیست**. اگر ما بخشی از صفحه‌ی $z=h$ را که با مخروط تلاقی دارد با S' نشان داده و به سطح S اضافه کنیم، $S\cup S'$ یک سطح بسته می‌شود و می‌توانیم روی $S\cup S'$ از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کنیم. سپس انتگرال روی S' را نیز که انتگرال ساده‌تری است محاسبه می‌کنیم و از تفاضل این دو مقدار جواب به‌دست می‌آید. ناحیه‌ی درون $S\cup S'$ را با V نشان می‌دهیم. دقت کنید که $\operatorname{div}\vec{F}=0$ است.

$$\iint_{S\cup S'} \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dv=\iiint_V (0)\,dv=0$$

بنابراین داریم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma+\iint_{S'} \vec{F}.\vec{n}d\sigma=0\ \Rightarrow I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=-\iint_{S'} \vec{F}.\vec{n}d\sigma$$

حاصل انتگرال روی S' را حساب می‌کنیم. معادله‌ی S' به‌صورت $z=h$ است، بنابراین بردار قائم یکه رو به خارج برای آن به‌صورت مقابل است:

$$\vec{n}=\frac{(0,0,1)}{1}=(0,0,1)$$

به این ترتیب با محاسبه‌ی $\vec{F}.\vec{n}$ داریم: $\vec{F}.\vec{n}=x-y$ و از معادله‌ی $S':z=h$ داریم:

$$d\sigma=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dydx=dydx$$

از برخورد صفحه‌ی $z=h$ با مخروط $x^2+y^2=z^2$ دایره‌ی $x^2+y^2=h^2$ به‌دست می‌آید. پس تصویر S' بر صفحه‌ی xoy دایره‌ی $x^2+y^2=h^2$ است.

ناحیه درون این دایره را با D نشان می‌دهیم:

$$I=\iint_D (x-y)\,dydx$$

می‌توانیم سریع بگوییم حاصل انتگرال به‌دست آمده صفر است. علت صفر بودن این انتگرال آن است که ناحیه‌ی D نسبت به محورهای x و y متقارن است و (x) نسبت به x و (y) نسبت به y فرد است و در نتیجه $I=0$ خواهد بود.

مثال ۱۴: حاصل انتگرال $I=\iint_S \left(\frac{x^2+z^2}{\sqrt{x^2+4y^2+z^2}}\right)d\sigma$ در صورتی که S سطح بیضی‌گون $x^2+2y^2+z^2=1$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$　　۲) $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$　　۳) $\frac{4}{3}\pi$　　۴) $\frac{2}{3}\pi$

پاسخ: گزینه «۲» همان‌طور که می‌بینید با انتگرال سطح یک تابع عددی روبه‌رو هستیم و قطعاً محاسبه‌ی آن سخت و زمان‌بر است! اگر بتوانیم تابع تحت انتگرال را به‌صورت $\vec{F}.\vec{n}$ بنویسیم، چون اتفاقاً سطح هم بسته است، می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم. برای این منظور ابتدا بردار $\vec{n}$ را برای رویه S حساب می‌کنیم:

$$\vec{n}=\frac{(2x)\vec{i}+(4y)\vec{j}+(2z)\vec{k}}{\sqrt{4x^2+16y^2+4z^2}}=\frac{2(x\vec{i}+2y\vec{j}+z\vec{k})}{2\sqrt{x^2+4y^2+z^2}}=\frac{(x)\vec{i}+(2y)\vec{j}+(z)\vec{k}}{\sqrt{x^2+4y^2+z^2}}$$

از طرفی فرض کنید بردار $\vec{F}$ موردنظر به‌صورت $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ در نظر گرفته شود، برای این که $\vec{F}.\vec{n}$ برابر با تابع زیر انتگرال باشد، باید تساوی زیر را داشته باشیم:

$$\frac{(x)P+(2y)Q+(R)z}{\sqrt{x^2+4y^2+z^2}}=\frac{x^2+z^2}{\sqrt{x^2+4y^2+z^2}}\ \Rightarrow xP+(2y)Q+Rz=x^2+z^2$$

واضح است راحت‌ترین انتخاب، $P=x$ ، $Q=0$ و $R=z$ می‌باشد (انتخاب‌های دیگر را هم می‌توانیم داشته باشیم ولی این انتخاب‌ها، راحت‌ترین‌ها هستند!) پس $\vec{F}=x\vec{i}+z\vec{k}$ می‌باشد و چون گفتیم انتگرال داده شده برابر با $I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ می‌باشد و از طرفی سطح هم بسته است، لذا حاصل این انتگرال با استفاده از قضیه دیورژانس به راحتی حساب می‌شود:

$$I=\iiint_V (\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_V (1+0+1)dv=2\iiint_V dv=2\times(V\ \text{حجم ناحیه})$$

از طرفی می‌دانیم حجم بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ برابر با $\frac{4}{3}\pi abc$ است و چون بیضی‌گون داده شده در این سؤال به‌صورت $\frac{x}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=\frac{z^2}{1}=1$ است (یعنی $a=1$ ، $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $b=1$ و $c=1$ است)، پس حجم موردنظر برابر با $\frac{4}{3}\pi\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times1=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ می‌شود و چون I دو برابر این حجم بود، لذا $\mathbf{I=\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi}$.

مثال ۱۵: میدان برداری $\vec{F}=(4x+2x^3z)\vec{i}-y(x^2+z^2)\vec{j}-(3x^2z^2+4y^2z)dz$ از کدام سطح بسته در فضای $\mathbb{R}^3$ بیشترین شار عبوری را دارد؟

۱) $x^2+4y^2+z^2\le16$ ۲) $x^2+2y^2+z^2\le16$ ۳) $x^2+4y^2+z^2\le4$ ۴) $x^2+2y^2+z^2\le4$

پاسخ: گزینه «۳» فرض کنید S سطحی باشد که ناحیه V را محصور کرده است، در این صورت داریم:

$$\text{شار}=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_V(4-x^2-4y^2-z^2)dv$$

برای اینکه انتگرال ماکزیمم شود، توجه کنید که تابع $\operatorname{div}\vec{F}=4-x^2-4y^2-z^2$ درون ناحیه بیضویِ $x^2+4y^2+z^2\le4$ مقدار مثبت؛ روی آن مقدار صفر و در خارج از آن مقدار منفی دارد. بنابراین بزرگترین ناحیه‌ای که $\operatorname{div}\vec{F}$ در آن مقدار نامنفی دارد درون این بیضوی است. انتگرال روی این ناحیه به بیشترین مقدار ممکن می‌رسد.

مثال ۱۶: مقدار $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ که در آن $\vec{F}(x,y,z)=(xy^2,yz^2,zx^2)$ و S کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ بردار قائم یکه خارجی است برابر است با:

(عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{4}{5}\pi a^5$ ۲) $\frac{4}{3}\pi a^5$ ۳) $4\pi a^5$ ۴) $\frac{2}{3}\pi a^5$

پاسخ: گزینه «۱» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F}).dv=\iiint_V\left(\frac{\partial}{\partial x}(xy^2)+\frac{\partial}{\partial y}(yz^2)+\frac{\partial}{\partial z}(zx^2)\right)dv$$

$$=\iiint_V(y^2+z^2+x^2)dv \xrightarrow{\text{مختصات کروی}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\rho^2\times\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\phi\, d\phi\int_0^{a}\rho^4 d\rho=\frac{4}{5}\pi a^5$$

مثال ۱۷: مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ کدام است در صورتی که در آن $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ و S سطح بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ و $\vec{n}$ بردار قائم یکه خارجی است؟

(عمران ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{2}{3}\pi abc$ ۲) $\frac{4}{3}\pi abc$ ۳) $2\pi abc$ ۴) $4\pi abc$

پاسخ: گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_V\left(\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z)\right)dv=\iiint_V 3dv=4(V\ \text{حجم ناحیه})=4(\text{حجم بیضی داده شده})$$

$$I=4\left(\frac{4}{3}\pi abc\right)=4\pi abc$$

مثال ۱۸: اگر $\vec{F}=\vec{i}x+\vec{j}(1-y)+\vec{k}(2z+1)$ و $d\delta$ عنصر برداری مساحت کره Σ به معادله $x^2+y^2+z^2=9$ باشد حاصل $\iint_\Sigma \vec{F}.d\delta$ کدام است؟

(هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) 24π ۲) 36π ۳) 48π ۴) 72π

پاسخ: گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_\Sigma \vec{F}.\vec{n}\delta=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_V\left(\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(1-y)+\frac{\partial}{\partial z}(2z+1)\right)dv=\iiint_V 2dv=2\times\text{حجم کره}=2\times\frac{4}{3}\pi(3)^3=72\pi$$

مثال۱۹: اگر میدان اسکالر $\varphi \neq 0$ دارای خواص $\operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi) = 10\varphi$ و $\|\nabla\varphi\|^2 = 4\varphi$ آنگاه مقدار $\iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}ds$ به طوری که S کره‌ی یکه‌ای به مرکز مبداء مختصات و $\vec{n}$ بردار یکه قائم خارجی آن باشد، کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) 14π ۲) 8π ۳) 6π ۴) 4π

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم منظور از $\frac{\partial\phi}{\partial n}$، مشتق جهتی ϕ در راستای بردار $\vec{n}$ یعنی $\vec{\nabla}\phi.\vec{n}$ می‌باشد. بنابراین برای محاسبه انتگرال مورد‌نظر از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$I = \iint_S \frac{d\phi}{\partial n}ds = \iint_S \vec{\nabla}\phi.\vec{n}ds = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{\nabla}\phi)dv = \iiint_V \nabla^2\phi\, dv$$

از طرفی توجه کنید که داریم:

$$\operatorname{div}(\phi\vec{\nabla}\phi) = \vec{\nabla}\phi.\vec{\nabla}\phi + \phi\operatorname{div}(\vec{\nabla}\phi) = |\vec{\nabla}\phi|^2 + \phi\nabla^2\phi = 4\phi + \phi\nabla^2\phi$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$4\phi + \phi\nabla^2\phi = 10\phi \Rightarrow \phi\nabla^2\phi = 6\phi \Rightarrow \nabla^2\phi = 6$$

در نتیجه داریم:

$$I = \iiint_V 6dv = 6\times \text{حجم کره واحد} = 6\times\frac{4\pi}{3} = 8\pi$$

مثال۲۰: مقدار انتگرال سطح $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ که در آن $\vec{F}(x,y,z) = x^6\vec{i} + y\cos^3 x\vec{j} + 2z\vec{k} = (x^6, y\cos^3 x, 2z)$ و S سطح استوانه $y^2 + 4z^2 \le 4$ ، $-\pi \le x \le \pi$ و $\vec{n}$ بردار یکه خارجی S است، با کدام گزینه برابر می‌باشد؟ (عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) $2\pi^2$ ۲) $4\pi^2$ ۳) $6\pi^2$ ۴) $8\pi^2$

پاسخ: گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_V (\operatorname{div}\vec{F})dv = \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^6) + \frac{\partial}{\partial y}(y\cos^3 x) + \frac{\partial}{\partial z}(2z)\right)dv = \iiint_V (6x^5 + \cos^3 x + 2)dv$$

تابع $6x^5$ فرد است و در بازه‌ی $-\pi \le x \le \pi$ انتگرالش صفر می‌شود. همچنین انتگرال $\cos^3 x$ در این بازه صفر است. در واقع با یک محاسبه‌ی ساده داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^3 x dx = \int_{-\pi}^{\pi}(1-\sin^2 x)\cos x dx = [\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

اما بدون محاسبه‌ی انتگرال هم می‌توانستیم از این نکته استفاده کنیم که انتگرال توان‌های فرد $\sin x$ و $\cos x$ روی یک دوره‌ی تناوب آن‌ها صفر است.

در هر صورت با صفر شدن انتگرال برای $6x^5$ و $\cos^3 x$ خواهیم داشت:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_V 2dv = 2\times(V \text{ حجم})$$

ناحیه V درون استوانه‌ی $y^2 + 4z^2 = 4$ و بین صفحات $x = \pi$ و $x = -\pi$ قرار دارد. معادله‌ی $y^2 + 4z^2 = 4$ نشان می‌دهد که قاعده‌ی این استوانه یک بیضی با شعاع‌های ۲ و ۱ است. (کافیست فرم استاندارد معادله‌ی بیضی را بنویسیم: $\frac{y^2}{4} + z^2 = 1$) بنابراین مساحت قاعده‌ی استوانه برابر است با $2\times1\times\pi = 2\pi$ و امتداد این استوانه از $x = -\pi$ تا $x = \pi$ ادامه دارد یعنی ارتفاع آن 2π است. به این ترتیب حجم آن برابر است با:

$$(V \text{ حجم}) = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = 2\pi\times2\pi = 4\pi^2$$

و در نتیجه داریم: $I = 8\pi^2$.

مثال۲۱: فرض کنید V ناحیه محصور به نیم‌کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ از بالا و صفحه $z = 0$ از پایین و S مرز V باشد. اگر $\vec{n}$ بردار قائم یکه رو به خارج S باشد و $\vec{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{192}{3}\pi$ ۲) $\frac{96}{3}\pi$ ۳) $\frac{96}{5}\pi$ ۴) $\frac{192}{5}\pi$

پاسخ: گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_V (\operatorname{div}\vec{F})dv = \iiint_V (3x^2 + 3y^2 + 3z^2)dv \xlongequal{\text{مختصات کروی}}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 3\rho^2\times\rho^2\sin\phi\, d\rho d\phi d\theta = 3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi\, d\phi\int_0^2\rho^4 d\rho = \frac{192\pi}{5}$$

مثال ۲۲: اگر حجم V به وسیله سطح S محصور شده باشد و $\vec{n}$ بردار یکه عمود بر سطح S و به سمت خارج از جسم باشد، ϕ و ψ توابع عددی تعریف شده در حجم V باشد، $\int_V \phi\nabla^2\psi dv$ برابر است با: (عمران ـ آزاد ۸۲)

۱) $\int_S \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}ds$
۲) $\int_S (\phi\vec{\nabla}\psi).\vec{n}ds$
۳) $\int_S \vec{\nabla}\phi.\vec{\nabla}\psi ds$
۴) $\int_S \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}ds - \int_V \vec{\nabla}\phi.\vec{\nabla}\psi dv$

پاسخ: گزینه «۴» چند توضیح مقدماتی لازم است. در برخی از منابع، همه‌ی انتگرال‌های دوگانه، سه‌گانه، انتگرال روی سطح را به صورت انتگرال یگانه می‌نویسند اما ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را زیر علامت انتگرال مشخص می‌کنند. مثلاً وقتی می‌نویسند $\int_S fd\sigma$ متوجه می‌شویم که انتگرال روی سطح موردنظر بوده است و در واقع منظور همان $\iint_S fd\sigma$ است. یا وقتی می‌نویسند $\int_V fdv$ متوجه می‌شویم که انتگرال روی یک حجم گرفته شده و در واقع منظور، $\iiint_V fdv$ است. توضیح دیگری که لازم است، در مورد $\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}$ است. اگر f یک تابع حقیقی و $\vec{n}$ یک بردار باشد، منظور از $\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}$ همان مشتق سویی f در جهت بردار $\vec{n}$ است. به عبارتی $\frac{\partial f}{\partial\vec{n}} = \frac{\vec{\nabla}f.\vec{n}}{|\vec{n}|}$. حالا اگر $\vec{n}$ یک بردار یکه باشد داریم $|\vec{n}|=1$ پس $\frac{\partial f}{\partial\vec{n}} = \vec{\nabla}f.\vec{n}$.

اکنون به توضیح حل این مثال می‌پردازیم. طبق صورت سؤال ϕ و ψ توابع حقیقی (عددی) هستند و $\vec{n}$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح S است. طبق توضیحات فوق داریم $\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}} = \vec{\nabla}\psi.\vec{n}$. بنابراین داریم:

$$\iint_S \phi\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}ds = \iint_S \phi\vec{\nabla}\psi.\vec{n}ds \qquad (I)$$

$\vec{\nabla}\psi$ یک بردار است. ϕ یک تابع عددی (حقیقی) است پس $\phi\vec{\nabla}\psi$ یک تابع برداری (میدان برداری) است، اگر آن را با $\vec{F}$ نشان دهیم خواهیم داشت:

$$\iint_S \phi\vec{\nabla}\psi.\vec{n}ds = \iint_S \vec{F}.\vec{n}ds \qquad (II)$$

حالا طبق قضیه‌ی دیورژانس داریم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_V (div\vec{F})dv \qquad (III)$$

دیورژانس $\vec{F}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$div\vec{F} = \vec{\nabla}.\vec{F} = \vec{\nabla}.(\phi\vec{\nabla}\psi) = \vec{\nabla}\phi.\vec{\nabla}\psi + \phi\nabla^2\psi$$

با جایگذاری این نتیجه در III و استفاده از همه‌ی روابط I، II و III داریم:

$$\iint_S \phi\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}ds = \iiint_V \vec{\nabla}\phi.\vec{\nabla}\psi dv + \iiint_V \phi\nabla^2\psi dv$$

حالا اگر از نمادهای استفاده شده در صورت سؤال استفاده کنیم داریم:

$$\int_V \phi\nabla^2\psi dv = \int_S \phi\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}ds - \int_V \vec{\nabla}\phi.\vec{\nabla}\psi dv$$

مثال ۲۳: مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ که در آن S سطح بسته محدود به نیم‌کره $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ از بالا و صفحه $z=0$ از پایین است و $\vec{n}$ بردار قائم یکه خارجی S است و $\vec{F}(x,y,z)=(xz^2, x^2y-z^3, 2xy+y^2z)$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۳)

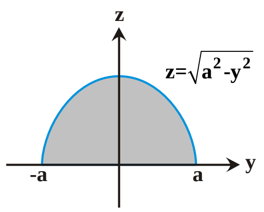
۱) $\frac{2\pi a^5}{3}$
۲) $\frac{4\pi a^5}{3}$
۳) $\frac{4\pi a^5}{5}$
۴) $\frac{2\pi a^5}{5}$

پاسخ: گزینه «۴» سطح S بسته است بنابراین از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\vec{F}=(xz^2, x^2y-z^3, 2xy+y^2z) \Rightarrow div\vec{F} = z^2+x^2+y^2$$

فرض کنیم V ناحیه‌ی درون S باشد، خواهیم داشت:

$$I = \iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_V (div\vec{F})dv = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)dv$$



ناحیه‌ی V درون نیم‌کره‌ی $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ و $z\ge 0$ است. در مختصات کروی داریم $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le\rho\le a$ و $0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$. اگر حدود ϕ را برای نیم‌کره‌ی بالایی به خاطر ندارید. کافیست در معادلات رویه ها $x=0$ قرار دهیم و تصویر این ناحیه را در صفحه yoz پیدا کنیم. ناحیه‌ی درون نیم‌دایره‌ی $z=\sqrt{a^2-y^2}$ به‌دست می‌آید. روی محور z ها داریم $\phi=0$ و با حرکت به سمت راست روی محور y ها داریم $\phi=\frac{\pi}{2}$. بنابراین $0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$ است.

$$I = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \rho^2\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta = (\int_0^{2\pi}d\theta)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi d\phi)(\int_0^a \rho^4 d\rho)$$

$$= [\theta]_0^{2\pi}\times[-\cos\phi]_0^{\frac{\pi}{2}}\times[\frac{\rho^5}{5}]_0^a = (2\pi)(1)(\frac{a^5}{5}) = \frac{2\pi a^5}{5}$$

مثال ۲۴: اگر $\vec{F}(x,y,z)=(a^2x,y,c^2z)$ و S کره $x^2+y^2+z^2=1$ و $\vec{n}$ قائم یکه رو به خارج کره باشد، آنگاه مقدار $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ برابر است با:

(عمران ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{4}{3}\pi$ ۲) $4\pi(a+1+c^2)$ ۳) (a^2+1+c^2) ۴) $\frac{4\pi}{3}(a^2+1+c^2)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_V(a^2+1+c^2)dv=(a^2+1+c^2)\times(\text{حجم کره})=\frac{4\pi}{3}(a^2+1+c^2)$$

مثال ۲۵: اگر G جسمی باشد که از بالا با نیم‌کره‌ی $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ و از پایین با صفحه‌ی $z=0$ محصور شده باشد، مقدار انتگرال دوگانه $I=\iint_\sigma \vec{F}.\vec{n}d\sigma$، که در آن $\vec{F}(x,y,z)=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$ و σ سطح G و $\vec{n}$ بردار یکه عمود بر این سطح به سمت خارج می‌باشد، برابر است با:

(مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $I=\frac{2\pi}{3}$ ۲) $I=\frac{4\pi}{5}$ ۳) $I=\frac{3\pi}{8}$ ۴) $I=\frac{6\pi}{5}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به آن‌که G از بالا به نیم‌کره و از پایین به صفحه‌ی $z=0$ محدود می‌شود، بنابراین سطح آن یعنی σ یک سطح بسته است. می‌توانیم از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کنیم. پس از محاسبه‌ی دیورژانس $\vec{F}$، برای حل انتگرال سه‌گانه، روی نیم‌کره‌ی بالایی بهتر است از مختصات کروی استفاده کنیم. می‌دانیم که در نیم‌کره‌ی بالایی $0\le\theta\le2\pi$ و $0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$ است و چون شعاع نیم‌کره یک است داریم: $0\le\rho\le1$.

$$I=\iint_\sigma \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_V(3x^2+3y^2+3z^2)dv=3\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\rho^2\times\rho^2\sin\phi\, d\rho d\phi d\theta=\frac{6\pi}{5}$$

مثال ۲۶: بردار $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(z+x)\vec{k}$ و S سطح ناحیه D محدود به $|x|\le1$ و $|y|\le1$، $|z|\le1$ است. حاصل $\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ کدام است؟

(MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_V 3dv=3\times(\text{حجم ناحیه } D)=3\times(\text{مکعب مربعی به ضلع ۲})=3\times2\times2\times2=24$$

مثال ۲۷: Q متوازی‌السطوح محدود به صفحات مختصات و صفحات به معادله‌های $x=1$، $y=2$ و $z=3$ است. اگر $\vec{F}(x,y,z)=-x^2\vec{i}+xy^2\vec{j}+z^3\vec{k}$، شار $\vec{F}$ بر سطح S از متوازی‌السطوح Q کدام است؟

(ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) ۹ ۲) ۲۷ ۳) ۳۵ ۴) ۵۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_Q(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_Q(-2x+2xy+3z^2)dv=\int_0^3\int_0^2\int_0^1(-2x+2xy+3z^2)dxdydz$$

$$=\int_0^3\int_0^2(-1+y+3z^2)dydz=\int_0^3 6z^2dz=54$$

مثال ۲۸: اگر $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}-2y\vec{j}+4z\vec{k}=(x,-2y,4z)$ و S کره $x^2+y^2+z^2=a^2$، $a>0$ باشد، مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ که در آن $\vec{n}$ بردار قائم یکه خارجی S است، برابر با چیست؟

(عمران ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{4}{3}\pi a^3$ ۲) $2\pi a^3$ ۳) $3\pi a^3$ ۴) $4\pi a^3$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\vec{F}=x\vec{i}-2y\vec{j}+4z\vec{k}\Rightarrow \operatorname{div}\vec{F}=1-2+4=3$$

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_V 3dv=3\times(\text{حجم کره})=4\pi a^3$$

مثال ۲۹: اگر $F(x,y,z)=(x^2+y^2, y^2-z^2, z)$ و S کره $x^2+y^2+z^2=a^2$، $a>0$ باشد، مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ که در آن $\vec{n}$ بردار یکه قائم خارجی S است، برابر با چیست؟ (عمران، نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۵)

۱) πa^3 ۲) $\frac{2}{3}\pi a^3$ ۳) $\frac{4}{3}\pi a^3$ ۴) $\frac{8}{3}\pi a^3$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_V(\text{div}\vec{F})dv=\iiint_V(2x+2y+1)dv$$

چون توابع $2x$ و $2y$ توابع فرد هستند و ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به x و y متقارن است، لذا $\iiint_V 2xdv=0$ و $\iiint_V 2ydv=0$. بنابراین داریم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_V dv=\text{حجم کره‌ای به شعاع } a=\frac{4}{3}\pi a^3$$

مثال ۳۰: اگر S پوسته جسم توپر W در فضای سه بعدی و $\vec{n}$ بردار نرمال یکه خارجی بر S و V نیز حجم W باشد، آنگاه: (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $V=\frac{1}{3}\iint_S(x+y+z)ds$ ۲) $V=\frac{2}{3}\iint_S(x,y,z).ds$ ۳) $V=\frac{1}{3}\iint_S(x,y,z).nds$ ۴) $V=\frac{2}{3}\iint_S(x,y,z).nds$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به قضیه دیورژانس داریم:

$$\frac{1}{3}\iint_S(x,y,z).\vec{n}ds=\frac{1}{3}\iiint_W \text{div}(x,y,z)dv=\frac{1}{3}\iiint_W(1+1+1)dv=\text{حجم ناحیه } w=V$$

مثال ۳۱: اگر $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(z+x)\vec{k}$ و Σ سطحی باشد که ناحیه D با مشخصات $0\le x^2+y^2\le 9$ و $0\le z\le 5$ را محصور کرده است، حاصل $\iint_\Sigma \vec{F}.d\sigma$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۵)

۱) 45π ۲) 75π ۳) 90π ۴) 135π

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا یک توضیح در مورد نمادهای به کار رفته در این مسأله ضروری است. در برخی از منابع $\vec{n}ds$ را به صورت $d\sigma$ خلاصه‌نویسی می‌کنند یعنی منظور از انتگرال $\iint_S \vec{F}.d\sigma$ همان انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ است. هر چند این علامت، مرسوم نیست اما اگر در مسأله‌ای با $\vec{F}.d\sigma$ روبرو شدید منظور همان $\vec{F}.\vec{n}ds$ است. در این مثال سطح Σ بسته است پس از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_\Sigma \vec{F}.d\sigma=\iiint_D(\text{div}\vec{F})dv=\iiint_D(1+1+1)dv=3(\text{حجم } D)$$

برای محاسبه‌ی حجم D توجه کنید که ناحیه‌ی D با مشخصات $0\le x^2+y^2\le 9$ و $0\le z\le 5$ معلوم شده است. $x^2+y^2=9$ یک دایره به شعاع ۳ است. مساحت آن 9π است. نامساوی $0\le z\le 5$ نشان می‌دهد که ارتفاع D برابر با ۵ است. پس حجم D که یک استوانه با قاعده‌ی دایروی است چنین به‌دست می‌آید:

$$(\text{حجم } D)=\text{ارتفاع}\times\text{مساحت قاعده}=9\pi\times 5=45\pi$$

در نتیجه داریم:

$$I=3\times 45\pi=135\pi$$

مثال ۳۲: اگر $\vec{F}(x,y,z)=(\frac{x^3}{3},\frac{2y^3}{3},\frac{z^3}{3})$ و S رویه بیضی‌وار $x^2+2y^2+z^2=1$ باشد مقدار انتگرال سطح (رویه‌ای) $\oiint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ برابر است با ($\vec{n}$ قائم یکه برون‌سو بر رویه S و $d\sigma$ جزء مساحت رویه است.) (معدن ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{4\pi}{5}$ ۲) $\frac{4\pi}{3}$ ۳) $\frac{4\pi}{3\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{4\pi}{5\sqrt{2}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V(\text{div}\vec{F})dv=\iiint_V(x^2+2y^2+z^2)dv$$

چون ناحیه انتگرال‌گیری، بیضی‌گون $x^2+\frac{y}{(1/\sqrt{2})^2}+z^2=1$ می‌باشد. از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$x=\rho\sin\phi\cos\theta\,,\ y=\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sin\phi\sin\theta\,,\ z=\rho\cos\phi\ \Rightarrow J=\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^2\sin\phi$$

در این صورت داریم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}\rho^2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}d\theta.\int_0^{\pi}\sin\phi.\int_0^1\rho^4d\rho=\frac{4\pi}{5\sqrt{2}}$$

مثال ۳۳: حاصل $\iint_S xz^2dydz+(x^2y-z)dxdz+(xy+y^2z)dxdy$ که در آن S سطح نیم‌کره به معادله $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ و صفحه $z=0$ می‌باشد، چند برابر a^5 است؟ (MBA ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{2\pi}{5}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\vec F=(xz^2,x^2y-z,xy+y^2z)\Rightarrow \operatorname{div}\vec F=z^2+x^2+y^2$$

$$\Rightarrow \text{شار}=\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dv\xlongequal{\text{مختصات کروی}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a\rho^2\times\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi d\phi\int_0^a\rho^4d\rho=\frac{2\pi}{5}a^5$$

مثال ۳۴: اگر Σ کره‌ی $x^2+y^2+z^2=2$ و $F(x,y,z)=2x\vec i+2y\vec j+2z\vec k$، مقدار $A=\iint_\Sigma \vec F.\vec n ds$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $4\sqrt{2}\pi$ ۲) $8\sqrt{2}\pi$ ۳) $16\sqrt{2}\pi$ ۴) $32\sqrt{2}\pi$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$A=\iint_\Sigma \vec F.\vec n ds=\iiint(\operatorname{div}\vec F)dv=\iiint(2+2+2)dv=6\times(\text{حجم کره }\Sigma)=6\times\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt2)^3=16\sqrt2\pi$$

مثال ۳۵: مقدار انتگرال روی سطح $\iint_S(x^2+y^2)ds$ که در آن S کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ می‌باشد، برابر با چیست؟ (راهنمایی: از قضیه دیورژانس استفاده کنید.) (عمران ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{8}{3}\pi a^4$ ۲) $\frac{4}{3}\pi a^4$ ۳) $\frac{8}{3}\pi a^3$ ۴) $\frac{4}{3}\pi a^3$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به راهنمایی گفته شده در مسأله از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم. بردار قائم بر کره داده شده $\vec n=(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a})$ است حال تابع $\vec F$ را طوری انتخاب می‌کنیم که حاصل $\vec F.\vec n$ برابر x^2+y^2 شود بدین منظور $\vec F$ را برابر $\vec F(x,y,z)=(ax,ay,0)$ در نظر می‌گیریم. در اینصورت طبق قضیه دیورژانس داریم:

$$\iint_S(x^2+y^2)ds=\iint_S\vec F.\vec n ds\xlongequal{\text{قضیه دیورژانس}}\iiint_V(\operatorname{div}\vec F)dv=\iiint_V(a+a)dv=2a\times\text{حجم کره به شعاع }a=\frac{8\pi}{3}a^4$$

مثال ۳۶: فرض کنید $\vec F=ax\vec i+by\vec j+cz\vec k$ و S رویه بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ و $\vec n$ بردار یکه قائم بر بیضی‌گون S و رو به خارج باشد. مقدار انتگرال رویه‌ای $(a>0,b>0,c>0)$ ، $\iint_S(\vec F.\vec n)d\sigma$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $\pi a^2b^2c^2$ ۲) $\frac{4}{3}\pi a^2b^2c^2$ ۳) $\pi abc(a+b+c)$ ۴) $\frac{4}{3}\pi abc(a+b+c)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$\operatorname{div}\vec F=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}=a+b+c\Rightarrow\iint_S(\vec F.\vec n)d\sigma=\iiint_V(\operatorname{div}\vec F)dv=(a+b+c)\times\text{حجم بیضی‌گون}=\frac{4}{3}\pi abc(a+b+c)$$

مثال ۳۷: مقدار انتگرال $\iint_S\vec F.\vec n ds$ که در آن $\vec F(x,y,z)=(xz^2,yx^2,zy^2)=xz^2\vec i+yx^2\vec j+zy^2\vec k$, S سطح بسته محدود به نیم‌کره $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ و صفحه $z=0$ است (شار برون‌سوی $\vec F$ روی S) برابر است با: (عمران ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{2}{3}\pi a^5$ ۲) $\frac{2}{5}\pi a^5$ ۳) $\frac{2}{3}\pi a^3$ ۴) $\frac{2}{5}\pi a^3$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از قضیه دیورژانس کمک می‌گیریم:

$$\iint_S\vec F.\vec n ds=\iiint_V(\operatorname{div}\vec F)dv=\iiint(x^2+y^2+z^2)\,dv\xlongequal{\text{مختصات کروی}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a\rho^2\times\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\frac{2\pi}{5}a^5$$

همان‌طور که می‌بینید این سؤال با تغییر در تابع $\vec F$ در سال‌های ۸۳ برای رشته عمران و در سال ۸۶ برای رشته MBA سؤال بوده است!!

مثال ۳۸: فرض کنید S رویه بسته متشکل از کره $x^2+y^2+z^2=4$ در یک هشتم اول فضا و صفحات مختصات باشد. اگر $\vec{n}$ بردار یکه قائم بر رویه رو به خارج و $\vec{F}=x^2\vec{i}-2xy\vec{j}+3z\vec{k}$ باشد، مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۷)

۱) 2π ۲) 6π ۳) 4π ۴) 8π

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به قضیه دیورژانس داریم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}\sigma=\iiint_V(\mathrm{div}\vec{F})dv=\iiint_V 3dv=3\times(\text{حجم کره به شعاع } 2)=3\times\frac{4}{3}\pi\times 2^3=32\pi$$

با توجه به اینکه انتگرال مورد نظر فقط در یک هشتم اول فضا موردنظر است پس جواب انتگرال موردنظر $\frac{1}{8}$ مقدار بدست آمده یعنی 4π است.

مثال ۳۹: شار برون‌سوی میدان برداری $\vec{F}=z\vec{i}+3y\vec{j}+x\vec{k}$ از کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۷)

۱) π ۲) 2π ۳) 3π ۴) 4π

پاسخ: گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$\text{شار}=\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_V(\mathrm{div}\vec{F})dv=\iiint_V 3dv=3\times(\text{حجم کره‌ای به شعاع } 1)=4\pi$$

مثال ۴۰: حاصل $\iint_S (x+y^2z)dxdy+(xz^2+y)dydz+(x^2y-1)dxdz$ که در آن S سطح نیم‌کره به معادله $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ و صفحه $z=0$ می‌باشد، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{32\pi}{3}$ ۲) $\frac{64\pi}{3}$ ۳) $\frac{32\pi}{5}$ ۴) $\frac{64\pi}{5}$

پاسخ: گزینه «۴» چون S یک سطح بسته است پس می‌توانیم از قضیه دیورژانس برای محاسبه انتگرال استفاده کنیم.

$$\vec{F}=(xz^2+y,x^2y-1,x+y^2z)\ \Rightarrow \mathrm{div}\vec{F}=z^2+x^2+y^2$$

$$\Rightarrow I=\iint_S(xz^2+y)dydx+(x^2y-1)dxdz+(x+y^2z)dxdy=\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dv$$

از آن‌جا که ناحیه‌ی V درون نیم‌کره‌ی بالایی است، بهتر است از مختصات کروی استفاده کنیم. در نیم‌کره‌ی بالایی می‌دانیم که $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$ است. شعاع این نیم‌کره برابر با ۲ است در نتیجه داریم $0\le\rho\le 2$. همان‌طور که می‌دانید $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ و ژاکوبی دستگاه کروی هم $\rho^2\sin\phi$ است. در ضمن چون حدود انتگرال، اعداد ثابتی هستند می‌توانیم آن را به صورت حاصل‌ضرب انتگرال‌های یگانه بنویسیم:

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2\rho^4\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi d\phi\times\int_0^2\rho^4 d\rho=\frac{64\pi}{5}$$

مثال ۴۱: فرض کنید D ناحیه $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ و $\vec{F}=\alpha x^3\vec{i}+\beta y^3\vec{j}+\gamma z^3\vec{k}$ باشند، به طوری که $\alpha a^2=\beta b^2=\gamma c^2=1$. در این صورت اگر شار برون‌سوی میدان $\vec{F}$ از مرز ناحیه D برابر φ باشد، آن‌گاه: (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) به ازای یک مقدار مناسب K که مستقل از $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ است، داریم $\varphi=K\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}$

۲) به ازای یک مقدار مناسب K که مستقل از $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ است، داریم $\varphi=k\pi$

۳) به ازای یک مقدار مناسب K که مستقل از α,β,γ است، داریم $\varphi=K\alpha\beta\gamma$

۴) به ازای یک مقدار مناسب K که مستقل از a,b,c است، داریم $\varphi=Kabc$

پاسخ: گزینه «۴» شار برون‌سوی میدان $\vec{F}$ از مرز ناحیه D برابر $\iint_D \vec{F}.\vec{n}ds$ می‌باشد، که با توجه به شرایط مسأله می‌توانیم برای محاسبه آن از قضیه دیورژانس استفاده کنیم.

$$\mathrm{div}\vec{F}=3\alpha x^2+3\beta y^2+3\gamma z^2=3(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})$$

$$I=\iint_D \vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_V 3(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})dv$$

انتگرال فوق با استفاده از تغییر مختصات $x=a\rho\sin\phi\cos\theta$ و $y=b\rho\sin\phi\sin\theta,z=c\rho\cos\phi$ و $J=abc\rho^2\sin\phi$ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 3\rho^2\times abc\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\phi d\phi\int_0^1 3\rho^4 d\rho=\frac{12\pi}{5}abc$$

مثال ۴۲: مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ که در آن S رویه‌ای هموار و بسته با بردار قائم یکانی خارجی $\vec{n}$ و محدودکننده‌ی ناحیه‌ای به حجم ۳ واحد مکعب، و $\vec{F}(x,y,z)=(3x+e^{3y})\vec{i}+(e^{4z}-4y)\vec{j}+(5z+e^{5y})\vec{k}$ باشد، برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

پاسخ: گزینه «۳» چون سطح S بسته و هموار است می‌توانیم برای محاسبه انتگرال موردنظر از قضیه دیورژانس استفاده کنیم.

$$\vec{F}=(3x+e^{3y},e^{4z}-4y,5z+e^{5y})\Rightarrow \iint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_V 4dv=4\times(\text{حجم ناحیه})=4\times 3=12$$

مثال ۴۳: با استفاده از قضیه دیورژانس، مقدار انتگرال رویه‌ای $\iint_S (x^2+y^2+z^2)ds$ که در آن S کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ می‌باشد، کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۸)

۱) $2\pi a^4$ ۲) $4\pi a^4$ ۳) $\frac{4}{3}\pi a^4$ ۴) $\frac{8}{3}\pi a^4$

پاسخ: گزینه «۲» طبق راهنمایی صورت مسأله از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم. با توجه به صورت مسأله باید $\vec{F}.\vec{n}=x^2+y^2+z^2$ باشد، از طرفی چون S کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ می‌باشد، پس $\vec{n}=(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a})$ خواهد بود و در نتیجه $\vec{F}=(ax,ay,az)$ می‌باشد. حال طبق قضیه دیورژانس داریم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_{x^2+y^2+z^2=a^2}(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_{\text{درون کره}}3adv=3a\times(\text{حجم کره‌ای به ارتفاع } a)=4\pi a^4$$

مثال ۴۴: فرض کنید D ناحیه داخل نیم‌کره فوقانی به شعاع ۲، $(x^2+y^2+z^2\le 4\,,\,z\ge 0)$ و S سطح بسته محصورکننده ناحیه D باشد. اگر $\vec{F}=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$، در این صورت مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{192}{5}\pi$ ۲) 16π ۳) 38π ۴) $\frac{68}{3}\pi$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به شرایط مسأله، می‌توان از قضیه دیورژانس استفاده کرد. $I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_D 3(x^2+y^2+z^2)dv$

برای محاسبه انتگرال بالا مختصات کروی مناسب می‌باشد، در نیم‌کره‌ی بالایی داریم $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$ و چون شعاع نیم‌کره ۲ است داریم $0\le\rho\le 2$.

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2}3\rho^2\times\rho^2\sin\phi\, d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi\, d\phi\int_0^{2}3\rho^4d\rho=(2\pi)\times(1)\times(\frac{96}{5})=\frac{192\pi}{5}$$

مثال ۴۵: فرض کنید D ناحیه توپر محصور به استوانه $x^2+z^2=1$ و صفحات $y=1$ و $y=-1$ باشد و رویه S مرز ناحیه D باشد، همچنین فرض کنید $\vec{F}=(x+\cos yz)i+(2y-\sin xz)j+(x^2+1)e^{y^2}k$. اگر $\vec{n}$ بردار یکه قائم بر S و رو به خارج ناحیه D باشد، مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۸۹)

۱) 6π ۲) 4π ۳) 3π ۴) 2π

پاسخ: گزینه «۱» چون سطح موردنظر بسته است، پس می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم.

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_V(\frac{\partial}{\partial x}(x+\cos yz)+\frac{\partial}{\partial y}(2y-\sin xz)+\frac{\partial}{\partial z}((x^2+1)e^{y^2}))dv$$

$$=\iiint_V(2+2+0)dv=3\iiint_V dv=3\times(\text{حجم استوانه})=3\times 2\pi=6\pi$$

در قسمت نهایی حجم استوانه را حساب کردیم. حجم استوانه برابر مساحت قاعده در ارتفاع استوانه است. قاعده استوانه داده شده دایره‌ای به شعاع ۱ می‌باشد، پس مساحت قاعده π و ارتفاع آن ۲ می‌باشد پس حجم استوانه 2π خواهد بود.

مثال ۴۶: فرض کنیم Γ رویه محصور کننده ناحیه Ω باشد که توسط صفحات $z=0$, $y=0$ و $y=e$ و استوانه $z=1-x^2$ محصور شده، اگر میدان برداری $\vec{F}=(x+\cos y)\vec{i}+(y+\cosh z)\vec{j}+(z+e^{-x^2})\vec{k}$ آنگاه مقدار $\iint_\Gamma(\vec{F}.\vec{n})d\sigma$ کدام است؟ ($\vec{n}$ قائم یکه برون‌سو بر Γ و $d\sigma$ جزء مساحت رویه است)

(مکانیک ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{e}{3}$ ۲) $\frac{e}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}(e-1)$ ۴) $4e$

پاسخ: گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم و داریم:
$$I=\iint_\Gamma \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv$$

ابتدا دیورژانس تابع $F(x,y,z)$ را محاسبه می‌کنیم. بنابراین داریم:
$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial(x+\cos y)}{\partial x}+\frac{\partial(y+\cosh z)}{\partial y}+\frac{\partial(z+e^{-x^2})}{\partial z}=1+1+1=3\ \Rightarrow I=\iiint_V 3dv\Rightarrow\ 3\int_0^e\int_{-1}^1\int_0^{1-x^2}dzdxdy$$
$$=6\int_0^e\int_0^1\int_0^{1-x^2}dzdxdy=6\int_0^e\int_0^1(1-x^2)dxdy=6\int_0^e(x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^1dy=6\int_0^e\frac{2}{3}dy=6\times\frac{2}{3}y\Big|_0^e=4e$$

مثال ۴۷: اگر $I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ که در آن S سطح جانبی استوانه‌ی قائم محصور به رویه‌های $x^2+y^2=9$ ، $z=-2$ و $z=2$ است و $\vec{F}(x,y,z)=(y^2+z^2+x)\vec{i}+(x^2+z^2+y)\vec{j}+(x^2+y^2+z)\vec{k}$ در این صورت مقدار I کدام است؟

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۰)

۱) 36π ۲) 54π ۳) 72π ۴) 108π

پاسخ: گزینه «۴» طبق قضیه دیورژانس داریم:
$$\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv$$

ابتدا دیورژانس تابع برداری $\vec{F}$ را محاسبه می‌کنیم:
$$\operatorname{div}\vec{F}=1+1+1=3\ \Rightarrow\ \iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma\iiint_V 3dv=3\iiint_V dv$$

با توجه به ناحیه محصور از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم، بنابراین داریم:
$$I=3\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{-2}^2 rdzdrd\theta=12(\int_0^{2\pi}d\theta)(\int_0^3 rdr)=12\times2\pi\times\frac{9}{2}=108\pi$$

مثال ۴۸: D ناحیه بین دو کره $\rho=1$ و $\rho=4$ است و $\vec{F}(x,y,z)=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{x^2+y^2+z^2}$، شار برون‌سوی $\vec{F}$ گذرنده از مرز ناحیه D با کدام مقدار زیر برابر است؟

(مواد ـ سراسری ۹۰)

۱) 0 ۲) 4π ۳) 8π ۴) 12π

پاسخ: گزینه «۴» طبق صورت سؤال فرض کنیم D ناحیه‌ی بین دو کره باشد. سطح این ناحیه را با S نشان می‌دهیم. برای محاسبه شار برون‌سوی $\vec{F}$ گذرنده از سطح S از رابطه $\iint_S\vec{F}.\vec{n}ds$ استفاده می‌کنیم. سطح S بسته است بنابراین از قضیه‌ی دیورژانس استفاده می‌کنیم:

برای حل انتگرال فوق طبق قضیه دیورژانس عمل می‌کنیم:
$$\iint_S\vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv$$

ابتدا $\operatorname{div}\vec{F}$ را محاسبه می‌کنیم.
$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2-y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{\rho^2}$$

با جایگذاری $\operatorname{div}\vec{F}$ در رابطه بالا و استفاده از مختصات کروی، انتگرال را حل می‌کنیم. در ناحیه‌ی بین دو کره داریم $1\le\rho\le4$ ، $0\le\phi\le\pi$ و $0\le\theta\le2\pi$:
$$\text{شار}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^4\frac{1}{\rho^2}\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=(\int_0^{2\pi}d\theta)(\int_0^{\pi}\sin\phi d\phi)(\int_1^4 d\rho)=(2\pi)(2)(3)=12\pi$$

مثال ۴۹: فرض کنید $\vec{F}(x,y,z)=(2xz+tg^{-1}(yz))\vec{i}+(2y-e^{\sin z})\vec{j}+\frac{1}{x^2+y^2+1}\vec{k}$ و R ناحیه‌ی محدود به صفحه‌های $z=0$ و $z=2$ و استوانه‌ی $x^2+y^2=4$ است. سطح S را مرز R تعریف می‌کنیم و در ضمن فرض کنیم سطح S با نرمال رو به خارج جهت‌دار شده است. شار $\vec{F}$ در امتداد S کدام است؟

(آمار ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{32\pi}$ ۲) $\frac{1}{\pi}$ ۳) π ۴) 32π

پاسخ: گزینه «۴» سطح S بسته است و ناحیه‌ی درون آن یعنی R به صفحات $z=0$ ، $z=2$ و استوانه‌ی $x^2+y^2=4$ محدود شده است. از قضیه‌ی دیورژانس استفاده می‌کنیم:
$$\text{شار } \vec{F} \text{ در امتداد } S=I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_R(\operatorname{div}\vec{F})dv$$

با توجه به معادله‌ی $\vec{F}$ داریم:
$$\operatorname{div}\vec{F}=2z+2+0=2(z+1)$$

در ناحیه‌ی R بهتر است از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم، به وضوح $0\le z\le2$ است و با توجه به معادله‌ی $x^2+y^2=4$ داریم $0\le r\le2$ و $0\le\theta\le2\pi$.
$$I=\iiint_R 2(z+1)dv=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^2 2(z+1)rdzdrd\theta=2\int_0^{2\pi}\int_0^2 r[\frac{z^2}{2}+z]_0^2drd\theta=2\int_0^{2\pi}\int_0^2 4rdrd\theta=2\int_0^{2\pi}[2r^2]_0^2d\theta=16\times2\pi=32\pi$$

درسنامه۳: قضیه استوکس

مثال۱: اگر C خم با معادله‌ی پارامتری $\vec{r}(t)=(\sin t)\vec{i}+(\cos t)\vec{j}+(\sin 2t)\vec{k}$ برای $0\le t\le 2\pi$ باشد. آن‌گاه حاصل انتگرال $I=\int_C (y+\sin x)dx+(z^2\cos y)dy+z^3dz$ کدام است؟

۱) 2π ۲) -2π ۳) π ۴) $-\pi$

پاسخ: گزینه «۳» اگر به معادلات پارامتری خم C دقت شود. با توجه به اتحاد $\sin 2t=2\sin t\cos t$ داریم:

$$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))=(\sin t,\cos t,2\sin t\cos t)\ ,\ x=\sin t\ ,\ y=\cos t\ ,\ z=2\sin t\cos t$$

و این یعنی روی خم C داریم $z=2xy$، همچنین چون $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ پس رابطه‌ی $x^2+y^2=1$ را نیز داریم. در واقع خم C مرز بخشی از سطح $S:z=2xy$ است که درون استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ قرار دارد. با استفاده از قضیه‌ی استوکس برای میدان برداری $\vec{F}=(y+\sin x,z^2\cos y,z^3)$ می‌توان انتگرال روی مرز را به انتگرال روی سطح S تبدیل کرد. ابتدا $\text{curl}\vec{F}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y+\sin x & z^2\cos y & z^3\end{vmatrix}=(-2z\cos y)\vec{i}-\vec{k}$$

حالا $\vec{n}d\sigma$ را برای رویه‌ی پارامتری $g:z-2xy=0$، تعیین می‌کنیم، دقت کنید $\vec{p}=\vec{k}$ و لذا $|\vec{\nabla}g.\vec{p}|=1$، پس داریم:

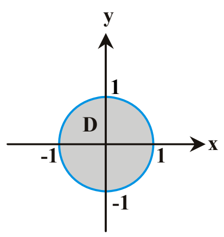
$$\vec{n}d\sigma=\pm\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{p}|}dA=\pm(\frac{-2y\vec{i}-2x\vec{j}+\vec{k}}{1})dA$$

لحظه‌ی حساس پاسخ به این سؤال، اینجاست! کدام علامت؟ مثبت یا منفی؟ اگر فکر کنیم چون طراح چیزی نگفته پس حتماً در جهت مثلثاتی روی مرز دایره $x^2+y^2=1$ حرکت کرده‌ایم، خیلی اشتباه کرده‌ایم!! چرا که معادله‌ی این دایره به‌صورت $\vec{C}(t)=\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}$ شده، یعنی جای $\sin t$ و $\cos t$ عوض شده و این یعنی دایره در جهت خلاف مثلثاتی طی شده است، پس قائم رو به خارج به سمت پایین است و این یعنی باید ضریب $\vec{k}$ منفی شود و بنابراین علامت منفی را انتخاب می‌کنیم، پس داریم:

$$\vec{n}d\sigma=(2y\vec{i}+2x\vec{j}-\vec{k})dA$$

که به راحتی $\text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ برابر با $(-4y\cos y+1)dA$ به‌دست می‌آید.

$$I=\iint_S \text{curl}\,\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_D(-4yz\cos y+1)\,dydx=\iint_D(-8xy^2\cos y+1)dydx$$



ناحیه‌ی D تصویر S بر صفحه‌ی xoy است و توسط استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ مشخص می‌شود، در واقع D دایره واحد در صفحه xoy است.

همان‌طور که می‌بینید ناحیه‌ی D نسبت به محورهای مختصات متقارن است و از طرفی عبارت $xy^2\cos y$ نسبت به x فرد است. بنابراین حاصل انتگرال این عبارت بر ناحیه‌ی D، صفر می‌شود، پس می‌توان نوشت:

$$I=\iint_D dydx=(D\ \text{مساحت})=\pi$$

مثال۲: فرض کنید S بخشی از صفحه‌ی $z=2$ باشد که درون استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ قرار دارد. اگر $\vec{n}$ بردار قائم یکه S (رو به بالا) باشد، در صورتی که $\vec{F}=-y\vec{i}+x\cos(1-x^2-y^2)\vec{j}+(yz)\vec{k}$، آن‌گاه حاصل $I=\iint_S \text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) 3π ۴) 4π

پاسخ: گزینه «۲» فرض کنید S سطح دلخواهی با بردار یکه رو به بالا با مرزهای $x^2+y^2=1$ و $z=2$ باشد. دنبال محاسبه‌ی انتگرال I هستیم که با توجه به وجود $\text{curl}\vec{F}.\vec{n}$، متوجه می‌شویم سمت راست قضیه استوکس از ما خواسته شده است، می‌توانیم به جای آن انتگرال خط $I=\oint_C \vec{F}.d\vec{r}$ را حساب کنیم که راحت‌تر است. دقت کنید که فرم پارامتری منحنی C را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$x=\cos t\ ,\ y=\sin t\ ,\ z=2\ \Rightarrow \vec{C}(t)=(\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}+2\vec{k}\ ,\quad 0\le t\le 2\pi$$

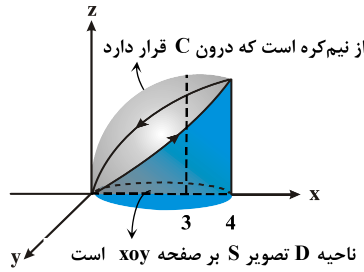
و لذا $\vec{C}'(t)=(-\sin t)\vec{i}+\cos t\vec{j}$ و می‌دانیم انتگرال $\oint_C \vec{F}.d\vec{r}$ برابر با $I=\int_0^{2\pi}\vec{F}[\vec{C}(t)]C'(t)dt$ است. پس با جایگذاری داریم:

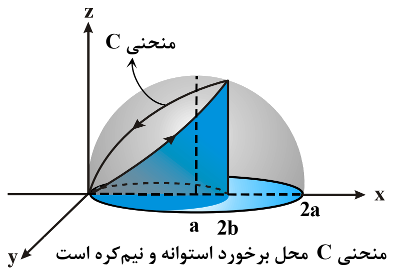
$$I=\int_0^{2\pi}[(-\sin t)\vec{i}+(\cos t)\vec{j}+(2\sin t)\vec{k}][(-\sin t)\vec{i}+(\cos t)\vec{j}]dt=\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)dt=\int_0^{2\pi}(1)dt=2\pi$$

مثال ۳ (سخت): اگر C مرز فصل مشترک نیم کره $x^2+y^2+z^2=2ax$ $(z>0)$ با استوانه $x^2+y^2=2bx$ باشد، $(2b>a>b>0)$ آن‌گاه حاصل $I=\int_C (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz$ کدام است؟ (از سؤالات ریاضی عمومی (۲) در دانشگاه‌های روسیه)

۱) $4\pi ab^2$ ۲) $\pi a^2 b$ ۳) $2\pi a^2 b$ ۴) $2\pi ab^2$

پاسخ: گزینه «۴» منحنی C را در شکل زیر نشان داده‌ایم. فرض کنیم سطح S بخشی از نیم‌کره‌ی $x^2+y^2+z^2=2ax$ $(z\ge 0)$ باشد که C مرز آن است. انتگرال خط را می‌توان از هر دو روش محاسبه کرد ولی بهتر است. از قضیه‌ی استوکس کمک بگیریم.





میدان برداری $\vec{F}=(y^2+z^2,x^2+z^2,x^2+y^2)$ را داریم، بنابراین $\mathrm{curl}\vec{F}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathrm{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & x^2+y^2\end{vmatrix}=2(y-z)\vec{i}-2(x-z)\vec{j}+2(x-y)\vec{k}$$

با توجه به معادله $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2ax=0$ و نظر به این که $\vec{p}=\vec{k}$، لذا $|\vec{\nabla}g.\vec{p}|=2z$ خواهیم داشت:

$$\vec{n}d\sigma=\pm\frac{(2x-2a,2y,2z)}{2z}dA=\frac{(x-a,y,z)}{z}dydx$$

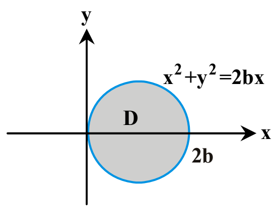
بنابراین اگر D تصویر S بر صفحه‌ی xoy باشد که توسط استوانه‌ی $x^2+y^2=2bx$ مشخص می‌شود، داریم:

$$I=\iint_S \mathrm{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_D \frac{2(y-z)(x-a)-2y(x-z)+2z(x-y)}{z}dydx=2\iint_D \frac{yx-ya-zx+za-yx+yz+zx-zy}{z}dydx$$

$$I=2\iint_D \frac{a(z-y)}{z}dydx=2a\iint_D (1-\frac{y}{z})dydx$$

از معادله‌ی S داریم $z=\sqrt{2ax-x^2-y^2}$. پس می‌توان نوشت:

$$I=2a\iint_D (1-\frac{y}{\sqrt{2ax-x^2-y^2}})dydx$$



معادله‌ی $x^2+y^2=2bx$ با تبدیل y به $-y$ تغییر نمی‌کند. بنابراین ناحیه‌ی D نسبت به محور xها تقارن دارد. همچنین تابع $\dfrac{y}{\sqrt{2ax-x^2-y^2}}$ نسبت به y فرد است، بنابراین انتگرال آن روی D صفر می‌شود و بنابراین داریم:

$$I=2a\iint_D (1)dydx=2a\times(\text{مساحت } D)=2a(\pi b^2)=\mathbf{2\pi ab^2}$$

مثال ۴: مقدار انتگرال روی منحنی $I=\int_C ydx+zdy+xdz$ که C محل برخورد کره $x^2+y^2+z^2=a^2$، با صفحه‌ی $x+y+z=0$ در خلاف جهت مثلثاتی است، کدام است؟

۱) $\pi a\sqrt{3}$ ۲) $\pi a^2\sqrt{3}$ ۳) πa^3 ۴) $\pi a^2\sqrt{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» خم C از تلاقی کره با یک صفحه به‌دست می‌آید، پس یک خمِ بسته است و می‌توانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم. در این صورت با فرض $\vec{F}=(y,z,x)$ خواهیم داشت:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r}=\iint_S \text{curl}\vec{F}.\vec{n}ds$$

که در آن S قسمتی از صفحه $g(x,y,z):x+y+z=0$ است که درون کره قرار دارد.

$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ y&z&x\end{vmatrix}=(-1,-1,-1)$$

بردار یکه عمود بر سطح S (بردار یکه عمود بر صفحه) به‌صورت مقابل است:

$$\vec{n}=\pm\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g|}=\pm\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$$

چون خم C در جهت عکس مثلثاتی طی شده، بنابراین $\vec{n}=\frac{(-1,-1,-1)}{\sqrt{3}}$ قابل قبول است و در نتیجه $\text{curl}\vec{F}.\vec{n}=\frac{1+1+1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ است.

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r}=\iint_S \text{curl}\vec{F}.\vec{n}ds=\sqrt{3}\iint_S ds=\sqrt{3}(\text{مساحت سطح S})$$

چون سطح S از تلاقی کره‌ای به شعاع a با صفحه‌ای که از مرکز کره می‌گذرد، ایجاد شده است، بنابراین شعاع دایره حاصل با شعاع کره برابر و بنابراین مساحت سطح S برابر πa^2 و مقدار انتگرال $\pi a^2\sqrt{3}$ است.

مثال ۵: فرض کنید C منحنی بسته‌ی ساده‌ای باشد که وقتی از بالا به آن نگاه می‌کنیم، خلاف جهت عقربه‌های ساعت جهت‌دار شده و بخشی از صفحه‌ی $x+y+z=1$ را محصور کرده است. همچنین C طوری است که انتگرال $\oint_C \vec{F}.d\vec{r}$ روی آن ماکزیمم و برابر با M می‌شود.

اگر $\vec{F}=(xy^2)\vec{i}+(3z-xy^2)\vec{j}+(4y-x^2y)\vec{k}$، آن‌گاه مقدار M کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» فرض کنید C ناحیه‌ی S را محصور کرده باشد، در این صورت داریم:

$$g:x+y+z=1 \Rightarrow \vec{\nabla}g=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

حالا باید $\text{curl}\vec{F}$ را حساب کنیم:

$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ xy^2&3z-xy^2&4y-x^2y\end{vmatrix}=(1-x^2)\vec{i}+2xy\vec{j}-(y^2+2xy)\vec{k}$$

بنابراین داریم:

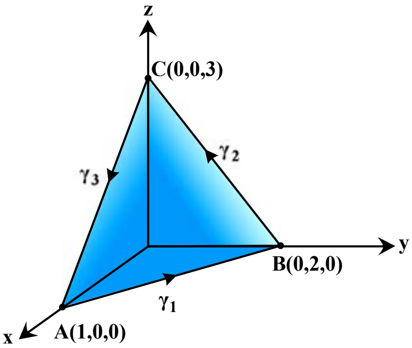
$$\text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=[(1-x^2)\vec{i}+(2xy)\vec{j}-(y^2+2xy)\vec{k}].[\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}]dA=[1-x^2+2xy-y^2-2xy]dA=(1-x^2-y^2)dA$$

از طرفی اگر تصویر S روی صفحه‌ی xoy قرص $x^2+y^2\le 1$ باشد، این انتگرال ماکزیمم می‌شود، بنابراین داریم:

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 1}(1-x^2-y^2)\,dA=\iint_{x^2+y^2\le 1}(1-x^2-y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^1(1-r^2)\,rdrd\theta=(\int_0^{2\pi}d\theta)\times(\int_0^1(1-r^2)\,rdr=2\pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})=\frac{\pi}{2}$$

مثال ۶: اگر γ مرز مثلث ABC با رئوس $A(۱,۰,۰)$ و $B(۰,۲,۰)$، $C(۰,۰,۳)$ باشد که در جهت مثلثاتی پیموده شده است، آن‌گاه حاصل $I=\oint_{\gamma}۲xydx+۳xzdy+(x^{۲}+y^{۲})dz$ کدام است؟ (از سؤالات پایان ترم دانشگاه علم و صنعت)

۱) $\frac{۷}{۹}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۶}$ ۴) ۰



پاسخ: گزینه «۲» برای تمرین و این که دانشجو برابری دو طرف قضیه استوکس را لمس کند، سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم.

روش اول: روش پارامتری کردن (بدون استفاده از قضیه‌ی استوکس)

با توجه به این که معادله‌ی پارامتری خط راست، ساده و از درجه‌ی یک است، می‌توانیم بدون به کار بردن قضیه‌ی استوکس، مرز بسته‌ی γ را به بخش‌های $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ و $\gamma_۳$ تقسیم کنیم که به ترتیب اضلاع AB و BC و CA هستند. یادآوری می‌کنیم که پاره‌خط AB را می‌توان به‌صورت زیر پارامتری کرد:

$$(x,y,z)=A+(B-A)t \quad , \quad ۰\le t\le ۱$$

اکنون محاسبه‌ی انتگرال را آغاز می‌کنیم:

$$I=\int_{\gamma}۲xydx+۳xzdy+(x^{۲}+y^{۲})dz=\int_{\gamma}\vec F.d\vec r=\int_{\gamma_۱}\vec F.d\vec r+\int_{\gamma_۲}\vec F.d\vec r+\int_{\gamma_۳}\vec F.d\vec r$$

مسیر $\gamma_۱$ پاره‌خط AB است. روی آن داریم:

$$(x,y,z)=A+(B-A)t=(۱-t,۲t,۰) \quad , \quad ۰\le t\le ۱$$

بنابراین $(dx,dy,dz)=(-۱,۲,۰)$ و به این ترتیب داریم:

$$I_۱=\int_{\gamma_۱}۲xydx+۳xzdy+(x^{۲}+y^{۲})dz=\int_{۰}^{۱}-۴t(۱-t)dt=(-۴\frac{t^{۲}}{۲}+۴\frac{t^{۳}}{۳})\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۴}{۳}-۲=-\frac{۲}{۳}$$

مسیر $\gamma_۲$ پاره‌خط BC است. روی این پاره‌خط داریم:

$$(x,y,z)=B+(C-B)t=(۰,۲-۲t,۳t) \quad , \quad ۰\le t\le ۱$$

بنابراین: $(dx,dy,dz)=(۰,-۲,۳)$ و خواهیم داشت:

$$I_۲=\int_{\gamma_۲}۲xydx+۳xzdy+(x^{۲}+y^{۲})dz=\int_{۰}^{۱}۳(۲-۲t)^{۲}dt=-\frac{۳}{۲}\frac{(۲-۲t)^{۳}}{۳}\Big|_{۰}^{۱}=۴$$

مسیر $\gamma_۳$ نیز پاره‌خط CA است و به‌صورت زیر پارامتری می‌شود:

$$(x,y,z)=C+(A-C)t=(t,۰,۳-۳t) \quad , \quad ۰\le t\le ۱$$

بنابراین: $(dx,dy,dz)=(۱,۰,-۳)$ و به این ترتیب داریم:

$$I_۳=\int_{\gamma_۳}۲xydx+۳xzdy+(x^{۲}+y^{۲})dz=\int_{۰}^{۱}-۳t^{۲}dt=-t^{۳}\Big|_{۰}^{۱}=-۱$$

با جمع کردن جواب‌ها داریم:

$$I=\int\vec F.d\vec r=I_۱+I_۲+I_۳=-\frac{۲}{۳}+۴-۱=\frac{۷}{۳}$$

روش دوم: استفاده از قضیه‌ی استوکس

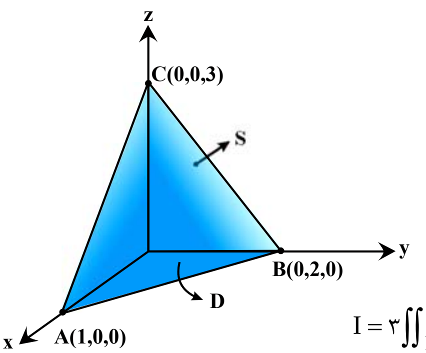
مرز بسته‌ی γ در واقع مرز بخشی از صفحه‌ی S است که از نقاط A، B و C می‌گذرد. معادله‌ی صفحه‌ای که از این ۳ نقطه می‌گذرد به‌صورت $S:x+\frac{y}{۲}+\frac{z}{۳}=۱$ است. (معادله‌ی صفحه‌ای که محورهای x، y و z را به ترتیب در نقاط $(a,۰,۰)$ و $(۰,b,۰)$ و $(۰,۰,c)$ قطع می‌کند به شکل $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=۱$ نوشته می‌شود.) حالا به محاسبه‌ی $curl\vec F$ و $\vec n d\sigma$ می‌پردازیم.

$$curl\vec F=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ ۲xy & ۳xz & x^{۲}+y^{۲}\end{vmatrix}=(۲y-۳x)\vec i-۲x\vec j+(۳z-۲x)\vec k$$

پس $curl\vec F=(۲y-۳x,-۲x,۳z-۲x)$ است و با توجه به معادله‌ی $S:x+\frac{y}{۲}+\frac{z}{۳}=۱$ داریم: $\vec n d\sigma=۳(۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})dydx$

بنابراین داریم:

$$I=\iint_{S}curl\vec F.\vec n d\sigma=۳\iint_{D}(۲y-۳x-x+z-\frac{۲}{۳}x)dydx$$



در این انتگرال ناحیه‌ی D سایه‌ی S روی صفحه‌ی xoy است.

اگر در معادله‌ی صفحه‌ی $x+\frac{y}{۲}+\frac{z}{۳}=۱$، مقدار $z=۰$ را قرار دهیم خط $x+\frac{y}{۲}=۱$ به‌دست می‌آید که مرز ناحیه‌ی D است. همچنین در ناحیه‌ی D داریم $x\ge ۰$ و $y\ge ۰$. اکنون به سادگی دیده می‌شود که $۰\le x\le ۱$ و $۰\le y\le ۲(۱-x)$ است. با جایگذاری $z=۳(۱-x-\frac{y}{۲})$ در انتگرالده و نوشتن کران‌ها داریم:

$$I=۳\iint_{R}(۲y-۳x-x+z-\frac{۲}{۳}x)dydx=۳\iint_{R}(\frac{۱}{۲}y-\frac{۲۳}{۳}x+۳)dydx=۳\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۲(۱-x)}(\frac{۱}{۲}y-\frac{۲۳}{۳}x+۳)dydx$$

$$\Rightarrow I=۳\int_{۰}^{۱}(\frac{۱}{۲}\frac{y^{۲}}{۲}-\frac{۲۳}{۳}xy+۳y)\Big|_{۰}^{۲(۱-x)}dx=۳\int_{۰}^{۱}(۷-\frac{۷۰}{۳}x+\frac{۴۹}{۳}x^{۲})dx=۳(۷x-\frac{۷۰}{۶}x^{۲}+\frac{۴۹}{۹}x^{۳})\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۷}{۳}$$

مثال ۷: اگر C محل برخورد کره $x^2+y^2+z^2=4$ و صفحه‌ی $z=1$ باشد که در جهت مثلثاتی طی شده است، آن‌گاه حاصل انتگرال زیر کدام است؟
$$I=\oint_C (ye^{xy}\sin z+y)dx+(xe^{xy}\sin z+x)dy+(e^{xy}\cos z-x)dz$$

۱) 0 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ: گزینه «۱» بهتر است از قضیه استوکس کمک بگیریم، با توجه به این که C محل برخورد کره‌ی $x^2+y^2+z^2=4$، با صفحه $z=1$ است، پس فرقی ندارد، روی کدام سطح انتگرال را حساب کنیم، خُب بهتر است روی صفحه‌ی $z=1$ این کار را انجام دهیم و بنابراین داریم: $g: z=1 \Rightarrow \vec{\nabla}g=\vec{k}$ بنابراین $n=\vec{k}$، حالا که $\vec{n}$ مشخص شد، پس فقط لازم است مؤلفه‌ی سوم $\text{curl}\vec{F}$ را حساب کنیم، با توجه به این که داریم:
$$P=ye^{xy}\sin z+y\ ,\ Q=xe^{xy}\sin z+x\ ,\ R=e^{xy}\cos z-x$$
پس خواهیم داشت:
$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}=(\text{هرچی})\vec{i}+(\text{هرچی})\vec{j}+(e^{xy}\sin z+yxe^{xy}\sin z+1-e^{xy}\sin z-xye^{xy}\sin z-1)\vec{k}=(\text{هرچی})\vec{i}+(\text{هرچی})\vec{j}+0\vec{k}$$
و لذا $\text{curl}\vec{F}.\vec{n}=[(0)\vec{k}].[\vec{k}]=0$ پس داریم:
$$\iint_S \text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=0 \Rightarrow \int_C \vec{F}.d\vec{r}=0$$

مثال ۸: حاصل انتگرال $\iint_S \text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma$، در صورتی که S نیم کره‌ی $z\ge 0$، $x^2+y^2+z^2=a^2$ با قائم رو به خارج باشد و $\vec{F}=2y\vec{i}-2xz\vec{j}+(x^2-y^2)\vec{k}$، چقدر است؟

۱) $-6\pi a^2$ ۲) $6\pi a^2$ ۳) $3\pi a^2$ ۴) $-3\pi a^2$

پاسخ: گزینه «۴» فرض کنید C مرز سطح S، یعنی دایره $x^2+y^2=a^2$، $z=0$ باشد و D ناحیه محصور توسط این دایره در صفحه xoy با قائم $\vec{k}$ باشد، در این صورت داریم:
$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ 2y&-2xz&x^2-y^2\end{vmatrix}=(2x-2y)\vec{i}-2x\vec{j}-(2z+2)\vec{k}$$
طبق نتیجه‌ی قضیه استوکس، می‌توانیم به جای محاسبه $\iint_S \text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma$، انتگرال زیر را محاسبه کنیم. توجه داشته باشید که مرز سطح S و سطح S' یکسان است.
$$\iint_S \text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{S'}\text{curl}\vec{F}.\vec{k}d\sigma=-\iint_{\substack{x^2+y^2\le a\\ z=0}}(2z+2)dA=-\iint_D 2dA=-2\times(\text{مساحت دایره})=-2\pi a^2$$

مثال ۹: مقدار انتگرال $\oint_C x^2y^3dx+dy+zdz$ که در آن C دایره $z=0$، $x^2+y^2=R^2$ می‌باشد، با کدام گزینه برابر است؟ (عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) $-\frac{3\pi R^3}{20}$ ۲) $-\frac{3\pi R^5}{8}$ ۳) $-\frac{\pi R^6}{4}$ ۴) $-\frac{\pi R^6}{8}$

پاسخ: گزینه «۴» انتگرال داده شده، انتگرال میدان $\vec{F}=(x^2y^3,1,z)$ روی خم بسته C می‌باشد. بنابراین از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم، چون خم C در صفحه $z=0$ قرار دارد، بنابراین $\vec{n}=\vec{k}$ و همچنین $ds=dA$. از طرفی داریم:
$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ x^2y^3&1&z\end{vmatrix}=(0,0,-3x^2y^2)\Rightarrow \text{curl}\vec{F}.\vec{k}=-3x^2y^2$$
در نتیجه داریم:
$$\int_C \vec{F}.d\vec{r}=\iint_S \text{curl}\vec{F}.\vec{n}ds=\iint_S -3x^2y^2dA \xrightarrow{\text{مختصات قطبی}} \int_0^{2\pi}\int_0^R -3r^2\cos^2\theta r^2\sin^2\theta\times rdrd\theta$$
$$=-3\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta\times\int_0^R r^5dr=-3\times\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{6}R^6=\frac{-\pi R^6}{8}$$

مثال ۱۰: مقدار انتگرال $\iint_S curl\vec{F}.\vec{n}ds$ که در آن S سطح $z \leq 0$، $x^2+y^2+3z^2=1$ و $\vec{n}$، بردار قائم یکه خارجی S است و $\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}-x\vec{j}+zx^3y^2\vec{k}$، با کدام گزینه برابر است؟

(عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) 2π ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مرز سطح S دایره $x^2+y^2=1$ در صفحه $z=0$ می‌باشد. در این صورت طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_S curl\vec{F}.\vec{n}ds=\int_C \vec{F}.d\vec{r}$$

(چون قائم S رو به پایین است، بنابراین مرز C باید در جهت خلاف مثلثاتی پیموده شود.)

خم C را به صورت پارامتری روبرو می‌نویسیم:

$$\vec{r}(t)=(\cos t,\sin t,0)\Rightarrow \vec{F}(r(t))=(\sin t,-\cos t,0)\Rightarrow d\vec{r}=(-\sin t,\cos t,0)dt$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r}=-\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t-\cos^2 t+0)dt=2\pi$$

مثال ۱۱: حاصل $\oint_C 2xyz^3dx+x^2z^3dy+3x^2yz^2dz$ که در آن منحنی C فصل مشترک استوانه $x^2+y^2=4$ با صفحه به معادله $x+2z=0$ باشد، برابر کدام است؟

(MBA ـ سراسری ۸۶)

۱) صفر ۲) $\frac{5\pi}{2}$ ۳) ۴ ۴) ۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم.

$$\vec{F}=(2xyz^3,x^2z^3,3x^2yz^2)\Rightarrow curl\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ 2xyz^3&x^2z^3&3x^2yz^2\end{vmatrix}=(0,0,0)\Rightarrow\int_C \vec{F}.dr=\iint_A curl\vec{F}.\vec{n}ds=0$$

مثال ۱۲: کدام قضیه رابط انتگرال رویه و انتگرال خط است؟

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۷)

۱) قضیه گرین ۲) قضیه استوکس ۳) قضیه دیورژانس ۴) قضیه مقدار میانگین

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم طبق قضیه استوکس $\int_C \vec{F}.d\vec{r}=\iint_S curl\vec{F}.\vec{n}ds$، که این رابطه انتگرال رویه‌ای را به انتگرال خط تبدیل می‌کند.

مثال ۱۳: اگر $\vec{F}=yz\vec{j}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$ و C منحنی بسته حاصل از محل تلاقی صفحه $x+y+z=0$ با استوانه $x^2+y^2=1$ باشد، آن‌گاه $\int_C \vec{F}.d\vec{R}$ برابر کدام مقدار است؟

(مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۱- ۴) 2π

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای محاسبه $\int_C \vec{F}.d\vec{R}$ با توجه اینکه منحنی C بسته است. قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که داریم:

$$curl\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ yz&xz&xy\end{vmatrix}=(x-x)\vec{i}-(y-y)\vec{j}+(z-z)\vec{k}=(0,0,0)$$

بنابراین طبق قضیه استوکس داریم:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{R}=\iint\underbrace{curl\vec{F}}_{(0,0,0)}.\vec{n}ds=0$$

مثال ۱۴: فرض کنید $\vec{F}(x,y,z)=(z-y)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+(x+2y)\vec{k}$ مقدار $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ کدام است هرگاه C دایره‌ی $\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=2\end{cases}$ باشد که تصویر آن بر صفحه‌ی xoy در جهت مثلثاتی در نظر گرفته شده است.

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۰)

۱) 4π ۲) 6π ۳) 8π ۴) 12π

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای محاسبه انتگرال کار از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم:

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{r}=\iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}.\vec{n}ds \quad ; \quad (1)$$

که در این مسئله S سطح داخل دایره $\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=2\end{cases}$ می‌باشد، از طرفی وقتی C در صفحه‌ی xoy است، $\vec{n}=\vec{k}$ می‌باشد.

$$curl\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ z-y&x+y&x+2y\end{vmatrix}=2\vec{i}+2\vec{k}\Rightarrow curl\vec{F}.\vec{n}d\sigma=(2\vec{i}+2\vec{k}).\vec{k}\,d\sigma=2d\sigma$$

در رابطه (۱) جایگذاری می‌کنیم.

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{r}=\iint_S curl\,\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_S 2d\sigma=2\times(\text{مساحت } S)=2\times\underbrace{\pi\times 2^2}_{\text{مساحت دایره}}=8\pi$$