# فصل اول

## « یادآوری »

### توان

❖ **تعریف ۱:** a به توان n را که به شکل $a^n$ نمایش می‌دهند، یعنی اینکه عدد a را n بار در خودش ضرب کنیم. اگر a و b اعداد حقیقی و m و n اعداد صحیح باشند آنگاه روابط زیر را داریم :

۱) $a^m \times a^n = a^{m+n}$　　۲) $a^n \times b^n = (ab)^n$　　۳) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

۴) $(a^m)^n = a^{mn}$　　۵) $a^n = \dfrac{۱}{a^{-n}}$　　۶) $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

**تذکر۱ :** هر عدد به توان یک برابر خود عدد می‌باشد : $a^۱ = a$

**تذکر۲ :** هر عدد غیر از صفر اگر به توان صفر برسد، برابر یک می‌شود : $a^\circ = ۱$

### رادیکالها

❖ **تعریف ۲:** عبارتی مانند $\sqrt[n]{a}$ را ریشه nام ، a گویند و n را که معمولاً عددی طبیعی می‌باشد فرجه رادیکال می‌نامند .

قضایای رادیکالها:

۱) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$　　۲) $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \quad (a > \circ)$　　۳) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$　　۴) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}} = \sqrt[mnk]{a}$

**تذکر۳ :** اگر فرجه رادیکال زوج باشد باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد تا رادیکال در مجموعه اعداد حقیقی معنی دار باشد .

**تذکر۴ :** اگر فرجه رادیکال فرد باشد، عبارت زیر رادیکال منفی نیز می‌تواند باشد .

**مثال :**　۱) $\sqrt{۳۶} = ۶$　　۲) $\sqrt[۳]{-۲۷} = -۳$　　۳) $\sqrt{-۱۶} \neq -۴$

**مثال ۱ : حاصل عبارت** $A = \dfrac{\sqrt[۳]{a} \times \sqrt{b}}{\sqrt[۴]{ab}}$ **کدام است ؟**

۱) $\sqrt[۴]{ab^۲}$　　۲) $\sqrt[۴]{ab}$　　۳) $\sqrt[۴]{a^۲ b}$　　۴) هیچکدام

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$A = \frac{\sqrt[۴]{a^۲} \times \sqrt[۴]{b^۳}}{\sqrt[۴]{ab}} = \frac{\sqrt[۴]{a^۲ b^۳}}{\sqrt[۴]{ab}} = \sqrt[۴]{\frac{a^۲ b^۳}{ab}} = \sqrt[۴]{ab^۲}$$

توجه شود در صورت کسر چون برای ضرب کردن، فرجه‌ها با هم برابر نبودند، لذا کوچکترین مضرب مشترک فرجه ها را حساب کردیم و عبارت داخل رادیکال را با توجه به فرجه تغییر دادیم .

**مثال ۲ : حاصل عبارت** $A = ۲\sqrt[۳]{۵۴} + \sqrt{۱۲} - \sqrt[۳]{۱۲۸}$ **را بدست آورید .**

☑ **پاسخ :**

$$A = ۲\sqrt[۳]{۲۷ \times ۲} + \sqrt{۳ \times ۴} - \sqrt[۳]{۴^۳ \times ۲} = ۶\sqrt[۳]{۲} + ۲\sqrt{۳} - ۴\sqrt[۳]{۲} = ۲\sqrt[۳]{۲} + ۲\sqrt{۳}$$

**مثال ۳ : حاصل عبارت** $A=\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$ **کدام است ؟** $(x>0)$

۱) ۱ ۲) $\sqrt[6]{x}$ ۳) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^2}}$ ۴) $\sqrt[6]{x^5}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» برای حل اینگونه مسائل باید عبارتهای پشت رادیکال را به زیر رادیکال برد و در نهایت با ضرب فرجه‌ها در هم به یک رادیکال برسیم :

$$A=\frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{\sqrt{x^2\times x}}}=\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x^3}}=\sqrt[6]{\frac{x}{x^3}}=\sqrt[6]{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{\sqrt[6]{x^2}}$$

## اتحادهای جبری

تساوی $f(a)=g(a)$ را وقتی اتحاد گوئیم که به ازای تمام مقادیر a برقرار باشد برای مثال تساوی $(a-1)^2=a^2-2a+1$ اتحاد می‌باشد زیرا به ازای تمام مقادیر a برقرار است و تساوی $a^2-1=3$ اتحاد نیست زیرا فقط به ازای $a=\pm 2$ برقرار می‌باشد، انواع اتحادهای مهم که حفظ آنها سرعت محاسبات را در بعضی مسائل افزایش می‌دهد به شرح زیر می‌باشد :

۱) $(a\pm b)^2=a^2+b^2\pm 2ab$

۲) $(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3a^2b+3b^2a$

۳) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

۴) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

۵) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

۶) $(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc$

۷) $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)$

۸) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)$

۹) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

۱۰) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

**مثال ۴ : اگر** $x-\dfrac{1}{x}=-1$ **باشد آنگاه حاصل** $A=x^3-\dfrac{1}{x^3}$ **کدام است ؟**

۱) ۴- ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۲-

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$A=x^3-\frac{1}{x^3}=\underbrace{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}_{-1}+3(x)\left(\frac{1}{x}\right)\underbrace{\left(x-\frac{1}{x}\right)}_{-1}=(-1)^3+3\times1\times(-1)=-4$$

تجزیه عبارتهای جبری:

از کاربردهای تجزیه می‌توان به ساده کردن کسرها و عبارتهای جبری، بدست آوردن بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب . م . م) و کوچکترین مضرب مشترک (ک . م . م) اشاره کرد .

**مثال ۵ :** عبارات زیر را تجزیه کنید :

۱) $x^3-27=(x-3)(x^2+9+3x)$

۲) $x^4-16=(x^2-4)(x^2+4)=(x-2)(x+2)(x^2+4)$

۳) $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

۴) $x^3+2x^2+x=x(x^2+2x+1)=x(x+1)^2$

**مثال ۶ : ساده شده عبارت** $A=\dfrac{(x^4-2x^3+x-2)(x^2+3x+2)}{(x^2-4)(x^2-x+1)}$ **کدام است ؟**

۱) $(x+1)$ ۲) $(x+1)^2$ ۳) ۱ ۴) ۱-

☑ **پاسخ :**گزینه «۲»

$$A=\frac{[x^3(x-2)+(x-2)](x+2)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x^2-x+1)}=\frac{(x^3+1)(x-2)(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{(x^3+1)(x+1)}{x^2-x+1}=\frac{(x+1)(x^2+1-x)(x+1)}{(x^2-x+1)}=(x+1)^2$$

**گویا کردن مخرج کسرها:**

منظور از گویا کردن، حذف رادیکال از مخرج کسر می‌باشد، به طوری که کسر بعد از گویا شدن با کسر قبل از گویا شدن برابر باشد، معمولاً در اینگونه عبارت‌ها یکی از جمله های طرف دوم اتحادها در مخرج می‌باشد و برای گویا کردن باید صورت و مخرج را در پرانتز دوم اتحاد ضرب کرد به مثالهای زیر توجه کنید :

جمله‌ای از اتحاد مزدوج در مخرج کسر می‌باشد.

$$۱)\ \frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}\times\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲-۱}=\sqrt{۲}+۱$$

جمله‌ای از طرف دوم اتحاد شماره ۸ می‌باشد.

$$۲)\ \frac{۱}{\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}}\times\frac{\sqrt[۳]{a^۲}+\sqrt[۳]{b^۲}+\sqrt[۳]{ab}}{\sqrt[۳]{a^۲}+\sqrt[۳]{b^۲}+\sqrt[۳]{ab}}=\frac{\text{صورت کسر}}{a-b}$$

$$۳)\ \frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}}\times\frac{\sqrt[۳]{۳^۲}}{\sqrt[۳]{۳^۲}}=\frac{\sqrt[۳]{۹}}{\sqrt[۳]{۳^۳}}=\frac{\sqrt[۳]{۹}}{۳}$$

**بدست آوردن بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب . م . م) و کوچکترین مضرب مشترک (ک . م . م) چند عبارت:**

برای بدست آوردن (ب . م . م) دو عبارت پس از تجزیه دو عبارت به حاصلضرب عوامل، حاصلضرب عوامل مشترک باکوچکترین توان را بعنوان (ب . م . م) انتخاب می‌کنیم و حاصلضرب عامل‌های مشترک و غیرمشترک با بزرگترین توان را بعنوان (ک . م . م) تعیین می‌کنیم.

**مثال ۷ : (ب . م . م) و (ک. م . م) بین دو عدد ۲۴ و ۵۴ را تعیین کنید :**

**پاسخ :** $۲۴=۳\times۸=۳\times۲^۳ \quad , \quad ۵۴=۲\times۲۷=۲\times۳^۳$

(ب . م . م) برابر $۶=۲\times۳$ و (ک . م . م) برابر $۲۱۶=۳^۳\times۲^۳$ می‌باشد.

**مثال ۸ : (ک . م . م) دو عبارت $A=(x^۳-۱)$ , $B=(x-۱)^۲(x+۱)^۲$ را بدست آورید .**

**پاسخ :** $A=x^۳-۱=(x-۱)(x^۲+x+۱) \quad , \quad B=(x-۱)^۲(x+۱)^۲$

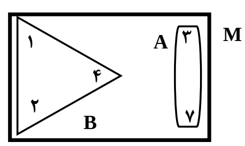
$\text{ک . م . م}=(x-۱)^۲(x+۱)^۲(x^۲+x+۱)$

## مجموعه‌ها

❖ **تعریف ۳:** مجموعه، عبارت است از یک گروه از اشیاء یا عناصر که کاملاً مشخص باشند، به عبارت دیگر مجموعه، دسته‌ای از اشیاء یا حروف یا اعداد و یا ... می‌باشد که در خاصیتی مشترک هستند، مانند مجموعهٔ انساهای روی کره زمین، مجموعهٔ اعداد فرد و یا مجموعهٔ دانشجویان رشته برق. برای نشان دادن تعلق یک عضو به یک مجموعه ، از علامت $\in$ استفاده می‌کنیم و اگر عنصر متعلق به مجموعه نباشد از نماد $\notin$ استفاده می‌کنیم.

**مجموعهٔ مرجع (جهانی):**

مجموعه‌ای است مشتمل بر تمام عناصر که برخی از این عناصر در موضوعی خاص، مورد نظر می‌باشند. این مجموعه را با $M$ نشان می‌دهند. بعنوان مثال، اگر نمودار ون زیر را در نظر بگیریم، این نمودار، یک مجموعه مرجع یا جهانی نسبت به مجموعه‌های $A$ و $B$ تلقی می‌شود چون تمام عناصر مجموعه‌های $A$ و $B$ که در زیر نشان داده شده‌اند، در این مجموعه وجود دارند.




«نمودار ون»

$A=\{۳\ ,\ ۷\}$

$B=\{۱,۲,۴\}$

**مجموعهٔ تهی:**

مجموعه‌ای است که فاقد عضو بوده و آنرا با علامت $\phi$ یا $\{\ \}$ نشان می‌دهند. بعنوان مثال، اگر مجموعهٔ جهانی $M=\{۱,۲,۳,....,۱۴\}$ را در نظر بگیریم و بخواهیم مجموعهٔ $A=\{x|\ x>۱۵\}$ را مطابق با مجموعهٔ جهانی $M$ نشان دهیم، مجموعهٔ $A$ یک مجموعهٔ تهی را تشکیل خواهد داد چون اعضای مجموعهٔ $A$ در $M$ موجود نمی‌باشد. پس $A$ فاقد عضو بوده و آنرا بصورت زیر نشان می‌دهیم:

$A=\{\ \}$ یا $A=\phi$

**زیر مجموعه‌های یک مجموعه:**

اگر مجموعه‌ای بنام $A$ را داشته باشیم، به هر مجموعه‌ای که کلیهٔ اعضای آن در مجموعهٔ $A$ موجود باشد یک زیر مجموعه از مجموعهٔ $A$ می‌گوییم، بعنوان مثال اگر داشته باشیم: $A=\{۱۰,۲۰,۳۰,۴۰,....\} \quad , \quad B=\{۲۰,۴۰,۶۰,۸۰\}$

به مجموعهٔ $B$، یک زیر مجموعه $A$ گفته می‌شود، چون تمام اعضای مجموعهٔ $B$ در مجموعه $A$ وجود دارند.

زیر مجموعه بودن یا نبودن را به ترتیب با علامتهای $\subset$ (زیرمجموعه‌ای است از) و $\not\subset$ (زیرمجموعه‌ای نیست از) نشان می‌دهند.

**نکته۱ :** هر مجموعه، زیر مجموعهٔ خودش محسوب می‌شود. $(A \subset A)$

**نکته۲ :** مجموعهٔ تهی، زیر مجموعهٔ تمام مجموعه‌ها می‌باشد. $(\phi \subset A)$

**نکته۳ :** تعداد زیرمجموعه‌های هر مجموعه، $۲^n$ می‌باشد که در آن، n تعداد عضوهای مجموعه می‌باشد، مثلاً اگر مجموعه‌ای ۴ عضو داشته باشد تعداد زیرمجموعه‌های آن $۲^۴ = ۱۶$ می‌باشد.

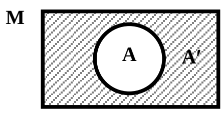
**نکته۴ :** تعداد زیرمجموعه‌های محض هر مجموعه $۲^n - ۱$ می‌باشد که در آن، خود مجموعه از تعداد زیرمجموعه‌ها کم می‌شود. مثلاً اگر مجموعه‌ای ۳ عضو داشته باشد تعداد زیرمجموعه‌های محض آن مجموعه $۲^۳ - ۱ = ۷$ می‌باشد.

**نکته۵ :** اگر $A \subset B$ و $B \subset C$ باشد می‌توان نتیجه گرفت که $A \subset C$ ، یعنی : $(A \subset B \ , \ B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

متمم یک مجموعه:

متمم مجموعه‌ای مثل A، عبارت است از کلیهٔ اعضای متعلق به مجموعهٔ مرجع به غیر از اعضای متعلق به مجموعهٔ A، متمم A با $A'$ نشان داده می‌شود. بعنوان مثال متمم مجموعهٔ A در نمودار «ون» زیر با هاشور مشخص شده است:

$$A' = \{x \mid x \in M, x \notin A\}$$




**خواص مجموعه‌های متمم:**

۱) $A = B \Leftrightarrow A' = B'$ ۲) $(A')' = A$ ۳) $\phi' = M$ ۴) $M' = \phi$ ۵) $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$

**مجموعه‌های هم‌ارز ، مساوی و جدا از هم:**

اگر تعداد اعضاء دو مجموعه با هم برابر باشند ، دو مجموعه را هم‌ارز یا متناظر می‌نامیم و اگر دو مجموعهٔ هم‌ارز اعضایشان نسبت به هم، یک به یک برابر باشند دو مجموعه را مساوی می‌نامیم و اگر دو مجموعه هیچ عضو مشترک نداشته باشند آنها را جدا از هم می‌نامیم. بعنوان مثال اگر مجموعه‌های زیر را داشته باشیم :

$$A = \{۲, ۳, ۱۰\} \quad , \quad B = \{۱۴, ۱۶, ۲۱\} \quad , \quad C = \{۲, ۳, ۱۰\}$$

هر سه مجموعهٔ فوق، نسبت به یکدیگر هم ارز یا متناظر هستند زیرا تعداد اعضایشان با هم برابر است و دو مجموعهٔ A و C که هم‌ارزند، دو مجموعهٔ مساوی محسوب می‌شوند زیرا اعضایشان نسبت به هم، یک‌به یک برابرند ولی دو مجموعهٔ A و B و یا دو مجموعهٔ B و C نسبت به یکدیگر دو مجموعهٔ جدا از هم هستند چون هیچ عضو مشترکی با هم ندارند.

**اجتماع دو مجموعه:**

اجتماع دو مجموعه A و B که به فرم $A \cup B$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ای است که عناصر آن یا عضوی از A باشند یا عضوی از B و بعبارت دیگر :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \text{یا} \ x \in B\}$$

**مثال ۹: اجتماع دو مجموعه $A = \{\{a\},\{\phi\}\}$ و $B = \{\{a\}\}$ چند عضو دارد ؟**

**پاسخ :** $A \cup B$ دارای دو عضو می باشد $A \cup B = \{\{a\},\{\phi\}\}$

**خواص اجتماع دو مجموعه:**

۱) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$ ۲) $A \cup A = A$ ۳) $A \cup M = M$

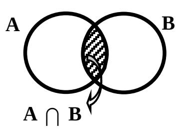
۴) $A \cup A' = M$ ۵) $A \cup \phi = A$ ۶) $A \cup (A \cap B) = A$ ( قانون جذب )

۷) $A \subset (A \cup B)$ ۸) $B \subset (A \cup B)$

**اشتراک دو مجموعه:**

اشتراک دو مجموعه، عبارت است از مجموعه‌ای که شامل عناصر مشترک دو مجموعه باشد و آنرا با علامت $\cap$ نشان می‌دهند طبق تعریف ریاضی اشتراک دو مجموعه، داریم:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \text{و} \ x \in B\}$$




**خواص اشتراک دو مجموعه:**

۱) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$ ۵) $A \cap \phi = \phi$

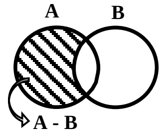
۲) $A \cap A = A$ ۶) $A \cap (A \cup B) = A$ (قانون جذب)

۳) $A \cap M = A$ ۷) $A \cap (A \cup B \cup C) = A$ (قانون جذب)

۴) $A \cap A' = \phi$ ۸) $(A \cap B) \subset A, (A \cap B) \subset B$

**تفاضل دو مجموعه:**

تفاضل دو مجموعه، عبارت است از مجموعهٔ عناصری که در مجموعهٔ اول بوده ولی در مجموعه دوم نباشند به عبارت دیگر A-B یعنی عناصری از مجموعهٔ $A$ که در مجموعهٔ $B$ وجود نداشته باشند وطبق‌تعریف‌ریاضی تفاضل دو مجموعه، داریم:




$$A-B=\{x \mid x\in A,\ x\notin B\}$$

**خواص تفاضل دو مجموعه:**

۱) $A-B=A\cap B'$ ۲) $A-M=\phi$ ۳) $M-A=A'$ ۴) $A-\phi=A$

۵) $A-A=\phi$ ۶) $A-A'=A$ ۷) $(A-B)\subset A\ ,(B-A)\subset B$

**حاصلضرب دکارتی دو مجموعه:**

فرض کنید $A$ و $B$ دو مجموعه باشند حاصلضرب دکارتی $A\times B$ بصورت $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,\ y\in B\}$ تعریف می‌شود:

به عبارت دیگر، طبق تعریف حاصلضرب دکارتی دو مجموعه عبارتست از مجموعه‌ای که مشتمل بر $x$هایی از مجموعه $A$ (مجموعهٔ اول) و $y$هایی از مجموعه $B$ (مجموعهٔ دوم) باشد که اینها تشکیل یک زوج مرتب می‌دهند که عضو اول آن $(x)$ را مختص اول و عضو دوم آن $(y)$ را مختص دوم زوج مرتب می‌گویند. همچنین حاصلضرب دکارتی $B\times A$ نیز بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$B\times A=\{(x,y)\mid x\in B\ ,y\in A\}$$

**مثال ۱۰ : اگر داشته باشیم $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{۲,۴\}$ ، مطلوبست محاسبهٔ $B\times A$ و $A\times B$ .**

☑ **پاسخ :**

$$\left.\begin{array}{l}A\times B=\{(a,۲),(a,۴),(b,۲),(b,۴),(c,۲),(c,۴)\}\\ B\times A=\{(۲,a),(۲,b),(۲,c),(۴,a),(۴,b),(۴,c)\}\end{array}\right\}\Rightarrow A\times B\neq B\times A$$

**تذکر ۵:** ملاحظه می‌شود که در حالت کلی $A\times B\neq B\times A$ می‌باشد .

**خواص مجموعه‌ها:**

**الف)** خاصیت جابجایی $A\cap B=B\cap A\quad ,\ A\cup B=B\cup A$

**ب)** خاصیت شرکت‌پذیری $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C\quad ,\ A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

**ج)** خاصیت پخشی (توزیعی) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\quad ,\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

**د)** قوانین دمورگان : ۱) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ ۲) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

**مثال ۱۱: اگر $A\subset B$ باشد آنگاه کدام گزینه درست است؟** (کامپیوتر ـ آزاد ۷۶)

۱) $B'\subset A$ ۲) $A\cap B=\phi$ ۳) $B'\subset A'$ ۴) $B\cap A'=\phi$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» (طبق خاصیت ۵ مجموعه‌های متمم)

**مثال ۱۲: اگر $A\cap B=A-B$ باشد، آنگاه $A$ برابر کدام است؟** (مکانیک ـ آزاد ۸۱)

۱) $B$ ۲) $B'$ ۳) $M$ ۴) $\phi$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» $A\cap B=A\cap B'\to A=\phi$

**مثال ۱۳: اگر $A\subset B$ باشد، مجموعه $(A-B)'\cap A$ برابر است با :** (حسابداری ـ آزاد ۸۱)

۱) $A$ ۲) $B'$ ۳) $A\cap B$ ۴) $\phi$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» اگر $A\subset B$ آنگاه $A-B=\phi$ می‌باشد، لذا داریم : $(A-B)'\cap A=(\phi)'\cap A=M\cap A=A$

**مثال ۱۴: اگر $A\subset B$ باشد ، مجموعهٔ $(A-B)'\cap B$ برابر است با :**

۱) $A$ ۲) $B$ ۳) $M$ ۴) $\phi$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» $A\subset B\Rightarrow A-B=\phi\Rightarrow(\phi)'\cap B=M\cap B=B$

**مجموعه‌های عددی:**

**الف) مجموعهٔ اعداد طبیعی:** اعداد ...،۴، ۳، ۲، ۱ را اعداد طبیعی می‌نامند. اعداد طبیعی با $N$ نشان داده می‌شود، عبارتست از:

$$N=\{۱,۲,۳,۴,....\}$$

مجموعهٔ اعداد طبیعی، خود نیز شامل زیر مجموعه‌هایی بنامهای مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج (E) و مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد (O) می‌باشد. مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج، از ضرب اعداد طبیعی در عدد ۲ بدست می‌آید، بنابراین عبارت خواهد بود از:

$$E=\{۲,۴,۶,۸,۱۰,....\}=\{x \mid x=۲k\,,k\in N\}$$

مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد نیز بصورت مقابل تعریف می‌گردد : $O=\{۱,۳,۵,۷,۹,...\}=\{x \mid x=۲k-۱,k\in N\}$

**ب) مجموعهٔ اعداد حسابی:** مجموعهٔ اعداد حسابی با افزودن عدد صفر به مجموعهٔ اعداد طبیعی بدست می‌آید که عبارتست از:

$$I=\{۰,۱,۲,۳,۴,....\}$$

**ج) مجموعهٔ اعداد صحیح:** این مجموعه در برگیرنده اعداد طبیعی و قرینه این اعداد به علاوه عدد صفر می‌باشد. این مجموعه نیز نامتناهی می‌باشد. $Z=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$

همچنین مجموعهٔ اعداد صحیح زوج و فرد بصورت زیر بیان می‌گردد.

$$\text{مجموعهٔ اعداد صحیح زوج}=\{...,-۶,-۴,-۲,۰,۲,۴,۶,....\}=\{x \mid x=۲k\,,k\in Z\}$$

$$\text{مجموعهٔ اعداد صحیح فرد}=\{...,-۵,-۳,-۱,۱,۳,۵,...\}=\{x \mid x=۲k+۱,k\in Z\}$$

**د) مجموعهٔ اعداد گویا:** اگر a و b اعدادی صحیح باشند بطوریکه $b\neq ۰$ باشد، مجموعهٔ اعدادی را که از طریق $\frac{a}{b}$ بدست می‌آیند مجموعه اعداد گویا می‌نامند، یعنی:

$$Q=\left\{\frac{a}{b} \mid a\in Z\,,b\in Z\,,b\neq ۰\right\}$$

بعنوان مثال، این مجموعه علاوه بر اعداد طبیعی و صحیح، اعدادی مثل ۳/۵، $-\frac{۱}{۶}$ و .... را نیز شامل می‌شود.

**هـ) مجموعهٔ اعداد حقیقی:** مجموعهٔ اعداد حقیقی که با R نمایش داده می‌شود، در برگیرندهٔ کلیهٔ اعداد معرفی شده فوق و همچنین اعضای مجموعهٔ R-Q که مجموعه این اعداد را مجموعهٔ اعداد گنگ یا اصم می‌نامند، می‌باشد. بنابراین مجموعهٔ اعداد حقیقی عبارت خواهد بود از {مجموعهٔاعداد گویا بعلاوه اعداد گنگ (اصم)}=R و داریم : $N\subset I\subset Z\subset Q\subset R$

**فاصله:**

اگر بخواهیم زیر مجموعه‌های مجموعهٔ اعداد حقیقی را بصورت فاصله نشان دهیم، از علائم باز که با ( ) یا ] [ مشخص می‌شوند و یا از علائم بسته که با [ ] نمایش داده می‌شوند، استفاده می‌کنیم. به نمونه‌های زیر توجه کنید.

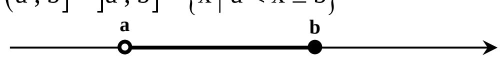
نمونهٔ ۱) فاصلهٔ (a, b) به صورت مقابل نیز تعریف می‌شود :

$$(a\,,b)=]a\,,b[=\{x \mid a<x<b\}$$

که در روی محور اعداد، بصورت زیر نمایش داده می‌شود.

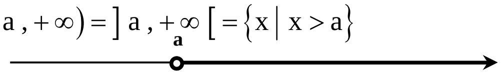
نمونهٔ ۲) فاصلهٔ [a , b) بصورت زیر تعریف می‌گردد :

$$(a\,,b]=]a\,,b]=\{x \mid a<x\leq b\}$$



نمونهٔ ۳) فاصلهٔ باز از a تا $+\infty$ بصورت $(a\,,+\infty)$ نشان داده می‌شود که عبارتست از:

$$(a\,,+\infty)=]\,a\,,+\infty\,[=\{x \mid x>a\}$$



**مثال ۱۵: مجموعه‌های زیر را با نماد فاصله بیان کنید.**

**الف)** $\{x \mid -۲\leq x\leq ۵\,,x\in R\}$

**ب)** $\{x \mid ۳\leq x<۱۰\,,x\in R\}$

**ج)** $\{x \mid x\geq -۳\,,x\in R\}$

**د)** $\{x \mid x<۲\,,x\in R\}$

☑ **پاسخ :**

الف) $[-۲,۵]$

ب) $[۳,۱۰)$ یا $[۳,۱۰[$

ج) $[-۳\,,+\infty)$

د) $(-\infty\,,۲)$ یا $]-\infty\,,۲[$

## معادلات و نامعادلات

### معادله یک مجهولی درجه اول:

صورت کلی این معادله به صورت $ax + b = ۰$ با شرط $a \neq ۰$ است که در این حالت $x = -\frac{b}{a}$ ریشه معادله است.

### تعیین علامت عبارت درجه اول $A = ax + b$ :

هدف از تعیین علامت یک عبارت جبری آن است که مشخص کنیم به ازای چه مقادیر x عبارت مثبت یا منفی است ، مشخص است که علامت عبارت $A = ax + b$ به ازای مقادیر بزرگتر از ریشه معادله $ax + b = ۰$

| $x$ | | $-\frac{b}{a}$ | |
|---|---|---|---|
| $ax+b$ | مخالف علامت a | | موافق علامت a |

موافق علامت ضریب x (یعنی a) و به ازای مقادیر کمتر از $-\frac{b}{a}$ مخالف علامت ضریب x است.

**مثال ۱۶: عبارتهای $A = ۳x + ۶$ و $B = ۴ - ۲x$ را تعیین علامت کنید .**

$۱) A = ۳x + ۶ \Rightarrow ۳x + ۶ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۶}{۳} = -۲ \Rightarrow$

| $x$ | $-\infty$ | $-۲$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $A = ۳x + ۶$ | $-$ | $۰$ | $+$ |

$۲) B = ۴ - ۲x \Rightarrow ۴ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = \frac{۴}{۲} = ۲ \Rightarrow$

| $x$ | $-\infty$ | $۲$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $B = ۴ - ۲x$ | $+$ | $۰$ | $-$ |

**نکته ۶ :** هرگاه عبارتی به صورت حاصلضرب یا خارج قسمت چند عبارت درجه اول باشد ، هر یک را جداگانه تعیین علامت نموده و علامتها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم می‌کنیم.

**مثال ۱۷: عبارت $A = \frac{x^۲ - ۵x + ۶}{(x-۱)^۲(x+۴)}$ را تعیین علامت کنید.**

| X | $-\infty$ | $-۴$ | | $۲$ | | $۳$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x+۴ | − | | + | | + | | + | |
| x-۲ | − | | − | ۰ | + | | + | |
| x-۳ | − | | − | | − | ۰ | + | |
| A | − | | + | ۰ | − | ۰ | + | |

توجه شود که در این مثال چون $(x-۱)^۲$ یک عبارت همواره مثبت است لذا تأثیری در علامت A ندارد .
همچنین دقت شود ریشه‌ها از کوچکترین مقدار از سمت چپ به راست در جدول مرتب می‌شوند.

لازم به توضیح است که نقاط $x = ۱$ و $x = -۴$ که مخرج کسر را صفر می‌کنند بعنوان نقاط انفصال عبارت محسوب می‌شوند که در فصل دوم کاملاً شرح داده می‌شود.

**نتیجه :** اگر $x > ۳$ یا $-۴ < x < ۲$ آنگاه $A > ۰$ خواهد بود.
اگر $x < -۴$ یا $۲ < x < ۳$ آنگاه $A < ۰$ خواهد بود.

**نکته ۷ :** در تعیین علامت عبارت جبری از عوامل مضاعف (در مثال قبل $(x-۱)^۲$) صرف نظر می‌کنیم و بقیه را تعیین علامت می‌کنیم.

### نامعادله درجه اول:

نامعادله یک مجهولی درجه اول پس از انتقال دادن همه جمله‌ها به یک طرف نامعادله و ساده کردن به شکل کلی زیر تبدیل خواهد شد.

$$\begin{cases} ax + b > ۰ \\ \text{یا} \\ ax + b \geq ۰ \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} ax + b < ۰ \\ \text{یا} \\ ax + b \leq ۰ \end{cases}$$

**مثال ۱۸: نامعادله $-\frac{۳}{۲}x - ۱ < \frac{۱}{۲}x + ۴$ را حل کنید.**

**پاسخ :**

$$\frac{۳}{۲}x + \frac{۱}{۲}x > -۵ \rightarrow ۲x > -۵ \xrightarrow{\div ۲} x > -\frac{۵}{۲}$$

**نکته ۸:** هرگاه طرفین یک نامساوی را در یک مقدار منفی ضرب و یا تقسیم کنیم جهت نامساوی عوض خواهد شد.

## معادله درجه دوم

هر معادله بصورت $ax^{2}+bx+c=0$ که a و b و c اعداد حقیقی هستند با شرط $a\neq 0$ را معادله درجه دوم می‌نامیم، در این معادله مبین (دلتا) به فرم $\Delta=b^{2}-4ac$ بیان می‌شود و داریم :

**۱)** اگر $\Delta>0$ باشد معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز می‌باشد که از رابطه : $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ بدست می‌آید.

**۲)** اگر $\Delta<0$ معادله ریشه حقیقی ندارد.

**۳)** اگر $\Delta=0$ معادله ریشه مضاعف دارد : $x_{1}=x_{2}=-\dfrac{b}{2a}$.

**نکته ۹:** اگر در معادله درجه دوم $a+b+c=0$ باشد یک ریشه (۱) و ریشه دیگر $(\dfrac{c}{a})$ است.

**نکته ۱۰:** اگر در معادله درجه دوم $a+c=b$ باشد ، آنگاه یک ریشه معادله (۱-) و ریشه دیگر $(-\dfrac{c}{a})$ است.

**نکته ۱۱:** اگر ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^{2}+bx+c=0$ دو عدد متوالی باشند آنگاه $\Delta=a^{2}$ خواهد بود.

**نکته ۱۲:** در معادله درجه دوم $ax^{2}+bx+c=0$ اگر یک ریشه K برابر ریشه دیگر باشد آنگاه: $\dfrac{b^{2}}{ac}=\dfrac{(K+1)^{2}}{K}$

**معادله $ax^{2}+bx+c=0$ را در نظر بگیرید ، داریم :**

**نکته ۱۳:** معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش عکس ریشه معادله فوق باشد ، به صورت $cx^{2}+bx+a=0$ است.

**نکته ۱۴:** معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش قرینه هر ریشه معادله فوق باشد، به صورت $ax^{2}-bx+c=0$ است.

**نکته ۱۵:** معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش n برابر هر ریشه معادله فوق باشد ، به صورت $ax^{2}+bnx+cn^{2}=0$ است.

**نکته ۱۶:** معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش مربع هر ریشه معادله فوق باشد به صورت $a^{2}x^{2}+(2ac-b^{2})x+c^{2}=0$ است.

**مثال ۱۹: کدام معادله زیر ریشه‌هایش ۲ برابر ریشه‌های معادله $x^{2}-3x-1=0$ است؟** (مکانیک ـ آزاد ۸۱)

۱) $x^{2}-5x-4=0$ ۲) $x^{2}-6x-4=0$ ۳) $x^{2}+6x-4=0$ ۴) $x^{2}-5x+4=0$

**پاسخ :** گزینه «۲» باتوجه به نکته ۱۵ ، در این مثال $n=2$ می‌باشد.

**تشکیل معادله درجه دومی که دو ریشه آن معلوم است:** اگر $x'$ و $x''$ دو ریشه معادلهٔ درجه دوم باشند، آنگاه با فرض $S=x'+x''$ و $P=x'.x''$ معادله درجه دومی که ریشه‌هایش $x'$ و $x''$ می‌باشند به شکل $x^{2}-Sx+P=0$ بیان می‌شود.

**مثال ۲۰: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $\sqrt{2}-1$ و $\sqrt{2}+1$ باشد.**

$$\begin{cases}S=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2\\ p=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1\end{cases}\Rightarrow x^{2}-Sx+p=0\rightarrow x^{2}-2x-1=0$$

**رابطه بین ریشه‌های معادله:**

در معادله $ax^{2}+bx+c=0$ اگر $x'$ و $x''$ ریشه‌های معادله باشند، آنگاه داریم :

$$\begin{cases}S=x'+x''=-\dfrac{b}{a}\rightarrow \text{حاصل جمع دو ریشه}\\ p=x'.x''=\dfrac{c}{a}\rightarrow \text{حاصلضرب دو ریشه،}\\ A=\left|x'-x''\right|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\rightarrow \text{قدر مطلق تفاضل دو ریشه}\end{cases}\qquad\begin{cases}x'^{2}+x''^{2}=S^{2}-2p\\ x'^{3}+x''^{3}=S^{3}-3Sp\\ \sqrt{x'}+\sqrt{x''}=\sqrt{S+2\sqrt{p}}\\ \left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right|=\sqrt{S-2\sqrt{P}}\end{cases}$$

**تعیین علامت عبارت $A=ax^{2}+bx+c$ :**

اگر $x_1$ و $x_2$ دو ریشه حقیقی معادله فوق باشند آنگاه :

| X | $-\infty$ | $x_1$ | | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| A | موافق علامت a | 0 | مخالف علامت a | 0 | موافق علامت a |

**نکته ۱۷:** شرط آنکه عبارت فوق همواره مثبت باشد آن است که : $a > \circ \, , \, \Delta < \circ$

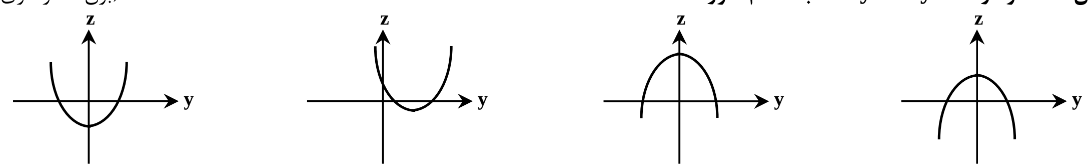
**نکته ۱۸:** شرط آنکه عبارت فوق همواره منفی باشد آن است که : $a < \circ \, , \, \Delta < \circ$

تابع با ضابطهٔ $y = ax^{۲} + bx + c$ را در نظر بگیرید ، داریم :

**نکته ۱۹:** اگر $a > \circ$ باشد تابع دارای مینیمم است و اگر $a < \circ$ باشد تابع دارای ماکزیمم است.

**نکته ۲۰:** مختصات نقطه مینیمم یا ماکزیمم $M(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a})$ می‌باشد.

**مثال ۲۱: نمودار $z = y^{۲} - ۶y + ۵$ به کدام صورت است؟** (برق ـ سراسری ۷۵)




(۱) (۲) (۳) (۴)

**پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به نکات فوق چون ضریب $y^{۲}$ مثبت است لذا نمودار تابع‌دارای مینیمم است یعنی گزینه‌های ۱ و ۲ اشتباه هستند اما برای بدست آوردن طول نقطه مینیمم داریم:
$$x = -\frac{b}{۲a} = \frac{-(-۶)}{۲\times۱} = \frac{۶}{۲} = ۳$$
لذا با توجه به اینکه طول نقطه مینیمم نمودار گزینه ۴ برابر صفر است نمودار گزینه ۳، مربوط به تابع داده شده می‌باشد.

**تذکر ۶:** خط $x = -\frac{b}{۲a}$ محور تقارن تابع $y = ax^{۲} + bx + c$ است.

**تذکر ۷:** در مورد Max و Min توابع در فصول دیگر به طور کامل توضیح داده خواهد شد.

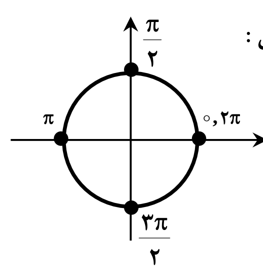
**مثال ۲۲ : در تابع $y = x^{۲} - kx + ۲$ ، اگر طول نقطه مینیمم برابر ۲- باشد ، مقدار k کدام است؟** (مکانیک ـ آزاد ۸۱)

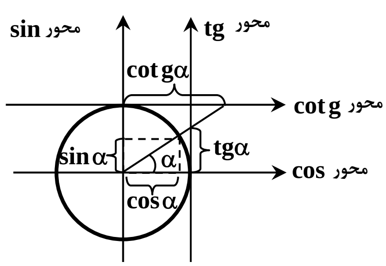
۱) ۴-    ۲) ۲    ۳) ۲-    ۴) ۴

**پاسخ :** گزینه «۱» باتوجه به نکته ۲۰، طول نقطه مینیمم از رابطه $x = -\frac{b}{۲a}$ بدست می‌آید. پس خواهیم داشت :
$$x = \frac{k}{۲} = -۲ \rightarrow k = -۴$$

## مثلثات

**نسبت‌های مثلثاتی :**




علامت نسبتهای مثلثاتی در چهار ربع دایرهٔ مثلثاتی در جدول زیر آمده است :

| | ربع اول | ربع دوم | ربع سوم | ربع چهارم |
|---|---|---|---|---|
| sin x | + | + | − | − |
| cos x | + | − | − | + |
| tg x | + | − | + | − |
| cot x | + | − | + | − |

**تذکر ۸:** توجه شود که فقط کافی است علامتهای sin و cos در چهار ربع حفظ شود ، علامتهای tg و cotg که همواره مانند یکدیگر هستند از ضرب علامت sin و cos در هم بدست خواهد آمد.

مقادیر نسبتهای مثلثاتی زوایای مختلف که باید به خاطر سپرده شود :

| x | ۰ | $\frac{\pi}{۶}$ | $\frac{\pi}{۴}$ | $\frac{\pi}{۳}$ | $\frac{\pi}{۲}$ | $\pi$ | $\frac{۳\pi}{۲}$ | $۲\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sin x | ۰ | $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | ۱ | ۰ | -۱ | ۰ |
| Cos x | ۱ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ | $\frac{۱}{۲}$ | ۰ | -۱ | ۰ | ۱ |
| tg x | ۰ | $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ | ۱ | $\sqrt{۳}$ | تعریف نشده | ۰ | تعریف نشده | ۰ |
| cot x | تعریف نشده | $\sqrt{۳}$ | ۱ | $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ | ۰ | تعریف نشده | ۰ | تعریف نشده |

**تذکر ۹:** واحدهای استفاده شده در جدول فوق برحسب رادیان (R) می‌باشد درصورتی که واحد بر حسب درجـه (D) بیـان شـود از فرمـول $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$ جهت تبدیل واحدها به یکدیگر استفاده می‌کنیم.

**نسبت‌های $\pi\pm\alpha$ ، $۲n\pi\pm\alpha$ ، $(\frac{۲n+۱}{۲})\pi\pm\alpha$ :**

**الف) کمان $(-\alpha)$ :**

۱) $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ ۲) $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ ۳) $tg(-\alpha)=-tg\alpha$ ۴) $\cot(-\alpha)=-\cot g\alpha$

**ب) کمان $(\pi-\alpha)$ :**

۱) $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ ۲) $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ ۳) $tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha$ ۴) $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

**ج) کمان $(\pi+\alpha)$ :**

۱) $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ ۲) $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ ۳) $tg(\pi+\alpha)=tg\alpha$ ۴) $\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$

**د) کمان $(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$ :**

۱) $\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$ ۲) $\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$ ۳) $tg(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$ ۴) $\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=tg\alpha$

**س) کمان $(\frac{\pi}{۲}+\alpha)$ :**

۱) $\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$ ۲) $\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$ ۳) $tg(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha$ ۴) $\cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-tg\alpha$

**ش) کمان $(۲\pi-\alpha)$ :**

۱) $\cos(۲\pi-\alpha)=\cos\alpha$ ۲) $\sin(۲\pi-\alpha)=-\sin\alpha$ ۳) $tg(۲\pi-\alpha)=-tg\alpha$ ۴) $\cot(۲\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

**ن) کمان $(۲\pi+\alpha)$ :**

۱) $\cos(۲\pi+\alpha)=\cos\alpha$ ۲) $\sin(۲\pi+\alpha)=\sin\alpha$ ۳) $tg(۲\pi+\alpha)=tg\alpha$ ۴) $\cot(۲\pi+\alpha)=\cot\alpha$

باتوجه به مطالب فوق به نکات زیر جهت یادگیری راحت‌تر توجه فرمایید.

**نکته ۲۱:** برای tg و cotg مضارب فرد و زوج $\pi$ حذف می‌شوند.(بعبارت دیگر tang و cotg عبارت بعد از مضارب فـرد یـا زوج $\pi$ محاسـبه می‌شود و برای sin و cos ابتدا یک منفی پشت نسبت قرار داده و سپس مضرب فرد $\pi$ را حذف می‌کنیم .

**نکته ۲۲:** برای sin و cos مضارب زوج $\pi$ حذف می‌شوند. (بعبارت دیگر sin و cos عبارت بعد از مضارب زوج $\pi$ محاسبه می‌شود.)

**نکته ۲۳:** در تعیین نسبت مثلثاتی کمان ابتدا علامـت نسـبت مثلثـاتی آن کمـان را مشـخص مـی‌کنـیم ، در صـورت وجـود مضـارب فـرد $\frac{\pi}{۲}$، sin را به cos و tg را به cotg و بالعکس تبدیل می‌کنیم.

**مثال ۲۳:** مقادیر $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)$ , $\sin(\pi+\alpha)$ , $tg(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)$ را تعیین کنید. ( $\alpha$ زاویه‌ای حاده می‌باشد )

**پاسخ :**

| | | |
|---|---|---|
| ۳) $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)\overset{\text{نکته ۲۳}}{=\!=}-\sin\alpha$ | ۲) $\sin(\pi+\alpha)\overset{\text{نکته ۲۲}}{=\!=}-\sin\alpha$ | ۱) $tg(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)\overset{\text{نکته ۲۳}}{=\!=}-\cot g\alpha$ |