مدرسان شریف

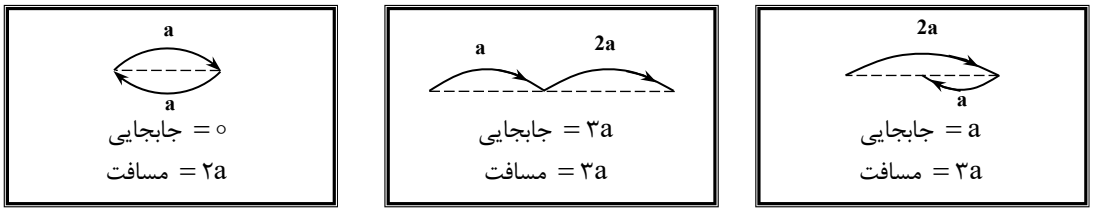
فصل اول

« سینماتیک»

حرکت

حرکت یک امر نسبی است و هنگامی رخ می‌دهد که بردار مکان جسم تغییر کرده باشد. بردار مکان برداری است که از مبدأ مختصات آغـاز شـده و به مکان جسم ختم می‌گردد.

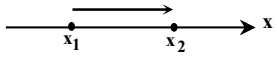
نکته ۱: جابجایی با مسافت تفاوت دارد جابجایی به فاصله مستقیم بین مکان اولیه و مکان ثانویه بسـتگی دارد امـا مسـافت بـه طـول مسـیر حرکت متحرک گفته می‌شود. جابجایی می‌تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد اما مسافت همواره مثبت است.



حرکت به طور کلی در سه بعد ممکن است رخ دهد.

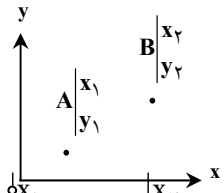
حرکت

در محور :



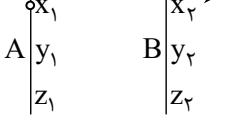
جابجایی : $|\overrightarrow{\Delta r}| = x_2 - x_1$

در صفحه :



جابجایی : $|\overrightarrow{\Delta r}| = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

در فضا :



جابجایی : $|\overrightarrow{\Delta r}| = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

مثال ۱ : جسمی از نقطه $A\begin{vmatrix}1\\2\\3\end{vmatrix}$ **به نقطه** $B\begin{vmatrix}4\\6\\15\end{vmatrix}$ **می‌رود اندازه جابجایی جسم چند متر است؟**

۱) ۱۷ ۲) ۱۹ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» از فرمول جابجایی در فضا کمک می‌گیریم .

$$|\overrightarrow{\Delta r}| = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2 + (15-3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13\ m$$

سرعت (V) : سرعت یک متحرک یک کمیت برداری است و راستا و جهت واندازه دارد. از نظر مفهومی همان تغییر مکان متحرک بر واحد زمـان است. اگر بازهٔ زمانی کوتاه و لحظه‌ای نباشد سرعت، سرعت متوسط است و اگر بازهٔ زمانی کوتاه و لحظه‌ای باشد سرعت، سرعت لحظه‌ای است.

سرعت لحظه‌ای : $V = \dfrac{dx}{dt}$

سرعت متوسط : $\overline{V} = \dfrac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

www.modaresanesharif.ac.ir

نکته ۲: اگر جابجایی‌های متحرکی در زمان‌های یکسان با هم برابر باشند و بردار سرعت هم تغییر نکند، حرکت با سرعت ثابت است.

نکته ۳: واحدهای سرعت $\frac{m}{s}$ و $\frac{km}{h}$ می‌باشند. البته واحدهای دیگری هم برای سرعت برشمرده‌اند که در تست‌های ما مطرح نیست. برای تبدیل این واحدها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\square \frac{m}{s} \times ۳/۶ = \square \frac{km}{h}$$

۵ ⟶ ۱۸

۱۰ ⟶ ۳۶

۲۰ ⟶ ۷۲

۳۰ ⟶ ۱۰۸

نکته ۴: اگر بردار سرعت در هر لحظه در حال تغییر باشد کمیتی تعریف می‌کنیم که شتاب نام دارد.

شتاب (a) : همان تغییرات سرعت بر واحد زمان است واحد آن $\frac{m}{s^۲}$ می‌باشد. شتاب نیز یک پدیدهٔ برداری است و تمام قوانین بردارها برای آن صادق است.

شتاب لحظه‌ای : $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^۲x}{dt^۲}$

شتاب متوسط : $\overline{a} = \frac{\text{تغییرات سرعت}}{\text{کل زمان}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

به طور کلی هدف ما در نگارش فصلی چون حرکت بیان مطالب کلی و طبقه‌بندی شده می‌باشد به صورتی که در زمان کوتاه داوطلب بتواند بهترین بهره را ببرد.

به نمودار آموزشی که در برخورد با تست‌های فصل حرکت باید به آن توجه کرد دقت کنید.

حرکت
- سرعت ثابت: جابجایی $\Delta x = Vt \Rightarrow x_۲ - x_۱ = vt \Rightarrow$ مکان ثانویه $x_۲ = vt + x_۱$
- شتاب ثابت:
  - ۱) $\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t$
  - ۲) $v = at + v_۰$
  - ۳) $\Delta x = (\frac{v_۰ + v}{۲})t$
  - ۴) $v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x$

تکنیک tax

در مسائل حرکت شتابدار با شتاب ثابت ابتدا دقت می‌کنیم و می‌بینیم که آیا زمان (t) در مسأله موجود می‌باشد یا خیر اگر زمان نبود از فرمول(۴) مسأله را حل می‌کنیم و اگر زمان در مسأله بود شتاب (a) را بررسی می‌کنیم اگر a در مسأله نبود از فرمول(۳) مسأله را حل می‌کنیم اگر بود به سراغ x می‌رویم و ...

$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t$ (۱) ← اگر مکان بود ← x (۲) ← اگر شتاب بود ← a (۳) ← اگر زمان بود ← t (۴)

- x: نبود
- a: نبود
- t: اگر زمان جزء داده‌ها و جزء خواسته‌ها نبود

(۲) $v = at + v_۰$ (۳) $\Delta x = \frac{(v_۱ + v_۲)}{۲}t$ (۴) $V^۲ - V_۰^۲ = ۲a\Delta x$

در اینجا ابتدا چند صفحه‌ای در مورد حرکت سرعت ثابت مثال حل می‌کنیم و سپس به بررسی مثالهای حرکت شتابدار و تکنیک tax می‌پردازیم.

مثال ۲: متحرکی که حرکت سرعت ثابت دارد معادله مکان زمان $x = ۵t + ۳$ در SI دارد. متحرک در مدت ۲ ثانیه چند متر جابجا می‌شود؟

۱) ۱۳ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۸

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به معادله درمی‌یابیم که سرعت $۵\frac{m}{s}$ است. $\Delta x = vt \Rightarrow \Delta x = ۵ \times ۲ = ۱۰\,m$

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۳: متحرکی که حرکت سرعت ثابت دارد در $t = ۱\ s$ در مکان $۲\ m-$ و در $t = ۳\ s$ در مکان $۴\ m+$ می‌باشد. مکان اولیه متحرک کدام گزینه است ؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۵ ۴) ۷

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به اینکه متحرک در مدت ۲ ثانیه به اندازه $۶\ m$ در جهت مثبت محور x جابجا شده است بنابراین در هر ثانیه متحرک ۳ متر در جهت مثبت محور x جلو می‌آید. بنابراین در ۱ ثانیه اول هم ۳ متر جلو آمده و به مکان ۲- رسیده است پس در ابتدا در $-۵\ m$ بوده است.

به کمک معادله مکان ـ زمان هم می‌توان به جواب فوق رسید.

$$x = vt + x_\circ$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۴-(-۲)}{۳-۱} = \frac{۶}{۲} = ۳\ \frac{m}{s} \qquad \left.\begin{matrix} x & = ۳t & + x_\circ \\ \downarrow & \downarrow & \\ -۲m & ۱s & \end{matrix}\right\} \Rightarrow -۲ = ۳\times ۱ + x_\circ \Rightarrow x_\circ = -۵m$$

مثال ۴: دو قطار با طول‌های $۱۵۰\ m$ و $۲۵۰\ m$ با سرعت‌های $۱۰\ \frac{m}{s}$ و $۱۵\ \frac{m}{s}$ در یک جهت در حال حرکت هستند، زمان سبقت قطار سریعتر چند ثانیه است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۸۰ ۳) ۴۰ ۴) ۱۰۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» در یک سبقت قطار عقبی باید هم طول قطار جلویی را طی کند و هم به اندازه طول خود جلوتر برود.

$L_۲$ ($۲۵۰\ m$) $\rightarrow V_۲ = ۱۵\ \frac{m}{s}$

$L_۱$ ($۱۵۰\ m$) $\rightarrow V_۱ = ۱۰\ \frac{m}{s}$

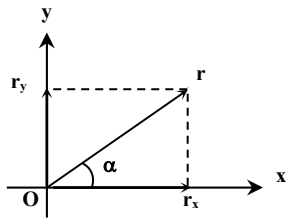
عمل سبقت یک عمل نسبی است و در سرعت‌های نسبی درست برعکس برآیند عمل می‌کنیم. یعنی سرعت نسبی در شکل مقابل $V_۲ - V_۱$ می‌باشد.

$$\Delta x_{\text{نسبی}} = v_{\text{نسبی}}\, t_{\text{سبقت}}$$

$$L_۱ + L_۲ = (V_۲ - V_۱)t_{\text{سبقت}} \qquad t_{\text{سبقت}} = \frac{L_۱ + L_۲}{t_۲ - t_۱} = \frac{۲۵۰ + ۱۵۰}{۱۵ - ۱۰} = \frac{۴۰۰}{۵} = ۸۰\ s$$

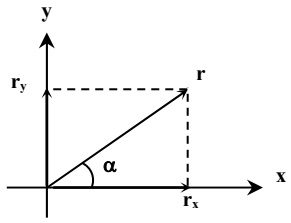
یادآوری ریاضی:

تجزیه بردار



$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y$$

بردار r با جهت مثبت محور x زاویه α می‌سازد. این بردار در حل مسائل کاربردی نیست و باید به مؤلفه‌هایی در راستای محور x و y تجزیه شود با توجه به تعریف $\sin$ و $\cos$ در مثلث قائم‌الزاویه مؤلفه‌های افقی و قائم را به دست می‌آوریم .



$$\cos\alpha = \frac{r_x}{r} \Rightarrow \boxed{r_x = r\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{r_y}{r} \Rightarrow \boxed{r_y = r\sin\alpha}$$

نکته ۵: در فیزیک برای به دست آوردن زاویه ، بیشتر از $\tan$ و یا سایر نسبت‌های مثلثاتی کمک می‌گیریم.

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{r_y}{r_x}}$$

نکته ۶: برای به دست آوردن اندازه بردارهایی که دو مؤلفه عمود بر هم دارند از فیثاغورس کمک می‌گیریم.

$$\boxed{r = \sqrt{r_x^۲ + r_y^۲}}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۵: اندازه سرعت متحرکی با بردار سرعت $\vec{V} = ۳\cos(۲\pi t)\vec{i} + ۳\sin(۲\pi t)\vec{j}$ کدام گزینه است ؟

۱) $۳\tan(۲\pi t)$ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) $۳\cot an(۲\pi t)$

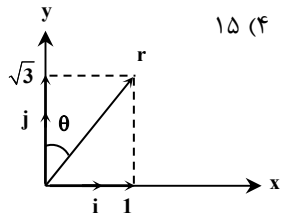
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از فرمول اندازه بردار کمک می‌گیریم.

$$|\vec{V}| = \sqrt{\underbrace{(۳\cos(۲\pi t))^۲ + (۳\sin(۲\pi t))^۲}_{۱}} = \sqrt{۹\cos^۲(۲\pi t) + ۹\sin^۲(۲\pi t)}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{۹(\cos^۲(۲\pi t) + \sin^۲(۲\pi t))} = ۳\frac{m}{s}$$

مثال ۶: بردار سرعت متحرکی در SI به صورت $\vec{V} = \vec{i} + \sqrt{۳}\vec{j}$ می‌باشد زاویه بردار با جهت مثبت محور y چند درجه است ؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۴۵ ۴) ۱۵

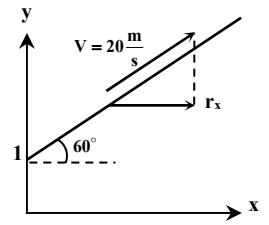


☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا بردار را به صورت مختصر رسم می‌کنیم و سپس از $\tan\theta$ کمک می‌گیریم.

$$\tan\theta = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ$$

مثال ۷: متحرکی با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ بر روی خط $y = \sqrt{۳}x + ۱$ در مدت ۳ ثانیه چند متر در راستای محور x جابجا می‌شود؟

۱) ۳۰ ۲) $۳۰\sqrt{۳}$ ۳) $۶۰\sqrt{۳}$ ۴) ۶۰



☑ **پاسخ :** گزینه «۱» شیب خط $\sqrt{۳}$ می‌باشد یعنی tan زاویه‌ای که خط با افق می‌سازد $\sqrt{۳}$ می‌باشد.

$$\tan\alpha = \sqrt{۳} \Rightarrow \alpha = ۶۰^\circ$$

بنابراین خط با افق زاویه ۶۰° درجه می‌سازد برای اینکه جابجایی در راستای محور x را به دست آوریم نیاز به سرعت در راستای محور x داریم. بنابراین سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ را در راستای محور x تجزیه می‌کنیم.

$$V_x = V\cos ۶۰^\circ = ۲۰ \times \frac{۱}{۲} = ۱۰\frac{m}{s}$$

با داشتن سرعت در راستای محور x به سادگی به جابجایی خواهیم رسید.

$$\Delta x = V_x t = ۱۰ \times ۳ = ۳۰\,m$$

مثال ۸: بردار سرعت متحرکی در SI به صورت $\vec{V} = ۳\vec{i} + ۴\vec{j}$ می باشد جابجایی متحرک در راستای محور x در مدت ۲ ثانیه چند متر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۴

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» چون جابجایی در راستای محور x خواسته شده است از مولفه سرعت در راستای محور x کمک می گیریم.

$$\Delta x = V_x t = ۳ \times ۲ = ۶m$$

نکته ۷: سعی کنید در ضمن حل تست نماد فیزیکی اعدادی که در سؤال مطرح هستند و همچنین نماد خواسته تست را بالای متن بنویسید این عمل کمک می‌کند که بتوانید فرمول تست را به سادگی بدست آورید؟!

مثال ۹: متحرکی با شتاب ثابت $a = ۲\frac{m}{s^۲}$ در مدتی که سرعت خود را از $V_۱ = ۱۰\frac{m}{s}$ به $V_۲ = ۲۰\frac{m}{s}$ می‌رساند چند متر جابجا می‌شود؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۷۵ ۳) ۱۵۰ ۴) ۳۰۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» اگر نکته قبل را رعایت کنیم می‌بینیم که در این مثال نه زمان داده شده و نه خواسته شده بنابراین بر طبق روش $v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۲۰^۲ - ۱۰^۲ = ۲ \times ۲\Delta x \Rightarrow \Delta x = ۷۵\ m$ از فرمول (۴) که همان مستقل از زمان است کمک می‌گیریم.

۱−x a t
| | |
۲ ۳ ۴

مثال ۱۰: متحرکی با شتاب ثابت در $t = ۲$ ثانیه‌ای که سرعت خود را از $V_۱ = ۱۰\frac{m}{s}$ به $V_۲ = ۲۰\frac{m}{s}$ می‌رساند چند متر جابجا می‌شود؟

۱) ۱۵ ۲) ۶۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۵

www.modaresanesharif.ac.ir

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» چون t در مثال داریم بر طبق روش $\begin{matrix} t-a-x-1 \\ | \ | \ | \\ 4\ 3\ 2 \end{matrix}$ به سراغ a می‌رویم چون شتاب در مثال نه داده شده و نه خواسته شده بنابراین مسأله با فرمول شماره (۳) مستقل از شتاب حل می‌شود.

$$\Delta x = (\frac{v_1 + v_2}{2})t \Rightarrow \Delta x = (\frac{10+20}{2})2 \Rightarrow \Delta x = 30\ m$$

مثال ۱۱: متحرکی با شتاب ثابت $a = 2\frac{m}{s^2}$ در چه مدت سرعت خود را از $V_1 = 10\frac{m}{s}$ به $V_2 = 20\frac{m}{s}$ می‌رساند؟

۱) ۲۰ ۲) ۲/۵ ۳) ۱۰ ۴) ۵

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» زمان t جزء خواسته‌های مسأله است. بر طبق روش tax به سراغ شتاب a می‌رویم. شتاب a هم جزء داده‌های مسأله است به سراغ مکان x می‌رویم. چون نه مکان داده و نه مکان خواسته، از فرمول (۲) مثال حل می‌شود.

$$v = at + v_0 \Rightarrow 20 = 2 \times t + 10 \Rightarrow 2t = 10 \Rightarrow t = 5\ s$$

مثال ۱۲: متحرکی با شتاب ثابت $a = 2\frac{m}{s^2}$ از مکان $x_0 = 3m$ با سرعت اولیه $V_0 = 1\frac{m}{s}$ حرکت خود را آغاز می‌کند. در لحظه $t = 2s$ در چه مکانی است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۳

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» در مثال t داریم به سراغ a می‌رویم a هم دیده می‌شود. به سراغ x می‌رویم x هم دیده می‌شود. بنابراین بر طبق tax مسأله با فرمول (۱) حل می‌شود.

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v.t \Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v.t \Rightarrow x - 3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2^2 + 1 \times 2$$

$$x - 3 = 6 \Rightarrow x = 9\ m$$

مثال ۱۳: متحرکی با شتاب $2\frac{m}{s^2}$ از حال سکون براه می افتد ، 3s ثانیه پس از شروع حرکت متحرک چند متر جابجا می‌شود؟

۱) ۶ ۲) ۴/۵ ۳) ۹ ۴) ۱۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» به کمک روش tax از فرمول یک به سادگی حل می شود.

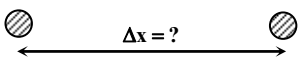
$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} \times 2 \times 3^2 + 0 = 9m$$

مثال ۱۴: متحرکی با سرعت $72\frac{km}{h}$ در حال حرکت است با شتاب $4\frac{m}{s^2}$ ترمز می کند تا لحظه توقف چند متر جابجا می‌شود؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۵۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»



با توجه به اینکه $72\frac{km}{h}$ همان $20\frac{m}{s}$ می باشد، به کمک فرمول مستقل از زمان و صفر قرار دادن سرعت ثانویه می توانیم جابجایی تا لحظه توقف را بدست آوریم. دقت کنید شتاب ترمز منفی است.

$$V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - 20^2 = 2 \times (-4)\Delta x \Rightarrow -400 = -8\Delta x \Rightarrow \Delta x = 50\ m$$

نکته ۸: چنانچه از معادله مکان بر حسب زمان مشتق بگیریم به معادله سرعت بر حسب زمان می‌رسیم.

نکته ۹: چنانچه از معادله سرعت بر حسب زمان مشتق بگیریم به معادله شتاب بر حسب زمان می‌رسیم.

مثال ۱۵: در مثالهای زیر سرعت و شتاب لحظه‌ای را بدست آورید؟

$x = t^3$	$x = t^2$	$x = t$	$\vec{r} = (3t^2)\vec{i} + (4t^2 + 5)\vec{j}$

☑ **پاسخ :**

$V = 3t^2$	$V = 2t$	$V = 1$	$\vec{V} = (6t)\vec{i} + (8t + 0)\vec{j}$
$a = 6t$	$a = 2$	$a = 0$	$\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$
شتاب متغیر	شتاب ثابت	سرعت ثابت	شتاب ثابت در صفحه مختصات

در مثالهایی که در ادامه می‌خوانید به بررسی موضوعات مهم سرعت لحظه‌ای، سرعت متوسط و شتاب لحظه‌ای و شتاب متوسط می‌پردازیم:

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۱۶: متحرکی ۲ ثانیه با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ و ۳ ثانیه با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ در یک جهت حرکت می‌کند سرعت متوسط متحرک در مدت ۵ ثانیه چند متربرثانیه است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» برای سرعت متوسط باید کل جابجایی را بدست آورد در این مثال هر دو سرعت مثبت هستند یعنی هر دو جابجایی پیرو هم رخ داده‌اند.

$$\bar{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{۲۰+۶۰}{۲+۳}=\frac{۸۰}{۵}=۱۶\frac{m}{s} \qquad \xrightarrow{\Delta x_۲=v_۲t_۲=۲۰\times۳} \xrightarrow{\Delta x_۱=v_۱t_۱=۱۰\times۲}$$

مثال ۱۷: متحرکی $۲۰\,s$ با سرعت $۱۵\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند و سپس $۱۰\,s$ با سرعت $-۳۰\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند سرعت متوسط متحرک در مدت ۳۰ ثانیه چند متربرثانیه است؟

۱) ۲/۵ - ۲) ۱۰- ۳) ۵ ۴) ۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» در این مثال یک سرعت مثبت و یک سرعت منفی است در مشخص کردن جابجایی دقت کنید.

$$\Delta x_۱=v_۱t_۱=۱۵\times۲۰=۳۰۰m$$

$$\Delta x_۲=-۳۰\times۱۰=-۳۰۰m$$

همانطور که مشاهده می‌شود متحرک $۳۰۰\,m$ به جلو رفته و سپس بازگشته است. بنابراین کل جابجایی‌اش صفر است.

$$\bar{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{۳۰۰-۳۰۰}{۳۰}=۰\frac{m}{s}$$

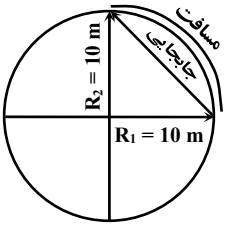
مثال ۱۸: متحرکی در مدت ۲ ثانیه از نقطه $A\left|\begin{matrix}۲\\۵\end{matrix}\right.$ به نقطه $B\left|\begin{matrix}۵\\۹\end{matrix}\right.$ می‌رود. اندازه سرعت متوسط متحرک کدام گزینه است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲/۵ ۴) ۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$\bar{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}}{t}=\frac{\sqrt{(۵-۲)^۲+(۹-۵)^۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}{۲}=۲/۵\frac{m}{s}$$

مثال ۱۹: متحرکی ربع دایره‌ای به قطر $۲۰\,m$ را در مدت $۱۰\,s$ می‌پیماید. اندازه سرعت متوسط چند متر برثانیه است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» چون قطر $۲۰\,m$ است شعاع $۱۰\,m$ است. ابتدا به کمک رابطه فیثاغورس جابجایی را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta r=\sqrt{۱۰^۲+۱۰^۲}=\sqrt{۲\times۱۰^۲}=۱۰\sqrt{۲}\,m$$

$$\bar{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{۱۰\sqrt{۲}}{۱۰}=\sqrt{۲}\frac{m}{s}$$

مثال ۲۰: بردار مکان متحرکی در SI در مدت ۲ ثانیه از $\vec{r}_۱=\vec{i}+۳\vec{j}$ به $\vec{r}_۲=۶\vec{i}+۱۵\vec{j}$ می‌رسد. بردار سرعت متوسط کدام گزینه است؟

۱) $\vec{\bar{V}}=۵\vec{i}+۳\vec{j}$ ۲) $\vec{\bar{V}}=۲/۵\vec{i}+۶\vec{j}$ ۳) $\vec{\bar{V}}=۵\vec{i}+۶\vec{j}$ ۴) $\vec{\bar{V}}=۲/۵\vec{i}+۳\vec{j}$

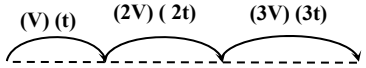
☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\vec{\bar{V}}=\frac{\vec{\Delta r}}{t}=\frac{(۶-۱)\vec{i}+(۱۵-۳)\vec{j}}{۲}=۲/۵\vec{i}+۶\vec{j}$$

نکته ۱۰: اگر در مسأله v,t را به ما دادند آنها را کنار هم می‌نویسم تا ضرب آنها vt همان جابجایی Δx باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۲۱: متحرکی در زمان‌های متوالی t و ۲t و ۳t به ترتیب با سرعت‌های V , ۲V , ۳V حرکت می‌کند. سرعت متوسط متحرک کدام گزینه است؟



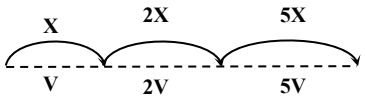
۱) $\frac{۶}{۱۴}V$ ۲) $\frac{۹}{۱۴}V$ ۳) $\frac{۱۴}{۹}V$ ۴) $\frac{۱۴}{۶}V$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\overline{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{vt+۴vt+۹vt}{t+۲t+۳t}=\frac{۱۴vt}{۶t}=\frac{۱۴}{۶}\ V$$

نکته ۱۱: اگر در مسأله‌ای V, x ها را به ما دادند نسبت $\frac{x}{v}$های هر مرحله معرف همان زمان آن مرحله است.

مثال ۲۲: متحرکی جابه‌جایی‌های متوالی x و ۲x و ۵x را بترتیب با سرعت‌های $۵V, ۲V, V$ طی می کند. سرعت متوسط متحرک کدام گزینه است؟

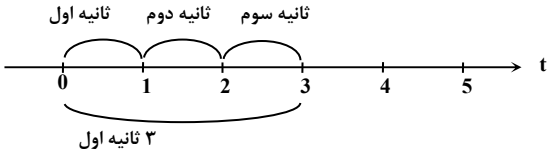


۱) ۲v ۲) ۸v ۳) $\frac{۸}{۳}v$ ۴) $\frac{۳}{۸}v$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$\overline{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{x+۲x+۵x}{\frac{x}{v}+\frac{۲x}{۲v}+\frac{۵x}{۵v}}=\frac{\frac{۸x}{۱}}{\frac{۳x}{v}}=\frac{۸}{۳}\ v$$

نکته ۱۲: ثانیه nام بین لحظات $n-۱$ و n می‌باشد .



به توضیح مقابل توجه کنید : ⇐
- ثانیه اول بین لحظات صفر تا یک می‌باشد.
- ثانیه دوم بین لحظات یک تا دو می باشد.
- ثانیه سوم بین لحظات دو تا سه می باشد.

مثال ۲۳: معادله مکان ـ زمان متحرکی در SI به صورت $x = t^۲$ می باشد. سرعت متوسط متحرک در ۳ ثانیه اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۳

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\overline{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{x_{t=۳}-x_{t=۰}}{۳-۰}=\frac{۳^۲-۰^۲}{۳-۰}=\frac{۹}{۳}=۳\frac{m}{s}$$

مثال ۲۴: معادله مکان ـ زمان متحرکی در SI به صورت $x = t^۲$ می باشد. سرعت متوسط متحرک در ثانیه سوم حرکت چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۵

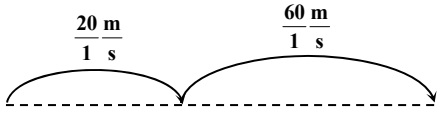
☑ **پاسخ :** گزینه «۴» در این مثال سرعت متوسط در ثانیه سوم خواسته شده است بنابراین مساله بین لحظات $t = ۲s$ تا $t = ۳s$ طرح شده است.

$$\overline{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{x_{t=۳}-x_{t=۲}}{۳-۲}=\frac{۳^۲-۲^۲}{۳-۲}=\frac{۹-۴}{۱}=۵\frac{m}{s}$$

مثال ۲۵: متحرکی $\frac{۲}{۵}$ مسیر خود را با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ و ما بقی را با سرعت $۶۰\frac{m}{s}$ می پیماید. سرعت متوسط متحرک چند متر بر ثانیه است؟

۱) $\frac{۲۰۰}{۳}$ ۲) $\frac{۱۰۰}{۳}$ ۳) $\frac{۴۰۰}{۳}$ ۴) $\frac{۵۰}{۳}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» برای محاسبه زمان در هر قسمت از نسبت $\frac{x}{V}$ استفاده می‌کنیم.



$$\overline{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{\frac{۲}{۵}x+\frac{۳}{۵}x}{\frac{\frac{۲}{۵}x}{۲۰}+\frac{\frac{۳}{۵}x}{۶۰}}=\frac{\frac{x}{۱}}{\frac{۲x}{۱۰۰}+\frac{۳x}{۳۰۰}}=\frac{\frac{x}{۱}}{\frac{۲x}{۱۰۰}+\frac{x}{۱۰۰}}=\frac{\frac{x}{۱}}{\frac{۳x}{۱۰۰}}=\frac{۱۰۰}{۳}\frac{m}{s}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۲۶: متحرکی با شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ با سرعت $۳\frac{m}{s}$ حرکت خود را آغاز می کند سرعت متوسط متحرک در ۴ ثانیه اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۱۴ ۳) ۷ ۴) ۱۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» چون حرکت با شتاب ثابت است بنابراین جابجایی را از فرمول شماره (۱) حرکت‌های شتاب ثابت می‌نویسیم .

$$\overline{V}=\frac{\text{کل جابجایی}}{\text{کل زمان}}=\frac{\Delta x}{t}=\frac{\frac{۱}{۲}at^۲+V_۰t}{t}=\frac{۱}{۲}at+V_۰=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۴+۳=۷\frac{m}{s}$$

مثال ۲۷: متحرکی به معادله مکان ـ زمان $x=-۲t^۲+۲۰t+۴۰$ در SI داریم. متحرک درچه مکانی متوقف می‌شود؟

۱) ۵۰ ۲) ۹۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۴۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

نکته ۱۳: برای اینکه لحظه توقف بدست آید ، ابتدا معادله سرعت ـ زمان را بدست می آوریم و آنرا برابر صفر قرار می دهیم.

$$V=-۴t+۲۰=۰ \Rightarrow -۴t=-۲۰ \Rightarrow t=۵s$$

نکته ۱۴: برای بدست آوردن مکان توقف لحظه توقف را در معادله مکان ـ زمان قرار می دهیم.

$$X=-۲(۵)^۲+۲۰(۵)+۴۰=-۵۰+۱۰۰+۴۰=۹۰m$$

مثال ۲۸: متحرکی به معادله مکان ـ زمان $x=۲t^۳+۴t^۲+۱۰$ در SI داریم ، شتاب متوسط در ثانیه دوم چند متر بر مجذور ثانیه است؟

۱) ۱۳ ۲) ۴۴ ۳) ۲۶ ۴) ۲۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» برای بدست آوردن شتاب متوسط باید تغییرات سرعت را به تغییرات زمان تقسیم کنیم. بنابراین به معادله سرعت ـ زمان نیاز داریم. از تابع مکان ـ زمان مشتق می گیریم.

$$V=۶t^۲+۸t \qquad \overline{a}=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{V_۲-V_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{V_{t=۲}-V_{t=۱}}{۲-۱}=\frac{۴۰-۱۴}{۱}=۲۶\frac{m}{s^۲}$$

مثال ۲۹: متحرکی به معادله مکان ـ زمان $x=۲t^۳+۴t^۲+۱۰$ در SI داریم، شتاب متحرک در لحظه $t=۲s$ چند متر بر مجذور ثانیه است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۴۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» چون شتاب لحظه‌ای خواسته است ابتدا با ۲ بار مشتق گیری از تابع مکان ـ زمان به تابع شتاب ـ زمان می رسیم. ولحظهٔ مربوطه را قرار می‌دهیم.

$$x=۲t^۳+۴t^۲+۱۰$$

$$V=۶t^۲+۸t+۰$$

$$a=۱۲t+۸ \Rightarrow a_{t=۲}=۱۲\times ۲+۸=۳۲\frac{m}{s^۲}$$

مثال ۳۰: بردار سرعت متحرک در SI در مدت ۲ ثانیه از $\vec{V}_۱=۲\vec{i}+۵\vec{j}$ به $\vec{V}_۲=۸\vec{i}+۱۳\vec{j}$ می رسد اندازه شتاب متوسط چند متر بر مجذور ثانیه است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» برای بدست آوردن شتاب متوسط اندازه تغییرات سرعت را به زمان تقسیم می‌کنیم .

$$\left|\overline{\vec{a}}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{\Delta V}\right|}{t}=\frac{\left|۶\vec{i}+۸\vec{j}\right|}{۲}=\frac{\sqrt{۶^۲+۸^۲}}{۲}=\frac{۱۰}{۲}=۵\frac{m}{s^۲}$$

مثال ۳۱: متحرکی به معادله مکان ـ زمان $x=-۲t^۲+۸t+۴۰$ در SI داریم. اندازه سرعت اولیه کدام گزینه است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» ابتدا از تابع مکان ـ زمان مشتق می گیریم تا به معادله سرعت ـ زمان برسیم و برای بدست آوردن سرعت اولیه در تابع سرعت ـ زمان، زمان را صفر قرار می‌دهیم.

$$X=-۲t^۲+۸t+۴۰ \Rightarrow V=-۴t+۸ \Rightarrow V_۰=۸\frac{m}{s}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

مدرسان شریف

فصل دوم

«دینامیک»

علم بررسی اثرات نیرو بر روی حرکات اجسام

نیرو: عامل تغییر اندازه حرکت است کار انجام می‌دهد و سبب می‌شود که جسم شتاب بگیرد.

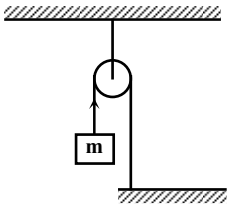
انواع نیرو
- ۱) گرانشی ← وزن
- ۲) الکترومغناطیس ←
  - الکتریکی
  - مغناطیسی ⇐ اصطکاک، کشش نخ، کشش فنر
  - هسته‌ای ضعیف (واندروالسی)
  - هسته‌ای قوی

قوانین نیوتن

قانون اول: چنانچه بر جسمی نیرو وارد نشود و یا برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر باشد.
- اگر جسم ساکن باشد ساکن می‌ماند.
- اگر جسم متحرک است با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد.

به این قانون، قانون لختی یا اینرسی یا ماند نیز گفته می‌شود یعنی اجسام تمایل به ماندن در وضعیت قبل خود را دارند.

مثال ۱: در شکل مقابل کشش نخ T را محاسبه کنید. $(m = ۱۰۰kg)$ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$



۱) صفر
۲) ۱۰۰۰
۳) ۱۰۰
۴) ۲۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق قانون اول نیوتن چون سیستم در حال تعادل است برآیند نیروهای وارد بر جسم m صفر می‌باشد. بنابراین کشش نخ T برابر با نیروی وزن می‌باشد.

$$mg - T = ۰ \Rightarrow mg = T \Rightarrow T = ۱۰۰ \times ۱۰ = ۱۰۰۰\ N$$

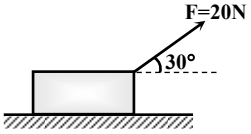
قانون دوم نیوتن:

هرگاه بر جسم نیرو وارد شود جسم در جهت نیرو شتاب می‌گیرد و این شتاب با اندازه‌ی نیرو متناسب است و با اندازهٔ جرم جسم نسبت عکس دارد.

$$a \propto \frac{F}{m} \Rightarrow F \propto ma \Rightarrow F = kma$$

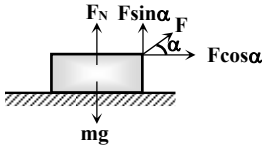
$$\text{if } F(N), m(kg), a(\frac{m}{s^۲}) \Rightarrow k = ۱ \Rightarrow \boxed{F = ma}$$

مثال ۲ : به جسمی به جرم ۱۵ کیلوگرم، مطابق شکل، نیروی F وارد می‌شود. اگر اصطکاک نداشته باشیم آنگاه شتاب حرکت جسم چند متر بر مجذور ثانیه است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) ۰

www.modaresanesharif.ac.ir



☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به اینکه نیروی وارد بر جسم نسبت به سطح افقی مایل است لازم است آنرا تجزیه کنیم. جسم در راستای قائم حرکت نمی‌کند. در نتیجه $mg = F_N + F\sin\alpha$ یعنی برآیند نیروها در راستای قائم صفر می‌باشد.

چون جسم در راستای افق حرکت دارد در نتیجه $F\cos\alpha = ma$ با توجه به این رابطه داریم:

$$F\cos۳۰^\circ = ۲۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۰\sqrt{۳}$$

$$F\cos۳۰^\circ = ma \Rightarrow ۱۰\sqrt{۳} = ۱۵ \times a \Rightarrow a = \frac{۱۰\sqrt{۳}}{۱۵} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}(\frac{m}{s^۲})$$

قانون سوم نیوتن:

برای هر عملی، عکس‌العملی است هم‌اندازه با آن و در خلاف جهت آن.

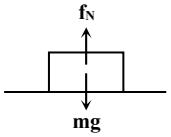
در جهان نیروی تک نداریم. نیرو بر هم کنش واکنش دو جسم است. نیروهای عمل و عکس‌العمل نیروهایی هستند که در آن واحد به وجود می‌آیند و در آن واحد از بین می‌روند. برآیندگیری از آنها خطا است. زیرا ما زمانی مجاز به برآیندگیری از چند نیرو هستیم که آن نیروها بر یک جسم وارد شده باشند.

سئوال: آیا وزن و F_N عمل و عکس‌العمل هستند؟ خیر، زیرا:

۱ـ F_N و وزن هر دو به یک جسم وارد می‌شوند. در صورتیکه نیروی عمل و عکس‌العمل باید بر دو جسم وارد شوند.

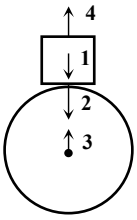
۲ـ مثالهایی یافت می‌شوند که اندازه‌های F_N و وزن با هم برابر نیست.

* حال که مطمئن شدیم F_N و وزن عمل و عکس‌العمل نیستند، می‌توانیم از آنها برآیند بگیریم و برآیندشان در حالتی که نیروی سومی حُضور نداشته باشد صفر است.



$F_N = mg$

مثال ۳ : با توجه به شکل مقابل که جسمی بر روی سطح کره زمین است در کدام گزینه به ترتیب نیروی عکس‌العمل وزن و نیروی عکس‌العمل عمودی سطح آمده است؟



۱) ۱ و ۴

۲) ۳ و ۲

۳) ۳ و ۴

۴) ۱ و ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» نیروی ۱ نیروی وزن است که به جرم اثر می‌کند و نیروی ۳ عکس‌العمل نیروی وزن است و نیروی ۲ نیرویی است که جسم به سطح وارد می‌کند و نیروی ۴ عکس‌العمل نیروی عمودی سطح است.

نکات مهم:

۱ـ ابتدا دقت می‌کنیم که آیا سیستم حرکت می‌کند یا خیر (اگر حرکت نمی‌کند $a = ۰$).

۲ـ اگر حرکت می‌کند در چه جهتی.

۳ـ کلیه نیروهای وزن را مشخص می‌کنیم.

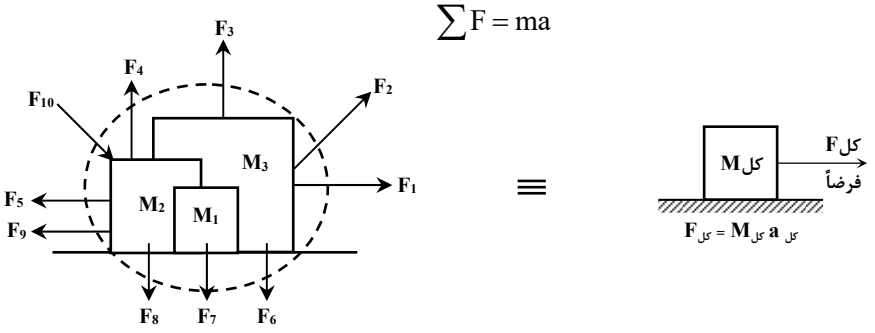
۴ـ کلیه نیروهای کشش را مشخص می‌کنیم.

۵ ـ کلیه نیروهای عمودی سطح را مشخص می‌کنیم.

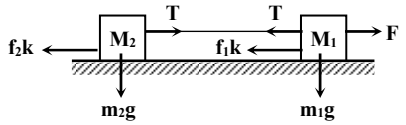
۶ ـ کلیه نیروهای اصطکاک را مشخص می‌کنیم.

۷ـ برآیند نویسی می‌کنیم یعنی نیروهای محرک رامنهای نیروهای مقاوم کرده و مساوی ma قرار می‌دهیم.

$$\sum F = ma$$



www.modaresanesharif.ac.ir



جمله معروفه ← برآیند نیروهای وارد بر یک سیستم برابر است با جرم سیستم در شتاب آن در شکل مقابل کلیه نیروهای وارد بر دستگاه دو ذره‌ای نشان داده شده است.

آشنایی با برخی از نیروهای این فصل

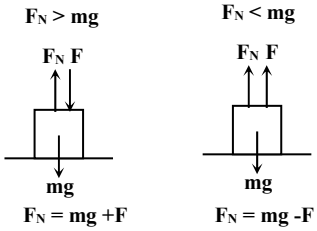
F : نیروی محرک است و معمولاً موفق می‌شود مجموعه را در جهت خود به حرکت بیاورد.

mg یا w (نیروی وزن)؛ نیرویی است که از طرف زمین بر مرکز جرم جسم اثر می‌کند و همواره در راستای قائم رو به پایین است.

T : کشش در طول یک تکه نخ با جرم ناچیز ناچیز عددی ثابت است و جهت کشش نخ از نقاطی که نخ به آنها بسته شده همواره به سمت وسط نخ می‌باشد.

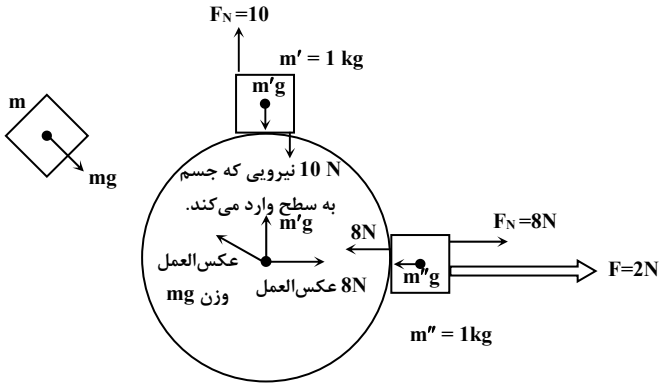
F_k یا F_s : اصطکاک از جمله نیروهای مقاوم است و همواره در خلاف جهت حرکت یا تمایل به حرکت جسم اثر می‌کند.

N یا f_N : نیروی عمودی سطح است و عکس‌العمل نیرویی است که از جسم به سطح وارد می‌شود.



نکته ۱ : هنگامی که هیچ نیروی دیگری در راستای قائم نباشد. $(F_N = mg)$ ولی در غیر اینصورت مطابق دو شکل مقابل خواهیم داشت:

مثال۴: در شکل زیر کلیه نیروهای وارد بر سه جسم با جرم‌های m ، m′ و m″ نشان داده شده است.

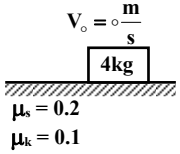


نیروی اصطکاک

نیروی اصطکاک نیرویی است که با حرکت مخالفت می‌کند و جهت آن همواره در خلاف جهت حرکت یا تمایل به حرکت است. تا زمانی که جسم حرکت ندارد اصطکاکش ایستایی است و به محض آنکه به حرکت افتاد اصطکاکش لغزشی خواهد بود. مطابق روابط زیر:

نیروی اصطکاک ایستایی: $F_S = \mu_S F_N$ نیروی اصطکاک لغزشی: $F_k = \mu_k F_N$

که در آن μ_s و μ_k به ترتیب ضرایب اصطکاک ایستایی و لغزشی هستند.



مثال۵ : نیروی اصطکاک در شکل مقابل چند نیوتن است؟

۱) صفر ۲) ۲

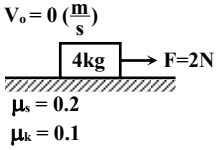
۳) ۶ ۴) ۸

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» چون جسم در حال سکون است $(V_\circ = \circ)$ در نتیجه اصطکاک از نوع ایستایی است. بنابراین:

$F_S = \mu_S . F_N \Rightarrow F_S = \circ/۲ \times ۴\circ = ۸\,N$

در این مثال اصطکاک ایستایی می‌تواند تا ۸N ظاهر شود ولی چون نیروی محرکی نداریم اصطکاک ایستایی اصلاً ظاهر نمی‌شود.

مثال۶: نیروی اصطکاک در شکل مقابل چند نیوتن است؟



۱) صفر

۲) ۲

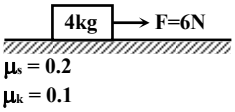
۳) ۶

۴) ۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» باید توجه کنیم که از فرمول $F_S = \mu_s F_N$ نیروی اصطکاک ایستایی ماکزیمم بدست می‌آید یعنی در مثال فوق ما حداقل باید ۸N نیرو به جسم وارد کنیم تا جسم در آستانهٔ حرکت قرار بگیرد ولی هنگامی که ما تنها ۲N نیرو به جسم وارد می‌کنیم اصطکاک ایستایی به اندازهٔ ۲N از ۸N ظاهر خواهد گردید.

www.modaresanesharif.ac.ir

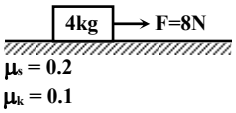
مثال۷: نیروی اصطکاک در شکل مقابل چند نیوتن است؟



۱) صفر ۲) ۲
۳) ۶ ۴) ۸

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» به توضیح مثال قبل مراجعه شود.

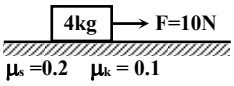
مثال۸: نیرو اصطکاک چند نیوتن است؟



۱) صفر ۲) ۲
۳) ۶ ۴) ۸

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با توجه به توضیحات دو تست قبل به این نتیجه می‌رسیم که گزینه صحیح گزینه (۴) می‌باشد. چون جسم در آستانهٔ لغزش قرار دارد. اصطکاک ایستایی به ماکزیمم مقدار خود می‌دهد. $F_{Smax} = \mu_s f_N = ۰/۲ \times ۴۰ = ۸N$

مثال۹: نیروی اصطکاک در شکل مقابل چند نیوتن است؟



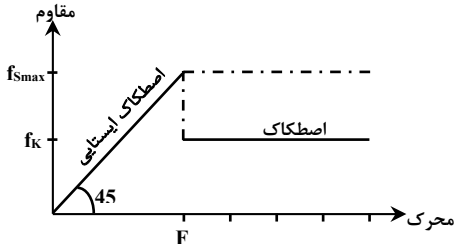
۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۸ ۴) ۱۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به اینکه اندازهٔ F از F_{Smax} بیشتر می‌باشد. در نتیجه جسم در حال حرکت می‌باشد هنگامی که جسم حرکت کند اصطکاکی که وجود دارد اصطکاک لغزشی خواهد بود.

$F_{Smax} = ۰/۲ \times ۴۰ = ۸N$

$F_K = ۰/۱ \times ۴۰ = ۴N$

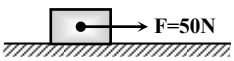
نمودار نیروی اصطکاک برحسب نیروی محرک:



با توجه به نمودار زیر حل مثالهای فوق قابل درک خواهد بود. تازمانی که نیروی محرک کمتر از اصطکاک ایستایی بیشینه باشد نیروی اصطکاک با نیروی محرک برابر است. ولی اگر نیروی محرک از اصطکاک ایستایی بیشینه بیشتر باشد نیروی اصطکاک از نوع لغزشی خواهد بود.

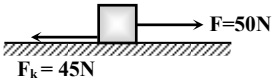
$۰ < f_S < f_{Smax} = \mu_s f_N$

مثال۱۰: به یک جسم ۱۵ کیلوگرمی که روی سطح افقی قرار دارد، نیروی افقی ۵۰ نیوتنی را وارد می‌کنیم اگر ضریب اصطکاک لغزشی بین سطح زیرین و جسم و سطح افقی برابر ۰/۳ باشد، شتاب حرکت جسم برحسب $\frac{m}{s^۲}$ کدام است؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$



۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) ۱ ۴) ۳

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» چون جسم در حال حرکت اصطکاک لغزشی دارد و نیروی اصطکاک مخالف حرکت است در نتیجه نیرویی که عامل حرکت است برابر است با حاصلضرب شتاب در جرم دستگاه

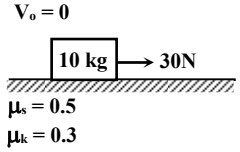


$F - f_k = ma$

$F - \mu_k mg = ma$

$۵۰ - ۴۵ = ۱۵ \times a \Rightarrow a = \frac{۱}{۳}\frac{m}{s^۲}$

مثال۱۱: در شکل مقابل اصطکاک با چند درصد از بیشینه‌ی خود ظاهر شده است؟



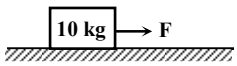
۱) ۱۰۰
۲) ۳۰
۳) ۵۰
۴) ۶۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» در این مثال بیشینه‌ی اصطکاک ایستایی برابر است با : $F_S = ۱۰ \times ۱۰ \times ۰/۵ = ۵۰N$ ولی نیروی وارد بر جسم برابر با ۳۰N است پس نیروی اصطکاک با ۳۰N از ۵۰N بیشینه ظاهر می‌گردد. در نتیجه:

$\frac{۳۰}{۵۰} \times ۱۰۰ = ۶۰\%$

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۲: ضریب اصطکاک ایستایی و لغزشی جسم به ترتیب ۰/۴ و ۰/۱ می‌باشد نیروی F را از ۲۰N تا ۶۰N می‌رسانیم نیروی اصطکاک چه مقدار تغییر می‌کند؟



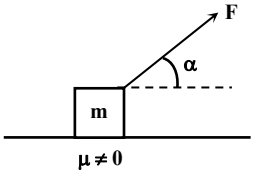
۱) ۶۰ ۲) ۳۰
۳) ۴۰ ۴) ۱۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» هنگامی که نیروی وارد بر جسم ۲۰N می‌باشد اصطکاک به اندازهٔ $F_{Smax} = \frac{۴}{۱۰} \times ۱۰ \times ۱۰ = ۴۰N$ می‌باشد

$F_K = \frac{۱}{۱۰} \times ۱۰ \times ۱۰ = ۱۰N$ از ۲۰N بیشینه ظاهر می‌شود با افزایش نیرو اصطکاک ایستایی هم افزایش پیدا می‌کند تا

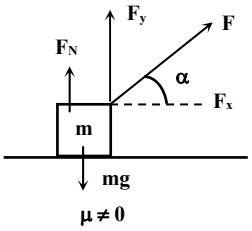
در لحظهٔ آستانه لغزش به بیشینه مقدار خود می‌رسد و با حرکت جسم تبدیل به اصطکاک جنبشی خواهد شد و مقدار آن به ۱۰N خواهد رسید که اندازهٔ آن ثابت است. در نتیجه مقدار تغییر نیروی اصطکاک طی افزایش نیرو از ۲۰N تا ۶۰N برابر خواهد بود با $۲۰ - ۱۰ = ۱۰N$

مثال۱۳: α چند درجه باشد تا جسم بیشترین شتاب را داشته باشد؟



۱) ۴۵
۲) ۳۰
۳) ۶۰
۴) ۱۵

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» نیروی F را به دو مؤلفه افقی و قائم تجزیه می‌کنیم مؤلفه F_y سبب می‌شود که f_N از mg کمتر شود و جسم به سطح نیروی کمتر از وزن به زمین وارد کند و نیروی افقی F_x هم شتاب حرکت سیستم را تأمین می‌کند.

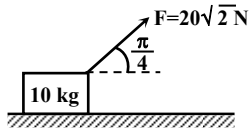


$$f_N = mg - f_y$$
$$F_x - \mu(mg - f_y) = ma$$
$$FCos\alpha - \mu mg + \mu FSin\alpha = ma$$

برای به دست آوردن زاویه بیشینه از رابطه شتاب مشتق می‌گیریم و مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم. توجه کنید که بیشترین ضریب اصطکاک را ۱ در نظر می‌گیریم.

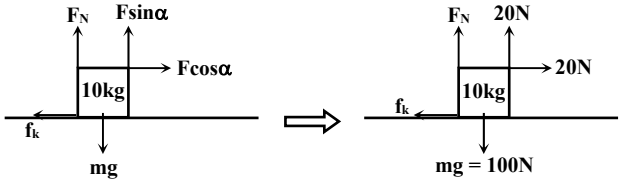
$$a' = \frac{da}{d\alpha} = -\frac{F\sin\alpha}{m} + \mu\frac{F\cos\alpha}{m} = ۰ \Rightarrow \sin\alpha = \mu\cos\alpha \Rightarrow \mu = \tan\alpha \Rightarrow ۱ = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$$

مثال۱۴ : نیروی $F = ۲۰\sqrt{۲}\,N$ با زاویه $\frac{\pi}{۴}rad$ نسبت به افق به جسم ۱۰kg که بر روی سطح افقی به ضریب اصطکاک لغزشی $\mu_k = \frac{۱}{۱۰}$ قرار دارد وارد می‌شود، شتاب حرکت جسم چند متر بر مجذور ثانیه است؟



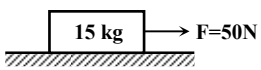
۱) صفر ۲) ۱
۳) ۱/۲ ۴) ۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» چون نیروی وارد بر جسم نسبت به سطح افق مایل است محکوم به تجزیه می‌باشد. مؤلفهٔ x نیرو به جسم شتاب می‌دهد.



$$f_k = \mu_k F_N$$
$$F_N = mg - FSin\alpha = ۱۰۰ - ۲۰ = ۸۰N$$
$$f_k = \frac{۱}{۱۰} \times ۸۰ = ۸N$$
$$F\cos\alpha - F_k = ma \Rightarrow ۲۰ - ۸ = ۱۰a \Rightarrow a = ۱/۲\frac{m}{s^۲}$$

مثال۱۵: به یک جسم ۱۵ کیلوگرمی که روی سطح افقی قرار دارد، نیروی افقی ۵۰ نیوتن را وارد می‌کنیم. اگر ضریب اصطکاک لغزشی بین سطح زیرین جسم و سطح افقی برابر ۰/۳ باشد، شتاب حرکت جسم برحسب $\frac{m}{s^۲}$ کدام است؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$



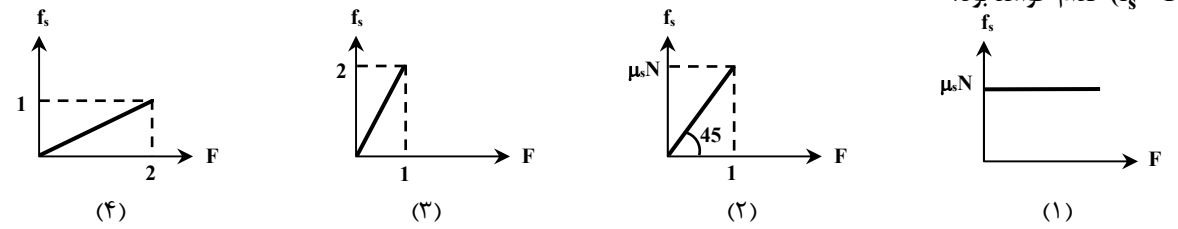
۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) ۱ ۴) ۳

www.modaresanesharif.ac.ir

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به اندازهٔ نیروی اصطکاک و اینکه عامل حرکت برابر با حاصلضرب جرم در شتاب حرکت می‌باشد.

$$f_k = \mu_k . f_N \Rightarrow f_k = ۱۵۰ \times \frac{۳}{۱۰} = ۴۵\,N \Rightarrow F - f_k = ma \Rightarrow ۵۰ - ۴۵ = ۱۵ \times a \Rightarrow a = \frac{۱}{۳}(\frac{m}{s^۲})$$

✍ **مثال۱۶: بر جسمی ساکن نیروی F با تابع F = ۲t اثر می‌دهیم. اگر قبل از حرکت جسم، نیروی اصطکاک وارد بر جسم f_S باشد، نمودار $(f_s - F)$ کدام خواهد بود؟**

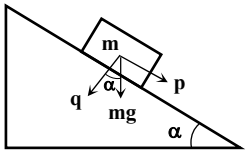


(۱) (۲) (۳) (۴)

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» می‌دانیم تا زمانی که جسم حرکت نکرده نیروی محرک با نیروی مقاوم برابر است.

سطح شیبدار:

در کلیهٔ سطوحی که نیروی وزن نسبت به سطح مایل باشد محکوم به تجزیه است.



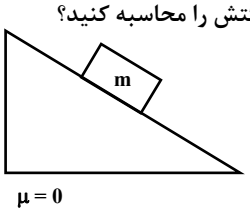
$$\cos\alpha = \frac{q}{mg} \Rightarrow q = mg\cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{p}{mg} \Rightarrow p = mg\sin\alpha$$

در این تجزیه نیروی وزن به دو عامل p و q ، نیروی P عامل رانش جسم به پایین سطح شیبدار و نیروی q عامل حفظ تعادل جسم در راستای قائم و تولید f_N می‌باشد.

در مثالهای زیر حالتهای مختلف شتاب جسم بر روی سطح شیبدار را به صورت پارامتری بررسی می‌کنیم.

✍ **مثال۱۷ : جسمی به جرم m بر روی سطح شیبدار بدون اصطکاک، شتابدار به پایین سطح می‌آید. شتاب حرکتش را محاسبه کنید؟**



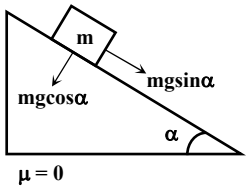
۱) $g\sin\alpha$

۲) $g(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)$

۳) $-g(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)$

۴) $-g\sin\alpha$

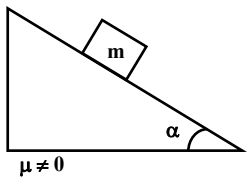
☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با توجه به اینکه تنها نیروی موثر در حرکت وارد بر جسم واقع بر سطح شیبدار نیروی وزن جسم است و سطح شیبدار بدون اصطکاک می‌باشد پس از تجزیهٔ نیروی وزن داریم:



عامل حرکت $= ma$

$$mg\sin\alpha = ma \Rightarrow a = g\sin\alpha$$

✍ **مثال۱۸: جسمی به جرم m بر روی سطح شیبدار دارای اصطکاک، شتاب‌دار به پایین سطح می‌آید، شتاب حرکتش رامحاسبه کنید؟**



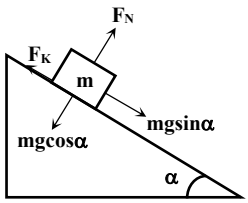
۱) $g\sin\alpha$

۲) $-g\sin\alpha$

۳) $g(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)$

۴) $-g(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به حرکت جسم بر روی سطح شیبدار داریم:



$$F - f_k = ma$$

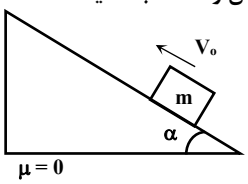
$$mg\sin\alpha - \mu_k mg\cos\alpha = ma$$

$$mg(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha) = ma$$

$$g(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha) = a$$

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۹: جسمی به جرم m بر روی سطح شیبدار بدون اصطکاک، شتابدار به بالا حرکت می‌کند.شتاب حرکتش را محاسبه کنید.



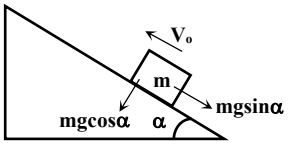
۱) $g\sin\alpha$

۲) $-g\sin\alpha$

۳) $g(\sin\alpha-\mu_k\cos\alpha)$

۴) $-g(\sin\alpha-\mu_k\cos\alpha)$

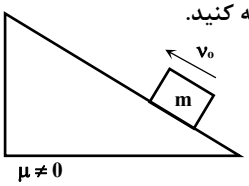
☑ **پاسخ :** گزینه «۲» تنها نیروی وارد بر جسم نیروی وزن است بنابراین:



$$\circ\ -mg\sin\alpha=ma\ \Rightarrow a=-g\sin\alpha$$

در این سئوال چون نیروی $mg\sin\alpha$ مخالف جهت حرکت می‌باشد بنابراین نیروی مخالف عامل حرکت است بنابراین در برآیند نویسی نیروها علامت منفی می‌گیرد و چون نیرویی در جهت حرکت وجود ندارد جای آن صفر قرار می‌دهیم.

مثال۲۰: جسمی به جرم m بر روی سطح شیبدار، شتابدار به بالا حرکت می‌کند. شتاب حرکتش را محاسبه کنید.



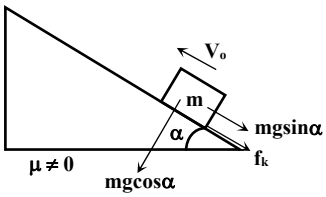
۱) $-g(\sin\alpha-\mu_k\cos\alpha)$

۲) $g(\cos\alpha-\mu_k\sin\alpha)$

۳) $-g(\sin\alpha-\mu_s\cos\alpha)$

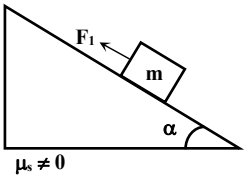
۴) $g(\cos\alpha-\mu_k\sin\alpha)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» در این مسئله باز هم نیروی مؤثر در حرکت وارد بر جسم، وزن جسم است و مانند تست قبل عامل $P=mg\sin\alpha$ در خلاف جهت حرکت وعلامت آن منفی می‌باشد از آنجایی که نیروی اصطکاک نیز همواره خلاف جهت حرکت می‌باشد به صورت زیر قانون دوم نیوتن را می نویسیم:



$$\circ\ -mg\sin\alpha-f_k=ma$$
$$\circ\ -mg\sin\alpha-\mu_k mg\cos\alpha=ma$$
$$-mg(\sin\alpha+\mu_k\cos\alpha)=ma$$
$$-g(\sin\alpha+\mu_k\cos\alpha)=a$$

مثال ۲۱: با وجود نیروی F_1 جسم در آستانه‌ی لغزش به پایین است نیروی F_1 را چه مقدار زیاد کنیم تا جسم در آستانهٔ لغزش به بالا قرار گیرد؟



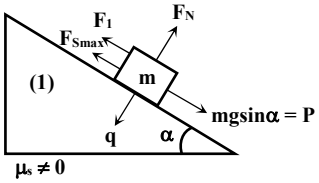
۱) $\mu_s mg\cos\alpha$

۲) $2\mu_s mg\cos\alpha$

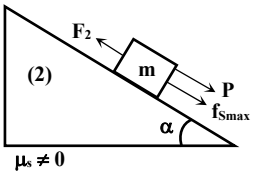
۳) $mg\sin\alpha$

۴) $2mg\sin\alpha$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» کلیهٔ نیروهایی که بر جسم واقع بر سطح شیبدار وارد می‌شود به صورت زیر می‌باشد. با توجه به اینکه در آستانه لغزش اصطکاک ایستایی حتماً به بیشینه مقدار خود می‌رسد، با توجه به فرض مسئله مطابق دو شکل زیر با استفاده از قانون دوم نیوتن خواهیم داشت:



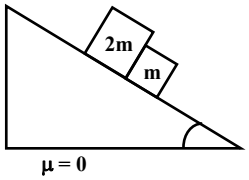
$$F_1+f_{Smax}=P$$
$$F_1=P-F_{Smax}$$



$$F_2=f_{Smax}+P$$

$$\Delta F=(P+f_{Smax})-(P-f_{Smax})\ \Rightarrow \Delta F=2f_{Smax}=2\mu_s mg\cos\alpha$$

مثال۲۲: در شکل مقابل نیرویی که جسم 2m به جسم m وارد می‌کند. کدام گزینه است؟ (سطح شیب‌دار بدون اصطکاک است)



۱) $mg\sin\alpha$

۲) $2mg\sin\alpha$

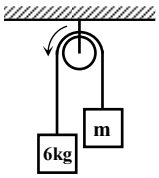
۳) ∘

۴) $3mg\sin\alpha$

www.modaresanesharif.ac.ir

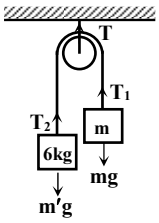
☑ **پاسخ :** گزینه «۳» سطح شیبدار کاملاً صیقلی و بدون اصطکاک است در نتیجه با توجه به اینکه شتاب جسم مستقل از جرم است به راحتی می‌توانیم بگوییم هر دو جسم با شتاب یکسان حرکت می‌کنند و کاملاً بر هم مماس هستند بنابراین هیچ نیرویی به هم وارد نمی‌کنند.

مثال۲۳: در شکل مقابل اگر کشش نخ وسط قرقره ۹۶ نیوتن باشد و جرم قرقره ناچیز باشد جرم m چند کیلوگرم است؟



۱) ۸
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» به نیروهای وارد بر سیستم توجه کنید.



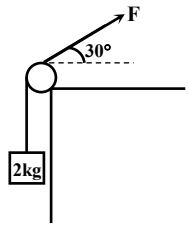
با توجه به این که نخ در کل سیستم یک تکه است کشش در طول آن ثابت است. بنـابراین $T_1 = T_2$ و از طـرف دیگر داریم: $T = T_1 + T_2$ در نتیجه $T = 2T_1$. قرقره در حال تعادل است بنابراین:

$$T = 2T_1 \Rightarrow 96 = 2T_1 \Rightarrow T_1 = T_2 = 48N$$

با نوشتن قانون دوم نیوتن با توجه به جهت حرکت برای هر یک از وزنه‌ها خواهیم داشت:

$$\begin{cases} m'g - T_2 = m'a \\ T_1 - mg = ma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 60 - 48 = 6a \Rightarrow a = 2\dfrac{m}{s^2} \\ 48 - 10m = 2a \Rightarrow m = 4kg \end{cases}$$

مثال۲۴: نیروی F چقدر باشد تا وزنه‌ی 2kg با شتاب $2\frac{m}{s^2}$ به بالا برود؟

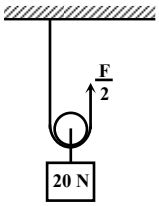


۱) ۴
۲) ۱۲
۳) ۲۴
۴) ۸

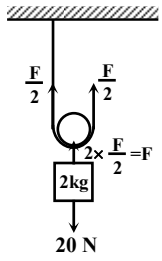
☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به مفهوم قانون دوم نیوتن عامل حرکت برابر است با حاصلضرب جرم جسم در شتاب حرکت آن زاویهٔ نیـروی F با سطح افق برای ما بدون اهمیت می‌باشد یعنی مهم نیست که نیروی F افقی، عمودی یا مایل با هر زاویهٔ دلخواه باشد. در ضمن بـه خـاطر داریـد که کشش در طول یک تکه نخ عددی ثابت است. بنابراین:

$$F - mg = ma$$
$$F - 20 = 2 \times 2 \Rightarrow F = 24N$$

مثال۲۵: نیروی F چقدر باشد تا وزنه‌ی 2kg با شتاب $3\frac{m}{s^2}$ بالا برود؟ (جرم قرقره و کلیه اصطکاک‌ها ناچیز است)



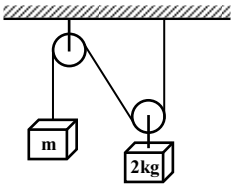
۱) ۲۰
۲) ۴۰
۳) ۵۲
۴) ۲۶



☑ **پاسخ :** گزینه «۴» طناب در این دستگاه با نیروی $\frac{F}{2}$ کشیده می‌شود با توجه به اینکه در کـل سیسـتم طناب یک تکه است نیروهای وارد بر جسم و طناب به صورت مقابل در می‌آید.

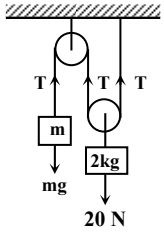
$$F - mg = ma$$
$$F - 20 = 2 \times 3 \Rightarrow F = 26$$

مثال۲۶: m چند کیلوگرم باشد تا وزنه‌ی 2kg با شتاب $2\frac{m}{s^2}$ به بالا برود؟



۱) ۱/۲
۲) ۲
۳) ۴/۸
۴) ۳/۶

www.modaresanesharif.ac.ir



☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با استفاده از قانون دوم نیوتن مطابق شکل برای وزنه ۲kg خواهیم داشت:

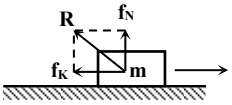
$$۲T - ۲۰ = ۲ \times ۲ \Rightarrow ۲T - ۲۰ = ۴ \Rightarrow ۲T = ۲۴ \Rightarrow T = ۱۲N$$

از طرفی چون شتاب حرکت وزنه m به اندازهٔ دو برابر شتاب وزنه ۲kg است. بنابراین شتاب وزنه m را $۴\frac{m}{s^۲}$ در نظر می‌گیریم.

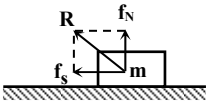
$$mg - T = ma' \Rightarrow m \times ۱۰ - T = m \times ۴$$
$$۶m = T \Rightarrow ۶m = ۱۲ \Rightarrow m = ۲kg$$

نیروی سطح ($\vec{R}$)

سطح بر جسم دو نیرو وارد می‌کند. یکی نیروی عمودی سطح و دیگری نیروی اصطکاک که همان نیروی افقی سطح است. بسته به آنکه جسم حرکت کند یا ساکن باشد خواهیم داشت:

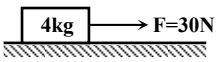


در حال حرکت
$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{f}_N + \vec{f}_k \\ R = \sqrt{f_N^۲ + f_K^۲} \end{cases}$$



در حال سکون
$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{f}_N + \vec{f}_S \\ R = \sqrt{f_N^۲ + f_S^۲} \end{cases}$$

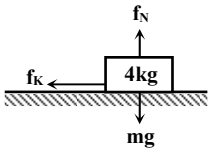
مثال۲۷: مطابق شکل جسمی توسط نیروی ۳۰N با سرعت ثابت به جلو کشیده می‌شود. نیروی سطح را محاسبه کنید.



۱) ۳۰N ۲) ۵۰N
۳) ۴۰N ۴) ۹۰N

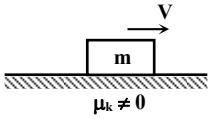
☑ **پاسخ :** گزینه «۲» در صورت سئوال آورده شده که جسم با سرعت ثابت به جلو حرکت می‌کند یعنی شتاب حرکت صفر می‌باشد یعنی نیروی افقی وارد برجسم با نیروی اصطکاک جنبشی برابر می‌باشد (برآیند آنها صفر است) $F - f_K = m \times ۰ \Rightarrow f_K = F$

در این جا تأمین‌کنندهٔ f_N نیروی وزن است. بنابراین داریم:



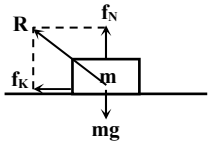
نیروی سطح $R = \sqrt{f_N^۲ + f_K^۲} = \sqrt{(۴۰)^۲ + (۳۰)^۲} = \sqrt{۲۵۰۰} = ۵۰N$

مثال۲۸: جسمی بر روی سطح افقی به ضریب اصطکاک μ_k در حال حرکت است. نیروی سطح چند برابر نیروی عمودی سطح است؟



۱) $\mu_k^۲$ ۲) $\sqrt{۱ + \mu_k^۲}$
۳) $\sqrt{۱ - \mu_k^۲}$ ۴) $۱ + \mu_k^۲$

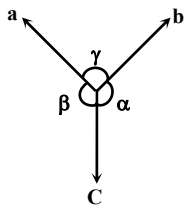
☑ **پاسخ :** گزینه «۲» ابتدا باید دقت کنیم که صورت سئوال به درستی خوانده شود پس از آن متوجه می‌شویم که سؤال از ما نسبت $\frac{R}{F_N}$ را خواسته است. بنابراین:



$$\frac{R}{f_N} = \frac{\sqrt{m^۲g^۲\mu_k^۲ + m^۲g^۲}}{mg} = \frac{mg\sqrt{۱ + \mu_k^۲}}{mg} = \sqrt{۱ + \mu_k^۲}$$

بررسی مسائل تعادل:

تعادل انتقالی هنگامی خواهیم داشت که برآیند نیروهای وارد بر هر جسم برابر صفر شود، یعنی $(\sum_i F_i = ۰)$.

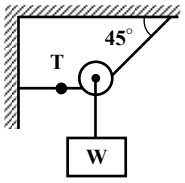


نکته ۲ : بین سه نیروی متقاطع که برآیند آنها صفر است $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{۰}$ رابطه‌ی زیر برقرار است: (قانون سینوسها)

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

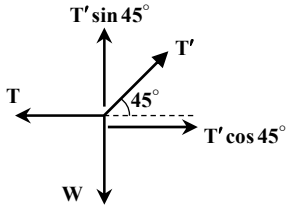
www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۲۹: مطلوبست نیروی کشش نخ افقی (T = ?)



۱) $T = w$
۲) $T = \frac{w}{۲}$
۳) $T = \sqrt{۲}w$
۴) $T = \frac{\sqrt{۲}}{۲}w$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» **روش اول (تجزیه):** دیاگرام نیروهای روبرو را برای نقطه مشترک ریسمان‌ها خواهیم داشت چون جسم در حال تعادل است لذا:

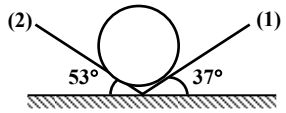


$$\begin{cases} T'\sin ۴۵ = W \\ T'\cos ۴۵ = T \end{cases} \Rightarrow T = W$$

روش دوم (قانون سینوس‌ها): با استفاده از قانون سینوس‌ها خواهیم داشت:

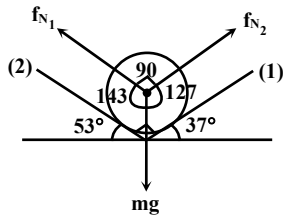
$$\frac{T}{\sin(۹۰^\circ + ۴۵^\circ)} = \frac{W}{\sin(۹۰^\circ + ۴۵^\circ)} \Rightarrow \boxed{T = W}$$

مثال۳۰: یک کره‌ی فلزی به وزن ۴۰N درون ناوه‌ای با دیوارهای صیقلی قرار دارد. نیرویی که کره‌ی فلزی به دیوار (۱) ناوه وارد می‌کند چند نیوتن است؟



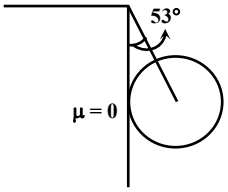
۱) ۲۴
۲) ۳۲
۳) ۴۰
۴) ۴۸

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به جهت نیروهای وارد بر گلوله قانون سینوس‌ها را به صورت زیر می‌نویسیم:



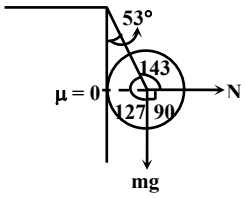
$$\frac{mg}{\sin ۹۰} = \frac{f_{N_۱}}{\sin ۱۲۷} \Rightarrow \frac{۴۰}{۱} = \frac{f_{N_۱}}{\frac{۴}{۵}} \Rightarrow f_{N_۱} = ۳۲N$$

مثال۳۱: در شکل مقابل اگر کشش نخ ریسمان برابر ۲۰۰N باشد نیرویی که از طرف دیوار بر کره وارد می‌شود چند نیوتن است؟



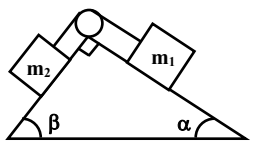
۱) ۱۲۰N
۲) ۱۶۰N
۳) ۲۴۰N
۴) ۲۰۰N

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» بردار نیروهای وارد بر جسم به شکل مقابل است. با توجه به شکل قانون سینوسها را به صورت زیر می‌نویسیم.



$$\frac{N}{\sin ۱۲۷} = \frac{T}{\sin ۹۰} \Rightarrow \frac{N}{\frac{۴}{۵}} = \frac{۲۰۰}{۱} \Rightarrow N = ۱۶۰(N)$$

مثال۳۲: سیستم در حال تعادل است، جرم $m_۲$ چند برابر جرم $m_۱$ است؟



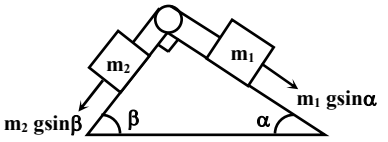
۱) $\tan\alpha$
۲) $\cot\alpha$
۳) $\sin\alpha$
۴) $\cos\alpha$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» برای حل این سئوال لازم است برخی خواص مثلثاتی را مرور کنیم. مثلث فوق قائم الزاویه می‌باشد. بنابراین زوایای α و β متمم یکدیگر می‌باشند. در نتیجه داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \sin\alpha = \cos\beta$$

www.modaresanesharif.ac.ir

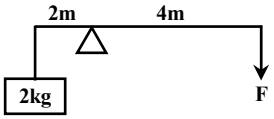
چون تعادل داریم بنابراین برآیند نیروهای وارد بر اجسام صفر می‌باشد با رسم نیروهای وارد بر سیستم می‌توانیم بنویسیم.



$$m_1 g\sin\alpha = m_2 g\sin\beta$$
$$m_1\sin\alpha = m_2\cos\alpha$$
$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

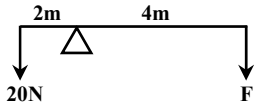
نکته۳: اگر تعادل دورانی داشته باشیم آنگاه برآیند گشتاور نیروهای وارد بر دستگاه صفر خواهد شد $(\sum \vec{M}_i = 0)$ می‌دانیم رابطه گشتاور نیرو به صورت $\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$ می‌باشد.

مثال۳۳: در شکل اگر میله بدون وزن باشد نیروی F چند نیوتن باشد تا دستگاه در حال تعادل باشد؟



۱) ۵ ۲) ۱۰
۳) ۲۰ ۴) ۴۰

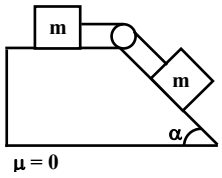
پاسخ: گزینه «۲» چون دستگاه در حال تعادل دورانی است بنابراین:



$$\sum \vec{M}_i = 0 \Rightarrow 2\times 20 = 4F \Rightarrow \boxed{F = 10\,N}$$

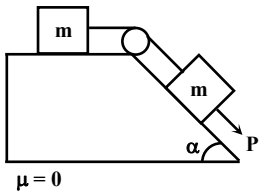
توجه شود که وزنه ۲۰ نیوتنی گشتاور پاد ساعتگرد و نیروی F گشتاور ساعتگرد ایجاد می‌کنند.

مثال۳۴: وزنه‌ها از حال سکون به راه می‌افتد و پس از 2s هر یک به اندازه‌ی 10 m جابجا می‌شوند α کدام گزینه است؟ (سطوح بدون اصطکاکند)



۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$
۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{12}$

پاسخ : گزینه «۲» به نیروهای وارد بر سیستم توجه می‌کنیم عامل حرکت P می‌باشد که برابر با حاصلضرب کل جرم سیستم در شتاب حرکت سیستم می‌باشد.



$$P = 2ma$$
$$g\sin\alpha = 2a$$
$$mg\sin\alpha = 2ma$$
$$10\sin\alpha = 2a \qquad (I)$$

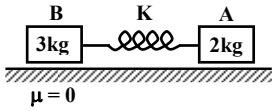
از طرفی دیگر با استفاده از فصل حرکت، شتاب حرکت وزنه‌ها را پس از طی ۵ متر بدست می‌آوریم:

$$V_0 = 0\,\frac{m}{s}$$
$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t \Rightarrow 10 = \frac{1}{2}a(2)^2 \Rightarrow a = 5(\frac{m}{s^2}) \qquad (II)$$
$$\xrightarrow{(I),(II)} 10\sin\alpha = 2\times 5 \Rightarrow \sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}\,rad$$

فنر: نیروی فنر متناسب با تغییر طول فنر است. ضریب این تناسب همان ضریب سختی فنر (K) است. یکای ضریب سختی فنر $\frac{N}{m}$ است.

$$F \propto \Delta\ell \Rightarrow F = k\Delta\ell$$

مثال۳۵: وزنه‌های A و B را مطابق شکل به فنر فشرده می‌سازیم. نسبت شتاب وزنه‌ی A به شتاب وزنه‌ی B پس از رها شدن چگونه است؟



۱) ۱ ۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{9}{4}$

پاسخ : گزینه «۳» وقتی فنری را می‌فشریم انرژی در فنر ذخیره می‌کنیم که پس از رها کردن این نیرو به صورت نیروی فنر به دو وزنه نیرو وارد می‌کند که به هر دو جسم نیروی مساوی وارد می‌کند و به دو جسم که جرم‌های متفاوت دارند شتاب متفاوت وارد می‌کند. طبق قانون دوم نیوتن خواهیم داشت:

$$F_A = 2a_A \quad ، \quad F_B = 3a_B$$

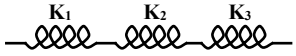
چون: $f_A = F_B = F_{فنر}$. لذا:

$$2a_A = 3a_B \Rightarrow \frac{a_A}{a_B} = \frac{3}{2}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

به هم بستن فنرها

۱) بطور سری

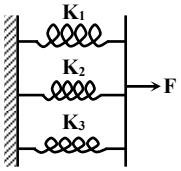


اگر فنرها را به صورت سری به هم ببندیم نیروی کلی که به دستگاه وارد می‌کنیم به تک تک آن‌ها وارد می‌شود.

$$F_۱ = F_۲ = F_۳ = F$$
$$\Delta\ell_۱ + \Delta\ell_۲ + \Delta\ell_۳ = \Delta\ell$$

$$\xrightarrow{F=k\Delta\ell} \frac{F_۱}{K_۱} + \frac{F_۲}{K_۲} + \frac{F_۳}{K_۳} = \frac{F_{\text{کل}}}{K_{\text{کل}}} \Rightarrow \boxed{\frac{۱}{K_{\text{کل}}} = \frac{۱}{K_۱} + \frac{۱}{K_۲} + \frac{۱}{K_۳}}$$

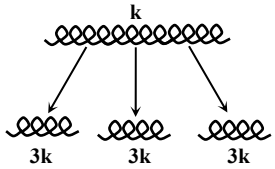
۲) بطور موازی موازی



اگر فنرها را به صورت موازی به هم ببندیم، نیروی کلّی که به دستگاه وارد می‌کنیم برابر جمع نیروهای هر فنر است.

$$F_{\text{کل}} = F_۱ + F_۲ + F_۳$$
$$\Delta\ell_{\text{کل}} = \Delta\ell_۱ = \Delta\ell_۲ = \Delta\ell_۳$$
$$k_{\text{کل}}\,\Delta\ell_{\text{کل}} = k_۱\Delta\ell_۱ + k_۲\Delta\ell_۲ + k_۳\Delta\ell_۳ \Rightarrow \boxed{k_{\text{کل}} = k_۱ + k_۲ + k_۳}$$

۳) تکه‌تکه‌کردن فنر:

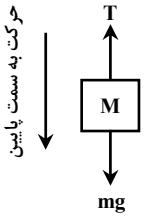


اگر فنری به ضریب سختی k را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم هر فنر کوچک ضریب سختی برابر nk دارد.

آسانسور:

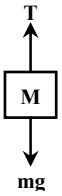
حرکت آسانسور در دو حالت کلی یکنواخت و شتابدار قابل بررسی است.

اگر وزن آسانسور از کشش کابل بیشتر باشد حرکت آسانسور به سمت پایین و شتابدار تندشونده خواهد بود.



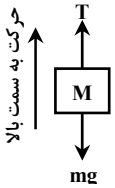
$$mg - T = ma \Rightarrow T = mg - ma \Rightarrow T = m(g - a)$$

اگر وزن آسانسور با کشش کابل برابر باشد حرکت آسانسور یکنواخت یا به سمت پایین یا به سمت بالا خواهد بود. در نتیجه شتاب حرکت صفر می‌شود.



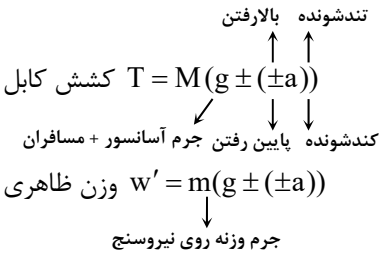
$$mg - T = ۰ \Rightarrow mg = T$$

اگر وزن آسانسور از کشش کابل کمتر باشد حرکت آسانسور به سمت بالا و شتابدار تند شونده خواهد بود.



$$T - mg = ma \Rightarrow T = mg + ma \Rightarrow T = m(g + a)$$

با توجه به نکات بالا می‌توانیم از تکنیک زیر استفاده کنیم :



مثال۳۶: آسانسوری با شتاب g کندشونده و به سمت بالا در حرکت است نیروی کشش کابل را حساب کنید؟

۱) Mg ۲) ۰ ۳) $۲Mg$ ۴) نمی‌توان محاسبه کرد.

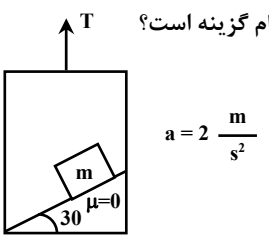
☑ **پاسخ :** گزینه «۲» برای حل این سئوال از تکنیک مقابل استفاده می‌کنیم.

$$T = M(g + (-a)) \Rightarrow T = M(g - g) = ۰$$

بالا رونده — کند شونده

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۳۷: آسانسور با شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ تند شونده به بالا می‌رود شتاب حرکت جسم بر روی سطح شیبدار کدام گزینه است؟



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۴

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» شتاب حرکت جسم بر روی سطح شیبدار بدون اصطکاک از رابطهٔ $a = g\sin\alpha$ بدست می‌آید. با توجه به اینکه سیستم درون آسانسور قرار دارد. اندازهٔ g به g' تغییر پیدا خواهد کرد که g' را از رابطهٔ زیر حساب می‌کنیم: $g' = g + (+۲) = ۱۰ + ۲ = ۱۲\frac{m}{s^۲}$

$$a = g'\sin\alpha \Rightarrow a = ۱۲ \times \frac{۱}{۲} = ۶(\frac{m}{s^۲})$$

اندازه‌ی حرکت (ρ)

اندازه‌ی حرکت یک پدیده‌ی برداری است و به حاصلضرب جرم جسم در سرعت آن گفته می‌شود. نام دیگر این پدیده تکانه است و واحد آن $\frac{kgm}{s}$ است.

اندازه حرکت (تکانه) $\vec{\rho} = m\vec{v}$

نکته۴: تغییرات اندازه‌ی حرکت در واحد زمان همان نیروی لحظه‌ای وارد بر جسم است. $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

زیرا: $\vec{P} = m\vec{V} \Rightarrow d\vec{P} = m d\vec{V} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$

همچنین نیروی متوسط وارد بر جسم برابر تغییر اندازه حرکت به مدت زمان تغییر اندازه حرکت است. $(\vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t})$

زیرا: $\vec{P} = m\vec{V}\begin{cases}\vec{P}_۱ = m\vec{V}_۱\\ \vec{P}_۲ = m\vec{V}_۲\end{cases} \Rightarrow \Delta\vec{P} = m\vec{V}_۲ - m\vec{V}_۱ \Rightarrow \Delta\vec{P} = m(\vec{V}_۲ - \vec{V}_۱) = m\Delta\vec{V} \Rightarrow \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = m\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = m\vec{\bar{a}} = \vec{\bar{F}}$

نکته۵: حاصل‌ضرب نیرو در زمان همان تغییرات اندازه حرکت است که به آن ضربه نیز می‌گویند و واحد آن N.S یا $kg\frac{m}{s}$ است.

مثال۳۸: اندازه حرکت جسم ۲ کیلوگرمی بر حسب زمان از رابطه‌ی $P = ۲t^۲ + ۱۰t + ۴۰$ محاسبه می‌شود. در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه شتاب به $۹\frac{m}{s^۲}$ می‌رسد؟

۱) ۳ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» گفتیم که مشتق از تابع اندازه حرکت همان تابع نیرو است. $P = ۲t^۲ + ۱۰t + ۴۰ \xrightarrow{\text{مشتق}} F = ۴t + ۱۰$

از طرفی طبق قانون دوم نیوتن داریم: $F = m.a = ۲ \times ۹ = ۱۸$

پس این دو مقدار را با هم برابر قرار می‌دهیم: $۴t + ۱۰ = ۱۸ \Rightarrow t = ۲(s)$

نکته۶: حاصلضرب نیرو در زمان همان تغییرات اندازه حرکت است که به آن ضربه نیز می‌گویند که واحد ضربه $(N.s)$ یا $\frac{kgm}{s}$ است.

مثال۳۹: اتومبیلی به جرم ۲ تن با سرعت $۷۲\frac{km}{h}$ در حال حرکت است. نیروی متوسطی که لازم است تا اتومبیل را در مدت ۱۰ ثانیه متوقف سازد چند نیوتن است؟

۱) ۸۶۴۰۰ ۲) −۸۶۴۰۰ ۳) ۴۰۰۰ ۴) −۴۰۰۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$F = \frac{\Delta P}{t} = \frac{m\Delta V}{t}$$

چون حرکت ترمزی است پس $v_۱ > v_۲$ در نتیجه Δv منفی است. $F = \frac{-(۲۰ \times ۲۰۰۰)}{۱۰} = -۴۰۰۰(N)$

مثال۴۰: توپی به جرم ۲۵۰ گرم با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ به طور عمودی به دیواری برخورد کرده و پس از ۰/۱ ثانیه با سرعت عمودی $۸\frac{m}{s}$ از دیوار باز می‌گردد. نیروی متوسطی که توپ به دیوار وارد می‌کند چند نیوتن است؟

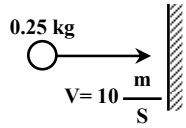
۱) ۴۵۰ ۲) ۵۰ ۳) ۲۵۰ ۴) ۲۰۰

www.modaresanesharif.ac.ir

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» نیروی متوسطی که توپ به دیوار وارد می‌کند همان تغییرات اندازه حرکت بر واحد زمان است.

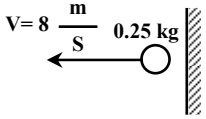
$$\overline{F}=\frac{\Delta P}{t}=\frac{P_۲-P_۱}{t}$$

$P_۱$ همان اندازه حرکت در هنگام برخورد است.



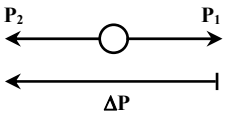
$$P_۱=۰/۲۵\times ۱۰=۲/۵\frac{kgm}{s}$$

$P_۲$ همان اندازه حرکت هنگام بازگشت از دیوار است.



$$P_۲=۰/۲۵\times ۸=۲\frac{kgm}{s}$$

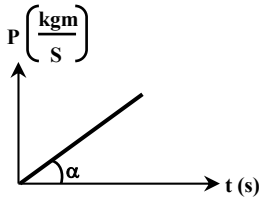
پس $P_۲-P_۱$ یا ΔP به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$P_۲-P_۱=۲/۵+۲=۴/۵$$

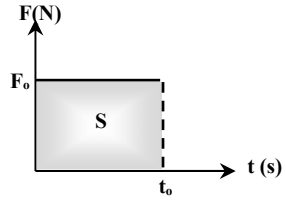
$$\Rightarrow \overline{F}=\frac{۴/۵}{۰/۰۱}=۴۵۰(N)$$

نکته۷: شیب نمودار تکانه ـ زمان همان نیروی وارد بر جسم است.



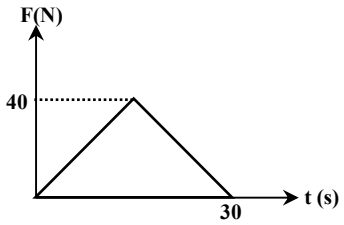
$$tg\alpha=\frac{\Delta P}{\Delta t}=F$$

نکته۸: سطح زیر نمودار نیرو ـ زمان همان تغییرات اندازه سرعت است.



$$F.t=\Delta P$$

مثال۴۱: نمودار نیرو ـ زمان جسم ۶۰kg که در مبداء زمان از حال سکون به راه می‌افتد به صورت رو به روست. سرعت جسم در لحظـه‌ی ۳۰ ثانیه چند $\frac{km}{h}$ است؟



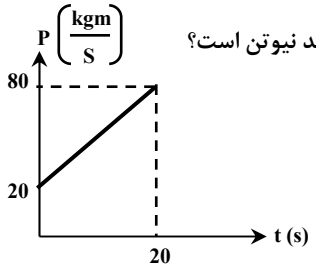
۱) ۱۰
۲) ۷۲
۳) ۱۸
۴) ۳۶

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» همان طور که گفتیم سطح زیر نمودار نیرو ـ زمان تغییرات اندازه حرکت است.

$$S=\Delta P\Rightarrow S=P_۲-P_۱=mV_۲-mV_۱\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۴۰\times ۳۰=۶۰(V_۲-\cancel{V_۱})\Rightarrow ۶۰۰=۶۰V_۲\Rightarrow V_۲=۱۰\frac{m}{s}=۳۶\frac{km}{h}$$

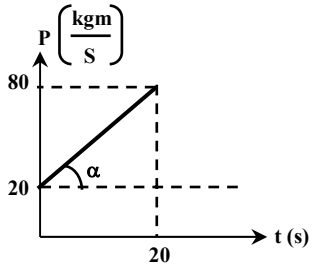
($V_۱=۰$ چون از حال سکون شروع به حرکت کرده است.)

مثال۴۲: با توجه به نمودار اندازه حرکت ـ زمان مقابل نیروی متوسطی که بر جسم وارد شده است. چند نیوتن است؟



۱) ۴
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۵

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» شیب نمودار نیروی متوسط وارد بر جسم است.



$$\overline{F}=tg\alpha=\frac{۶۰}{۲۰}=۳N$$

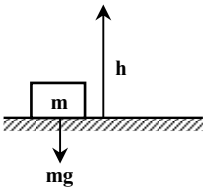
www.modaresanesharif.ac.ir

کار و انرژی

کار کمیتی اسکالر یا نرده‌ای یا عددی است. و طبق تعریف برابر حاصلضرب داخلی بردار نیرو در جابجایی است یعنی: $w = \vec{f}.\vec{d}$

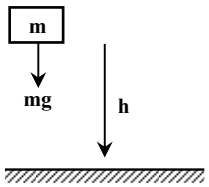
$$w = f.d\cos(\alpha)$$

کار نیروی وزن در یک جابجایی از سطح زمین تا ارتفاع h :



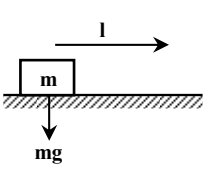
$$w = f.d\cos(\alpha)$$
$$w = mgh\cos(\pi) = -mgh$$

کار نیروی وزن در یک جابجایی از ارتفاع h تا سطح زمین:

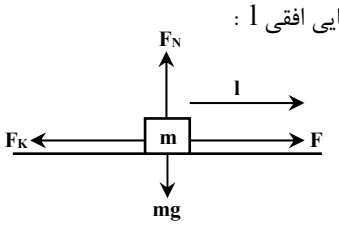


$$w = f.d\cos(\alpha)$$
$$w = mgh\cos(\circ)$$
$$w = mgh$$

کار نیروی وزن در یک جابجایی افقی l :



$$w = f.d\cos(\alpha)$$
$$w = mgh\cos(\frac{\pi}{۲})$$
$$w = \circ$$



کار کل برابر است با مجموع کار تک تک نیروها:

$$w = w_f + w_{f_k} + w_{mg} + w_{f_N} = f.d\cos(\circ) + f_k d\cos(\pi) + mgd\cos(\frac{\pi}{۲}) + f_N d\cos(\frac{\pi}{۲}) = fd - f_k d$$

کار کل برابر است با کار برآیند نیروها: $w = |\vec{f} + \vec{f_k} + \vec{mg} + \vec{f_N}|\, d\cos(\alpha) = (F - f_k)d\cos(\circ) = f.d - f_k d$

انرژی:

انرژی مکانیکی E_m
- انرژی جنبشی $k = \frac{۱}{۲}mv^۲$
- انرژی پتانسیل u
  - گرانشی mgh
  - کشسانی فنر $\frac{۱}{۲}kx^۲$

$$E_M = mgh + \frac{۱}{۲}kx^۲ + \frac{۱}{۲}mv^۲$$

نکته۹: کار کل برابر است با تغییرات انرژی جنبشی جسم: $w = \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ - \frac{۱}{۲}mv_۱^۲$

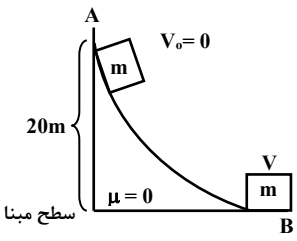
نکته۱۰:

در کلیه مثال‌های این فصل
- اگر اصطکاک نباشد $\Rightarrow E_{M_B} = E_{M_A} \Rightarrow w_{f_k} = \circ$
- اگر اصطکاک باشد $\Rightarrow w_{f_k} = E_{M_۲} - E_{M_۱}$

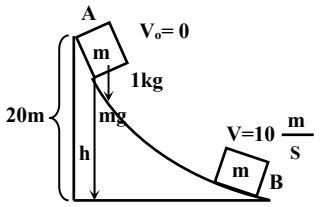
$\Rightarrow$

$$\begin{cases} w_{f_k} = E_{M_۲} - E_{M_۱} \\ w_{f_k} = f_k d\cos(\pi) \end{cases} \Rightarrow E_{M_۲} - E_{M_۱} = f_k d\cos(\pi)$$

مثال۴۳: جسمی به جرم m از ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین از حال سکون رها می‌شود و با سرعت V به پایین سطح می‌رسد. اگر سطح بدون اصطکاک باشد، V چند متر بر ثانیه است؟



www.modaresanesharif.ac.ir



☑ **پاسخ :** $E_{M_A} = E_{M_B}$ چون اصطکاک ندارد.

$$mgh_A + \frac{1}{2}kx_A^2 + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_B + \frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$mgh_A + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$2gh_A = v_B^2 \Rightarrow \sqrt{2gh_A} = v_B \qquad v_B = \sqrt{2\times10\times10} = \sqrt{400} = 20\frac{m}{s}$$

مثال۴۴: جسمی به جرم 1kg از ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین بدون سرعت اولیه رها می‌شود و جسم با سرعت $10\frac{m}{s}$ به پایین سطح می‌رسد. اولاً کار نیروی وزن، ثانیاً کاربرآیند نیروها، ثالثاً کار نیروی اصطکاک را محاسبه کنید:

☑ **پاسخ :** نیروی وزن یک نیروی پایستار است و کارش به مسیر حرکت بستگی ندارد. در مورد نیروی وزن می‌توان گفت، کار این نیرو به تغییرات ارتفاعی که جسم در طول مسیر می‌بیند بستگی دارد. چنانچه مسیری یافت شود که هیچ تغییر ارتفاعی نداشته باشد می‌توان گفت که در آن مسیر کار نیروی وزن صفر است.

اولاً: $w = f.d\cos(0) \Rightarrow w = mgh\cos(0) \Rightarrow w = 1\times10\times20\times1 \Rightarrow w = 200j$

ثانیاً: چون اطلاعات سرعتهای v_1 و v_2 داده شده است. کل $w = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow$ کل $w = \frac{1}{2}\times1\times10^2 - \frac{1}{2}\times1\times0^2 \Rightarrow$ کل $w = 50j$

ثالثاً: $w_{f_k} = E_{M_2} - E_{M_1} \Rightarrow w_{f_k} = \frac{1}{2}mv_2^2 - mgh \Rightarrow w_{f_k} = \frac{1}{2}\times1\times10^2 - 1\times10\times20 = -150j$

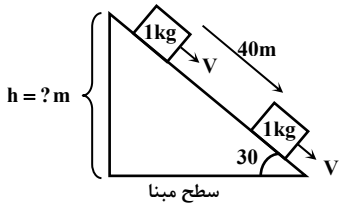
مثال۴۵: جسمی به جرم 1kg بر روی سطح شیبداری به زاویه $\alpha = 30^\circ$، پس از طی مسافت 40m با سرعت ثابت به پایین سطح می‌رسد. موارد زیر را محاسبه کنید؟

اولاً: کار نیروی وزن:

ثانیاً: کار برآیند نیروها:

ثالثاً: کار نیروی اصطکاک:

رابعاً: ضریب اصطکاک:



☑ **پاسخ:** می‌دانیم نیروی وزن یک نیروی پایستار است لذا:

اولاً : $w_{mg} = mgh$

$$m = 40\sin30^\circ = 20m \Rightarrow W_{mg} = 10\times20 = 200j$$

ثانیاً : کل $w = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$, $v_1 = v_2 \Rightarrow$ کل $w = 0$

بطورکلی هرگاه جسم با سرعت ثابت به هر سمتی حرکت کند کار برآیند نیروهایش صفر است.

ثالثاً : $w_{f_k} = E_{M_2} - E_{M_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - (\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh)$

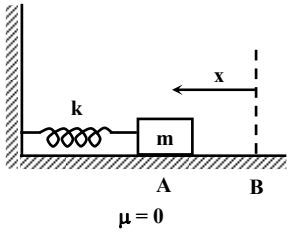
$w_{f_k} = -mgh = -200j$ کار نیروی اصطکاک همواره منفی است.

رابعاً : $\left.\begin{matrix} w_{f_k} = E_{M_2} - E_{M_1} \\ w_{f_k} = f_k d\cos(\pi) \end{matrix}\right\} \Rightarrow E_{M_2} - E_{M_1} = f_k d\cos(\pi)$

$$-200 = \mu_k mg\cos30^\circ d\cos(\pi) \Rightarrow -200 = \mu_k \times1\times10\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times40\times(-1)$$

$$1 = \mu_k\times\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \mu_k \Rightarrow \mu_k = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال۴۶: جسمی به جرم m را بروی سطح افقی بدون اصطکاکی به اندازه‌ی x به فنری به ضریب سختی k فشرده می‌سازیم. جسم پس از رها شدن در وضع تعادل فنر چه سرعتی دارد؟

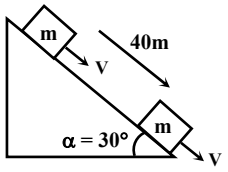


☑ **پاسخ :** $E_{M_A} = E_{M_B} \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2$ چون اصطکاک ندارد. $\Rightarrow$

$$\frac{k}{m}x^2 = v^2 \Rightarrow v = x\sqrt{\frac{k}{m}}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۴۷: جسمی به جرم ۱kg مطابق شکل بروی سطح شیبداری به زاویه ۳۰° با سرعت ثابت به پایین سطح می‌لغزد، کار نیروی سطح در این جابجایی چند ژول است؟



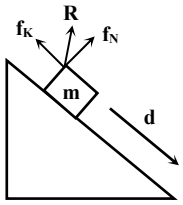
۱) ۲۰۰

۲) −۲۰۰

۳) ۱۰۰

۴) ۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»



$$\vec{R} = \vec{f}_N + \vec{f}_K$$

$$w_R = w_{f_N} + w_{f_k}$$

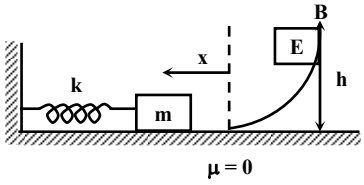
چون $W_{f_N} = 0$ است بنابراین پرسیدن کار نیروی سطح به منزله پرسیدن کار نیروی اصطکاک است.

بنابراین: $w_R = 0 + w_{f_k}$

$$w_R = w_{f_k} = E_{M_2} - E_{M_1} = \frac{1}{2}mv^2 - (mgh - \frac{1}{2}mv^2) \Rightarrow w_R = -mgh \Rightarrow w_R = -1\times10\times\frac{40}{2} = -200\,j$$

مثال۴۸: جسمی به جرم m را به اندازه‌ی x به فنری به ضریب سختی k بروی سطح بدون اصطکاکی فشرده می‌سازیم. جسم پس از رها شدن حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

☑ **پاسخ :** جسم حداکثر تا جایی بالا می‌رود که سرعتش صفر گردد.

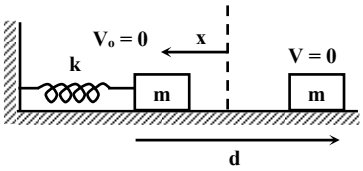


$$E_{M_B} = E_{M_A} \Rightarrow \text{جسم چون اصطکاک ندارد.}$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{kx^2}{2mg}$$

مثال۴۹: جسمی به جرم m را بروی سطح افقی به انداه‌ی x به فنری به ضریب سختی k فشرده‌ایم. جسم پس از رها شدن d متر جلوتر متوقف می‌شود.

۱ـ کار نیروی وزن در این جابجایی
۲ـ کار نیروی عمودی سطح
۳ـ کار نیروی اصطکاک
۴ـ کار برآیند نیروها
۵ ـ ضریب اصطکاک سطح



☑ **پاسخ :**

۱) $w = mgd\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow$ نیروی وزن در جابجایی افقی کار انجام نمی‌دهد

۲) $w = f_N d\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow$ نیروی عمودی سطح هیچ گاه کار انجام نمی‌دهد

۳) $w_{f_k} = E_{M_2} - E_{M_1} = 0 - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{-1}{2}kx^2$

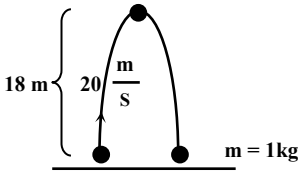
۴) $w = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = 0 - 0 = 0$

۵) $\left.\begin{matrix} w_{f_k} = E_{M_2} - E_{M_1} \\ w_{f_k} = -f_k d \end{matrix}\right\} \Rightarrow E_{M_2} - E_{M_1} = -f_k.d \Rightarrow -\frac{1}{2}kx^2 = -\mu_k mgd \Rightarrow \frac{kx^2}{2mgd} = \mu_k$

مثال۵۰: گلوله‌ای از سطح زمین با سرعت $20\frac{m}{s}$ در راستای قائم به بالا پرتاب می‌شود و حداکثر تا ارتفاع ۱۸ متری بالا می‌رود.

اولاً: کار نیروی وزن در این جابجایی تا اوج. **ثانیاً: کار برآیند نیروها در این جابجایی از زمین تا اوج.**
ثالثاً: کار نیروی مقاومت هوا. **رابعاً: نیروی مقاومت هوا.**

☑ **پاسخ :**



اولاً: $w_{mg} = mgh\cos(\pi) = 1\times10\times18\times(-1) = -180\,j$

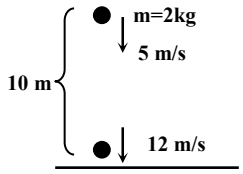
ثانیاً: $w = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}\times1\times0 - \frac{1}{2}\times1\times20^2 = -200\,j$

ثالثاً: $w_{f_k} = E_{M_2} - E_{M_1} = mgh - \frac{1}{2}mv_1^2 = 1\times10\times18 - \frac{1}{2}\times1\times20^2 = -20\,j$

رابعاً: $E_{M_2} - E_{M_1} = -f_k d \Rightarrow -20 = -f_k \times 18 \Rightarrow f_k = \frac{20}{18}N$

www.modaresanesharif.ac.ir

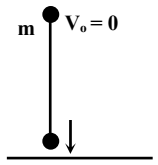
مثال۵۱: گلوله‌ای از ارتفاع ۱۰m سطح زمین با سرعت $5\frac{m}{s}$ به پایین پرتاب می‌کنیم و گلوله با سرعت $12\frac{m}{s}$ به زمین برخورد می‌کند. کار برآیند نیروها چند ژول است؟



۱) ۱۶۹
۲) ۱۱۹
۳) ۱۲۹
۴) ۱۴۹

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» برای کار برآیند نیروها از تغییرات انرژی جنبشی کمک می‌گیریم، خواهیم داشت: $w=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=119j$

مثال۵۲: گلوله‌ای از ارتفاع ۵۰ متری سطح زمین رها می‌کنیم. اگر ۱۰% انرژی پتانسیل اولیه صرف غلبه بر مقاومت هوا گردد. گلوله با چه سرعتی به زمین می‌رسد؟



☑ **پاسخ :**

روش اول: $w_{f_k}=E_{M_2}-E_{M_1}\Rightarrow-\frac{10}{100}mgh=\frac{1}{2}mv_2^2-mgh\Rightarrow mgh-\frac{1}{10}mgh=\frac{1}{2}mv_2^2\Rightarrow\frac{9}{10}mgh=\frac{1}{2}mv_2^2$

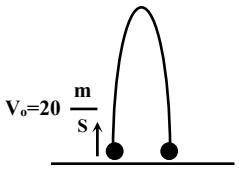
$\Rightarrow 18\times 50=v_2^2\Rightarrow 900=v_2^2\Rightarrow v_2=-30\frac{m}{s}$

روش دوم: $100\%mgh_1=\frac{1}{2}mv_2^2$ اگر مقاومت هوا نبود

$90\%mgh_1=\frac{1}{2}mv_2^2$ اگر مقاومت هوا باشد

$\frac{9}{10}\times 10\times 50=\frac{1}{2}v_2^2\Rightarrow 900=v_2^2\Rightarrow v_2=-30\frac{m}{s}$

مثال۵۳: گلوله‌ای از سطح زمین با سرعت $20\frac{m}{s}$ به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر ۲۰% انرژی جنبشی اولیه صرف غلبه برمقاومت هوا گردد. گلوله با چه سرعتی به زمین برخورد می‌کند؟

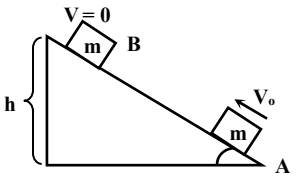


۱) $8\sqrt{5}$ ۲) $5\sqrt{8}$
۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{5}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ۸۰ درصد انرژی جنبشی اولیه به صورت انرژی جنبشی ثانویه تبدیل می‌شود. $\frac{80}{100}(\frac{1}{2}mv_1^2)=\frac{1}{2}mv_2^2$

$320=v_2^2\Rightarrow\sqrt{320}=v_2\Rightarrow v_2=8\sqrt{5}\frac{m}{s}$

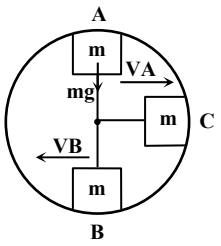
مثال۵۴: جسمی از پایین سطح شیبدار بدون اصطکاکی با سرعت اولیه v_0 بروی سطح به بالا فرستاده می‌شود. جسم حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟



☑ **پاسخ :** $E_{M_A}=E_{M_B}\Rightarrow$ چون اصطکاک ندارد.

$\frac{1}{2}mv_0^2=mgh\Rightarrow\frac{v_0^2}{2}=gh\Rightarrow h=\frac{v_0^2}{2g}$

مثال۵۵: اگر سرعت جسم که به تکه نخی به طول R بسته شده در نقطه A به اندازه‌ی $\sqrt{Rg}$ باشد.
اولاً: سرعت جسم را در نقطه B بدست آورید؟
ثانیاً: کار نیروی وزن در این جابجایی را محاسبه کنید؟
ثالثاً: کار برآیند نیروها را مشخص کنید؟
رابعاً: کار نیروی کشش نخ را بیابید؟



www.modaresanesharif.ac.ir

☑ **پاسخ :**

اولاً : $E_{M_A} = E_{M_B} \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_A^۲ + mg(۲R) = \frac{۱}{۲}mv_B^۲$

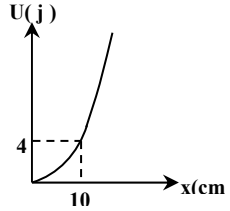
$\frac{۱}{۲} \times m \times (\sqrt{Rg})^۲ + ۲mgR = \frac{۱}{۲}mv_B^۲ \Rightarrow \frac{۵}{۲}mgR = \frac{۱}{۲}mv_B^۲ \Rightarrow ۵Rg = v_B^۲ \Rightarrow \boxed{\sqrt{۵Rg} = v_B}$

ثانیاً : $w = f.d\cos(\alpha) \Rightarrow w = mg(۲R)\cos(۰) \Rightarrow w = ۲mgR$

ثالثاً : $w = \frac{۱}{۲}mv_B^۲ - \frac{۱}{۲}mv_A^۲ = \frac{۱}{۲} \times m(۵Rg) - \frac{۱}{۲}mRg = ۲mgR$

رابعاً : نیروی کشش نخ در تمام مسیر بر جابجایی لحظه به لحظه متحرک عمود است، پس هیچ کاری انجام نمی‌دهد. در ضمن در نقطه C نیز سرعت جسم $\sqrt{۳Rg}$ می‌باشد.

✍ **مثال۵۶: با توجه به نمودار انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره شده در فنر برحسب تغییرات طول فنر ضریب سختی فنر چند $\frac{N}{m}$ است؟**



۱) $\frac{۸}{۱۰۰}$

۲) ۸

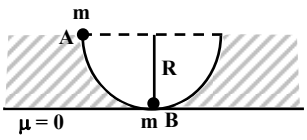
۳) ۸۰

۴) ۸۰۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$u = \frac{۱}{۲}kx^۲ \Rightarrow ۴ = \frac{۱}{۲}k(\frac{۱}{۱۰})^۲ \Rightarrow K = ۸۰۰\frac{N}{m}$

✍ **مثال۵۷: جسمی به جرم m را به نخی به طول R بسته و آن را از حالتی که نخ کاملاً افقی است رها می‌کنیم. سرعت جسم را در هنگامی که نخ کاملاً قائم است بیابید؟**

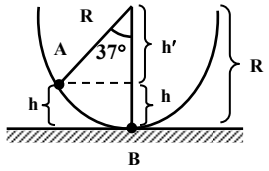


سطح مبنا

☑ **پاسخ:** با استفاده از قانون پایستگی انرژی خواهیم داشت:

$E_{M_A} = E_{M_B} \Rightarrow mgR = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow v = \sqrt{۲Rg}$

✍ **مثال۵۸: جسم از نقطه A به نقطه B می‌رود کار نیروی وزن جسم را محاسبه کنید؟ ($\cos ۳۷^\circ = ۰/۸$)**



☑ **پاسخ :**

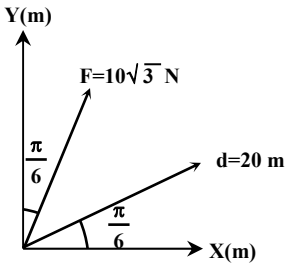
$Cos۳۷^\circ = \frac{h'}{R} \Rightarrow h' = R\cos ۳۷^\circ \Rightarrow h = R - h'$

$h = R - R\cos ۳۷^\circ \Rightarrow h = R(۱ - \cos ۳۷^\circ)$

$w = mgh\cos(۰) \Rightarrow w = mgR(۱ - \cos ۳۷^\circ)$ $\cos(۰)$ (۱)

$\Rightarrow w = mgR(۱ - \cos ۳۷^\circ) \Rightarrow w = mgR \times \frac{۲}{۱۰} = ۲mR$

✍ **مثال۵۹: کار نیروی F را در جابجایی d محاسبه کنید؟**



۱) $۳۰۰\sqrt{۳}$

۲) ۳۰۰

۳) $۳۰۰\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۴) ۱۵۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» چون زاویه بین نیرو و جابجایی ۳۰° است با استفاده از قانون پایستگی انرژی خواهیم داشت:

$w = F.d\cos(\alpha) \Rightarrow ۱۰\sqrt{۳} \times ۲۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳۰۰j$

✍ **مثال۶۰: کار نیروی $\vec{F} = ۲\vec{i} + ۳\vec{j}$ را در جابجایی $\vec{d} = ۴\vec{i} + ۵\vec{j}$ محاسبه کنید؟**

☑ **پاسخ :**

$w = \vec{F}.\vec{d} = ۲ \times ۴ + ۳ \times ۵ = ۲۳j$

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۶۱: انرژی پتانسیل گرانشی کدامین ظرف بیشتر است؟ (مایع‌ها یکسانند و ارتفاع برابر دارند، هم جرم و هم جنس)

(۴) (۳) (۲) (۱)

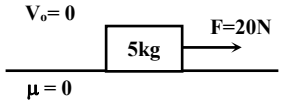
☑ **پاسخ :** گزینه «۱» در شکل گزینه (۱) عمده جرم از نیمه ظرف به بالا واقع شده است. پس مرکز جرمش بالاتر از مابقی است و می‌توان گفت که انرژی پتانسیل آن ظرف از مابقی ظرفها بیشتر است.

مثال۶۲: چنانچه سرعت جسم دو برابر شود، انرژی جنبشی جسم چند برابر می‌شود؟

☑ **پاسخ :**

$$k=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow k\propto v^2 \Rightarrow \text{if } v: \text{۲ برابر} \Rightarrow k: \text{۴ برابر}$$

مثال۶۳: نیروی F مطابق شکل به جسم ۵kg اثر می‌کند. اگر سطح بدون اصطکاک باشد. کار نیروی F پس از ۳ ثانیه چند ژول است؟



۱) ۳۶۰ ۲) ۴۵۰

۳) ۲۷۰ ۴) ۳۲۰

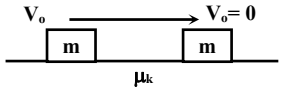
☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$F=ma \Rightarrow 20=5a \Rightarrow a=4\frac{m}{s^2}$$

$$d=\frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow d=\frac{1}{2}\times 4\times 3^2+0 \Rightarrow d=18m$$

$$w=F.d\cos(\alpha) \Rightarrow w=20\times 18\times\cos(0) \Rightarrow w=360\,j$$

مثال۶۴: جسمی به جرم m بروی سطح افقی به ضریب اصطکاک μ_k با سرعت v_0 به جلوتر پرتاب می‌شود، جسم چند متر جلوتر متوقف می‌شود؟



☑ **پاسخ :**

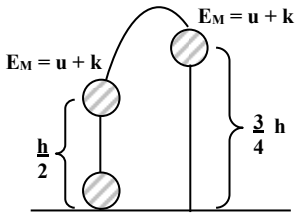
$$\left.\begin{aligned} w_{f_k}&=E_{M_2}-E_{M_1}\\ w_{f_k}&=-f_k.d\end{aligned}\right\}\Rightarrow E_{M_2}-E_{M_1}=-f_k.d$$

$$0-\frac{1}{2}mv_0^2=-\mu_k mgd \Rightarrow \frac{v_0^2}{2\mu_k g}=d$$

مثال۶۵: گلوله‌ای از سطح زمین با سرعت v_0 به بالا پرتاب می‌شود. در نصف ارتفاع اوج، انرژی پتانسیل گرانشی گلوله به اندازه ۲۰j است. انرژی جنبشی گلوله در $\frac{3}{4}$ ارتفاع اوج چند ژول است؟

۱) ۱۰ ۲) ۳۰ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» در شکل مقابل چون اصطکاک نداریم در هر نقطه‌ای از زمین $E_M=u+k$ می‌باشد حال اگر جسم تا ارتفاع h از سطح زمین بالا رود، چون در نقطه‌ی اوج سرعت جسم به صفر می‌رسد انرژی مکانیکی فقط برابر با انرژی پتانسیل گرانشی می‌شود $(E_M=mgh)$، در صورت سئوال ذکر شده است که در نیمه مسیر انرژی پتانسیل گرانشی برابر با ۲۰j است یعنی: $u=mg\frac{h}{2}=20\,j$، پس



$E_M=u=mgh=40\,j$ حال در ارتفاع $\frac{3}{4}$ از سطح زمین نیز $E_M=40\,j$ است پس داریم:

$$E_M=u+k$$

$$40=\frac{3}{4}mgh+k \Rightarrow 40=\frac{3}{4}\times 40+k \Rightarrow 40=30+k \Rightarrow k=10\,j$$

نکته۱۱: در نصف ارتفاع اوج گلوله $u=k=\frac{E_M}{2}$.

مثال۶۶: به دو جسم به جرم‌های ۳kg و ۵kg برروی سطح افقی نیروهای افقی یکسان وارد می‌شود. انرژی جنبشی جسم ۵kg چند برابر انرژی جنبشی جسم ۳kg است؟

۱) $\frac{25}{9}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{9}{5}$ ۴) $\frac{5}{3}$

www.modaresanesharif.ac.ir

مدرسان شریف

فصل پنجم

« فشار ـ گرما ـ ترمودینامیک »

فشار ـ گرما ـ ترمودینامیک

فشار

ماده در حالت‌های گاز، مایع و جامد یافت می‌شود که به اختصار ویژگیهای هر یک عبارتند از:

الف ـ گاز: در این حالت مولکولها آزادانه به اطراف حرکت می‌کنند و فاصله مولکول‌ها زیاد است.

ب ـ مایع: فاصله مولکول‌ها در مایع در مقایسه با گاز بسیار کم است. در مایع مولکول‌ها به اطراف خود حرکت می‌کنند و به سهولت روی هم می‌لغزند.

ج ـ جامد: در جامد فاصله مولکول‌ها مانند فاصله آنها در مایع است. ولی مانند وضعیتی که در حالت‌های مایع و گاز دارند، نمی‌توانند آزادانه به اطراف حرکت کنند.

چگالی (ρ): به نسبت جرم ماده به حجمی که اشغال کرده است چگالی ماده گویند و از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\text{چگالی } \rho = \frac{\text{جرم } m}{\text{حجم } v}$$

واحد چگالی $\frac{kg}{m^3}$ است.

نکته ۱: هر $1\frac{g}{cm^3}$ برابر $1000\frac{kg}{m^3}$ است زیرا:

$$\begin{cases} 1g = 10^{-3}\,kg \\ 1cm^3 = 10^{-6}\,m^3 \end{cases} \Rightarrow 1\frac{g}{cm^3} = \frac{10^{-3}}{10^{-6}}\frac{kg}{m^3} = 10^3\frac{kg}{m^3}$$

مثال ۱: اگر چگالی سه حالت ماده یعنی جامد، مایع و گاز را بترتیب با ρ_S ، ρ_L و ρ_g نشان دهیم در حالت کلی کدام گزینه می‌تواند درست باشد؟

۱) $\rho_s = \rho_L = \rho_g$ ۲) $\rho_s = \rho_L > \rho_g$ ۳) $\rho_s > \rho_L > \rho_g$ ۴) $\rho_s < \rho_L < \rho_g$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

مثال ۲: وزن مکعبی به ابعاد $8cm \times 4cm \times 2cm$ و چگالی $10\frac{g}{cm^3}$ چند نیوتن است؟ $(g = 10\frac{N}{kg})$

۱) ۶۴ ۲) ۶/۴ ۳) ۰/۶۴ ۴) ۶۴۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» زیرا:

$$\rho = \frac{m}{v} \Rightarrow m = \rho v = 10 \times 64 = 640\,gr = 0/64kg$$

$$W = mg = 0/64 \times 10 = 6/4N$$

مثال ۳: گلوله A و B هر دو از یک جنس ساخته شده‌اند، اگر شعاع گلوله B دو برابر شعاع گلوله A باشد و جرم گلوله B برابر ۲۰ کیلوگرم باشد، جرم گلوله A چند کیلوگرم است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۵ ۴) ۱۵

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{m_A}{m_B}(\frac{r_B}{r_A})^3 \Rightarrow 1 = \frac{m_A}{20}(\frac{2r_A}{r_A})^3 \Rightarrow 1 = \frac{8m_A}{20} \Rightarrow \boxed{m_A = \frac{20}{8} = 2/5kg}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۴: با دو حجم نقره به چگالی ۱۰/۵ گرم بر سانتیمتر مکعب و یک حجم مس به چگالی ۹ گرم بر سانتیمتر مکعب آلیاژساخته‌ایم، چگالی حجم حاصل چند گرم بر سانتیمتر مکعب است؟

۱) ۹/۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۰/۲ ۴) ۱۰/۲۵

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

حجم کل $V = ۳v$

آلیاژ $\rho = \frac{M_{\text{کل}}}{V_{\text{کل}}} = \frac{m_{\text{نقره}} + m_{\text{مس}}}{V_{\text{کل}}} = \frac{\rho_{\text{نقره}} v_{\text{نقره}} + \rho_{\text{مس}} v_{\text{مس}}}{V_{\text{کل}}} = \frac{۲\rho_{\text{نقره}} v + \rho_{\text{مس}} v}{۳v} = \frac{۲\rho_{\text{نقره}} + \rho_{\text{مس}}}{۳} \Rightarrow$

آلیاژ $\rho = \frac{۲\times ۱۰/۵ + ۹}{۳} = \frac{۳۰}{۳} = ۱۰ \frac{g}{cm^۳}$

نیروی چسبندگی: یک نیروی رباشی بین مولکوهای یک ماده است.

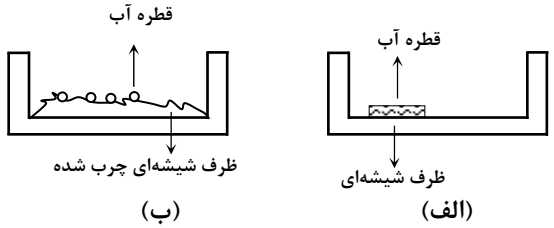
نکته ۲: وقتی مولکولهای یک مایع در اثر این نیروی رباشی به هم نزدیک می‌شوند در هم فرو نمی‌روند زیرا در فاصله‌های کوتاه یک نیروی رانشی بین آنها پدیدار می‌شود.

کشش سطحی: نیروی چسبندگی بین مولکولهای سطح مایع است و همین نیرو است که از فرورفتن اجسام سبک درون خود جلوگیری می‌کند. (مایع مورد نظر معمولاً آب است.)

نیروی چسبندگی سطحی: بین مولکولهای سطح یک مایع با مولکولهای سطح یک مایع یا جامد دیگری که با آن در تماس است وجود دارد.

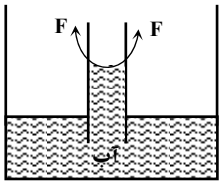
مثال ۵ : با توجه به دو شکل (الف) و (ب) داده شده می‌توان نتیجه گرفت که نیروی ... ... در شکل (الف) بیشتر از نیروی .... در مقایسه با شکل (ب) است.

۱) چسبندگی سطحی ـ چسبندگی
۲) چسبندگی ـ چسبندگی سطحی
۳) چسبندگی ـ چسبندگی
۴) چسبندگی سطحی ـ چسبندگی سطحی



☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

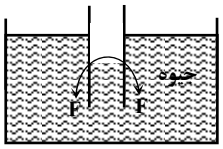
خاصیت مویینگی: به بالا یا پایین آمدن مایعاتی نظیر آب و جیوه درون لوله‌های مویین گویند.



نکته ۳: نیروی چسبندگی بین مولکولهای آب از نیروی چسبندگی سطحی بین مولکولهای آب و جداره داخلی لوله کمتر است در نتیجه آب از لوله مویین بالا آمده و سطح کاو به خود می‌گیرد.

نکته ۴: نیروی چسبندگی بین مولکولهای جیوه از نیروی چسبندگی سطحی بین مولکولهای جیوه و جداره داخلی لوله بیشتر است در نتیجه جیوه از لوله مویین پایین آمده و سطح کوژ به خود می‌گیرد.

توجه شود که مولکولهای جیوه که به سطح داخلی لوله مویین نزدیک‌اند به طرف مرکز لوله کشیده می‌شوند و در سطح جیوه برآمدگی بوجود می‌آید.



فشار (P): به نسبت نیروی عمودی وارد بر سطح به مقدار مساحت گویند. و از رابطهٔ روبرو به دست می‌آید:

فشار $P = \frac{F_{\text{نیرو}}}{A_{\text{مساحت}}}$

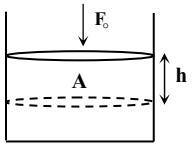
واحد فشار در SI، $\frac{N}{m^۲}$ است که پاسکال (Pa) نامیده می‌شود.

نکته ۵ : فشار در عمق h از یک ماده (جامد، مایع یا گاز) به چگالی ρ از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

فشار در عمق h ← $\boxed{P = \rho gh + P_۰}$ → فشار اولیه وارد بر سطح مایع

↓

چگالی



زیرا:

$$\rho = \frac{m}{v} \Rightarrow m = \rho v$$

$$P = \frac{F}{A} = \frac{F_۰ + mg}{A} = \frac{F_۰}{A} + \frac{\rho vg}{A} = P_۰ + \frac{\rho \cancel{A} hg}{\cancel{A}} \Rightarrow \boxed{P = P_۰ + \rho gh}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

نکته ۶ : (atm) اتمسفر نیز واحد فشار است و داریم: $1atm = 10^5\ pa$

نکته ۷ : فشار در نقاط هم عمق با هم برابر است.

مثال ۶ : مکعب مستطیلی به ابعاد ۲ ، ۴ و ۵ سانتیمتر را یکبار از کوچکترین سطح و بار دیگر از بزرگترین سطح روی سطح افقی قرار می‌دهیم، نسبت فشار حالت اول به فشار حالت دوم کدام است؟

۱) $\frac{5}{6}$ ۲) $\frac{6}{5}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{2}{5}$

پاسخ : گزینه «۳»

فشار حالت دوم $P_2 = \rho g h_2 = 2\rho g$

فشار حالت اول $P_1 = \rho g h_1 = 5\rho g \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{2}$

مثال ۷: اگر سطح مقطع را سه برابر و نیروی وارد به سطح را دو برابر کنیم، فشار چند برابر می‌شود؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ : گزینه «۲»

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{F_2}{F_1} \times \frac{A_1}{A_2} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

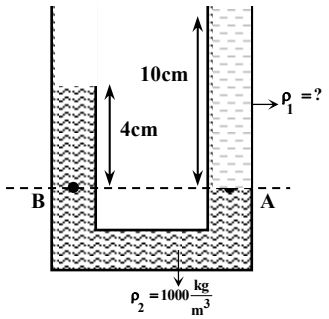
مثال ۸ : چگالی آب دریا ۱۰۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب است. فشار ناشی از آب در عمق، ۲۰ متری چند پاسکال است؟

۱) ۰/۰۲ ۲) ۵۰ ۳) 20×10^3 ۴) 196×10^3

پاسخ : گزینه «۴»

$$P = \rho g h = 1000 \times 9/8 \times 20 = 196 \times 10^3\ Pa$$

مثال ۹ : با توجه به شکل مقدار ρ_1 کدام است؟



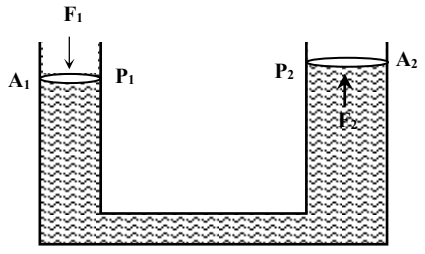
۱) $400\frac{kg}{m^3}$
۲) $4000\frac{kg}{m^3}$
۳) $2500\frac{kg}{m^3}$
۴) $500\frac{kg}{m^3}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_2 g h_2 + \cancel{P_0} = \rho_1 g h_1 + \cancel{P_0} \Rightarrow \rho_1 = \frac{\rho_2 h_2}{h_1} = \frac{4000}{10} = 400\frac{kg}{m^3}$$

اصل پاسکال: بر طبق این اصل فشار وارد بر مایع محصور بدون کاهش به تمام قسمت‌های مایع و دیواره‌های ظرف منتقل می‌شود.

یکی از کاربردهای مهم اصل پاسکال، بالابر هیدرولیکی است. برای این بالابر اگر F_1 و F_2 را بترتیب نیروهای وارده بر پیستون‌های کوچک و بزرگ و A_1 و A_2 را نیز بترتیب مساحت پیستون‌های کوچک و بزرگ بنامیم خواهیم داشت:



$$P_1 = P_2 \Rightarrow \boxed{\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}}$$

نکته ۸ : اگر شعاع مقطع‌ها داده شود خواهیم داشت: $\frac{F_2}{F_1} = (\frac{r_2}{r_1})^2$

مثال ۱۰: نیروی وارد بر پیستون کوچک یک بالابر هیدورلیک برابر ۱۰۰ نیوتن است اگر مساحت پیستون بزرگ بالابر ۲ برابر مساحت پیستون کوچک آن باشد چه وزنی از یک ماده را می‌توان از طریق آن بالا برد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

پاسخ : گزینه «۲»

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow \frac{F_2}{100} = 2 \Rightarrow \boxed{F_2 = 200N}$$

اصل ارشمیدس: نیروی شناوری وارد بر جسمی غوطه‌ور برابر مقدار وزن شاره‌ای است که به وسیلهٔ جسم جابجا می‌شود.

www.modaresanesharif.ac.ir

توجه : اگر بخشی از یک جسم یا تمام آن درون شارهٔ ایستایی در تعادل گرانشی غوطه‌ور شود، فشار شاره نیروی عمودی بالا سویی به جسم وارد می‌کند که به آن نیروی شناوری می‌گویند.

نکته ۹: وقتی ما در هوا قرار داریم از طرف هوا نیرویی به سوی بالا بر ما وارد می‌شود که بزرگی آن به اندازه وزن هوای هم حجم بدن ماست.

نکته۱۰: بزرگی نیروی بالا ران یا نیروی شناوری به وزن جسم بستگی ندارد، حجم و چگالی شاره، در تعیین بزرگی نیروی شناوری نقش دارند.

نکته ۱۱: نیروی شناوری با وزن شاره جابجا شده برابر است، حجم شاره جابجا شده با حجم قسمتی از جسم که در شاره قرار دارد برابر می‌باشد.

مثال ۱۱: تکه‌ای یخ در آب شناور است چند درصد از حجم یخ بالای سطح آب خواهد بود؟ (چگالی یخ $۹۱۷\frac{kg}{m^۳}$ است.)

۱) ۸/۳ ۲) ۹/۴ ۳) ۸/۷ ۴) ۹/۱

پاسخ : گزینه «۱» اگر جرم تکه یخ $۱۰۰۰kg$ باشد داریم:

$$\begin{cases} V=\frac{m}{\rho_{آب}}=\frac{۱۰۰۰}{۱۰۰۰}=۱m^۳ & \text{حجم آب جابجا شده} \\ V=\frac{m}{\rho_{یخ}}=\frac{۱۰۰۰}{۹۱۷}=۱/۰۹۱m^۳ & \text{حجم کل یخ} \end{cases} \Rightarrow \Delta V=۱/۰۹۱-۱ \Rightarrow \text{حجم یخ جابجا شده } \Delta V=۰/۰۹۱m^۳$$

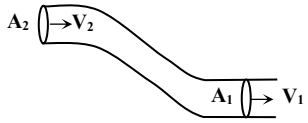
در نتیجه کسر $\frac{۰/۰۹۱m^۳}{۱/۰۹۱}$ از یخ بالای آب قرار می‌گیرد که معادل $\%۸/۳$ است.

نکته ۱۲: برای شاره غیرایستا مجموع چگالی انرژی جنبشی، چگالی انرژی پتانسیل و فشار در امتداد هر خط جریانی مقداری ثابت است که به معادله برنولی معروف است و رابطهٔ آن بصورت زیر است:

$$\frac{۱}{۲}\rho v^۲+\rho gz+p=(\text{مقدار ثابت})$$

نکته ۱۳: برای شاره تراکم‌ناپذیر غیرایستا در یک خط جریان داریم:

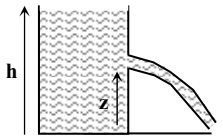
تندی شاره در المان دوم $\rightarrow A_۲V_۲=$ تندی شاره در المان اول $\rightarrow A_۱V_۱$



مثال ۱۲: مخزن آبی که تا ارتفاع h پر شده در ارتفاع z سوراخ کوچکی دارد. جریان آبی که از این سوراخ بیرون می‌زند در چه فاصله افقی از پای مخزن به زمین می‌خورد؟

۱) $\sqrt{(h-z)z}$ ۲) $۲\sqrt{(h-z)z}$ ۳) $\sqrt{(h+z)z}$ ۴) $۲\sqrt{(h+z)z}$

پاسخ : گزینه «۲» زیرا:



$$\frac{۱}{۲}\rho v^۲+\rho gz=\rho gh \Rightarrow \text{در ابتدای سوراخ } V=\sqrt{۲g(h-z)}$$

$$\left.\begin{matrix} z=\frac{۱}{۲}gt^۲ \\ x=vt \end{matrix}\right\} \Rightarrow z=\frac{۱}{۲}g(\frac{x^۲}{v^۲}) \Rightarrow x^۲=\frac{۲zv^۲}{g} \Rightarrow x^۲=\frac{۲z\left(۲g(h-z)\right)}{g} \Rightarrow \boxed{x=۲\sqrt{z(h-z)}}$$

گرما

دما: معیار سنجش میزان گرمی وسردی جسم مورد مطالعه است.

رابطهٔ بین مقیاس دمای کلوین و مقیاس دمای سلسیوس (سانتی‌گراد) بصورت $T_C=T-۲۷۳/۱۵^\circ c$ است. می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\Delta T_C=\Delta T$$

نکته ۱۴: مقیاس فارنهایت بصورت زیر با مقیاس سلسیوس رابطه دارد:

$$T_F=\frac{۹}{۵}T_C+۳۲$$

گرما (Q): میزان انرژی است که به علت اختلاف دما بین دو یا چند جسم که در تماس مستقیم با هم هستند مبادله می‌شود.

نکته ۱۵: برای محاسبه گرمایی که جسم می‌گیرد تا تغییر دمایی داشته باشد می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد:

$$\text{گرما} \leftarrow \boxed{Q=mC\Delta T} \rightarrow \text{تغییر دما}$$

ظرفیت گرمایی ویژه ← جرم

ظرفیت گرمایی ویژه (C): میزان انرژی گرمایی است که به واحد جرم جسم $(۱kg)$ می‌دهیم تا دمای آن $۱^\circ c$ تغییر کند.

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۱۳: واحد ظرفیت گرمایی ویژه کدام است؟

۱) $\frac{J}{kgk}$ ۲) $\frac{Jkg}{k}$ ۳) $\frac{J.k}{kg}$ ۴) $\frac{kgk}{J}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» زیرا: $C=\frac{Q}{m\Delta T}(\frac{J}{kgk})$

مثال ۱۴: ظرفیت گرمایی ویژه آب $۴۲۰۰\frac{J}{kgk}$ است یعنی چه؟

☑ **پاسخ :** یعنی برای تغییر دمای $1kg$ آب به اندازه $1k$ به ۴۲۰۰ ژول گرما نیاز است.

مثال ۱۵: چند کیلو ژول گرما لازم است تا بتوان $2kg$ آب $20^\circ k$ را به آب $30^\circ k$ تبدیل کرد؟ ($C_{آب}=۴۲۰۰\frac{J}{kgk}$)

۱) ۴۲ ۲) ۴۲۰ ۳) ۸۴ ۴) ۸۴۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$\Delta T=30-20=10k$$

$$Q=mc\Delta T=2\times ۴۲۰۰\times 10=۸۴۰۰۰j=۸۴kj$$

گرمای نهان ذوب (Q_F): میزان گرمایی است که به جسم مورد نظر می‌دهیم تا در نقطه ذوب خود از حالت جامد به حالت مایع تبدیل شود و از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

گرمای نهان ویژه ذوب $\rightarrow$ $\boxed{Q_F=mL_F}$ $\leftarrow$ گرمای نهان ذوب

$\downarrow$ جرم

گرمای نهان ویژه ذوب (L_F): میزان گرمایی است که به واحد جرم جسم جامد در نقطه ذوب آن می‌دهیم تا از حالت جامد به مایع تبدیل شود.

واحد گرمای نهان ویژه ذوب، $\frac{J}{kg}$ است.

مثال ۱۶: گرمای نهان ویژه ذوب برای آب $۳۳۴\frac{kj}{kg}$ است یعنی چه؟

☑ **پاسخ :** یعنی برای تبدیل $1kg$ یخ صفر درجه به آب صفر درجه سلسیوس به $۳۳۴kj$ گرما نیاز است.

مثال ۱۷: چند کیلوژول گرما لازم است تا بتوان $10kg$ یخ $-10^\circ c$ را به آب $20^\circ c$ تبدیل کرد؟

($C_{یخ}=۲۱۰۰\frac{j}{kg^\circ c}$ و $L_F=۳۳۴\frac{kj}{kg}$ و $C_{آب}=۴۲۰۰\frac{J}{kg^\circ c}$)

۱) ۲۱۰ ۲) ۴۳۹۰ ۳) ۸۴۰ ۴) ۳۳۴۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

یخ $-10^\circ c$ $\xrightarrow[Q_1]{\text{تغییر دما}}$ یخ صفر درجه $\xrightarrow[Q_F]{\text{تغییر حالت}}$ آب صفر درجه $\xrightarrow[Q_2]{\text{تغییر دما}}$ آب $20^\circ c$

$$Q=Q_1+Q_F+Q_2$$

$$Q_1=mc_{یخ}\Delta\theta=10\times ۲۱۰۰\times(0-(-10))=۲۱۰۰۰۰=۲۱۰kj$$

$$Q_F=mL_F=10\times ۳۳۴=۳۳۴۰kj$$

$$Q_2=mc_{آب}\Delta\theta=10\times ۴۲۰۰\times(20-0)=۸۴۰۰۰۰=۸۴۰kj$$

$$Q=۲۱۰+۳۳۴۰+۸۴۰=۴۳۹۰kj$$

گرمای نهان انجماد ($Q_{F'}$): میزان گرمایی است که از مایع در دمای انجماد آن گرفته می‌شود تا منجمد شود و از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{Q_{F'}=-mL_{F'}}$$

گرمای نهان ویژه انجماد ($L_{F'}$): میزان گرمایی است که از $1kg$ مایع مورد نظر در دمای انجماد آن گرفته می‌شود تا یخ ببندد.

گرمای نهان تبخیر (Q_V): میزان گرمایی است که مایع مورد نظر در نقطه جوش خود می‌گیرد تا بخار شود و از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$Q_V=mL_V$$

گرمای نهان ویژه تبخیر (L_V): میزان گرمایی است که در نقطه جوش به واحد جرم مایع می‌دهیم تا به بخار تبدیل شود.

واحد گرمای نهان ویژه تبخیر، $\frac{j}{kg}$ است.

www.modaresanesharif.ac.ir