مدرسان شریف

فصل اول

«مدل‌های شبکه»

مقدمــه

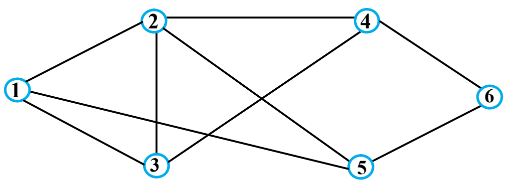
شبکه یکی از حوزه‌های پرکاربرد تحقیق در عملیات است. مطالعات جدید پژوهشگران نشان می‌دهد که ۷۰٪ مسائل برنامه‌ریزی ریاضی در دنیای واقعی می‌توانند با مدل‌های مرتبط با شبکه نشان داده شوند. اگرچه عمده‌ی مسائل شبکه به صورت برنامه‌ریزی خطی هستند و می‌توانند با روش سیمپلکس حل شوند، ساختار خاص این گونه مسائل به قسمی است که روش‌های ساده‌تری برای حل آن‌ها وجود دارد.

این فصل شامل بخش‌های زیر است:

۱ـ مینیمم درخت فراگیر (در برگیرنده، گسترنده، پوشا)　　۲ـ کوتاه‌ترین مسیر　　۳ـ ماکسیمم جریان

تعاریف شبکه

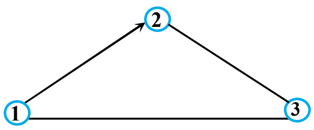
شبکه: یک شبکه، شامل مجموعه‌ای از گره‌ها است که به وسیله‌ی کمان‌ها (شاخه‌ها) به هم متصل شده‌اند. شبکه را با (N, A) نمایش می‌دهند که در آن N مجموعه‌ی گره‌ها و A مجموعه‌ی کمان‌ها است. در شکل روبه‌رو دایره‌هایی که با اعداد نشان داده شده‌اند گره هستند که به صورت مجموعه‌ی $N = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ نمایش داده می‌شوند و کمان‌ها خطوطی هستند که این گره‌ها را به هم متصل می‌کنند و با مجموعه‌ی $A = \{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۵),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶),(۵,۶)\}$ توصیف می‌شوند.



مثال شبکه (N, A)

جریان: متناظر با هر شبکه، نوعی جریان وجود دارد و این جریان به ظرفیت کمان‌های آن محدود است که ممکن است متناهی و یا نامتناهی باشد.

کمان جهت‌دار: اگر جریان در کمان تنها در یک جهت مجاز باشد، یعنی جریان مثبت در یک جهت و جریان صفر در جهت مخالف وجود داشته باشد، به آن کمان، کمان جهت‌دار گفته می‌شود. در **شبکه جهت‌دار** همه‌ی کمان‌ها جهت دارند.



کمان جهت‌دار

در شکل روبه‌رو کمان $(۱,۲)$ جهت‌دار است.

مسیر: مسیر دنباله‌ای از کمان‌های مجزا است که دو گره را، صرف‌نظر از جهت جریان در هر کمان، به هم وصل می‌کند.

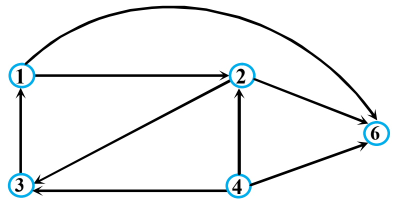
مسیر جهت‌دار، مسیری است که همه‌ی کمان‌های آن در یک جهت باشند.

حلقه (دور): مسیری است که یک گره را به خودش متصل می‌کند.

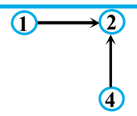
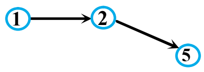
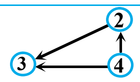
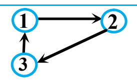
حلقه‌ی جهت‌دار (مدار)، حلقه‌ای است که همه‌ی کمان‌های آن در یک جهت باشند.

شبکه همبند: شبکه‌ای است که هر *دو گره‌ی متمایز* آن با *حداقل* یک مسیر به هم متصل باشند.

مثال۱: برای درک بهتر این تعاریف به شکل زیر توجه کنید.



در این شکل داریم:

مسیر	۱ → ۲ → ۴	
مسیر جهت‌دار	۱ → ۲ → ۵	
حلقه	۲ → ۳ → ۴ → ۲	
حلقه جهت‌دار	۱ → ۲ → ۳ → ۱	

درخت: شبکه‌ی همبندی است که زیر *مجموعه‌ای* از همه گره‌های شبکه را بدون وجود حلقه شامل شود.

درخت فراگیر: شبکه همبندی است که شامل همه‌ی گره‌های شبکه باشد و هیچ حلقه‌ای نداشته باشد.

درخت یکی از مفاهیم اساسی در شبکه است که خواص بسیار جالبی دارد.

نکته۱: درخت، شبکه همبند با مینیمم تعداد کمان‌ها است. یعنی اگر یکی از کمان‌های درخت را حذف کنیم شبکه‌ی حاصل همبند نخواهد بود.

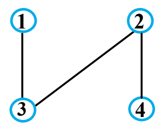
نکته۲: درخت فراگیر، شبکه‌ای بدون حلقه و دارای $n-1$ کمان است. $(N=\{1,2,\ldots,n\})$

نکته۳: با اضافه کردن یک کمان به درخت *دقیقاً* یک حلقه‌ی منحصر به فرد ایجاد می‌شود.

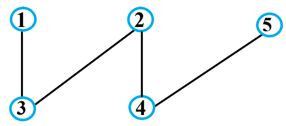
نکته۴: هر دو گره در درخت با یک مسیر *منحصر به فرد* به هم متصل هستند.

نکته۵: درخت حداقل ۲ گره‌ی پایانی دارد (گره‌ی پایانی گره‌ای است که فقط ۱ کمان به آن متصل باشد)

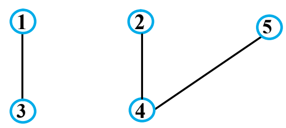
شکل مثال ۱ را در نظر می‌گیریم، در این شبکه داریم:



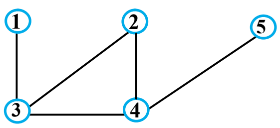
درخت



درخت فراگیر



با حذف یک کمان از درخت فراگیر، شبکه حاصل همبند نخواهد بود.



با اضافه کردن یک کمان به درخت فراگیر دقیقاً یک حلقه ایجاد می‌شود.

مثال۲: شبکه‌ای شامل ۱۰ گره است. درخت فراگیر آن به ترتیب از راست به چپ شامل چند گره و چند کمان است؟

۱) ۱۰ و ۱۰ ۲) ۱۰ و ۹ ۳) ۹ و ۱۰ ۴) ۹ و ۹

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» درخت فراگیر شامل n گره و $n-1$ کمان باشد.

مثال۳: با توجه به تعریف درخت فراگیر:

۱) با اضافه کردن یک کمان به درخت دقیقاً یک حلقه ایجاد می‌شود.
۲) هر دو گره در درخت با یک مسیر منحصر به فرد به هم متصل هستند.
۳) درخت، شبکه‌ای بدون حلقه و دارای $n-1$ کمان است.
۴) همه موارد

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

مثال ۴: در یک شبکه بدون جهت با n گره حداکثر تعداد کمان‌ها برابر است با:

۱) $n-1$　　۲) $(n-1)^2$　　۳) $\frac{n(n-1)}{2}$　　۴) $n(n-1)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» حداکثر تعداد کمان‌ها زمانی به وجود می‌آید که بین هر دو گره یک کمان وجود داشته باشد یعنی: $C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۵: در یک شبکه همبند با n گره حداقل تعداد کمان‌ها برابر است با:

۱) n　　۲) $n-1$　　۳) $\frac{n}{2}$　　۴) $n(n-1)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» حداقل تعداد کمان‌ها در یک شبکه همبند، درخت فراگیر است که $n-1$ کمان دارد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۶: اگر یک شبکه بدون جهت با n گره و m کمان، به یک شبکه جهت‌دار تبدیل گردد، آن گاه تعداد گره‌ها و کمان‌ها (به ترتیب از راست به چپ) برابر است با:

۱) $2n$ و $2m$　　۲) $2n$ و m　　۳) n و $2m$　　۴) n و m

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در تبدیل شبکه جهت‌دار، تعداد گره‌ها ثابت باقی می‌ماند و تنها بـه ازای هـر کمـان بـدون جهـت، دو کمـان جهـت‌دار جـایگزین می‌کنیم. پس تعداد کمان‌ها دو برابر می‌شود.

الگوریتم مینیمم درخت فراگیر

همان طور که قبلاً اشاره شد در حالت کلی یک شبکه همبند می‌تواند شامل چند درخت فراگیر باشد. درخت فراگیری که مجموع طول (وزن) کمان‌های آن مینیمم باشد، **مینیمم درخت فراگیر** نامیده می‌شود. به‌عبارت دیگر شبکه مینیمم درخت فراگیر، شبکه‌ای است متصل شده، که همـه‌ی گـره‌هـا را در بـر گرفته و دارای کمترین مقدار (هزینه، زمان، مسافت و ...) است.

فرض کنید $N=\{1,2,...,n\}$ مجموعه‌ی گره‌های شبکه مورد نظر باشد.

تعاریف:

S_k = مجموعه‌ی گره‌هایی است که در تکرار kام به هم مرتبط شده‌اند.

S'_k = مجموعه‌ی گره‌هایی که هنوز به هم مرتبط نشده‌اند ($S'_k = N - S_k$).

d_{ij} = طول کمان (i,j).

الگوریتم به دست آوردن مینیمم درخت فراگیر شامل گام‌های زیر است:

گام ۰: قرار دهید $S_0=\phi$ و $S'_0=N$.

گام ۱: قرار دهید $S_1=\{1\}$، $S'_1=N-\{1\}$ و $k=2$.

گام کلی k: فرض کنید:

$$d_{pq} = \min\{d_{ij} : i \in S_{k-1}\ ,\ j \in S'_{k-1}\}$$

قرار دهید:

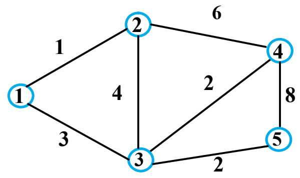
$$S_k = S_{k-1} + \{q\}$$
$$S'_k = S'_{k-1} - \{q\}$$

اگر $S_k = N-1$، توقف کنید. در غیر این صورت قرار دهید: $k=k+1$ و این گام را تکرار کنید.

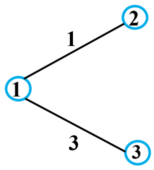
(اگر این مینیمم در بیش از یک اندیس رخ دهد یکی را به دلخواه انتخاب کنید.) در این حالت احتمال به‌وجود آمدن جواب چندگانه وجود دارد.

برای روشن شدن این مطلب مثال زیر را در نظر بگیرید:

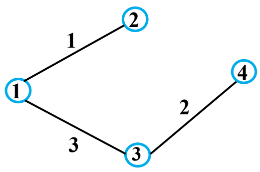
مثال ۷: مینیمم درخت فراگیر شبکه زیر را به دست آورید.



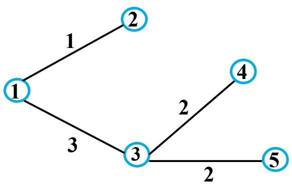
پاسخ: در این مسأله بعد از ۲ تکرار خواهیم داشت:



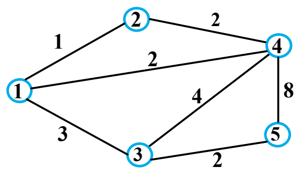
و در تکرار سوم داریم: $S_۱ = \{۱,۲,۳\}, S'_۱ = \{۴,۵\}$ و با توجه به این‌که $d_{۳۴} = d_{۳۵} = ۲$ است، یکـی را به دلخواه انتخاب می‌کنیم (مثلاً $d_{۳۴}$) و داریم:



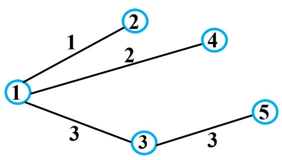
در تکرار بعدی هم داریم: $S_۱ = \{۱,۲,۳,۴\}, S'_۱ = \{۵\}$ و $d_{۳۵}$ انتخاب می‌شود؛ در این مسأله مـشاهده می‌شود با وجود این‌که مینیمم در بیش از یک اندیس رخ داد ولی جواب چندگانه نشد.



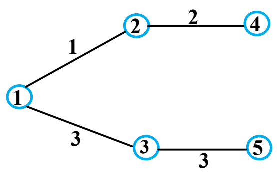
حالا شبکه مقابل را در نظر بگیرید. می‌خواهیم درخت مینیمم فراگیـر آن را رسـم کـنیم. بعـد از رسـم کمان $d_{۱۲}$، داریم: $S_۲ = \{۱,۲\}, S'_۲ = \{۳,۴,۵\}$. مینیمم کمان‌های خروجی $d_{۱۴}$ و $d_{۲۴}$ است.



اگر $d_{۱۴}$ را انتخاب کنیم، در نهایت درخت مینیمم فراگیر به‌صورت مقابل خواهد شد:



و اگر $d_{۲۴}$ را انتخاب کنیم، درخت مینیمم فراگیر به‌صورت زیر می‌شود:



در این حالت دو درخت فراگیر بهینه داریم. در نتیجه این مسأله دارای جواب بهینه چندگانه است.

نکته ۶: الگوریتم مینیمم درخت فراگیر دقیقاً در یک درخت با n گره، در $n-۱$ تکرار به جواب می‌رسد. زیرا در هر تکرار یک کمان رسم می‌شود و درخت با n گره، $n-۱$ کمان دارد.

مدرسان شریف

فصل دوم

«برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح»

مقدمه

مسائل بسیاری در دنیای واقعی وجود دارند که مدل آن‌ها دارای متغیرهایی با اعداد صحیح است. این متغیرها می‌توانند شامل تعداد نیروی انسانی، تعداد تولید محصولات شمارش‌پذیر مثل خودرو، تلفن همراه، کتاب و غیره باشند. **برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح** برنامه‌هایی خطی هستند که در آن‌ها همه یا برخی از متغیرها منحصر به مقادیر صحیح (گسسته) هستند. به عبارت دیگر، برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح با کنار گذاشتن فرض بخش‌پذیری برنامه‌ریزی خطی حاصل می‌شود. این مسأله باعث می‌شود که فضای شدنی مسأله، مجموعه‌ی *نامحدب* شود. به عبارت دقیق‌تر، فضای شدنی این مسأله نقاط با اعداد صحیح درون یک چند وجهی است. بنابراین روش‌های حل مسأله برنامه‌ریزی خطی نمی‌توانند به طور مستقیم برای این گونه مسائل قابل استفاده باشند.

مدل‌های برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح

مدل برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح، مدل برنامه‌ریزی ریاضی است که متغیرهای آن عدد صحیح هستند. مدل‌های برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح به دو دسته روبه‌رو تقسیم می‌شوند: ۱ـ برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح محض، ۲ـ برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح مختلط

مدل برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح **محض**، مدلی است که در آن همه‌ی متغیرها اعداد صحیح هستند و مدلی که در آن تنها تعدادی از متغیرها اعداد صحیح باشند مدل برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح **مختلط** نامیده می‌شود.

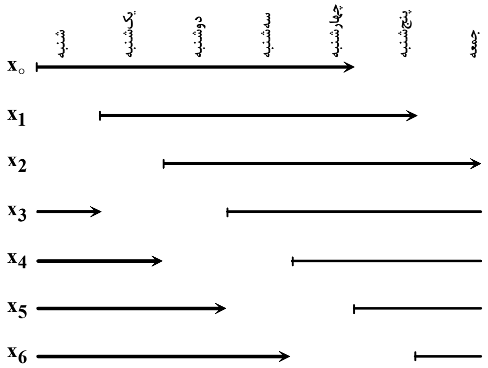
در اینجا برای درک بهتر، انواع مدل‌های مطرح شده و کاربرد آن‌ها در دو مثال ارائه می‌گردد:

مثال ۱: (برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح محض)

در یک ساحل دریا، ایستگاهی جهت نجات غریقان برای هفت روز هفته وجود دارد و طبق قانون کار، هر نجات غریقی باید پنج روز در هفته کار کند. شرکت بیمه ضرورت داشتن حداقل یک نجات غریق به ازای متوسط ۸۰۰۰ نفر شرکت‌کننده تعیین نموده است. در جدول زیر، متوسط شناکنندگان در هر روز به همراه حداقل نجات غریق مورد نیاز آمده است. با توجه به محدود بودن بودجه، مسئولان شهر ساحلی به دنبال استخدام حداقل نجات غریق هستند. مدل برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح برای این مسأله را بنویسید.

روزهای هفته	متوسط شناکنندگان	نجات غریق مورد نیاز
شنبه	۴۲۰۰۰	۶
یکشنبه	۳۵۰۰۰	۵
دوشنبه	۲۵۰۰۰	۴
سه‌شنبه	۴۴۰۰۰	۶
چهارشنبه	۵۱۰۰۰	۷
پنج‌شنبه	۶۸۰۰۰	۹
جمعه	۵۸۰۰۰	۸

☑ **پاسخ:** فرض کنید x_0 ، x_1، ... ، و x_6 تعداد نجات غریق‌هایی هستند که در روزهای شنبه، یک‌شنبه، ... ، و جمعه شروع به‌کار می‌کنند. در هر روز شناگرانی مرخصی هستند که فردا یا پس فردا شروع به‌کار می‌کنند، به طور مثال در روز شنبه شناگرانی که روزهای یک‌شنبه یا دوشنبه شروع به‌کار می‌کنند، مرخصی هستند. می‌توان این مسأله را به صورت ترسیمی نمایش داد:



هدف، مینیمم کردن تعداد کل نجات غریق‌های استخدامی است، بنابراین تابع هدف مسأله می‌تواند به صورت

$$\min \quad z = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

بیان شود. هم چنین هر محدودیت مسأله، تعداد نجات غریقانی را نشان می‌دهد که در روزهای به‌خصوص هفته مشغول به‌کار هستند. به عنوان مثال، محدودیت متناظر با تعداد نجات غریقانی که در روز شنبه کار می‌کنند به صورت

$$x_0 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 6$$

است. در نتیجه با توجه به این محدودیت می‌دانیم، نجات غریقانی که در روزهای یک‌شنبه و دوشنبه شروع به‌کار می‌کنند در روز شنبه مرخصی هستند.
با تعمیم این مطلب برای سایر روزهای هفته مدل برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح محض متناظر مسأله می‌تواند به شکل زیر بیان شود:

$$\begin{array}{lll}
\min z = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & & \\
\text{s.t.} \quad x_0 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 6 & & \text{شنبه} \\
\quad x_0 + x_1 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 5 & & \text{یک‌شنبه} \\
\quad x_0 + x_1 + x_2 + x_5 + x_6 \geq 4 & & \text{دوشنبه} \\
\quad x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_6 \geq 6 & & \text{سه‌شنبه} \\
\quad x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 7 & & \text{چهارشنبه} \\
\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 9 & & \text{پنج‌شنبه} \\
\quad x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 8 & & \text{جمعه} \\
\quad x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \ \text{عدد صحیح} & &
\end{array}$$

ماتریس ضرایب این مسأله

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

است. سطرهای این ماتریس متناظر روزهای هفته و ستون‌های آن متناظر نجات غریقان است.
همان طور که مشاهده می‌کنید، تعداد ضرایب صفر موجود در هر سطر و ستون این ماتریس برابر ۲ است. تعداد ضرایب صفر موجود در هر سطر خاطر نشان می‌سازد که کدام گروه از نجات غریقان در آن روز مرخصی هستند. به عنوان مثال در محدودیت اول x_1 و x_2 حضور ندارند، این بدان معنا است که در روز شنبه نجات غریقانی که روزهای یک‌شنبه و دوشنبه شروع به‌کار می‌کنند مرخصی هستند. هم‌چنین تعداد ضرایب صفر موجود در هر ستون، روزهای مرخصی هر گروه از نجات غریق را نمایش می‌دهد. به عنوان مثال کسانی که شنبه شروع به کار می‌کنند پنج‌شنبه و جمعه تعطیل هستند.
پس از حل مسأله با استفاده از نرم‌افزار WinQSB، جواب بهینه‌ی مسأله و مقدار بهینه‌ی آن عبارتند از:

$$z^* = 10 ,\ x_0^* = 0 ,\ x_1^* = 2 ,\ x_2^* = 0 ,\ x_3^* = 3 ,\ x_4^* = 2 ,\ x_5^* = 2 ,\ x_6^* = 1$$

با توجه به جواب بهینه مسأله، حداقل تعداد نجات غریق استخدامی ۱۰ نفر است، که ۲ نفر از نجات غریقان روز یک‌شنبه، ۳ نفر روز سه‌شنبه، ۲ نفر روز چهارشنبه، ۲ نفر روز پنج‌شنبه، و ۱ نفر روز جمعه شروع به‌کار می‌کنند. دقت کنید که در روزهای شنبه و دوشنبه هیچ نجات غریقی شروع به‌کار نمی‌کند. با این برنامه‌ی استخدامی به‌عنوان نمونه در روز شنبه ۸ نجات غریق حضور دارند که از حداقل نیاز ۶ نجات غریق بیشتر است و در روز پنج‌شنبه دقیقاً ۹ نجات غریق مشغول به‌کار هستند.

همان‌طور که در مسأله‌ی قبل مشاهده گردید، حداقل تعداد نجات‌غریقان استخدامی ۱۰ نفر است. اما طبق اطلاعات داده شده در مسأله حداکثر تعداد نجات‌غریقان مورد نیاز در یک روز ۹ نفر است. ممکن است این سؤال برای مدیر مطرح شود که چرا باید ۱۰ نجات غریق استخدام کند در حالی که حداکثر نیاز روزانه او ۹ نفر است. بنابراین مدیر برای این که بتواند تعداد کمتری نجات غریق استخدام کند، تصمیم می‌گیرد که روزهای مرخصی نجات‌غریقان را از دو روز متوالی به دو روز غیرمتوالی (دلخواه) تغییر دهد، به طوری که هیچ نجات‌غریقی در دو روز متوالی مرخصی نباشد. حال با تغییر سیاست مدیر مسأله را یک بار دیگر مدل‌سازی و حل می‌کنیم.

مثال ۲: در مثال قبل فرض کنید نجات‌غریقان می‌توانند در دو روز غیرمتوالی (دلخواه) مرخصی داشته باشند.

☑ **پاسخ:** برای مدل‌سازی این مسأله بهتر است که متغیرهای تصمیم را به گونه‌ای دیگر تعریف کنیم، فرض کنید x_{ij} تعداد نجات‌غریقانی است که در روزهای i و j **مرخصی** هستند. بدیهی است با این تعریف $x_{ij} = x_{ji}$، برای جلوگیری از تکرار متغیرها فرض کنید $i < j$.

در این مسأله نیز هدف مینیمم کردن تعداد کل نجات‌غریقان استخدامی است، بنابراین تابع هدف به صورت

$$\min \sum_{i=0}^{5} \sum_{j=i+1}^{6} x_{ij}$$

خواهد بود. هم‌چنین هر محدودیت مسأله، تعداد نجات‌غریقانی را نشان می‌دهد که در روزهای به خصوصی از هفته مرخصی هستند. به عنوان مثال محدودیت متناظر با نجات‌غریقانی که روز شنبه مشغول به کارند $(i \neq 0, j \neq 0)$ به صورت

$$x_{12} + x_{13} + \cdots + x_{16} + x_{23} + \cdots x_{26} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{45} + x_{46} + x_{56} \geq 6$$

است. به طور مشابه محدودیت متناظر با کسانی که روز سه‌شنبه مشغول به کارند، به این صورت است:

$$x_{01} + x_{02} + x_{04} + x_{05} + x_{06} + x_{12} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{45} + x_{46} + x_{56} \geq 6$$

با تعمیم این مطلب برای روزهای دیگر هفته، مدل برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح این مسأله به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\min \sum_{i=0}^{5} \sum_{j=i+1}^{6} x_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\ & x_{12} + x_{13} + \cdots + x_{16} + x_{23} + \cdots x_{26} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{45} + x_{46} + x_{56} \geq 6 && \text{شنبه} \\
& x_{02} + \cdots + x_{06} + x_{23} + \cdots + x_{26} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{45} + x_{46} + x_{56} \geq 5 && \text{یک‌شنبه} \\
& x_{01} + x_{03} + \cdots + x_{06} + x_{13} + \cdots + x_{16} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{45} + x_{46} + x_{56} \geq 4 && \text{دوشنبه} \\
& x_{01} + x_{02} + x_{04} + \cdots + x_{06} + x_{12} + x_{14} + \cdots x_{16} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{45} + x_{46} + x_{56} \geq 6 && \text{سه‌شنبه} \\
& x_{01} + x_{02} + x_{03} + x_{05} + x_{06} + x_{12} + x_{13} + x_{15} + x_{16} + x_{23} + x_{25} + x_{26} + x_{35} + x_{36} + x_{56} \geq 7 && \text{چهارشنبه} \\
& x_{01} + \cdots + x_{04} + x_{06} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{16} + x_{23} + x_{24} + x_{26} + x_{34} + x_{36} + x_{46} \geq 9 && \text{پنج‌شنبه} \\
& x_{01} + \cdots + x_{05} + x_{12} + \cdots + x_{15} + x_{23} + \cdots + x_{25} + x_{34} + x_{35} + x_{45} \geq 8 && \text{جمعه} \\
& x_{ij} \geq 0 \ \text{و عدد صحیح}
\end{aligned}$$

پس از حل مسأله با استفاده از نرم‌افزار WinQSB جواب بهینه‌ی مسأله و مقدار بهینه‌ی آن عبارت است از:

$$z^* = 9 \ , \ x_{04}^* = 2 \ , \ x_{06}^* = 1 \ , \ x_{12}^* = 3 \ , \ x_{13}^* = 1 \ , \ x_{23}^* = 2$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، تعداد نجات‌غریقان استخدامی ۹ نفر است.

مثال ۳: (برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح مختلط)

شخصی پس از این که سال‌ها موجودی خود را در بانک سپرده بود برای این که درآمدش را افزایش دهد، تصمیم گرفت موجودی خود را به یکی یا ترکیبی از چند طریق زیر سرمایه‌گذاری کند. این مرحله برای او بسیار حساس است زیرا اولین تصمیم‌گیری او در بُعد سرمایه‌گذاری است. راهکار اول این است که وارد بازار سهام گردد، براساس شنیده‌های او چنانچه اقدام به خرید سهام شرکت x نماید، قیمت هر سهم (که در حال حاضر ۵۵ واحد پولی است) انتظار می‌رود در پایان سال، ۶۸ واحد پولی گردد. راهکار دوم این است که موجودی خود را در یک بانک که سود آن در سال ۹ درصد است، سپرده‌گذاری نماید. انتظار او از سرمایه‌گذاری بازده ۲۵۰ واحد پولی در سال است. با توجه به اینکه میزان ریسک سرمایه‌گذاری در سهام بیشتر از سپرده‌گذاری در بانک است، او در نظر دارد حداکثر ۴۰ درصد موجودی خود را در سهام شرکت x سرمایه‌گذاری کند و به علاوه نمی‌خواهد حداکثر سرمایه‌گذاری در سهام شرکت x بیشتر از ۷۵۰ واحد پولی گردد. مدلی برای حداقل نمودن میزان سرمایه‌گذاری ارائه دهید.

☑ **پاسخ:** تعریف کنید:

x_1 : تعداد سهامی که از شرکت x خریداری می‌شود. x_2 : میزان پولی که در بانک سرمایه‌گذاری می‌شود.

ابتدا تابع هدف و سپس محدودیت‌های مسأله را معرفی می‌کنیم:

در این مسأله x_1 تعداد سهامی است که باید خریداری شود و به ازای هر سهم خریداری شده ۵۵ واحد پولی باید پرداخت گردد. بنابراین $55x_1$ واحد پولی باید به ازای خرید x_1 سهم پرداخت شود. هم‌چنین x_2 میزان پولی است که در بانک سرمایه‌گذاری می‌کند. بنابراین تابع هدف مسأله به صورت $z = 55x_1 + x_2$ نوشته می‌شود.

محدودیت اول: سود سرمایه‌گذاری در شرکت x برابر $13 (= 68 - 55)$ و در صندوق اعتباری برابر $0/09$ است و حداقل بازده برابر ۲۵۰ واحد پولی مطلوب است، بنابراین این محدودیت برابر است با: $13x_1 + 0/09x_2 \geq 250$

محدودیت دوم: ۴۰ درصد موجودی در سهام شرکت x سرمایه‌گذاری می‌شود؛ در نتیجه:

$$55x_1 \leq 0/4 \times (55x_1 + x_2) \Rightarrow 33x_1 - 0/4x_2 \leq 0$$

محدودیت سوم: حداکثر سرمایه‌گذاری در سهام شرکت x برابر ۷۵۰ واحد پولی است: $55x_1 \leq 750$

بنابراین مدل برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح مختلط متناظر آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = 55x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 13x_1 + 0/09x_2 \geq 250 \\
& 33x_1 - 0/4x_2 \leq 0 \\
& 55x_1 \leq 750 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \\
& x_1 \text{ عدد صحیح}
\end{aligned}$$

پس از حل مسأله با استفاده از نرم‌افزار WinQSB، $(x_1^*, x_2^*) = (12, 1044/44)$ جواب بهینه و $z^* = 1704/44$ مقدار بهینه‌ی مسأله است. این نشان می‌دهد که با خرید ۱۲ سهم از شرکت x و سرمایه‌گذاری ۱۰۴۴/۴۴ واحد پولی در بانک، حداقل میزان سرمایه‌گذاری ۱۷۰۴/۴۴ واحد پولی است.

برنامه‌ریزی خطی ساده شده عبارت است از برنامه‌ریزی خطی حاصل از کنار گذاشتن فرض عدد صحیح بودن همه‌ی متغیرهای برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح. این مسأله را با RLP و همچنین فضای شدنی و مقدار بهینه‌ی این مسأله را نیز با X_{RLP} و z^*_{RLP} نمایش می‌دهیم.

فضای شدنی مسأله برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح

همان طور که اشاره شد، مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح با کنار گذاشتن فرض بخش‌پذیری برنامه‌ریزی خطی حاصل می‌شود. بنابراین، فضای شدنی مسأله مجموعه‌ای نامحدب است. به عبارت دقیق‌تر فضای شدنی این مسأله نقاط با اعداد صحیح درون یک چند وجهی است. این موضوع سبب می‌شود که فضای شدنی مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی ساده شده (X_{RLP}) بزرگ‌تر از فضای شدنی مسأله برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح (X_{IP}) باشد، به زبان ریاضی $X_{IP} \subseteq X_{RLP}$. بعلاوه باید در نظر داشت که مقدار بهینه‌ی مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی (z^*_{RLP}) به هیچ عنوان بدتر از مقدار بهینه‌ی مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح (z^*_{IP}) نیست. در ادامه با ارائه‌ی چند مثال عددی، حالت‌های مختلف فضای شدنی مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح محض و مختلط را نشان می‌دهیم.

مدرسان شریف

فصل سوم

«برنامه‌ریزی صفر ـ یک»

مقدمه

در فصل قبل راجع به برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح محض و مختلط و کاربردهای فراوان آن در صنعت، تولیدات و غیره صحبت شد. در این فصل کاربرد خاصی از برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح که بسیار حائز اهمیت است مورد بررسی قرار خواهد گرفت. **برنامه‌ریزی صفر و یک** که همان برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح صفر و یک است و با تصمیماتی سروکار دارد که تنها با دو انتخاب "بله" و "خیر" روبه‌رو هستند. به عنوان مثال، آیا سرمایه‌گذاری مورد نظر را باید انجام داد یا خیر؟ آیا محل مورد نظر را باید انتخاب نمود یا خیر؟

بنابراین هر تصمیمی را که فقط حق دو انتخاب داشته باشد می‌توان با متغیرهای تصمیمی نشان داد که محدود به دو مقدار ۰ و ۱ هستند. به این متغیرها، **متغیرهای دودویی** می‌گویند.

برنامه‌ریزی صفر و یک و کاربرد آن

همان‌طور که اشاره شد برنامه‌ریزی صفر و یک، کاربردهای گسترده‌ای دارد. فرض کنید که می‌خواهیم در مورد اینکه آیا عملی انجام شود یا خیر تصمیم بگیریم. در این حالت دو گزینه پیش رو داریم: ۱ـ انجام عمل ۲ـ عدم انجام عمل. در این نوع تصمیم‌گیری می‌توان از متغیرهای دودویی، که به آن **متغیرهای دودویی کمکی** نیز می‌گویند، بهره گرفت. این نوع متغیر دودویی کمکی، باید به قسمی تعریف شود که در صورت انجام عمل یک مقدار (مثلاً ۱) و در صورت عدم انجام آن عمل مقدار دیگر را بگیرد.

به زبان ریاضی:

$$x = \begin{cases} 1 & \text{در صورت انجام عمل} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مسأله‌ای که حائز اهمیت است، نحوه‌ی تعریف این متغیرها به قسمی است که به درستی بیانگر اتخاذ یا عدم اتخاذ تصمیم مورد نظر باشد.

در این قسمت کاربردهای مختلف برنامه‌ریزی صفر و یک مورد بررسی قرار می‌گیرد. سعی شده است که این کاربردها از حوزه‌های گوناگون انتخاب شود تا بیانگر گستردگی آن باشد.

مثال ۱: (بودجه‌بندی سرمایه)

در چشم‌اندازی از یک برنامه‌ریزی سه ساله، پنج طرح مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. در جدول زیر بازدهی مورد انتظار هر یک از طرح‌ها و مخارج سالیانه‌ی مربوط به آن‌ها داده شده‌اند:

طرح	مخارج سالیانه (میلیون تومان)			بازدهی (میلیون تومان)
	۱	۲	۳	
۱	۵	۱	۸	۲۰
۲	۴	۷	۱۰	۴۰
۳	۳	۹	۲	۲۰
۴	۷	۴	۱	۱۵
۵	۸	۶	۱۰	۱۰
بودجه موجود (میلیون تومان)	۲۵	۲۵	۲۵	

این مسأله هر طرح باید قبول یا رد شود. به بیان دیگر اجرای بخشی از طرح، غیرممکن است. کدام طرح‌ها باید برای یک دوره‌ی سه ساله انتخاب شوند؟

پاسخ: متغیر دودویی کمکی x_j را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر طرح } j \text{ انتخاب شود.} \\ 0 & \text{اگر طرح } j \text{ انتخاب نشود.} \end{cases}$$

مدل برنامه‌ریزی صفر و یک آن به صورت زیر ساخته می‌شود:

تابع هدف: در این مسأله هدف انتخاب چندین طرح با بیشترین مقدار بازدهی است: $\max z = 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 10x_5$

محدودیت‌ها: در این مسأله محدودیت مربوط به مخارج سالیانه به صورت زیر است: (مخارج هر سال از بودجه‌ی تخصیصی هر سال نباید بیشتر شود)

سال (۱) $5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \le 25$

سال (۲) $x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \le 25$

سال (۳) $8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + x_4 + 10x_5 \le 25$

بنابراین مدل کلی مسأله چنین است.

$$\begin{aligned} \max\ z &= 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 10x_5 \\ \text{s.t.}\quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \le 25 \\ & x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \le 25 \\ & 8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + x_4 + 10x_5 \le 25 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0 \text{ یا } 1 \end{aligned}$$

پس از حل مسأله با استفاده از نرم‌افزار WinQSB، جواب بهینه‌ی مسأله $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ و $x_5 = 0$ با مقدار بهینه‌ی $z^* = 95$ است.

بنابراین برای رسیدن به بیشترین مقدار بازدهی، طرح‌های ۱، ۲، ۳، و ۴ انتخاب شده و طرح ۵ رد می‌شود.

مثال ۲: (مسأله رژیم غذایی) در جدول زیر فهرست غذاها و دسرهای یک رستوران به همراه پروتئین و ویتامین‌های مربوط به آن‌ها داده شده است. هدف اصلی انتخاب یک غذای اصلی به همراه دسر است. می‌خواهیم این انتخاب طوری صورت گیرد که احتیاجات مقرر شده که عبارتند از: ۵۰ گرم پروتئین و ۱۵ میلی گرم ویتامین را با مینیمم هزینه برآورده سازد.

	غذاهای اصلی			دسرها		
	گوشت گوساله	گوشت مرغ	گوشت اردک	کیک	بستنی	ژله
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
پروتئین (گرم)	۱۶	۲۰	۲۵	۱۵	۲۱	۲۵
ویتامین (میلی‌گرم)	۲۰	۱۵	۱۲	۱۰	۸	۵
قیمت (هزار تومان)	۲۳	۱۱	۱۸	۳	۲	۴

پاسخ: در مسأله‌ی رژیم غذایی، متناظر با غذاهای اصلی و دسرها، متغیرهای دودویی کمکی x_1، x_2، ... و x_6 را در نظر می‌گیریم. مدل برنامه‌ریزی صفر و یک این مسأله به صورت زیر ساخته می‌شود:

تابع هدف: در این مسأله هدف مینیمم کردن هزینه به طوری است که احتیاجات مقرر شده (۵۰ گرم پروتئین و ۱۵ میلی‌گرم ویتامین) برآورده شوند.

$$\min \quad Z = 23x_1 + 11x_2 + 18x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 4x_1$$

محدودیت‌ها: محدودیت‌های این مسأله به دو دسته تقسیم می‌شوند. دسته اول محدودیت‌های مربوط به تأمین حداقل پروتئین و ویتامین هستند:

محدودیت پروتئین $16x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 15x_4 + 21x_5 + 25x_6 \ge 50$

محدودیت ویتامین $20x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 10x_4 + 8x_5 + 5x_6 \ge 15$

دسته دوم محدودیت‌های مربوط به انتخاب دقیقاً یکی از غذاهای اصلی و دقیقاً یکی از دسرها است:

محدودیت غذای اصلی $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

محدودیت دسر $x_4 + x_5 + x_6 = 1$

بنابراین مدل برنامه‌ریزی صفر و یک این مسأله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
\min\ z &= 23x_1 + 11x_2 + 18x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 4x_6 \\
\text{s.t.}\quad & 16x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 15x_4 + 21x_5 + 25x_6 \geq 50 \\
& 20x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 10x_4 + 8x_5 + 5x_6 \geq 15 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
& x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 = 0 \text{ یا } 1
\end{aligned}$$

جواب بهینه‌ی مسأله $x_3 = x_6 = 1$، $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$ و مقدار بهینه‌ی آن ۲۲ است.

مثال ۳: **(مسأله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد) در مسأله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد در پی یافتن کوتاه‌ترین مسیر برای دیدار از n شهر هستیم، به طوری که به هر شهر در این مسیر تنها یک بار سر زده شود.**

پاسخ: فرض کنید هدف در این مسأله دیدار از ۵ شهر باشد، داریم:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر به شهر } j \text{ از طریق شهر } i \text{ سر زده شود.} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

فرض کنید:

$$d_{ij} = \begin{cases} \infty & \text{اگر } i = j \text{ یا از شهر } i \text{ به شهر } j \text{ مسیر مستقیم وجود نداشته باشد.} \\ \text{فاصله بین شهر } i \text{ تا } j & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مدل برنامه‌ریزی صفر و یک این مسأله به صورت

$$\begin{aligned}
\min\ z &= \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} d_{ij}\, x_{ij} \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,2,\dots,5 \\
& \sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,2,\dots,5 \\
& x_{ij} = 0 \text{ یا } 1
\end{aligned}$$

است.

مثال ۴: **(مسأله کوله‌پشتی) مسأله کوله‌پشتی با وضعیتی سروکار دارد که یک سرباز باید برای حمل با ارزش‌ترین کالاها در کوله پشتی‌اش تصمیم بگیرد. در جدول زیر وزن هر کالا (برحسب کیلوگرم) و قیمت هر کدام از آن‌ها داده شده است.**

کالا	۱	۲	۳	۴	۵	۶
وزن (کیلوگرم)	۲	۷	۸	۵	۳	۴
قیمت (هزار تومان)	۹	۱۲	۱۰	۱۵	۹	۱۲

اگر حداکثر ظرفیت کوله‌پشتی ۲۰ کیلوگرم باشد، کالاها را به گونه‌ای انتخاب کنید که حداکثر ارزش را داشته باشند.

☑ **پاسخ:** هدف در این مسأله انتخاب کالاهایی است که بیشترین ارزش را داشته باشند، به طوری که ظرفیت آن‌ها بیش از ۲۰ کیلوگرم نباشد. فرض کنید متغیر دودویی x_j نشان دهنده‌ی کالای j ام $(j=1,2,\cdots,6)$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x_j=\begin{cases}1 & \text{اگر کالای } j \text{ انتخاب شود}\\ 0 & \text{اگر کالای } j \text{ انتخاب نشود}\end{cases}$$

بنابراین فرم کلی مسأله چنین است:

$$\begin{aligned}\max\quad & z=9x_1+12x_2+10x_3+15x_4+9x_5+12x_6\\ \text{s.t.}\quad & 2x_1+7x_2+8x_3+5x_4+3x_5+4x_6\le 20\\ & x_j=0 \text{ یا } 1 \quad j=1,2,\cdots,6\end{aligned}$$

پس از حل مسأله با استفاده از نرم‌افزار WinQSB، جواب بهینه و مقدار بهینه عبارتند از: $x_1=0, x_2=1, x_3=0, x_4=x_5=x_6=1, z^*=48$

همان طور که مشاهده می‌کنید برای رسیدن به بیشترین ارزش، کالاهای ۱، ۴، ۵ و ۶ باید انتخاب شوند.

مدل‌سازی مسائل برنامه‌ریزی صفر و یک

همانطور که قبلاً اشاره شد مدل‌سازی مسائل برنامه‌ریزی صفر و یک بسیار حائز اهمیت است. متغیرهای دودویی در این نوع مسائل باید به گونه‌ای تعریف شوند که دقیقاً بیانگر هدفی باشند که به خاطر آن تعریف شده‌اند. در غیر این صورت، حل این مدل‌ها می‌تواند به جواب شدنی غیر بهینه و یا حتی نشدنی مسأله‌ی اصلی منجر شود. متغیرهای دودویی کاربردهای جالب دیگری نیز دارند که در ادامه بیان می‌گردد.

محدودیت‌های این یا آن

یکی از کاربردهای مهم برنامه‌ریزی صفر و یک، انتخابی است که می‌تواند بین دو محدودیت اتفاق بیفتد. به طوری که یکی از محدودیت‌ها حتماً باید برقرار باشد (البته محدودیت دیگر می‌تواند برقرار نباشد) برای لحاظ کردن یا محدودیت ۱ و یا محدودیت ۲ از متغیر دودویی کمکی $y\in\{0,1\}$ استفاده می‌کنیم. در واقع $y\in\{0,1\}$ یعنی یا $y=0$ و یا $y=1$. برای نشان دادن نحوه‌ی اعمال این نوع محدودیت‌ها به مثال زیر توجه کنید:

فرض کنید می‌خواهیم حداقل یکی از دو محدودیت (نه لزوماً هر دو) برقرار باشد.

$$3x_1+2x_2\le 18 \qquad \text{محدودیت (۱)}$$

$$x_1+4x_2\le 16 \qquad \text{محدودیت (۲)}$$

$$x_1,x_2\ge 0$$

فرض کنید M یک عدد بسیار بزرگ باشد، با استفاده از این M، محدودیت‌ها را می‌توان به یکی از دو شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{cases}3x_1+2x_2\le 18+M & \text{محدودیت زائد}\\ x_1+4x_2\le 16\end{cases} \qquad \text{یا} \qquad \begin{cases}3x_1+2x_2\le 18\\ x_1+4x_2\le 16+M & \text{محدودیت زائد}\end{cases}$$

با اضافه کردن M به سمت راست هر یک از محدودیت‌ها، آن محدودیت تبدیل به محدودیت زائد می‌گردد. چون هر جوابی که در سایر محدودیت‌ها صدق کند در آن محدودیت نیز برقرار خواهد بود. حال نشان می‌دهیم که چرا یکی از محدودیت‌ها زائد می‌شوند. فرض کنید محدودیت (۱) برقرار باشد، یعنی $3x_1+2x_2\le 18$ آنگاه دو حالت رخ می‌دهد یا محدودیت (۲) برقرار است، یعنی $x_1+4x_2\le 16$ (که در این صورت محدودیت (۲) زائد است) و یا محدودیت (۲) برقرار نیست، یعنی $x_1+4x_2>16$. در این حالت اگر $x_1+4x_2>16$ و M عددی بزرگ باشد بنابراین $x_1+4x_2\le 16+M$ خواهد بود و مجدداً محدودیت (۲) زائد خواهد شد.

محدودیت‌های بازنویسی شده با روابط زیر معادل هستند:

$$\begin{aligned}&3x_1+2x_2\le 18+My_1\\ &x_1+4x_2\le 16+My_2\\ &y_1+y_2\le 1\\ &y_1,y_2=0 \text{ یا } 1\\ &x_1,x_2\ge 0\end{aligned}$$

فصل چهارم

«برنامه‌ریزی پویا»

مقدمــه

برنامه‌ریزی پویا یک فن ریاضی برای گرفتن یک دنباله از تصمیمات **مرتبط به** هم است. در برنامه‌ریزی پویا جواب بهینه‌ی یک مسأله‌ی n متغیره با تجزیه‌ی آن به n مرحله تعیین می‌شود که هر مرحله از یک مسأله جزئی با یک متغیر تشکیل می‌شود. از نظر محاسباتی حل n مسأله با یک متغیر می‌تواند ساده‌تر از حل یک مسأله با n متغیر باشد. متأسفانه برخلاف برنامه‌ریزی خطی یک روش استاندارد برای حل کلی مسائل برنامه‌ریزی پویا وجود ندارد، اما خوشبختانه ماهیت بازگشتی محاسبات در برنامه‌ریزی پویا، که اجازه می‌دهد جواب بهینه‌ی یک مسأله‌ی جزئی به عنوان ورودی برای مسأله جزئی بعدی باشد، محاسبات برنامه‌ریزی پویا را ساده‌تر می‌کند. در این محاسبات وقتی آخرین مسأله‌ی جزئی حل می‌گردد جواب بهینه‌ی کل مسأله در دسترس خواهد بود. نکته‌ی حائز اهمیت این است که این n مسأله‌ی جزئی مستقل از هم نبوده و دارای تابع هدف و محدودیت وابسته به‌هم هستند.

سه عنصر پایه‌ای یک مدل برنامه‌ریزی پویا عبارتند از:

۱ـ تعریف *مراحل* ۲ـ تعریف *گزینه‌ها*، در هر مرحله ۳ـ تعریف *حالت‌ها*، در هر مرحله

تعریف مراحل و گزینه‌ها کار پیچیده‌ای نیست، اما مشکل اساسی در تعریف حالت‌ها به گونه‌ای است که به هم مرتبط باشند. به همین دلیل در این فصل روی درک مفهوم حالت بیشتر تأکید می‌گردد.

نکته۱: حالت در هر مرحله باید به گونه‌ای تعریف شود که *مرتبط* به حالات در مراحل قبلی باشد. به عبارت دیگر حالت‌ها نباید مستقل از هم باشند.

نکته۲: حالت در مرحله‌ی $n=1$ باید مقداری معلوم و مشخص باشد.

مثال۱: کدام‌یک از موارد زیر درباره یک مسأله برنامه‌ریزی پویا صحت دارد؟

۱) حالت در مرحله‌ی $n=1$ باید مقداری معلوم و مشخص باشد.

۲) حالت در هر مرحله مرتبط به حالات مراحل قبلی است.

۳) هر مسأله‌ی برنامه‌ریزی پویا شامل چندین مرحله و هر مرحله شامل چندین حالت است.

۴) همه‌ی موارد

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» همان‌طور که اشاره شد برنامه‌ریزی پویا در برگیرنده‌ی مسائلی است که شامل چندین مرحله است و هر یک از مراحل نیز شامل چندین حالت است. حالت‌های هر مرحله مرتبط به‌هم هستند و نمی‌توانند مستقل از هم باشند. حالت‌ها باید طوری تعریف شوند که در مرحله اول تنها یک حالت داشته باشیم که مقدار آن معلوم و مشخص باشد. بنابراین گزینه (۴) یعنی همه موارد درباره‌ی مسأله‌ی برنامه‌ریزی پویا صادق است.

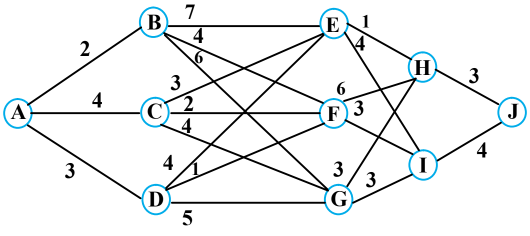
مثال۲: در یک مسأله برنامه‌ریزی پویا، مسأله به تعدادی مسأله‌ی جزئی تقسیم می‌شود که هر کدام را یک .... می‌نامند.

۱) متغیر تصمیم ۲) مرحله (stage) ۳) حالت (state) ۴) هیچ‌کدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» هر مسأله‌ی برنامه‌ریزی پویا در حالت کلی شامل یک تصمیم‌گیری n متغیره است. به ازای هر یک از این متغیرها یک مرحله تعریف می‌شود که مسائل جزئی را تشکیل می‌دهند. بنابراین گزینه (۲) درست است.

مثال ۳: مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر (مسأله‌ی دلیجان) مسأله‌ی دلیجان یکی از مهمترین مسائل در درک مفاهیم و ویژگی های برنامه‌ریزی پویا است. دراین مسأله هدف یافتن کوتاه‌ترین مسیر بین دو شهر است.

فرض کنید که می‌خواهید کوتاه‌ترین مسیر از شهر A برای رسیدن به شهر J را انتخاب کنید. در شکل روبه‌رو مسیرهای ممکن بین این دو شهر نشان داده شده است.



کوتاه‌ترین مسیر شبکه

همان‌طور که از شکل بالا پیدا است، طول مسافت بین شهر i تا شهر j که با d_{ij} نمایش می‌دهیم به صورت زیر است.

	B	C	D
A	۲	۴	۳

	E	F	G
B	۷	۴	۶
C	۳	۲	۴
D	۴	۱	۵

	H	I
E	۱	۴
F	۶	۳
G	۳	۳

	J
H	۳
I	۴

کوتاه‌ترین مسیر بین شهرهای A و J را بیابید.

☑ **پاسخ:** یک تصور اشتباه این است که در هر مرحله کم‌هزینه‌ترین مسیر را رسم کنیم، که در این صورت مسیر ۱۰ → ۹ → ۶ → ۲ → ۱ را با هزینه ۱۳ خواهیم داشت، اما در ادامه حل مسأله خواهیم دید که مسیر مذکور کم‌هزینه‌ترین مسیر نیست. این مثال ساده نشان می‌دهد که در مسأله‌ی برنامه‌ریزی پویا جواب بهینه‌ی همه‌ی مراحل لزوماً جواب بهینه‌ی کل مسأله را به ما نمی‌دهد. یکی از روش‌های ممکن برای حل این مسأله، روش آزمایش و خطا است. به این صورت که همه‌ی راه‌های بین گره A و J بررسی شوند، اما با توجه به این که، تعداد راه‌های احتمالی خیلی زیاد (۱۸) است و بررسی تک‌تک این مسیرها کاری دشوار است و احتیاج به زمان زیادی دارد بنابراین از برنامه‌ریزی پویا برای حل این مسأله استفاده می‌کنیم. برنامه‌ریزی پویا، با حل یک جزء کوچک از مسأله‌ی اصلی شروع شده و جواب بهینه‌ی این مسأله جزئی را محاسبه می‌کند و سپس با کنار هم قراردادن جواب‌های بهینه‌ی این مسائل جزئی جواب بهینه‌ی مسأله‌ی اصلی را محاسبه می‌کند.

فرمول‌بندی:

در این مسأله ۴ مرحله وجود دارد. فرض کنید متغیر تصمیم x_n $(n = ۱,۲,۳,۴)$ شهری باشد که در مرحله n فروشنده از آن خواهد گذشت.

بنابراین مسیر انتخاب به صورت $A \to x_۱ \to x_۲ \to x_۳ \to x_۴$ است که در آن $x_۴ = J$ است.

به علاوه، فرض کنید $f_n(s_n, x_n)$ مقدار بهینه‌ی هدف مورد نظر برای مراحل باقی‌مانده $(n, n+۱, ..., ۴)$ است، وقتی فروشنده در حالت s در مرحله‌ی n است، که در آن تصمیم x_n را اتخاذ می‌کند.

s و n داده شده است، فرض کنید x_n^* نشان‌دهنده هر مقداری از x_n باشد که تابع $f_n(s_n, x_n)$ را مینیمم می‌کند، همچنین فرض کنید $f_n^*(s)$، مینیمم مقدار متناظر $f_n(s_n, x_n)$ باشد. بنابراین:

$$f_n^*(s) = \min_{x_n} f_n(s, x_n) = f_n(s, x_n^*)$$

به طوری که:

$$f_n(s, x_n) = d_{s_n x_n} + f_{n+۱}^*(x_n)$$

مقدار $d_{s_n x_n}$ طول مسیر بین گره $i = s$ تا گره $j = x_n$ را نشان می‌دهد. از آن جایی که مقصد نهایی (حالت J)، در انتهای مرحله‌ی ۴ به دست می‌آید، داریم:

$$f_۵^*(J) = ۰$$

هدف این مسأله پیدا کردن $f_۱^*(A)$ و مسیر متناظر آن است. برنامه‌ریزی پویا با حل مسائل جزئی $f_۴^*(s_۴)$، $f_۳^*(s_۳)$ و $f_۲^*(s_۲)$ برای هر حالت احتمالی s، این مقدار بهینه را محاسبه می‌کند.

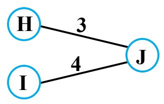
فرآیند حل:

وقتی تنها یک مرحله برای رسیدن به مقصد مانده باشد $(n = ۴)$ یعنی فروشنده یا در حالت H و یا در حالت I است. اگر $x_۴ = J$ باشد مسیر او عبارت است از $s \to J$، بنابراین داریم:

$$f_۴^*(s) = f_۴(s, J) = d_{s,J}$$

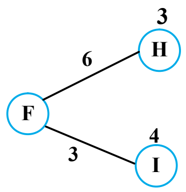
جواب مسأله‌ی جزئی برای $n=۴$ به صورت زیر است:

$n=۴$



$s \backslash x_۴$	$f_۴(s,x_۴)=d_{sx_۴}$ J	$f_۴^*(s)$	$x_۴^*$
H	۳	۳	J
I	۴	۴	J

اگر دو مرحله از سفر فروشنده باقی مانده باشد، $n=۳$، جواب با اندکی محاسبه به دست خواهد آمد، به طور مثال، فرض کنید فروشنده در حالت F باشد. آن‌گاه مسیر بعدی فروشنده، به ترتیب حالت‌های H یا I با هزینه‌های $d_{FH}=۶$ یا $d_{FI}=۳$ است.

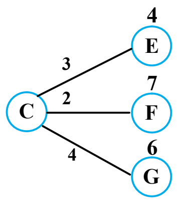


اگر حالت H انتخاب شود، کوتاه‌ترین فاصله‌ای که باید برای سفرش متحمل شود، برابر با $f_۴^*(H)=۳$ است، در نتیجه طول کوتاه‌ترین مسیر ناشی از این تصمیم برابر $۶+۳=۹$ است. اگر به جای حالت H، حالت I انتخاب شود، این مسافت برابر $۳+۴=۷$ خواهد بود. بنابراین انتخاب بهینه $x_۳^*=I$ است، زیرا کوتاه‌ترین فاصله $f_۳^*(F)=۷$ است.

با دنبال کردن همین روش برای هر حالت ممکن دیگر $s=E$ و $s=G$ داریم:

$n=۳$

$s \backslash x_۳$	$f_۳(s,x_۳)=d_{sx_۳}+f_۴^*(x_۳)$ H	I	$f_۳^*(s)$	$x_۳^*$
E	**۱+۳=۴**	۴+۴=۸	۴	H
F	۶+۳=۹	**۳+۴=۷**	۷	I
G	**۳+۳=۶**	۳+۴=۷	۶	H



جواب مسأله‌ی جزئی مرحله‌ی دوم $(n=۲)$ برای زمانی که سه مرحله برای رفتن دارد نیز به همین ترتیب محاسبه می‌شود. در این مرحله، $f_۲(s,x_۲)=d_{sx_۲}+f_۳^*(x_۲)$ است. به طور مثال فرض کنید، فروشنده در شهر E باشد.

مسیرهای بعدی او حالت‌های E، F و G به ترتیب با طول‌های $d_{C,E}=۳$، $d_{C,F}=۲$ یا $d_{C,G}=۴$ است. داریم:

$$x_۲=E: \qquad f_۲(C,E)=d_{CE}+f_۳^*(E)=۳+۴=۷$$

$$x_۲=F: \qquad f_۲(C,F)=d_{CF}+f_۳^*(F)=۲+۷=۹$$

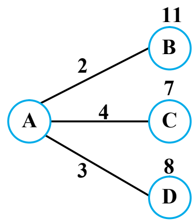
$$x_۲=G: \qquad f_۲(C,G)=d_{CG}+f_۳^*(G)=۴+۶=۱۰$$

کوتاه‌ترین مسیر در میان این سه حالت، ۷ است، بنابراین کوتاه ترین مسیر از حالت C تا انتهای مسیر $f_۲^*(c)=۷$ با گذشتن از شهر E است. برای حالت‌های B و D نیز داریم:

$n=۲$

$s \backslash x_۲$	$f_۲(s,x_۲)=d_{sx_۲}+f_۳^*(x_۲)$ E	F	G	$f_۲^*(s)$	$x_۲^*$
B	**۷+۴=۱۱**	**۴+۷=۱۱**	۶+۶=۱۲	۱۱	E یا F
C	**۳+۴=۷**	۲+۷=۹	۴+۶=۱۰	۷	E
D	**۴+۴=۸**	**۱+۷=۸**	۵+۶=۱۱	۸	E یا F

برای مرحله $n=۱$، باید کوتاه‌ترین مسیر برای گذشتن از ۴ مرحله محاسبه شود.



داریم:

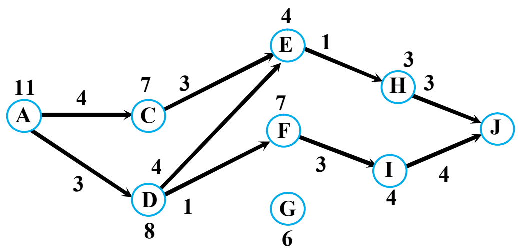
$$x_۱=B:\quad f_۱(A,B)=d_{AB}+f_۲^*(B)=۲+۱۱=۱۳$$
$$x_۱=C:\quad f_۱(A,C)=d_{AC}+f_۲^*(C)=۴+۷=۱۱$$
$$x_۱=D:\quad f_۱(A,D)=d_{AD}+f_۲^*(D)=۳+۸=۱۱$$

از آن‌جایی که کوتاه‌ترین مسیر $f_۱^*(A)=۱۱$ و $x_۱^*=C,D$ است، پس داریم:　　$n=۱$

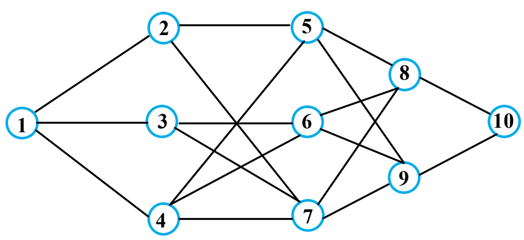
s \ $x_۱$	$f_۱(s,x_۱)=d_{sx_۱}+f_۲^*(x_۱)$			$f_۱^*(s)$	$x_۱^*$
	B	C	D		
A	$۲+۱۱=۱۳$	$۴+۷=۱۱$	$۳+۸=۱۱$	۱۱	C یا D

اکنون می‌توان جواب بهینه‌ی کل مسأله را مشخص کرد. برای $n=۱$، فروشنده ابتدا باید به یکی از شهرهای C یا D برود. فرض کنید $x_۱^*=C$ باشد. به ازای $n=۲$ و $s=C$، جواب بهینه عبارت است از $x_۲^*=E$. در مرحله‌ی $n=۳$، $x_۳^*=H$ برای $s=E$ است و با استفاده از $n=۴$، $x_۴^*=J$ به دست می‌آید. بنابراین کوتاه‌ترین مسیر $A\to C\to E\to H\to J$ است. اگر $x_۱^*=D$ انتخاب شود، مسیر بهینه عبارت خواهد بود از: $A\to D\to E\to H\to J$ و $A\to D\to F\to I\to J$. که همه‌ی این مسیرها منجر به جواب بهینه‌ی $f_۱^*(A)=۱۱$ می‌شوند.

حالت :



مثال ۴: با توجه به شکل اگر فردی بخواهد از مبدأ ۱ به مقصد ۱۰ برود، چند مرحله باید طی کند؟



۱) ۴

۲) ۵

۳) ۳

۴) ۶

پاسخ: گزینه «۱»

مرحله‌ی ۱: از گره ۱ به گره‌های ۲، ۳ یا ۴

مرحله‌ی ۲: از گره های ۲، ۳ یا ۴ به گره‌های ۵، ۶ یا ۷

مرحله‌ی ۳: از گره‌های ۵، ۶ یا ۷ به گره‌های ۸ یا ۹

مرحله‌ی ۴: از گره‌های ۸ یا ۹ به گره ۱۰

مدرسان شریف

فصل پنجم

«برنامه‌ریزی غیرخطی»

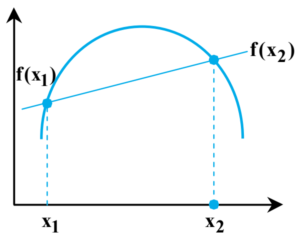
مقدمه

بیشتر مسائل واقعی را نمی‌توان با استفاده از برنامه‌ریزی خطی حل کرد، چون فرض اصلی مسائل برنامه‌ریزی خطی این است که همه‌ی محدودیت‌ها و تابع هدف خطی هستند، اگر چه این فرض در برخی از مسائل واقعی برقرار است اما در بسیاری از آن‌ها صادق نیست. به طور مثال، در برنامه‌ریزی‌های اقتصادی، غیرخطی بودن روابط بین متغیرها یک قاعده‌ی کلی است. بنابراین در این فصل به علت کاربردهای فراوان برنامه‌ریزی غیرخطی در حل مسائل به بررسی آن می‌پردازیم.

در مسائل **برنامه‌ریزی غیرخطی** فرض خطی بودن تابع هدف و یا چند وجهی بودن ناحیه شدنی برقرار نیست. به عبارت دیگر، فرض مناسب بودن و جمع‌پذیری در این نوع مسائل وجود ندارد. در ادامه نشان می‌دهیم که برقرار نبودن این مفروضات چه تأثیر عمیقی روی مفاهیم اصلی مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی می‌گذارد. در یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی غیرخطی این امکان وجود دارد که هیچ‌کدام از قوانین مسائل برنامه‌ریزی خطی برقرار نباشد.

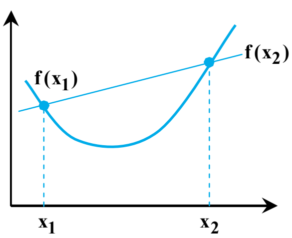
قبل از ارائه چند مثال (جهت درک بیشتر این مطالب) تعریف تابع محدب و مقعر ارائه می‌گردد.

تابع f را روی یک مجموعه محدب $\mathbf{S}$ در نظر بگیرید. f را مقعر می‌گوییم اگر $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{S}$ $(x_1 \neq x_2)$ و $\forall \lambda \in [0,1]$ رابطه زیر را داشته باشیم:



$$\underbrace{\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)}_{\text{وتر}} \leq \underbrace{f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)}_{\text{کمان}}$$

این تابع، محدب است اگر:

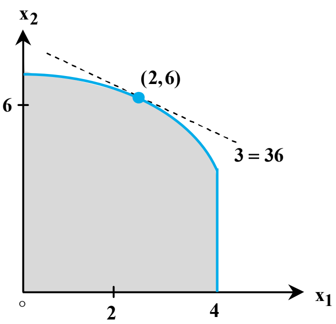


$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$$

تذکر ۱: تابع f محدب است اگر و تنها اگر $-f$ مقعر باشد.

مثال ۱: مسأله‌ی برنامه‌ریزی غیر خطی زیر را بررسی کنید.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & x_1 \leq 4 \\ & 9x_1^2 + 5x_2^2 \leq 216 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

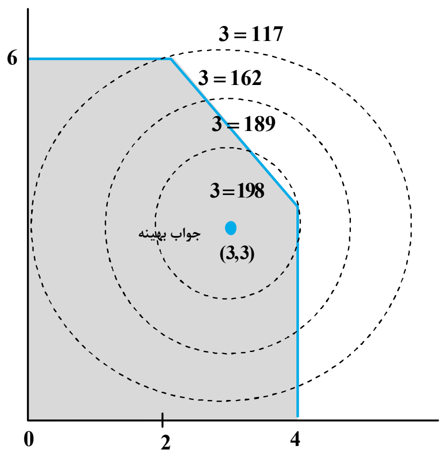


☑ **پاسخ:** تابع هدف این مسأله خطی است و ناحیه‌ی شدنی آن نیز اگر چه یک چند وجهی نیست اما مجموعه‌ای محدب است در واقع، تنها یکی از محدودیت‌های مسأله غیرخطی است. این شرایط باعث می‌شود که هیچ نقطه‌ی رأسی‌ای بهینه نباشد و تنها یک نقطه‌ی مرزی جواب بهینه مسأله باشد. شکل مقابل نشان می‌دهد که نقطه‌ی غیررأسی $(2,6)$ جواب بهینه‌ی منحصر به فرد این مسأله است.

در مثال زیر نشان داده می‌شود که جواب بهینه‌ی منحصر به فرد یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی غیرخطی می‌تواند یک نقطه درونی باشد.

مثال ۲: مسأله‌ی برنامه‌ریزی غیر خطی زیر را بررسی کنید.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 54x_1 - 9x_1^2 + 78x_2 - 13x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \le 4 \\ & 2x_2 \le 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

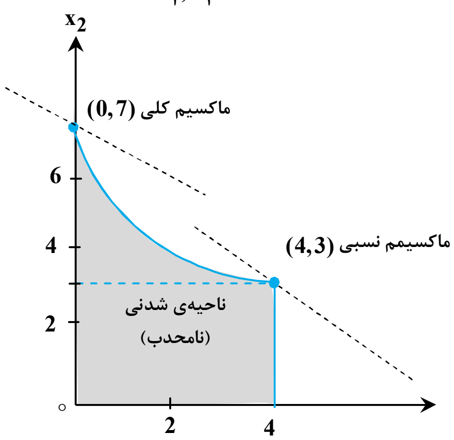


☑ **پاسخ:** ناحیه‌ی شدنی این مسأله یک چند وجهی (محدب) است ولی تابع هدف آن یک تابع غیرخطی است. همانطور که در شکل روبه‌رو نشان داده شده است، جواب بهینه‌ی این مسأله $(3,3)$ است که یک نقطه درونی است.

در یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی بهینه‌ی نسبی (موضعی) همواره بهینه‌ی کلی است اما در مثال زیر نشان می‌دهیم این شرایط برای مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی می‌تواند برقرار نباشد.

مثال ۳: مسأله‌ی برنامه‌ریزی غیرخطی زیر را بررسی کنید.

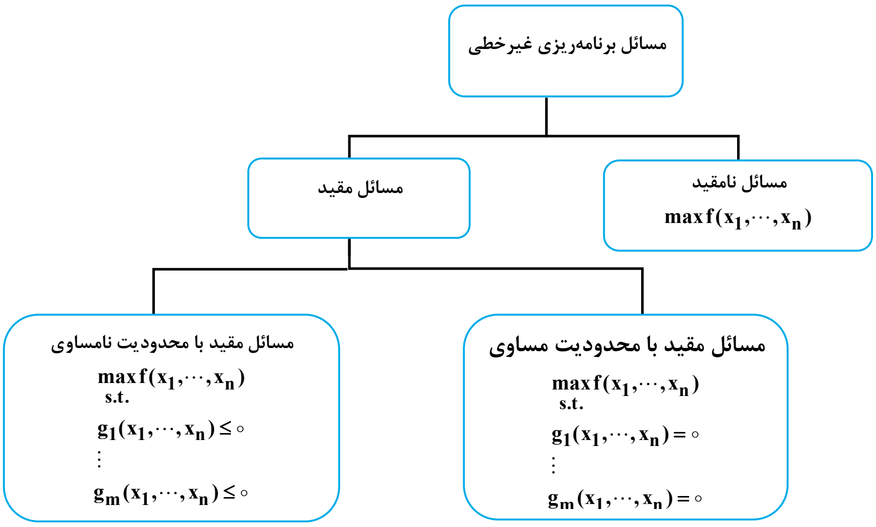
$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \le 4 \\ & 2x_2 \le 14 \\ & 8x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2 \le 49 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



☑ **پاسخ:** تابع هدف این مسأله، خطی است اما ناحیه‌ی شدنی آن یک مجموعه‌ی نامحدب است. شکل روبه‌رو نشان می‌دهد که نقطه‌ی $(4,3)$ ماکسیمم نسبی و $(0,7)$ ماکسیمم کلی این مسأله است:

در ادامه به دنبال یافتن جواب بهینه انواع مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی هستیم. مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی را به دو دسته تقسیم می‌کنیم:
۱ـ مسائل نامقید ۲ـ مسائل مقید. در مسائل نامقید تنها به دنبال یافتن نقاط اکسترمم یک تابع چند متغیره هستیم و مسائل مقید نیز به دو دسته‌ی مسائل مقید با محدودیت مساوی و مسائل مقید با محدودیت نامساوی تقسیم می‌شوند.

نمودار زیر این تقسیم‌بندی را نشان می‌دهد:



مسائل نامقید

نقطه‌ی ماکسیمم: نقطه‌ی $(x_1^\circ,\cdots,x_j^\circ,\cdots,x_n^\circ)=\mathbf{x}_\circ$، نقطه‌ی ماکسیمم است، اگر برای هر $\mathbf{h}=(h_1,\cdots,h_j,\cdots,h_n)$ و به ازای هر j، مقدار $|h_j|$ به اندازه‌ی کافی کوچک داشته باشیم.

$$f(\mathbf{x}_\circ+\mathbf{h})\le f(\mathbf{x}_\circ)$$

به عبارت دیگر، $\mathbf{x}_\circ$ نقطه‌ی ماکسیمم است، اگر مقدار f در هر نقطه از همسایگی $\mathbf{x}_\circ$ از $f(\mathbf{x}_\circ)$ تجاوز نکند. اگر در این همسایگی $f(\mathbf{x}_\circ+\mathbf{h})<f(\mathbf{x}_\circ)$، آن‌گاه $\mathbf{x}_\circ$ نقطه‌ی ماکسیمم اکید است.

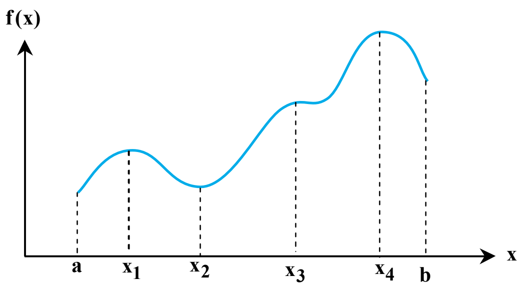
نقطه‌ی مینیمم: نقطه‌ی $\mathbf{x}_\circ=(x_1^\circ,\ldots,x_j^\circ,\ldots,x_n^\circ)$ مینیمم است، اگر برای هر $\mathbf{h}=(h_1,\ldots,h_j,\ldots,h_n)$ و به ازای هر j، مقدار $|h_j|$ به اندازه کافی کوچک داشته باشیم:

$$f(\mathbf{x}_\circ+\mathbf{h})\ge f(\mathbf{x}_\circ)$$

به عبارت دیگر، $\mathbf{x}_\circ$ نقطه‌ی مینیمم است، اگر مقدار f در هر نقطه از همسایگی $\mathbf{x}_\circ$ از $f(\mathbf{x}_\circ)$ بزرگتر باشد. اگر $f(\mathbf{x}_\circ+\mathbf{h})>f(\mathbf{x}_\circ)$، آن‌گاه به $\mathbf{x}_\circ$ نقطه‌ی مینیمم اکید گویند.

نقطه‌ی اکسترمم: نقطه‌ی اکسترمم تابع $f(x)$ معرف نقطه‌ی ماکسیمم یا مینیمم آن تابع است.

شکل روبه‌رو نقاط ماکسیمم و مینیمم تابع تک متغیره‌ی $f(x)$ را بر بازه‌ی $[a,b]$ نشان می‌دهد.



در این شکل نقاط x_1، x_2، و x_4 نقاط اکسترمم تابع $f(x)$ هستند، در واقع x_1 و x_4 نقاط ماکسیمم و x_2 نقطه‌ی مینیمم این تابع هستند. و چون:

$$f(x_4)=\max\{f(x_1),f(x_4)\}$$

بنابراین $f(x_4)$ **ماکسیمم کلی** یا **مطلق** و $f(x_1)$ ماکسیمم **موضعی** یا **نسبی** و $f(x_2)$ مینیمم کلی است.

نکته۱: اگر $f(x)$ روی بازه‌ی کران‌دار و بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، روی این بازه هم ماکسیمم و هم مینیمم دارد.

نکته۲: اگر $f(x)$ روی بازه‌ی کران‌دار و بسته‌ی $[a,b]$ محدب (مقعر) و $\bar{x}\in[a,b]$ مینیمم (ماکسیمم) موضعی باشد. آن‌گاه $\bar{x}$ مینیمم (ماکسیمم) کلی نیز است.

نکته۳: اگر $f(x)$ محدب اکید باشد و $\bar{x}$ مینیمم موضعی، آن‌گاه $\bar{x}$ مینیمم کلی منحصربه فرد نیز است.

نکته۴: اگر $f(x)$ محدب و $\bar{x}$ مینیمم موضعی اکید باشد، آن‌گاه $\bar{x}$ مینیمم کلی منحصر به فرد نیز است.

شرایط مشابه برای مسأله‌ی ماکسیمم‌سازی نیز برقرار است.

شرط لازم و کافی برای وجود نقاط اکسترمم

نشان می‌دهیم شرط لازم برای آن که $x_\circ$ نقطه‌ی اکسترمم تابع مشتق‌پذیر تک متغیره‌ی $f(x)$ باشد، آن است که $f'(x_\circ)=\circ$ و شرط کافی با استفاده از علامت $f''(x_\circ)$ تعیین می‌گردد. سپس با تعمیم این شرایط برای توابع n متغیره، بیان می‌کنیم. $\nabla f(\mathbf{x}_\circ)=\circ_n$ شرط لازم است برای آن که $x_\circ$ نقطهٔ اکسترمم تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ باشد. شرط کافی با استفاده از معین بودن ماتریس هسی تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x_\circ$ به دست می‌آید.

توضیح: هس (Hess) نام شهری در آلمان است. به اهالی این شهر به لاتین Hessian گفته می‌شود، پس بهترین واژه‌ی معادل آن در زبان فارسی «هسی» است.

قضیه: شرط لازم برای آن که $x_\circ$ نقطه‌ی اکسترمم تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ باشد، آن است که $f'(x_\circ)=\circ$.

اثبات: برای این که نشان دهیم $x_\circ$ نقطه‌ی اکسترمم تابع است، بسط تیلور تابع $f(x)$ را حول نقطهٔ $x_\circ$ می‌نویسیم:

$$f(x_\circ+h)=f(x_\circ)+hf'(x_\circ)+\frac{h}{۲!}f''(x_\circ)+\dots$$

برای h های به اندازه‌ی کافی کوچک داریم:

$$f(x_\circ+h)\cong f(x_\circ)+hf'(x_\circ)$$

با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم $f'(x_\circ)\neq\circ$. ابتدا نشان می‌دهیم $x_\circ$ نمی‌تواند مینیمم موضعی باشد. h به اندازهٔ کافی کوچک را طوری انتخاب کنید که $\operatorname{sign}(h)=-\operatorname{sign}(f'(x_\circ))$. بنابراین $hf'(x_\circ)<\circ$ و در نتیجه

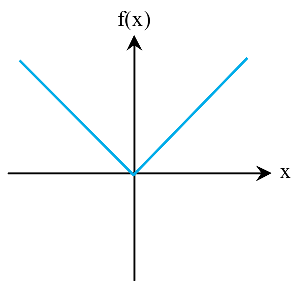
$$f(x_\circ+h)<f(x_\circ)$$

که با مینیمم بودن $x_\circ$ تناقض دارد.

به طور مشابه با اختیار $\operatorname{sign}(h)=-\operatorname{sign}(f'(x_\circ))$ خواهیم داشت $f(x_\circ+h)>f(x_\circ)$، که نشان می‌دهد $x_\circ$ ماکسیمم نیست. بنابراین $x_\circ$ نمی‌تواند اکسترمم باشد که با فرض مسأله تناقض دارد. پس فرض خلف باطل است و $f'(x_\circ)=\circ$ ■

در مثال زیر نشان می‌دهیم که مشتق‌پذیر بودن تابع $f(x)$ فرض حائز اهمیتی است:

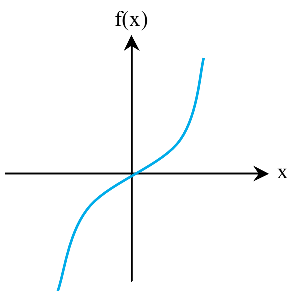
مثال۴: تابع $f(x)=|x|$ را در نظر بگیرید.



پاسخ: $x=\circ$ مینیمم مطلق تابع $f(x)=|x|$ است. اگرچه $f'(\circ)$ تعریف نمی‌شود.

در مثال زیر نشان می‌دهیم $f'(x_\circ)=\circ$ نمی‌تواند شرط کافی برای اکسترمم بودن $x_\circ$ باشد.

مثال۵: تابع $f(x)=x^۳$ را در نظر بگیرید.



پاسخ: مشتق این تابع در نقطهٔ $x=\circ$ برابر صفر است $(f'(\circ)=\circ)$ اما این نقطه اکسترمم تابع نیست.