



مدرس‌ان شریف

فصل اول

«مفاهیم اولیه ارتعاشات»

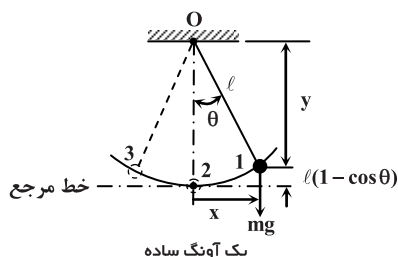
ارتعاش

هر حرکتی که پس از یک بازه زمانی تکرار شود ارتعاش یا نوسان خوانده می‌شود. نوسان یک آونگ و حرکت یک تار کشیده شده نمونه‌هایی از ارتعاش می‌باشند. نظریه ارتعاش با مطالعه حرکت رفت و برگشتی اجسام و نیروهای همراه با آنها سروکار دارد.

بخش‌های اولیه سیستم ارتعاشی

به‌طور کلی، یک سیستم ارتعاشی شامل وسیله‌ای برای ذخیره‌سازی انرژی پتانسیل (فنر یا الاستیسیته)، وسیله‌ای برای ذخیره انرژی جنبشی (جرم یا اینرسی) و وسیله‌ای برای هدر دادن تدریجی انرژی (دمپر یا میراکننده) می‌باشد.

ارتعاش یک سیستم شامل تبدیل انرژی پتانسیل آن به انرژی جنبشی و بالعکس، به صورت متناوب است. اگر یک سیستم میراثونده باشد مقداری از انرژی در هر سیکل ارتعاشی هدر می‌رود و در صورت تمایل به حفظ یک ارتعاش پایدار باید با یک منبع خارجی جایگزین شود.



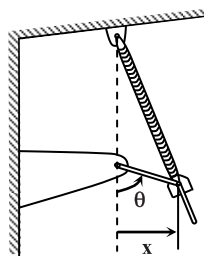
یک آونگ ساده

به عنوان نمونه، ارتعاش یک آونگ ساده را که در شکل بالا نشان داده شده است، در نظر بگیرید. فرض کنید که جرم m پس از جابه‌جایی زاویه‌ای θ رها شود. در موقعیت ۱، سرعت جرم و بنابراین انرژی جنبشی آن برابر صفر است. این در حالی است که با در نظر گرفتن نقطه ۲ به عنوان مرجع، انرژی پتانسیل این جسم برابر $mg\ell(1 - \cos\theta)$ می‌باشد. به خاطر اینکه نیروی جاذبه mg شامل گشتاور $mg\ell(\sin\theta)$ حول نقطه O می‌باشد، جرم از موقعیت ۱ شروع به نوسان به سمت چپ می‌کند.

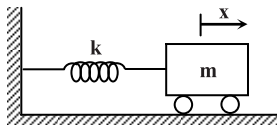
این گشتاور شتاب زاویه‌ای خاصی را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به جسم می‌دهد و زمانی که به موقعیت ۲ می‌رسد همه انرژی پتانسیل آن به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود؛ بنابراین جرم در موقعیت ۲ از حرکت باز نمی‌ایستد؛ بلکه به نوسان خود تا رسیدن به موقعیت ۳ ادامه می‌دهد. با وجود این، هنگامی که از موقعیت متوسط ۲ عبور می‌کند و تا رسیدن به موقعیت ۳، یک گشتاور در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به علت نیروی جاذبه بر آن عمل کرده، سبب کاهش سرعت جرم می‌گردد. سرعت جرم در آخرین نقطه سمت چپ (۳)، به صفر می‌رسد. در این لحظه همه انرژی جنبشی آن به انرژی پتانسیل تبدیل شده است. باز هم به خاطر گشتاور نیروی جاذبه، این جرم دارای سرعتی در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌گردد؛ بنابراین جرم شروع به نوسان برگشتی با سرعت افزایش یافته کرده، باز هم از موقعیت متوسط عبور می‌کند. این فرایند ادامه پیدا می‌کند و آونگ حرکت نوسانی خواهد داشت. در عمل مقدار نوسان یعنی θ به تدریج کاهش پیدا کرده و در نهایت آونگ به خاطر مقاومت (میرایی) اعمال شده از طریق محیط اطراف (هوا) از حرکت بازمی‌ایستد. این بدان معنی است که مقداری از انرژی ارتعاشات در هر سیکل ارتعاشی به خاطر میرایی هوا به هدر می‌رود.

درجات آزادی

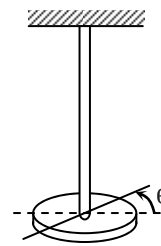
کمترین تعداد مختصات مستقلی را که برای تعیین کامل موقعیت همه بخش‌های یک سیستم در هر لحظه از زمان نیاز است، درجات آزادی آن سیستم می‌گویند. آونگ ساده نشان داده شده در شکل بالا و نیز هر کدام از سیستم‌های نشان داده شده در شکل بعد، نمایشگر یک سیستم تک درجه آزادی می‌باشند. برای مثال، حرکت آونگ ساده را می‌توان برحسب زاویه θ یا برحسب مختصات کارتزین x و y بیان کرد. اگر مختصات x و y برای بیان حرکت استفاده شوند، باید به یاد داشت که این مختصات مستقل از هم نیستند. آن‌ها از طریق معادله $x^2 + y^2 = l^2$ ارتباط دارند که در آن l طول ثابت آونگ می‌باشد؛ بنابراین هر مختصه دلخواه دیگری نیز می‌تواند حرکت آونگ را توصیف کند. در این مثال، انتخاب θ به عنوان مختصه مستقل آسان‌تر از انتخاب x یا y می‌باشد. برای لغزنده نشان داده شده در شکل a یا مختصه زاویه‌ای θ و یا مختصه x را می‌توان برای بیان حرکت استفاده کرد. در شکل b ، مختصه خطی x و برای سیستم پیچشی (میل طولانی) با یک دیسک سنگین در یک انتها) نشان داده شده در شکل c ، مختصه زاویه‌ای θ را می‌توان برای مشخص کردن حرکت استفاده کرد.



(a) مکانیزم لغزنده - لنگ - فنر



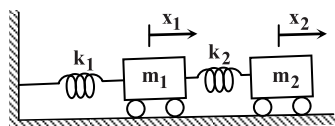
(b) سیستم جرم - فنر



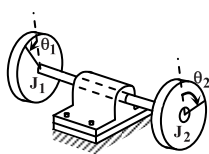
(c) سیستم پیچشی

سیستم‌های تک درجه آزادی

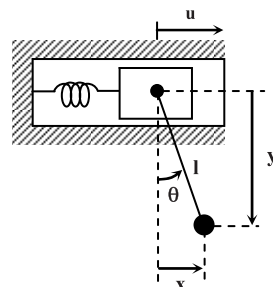
برخی از نمونه‌های سیستم‌های دو و سه درجه آزادی به ترتیب در دو شکل بعد نشان داده شده‌اند. شکل اول نشان‌دهنده یک سیستم دارای دو جرم و دو فنر است که توسط دو مختصه خطی x_1 و x_2 می‌تواند بیان شود. بخش b نشان‌دهنده یک سیستم دارای دو جرم چرخشی می‌باشد که حرکت آن را می‌توان به طور کامل برحسب θ_1 و θ_2 بیان کرد. حرکت سیستم نشان داده شده در بخش c را می‌توان به طور کامل توسط u و θ یا توسط x ، y و u توصیف کرد. در صورتی که حرکت این سیستم توسط روش دوم بیان شود، باید توجه داشت که مختصه‌های x و y توسط $x^2 + y^2 = l^2$ مقید می‌شوند که در آن l مقدار ثابتی است؛ بنابراین سیستم همچنان دارای همان دو درجه آزادی می‌باشد.



(a)

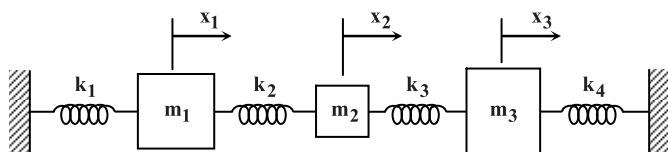


(b)

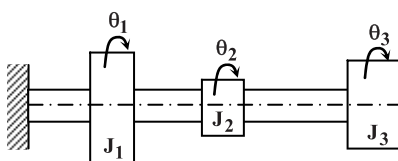


سیستم‌های دو درجه آزادی

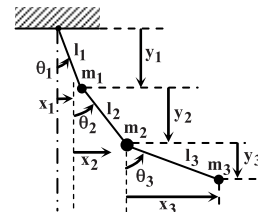
برای سیستم‌های نشان داده شده در شکل‌های زیر مختصات x_i ($i=1,2,3$) و θ_i ($i=1,2,3$) را می‌توان به ترتیب برای بیان حرکت سیستم‌های a و c به کار برد. در مورد سیستم نشان داده شده در شکل b مختصات θ_i ($i=1,2,3$) مکان‌های جرم‌های m_i ($i=1,2,3$) را مشخص می‌کند. یک روش دیگر برای توصیف سیستم برحسب x_i و y_i است که در آن ($i=1,2,3$) می‌باشد؛ ولی باید توجه داشت که در این مورد قیدهای $x_i^2 + y_i^2 = l_i^2$ ($i=1,2,3$) وجود دارند و در نتیجه سیستم به جای شش درجه آزادی، دارای سه درجه آزادی مستقل است.



(a)



(c)



(b)

سیستم‌های سه درجه آزادی

که مثال ۱: تعداد درجات آزادی یک سیستم مکانیکی:

(۱) برابر با تعداد اجرام آن سیستم است.

(۳) برابر با حداقل مختصات مستقل آن سیستم است.

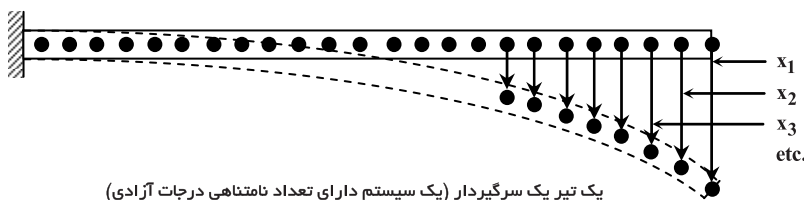
پاسخ: گزینه «۳» با توجه به مطالب بیان شده گزینه ی (۳) صحیح است.

(۲) برابر با تعداد فنرهای آن سیستم است.

(۴) برابر با حداکثر مختصات مستقل آن سیستم است.

سیستم‌های گسسته و پیوسته

تعداد بسیار زیادی از سیستم‌های عملی را می‌توان با استفاده از تعداد نامتناهی درجات آزادی مانند سیستم‌های ساده نشان داده شده در شکل‌های قبل توصیف کرد. برخی از سیستم‌ها به ویژه آنهایی که شامل اعضای الاستیک پیوسته هستند، دارای تعداد درجات آزادی نامتناهی می‌باشند. به عنوان یک مثال ساده، تیر یک سرگیردار شکل زیر را در نظر بگیرید. به خاطر اینکه این تیر دارای تعداد نامتناهی نقاط جرمی است، بنابراین برای مشخص کردن حالت تغییر شکل یافته آن به تعداد نامتناهی مختصات نیاز است؛ در نتیجه تیر یک سرگیردار دارای تعداد نامتناهی درجات آزادی است. بسیاری از سیستم‌های سازه‌ای و ماشینی دارای اعضای تغییرشکل‌پذیر (الاستیک) اند؛ بنابراین دارای تعداد نامتناهی درجات آزادی می‌باشند.



به سیستم‌هایی که دارای تعداد متناهی درجات آزادی‌اند، سیستم‌های گسسته یا پارامتر - متمرکز گفته می‌شود و آنهایی که دارای تعداد نامتناهی درجات آزادی‌اند، سیستم‌های پیوسته یا توزیع شده خوانده می‌شوند.

در سیستم‌های گسسته، جرم قسمت‌های مختلف سیستم به صورت متمرکز در محل مرکز جرم آن‌ها به صورت نقاط مجزا در نظر گرفته می‌شود. همچنین معادلات حرکت سیستم‌های گسسته به صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشد و به تعداد درجات آزادی سیستم، معادله حرکت، فرکانس طبیعی و مود ارتعاشی وجود دارد. معادلات حرکت سیستم‌های پیوسته از نوع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشد و واضح است که سیستم‌های پیوسته دارای بی‌نهایت فرکانس طبیعی و شکل مود ارتعاشی هستند.

طبقه‌بندی ارتعاشات

ارتعاشات را می‌توان به چندین شیوه طبقه‌بندی کرد. برخی از طبقه‌بندی‌های مهم به صورت زیر می‌باشند:

ارتعاشات آزاد

اگر سیستمی پس از یک اغتشاش اولیه، آزادانه و به خودی خود ارتعاش کند، ارتعاشات حاصل به عنوان ارتعاشات آزاد شناخته می‌شود. در این حالت هیچ نیروی خارجی بر سیستم وارد نمی‌شود و در واقع ارتعاشات حاصل پاسخ به تحریک اولیه می‌باشد. نوسان یک آونگ ساده نمونه‌ای از ارتعاشات آزاد است.

ارتعاشات واداشته

اگر سیستمی تحت تأثیر یک نیروی خارجی قرار گیرد (اغلب یک نوع نیروی تکرارشونده) ارتعاشات حاصل را ارتعاشات واداشته یا اجباری می‌گویند. نوسانی که در ماشین‌ها مانند ماشین‌های دیزل به وجود می‌آید، نمونه‌ای از ارتعاشات واداشته است.

اگر فرکانس نیروی خارجی (تحریک) با یکی از فرکانس‌های طبیعی سیستم تطابق داشته باشد، شرایطی به نام تشدید رخ می‌دهد و نوسانات شدیدی به سیستم وارد می‌شود. شکست سازه‌هایی مانند ساختمان‌ها، پل‌ها، توربین‌ها و بال هواپیماها با رخ دادن تشدید همراه است.

ارتعاشات میرا و غیرمیرا

اگر مقداری از انرژی سیستم در حال ارتعاش در اثر اصطکاک یا مقاومت‌های دیگر هدر رود، ارتعاشات از نوع میرا نامیده می‌شود و اگر هیچ مقداری از انرژی سیستم در حال ارتعاش از بین نرود ارتعاشات از نوع غیرمیرا می‌باشد. در بسیاری از سیستم‌های فیزیکی، مقدار میرایی به اندازه‌ای کوچک است که برای بسیاری از مقاصد مهندسی قابل صرف نظر کردن می‌باشد. با وجود این، در نظر گرفتن میرایی در تحلیل سیستم‌های ارتعاشی نزدیک تشدید بسیار حائز اهمیت است.

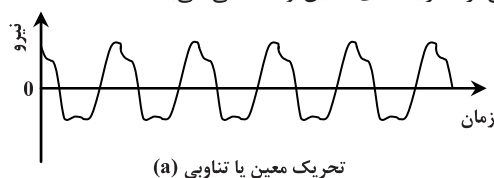
سیستم‌های خطی و غیرخطی

اگر همه مؤلفه‌های اصلی یک سیستم ارتعاشی - جرم، فنر و دمپر (میراکننده) - به صورت خطی عمل کنند، ارتعاشات حاصل را ارتعاشات خطی می‌نامند. از طرف دیگر، اگر حداقل یکی از مؤلفه‌های اصلی به صورت غیرخطی عمل کند، ارتعاشات حاصل را ارتعاشات غیرخطی می‌گویند. معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم‌های ارتعاشی خطی و غیرخطی، به ترتیب به صورت معادله دیفرانسیل خطی و غیرخطی می‌باشند. برخلاف ارتعاشات غیرخطی، در ارتعاشات خطی اصل بر هم‌نهی یا جمع آثار (سوپرپوزیشن) برقرار می‌باشد و می‌توان در تحلیل سیستم‌های خطی از این اصل استفاده کرد. به خاطر اینکه سیستم‌های ارتعاشی با افزایش دامنه نوسان تمایل به رفتار غیرخطی دارند، برای سیستم‌های ارتعاشی واقعی باید از تحلیل ارتعاشات غیرخطی سیستم‌ها استفاده کرد. در ارتعاشات خطی فرکانس طبیعی به خواص ذاتی سیستم بستگی دارد و به مقدار تحریک اولیه وابسته نیست، اما در ارتعاشات غیرخطی فرکانس طبیعی سیستم به دامنه و فرکانس تحریک اولیه نیز وابسته است.

ارتعاشات معین و تصادفی

اگر مقدار یا اندازه تحریک (نیرو یا مُمان) اعمال‌شونده بر یک سیستم ارتعاشی در هر لحظه از زمان داده شده باشد، آن تحریک را معین گویند و ارتعاشات حاصل شده به عنوان ارتعاشات معین شناخته می‌شود.

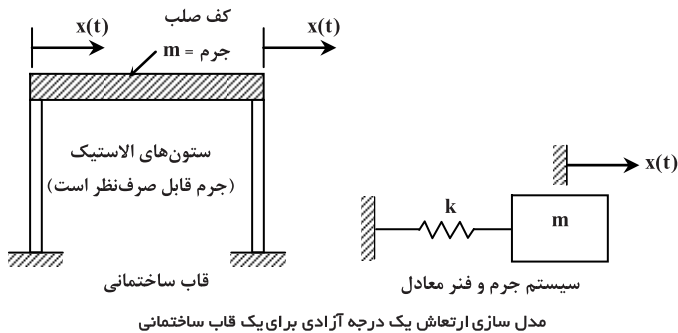
در برخی از موارد تحریک اعمال شده بر یک سیستم ارتعاشی قابل تعیین نیست یا تصادفی است و در نتیجه در یک زمان مشخص، مقدار تحریک قابل پیش‌بینی نمی‌باشد. به ارتعاشات حاصل شده در این حالت ارتعاشات تصادفی (اتفاقی) گویند. مثال‌هایی از تحریک‌های تصادفی، سرعت باد، ناهمواری جاده‌ای و حرکت زمین هنگام زمین‌لرزه می‌باشند. در مورد ارتعاشات تصادفی باید توجه داشت که پاسخ ارتعاشی این سیستم‌ها نیز تصادفی است و آن را می‌توان تنها برحسب کمیت‌های آماری توصیف کرد. شکل زیر نشان‌دهنده نمونه‌هایی از تحریک‌های معین و تصادفی می‌باشد.



(a) تحریک معین یا تناوبی



(b) تحریک تصادفی



همچنین یک قاب ساختمانی را می‌توان همانند شکل زیر به صورت یک سیستم جرم و فنر مدل‌سازی کرد. برای این منظور به دلیل اینکه ثابت فنر k تنها به صورت نسبت نیرو به جابه‌جایی است، می‌توان آن را از خصوصیات هندسی و ماده‌ای ستون‌ها به‌دست آورد. همچنین اگر از جرم ستون‌ها صرف‌نظر شود، جرم سیستم مدل شده همان جرم تیر (کف صلب) می‌باشد.

ارتعاشات آزاد یک سیستم غیرمیرا (بدون استهلاک)

در این بخش ارتعاشات آزاد سیستم‌های غیرمیرا مورد بررسی قرار می‌گیرد. اولین نکته‌ی مهم در مورد ارتعاشات سیستم‌های یک درجه آزادی نحوه محاسبه فرکانس طبیعی است؛ بنابراین در ادامه روش‌های به‌دست آوردن معادله حرکت سیستم و فرکانس طبیعی آن که اصولاً تابعی از جرم و فنریت سیستم است، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نکته ۱: معمولاً میرایی تأثیر اندکی بر فرکانس طبیعی دارد و در نتیجه می‌توان در محاسبه فرکانس طبیعی از آن صرف‌نظر کرد. به عبارت دیگر، برای محاسبه فرکانس طبیعی در این حالت می‌توان سیستم را پایستار در نظر گرفت و از اصل پایستاری انرژی استفاده کرد.

نکته ۲: تأثیر میرایی اصولاً در کاهش دامنه ارتعاشات در طول زمان آشکار می‌شود.

روش اول: به دست آوردن معادلات حرکت و فرکانس طبیعی با استفاده از قانون دوم نیوتن

در این بخش با استفاده از قانون دوم نیوتن معادلات حرکت و فرکانس طبیعی را به‌دست می‌آوریم. که برای این منظور روند زیر را دنبال می‌کنیم:

- ۱- دیگرام آزاد سیستم را ترسیم می‌کنیم.
- ۲- با استفاده از قانون دوم نیوتن معادله حرکت را به دست می‌آوریم؛ به این ترتیب که اگر حرکت انتقالی می‌باشد، از رابطه $\sum F = ma$ استفاده می‌کنیم و اگر حرکت دورانی باشد، معادله اوایلر برای جسم صلب $\sum M_o = I_o \alpha$ را به کار می‌بریم.
- ۳- معادله به‌دست آمده را به یکی از شکل‌های کلی زیر مرتب می‌کنیم و فرکانس طبیعی را به دست می‌آوریم.

* حرکت دورانی:

* حرکت انتقالی:

$$I_{eq} \ddot{\theta} + C_{eq} \dot{\theta} + k_{eq} \theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{I_{eq}}}$$

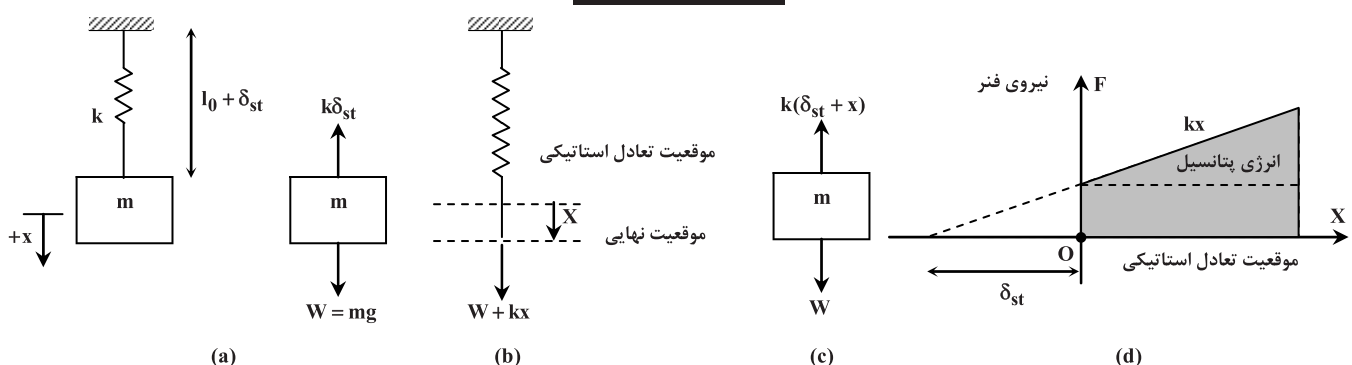
$$m_{eq} \ddot{x} + C_{eq} \dot{x} + k_{eq} x = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}$$

البته همانطور که در نکته ۱ نیز بیان شد، اگر هدف فقط محاسبه فرکانس طبیعی باشد، می‌توان از همان ابتدا میرایی را حذف کرد.

معادله حرکت یک سیستم جرم و فنر در موقعیت عمودی

اکنون روند بیان شده را برای یک سیستم یک درجه آزادی غیرمیرا استفاده می‌کنیم. سیستم جرم و فنر نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. جرم در انتهای پایینی فنر آویزان است که فنر نیز به یک تکیه‌گاه صلب در انتهای بالایی خود متصل است. به هنگام سکون، جرم در موقعیت تعادل استاتیکی قرار دارد که در آن نیروی فنر دقیقاً با نیروی وزن برابر است. در این موقعیت طول فنر برابر $l_0 + \delta_{st}$ می‌باشد که در آن تغییر شکل استاتیکی است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$W = mg = k\delta_{st}$$



یک سیستم جرم و فنر در موقعیت عمودی

که در آن g شتاب جاذبه زمین است. اگر جرم به اندازه $x + \delta_{st}$ از موقعیت تعادل استاتیکی خود جابه‌جا شود، نیروی فنر همانند شکل (بخش c) برابر $-k(x + \delta_{st}) + W$ می‌باشد. اعمال قانون دوم نیوتن برای حرکت جرم m ، رابطه مقابل را نتیجه می‌دهد:

$$m\ddot{x} = -k(x + \delta_{st}) + W$$

و به خاطر اینکه $k\delta_{st} = W$ می‌باشد، داریم:

بنابراین دیده می‌شود که در حرکت فوق، نیروی وزن تأثیری در معادله دیفرانسیل حرکت و همچنین فرکانس طبیعی سیستم ندارد.

$$k = \frac{W}{\delta_{st}} = \frac{mg}{\delta_{st}}$$

از طرفی ثابت فنر k را می‌توان برحسب جرم m از معادله $w = mg = k\delta_{st}$ به صورت مقابل بیان کرد:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{با جایگذاری معادله بالا در رابطه}$$

$$\omega_n = \sqrt{\left(\frac{g}{\delta_{st}}\right)}$$

همچنین فرکانس طبیعی برحسب سیکل بر ثانیه و دوره تناوب طبیعی به صورت زیر می‌باشند:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{g}{\delta_{st}}\right)}$$

و

$$\tau_n = \frac{1}{f_n} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{\delta_{st}}{g}\right)}$$

بنابراین هنگامی که جرم در راستای عمودی ارتعاش می‌کند، می‌توان فرکانس طبیعی و دوره ارتعاش را به طور ساده با اندازه‌گیری تغییر شکل استاتیکی δ_{st} محاسبه کرد و نیازی به دانستن سختی فنر k و جرم m نیست.

پاسخ معادله فوق به صورت مقابل است: $x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \Rightarrow x(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$, $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$, $\varphi = \tan^{-1} \frac{A_2}{A_1}$

ثابت‌های A_1 و A_2 را می‌توان از شرایط اولیه سیستم یعنی تغییر مکان اولیه $x(0)$ و سرعت اولیه $\dot{x}(0)$ به دست آورد:

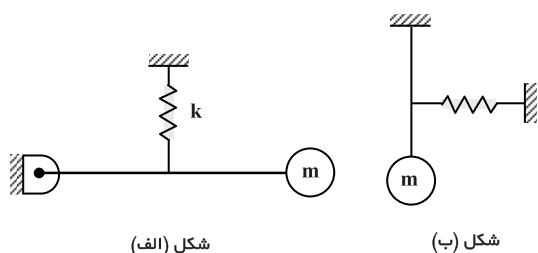
$$x(t=0) = A_1 = x_0$$

بنابراین $A_1 = x_0$ و $A_2 = \dot{x}_0 / \omega_n$ ؛ پس پاسخ $m\ddot{x} + kx = 0$ تحت شرایط اولیه داده شده در بالا به صورت زیر است:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

در مثال فوق، مشاهده شد که اثر وزن در معادله حرکت و فرکانس طبیعی حذف شد؛ بنابراین نکته مهم در استفاده از روش قانون دوم نیوتن برای به‌دست آوردن معادلات حرکت و فرکانس طبیعی سیستم، اثر وزن است؛ یعنی اینکه چه زمانی باید نیروی وزن را در محاسبات در نظر گرفت و چه زمانی باید آن را در ترسیم آزاد جسم حذف کرد و معادله حرکت سیستم را بدون در نظر گرفتن نیروی وزن به‌دست آورد.

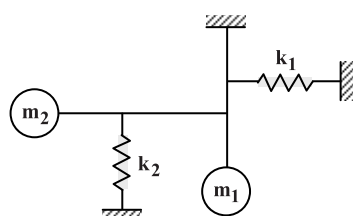
برای حل این مشکل به نکته مهم زیر توجه می‌کنیم:



نکته ۳: ابتدا سیستم را در حالت تعادل استاتیکی قرار می‌دهیم، حال اگر با

افزایش جرم، سیستم از حالت تعادل خارج شده و شروع به حرکت کند نباید نیروی وزن را در دیاگرام آزاد جسم در نظر بگیریم؛ ولی اگر با افزایش جرم، سیستم از وضعیت تعادل خارج نشود و در همان حالت اولیه خود باقی بماند، باید نیروی وزن را در دیاگرام آزاد جسم و روند به‌دست آوردن معادله حرکت و فرکانس طبیعی وارد کنیم. برای فهم بهتر این نکته به مثال مقابل توجه کنید.

با توجه به نکته فوق با افزایش جرم m در شکل (الف) سیستم از حالت تعادل خارج شده و شروع به حرکت می‌کند؛ بنابراین در این حالت نیروی وزن را در دیاگرام آزاد جسم و روند به‌دست آوردن معادله حرکت و فرکانس طبیعی وارد نمی‌کنیم؛ ولی در شکل (ب) با افزایش جرم m سیستم در حالت تعادل خود باقی می‌ماند و هیچ حرکتی در سیستم مشاهده نمی‌شود؛ پس نیروی وزن باید در محاسبات و دیاگرام آزاد جسم در نظر گرفته شود.



نکته ۴: در سیستم‌هایی که دارای چندین جرم ذره‌ای می‌باشند، همانند نکته بالا

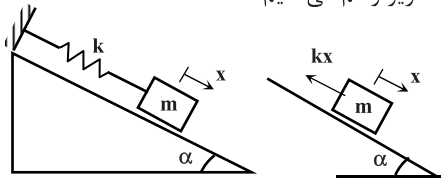
باید اثر هر یک از جرم‌ها را به صورت مجزا مورد بررسی قرار داد. برای مثال، در شکل مقابل باید وزن جرم m_1 را در محاسبات و دیاگرام آزاد جسم در نظر گرفت، در حالی که باید از وزن جرم m_2 صرف‌نظر کرد.



مثال ۱: فرکانس طبیعی سیستم روبه‌رو برابر است با:

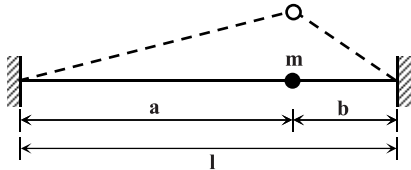
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \alpha \quad (۱) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \alpha \quad (۲) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \alpha \quad (۳) \quad \text{هیچ کدام} \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه «۱» از روش قانون دوم نیوتن استفاده می‌کنیم؛ لذا ابتدا دیاگرام آزاد جسم را به صورت زیر رسم می‌کنیم:



$$\sum F_x = m\ddot{x} \Rightarrow -kx = m\ddot{x} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

در حل فوق باید توجه داشت که براساس نکته ۳، اثر نیروی وزن را در نظر نمی‌گیریم.



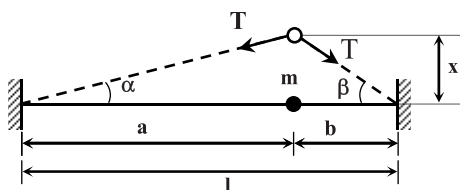
مثال ۲: همانند شکل مقابل، جرم m به طنابی که تحت کشش T می‌باشد، متصل است. با فرض اینکه کشش T با جابه‌جایی جرم در جهت عمود بر طناب، تغییر نمی‌کند (الف) معادله دیفرانسیل حرکت برای ارتعاشات عرضی کوچک طناب را بنویسید و (ب) فرکانس طبیعی ارتعاشات را پیدا کنید.

پاسخ: با توجه به نکته ۳، از آنجایی که با افزایش جرم m سیستم شروع به حرکت می‌کند و از حال تعادل اولیه خارج می‌شود، در استفاده از قانون دوم نیوتن، اثر وزن را در نظر نمی‌گیریم. از طرفی برای حل ابتدا باید سیستم را به اندازه کوچک x از حال تعادل خارج کنیم که در این صورت دیاگرام آزاد جسم به صورت زیر می‌باشد:

با توجه به مقدار کوچک کشیدگی x، زوایای α و β بسیار کوچک‌اند و بنابراین سینوس و تانژانت این زوایاها با همدیگر تقریباً برابر است:

$$\sin \alpha = \tan(\alpha) = \frac{x}{a} \quad ; \quad \sin \beta = \tan(\beta) = \frac{x}{b}$$

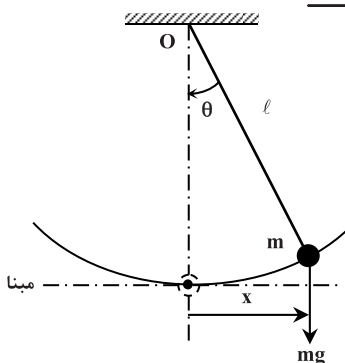
حال با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:



$$\begin{aligned} \sum F_x = ma_x &\Rightarrow m\ddot{x} = -T \sin \alpha - T \sin \beta = -Tx \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \\ \Rightarrow m\ddot{x} + T \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) x &= 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{T \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}{m}} = \sqrt{\frac{T}{mab}} (a+b) \end{aligned}$$



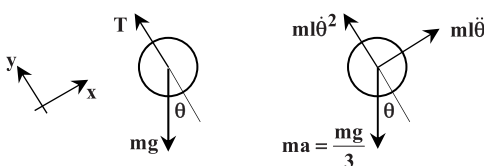
مثال ۳: اگر آونگ نشان داده شده در یک راکت قرار داده شود که با شتاب عمودی $\frac{g}{3}$ به سمت پایین حرکت کند، دوره نوسان آن چگونه خواهد بود؟



$$\begin{aligned} \pi \sqrt{\frac{2l}{g}} & \quad (۲) \\ \pi \sqrt{\frac{l}{g}} & \quad (۱) \\ \pi \sqrt{\frac{6l}{g}} & \quad (۴) \\ \pi \sqrt{\frac{l}{2g}} & \quad (۳) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه «۴»

روش اول: با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:



$$\begin{aligned} \sum F_x = ma_x &\Rightarrow mg \sin \theta = \frac{mg}{3} \sin \theta - ml\ddot{\theta} \\ \Rightarrow ml\ddot{\theta} + \frac{2mg}{3} \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$

$$\sin \theta \sim \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2g}{3l} \theta = 0$$

برای نوسانات کوچک داریم:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{3l}} \Rightarrow \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{3l}{2g}} = \pi \sqrt{\frac{6l}{g}}$$

بنابراین فرکانس طبیعی و دوره نوسان برابر است با:

$$g' = g - a = g - \frac{g}{3} = \frac{2g}{3}$$

روش دوم: شتاب خالص جاذبه عمل‌کننده بر این آونگ به صورت مقابل است:



فصل سوم

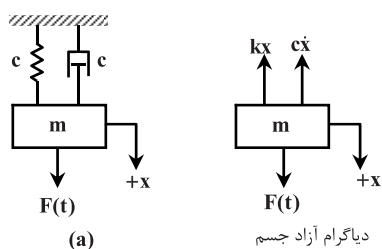
«ارتعاشات اجباری سیستم‌های یک درجه آزادی»

مقدمه

اگر یک سیستم مکانیکی یا سازه‌ای تحت اثر انرژی بیرونی قرار گیرد، به ارتعاشات حاصل شده ارتعاشات اجباری یا واداشته گفته می‌شود. انرژی بیرونی را می‌توان از طریق یک نیروی خارجی یا یک تحریک از نوع جابه‌جایی به سیستم اعمال کرد. نیروی اعمال شده یا تحریک جابه‌جایی ممکن است دارای طبیعت هارمونیک، غیرهارمونیک ولی متناوب، غیرمتناوب یا تصادفی باشد. پاسخ یک سیستم به یک تحریک هارمونیک، پاسخ هارمونیک گفته می‌شود و پاسخ یک سیستم دینامیک به تحریک‌های نامتناوبی که به طور ناگهانی به سیستم اعمال می‌شوند، پاسخ گذرا نامیده می‌شود.

در این فصل پاسخ دینامیکی یک سیستم تک‌درجه آزادی، تحت تحریک هارمونیک به شکل $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \phi)$ یا $F(t) = F_0 e^{i(\omega t + \phi)}$ یا $F(t) = F_0 \sin(\omega t + \phi)$ مورد بررسی قرار می‌گیرد که در آن F_0 برابر دامنه، ω برابر فرکانس و ϕ برابر زاویه فاز تحریک هارمونیک است. مقدار ϕ به مقدار $F(t)$ در $t = 0$ بستگی دارد و معمولاً برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. اگر فرکانس تحریک بر فرکانس طبیعی سیستم منطبق باشد، پاسخ سیستم به تدریج ناپایدار و بسیار بزرگ خواهد بود که به این حالت رزونانس یا تشدید گفته می‌شود و برای جلوگیری از شکست سیستم باید از این شرایط اجتناب کرد. ارتعاشات ایجاد شده توسط یک ماشین دوار نامیزان، نوسانات یک کوره بلند به خاطر گردباد ایجاد شده در وزش پایدار باد و حرکت عمودی یک اتومبیل روی سطح جاده‌ای سینوسی مثال‌هایی از ارتعاشات با تحریک هارمونیک می‌باشند.

معادله حرکت



اگر نیروی $F(t)$ بر یک سیستم جرم و فنر با میرایی ویسکوز اثر کند (شکل روبه‌رو) معادله حرکت را می‌توان با نوشتن قانون دوم نیوتن به صورت زیر به دست آورد:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

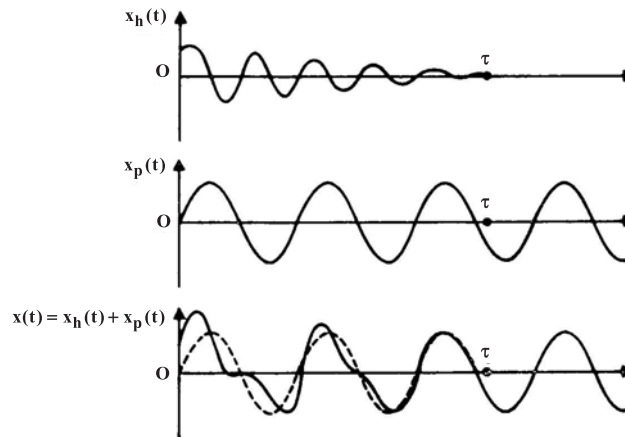
دیگرام آزاد جسم

سیستم جرم، فنر و میراکننده تحت ارتعاش اجباری

به خاطر غیرهمگن بودن این معادله، پاسخ عمومی آن با جمع پاسخ همگن $x_h(t)$ و پاسخ خصوصی $x_p(t)$ به دست می‌آید. شکل همگن معادله به صورت زیر است:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

این معادله نشانگر ارتعاش آزاد این سیستم بوده که در فصل ۲ مورد بحث قرار گرفت. همان گونه که پیشتر دیده شد، این ارتعاش آزاد تحت هر کدام از سه شرط ممکن میرایی (کند میرایی، میرایی بحرانی و تند میرایی) و تحت همه شرایط اولیه ممکن با گذشت زمان کاهش می‌یابد؛ بنابراین پاسخ کلی معادله $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$ در نهایت به پاسخ خصوصی $x_p(t)$ کاهش می‌یابد که نشانگر ارتعاشات حالت پایدار است. ارتعاشات حالت پایدار تا زمانی وجود دارد که تابع نیرو وجود داشته باشد. نمودار پاسخ‌های همگن، خصوصی و عمومی بر حسب زمان در شکل زیر نشان داده شده است. همان طور که در شکل نیز دیده می‌شود، با گذشت زمان $x_h(t)$ به سمت صفر میل کرده و $x(t)$ نیز پس از مدتی (در شکل برابر τ) به $x_p(t)$ میل می‌کند. بخشی از حرکت که به خاطر وجود میرایی (بخش ارتعاش آزاد) به صفر میل می‌کند حرکت گذرا خوانده می‌شود. نرخ میل کردن حرکت گذرا به سمت صفر به مقادیر پارامترهای سیستم یعنی k ، c و m بستگی دارد. در این بخش از حرکت گذرا صرف نظر شده و تنها پاسخ خصوصی معادله $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$ را به دست می‌آوریم که نشان دهنده پاسخ حالت پایدار تحت توابع نیروی هارمونیک است.



پاسخ‌های همگن، خصوصی و کلی برای معادله $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$ برای یک سیستم کند میرا

پاسخ یک سیستم بدون میرایی تحت نیروی هارمونیک

پیش از مطالعه پاسخ یک سیستم میرا، یک سیستم غیرمیرا را که تحت نیروی هارمونیک است در نظر می‌گیریم. اگر نیروی $F(t) = F_0 \cos \omega t$ بر یک سیستم غیرمیرا اثر کند، معادله حرکت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

پاسخ همگن این معادله به صورت زیر است:

$$x_h(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t \quad \text{یا} \quad x_h(t) = A \cos(\omega_n t - \phi)$$

که در آن $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ فرکانس طبیعی این سیستم می‌باشد. به خاطر هارمونیک بودن نیروی تحریک $F(t)$ ، پاسخ خصوصی $x_p(t)$ نیز هارمونیک بوده و دارای همان فرکانس می‌باشد. بنابراین می‌توان پاسخی به صورت زیر را در نظر گرفت:

$$x_p(t) = X \cos \omega t$$

که در آن X مقداری ثابت بوده و نشانگر ماکزیمم دامنه $x_p(t)$ می‌باشد. با جایگذاری این رابطه در معادله $m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$ و حل آن برای X داریم:

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2}$$

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

بنابراین پاسخ کلی معادله یاد شده به صورت مقابل است:

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2}, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

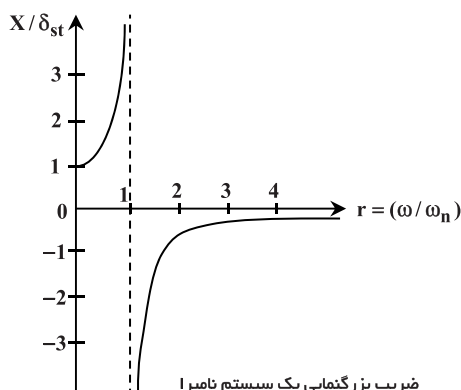
با استفاده از شرایط اولیه $x(t=0) = x_0$ و $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$ خواهیم داشت:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2}\right) \cos \omega_n t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right) \sin \omega_n t + \left(\frac{F_0}{k - m\omega^2}\right) \cos \omega t$$

بنابراین برای پاسخ کلی داریم:

دامنه ماکزیمم X را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد:

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$



که در آن $\delta_{st} = \frac{F_0}{k}$ نشان‌دهنده تغییر طول فنر k تحت نیروی ثابت F_0 بوده و گاهی اوقات

تغییر شکل استاتیکی خوانده می‌شود؛ زیرا F_0 یک نیروی ثابت (ساکن) است. مقدار $\frac{X}{\delta_{st}}$

نشانگر نسبت دامنه دینامیکی به دامنه استاتیکی حرکت بوده و فاکتور بزرگنمایی

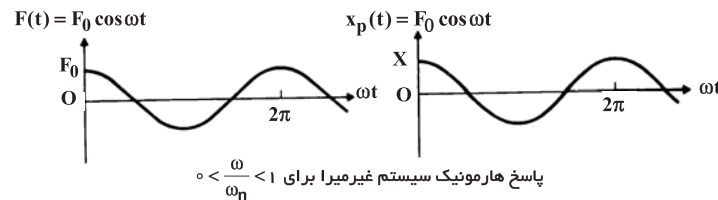
(فاکتور تقویت) یا نسبت دامنه نامیده می‌شود. نمودار تغییر نسبت دامنه $\frac{X}{\delta_{st}}$ بر حسب نسبت

فرکانس $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ (معادله فوق) در شکل مقابل نشان داده شده است.



با توجه به شکل صفحه قبل، پاسخ این سیستم را می‌توان به سه حالت زیر تقسیم‌بندی نمود:

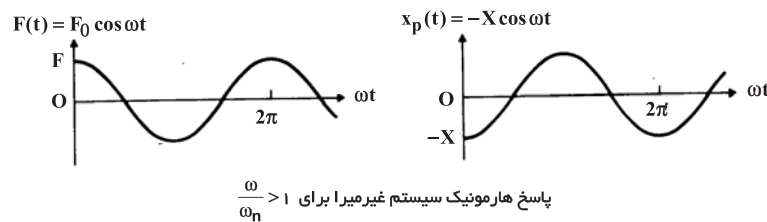
حالت اول: هنگامی که $0 < \frac{\omega}{\omega_n} < 1$ باشد، مخرج کسر معادله پیشین مثبت بوده و پاسخ سیستم از طریق معادله $x_p(t) = X \cos \omega t$ به دست می‌آید. همان‌طور که در شکل زیر نیز دیده می‌شود، در این حالت پاسخ هارمونیک سیستم غیرمیرا $x_p(t)$ با نیروی خارجی هم‌فاز خواهد بود.



حالت دوم: هنگامی که $\frac{\omega}{\omega_n} > 1$ باشد، مخرج کسر معادله X منفی بوده و پاسخ حالت پایدار x_p را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$X = \frac{\delta_{st}}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1} \quad ; \quad x_p(t) = -X \cos \omega t$$

که در رابطه فوق، دامنه حرکت X ، باز هم به صورت کمیته مثبت تعریف شده است. نمودار تغییرات $F(t)$ و $x_p(t)$ با زمان در شکل زیر نشان داده شده است. به خاطر مختلف العلامه بودن $F(t)$ و $x_p(t)$ ، گفته می‌شود که پاسخ به اندازه 180° درجه با نیروی خارجی اختلاف فاز دارد. همچنین، با نزدیک شدن $\frac{\omega}{\omega_n}$ به بی‌نهایت، مقدار X به سمت صفر میل می‌کند؛ بنابراین در این حالت پاسخ سیستم غیرمیرا به نیروی هارمونیک با فرکانس بسیار بالا، نزدیک به صفر است.



حالت سوم: هنگامی که $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$ باشد، براساس معادله پیشین دامنه X بی‌نهایت خواهد شد. این شرایط که در آن فرکانس نیرو (ω) برابر با فرکانس طبیعی سیستم (ω_n) است، تشدید (رزونانس) خوانده می‌شود. برای یافتن پاسخ سیستم غیرمیرا در این حالت، معادله $x(t)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

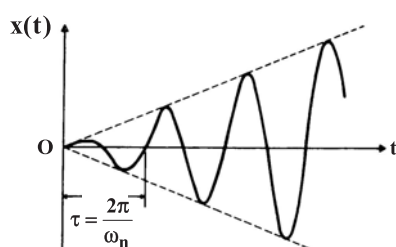
$$x(t) = x_o \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_o}{\omega_n} \sin \omega_n t + \delta_{st} \left[\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right]$$

به خاطر اینکه عبارت آخر این معادله برای $\omega = \omega_n$ شکل بی‌نهایت به خود می‌گیرد، قاعده هوییتال را برای برآورد حد این عبارت به کار می‌گیریم:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \left[\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] = \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \left[\frac{\frac{d}{d\omega}(\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\frac{d}{d\omega} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \right] = \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \left[\frac{t \sin \omega t}{\frac{\omega}{\omega_n^2}} \right] = \frac{\omega_n t}{2} \sin \omega_n t$$

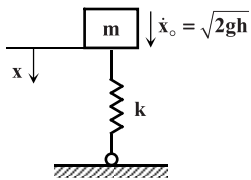
$$x(t) = x_o \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_o}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{\delta_{st} \omega_n t}{2} \sin \omega_n t$$

بنابراین پاسخ این سیستم در حالت تشدید برابر است با:



پاسخ هارمونیک سیستم غیرمیرا برای $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$ (رزونانس)

همان‌طور که قبلاً بیان شد و در شکل زیر نیز دیده می‌شود، در حالت تشدید $(\omega = \omega_n)$ پاسخ سیستم غیرمیرا $x(t)$ با گذشت زمان به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. با توجه به ترم آخر معادله فوق، افزایش دامنه پاسخ با زمان به صورت خطی می‌باشد.



سیستم جرم و فنر شکل زیر از ارتفاع h رها می‌شود. اگر x از موقعیت جرم m در لحظه $t = 0$ در نظر گرفته شود، یعنی هنگامی که فنر برای اولین بار با زمین برخورد می‌کند، معادله‌ی دیفرانسیل حرکت جرم m تا زمانی که فنر با زمین در تماس باقی بماند، به صورت مقابل است:

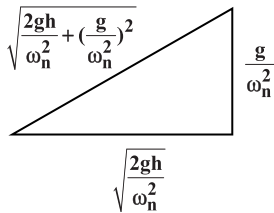
با گرفتن تبدیل لاپلاس از این معادله تحت شرایط اولیه‌ی $x(0) = 0$ و $\dot{x}(0) = \sqrt{2gh}$ ، به معادله‌ی زیر می‌توان رسید:

$$m(s^2 \bar{X}(s) - 0 - \sqrt{2gh}) + k\bar{X}(s) = \frac{mg}{s} \Rightarrow s^2 \bar{X}(s) - \sqrt{2gh} + \omega_n^2 \bar{X}(s) = \frac{g}{s} \Rightarrow \bar{X}(s) = \frac{\sqrt{2gh}}{s^2 + \omega_n^2} + \frac{g}{s(s^2 + \omega_n^2)}$$

که در آن $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ فرکانس طبیعی سیستم است. با گرفتن تبدیل معکوس لاپلاس $\bar{X}(s)$ ، معادله‌ی جابه‌جایی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x(t) = \frac{\sqrt{2gh}}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{g}{\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) = \sqrt{\frac{2gh}{\omega_n^2} + \left(\frac{g}{\omega_n^2}\right)^2} \sin(\omega_n t - \phi) + \frac{g}{\omega_n^2} \quad x(t) > 0$$

این رابطه در شکل زیر نشان داده شده است. با مشتق‌گیری از این رابطه سرعت و شتاب حرکت به صورت زیر است:



$$\dot{x}(t) = \omega_n \sqrt{\frac{2gh}{\omega_n^2} + \left(\frac{g}{\omega_n^2}\right)^2} \cos(\omega_n t - \phi)$$

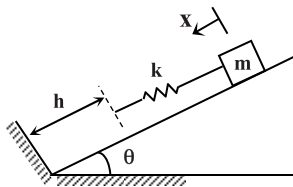
$$\ddot{x}(t) = -\omega_n^2 \sqrt{\frac{2gh}{\omega_n^2} + \left(\frac{g}{\omega_n^2}\right)^2} \sin(\omega_n t - \phi)$$

در اینجا $\delta_{st} = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega_n^2}$ تغییر شکل استاتیکی است. بیشترین مقدار شتاب و جابه‌جایی در $\sin(\omega_n t - \phi) = 1$ رخ می‌دهد؛ بنابراین ماکزیمم شتاب

برحسب گرانش، تنها به نسبت فاصله‌ی رها شدن (h) به تغییر شکل استاتیکی (δ_{st}) بستگی دارد و از معادله‌ی روبه‌رو به دست می‌آید: $\frac{\ddot{x}}{g} = -\sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}} + 1$

مثال ۴: در سیستم جرم و فنر روی یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی θ ، فاصله‌ی زمانی بین تماس اول فنر با سطح را تا زمان جدایی فنر از این سطح بیابید.

پاسخ: ☒



روش اول: با استفاده از پاسخ حول نقطه‌ی تعادل استاتیکی

$$x(t) = x(0) \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$

x در راستای سطح شیب‌دار اندازه‌گیری می‌شود و زمان صفر از لحظه‌ی تماس فنر با سطح می‌باشد.

$$x(0) = -\frac{mg \sin \theta}{k} \quad \dot{x}(0) = +\sqrt{2gh \sin \theta} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x(t) = \frac{-mg \sin \theta}{k} \cos(\omega_n t) + \frac{\sqrt{2gh \sin \theta}}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$

$$x(t_1) = -\frac{mg \sin \theta}{k} \quad \dot{x}(t_1) = -\sqrt{2gh \sin \theta}$$

در لحظه‌ی جدایی فنر از سطح داریم:

$$\begin{cases} -\frac{mg \sin \theta}{k} = \frac{-mg \sin \theta}{k} \cos(\omega_n t_1) + \frac{\sqrt{2gh \sin \theta}}{\omega_n} \sin(\omega_n t_1) \\ -\sqrt{2gh \sin \theta} = \frac{+mg \sin \theta \omega_n}{k} \sin(\omega_n t_1) + \sqrt{2gh \sin \theta} \cos(\omega_n t_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-mg \sin \theta}{k} = \left(\frac{-mg \sin \theta}{k} + \frac{\sqrt{2gh \sin \theta}}{\omega_n} \tan(\omega_n t_1) \right) \cos(\omega_n t_1) \\ -\sqrt{2gh \sin \theta} = \left(\frac{mg \sin \theta \omega_n}{k} \tan(\omega_n t_1) + \sqrt{2gh \sin \theta} \right) \cos(\omega_n t_1) \end{cases}$$

$$\frac{-mg \sin \theta}{-k\sqrt{2gh \sin \theta}} = \frac{\frac{-mg \sin \theta}{k} + \frac{\sqrt{2gh \sin \theta}}{\omega_n} \tan(\omega_n t_1)}{\frac{mg \sin \theta \omega_n}{k} \tan(\omega_n t_1) + \sqrt{2gh \sin \theta}} \Rightarrow \tan(\omega_n t_1) = \frac{\sqrt{\frac{2mgh \sin \theta}{k}}}{h - \frac{mg \sin \theta}{\omega_n^2 k}}$$

روش دوم: با استفاده از تبدیل لاپلاس و در نظر گرفتن معادله حرکت از لحظه‌ای که فنر با سطح تماس می‌یابد:

$$m(s^2 \bar{X}(s) - x(\circ)s - \dot{x}(\circ)) + k\bar{X}(s) = \frac{mg \sin \theta}{s}$$

$$x(\circ) = 0, \quad \dot{x}(\circ) = \sqrt{2gh \sin \theta}$$

$$(ms^2 + k)\bar{X}(s) = \frac{mg \sin \theta}{s} + m\sqrt{2gh \sin \theta}$$

$$\bar{X}(s) = \frac{mg \sin \theta}{s(ms^2 + k)} + \frac{m\sqrt{2gh \sin \theta}}{ms^2 + k} = \frac{g \sin \theta}{s(s^2 + \omega_n^2)} + \frac{\sqrt{2gh \sin \theta}}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$x(t) = \frac{g \sin \theta}{\omega_n^2} (1 - \cos(\omega_n t)) + \frac{\sqrt{2gh \sin \theta}}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \quad ; \quad \dot{x}(t) = \frac{g \sin \theta}{\omega_n^2} (\omega_n \sin(\omega_n t)) + \sqrt{2gh \sin \theta} \cos(\omega_n t)$$

زمانی که $\dot{x}(t_1) = -\sqrt{2gh \sin \theta}$ و همچنین $x(t_1) = 0$ تماس فنر قطع می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{g \sin \theta}{\omega_n^2} \sin(\omega_n t_1) + \sqrt{2gh \sin \theta} \cos(\omega_n t_1) = -\sqrt{2gh \sin \theta} \\ \frac{g \sin \theta}{\omega_n^2} (1 - \cos(\omega_n t_1)) + \frac{\sqrt{2gh \sin \theta}}{\omega_n} \sin(\omega_n t_1) = 0 \end{cases}$$

$$\tan(\omega_n t_1) = \frac{\sqrt{2mgh \sin \theta}}{h - \frac{mg \sin \theta}{2k}}$$

که بعد از ساده‌سازی به رابطه‌ی مقابل می‌رسیم:

پاسخ سیستم تحت نیروی غیرمتناوب

دیدیم که نیروهای تناوبی با هر شکل کلی را می‌توان با سری فوریه به صورت برآیند مؤلفه‌های هارمونیک فرکانس‌های مختلف بیان کرد. هنگامی که نیروی تحریک $F(t)$ ، تناوبی نباشد، همانند تحریک ایجاد شده در اثر یک انفجار، روش‌های مختلفی را می‌توان برای یافتن پاسخ سیستم به یک تحریک دلخواه به کار برد. برخی از این روش‌ها به صورت زیر می‌باشند:

(۲) استفاده از روش انتگرال کانولوشن

(۱) نمایش تحریک توسط یک انتگرال فوریه

(۴) ابتدا تقریب $F(t)$ توسط یک مدل برازش مناسب و سپس استفاده از روش عددی

(۳) استفاده از روش تبدیل لاپلاس

(۵) انتگرال‌گیری از معادلات حرکت به صورت عددی

انتگرال کانولوشن

معمولاً مقدار نیروی تحریک غیرتناوبی با زمان تغییر می‌کند. این تحریک برای یک دوره زمانی مشخص اعمال می‌شود و سپس حذف می‌گردد. نیروی ضربه‌ای نیرویی است که دارای مقدار زیاد F بوده و برای مدت زمان بسیار کوتاه Δt اعمال می‌شود. ضربه را می‌توان با یافتن تغییر اندازه حرکت ایجاد شده توسط آن نیرو در سیستم اندازه‌گیری کرد. اگر $\dot{x}_1$ و $\dot{x}_2$ نشان‌دهنده سرعت‌های جرم m قبل و بعد از اعمال ضربه باشند، داریم:

$$F \Delta t = m \dot{x}_2 - m \dot{x}_1 \quad ; \quad F = \int_t^{t+\Delta t} F dt$$

با نشان دادن مقدار ضربه $F \Delta t$ توسط $\tilde{F}$ ، در حالت کلی می‌توان نوشت:

$$\tilde{f} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_t^{t+\Delta t} F dt = F \Delta t = 1$$

یک ضربه واحد ($\tilde{f}$) به صورت مقابل تعریف می‌شود:

می‌توان دید که برای اینکه $F \Delta t$ مقداری محدود داشته باشد، F به سمت بی‌نهایت میل می‌کند (زیرا Δt به سمت صفر میل می‌کند). هرچند تابع ضربه واحد دارای معنی فیزیکی نیست، ابزار مناسبی در تحلیل حاضر می‌باشد.

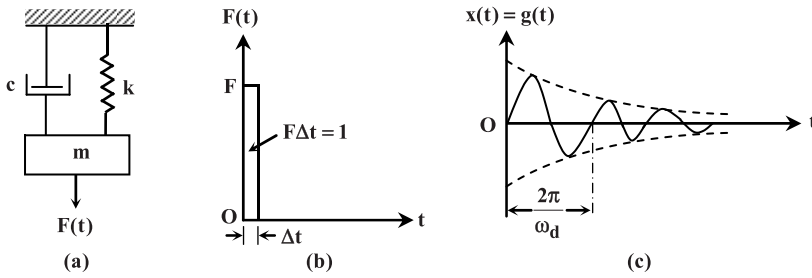
پاسخ به یک ضربه

ابتدا پاسخ یک سیستم تک درجه آزادی به تحریک ضربه‌ای را در نظر می‌گیریم. این حالت در مطالعه پاسخ به تحریک‌های کلی‌تر به کار می‌رود. سیستم جرم و فنر دارای میرایی ویسکوز را که تحت ضربه واحد در $t = 0$ قرار دارد، همانند شکل a و b زیر در نظر بگیرید. برای سیستم با میرایی کم، پاسخ معادله حرکت مقابل به صورت زیر می‌باشد:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right\}$$

که در آن:



سیستم تک درجه آزادی که تحت اثر ضربه واحد قرار گرفته است.

اگر پیش از اعمال ضربه واحد ($x = 0$ و $\dot{x} = 0$ برای $t < 0$ یا در $t = 0^-$) جرم در حال سکون بوده باشد، از رابطه ضربه اندازه حرکت داریم:

$$f = \dot{x}(t=0) - \dot{x}(t=0^-) = \dot{x}_0$$

$$x(t=0) = x_0 = 0; \quad \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = \frac{1}{m}$$

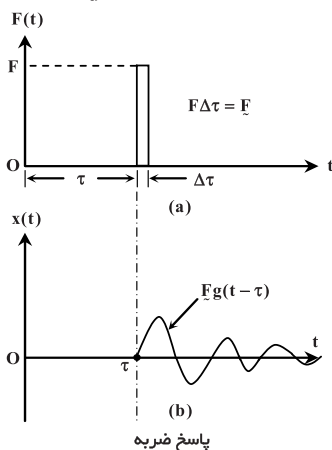
$$x(t) = g(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t$$

با توجه به این معادله، معادله $x(t)$ قبل به صورت مقابل تبدیل می‌شود:

این معادله پاسخ سیستم تک‌درجه آزادی به ضربه واحد را می‌دهد که به تابع پاسخ ضربه نیز معروف است و با $g(t)$ نشان داده می‌شود. تابع $g(t)$ در

شکل c نشان داده شده است. اگر مقدار ضربه به جای واحد، برابر F باشد سرعت اولیه $\dot{x}_0$ برابر $\frac{F}{m}$ بوده و پاسخ این سیستم به صورت زیر است:

$$x(t) = \frac{F e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t = Fg(t)$$



اگر ضربه F در زمان دلخواه $t = \tau$ اعمال شود (همانند شکل a زیر) سرعت در لحظه $t = \tau$ را به

$$\frac{F}{m}$$

اندازه تغییر خواهد داد. با این فرض که تا زمان اعمال شدن ضربه، $x = 0$ باشد، جابه‌جایی x

در هر لحظه t بعد از ضربه، که تحت تأثیر تغییر سرعت در لحظه τ قرار دارد، از معادله بالا با جایگزینی $t - \tau$ به جای t به دست می‌آید. بنابراین خواهیم داشت:

$$x(t) = Fg(t - \tau)$$

این رابطه در شکل b مقابل نشان داده شده است.

پاسخ به شرایط کلی اعمال نیرو

حال پاسخ سیستم تحت نیروی خارجی دلخواه $F(t)$ را همانند شکل بعد در نظر بگیرید. فرض می‌شود این نیرو از چندین ضربه با مقادیر دامنه متغیر تشکیل شده است. با این فرض که در زمان τ ، نیروی $F(\tau)$ روی سیستم برای لحظه‌ای کوتاه $\Delta\tau$ اعمال می‌شود، ضربه اعمالی در لحظه $t = \tau$ با $F(\tau)\Delta\tau$ بیان می‌شود.

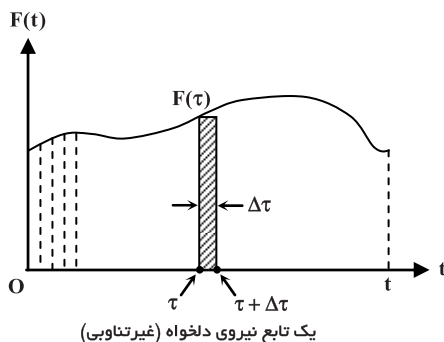
در هر لحظه t ، زمان سپری شده از لحظه اعمال ضربه برابر $t - \tau$ می‌باشد؛ بنابراین پاسخ سیستم در زمان t از معادله قبل با جایگزینی $F = F(\tau)\Delta\tau$ به دست می‌آید:

$$\Delta x(t) = F(\tau)\Delta\tau g(t - \tau)$$

پاسخ کلی در زمان t را می‌توان با جمع همه پاسخ‌ها به ضربه‌های ساده اعمالی در همه زمان‌های τ

$$x(t) = \sum F(\tau)g(t - \tau)\Delta\tau$$

به دست آورد:



یک تابع نیروی دلخواه (غیرتناوبی)

$$x(t) = \int_0^t F(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

با در نظر گرفتن $\Delta\tau \rightarrow 0$ و جایگزینی جمع توسط انتگرال، داریم:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t - \tau)d\tau$$

با جایگزینی معادله $g(t)$ از معادله قبل داریم:

اگر یک تحریک اولیه دلخواه به سیستم اعمال شود، ارتعاش آزاد به وجود آمده برآیندی از دو مود نرمال ارتعاش خواهد بود و به ازای شرایط اولیه خاص، ارتعاشات می‌تواند تنها در یکی از مودهای طبیعی (نرمال) اتفاق بیفتد. اگر سیستم تحت اثر یک نیروی هارمونیک خارجی ارتعاش کند، همانند سیستم‌های یک درجه آزادی، یک ارتعاش هارمونیک در فرکانس نیروی تحریک رخ می‌دهد و در صورتی که فرکانس نیرو برابر یکی از فرکانس‌های طبیعی سیستم باشد، تشدید رخ می‌دهد و دامنه‌های دو مختصه ماکزیمم می‌شوند. در حالت کلی معادلات دیفرانسیل حرکت یک سیستم دو درجه آزادی به صورت کوپل شده می‌باشند؛ یعنی هر معادله شامل همه مختصات است. البته ممکن است به ازای یک مجموعه مختصات خاص، هر یک از معادلات حرکت تنها شامل یک مختصه باشد. بدین ترتیب معادلات حرکت از هم مجزا شده و می‌تواند به صورت مستقل حل شوند. چنین مجموعه‌ای از مختصات را که باعث به وجود آمدن معادلات حرکت دی کوپله می‌شوند، مختصات اصلی می‌گویند.

معادلات حرکت برای ارتعاش واداشته (اجباری)

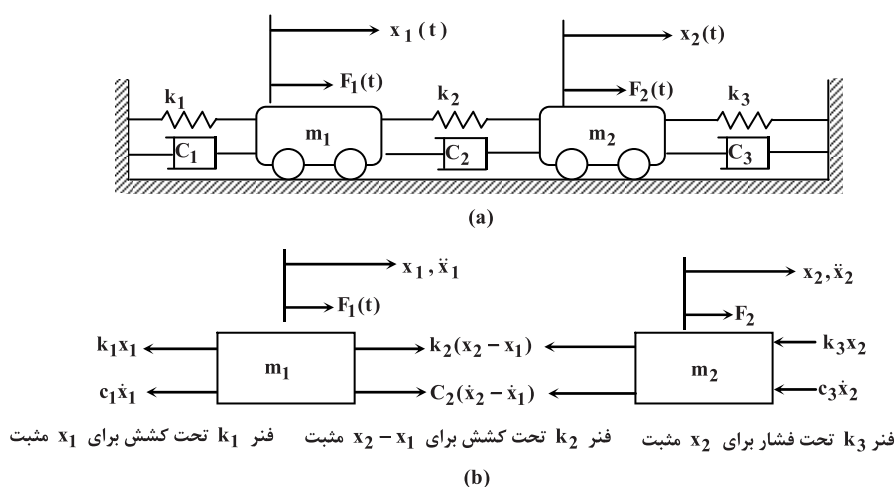
یک سیستم جرم، فنر و دمپر دو درجه آزادی را که در شکل زیر نشان داده شده است، در نظر بگیرید. حرکت این سیستم به طور کامل توسط مختصات $x_1(t)$ و $x_2(t)$ که مکان جرم‌های m_1 و m_2 در هر لحظه از زمان از موقعیت‌های تعادل متناظر می‌باشد، توصیف می‌شود. نیروهای خارجی $F_1(t)$ و $F_2(t)$ به ترتیب روی جرم‌های m_1 و m_2 عمل می‌کنند. دیاگرام‌های آزاد نیروهای وارد بر جرم‌های m_1 و m_2 در شکل b نشان داده شده‌اند. اعمال قانون دوم نیوتن برای حرکت هر کدام از جرم‌ها، معادلات حرکت زیر را نتیجه می‌دهد:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = F_2$$

دیده می‌شود که معادلات فوق شامل هر دو مختصه x_1 و x_2 می‌باشند؛ بنابراین سیستم دو درجه آزادی فوق دارای معادلات کوپل شده است، یعنی حرکت جرم‌های m_1 و m_2 متأثر از یکدیگر خواهند بود. این معادلات را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$[m]\ddot{\vec{x}}(t) + [c]\dot{\vec{x}}(t) + [k]\vec{x}(t) = \vec{F}(t)$$



یک سیستم جرم - فنر - دمپر با دو درجه آزادی

که در رابطه فوق $[m]$ ، $[c]$ و $[k]$ به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی می‌باشند که از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} ; [c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} ; [k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$$

و $\vec{x}(t)$ و $\vec{F}(t)$ به ترتیب بردارهای جابه‌جایی و نیرو می‌باشند و عبارتند از:

می‌توان دید که ماتریس‌های $[m]$ ، $[c]$ و $[k]$ همگی ماتریس‌های 2×2 هستند که المان‌های آنها به ترتیب جرم‌ها، ضرایب میرایی و سختی‌های معلوم سیستم می‌باشند. همچنین دیده می‌شود که این ماتریس‌ها تا زمانی که سیستم خطی است، متقارن می‌باشند به گونه‌ای که:

$$[m]^T = [m] , [c]^T = [c] , [k]^T = [k]$$

که در روابط فوق بالانویس T ، ترانپوز ماتریس می‌باشد.

زمانی که $c_2 = k_2 = 0$ باشد، معادلات حرکت دی کوپل خواهد بود که نشان‌دهنده عدم ارتباط فیزیکی جرم‌های m_1 و m_2 می‌باشد. در چنین حالتی ماتریس‌های $[m]$ ، $[c]$ و $[k]$ قطری می‌شوند.

ارتعاش آزاد یک سیستم بدون میرایی

برای تحلیل ارتعاش آزاد سیستم نشان داده شده در شکل قبل، $F_1(t)$ و $F_2(t)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم. افزون بر این اگر میرایی در نظر گرفته نشود $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ بوده و معادلات حرکت به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) = 0, \quad m_2 \ddot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) = 0$$

می‌خواهیم مود نرمال (طبیعی) را بررسی کنیم. در مود طبیعی نوسان تمام جرم‌ها دارای حرکت هارمونیک با فرکانس و فاز یکسان است و هم‌زمان از وضعیت تعادل عبور می‌کنند؛ بنابراین برای این حرکت می‌توان نوشت:

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \psi), \quad x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \psi)$$

که در آن X_1 و X_2 ثابت‌هایی هستند که نشانگر دامنه‌های ماکزیمم $x_1(t)$ و $x_2(t)$ می‌باشند و ψ نیز نشان‌دهنده زاویه فاز است. با جایگذاری این معادلات در معادلات حرکت داریم:

$$[-m_1 \omega^2 + (k_1 + k_2)]X_1 - k_2 X_2 = 0$$

$$[-k_2 X_1 + \{-m_2 \omega^2 + (k_2 + k_3)\}X_2] \cos(\omega t + \psi) = 0$$

با توجه به اینکه این معادلات باید برای همه مقادیر زمان t برقرار باشند، جمله‌های بین براکت‌ها باید برابر صفر باشند، بنابراین داریم:

$$\{-m_1 \omega^2 + (k_1 + k_2)\}X_1 - k_2 X_2 = 0$$

$$-k_2 X_1 + \{-m_2 \omega^2 + (k_2 + k_3)\}X_2 = 0$$

معادلات فوق نشان‌دهنده دو معادله جبری همگن با مجهول‌های X_1 و X_2 می‌باشد. می‌توان دید که این معادلات با پاسخ بدیهی $X_1 = X_2 = 0$ ارضا می‌شوند که نشان‌دهنده حالت سکون و بدون ارتعاش می‌باشد. برای یک پاسخ غیرصفر برای X_1 و X_2 ، باید دترمینان ضرایب X_1 و X_2 برابر صفر باشد:

$$\det \begin{bmatrix} \{-m_1 \omega^2 + (k_1 + k_2)\} & -k_2 \\ -k_2 & \{-m_2 \omega^2 + (k_2 + k_3)\} \end{bmatrix} = 0$$

معادله حاصل از دترمینان فوق، معادله فرکانسی یا مشخصه نامیده می‌شود؛ زیرا پاسخ این معادله فرکانس‌ها یا مقادیر مشخصه این سیستم را نتیجه می‌دهد.

مقادیر X_1 و X_2 به فرکانس‌های طبیعی ω_1 و ω_2 بستگی دارند. به خاطر همگن بودن معادلات حرکت، تنها می‌توان نسبت‌های $r_1 = \{X_2/X_1\}^{(1)}$ و

$r_2 = \{X_2/X_1\}^{(2)}$ را پیدا کرد (بالانویس (۱) و (۲) مربوط به فرکانس طبیعی می‌باشد). برای $\omega_1^2 = \omega_1^2$ و $\omega_2^2 = \omega_2^2$ ، از معادلات همگن حرکت نتیجه می‌شود که:

$$r_1 = \{X_2/X_1\}^{(1)} = \frac{-m_1 \omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2 \omega_1^2 + (k_2 + k_3)}$$

$$r_2 = \{X_2/X_1\}^{(2)} = \frac{-m_1 \omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2 \omega_2^2 + (k_2 + k_3)}$$

توجه کنید که دو نسبت به دست آمده برای هر کدام از r_i ($i = 1, 2$) در این معادله مشابه‌اند. مودهای نرمال ارتعاش متناظر با ω_1^2 و ω_2^2 را می‌توان به ترتیب به صورت زیر بیان کرد:

$$\bar{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ r_1 X_1 \end{Bmatrix} \quad \phi_1 = \begin{Bmatrix} 1/0 \\ 0/r_1 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ r_2 X_1 \end{Bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1/0 \\ 0/r_2 \end{Bmatrix}$$

که در رابطه فوق ϕ_1 و ϕ_2 مودهای طبیعی نرمالیز شده سیستم می‌باشند.

روش محاسبه فرکانس طبیعی و مودهای طبیعی

همان‌طور که در مراحل حل مسئله قبل مشاهده شد، برای محاسبه فرکانس و مودهای طبیعی سیستم‌های چند درجه آزادی، ابتدا باید معادلات حرکت را استخراج کرد که این کار به دو روش انجام می‌گیرد: ۱- قوانین نیوتن ۲- معادلات لاگرانژ

که در این فصل از روش اول استفاده می‌شود. بعد از استخراج معادلات حرکت ماتریس‌های جرم، سفتی و میرایی مشخص می‌شوند؛ بنابراین می‌توان معادلات را به فرم ماتریسی نوشت:

$$[m]\ddot{x} + [c]\dot{x} + [k]x = 0$$



برای محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی سیستم، دترمینان مقابل را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\det([k] - \lambda[m]) = 0, \lambda = \omega_i^2$$

با حل معادله فوق (معادله مشخصه) فرکانس‌های طبیعی سیستم (ω_i) به دست می‌آیند. همان‌طور که اشاره شد برای هر فرکانس طبیعی یک مود طبیعی ارتعاش داریم که با قرار دادن فرکانس طبیعی به دست آمده در معادلات زیر می‌توان بردار ویژه مربوط به مود طبیعی همان فرکانس را تعیین کرد.

$$([k] - \lambda[m])X = 0, X = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}$$

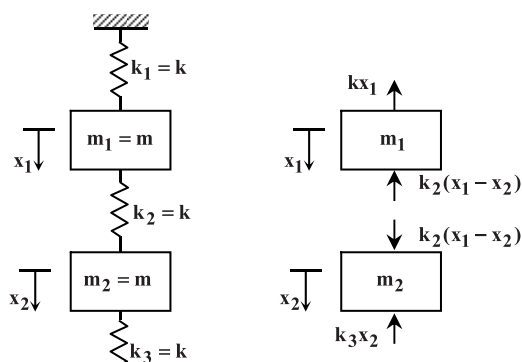
از روابط فوق نسبت $\frac{X_1}{X_2}$ و $\frac{X_1}{X_3}$... برای هر فرکانس طبیعی به دست می‌آید که با برابر ۱ قرار دادن یکی از دامنه‌ها (نرمالیزه کردن دامنه‌ها) مود طبیعی

که با ϕ_i نشان داده می‌شود، به دست می‌آید.

$$r_i = \left\{ \frac{X_1}{X_2} \right\}^{(i)}; \phi_i = \begin{Bmatrix} 1/0 \\ r_i \end{Bmatrix}$$

نکته ۲: چنانچه نسبت دو دامنه مثبت باشد، دو درجه آزادی مربوط به این دامنه‌ها هم‌فاز هستند و چنانچه منفی باشد، در فاز مخالف می‌باشند.

مثال ۱: فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای یک سیستم جرم و فنر نشان داده شده در شکل روبه‌رو را که تنها می‌تواند در راستای عمودی حرکت کند، بیابید.



پاسخ: اگر X_1 و X_2 را از موقعیت تعادل استاتیکی جرم‌های m_1 و m_2 به عنوان مختصات برای این سیستم در نظر بگیریم، با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:

$$\begin{aligned} \sum F_{x_i} &= m\ddot{x}_i \\ -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) &= m_1\ddot{x}_1 \\ k_2(x_1 - x_2) - k_3x_2 &= m_2\ddot{x}_2 \end{aligned}$$

معادلات را به شکل ماتریسی می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$\det([k] - \lambda[m]) = 0, \lambda = \omega_i^2$ با فرض پاسخ هارمونیک $x_i(t) = X_i \cos(\omega t + \psi)$ و $i = 1, 2$ داریم:

$$\begin{vmatrix} (2k - m\lambda) & -k \\ -k & (2k - m\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2k - m\lambda)(2k - m\lambda) - k^2 = 0 \Rightarrow 4k^2 - 2mk\lambda + m^2\lambda^2 - k^2 = 0$$

$$m^2\lambda^2 - 4mk\lambda + 3k^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{k}{m}, \lambda_2 = \frac{3k}{m}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$\begin{cases} (2k - m\lambda)X_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + (2k - m\lambda)X_2 = 0 \end{cases}$$

بنابراین فرکانس‌های طبیعی سیستم برابر است با:

$$\text{اگر } \lambda_1 = \frac{k}{m} \Rightarrow (2k - m\frac{k}{m})X_1 - kX_2 = 0 \Rightarrow kX_1 = kX_2 \Rightarrow X_1 = X_2 \Rightarrow \phi_1 = \begin{Bmatrix} 1/0 \\ 1/0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{اگر } \lambda_2 = \frac{3k}{m} \Rightarrow (2k - m\frac{3k}{m})X_1 - kX_2 = 0 \Rightarrow -kX_1 = kX_2 \Rightarrow X_1 = -X_2 \Rightarrow \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1/0 \\ -1/0 \end{Bmatrix}$$

بنابراین پاسخ سیستم برای مودهای اول و دوم به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{(1)} = c_1 \begin{Bmatrix} 1/0 \\ 1/0 \end{Bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \psi_1\right) \quad \text{پاسخ سیستم به ازای مود اول:}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{(2)} = c_2 \begin{Bmatrix} 1/0 \\ -1/0 \end{Bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \psi_2\right) \quad \text{پاسخ سیستم به ازای مود دوم:}$$

می‌توان دید که انرژی پتانسیل یک تابع درجه دوم از جابه‌جایی است و انرژی جنبشی تابعی درجه دوم از سرعت‌ها می‌باشد؛ بنابراین گفته می‌شود که آنها در شکل درجه دوم وجود دارند. به خاطر اینکه انرژی جنبشی نمی‌تواند منفی باشد و تنها هنگام صفر بودن سرعت‌ها صفر می‌شود، معادله انرژی جنبشی شکل‌های درجه دوم کاملاً مثبت خوانده شده و ماتریس جرمی $[m]$ یک ماتریس کاملاً مثبت نامیده می‌شود. از طرف دیگر، عبارت انرژی پتانسیل یک شکل درجه دوم کاملاً مثبت می‌باشد؛ ولی ماتریس $[k]$ تنها هنگامی کاملاً مثبت است که سیستم پایدار باشد. سیستم‌هایی وجود دارند که در آنها انرژی پتانسیل برابر صفر می‌باشد، بدون آنکه جابه‌جایی‌ها (یا مختصات $x_1, x_2, \dots, x_n$) برابر صفر باشند. در این موارد انرژی پتانسیل یک تابع درجه دوم مثبت است، به جای اینکه تابع کاملاً مثبت باشد و به طور متناظر گفته می‌شود ماتریس $[k]$ مثبت است. یک سیستم که در آن $[k]$ مثبت بوده و $[m]$ کاملاً مثبت باشد، یک سیستم نیمه‌کامل نامیده می‌شود.

مختصات کلی و نیروهای کلی

معادلات حرکت یک سیستم ارتعاشی را می‌توان در چند سیستم مختصات مختلف بیان کرد. همان‌گونه که پیشتر گفته شد، n مختصات مستقل برای توصیف حرکت یک سیستم n درجه آزادی مورد نیاز است. هر مجموعه با n مختصه مستقل، مختصات کلی نامیده می‌شود و معمولاً با $q_1, q_2, \dots, q_n$ نشان داده می‌شود. مختصات کلی ممکن است طول‌ها، زاویه‌ها و یا هر مجموعه دیگری از مختصات هندسی باشد که شکل سیستم را در هر زمان به صورت یکتا تعریف می‌کند.

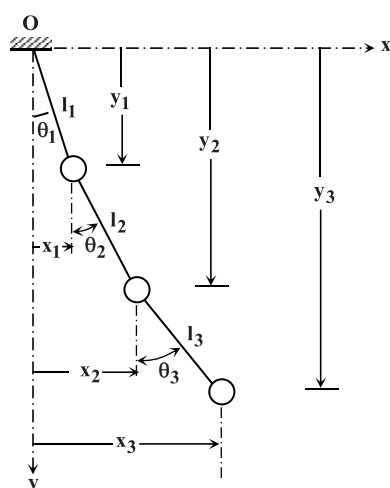
برای نشان دادن مفهوم مختصات کلی، آونگ سه‌گانه نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. شکل این سیستم را می‌توان با شش مختصه

x_j, y_j و $j = 1, 2, 3$ مشخص کرد. با وجود این، این مختصات مستقل نیستند و توسط رابطه‌های زیر مقید شده‌اند:

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 = l_3^2$$



مختصات کلی برای آونگ سه‌گانه

به خاطر عدم استقلال مختصات $j = 1, 2, 3$ و (x_j, y_j) ، آنها مختصات کلی نامیده نمی‌شوند. این قیدها، سه درجه آزادی این سیستم را از شش مختصه (دو مختصه برای هر جرم) حذف می‌نمایند و بنابراین، این سیستم تنها دارای سه درجه آزادی است. اگر جابه‌جایی‌های زاویه‌ای θ_j ($j = 1, 2, 3$) برای مشخص کردن مکان جرم‌های m_j ($j = 1, 2, 3$) در هر لحظه استفاده شود، هیچ قیدی برای θ_j وجود نخواهد داشت. بنابراین آنها مجموعه‌ای از مختصات کلی را شکل می‌دهند و به صورت $j = 1, 2, 3$ و $q_j = \theta_j$ نشان داده می‌شوند.

هنگامی که نیروهای خارجی به سیستم اعمال شوند، شکل سیستم تغییر می‌کند. شکل جدید این سیستم را می‌توان با تغییر مختصات کلی q_j به اندازه δq_j ($j = 1, 2, \dots, n$) به‌دست آورد که در آن n نشان‌دهنده تعداد مختصات کلی (یا درجات آزادی) این سیستم می‌باشد. اگر U_j نشان‌دهنده کار انجام شده در تغییر مختصات کلی q_j به اندازه δq_j باشد، نیروی کلی متناظر Q_j را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$Q_j = \frac{U_j}{\delta q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

که در آن Q_j یک نیرو (گشتاور) می‌باشد، در صورتی که q_j یک جابه‌جایی خطی (زاویه‌ای) باشد.

استفاده از معادلات لاگرانژ برای به‌دست آوردن معادلات حرکت

معادلات حرکت یک سیستم ارتعاشی را می‌توان اغلب به روش ساده برحسب مختصات کلی با استفاده از معادلات لاگرانژ، به‌دست آورد. معادلات لاگرانژ برای یک سیستم n درجه آزادی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j^{(n)}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

که در آن $\dot{q}_j = \frac{\partial q_j}{\partial t}$ سرعت کلی بوده و $Q_j^{(n)}$ نیروی کلی متناظر با مختصات کلی q_j می‌باشد. نیروهای نشان داده شده با $Q_j^{(n)}$ می‌توانند نیروهای هدر رفتنی (میرا) یا نیروهای خارجی دیگری باشند که از یک تابع پتانسیل نمی‌توانند به‌دست آیند. برای مثال اگر F_{xk}, F_{yk} و F_{zk} نشان‌دهنده نیروهای خارجی اثرکننده روی جرم k ام این سیستم به ترتیب در جهت‌های x, y و z باشند، نیروی کلی $Q_j^{(n)}$ را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$Q_j^{(n)} = \sum_k \left(F_{xk} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{yk} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{zk} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right)$$

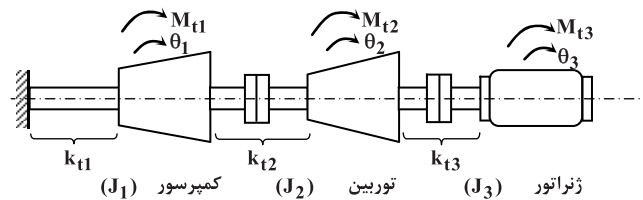
که در آن x_k, y_k, z_k به ترتیب جابه‌جایی‌های جرم k در جهت‌های x, y و z می‌باشند. توجه کنید که برای مثال، برای یک سیستم پیچشی نیروی F_{xk} باید با گشتاور اعمالی حول محور x یعنی M_{xk} و جابه‌جایی x_k با جابه‌جایی زاویه‌ای حول محور x یعنی θ_{xk} در این معادله جایگزین شود. برای یک سیستم پایستار $Q_j^{(n)} = 0$ است و بنابراین معادلات لاگرانژ به شکل زیر می‌باشد:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

معادله اخیر نشان‌دهنده یک سیستم با n معادله دیفرانسیل، متناظر با هر کدام از n مختصه کلی می‌باشد؛ بنابراین در صورتی که رابطه‌های انرژی در دسترس باشند، معادلات حرکت سیستم ارتعاشی را می‌توان به‌دست آورد. همچنین با تعریف $L = T - U$ داریم:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

مثال ۹: معادلات حرکت یک سیستم پیچشی چیدمان کمپرسور، توربین و ژنراتور در یک نیروگاه دمایی در شکل زیر نشان داده شده است. این چیدمان را می‌توان به صورت یک سیستم پیچشی در نظر گرفت که در آن J_i نشانگر ممان اینرسی جرمی سه عضو (کمپرسور، توربین و ژنراتور)، M_{ti} نشان‌دهنده ممان‌های خارجی اعمال‌شونده روی اعضاء و k_{ti} نشانگر ثابت‌های فنریت پیچشی میله بین اعضای این شکل می‌باشد. معادلات حرکت این سیستم را با استفاده از معادلات لاگرانژ و با در نظر گرفتن جابه‌جایی‌های زاویه‌ای اعضای θ_i ، به عنوان مختصات کلی به‌دست آورید.



✓ پاسخ: در اینجا $q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2, q_3 = \theta_3$ است و انرژی جنبشی این سیستم از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_3^2$$

اگر θ نشان‌دهنده جابه‌جایی زاویه‌ای باشد، برای یک میله که دارای ثابت فنریت پیچشی k_t است انرژی پتانسیل برابر با کار انجام شده در ایجاد جابه‌جایی

$$V = \int_0^\theta (k_t \theta) d\theta = \frac{1}{2} k_t \theta^2$$

زاویه‌ای θ در میله می‌باشد:

$$V = \frac{1}{2} k_{t1} \theta_1^2 + \frac{1}{2} k_{t2} (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2} k_{t3} (\theta_3 - \theta_2)^2$$

بنابراین انرژی پتانسیل این سیستم را می‌توان به صورت مقابل بیان کرد:

$$Q_j^{(n)} = \sum_{k=1}^3 M_{tk} \frac{\partial \theta_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^3 M_{tk} \frac{\partial \theta_k}{\partial \theta_j}$$

گشتاورهای خارجی بر این اعضاء اعمال می‌شوند؛ بنابراین داریم:

که از رابطه فوق، خواهیم داشت:

$$Q_1^{(n)} = M_{t1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta_1} + M_{t2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1} + M_{t3} \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_1} = M_{t1}$$

$$Q_2^{(n)} = M_{t1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta_2} + M_{t2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_2} + M_{t3} \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_2} = M_{t2}$$

$$Q_3^{(n)} = M_{t1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta_3} + M_{t2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_3} + M_{t3} \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_3} = M_{t3}$$

با جایگزینی روابط فوق در معادلات لاگرانژ، معادلات حرکت برای $j = 1, 2, 3$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + (k_{t1} + k_{t2}) \theta_1 - k_{t2} \theta_2 = M_{t1}$$

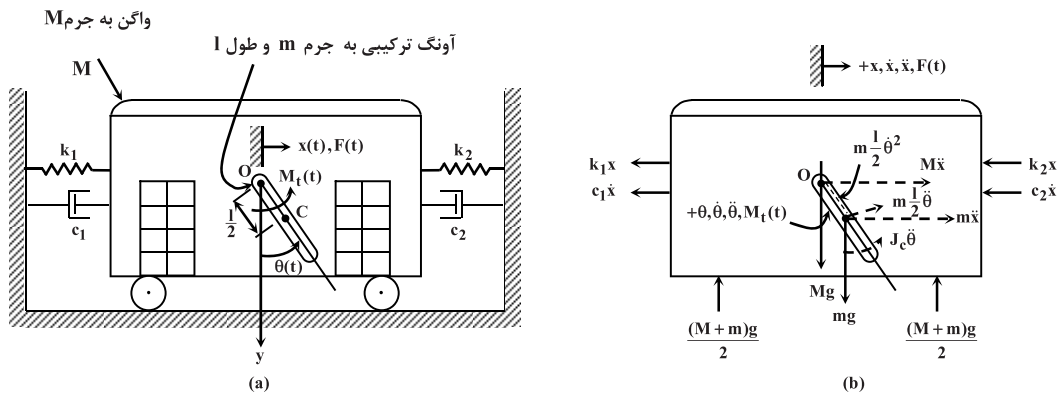
$$J_2 \ddot{\theta}_2 + (k_{t2} + k_{t3}) \theta_2 - k_{t2} \theta_1 - k_{t3} \theta_3 = M_{t2}$$

$$J_3 \ddot{\theta}_3 + k_{t3} \theta_3 - k_{t3} \theta_2 = M_{t3}$$

که می‌توان آن را به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_{t1} + k_{t2}) & -k_{t2} & 0 \\ -k_{t2} & (k_{t2} + k_{t3}) & -k_{t3} \\ 0 & -k_{t3} & k_{t3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{t1} \\ M_{t2} \\ M_{t3} \end{Bmatrix}$$

مثال ۱۰: معادلات حرکت سیستم آونگ مرکب - واگن نشان داده شده در شکل a زیر را به دست آورید.



پاسخ: مختصات $x(t)$ و $\theta(t)$ را می‌توان به ترتیب به عنوان مختصات کلی برای توصیف جابه‌جایی خطی واگن و جابه‌جایی زاویه‌ای آونگ مرکب استفاده کرد. اگر برای سادگی همانند شکل a، مختصات y در نظر گرفته شود، مؤلفه‌های جابه‌جایی نقطه C را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$x_c = x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \quad ; \quad y_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta$$

$$\dot{x}_c = \dot{x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \dot{\theta} \cos \theta \quad ; \quad \dot{y}_c = -\frac{1}{\sqrt{2}} \dot{\theta} \sin \theta$$

با مشتق‌گیری نسبت به زمان، سرعت‌های نقاط C به صورت روبه‌رو به دست می‌آید:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2} J_c \dot{\theta}^2$$

انرژی جنبشی این سیستم (T) را می‌توان به صورت مقابل بیان کرد:

که در آن، $J_c = \frac{1}{12} m l^2$ می‌باشد. با استفاده از معادلات $\dot{x}_c$ و $\dot{y}_c$ ، معادله بالا را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \frac{l^2 \dot{\theta}^2}{4} + \dot{x} \dot{\theta} l \cos \theta \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{m l^2}{12} \right) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (M+m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m l^2}{3} \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (m l \cos \theta) \dot{x} \dot{\theta}$$

انرژی پتانسیل این سیستم (U) در اثر انرژی کرنشی فنرها و پتانسیل گرانشی آونگ را می‌توان به این صورت نوشت:

$$U = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2 + m g \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \cos \theta)$$

که در آن، پایین‌ترین موقعیت نقطه C به عنوان مبدأ پتانسیل در نظر گرفته شده است. به خاطر اینکه نیروهای خارجی بر سیستم عمل می‌کنند، نیروهای کلی متناظر با $x(t)$ و $\theta(t)$ باید محاسبه شوند. نیروی اعمالی در جهت $x(t)$ یعنی $X(t)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$X(t) = Q_1^{(n)} = F(t) - c_1 \dot{x}(t) - c_2 \dot{x}(t)$$

که در آن، علامت منفی برای جمله‌های $c_1 \dot{x}$ و $c_2 \dot{x}$ نشان می‌دهد که نیروهای میرایی مخالف جهت حرکت می‌باشند. به طور مشابه، نیروی اعمالی در جهت $\theta(t)$ یعنی $\Theta(t)$ را می‌توان به صورت مقابل تعیین کرد:

$$\Theta(t) = Q_2^{(n)} = M_t(t)$$

که در آن $q_1 = x$ و $q_2 = \theta$ می‌باشد. با مشتق‌گیری از عبارت‌های T و U و جایگذاری عبارت‌های حاصل شده، به همراه معادلات $X(t)$ و $\Theta(t)$ در معادله لاگرانژ، معادلات حرکت این سیستم را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$(M+m)\ddot{x} + \frac{1}{2} (m l \cos \theta) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m l \sin \theta \dot{\theta}^2 + k_1 x + k_2 x = F(t) - c_1 \dot{x} - c_2 \dot{x}$$

$$\left(\frac{1}{3} m l^2 \right) \ddot{\theta} + \frac{1}{2} (m l \cos \theta) \ddot{x} - \frac{1}{2} m l \sin \theta \dot{\theta} \dot{x} + \frac{1}{2} m l \sin \theta \dot{\theta} \dot{x} + \frac{1}{2} m g l \sin \theta = M_t(t)$$

می‌توان دید که این معادلات مشابه با معادلات به دست آمده توسط قانون دوم نیوتن می‌باشند.

مثال ۱۱: اگر معادله‌ی لاگرانژ به صورت $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$ باشد، کدام یک از موارد زیر در مورد این معادله صحیح است؟

- (۱) q_i موقعیت مرکز جرم $\dot{I}$ آمین عنصر ذخیره‌کننده انرژی جنبشی است.
- (۲) q_i تغییر مکان مرکز جرم یا تغییر زاویه $\dot{I}$ آمین عضو ذخیره‌کننده انرژی جنبشی است.
- (۳) Q_i نیروی وارد بر درجه آزادی شماره‌ی $\dot{I}$ از طرف محرک خارجی و یا میرایی است.
- (۴) معادله‌ی لاگرانژ در فرم نشان داده شده صحیح نیست.