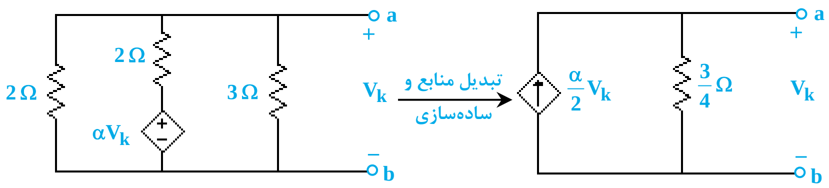
پاسخنامه آزمون (۱)

تعداد سؤالات : ۱۵ **سطح آزمون :** (C) (ساده)

۱ـ گزینه «۲» می‌دانیم اگر امپدانس دیده شده از دو سر a و b، R_{th} باشد، توان حداکثری که به بار مـی‌رسـد برابـر $P=\frac{E_{th}^{۲}}{۴R_{th}}$ یـا $P=\frac{۱}{۴}R_{th}.I_{SC}^{۲}$ خواهد بود. طبق این روابط برای این که توان بار متصل به دو سر a و b بدون محدودیت باشد، باید R_{th} برابر صفر یا بی‌نهایت باشد، یا به عبارت دیگر مدار دیده شده از دو سر a و b مانند یک منبع جریان یا منبع ولتاژ عمل کند. حال مقدار R_{th} را بدست می‌آوریم:

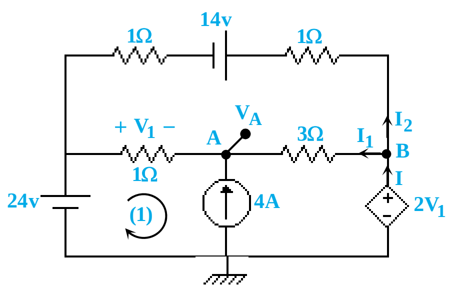


در این حالت، منبع وابسته مانند یک مقاومت عمل می‌کند:

$$\text{مقاومت منبع وابسته}=\frac{V_k}{-\frac{\alpha}{۲}V_k}=-\frac{۲}{\alpha}\Rightarrow R_{th}=-\frac{۲}{\alpha}\|\frac{۳}{۴}=\frac{-\frac{۲}{\alpha}\times\frac{۳}{۴}}{-\frac{۲}{\alpha}+\frac{۳}{۴}}=\frac{۶}{-۳\alpha+۸}$$

از رابطه بدست آمده برای R_{th} مشخص است که اگر $\alpha=\frac{۸}{۳}$ باشد، مقدار R_{th} برابر بی‌نهایت بوده و توان بار متصل بـه دو سـر a و b بـدون محـدودیت خواهد بود. لازم به ذکر است که در این حالت باید مقدار I_{SC} نیز مخالف صفر باشد.

۲ـ گزینه «۲» با نوشتن رابطه KVL در حلقه (۱) و سپس رابطه KCL در گره A داریم:



$$V_A=-V_۱+۲۴\ \Rightarrow\ \frac{V_۱}{۱}+۴=\frac{(-V_۱+۲۴)-۲V_۱}{۳}\Rightarrow\ V_۱=۲v$$

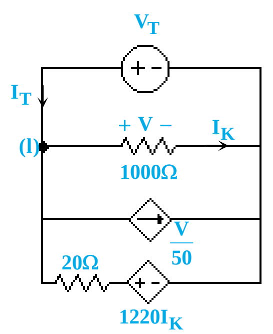
حال در گره B، KCL می‌زنیم:

$$I=I_۱+I_۲=\frac{۲V_۱-V_A}{۳}+\frac{۲V_۱-۱۴-۲۴}{۲}=\frac{۲\times۲-(-۲+۲۴)}{۳}+\frac{۲\times۲-۱۴-۲۴}{۲}$$

$$\Rightarrow\ I=-۶+(-۱۷)=-۲۳A$$

$$P=|۲V_۱|.|I|=|۲\times۲|.|-۲۳|=۹۲w$$

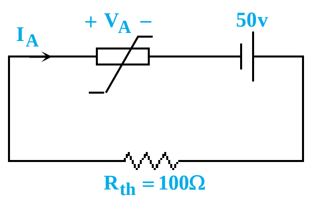
۳ـ گزینه «۱» ابتدا از دو سر المان غیر خطی مدار معادل تونن دیده می‌شود. در این حالت منبع ولتاژ مستقل را به عنـوان ولتـاژ تـونن و مقاومـت معـادل قسمت پایین مدار را به عنوان مقاومت تونن معرفی می‌کنیم. حال مقاومت معادل تونن را محاسبه می‌کنیم.



$$KCL(I):I_T=\frac{V_T}{۱۰۰۰}+\frac{V_T}{۵۰}+\frac{V_T-۱۲۲۰(\frac{V_T}{۱۰۰۰})}{۲۰}$$

$$\Rightarrow\ I_T=۰/۰۱V_T\ \Rightarrow\ R_{th}=\frac{V_T}{I_T}=۱۰۰\Omega$$

حال با جایگذاری مقاومت تونن در مدار داریم:



$$KVL:V_A-۵۰+۱۰۰I_A=۰\ \Rightarrow\ I_A^{۲}+۱۰۰I_A-۵۰=۰\ \Rightarrow\ I_A\simeq۰/۵A$$

$$P=V_A.I_A=I_A^{۲}.I_A=I_A^{۳}=۰/۱۲۵w$$

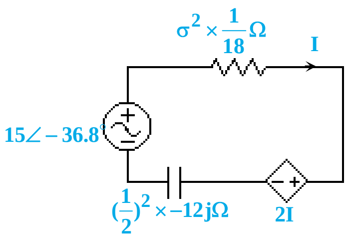
۴ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه منابع ورودی در مدار از جنس $\cos t$ هستند و شبکه N یک شبکه مقاومتی است، لذا $V_{th} = A\cos t$ در نظر گرفته می‌شود. در زمان باز بودن کلید جریان، R_L صفر است و V_K همان V_{th} خواهد بود.

$$V_K = V_{th}(t=\frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۴} \Rightarrow A\cos t\Big|_{t=\frac{\pi}{۳}} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow A\cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{A}{۲} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow A = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow V_{th} = \frac{۱}{۲}\cos t \Rightarrow V_{th}(rms) = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

$$P_{R_L}(max) = \frac{V_{th}(rms)^۲}{۴R_{th}} \Rightarrow ۱۰ = \frac{(\frac{۱}{۲\sqrt{۲}})^۲}{۴R_{th}} \Rightarrow R_{th} = R_o = \frac{۱}{۳۲۰}\Omega$$

۵ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه امپدانس معادل ترانسفورمر سمت راست برابر صفر است، به جای آن اتصال کوتاه قرار می‌دهیم. سپس منابع ولتاژ و المان‌های موجود در ثانویه ترانس‌ها را به سمت اولیه آنها منتقل می‌کنیم.



$$KVL: \quad (\frac{۱}{۱۸}\times ۶^۲)I + ۲I - ۱۲j(\frac{۱}{۲})^۲.I = ۱۵\angle -۳۶/۸^\circ$$

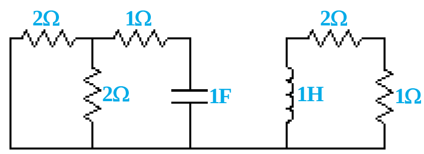
$$\Rightarrow ۲I + ۲I - ۳jI = ۱۵\angle -۳۶/۸^\circ$$

$$\Rightarrow I = \frac{۱۵\angle -۳۶/۸^\circ}{۴ - ۳j} \Rightarrow |I| = \frac{۱۵}{۵} = ۳A$$

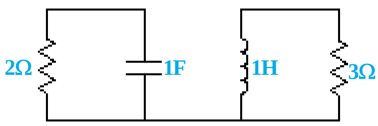
با توجه به محاسبه I مقدار جریان مقاومت $\frac{۱}{۱۸}\Omega$ با نسبت تبدیل ترانس محاسبه می‌شود:

$$|I_{\frac{۱}{۱۸}\Omega}| = \frac{۶}{۱}\times|I| = ۱۸A \Rightarrow P_{\frac{۱}{۱۸}\Omega} = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۱۸}\times|I_{\frac{۱}{۱۸}\Omega}|^۲ = ۹W$$

۶ـ گزینه «۴» برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی منابع مستقل مدار را غیر فعال می‌کنیم. با غیر فعال شدن منابع مستقل مقادیر $V_۱$ و V_L صفر شده و منابع وابسته متناظر آنها هم صفر می‌شود. حال داریم:



$\Rightarrow$



$$\Rightarrow \begin{cases} S_۱ = \frac{-۱}{\tau_۱} = \frac{-۱}{۲\times۱} = -\frac{۱}{۲} \\ S_۲ = \frac{-۱}{\tau_۲} = \frac{-۱}{\frac{۱}{۳}} = -۳ \end{cases}$$

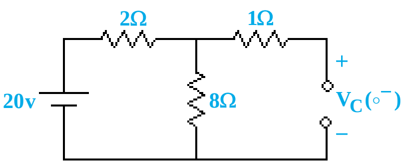
۷ـ گزینه «۳» ابتدا ماتریس Q را به صورت مرتب $[I \vdots E]$ تبدیل می‌کنیم.

$$Q = \left[\begin{array}{cccc:cccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ & -۱ \end{array}\right] \Rightarrow E = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

حال با توجه به رابطه‌ی $F = -E^T$، حاصل جمع درایه‌های ماتریس F منهای حاصل جمع درایه‌های ماتریس E خواهد بود:

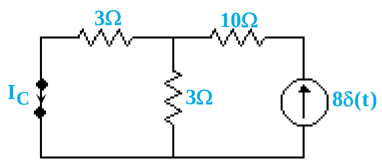
حاصل جمع درایه‌های E $= -۱ + ۱ + ۱ - ۱ + ۱ + ۱ + ۱ - ۱ - ۱ = ۱ \Rightarrow$ حاصل جمع درایه‌های F $= -۱$

۸ـ گزینه «۱» برای محاسبه ولتاژ خازن در $t = ۰^+$ ابتدا مدار را در $t = ۰^-$ تحلیل می‌کنیم.



$$V_C(۰^-) = \frac{۲۰\times۸}{۲+۸} = ۱۶v$$

حال با توجه به وجود منابع شامل توابع ضربه خازن را اتصال کوتاه می‌کنیم و منابع غیر ضربه‌ای را صفر می‌کنیم.



$$I_C(t)=\frac{1}{2}\times 8\delta(t)=4\delta(t)$$

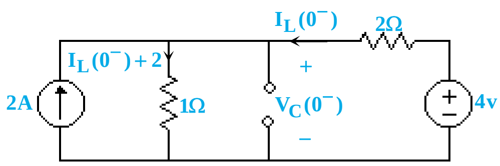
$$V_C(0^+)=V_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} I_C(t)dt$$

$$V_C(0^+)=16+\frac{1}{0/5}\int_{0^-}^{0^+} 4\delta(t)=16+8=24v$$

۹ـ گزینه «۱» با توجه به سری شدن دو شبکه ژیراتور و امپدانس z ماتریس‌های امپدانس آنها با هم جمع می‌شود. حال داریم:

$$\Rightarrow\ Z_T=[Z_1]+[Z_2]=\begin{bmatrix}0 & \alpha\\ -\alpha & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}Z & Z\\ Z & Z\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ Z_T=\begin{bmatrix}Z & \alpha+Z\\ Z-\alpha & Z\end{bmatrix}$$

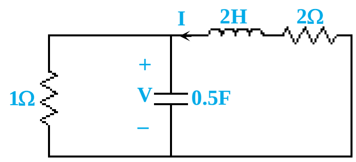
۱۰ـ گزینه «۱» ابتدا مدار را در $t=0^-$ تحلیل می‌کنیم:



$$KVL: 1\times(I_L(0^-)+2)+2I_L(0^-)-4=0\ \Rightarrow\ I_L(0^-)=\frac{2}{3}A$$

$$\Rightarrow\ V_C(0^-)=1\times(I_L(0^-)+2)=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}v$$

حال در $t>0$ داریم:



$$KVL: 2I+\frac{2dI}{dt}+V=0\quad (1)$$

$$KCL: I=\frac{1}{2}\frac{dV}{dt}+V\quad (2)$$

$$(1),(2)\ \Rightarrow\ \frac{d^2V}{dt^2}+3\frac{dV}{dt}+3V=0\ \Rightarrow\ S^2+3S+3=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}S_1=-1/5+0/86j\\ S_2=-1/5-0/86j\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ V(t)=[A\cos(0/86t)+B\sin(0/86t)]e^{-1/5t}$$

$$V(0^+)=\frac{8}{3}=[A\cos 0+B\sin 0]e^0\ \Rightarrow\ \frac{8}{3}=A$$

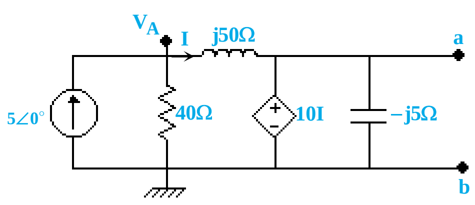
$$\frac{dV}{dt}=-1/5[A\cos(0/86t)+B\sin(0/86t)]e^{-1/5t}+0/86[-A\sin(0/86t)+B\cos(0/86t)]e^{-1/5t}$$

$$(2)\ \Rightarrow\ I(0^+)=\frac{1}{2}\frac{dV(0^+)}{dt}+V(0^+)\ \Rightarrow\ \frac{2}{3}=\frac{1}{2}\frac{dV(0^+)}{dt}+\frac{8}{3}\ \Rightarrow\ \frac{dV(0^+)}{dt}=-4$$

$$\Rightarrow\ -4=-1/5[A\cos 0+B\sin 0]e^0+0/86[-A\sin 0+B\cos 0]e^0\ \Rightarrow\ -4=-1/5\times\frac{8}{3}+0/86B\ \Rightarrow\ B=0$$

$$\Rightarrow\ V(t)=\frac{8}{3}e^{-1/5t}\cos(0/86t)$$

۱۱ـ گزینه «۱» برای محاسبه ولتاژ تونن از دو سر b و a مقدار ولتاژ مدار باز از دو سر b و a را محاسبه می‌کنیم. با جایگذاری مقادیر X_C و X_L داریم:



$$KCL(A):\ \frac{V_A}{۴۰}+\frac{V_A-۱۰I}{j۵۰}=۵\angle ۰^\circ\quad (۱)\ ,\ I=\frac{V_A-۱۰I}{j۵۰}\ \Rightarrow\ Ij۵۰=V_A-۱۰I\ \Rightarrow\ I(j۵۰+۱۰)=V_A\quad (۲)$$

$$(۱),(۲)\ \Rightarrow\ \frac{I(j۵۰+۱۰)}{۴۰}+\frac{I(j۵۰+۱۰)-۱۰I}{j۵۰}=۵\angle ۰^\circ \Rightarrow ۱/۲۵(j+۱)I=۵\angle ۰^\circ \Rightarrow I=\frac{۵\angle ۰^\circ}{۱/۲۵(j+۱)}=۲\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-j\frac{\sqrt{۲}}{۲})$$

$$\Rightarrow\ V_{th}=۱۰I=۲۰\sqrt{۲}\sin(\omega t-۴۵^\circ)$$

۱۲ـ گزینه «۱» برای بدست آوردن $Z_{۱۱}$ می‌توان از معادله مشخصه حاصل از دو آزمایش صورت گرفته استفاده کرد. با توجه به این که $Z_{۱۱}$ بصورت $Z_{۱۱}=\frac{V_۱}{I_۱}|_{I_۲=۰}$ تعریف می‌شود، برای محاسبه صورت کسر $Z_{۱۱}$ باید معادله مشخصه آزمایشی در نظر گرفته شود که در آن $V_۱=۰$ و $I_۲=۰$ است. در آزمایش دوم $V_۱$ برابر صفر بوده و $I_۲$ نیز اگر منبع ورودی مدار غیرفعال شود، صفر خواهد شد. حال اگر $V_۲(S)$ را محاسبه کنیم، با توجه به این که ورودی مدار $\delta(t)$ بوده و هیچ فرکانسی به جز فرکانس‌های طبیعی مدار در این حالت تحریک نخواهد شد، پس مخرج $V_۲(S)$ همان چندجمله‌ای مشخصه مدار می‌باشد:

$$V_۲(S)=\frac{\alpha_۱S+\beta_۱}{(S+۲)^۲+۴}=\frac{\alpha_۱S+\beta_۱}{S^۲+۴S+۸}\Rightarrow S^۲+۴S+۸=۰\ \text{معادله مشخصه}$$

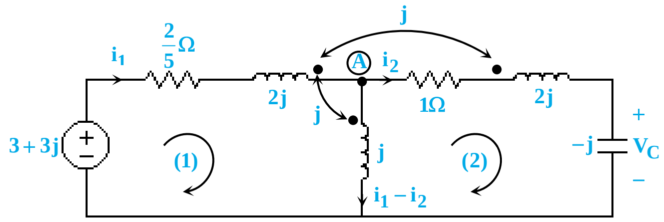
از طرف دیگر برای محاسبه مخرج $Z_{۱۱}$ باید معادله مشخصه آزمایشی در نظر گرفته شود که در آن $I_۱=۰$ و $I_۲=۰$ است. در آزمایش اول $I_۲=۰$ بوده و $I_۱$ نیز اگر منابع ورودی مدار را غیرفعال کنیم برابر صفر خواهد شد. حال همچون حالت قبل داریم:

$$V_۲(S)=\frac{\alpha_۲S+\beta_۲}{(S+۱)^۲+۱}=\frac{\alpha_۲S+\beta_۲}{S^۲+۲S+۲}\Rightarrow S^۲+۲S+۲=۰\ \text{معادله مشخصه}$$

اکنون با داشتن صورت و مخرج $Z_{۱۱}$ می‌توان نوشت:

$$Z_{۱۱}=k\frac{S^۲+۴S+۸}{S^۲+۲S+۲}$$

۱۳ـ گزینه «۳» ابتدا مدار را در حالت دائمی سینوسی رسم می‌کنیم:



با در نظر گرفتن رابطه KCL برای گره A، جریان در شاخه مشترک دو حلقه مدار، در جهت نشان داده شده برابر $i_۱-i_۲$ می‌شود. حال کافی است که رابطه KVL را برای دو حلقه مدار بنویسیم:

$$\begin{cases} KVL_۱: ۳+۳j=\frac{۲}{۵}i_۱+۲ji_۱-j(i_۱-i_۲)-ji_۲+j(i_۱-i_۲)-ji_۱ \\ KVL_۲: j(i_۱-i_۲)-ji_۱=۱\times i_۲+۲ji_۲-ji_۱-ji_۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳+۳j=(\frac{۲}{۵}+j)i_۱-ji_۲ \\ -۲ji_۲-i_۲=-ji_۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳+۳j=(\frac{۲}{۵}+j)i_۱-ji_۲ & (۱) \\ i_۱=(۲-j)i_۲ & (۲) \end{cases} \xrightarrow{(۱)\text{ و }(۲)} ۳+۳j=(\frac{۲}{۵}+j)\times(۲-j)i_۲-ji_۲$$

$$\Rightarrow ۳+۳j=[\frac{۴}{۵}-\frac{۲}{۵}j+۲j+۱-j]i_۲ \Rightarrow ۳+۳j=(\frac{۹}{۵}+\frac{۳}{۵}j)i_۲$$

$$\Rightarrow i_۲=\frac{۳+۳j}{\frac{۹+۳j}{۵}}=\frac{۵\times(۱+j)}{۳+j}=\frac{۵\times(۱+j)(۳-j)}{(۳+j)(۳-j)}=\frac{۵\times(۴+۲j)}{۱۰}\Rightarrow i_۲=۲+j$$

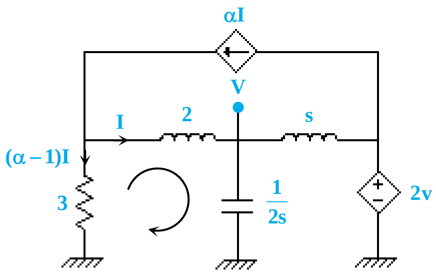
با توجه به شکل ۱، مشخص است که:

$$V_C=-ji_۲$$

$$\Rightarrow V_C=-ji_۲=-j\times(۲+j)=۱-۲j \Rightarrow V_C=۱-۲j$$

در حوزه زمان داریم:

$$V_C(t)=\cos t+۲\sin t$$



۱۴ـ گزینه «۳» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:

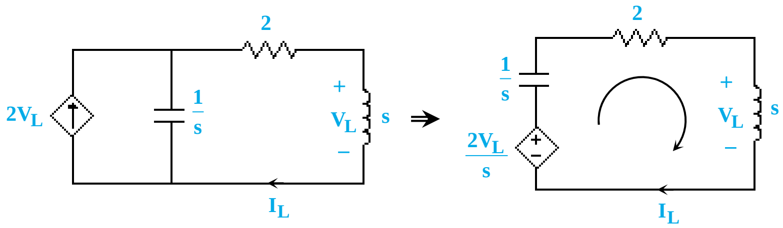
حال با اعمال kcl در گره با پتانسیل V و همچنین اعمال kvl در حلقه‌ی مشخص شده داریم:

$$KCL: I+\frac{۲v-v}{s}=۲sv \rightarrow (۲s^{۲}-۱)v=sI \quad (۱)$$

$$KVL: -۳\times(\alpha-۱)I+۲I+v=۰ \rightarrow v=(۳\alpha-۵)I \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \rightarrow ((۲s^{۲}-۱)(۳\alpha-۵)-s)I=۰ \rightarrow \alpha=\frac{۵}{۳} \rightarrow -sI=۰ \rightarrow$$ مرتبه یک

۱۵ـ گزینه «۳» ابتدا منبع جریان مستقل را بی‌اثر کرده و سپس مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



با توجه به مدار مشاهده می‌شود:

$$V_L=sI_L$$

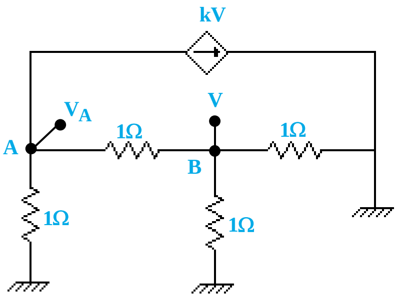
$$KVL: -\frac{۲V_L}{s}+\frac{۱}{s}I_L+۲I_L+sI_L=۰ \Rightarrow -۲I_L+\frac{۱}{s}I_L+۲I_L+sI_L=۰$$

$$\Rightarrow \frac{s^{۲}+۱}{s}I_L=۰ \Rightarrow (s^{۲}+۱)I_L=۰ \rightarrow \alpha=۰ \rightarrow$$ حالت بی‌اتلاف

پاسخنامه آزمون (۲)

تعداد سؤالات : ۱۵ **سطح آزمون :** (C) (ساده)

۱ـ گزینه «۱» برای آن که مقدار V منحصر به فرد باشد، باید بتوان با تحلیل مدار به معادله‌ای به شکل $aV = b$ رسید که در آن $a \neq ۰$ است. در این معادله a مستقل از منابع تغذیه مستقل مدار می‌باشد، پس می‌توان از همان اول منابع تغذیه مستقل را غیرفعال کرد. حال مطابق با شکل زیر داریم:



$$KCL(A): kV + \frac{V_A}{۱} + \frac{V_A - V}{۱} = ۰ \Rightarrow V_A = \frac{(۱-k)V}{۲}$$

$$KCL(B): \frac{V - V_A}{۱} + \frac{V}{۱} + \frac{V}{۱} = ۰ \Rightarrow [۳ - \frac{(۱-k)}{۲}]V = ۰ \Rightarrow \frac{۵+k}{۲}.V = ۰$$

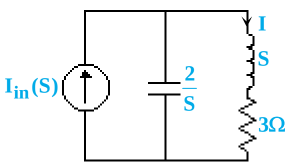
از رابطه نهایی مشخص است که اگر k برابر ۵- باشد، ضریب V صفر شده و V مقدار منحصر بفردی نخواهد داشت.

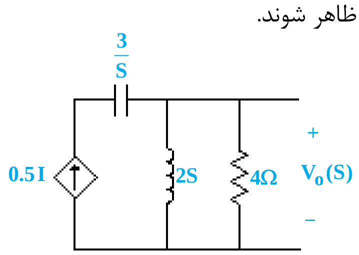
۲ـ گزینه «۲» با اعمال قضیه تلگان به مدار و در نظر گرفتن جهت قراردادی جریان‌ها به سمت خارج شبکه داریم:

$$V_۱(-\hat{I}_۱) + V_۲(-\hat{I}_۲) = \hat{V}_۱(-I_۱) + \hat{V}_۲(-I_۲) \Rightarrow e^{-۳۰j} \times (-۵e^{j۷۵}) + ۰ \times (-\hat{I}_۲) = \hat{V}_۱ \times (-۲e^{-۴۵j}) + ۶e^{-۱۰j} \times (-۷e^{۵۵j})$$

$$\Rightarrow -۵e^{۴۵j} = -\hat{V}_۱ \times ۲e^{-۴۵j} - ۴۲e^{۴۵j} \Rightarrow -۳۷e^{۴۵j} = ۲\hat{V}_۱ e^{-۴۵j} \Rightarrow \hat{V}_۱ = \frac{-۳۷e^{۴۵j}}{۲e^{-۴۵j}} = -۱۸/۵e^{۹۰j}$$

۳ـ گزینه «۲» برای حذف اثر موج ورودی باید صفر تابع انتقال با قطب موج ورودی ساده شود تا اثر موج ورودی در خروجی ظاهر نشود و فقط فرکانس‌های طبیعی در خروجی ظاهر شوند.





$$I = I_{in}(S) \times \frac{\frac{۲}{S}}{\frac{۲}{S} + S + ۳} \qquad V_o(S) = ۰/۵I \times (۴ \| ۲S) \Rightarrow V_o(S) = I_{in}(S) \times \frac{\frac{۲}{S}}{\frac{۲}{S} + S + ۳} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۴ \times ۲S}{۴ + ۲S}$$

$$\Rightarrow V_o(S) = I_{in}(S) \frac{۴S}{(S+۱)(S+۲)^۲}$$

اگر تابع I_{in} برابر $u(t)$ باشد آنگاه $I_{in}(S) = \frac{۱}{S}$ خواهد بود و صفر تابع انتقال با قطب موج ورودی حذف می‌شود.

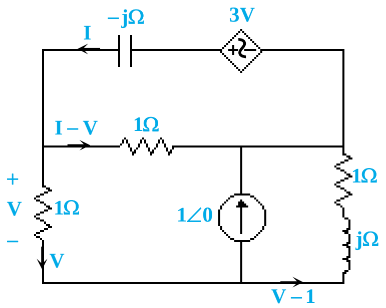
۴ـ گزینه «۳» ابتدا با استفاده از لاپلاس پاسخ ضربه، تابع شبکه را محاسبه می‌کنیم.

$$H(S) = L(h(t)) = \frac{۴}{۳(S+۲)} - \frac{۱}{۳(S + \frac{۱}{۲})} \qquad H(j\omega)\big|_{\omega=۱} = \frac{۴}{۳(j+۲)} - \frac{۱}{۳(j + \frac{۱}{۲})} = ۰/۴$$

با توجه به اینکه پاسخ حالت دائمی سینوسی خواسته شده است از قسمت سینوسی موج ورودی استفاده می‌شود.

$$X_o(j\omega) = H(j\omega).X_{in}(j\omega) \Rightarrow X_o(j) = H(j) \times X_{in}(j) \Rightarrow X_o(j) = ۰/۴ \times ۴ = ۱/۶ \Rightarrow X_o(t) = ۱/۶ \sin t$$

۵ـ گزینه «۴» با ترسیم مجدد مدار و اعمال KVL در حلقه‌های مدار داریم:

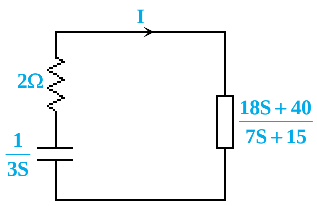


$$\begin{cases} KVL(\text{حلقه بالا}): -3V - jI + (I-V) = 0 \\ KVL(\text{حلقه پایین}): -V + I - V - (1+j)(V-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I(-j+1) + V(-4) = 0 \\ I + (-3-j)V = -1-j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = -2+j2 \\ V = j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad V = \sin(t+90) = \cos t$$

۶ـ گزینه «۲» برای امپدانس ورودی از دید پایانه‌های سمت چپ مدار داریم:



$$Z_{in} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D} \Rightarrow Z_{in} = \frac{18 \times S + 40}{7 \times S + 15} \Rightarrow Z_{in} = \frac{18S+40}{7S+15}$$

$$KVL: I\left(2 + \frac{1}{3S} + \frac{18S+40}{7S+15}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{96S^2 + 217S + 15}{(3S)(7S+15)} I = 0 \Rightarrow \underbrace{96S^2 + 217S + 15 = 0}_{\text{معادله مشخصه}} \Rightarrow \begin{cases} S_1 = -0/07 \\ S_2 = -2/18 \end{cases}$$

۷ـ گزینه «۴»

$$S(t) = f(\infty) - f(\infty)e^{-\frac{t}{\tau}} \;,\; h(t) = \frac{1}{\tau} f(\infty) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{و} \quad K(t) = f(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

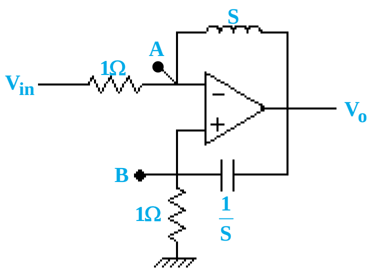
$$S(t) + h(t) + K(t) = f(\infty) - f(\infty)e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau} f(\infty) e^{-\frac{t}{\tau}} + f(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 2 - 3e^{-t}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\frac{t}{\tau}}\left[-f(\infty) + f(0^+) + \frac{f(\infty)}{\tau}\right] + f(\infty) = 2 - 3e^{-t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(\infty) = 2 \\ \tau = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[-2 + f(0^+) + \frac{2}{1}\right] = -3 \Rightarrow f(0^+) = -3$$

$$\Rightarrow \quad \text{پاسخ کامل} = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \text{پاسخ کامل} = 2 + [-3-2]e^{-t} = 2 - 5e^{-t}$$

۸ـ گزینه «۳» با اعمال KCL در گره‌های A و B داریم:

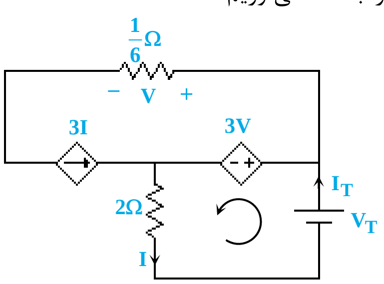


$$KCL(A): \frac{V_A - V_{in}}{1} + \frac{V_A - V_o}{S} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{SV_{in} + V_o}{1+S}$$

$$KCL(B): \frac{V_B}{1} + \frac{V_B - V_o}{\frac{1}{S}} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{SV_o}{1+S}$$

$$V_A = V_B \Rightarrow \frac{SV_{in} + V_o}{1+S} = \frac{SV_o}{1+S} \Rightarrow \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{S}{S-1} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{j\omega}{j\omega - 1}$$

۹ـ گزینه «۱» ابتدا ثابت زمانی مدار را محاسبه می‌کنیم. بدین منظور مقاومت تونن دیده شده از دو سر سلف را بدست می‌آوریم:



$$I = I_T \quad , \quad V = \frac{1}{6} \times 3I = \frac{I}{2} = \frac{I_T}{2}$$

$$KVL: V_T = 3V + 2I = 3 \times \frac{I_T}{2} + 2I_T = 3/5 I_T \Rightarrow R_{th} = 3/5\Omega$$

حال ثابت زمانی مدار را محاسبه می‌کنیم:

$$\tau = \frac{L}{R_{th}} = \frac{1}{3/5} = \frac{2}{7}\sec$$

از طرفی می‌دانیم که جریان سلف در یک مدار مرتبه اول در زمان $t = \tau Ln(n)$ به $\frac{1}{n}$ مقدار اولیه‌اش می‌رسد. پس در این مدار در زمـان $t = \frac{2}{7}Ln(3)$ جریان سلف یک سوم مقدار اولیه‌اش خواهد شد.

۱۰ــ گزینه «۱» با بازنویسی روابط موجود در معادلات داریم:

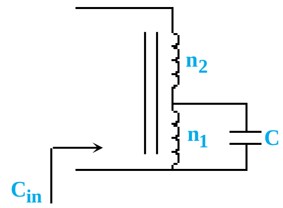
$$V_3 = V_S \quad \text{و} \quad I_2 = 3\frac{dV_2}{dt} \quad \text{و} \quad I_2 = 3V_2 - I_1 + 2V_S \quad \Rightarrow \quad \frac{dV_2}{dt} = V_2 - \frac{1}{3}I_1 + \frac{2}{3}V_S \qquad (1)$$

$$V_1 = 2\frac{dI_1}{dt} \;,\; V_1 = V_2 - 2I_1 + 3V_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{2dI_1}{dt} = V_2 - 2I_1 + 3V_S \quad \Rightarrow \quad \frac{dI_1}{dt} = \frac{1}{2}V_2 - I_1 + \frac{3}{2}V_S \qquad (2)$$

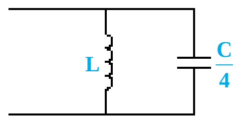
$$(1),(2) \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{dV_2}{dt} \\ \frac{dI_1}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} V_S$$

۱۱ــ گزینه «۲» با توجه به عدم وجود صفر در مبدأ، تابع شبکه در $\omega = 0$ مقدار صفر ندارد و همچنین به علت وجود یک زوج قطب مزدوج، تابع شبکه باید دارای یک ماکزیمم محلی باشد. با توجه به حضور یک زوج صفر روی محور $j\omega$ تابع شبکه دارای یک min محلی بر روی محور افقی می‌باشد و با توجه به اینکه تعداد صفرها از تعداد قطب‌ها کمتر است، در $\omega = \infty$ تابع شبکه دارای اندازه صفر است.

۱۲ــ گزینه «۱» خازن دیده شده در ورودی اتوترانس به صورت زیر می‌باشد.



$$C_{in} = \left(\frac{n_1}{n_1 + n_2}\right)^2 .C = \left(\frac{n}{2n}\right)^2 .C = \frac{C}{4} \quad \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{L.\frac{C}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

۱۳ــ گزینه «۲» به بررسی تک تک عبارات می‌پردازیم. ابتدا در مورد گراف اول داریم:

هر سه شاخه با هم موازی هستند. پس ولتاژ آن‌ها با هم برابر است: $V_1 = V_2 = V_3$

جمع جریان‌های خروجی از گره وسط گراف برابر صفر است: $I_1 + I_2 + I_3 = 0$

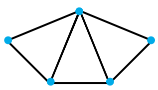
بنابراین ولتاژها روی خط هستند و جریان‌ها روی صفحه‌ای قرار دارند.

بررسی صحت عبارت اول: اگر حاصل‌ضرب ماتریس‌های $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$ و $I^T = [I_1\ I_2\ I_3]$ برابر صفر باشد، می‌توان گفت خط ولتاژها بر صفحه جریان‌ها عمود است.

$$VI^T = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} [I_1\ I_2\ I_3] = V_1I_1 + V_2I_2 + V_3I_3 = V_1(I_1 + I_2 + I_3) = 0$$

پس خط ولتاژها بر صفحه جریان‌ها عمود است و نتیجه می‌شود که عبارت اول صحیح است.

در مورد عبارت دوم، از آن‌جا که $V_1 = V_2 = V_3$ است، این مجموعه یک خط را شامل می‌شود که زاویه‌ی آن خط با محورهای V_1 و V_2 و V_3، 45° اسـت. پس این عبارت نیز صحیح است.



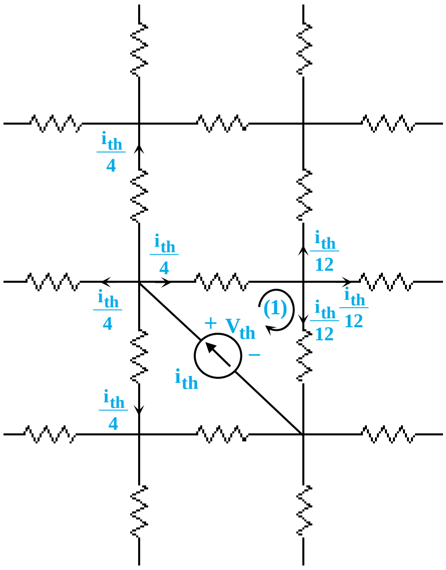
در مورد عبارت سوم، فرض کنیم گراف مورد نظر به صورت مقابل است.

در این گراف اگر در گره بالایی جریان ۳ شاخه را داشته باشیم، جریان شاخه چهارم براساس قانون KCL به‌دست می‌آید. پس فضای جریان‌ها دارای ابعادی کمتر از ۵ بُعد است. پس این عبارت غلط است.

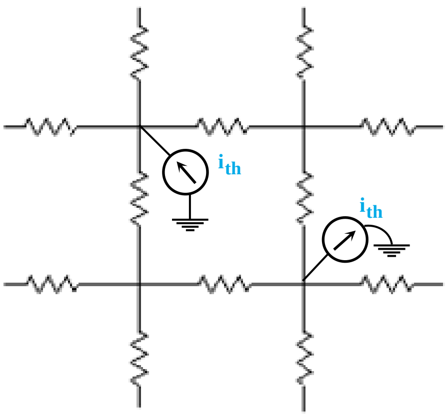
در مورد عبارت چهارم، می‌دانیم تعداد ولتاژهای مستقل از هم، برابر با تعداد معادلات KCL مستقل از هم و تعداد جریان‌های مستقل از هم نیز برابر تعـداد معادلات KVL مستقل از هم می‌باشد، پس این گزینه نیز غلط است.

در مورد عبارت پنجم: عمود بودن زیرفضای ولتاژ و جریان نتیجه قوانین KVL و KCL است که با این قوانین رابطه بین ولتاژها و جریـان‌هـا را یافتـه و بـا ضرب VI^T به عمود بودن یا عمود نبودن پی می‌بریم. پس این عبارت نیز صحیح است. پس ۳ عبارت صحیح و ۲ عبارت غلط است.

۱۴ـ گزینه «۴» برای این‌که ضریب کیفیت مدار مورد نظر را پیدا کنیم، باید از دو سر a و b مقاومت دیده‌شده را پیدا کنیم. به این منظور، منبع جریانی بین پایانه‌های a و b می‌بندیم.



می‌توان با استفاده از قضیه‌ی پرش، منبع جریان را به صورت مقابل در نظر گرفت. سپس با توجه به تقارن می‌توان ولتاژ ab را برای یکی از منابع جریان به دست آورد و با استفاده از قضیه جمع آثار ولتاژ نهایی را محاسبه نمود.



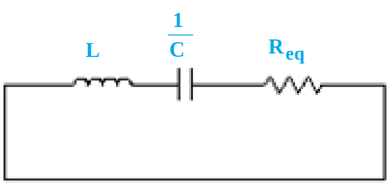
$$V_{th}\ (\text{برای یک منبع}) = \frac{i_{th}}{۴}R + \frac{i_{th}}{۱۲}R = \frac{R}{۳}i_{th}$$

$$\Rightarrow V_{th} = ۲\times V_{th}\ (\text{برای یک منبع}) = \frac{۲R}{۳}i_{th}$$

$$R_{eq} = ۲\times\frac{R}{۳}$$

$$R = ۲\Omega \Rightarrow R_{eq} = \frac{۴}{۳}\Omega$$

حال داریم:



$$\frac{d^۲I_L}{dt^۲} + \frac{R_{eq}}{L}\frac{dI_L}{dt} + \frac{۱}{LC}I_L = ۰ \Rightarrow S^۲ + \frac{R_{eq}}{L}S + \frac{۱}{LC} = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲\varepsilon\omega_n = \dfrac{R_{eq}}{L} \\ \omega_n^۲ = \dfrac{۱}{LC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{۱}{۲}\times R_{eq}\times\sqrt{\dfrac{C}{L}} \\ \omega_n = \dfrac{۱}{\sqrt{LC}} \end{cases}$$

$$Q = \frac{۱}{۲\varepsilon} \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{L}}{R_{eq}\sqrt{C}} \Rightarrow Q = ۱/۵ = \frac{\sqrt{L}}{R_{eq}\times\sqrt{C}} \Rightarrow ۱/۵ = \frac{\sqrt{L}}{\frac{۴}{۳}\times\sqrt{C}} \Rightarrow \sqrt{\frac{L}{C}} = ۲ \Rightarrow \frac{L}{C} = ۴ \Rightarrow L = ۴C$$

۱۵ـ گزینه «۲» برای حل این سؤال ابتدا باید سلف معادل را از دو سر خازن محاسبه نمود.

در حل دو سلف سری با اندوکتانس القایی متقابل، سلف معادل برابر با $L_۱ + L_۲ \pm ۲M$ است. علامت + برای زمانی است که در هر دو سلف جریان به سر نقطه‌دار وارد یا خارج شود و علامت (−) برای زمانی است که جریان در یک سلف به سر نقطه‌دار وارد و در سلف دیگر از سر نقطه‌دار خارج شود.

$$L_t = ۲+۳+۴+۵+۶+۷-۲-۲+۲+۲-۲+۲ = ۲۷H$$
● □ △ * ■ ○

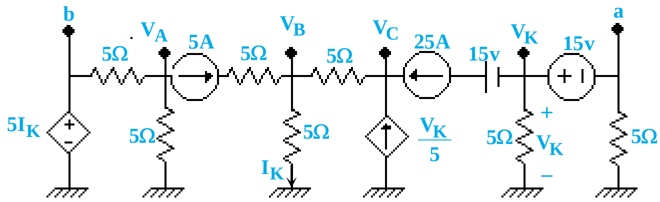
برای محاسبه‌ی فرکانس تشدید، امپدانس خازن و سلف باید برابر شود.

$$L\omega = \frac{۱}{C\omega} \Rightarrow \omega^۲ = \frac{۱}{LC} = \frac{۱}{۲۷\times\frac{۱}{۸۱}} = ۳ \Rightarrow \omega = \sqrt{۳}$$

پاسخنامه آزمون (۳)

تعداد سؤالات : ۱۵ | **سطح آزمون : (B)** (متوسط)

۱ـ گزینه «۳» با اعمال KCL در گره‌های بالای مدار داریم:



$$\frac{V_K}{۵}+\frac{V_K-۱۵}{۵}+۲۵=۰ \Rightarrow V_K+V_K-۱۵+۲۵\times ۵=۰ \Rightarrow V_K=-۵۵v \quad (۱)$$

$$\frac{V_A}{۵}+\frac{V_A-۵I_K}{۵}+۵=۰ \Rightarrow ۲V_A-۵I_K+۲۵=۰\ ,\ I_K=\frac{V_B}{۵} \Rightarrow ۲V_A-۵(\frac{V_B}{۵})+۲۵=۰ \Rightarrow ۲V_A-V_B+۲۵=۰ \quad (۲)$$

$$\frac{V_B}{۵}+\frac{V_B-V_C}{۵}=۵ \Rightarrow ۲V_B-V_C=۲۵ \quad (۳)$$

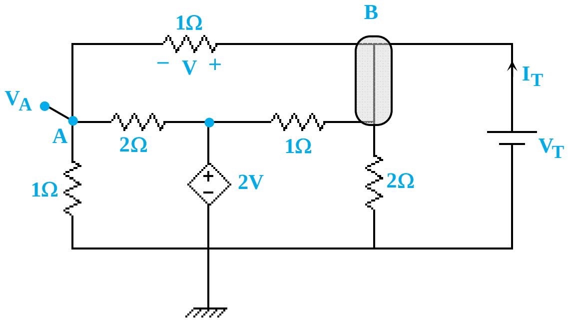
$$\frac{V_C-V_B}{۵}=\frac{V_K}{۵}+۲۵ \Rightarrow V_C-V_B=(-۵۵)+۵\times ۲۵ \Rightarrow V_C-V_B=۷۰ \quad (۴)$$

$$(۳),(۴) \Rightarrow \begin{cases} ۲V_B-V_C=۲۵ \\ V_C-V_B=۷۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_B=۹۵v \\ V_C=۱۶۵v \end{cases}$$

$$(۲) \Rightarrow ۲V_A-۹۵+۲۵=۰ \Rightarrow V_A=۳۵v \Rightarrow I_K=\frac{V_B}{۵}=\frac{۹۵}{۵}=۱۹A$$

$$\begin{cases} V_a=-۱۵+V_K=-۱۵-۵۵=-۷۰\,v \\ V_b=۵I_K=۵\times ۱۹=۹۵v \end{cases} \Rightarrow V_{th}=V_a-V_b=-۷۰-۹۵=-۱۶۵v$$

۲ـ گزینه «۳» برای حل این تست باید ثابت زمانی مدار را محاسبه کنیم. بنابراین ابتدا مقاومت تونن را از دو سر خازن بدست می‌آوریم.



با نوشتن رابطه KCL در گره‌های A و B داریم:

$$KCL(A):\frac{V}{۱}=\frac{V_A}{۱}+\frac{V_A-۲V}{۲} \Rightarrow V_A=\frac{۴}{۳}V \quad (۱)$$

$$KCL(B):I_T=\frac{V}{۱}+\frac{V_T-۲V}{۱}+\frac{V_T}{۲} \Rightarrow I_T=-V+\frac{۳V_T}{۲} \quad (۲)$$

حال در حلقه بیرونی مدار KVL می‌زنیم:

$$V_T=V+V_A \xrightarrow{(۱)} V_T=\frac{۷}{۳}V \quad (۳)$$

$$(۲),(۳) \Rightarrow I_T=-\frac{۳}{۷}V_T+\frac{۳}{۲}V_T=\frac{۱۵}{۱۴}V_T \Rightarrow R_{th}=\frac{۱۴}{۱۵}\Omega$$

پس ثابت زمانی مدار برابر است با:

$$\tau=R_{th}.C=\frac{۱۴}{۱۵}\times ۱=\frac{۱۴}{۱۵}sec$$

از طرفی می‌دانیم که انرژی خازن در یک مدار مرتبه اول بعد از گذشت زمان $\tau Ln(\sqrt{۲})$ نصف می‌شود؛ پس در مدار فعلی انرژی خازن در مدار $t=\frac{۱۴}{۱۵}Ln(\sqrt{۲})$ نصف می‌شود.

۳ـ گزینه «۳» با نوشتن رابطه KCL در گره بالایی مدار با ولتاژ فرضی V داریم:

$$-\cos t - I + \frac{V}{۱} + \frac{V-I}{۱} + \frac{V}{۰/۷۵} - \sin t = ۰$$

$$\xrightarrow{I=۱-V} -\cos t - ۱ + V + V + V - ۱ + V + \frac{۴}{۳}V - \sin t = ۰ \Rightarrow V = \frac{۳}{۱۶}\times(۲+\sin t+\cos t)$$

حال توان تولیدی منابع و توان مصرفی R_L را محاسبه می‌کنیم:

$$P_{(I_{S_۱}=\cos t)} = \text{متوسط}[\cos t \times \frac{۳}{۱۶}(۲+\sin t+\cos t)] = ۰+۰+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۱۶} = \frac{۳}{۳۲}W$$

$$P_{(I_{S_۲}=\sin t)} = \text{متوسط}[\sin t \times \frac{۳}{۱۶}(۲+\sin t+\cos t)] = ۰+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۱۶}+۰ = \frac{۳}{۳۲}W$$

$$P_{(V_S=۱)} = \text{متوسط}[۱\times(۱-V)] = ۱-\frac{۳}{۸} = \frac{۵}{۸}W$$

$$P_{\text{منبع وابسته}} = \text{متوسط}\ [I\times\frac{I-V}{۱}] = \text{متوسط}\ [(۱-V)\times(۱-۲V)] = \text{متوسط}\ [(\frac{۵}{۸}-\frac{۳}{۱۶}\sin t-\frac{۳}{۱۶}\cos t)\times(\frac{۱}{۴}-\frac{۳}{۸}\sin t-\frac{۳}{۸}\cos t)]$$

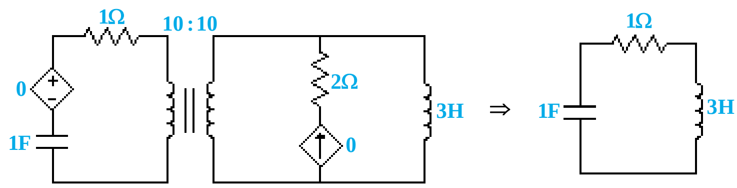
$$= \frac{۵}{۸}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۱۶}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۱۶}\times\frac{۳}{۸} = \frac{۵}{۳۲}+\frac{۹}{۱۲۸} = \frac{۲۹}{۱۲۸}W$$

$$\text{توان تولیدی مدار} = \frac{۳}{۳۲}+\frac{۳}{۳۲}+\frac{۵}{۸}+\frac{۲۹}{۱۲۸} = \frac{۲\times۱۲+۸۰+۲۹}{۱۲۸} = \frac{۱۳۳}{۱۲۸}W$$

$$P_{R_L} = \text{متوسط}\ [\frac{۴}{۳}\times V^۲] = \frac{۴}{۳}\times(\frac{۳}{۱۶})^۲\times[۴+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}] = \frac{۱۵}{۶۴}W$$

$$\frac{P_{R_L}}{\text{توان تولیدی مدار}} = \frac{\frac{۱۵}{۶۴}}{\frac{۱۳۳}{۱۲۸}} = \frac{۳۰}{۱۳۳} \simeq ۰/۲۲۵ = ۲۲/۵\%$$

۴ـ گزینه «۲» با توجه به این که مقاومت R به تنهایی تشکیل یک کاتست می‌دهد، جریان این مقاومت صفر بوده و داریم $V=I=۰$. پس داریم:

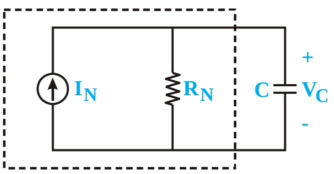


$$\omega_۰^۲ = \frac{۱}{LC} = \frac{۱}{۱\times۳} = \frac{۱}{۳}$$

$$۲\alpha = \frac{R}{L} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow S^۲+\frac{۱}{۳}S+\frac{۱}{۳} = ۰$$

$$\Rightarrow S_۱,S_۲ = -\frac{۱}{۶}\pm۰/۵۵j$$

۵ـ گزینه «۳» در صورتی که معادل تونن شبکه N قرار داده شود، داریم:



$$V_C(t) = V_C(\infty)+[V_C(۰^+)-V_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow V_C(\infty)+[V_C(۰^+)-V_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = ۶+e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow V_C(\infty) = ۶v\ ,\ V_C(۰^+)-V_C(\infty) = ۱ \Rightarrow V_C(۰^+) = ۷v$$

$$V_C(\infty) = R_N I_N = ۶v\ ,\ V_C(۰^+) = ۷v$$

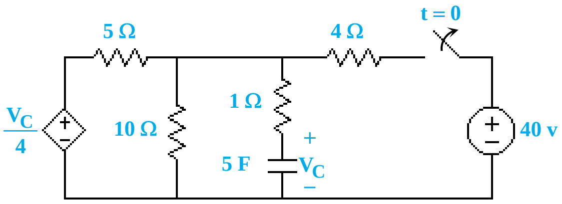
حال اگر منابع ولتاژ مدار سه برابر شود، مقدار R_N ثابت و مقدار I_N سه برابر می‌شود. لذا $R_N I_N = ۱۸v$ شده و مقدار $V_C(۰^+)$ همان ۷ ولت باقی می‌ماند:

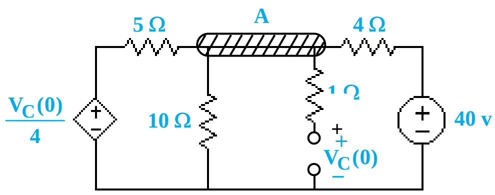
$$V_C(\infty) = R_N I_N = ۱۸v\quad,\quad V_C(۰^+) = ۷v \Rightarrow V_C(t) = V_C(\infty)+[V_C(۰^+)-V_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow V_C(t) = ۱۸+[۷-۱۸]e^{-\frac{t}{\tau}} = ۱۸-۱۱e^{-\frac{t}{\tau}}$$

۶ـ گزینه «۱» معادله ولتاژ دو سر خازن به صورت $V_C = V_C(\infty)+[V_C(0^+)-V_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$ است.

در $t<0$ مدار به صورت زیر است:



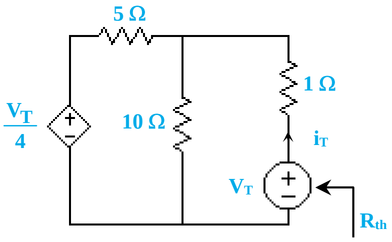


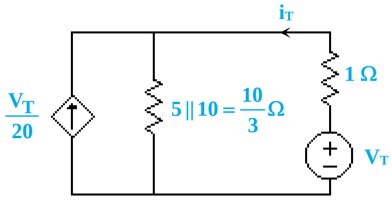
$$KCL(A)\rightarrow \frac{V_C(۰)-۴۰}{۴}+\frac{V_C(۰)}{۱۰}+\frac{V_C(۰)-\frac{V_C(۰)}{۴}}{۵}=۰$$

$$\xrightarrow{\times ۲۰} ۵V_C(۰)-۲۰۰+۲V_C(۰)+۳V_C(۰)=۰$$

$$\rightarrow ۱۰V_C(۰)=۲۰۰\rightarrow \underline{V_C(۰)=۲۰|}$$

در $t=\infty$ خازن مدار باز است. پس $V_C(\infty)=۰$ است. برای محاسبه R_{th} از دو سر خازن داریم:





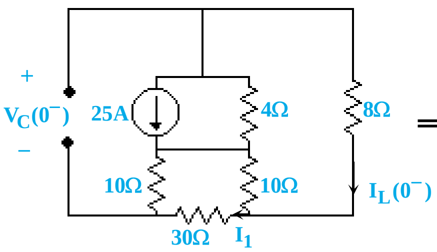
$$\rightarrow V_T=i_T+\frac{۱۰}{۳}(\frac{V_T}{۲۰}+i_T)$$

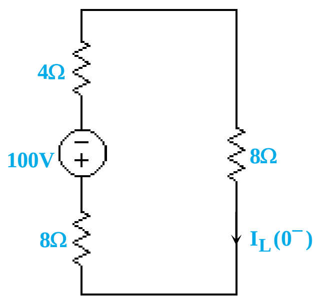
$$\rightarrow V_T=i_T+\frac{V_T}{۶}+\frac{۱۰}{۳}i_T\rightarrow V_T(۱-\frac{۱}{۶})=i_T(\frac{۱۰}{۳}+۱)$$

$$V_T\times\frac{۵}{۶}=i_T\times\frac{۱۳}{۳}\rightarrow V_T=\frac{\frac{۱۳}{۳}}{\frac{۵}{۶}}i_T\Rightarrow R_{th}=\frac{۲۶}{۵}\Omega$$

$$\tau=R_{th}C=\frac{۲۶}{۵}\times ۵=۲۶\rightarrow V_C=۰+۲۰e^{-\frac{t}{۲۶}}\rightarrow V_C=۲۰e^{-\frac{t}{۲۶}}$$

۷ـ گزینه «۱» ابتدا مدار در $t=۰^-$ تحلیل می‌شود. در این حالت کلید وصل می‌باشد و خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه است.



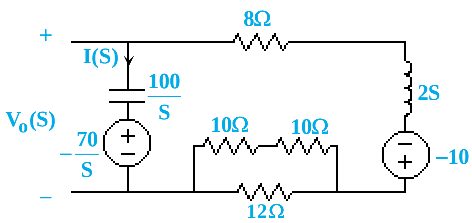


$$I_L(۰^-)=\frac{-۱۰۰}{۴+۸+۸}=-۵A$$

$$I_۱=I_L(۰^-)\times\frac{۱۰}{۱۰+۴۰}=-۵\times\frac{۱۰}{۵۰}=-۱A$$

$$V_C(۰^-)=۸I_L(۰^-)+۳۰I_۱=۸\times -۵+۳۰\times(-۱)=-۷۰v$$

حال مدار را بعد از کلیدزنی در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم.



$$I(S)\times\frac{۱۰۰}{s}-\frac{۷۰}{s}+۱۲I(S)+(-۱۰)+۲SI(S)+۸I(S)=۰$$

$$I(S)[\frac{100}{S}+12+2S+8]=\frac{70}{S}+10 \Rightarrow I(S)=\frac{10+\frac{70}{S}}{20+2S+\frac{100}{S}}=\frac{10S+70}{2S^2+20S+100}$$

$$V_o(S)=\frac{100}{S}I(S)-\frac{70}{S}=\frac{100}{S}(\frac{10S+70}{2S^2+20S+100})-\frac{70}{S} \Rightarrow V_o(S)=\frac{-70S-200}{S^2+10S+50}=-\frac{70(S+5)-150}{(S+5)^2+25}$$

$$\Rightarrow V_o(S)=\frac{150}{(S+5)^2+25}-\frac{70(S+5)}{(S+5)^2+25} \Rightarrow V_o(t)=e^{-5t}\times 30\sin 5t-e^{-5t}\times 70\cos 5t$$

$$\Rightarrow V_o(t)=e^{-5t}[30\sin 5t-70\cos 5t]$$

۸ـ گزینه «۴» ابتدا در حلقه‌های سمت راست و چپ مدار اعمال KVL می‌شود.

$$\text{KVL (حلقه سمت راست)}: V_k(t)=-4\times\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{0/5}\int_0^t Idt \qquad (1)$$

$$\text{KVL (حلقه سمت چپ)}\ V_S(t)=3\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{0/5}\int_0^t Idt \qquad (2)$$

با مشتق‌گیری از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{dV_k(t)}{dt}=-4\dfrac{d^2I(t)}{dt^2}+2I(t)\\[2ex]\dfrac{dV_S(t)}{dt}=3\dfrac{d^2I(t)}{dt^2}+2I(t)\end{cases}$$

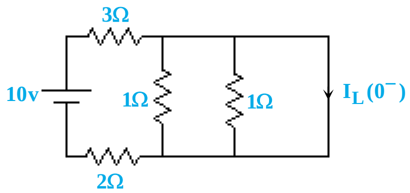
با جایگذاری زمان $t=0^+$ در معادلات داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{dV_k(0^+)}{dt}=-4\dfrac{d^2I(0^+)}{dt^2}+2I(0^+) & (3)\\[2ex]\dfrac{dV_S(0^+)}{dt}=3\dfrac{d^2I(0^+)}{dt^2}+2I(0^+) & (4)\end{cases}$$

$$I(0^\mp)=0 \Rightarrow \frac{dV_S(0^+)}{dt}=\frac{3d^2I(0^+)}{dt^2} \Rightarrow 6\cos t\Big|_{t=0^+}=\frac{3d^2I(0^+)}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2I(0^+)}{dt^2}=2 \qquad (5)$$

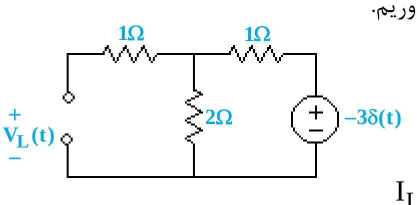
$$(5)\ ,\ (3) \Rightarrow \frac{dV_k(0^+)}{dt}=-4\times 2+2\times 0=-8\frac{V}{sec}$$

۹ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را در $t=0^-$ تحلیل می‌کنیم.



$$I_L(0^-)=\frac{10}{3+2}=2A$$

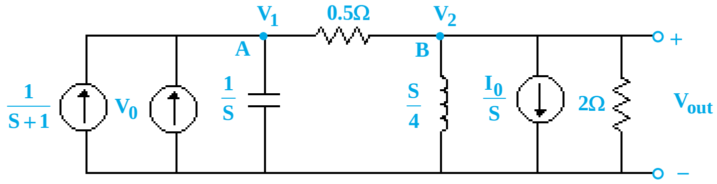
حال با توجه به وجود منابع ضربه در مدار، سلف را به‌صورت مدار باز مدل می‌کنیم و $V_L(t)$ را بدست می‌آوریم.



$$V_L(t)=-3\delta(t)\times\frac{2}{2+1}=-2\delta(t)$$

$$I_L(0^+)=I_L(0^-)+\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+}V_L(t)dt \Rightarrow I_L(0^+)=2+\frac{1}{3}\int_{0^-}^{0^+}-2\delta(t)dt=2-\frac{2}{3}=1/33A$$

۱۰ـ گزینه «۱» ابتدا با در نظر گرفتن شرایط اولیه (V_0 و I_0)، مدار را در حوزه فرکانس مدل می‌کنیم:



حال با نوشتن معادلات KCL در گره‌های مدار داریم:

$$\text{KCL (A)}:\ SV_1+2V_1-2V_2=\frac{1}{S+1}+V_0$$

$$\text{KCL (B)}:\ 2V_2-2V_1+\frac{4}{S}V_2+\frac{1}{2}V_2=-\frac{I_0}{S}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}S+2 & -2\\ -2 & 2.5+\frac{4}{S}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{S+1}+V_0\\ -\frac{I_0}{S}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S+2 & -2\\ -2 & 2.5+\frac{4}{S}\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix}\frac{1}{S+1}+V_0\\ -\frac{I_0}{S}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}=\frac{1}{(S+2)(2.5+\frac{4}{S})-4}\times\begin{bmatrix}2.5+\frac{4}{S} & 2\\ 2 & S+2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{1}{S+1}+V_0\\ -\frac{I_0}{S}\end{bmatrix}\Rightarrow V_2=\frac{S}{2.5S^2+5S+8}\times\left[\frac{2}{S+1}+2V_0-\frac{S+2}{S}I_0\right]$$

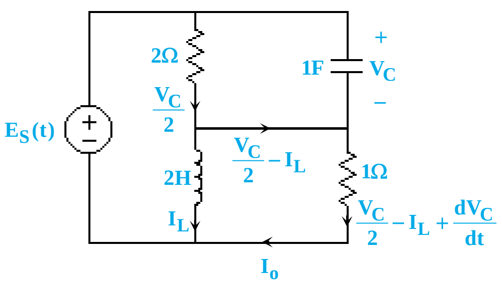
$$\Rightarrow V_2=V_{out}=\frac{2S}{(2.5S^2+5S+8)(S+1)}+\frac{2SV_0-(S+2)I_0}{2.5S^2+5S+8}$$

از آنجایی که ریشه‌های معادله مشخصه سیستم یعنی $2.5S^2+5S+8=0$ مختلط هستند، باید شرایط اولیه را طوری تنظیم کنیم که این ریشه‌ها در پاسخ خروجی سیستم دیده نشوند:

$$V_{out}=\frac{\frac{10}{11}S+\frac{32}{11}}{2.5S^2+5S+8}+\frac{-\frac{4}{11}}{S+1}+\frac{2SV_0-(S+2)I_0}{2.5S^2+5S+8}=\frac{(\frac{10}{11}+2V_0-I_0)S+(\frac{32}{11}-2I_0)}{2.5S^2+5S+8}-\frac{\frac{4}{11}}{S+1}$$

$$\begin{cases}\frac{10}{11}+2V_0-I_0=0\\ \frac{32}{11}-2I_0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}I_0=\frac{16}{11}A\\ V_0=\frac{3}{11}v\end{cases}$$

۱۱ـ گزینه «۲» ابتدا جریان شاخه اتصال کوتاه و جریان مقاومت 1Ω را مشخص می‌کنیم.



حال داریم:

$$\text{KVL (حلقه شامل سلف و خازن و منبع)}: E_S(t)=V_C+\frac{2dI_L}{dt}\ \Rightarrow\ \frac{dI_L}{dt}=-\frac{1}{2}V_C+\frac{1}{2}E_S(t)\quad(1)$$

$$\text{KVL (حلقه بیرونی)}: E_S(t)=V_C+\frac{dV_C}{dt}+\frac{V_C}{2}-I_L\ \Rightarrow\ \frac{dV_C}{dt}=I_L-\frac{3}{2}V_C+E_S(t)\quad(2)$$

$$(1),(2)\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}\frac{dV_C}{dt}\\ \frac{dI_L}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_C\\ I_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}E_S(t)$$

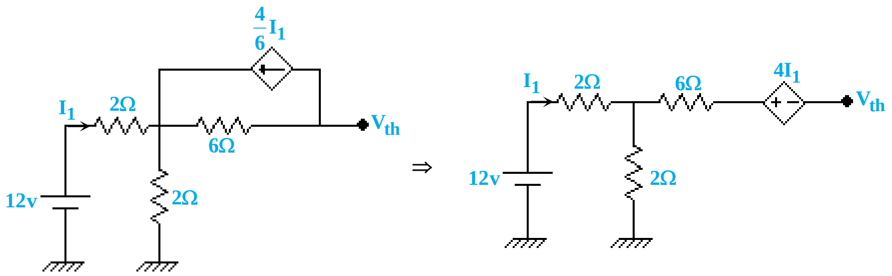
$$\det[SI-A]=۰ \Rightarrow \det\left[\begin{bmatrix} S & ۰ \\ ۰ & S\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۲} & ۱ \\ -\frac{۱}{۲} & ۰\end{bmatrix}\right]=۰ \Rightarrow \det\begin{bmatrix} S+\frac{۳}{۲} & -۱ \\ \frac{۱}{۲} & S\end{bmatrix}=۰ \Rightarrow S^۲+\frac{۳}{۲}S+\frac{۱}{۲}=۰ \Rightarrow \begin{cases} S_۱=-۱ \\ S_۲=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

برای ظاهر شدن تنها $S_۱=-۱$ در خروجی، شرایط اولیه باید در راستای بردار $u_۱$ باشد.

$$Au_۱=S_۱u_۱ \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{۳}{۲} & ۱ \\ -\frac{۱}{۲} & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_C(۰^-) \\ I_L(۰^-)\end{bmatrix}=-۱\begin{bmatrix} V_C(۰^-) \\ I_L(۰^-)\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{۳}{۲}V_C(۰^-)+I_L(۰^-)=-V_C(۰^-) \\ -\frac{۱}{۲}V_C(۰^-)=-I_L(۰^-)\end{cases} \Rightarrow V_C(۰^-)=۲I_L(۰^-)$$

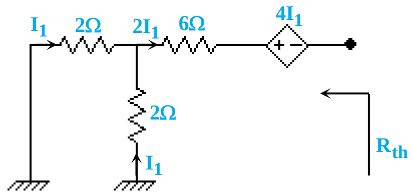
با تست گزینه‌ها، گزینه (۲) پاسخ صحیح است.

۱۲ـ گزینه «۳» برای محاسبه ولتاژ V ابتدا از دو سر المان غیرخطی معادل تونن برای مدار محاسبه می‌شود.

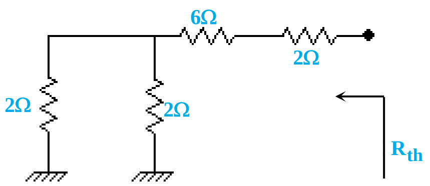


$$I_۱=\frac{۱۲}{۲+۲}=۳A \Rightarrow V_{th}=۲I_۱+۰\times۶-۴I_۱=-۲I_۱=-۶v$$

برای محاسبه مقاومت تونن، منابع مستقل مدار را غیر فعال می‌کنیم.

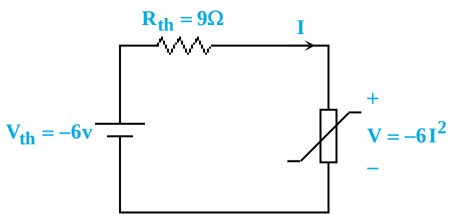


با معادل‌گذاری منبع ولتاژ وابسته با مقاومت داریم:



$$\Rightarrow R_{th}=۲+۶+۲\|۲=۹\Omega$$

با جایگذاری مدار معادل تونن در مدار داریم:



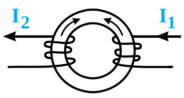
$$KVL: +۶+۹I-۶I^۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} I=-۰/۵A & \text{غ ق ق} \\ I=۲A & \checkmark\end{cases}$$

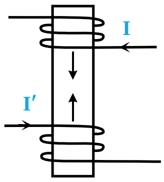
$$\Rightarrow V=-۶\times۲^۲=-۲۴v$$

دقت کنید که پاسخ $I=-۰/۵$ غیرقابل قبول است، زیرا در این صورت $V=۰$ بوده و قانون KVL نقض می‌گردد.

۱۳ـ گزینه «۳» همان‌طور که در مدار نشان داده شده است، وضعیت سرهای نقطه‌دار سلف مشخص نیست. برای یافتن سرهای نقطه‌دار، چهار انگشت دست راست را در جهت چرخش جریان قرار می‌دهیم، انگشت شست جهت میدان را نشان می‌دهد. با توجه به شکل‌های زیر، می‌بینیم که میدان‌های تولیدی در جهت تضعیف هم هستند. پس M بین این دو سیم پیچی منفی است.

حال به محاسبه‌ی M ها می‌پردازیم:

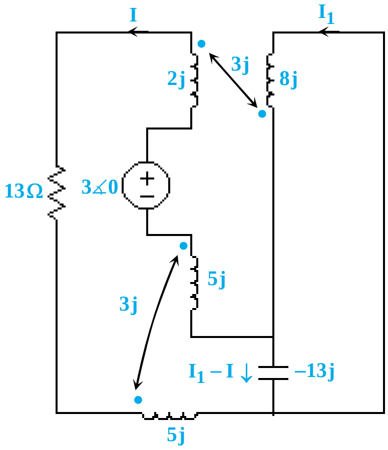




$$M_۱ = k_۱\sqrt{L_۱L_۲} = ۰/۷۵\times\sqrt{۲\times ۸} = ۳$$

$$M_۲ = k_۲\sqrt{L_۳L_۴} = ۰/۶\times\sqrt{۵\times ۵} = ۳$$

از آنجا که فرکانس منبع $\omega = ۱\frac{rad}{s}$ است، مدار را به حوزه فازور می‌بریم. با اعمال KVL در حلقه راست داریم:



$$۸jI_۱ + ۳jI - ۱۳j(I_۱ - I) = ۰$$

$$\Rightarrow -۵I_۱ + ۱۰I = ۰ \Rightarrow I_۱ = ۲I \qquad (۱)$$

با اعمال KVL در حلقه چپ داریم:

$$-۳ + ۲jI - ۳j(I_۱) + ۱۳I + ۵jI - ۳jI - ۱۳j(I - I_۱) + ۵jI - ۳jI = ۰$$

$$(۱۳ - ۷j)I + ۱۰jI_۱ = ۳ \qquad (۲)$$

با استفاده از رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$I_۱ = \frac{۶}{۱۳(۱+j)}$$

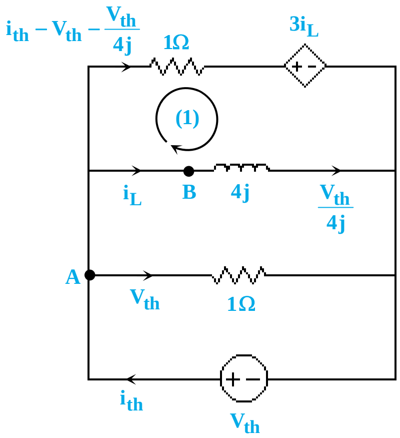
$$I = \frac{۳}{۱۳(۱+j)}$$

می‌دانیم ولتاژ خازن برابر است با: $V_C = -۱۳j(I_۱ - I)$. پس داریم:

$$V_C = -۱۳j(\frac{۶-۳}{۱۳(۱+j)}) = \frac{-۳۹j}{۱۳(۱+j)} = \frac{۳۹\measuredangle -۹۰^\circ}{۱۳\sqrt{۲}\measuredangle ۴۵^\circ} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\measuredangle -۱۳۵^\circ$$

$$V_C(t) = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\cos(t - ۱۳۵^\circ)$$

۱۴ـ گزینه «۲» برای این‌که مقدار $i_L(۰^+)$ را بیابیم، باید ابتدا المان‌های شبکه N را تشخیص دهیم. با توجه به این‌که در صورت سؤال گفته شده که توان مصرفی N در $\omega = ۲$ رادیان بر ثانیه ماکزیمم می‌شود، بنابراین امپدانس دیده شده از دو سر شبکه N در $\omega = ۲\frac{rad}{s}$ را باید پیدا کنیم و می‌دانیم که امپدانس شبکه N، به منظور رسیدن حداکثر توان به آن، با توجه به این‌که این شبکه (N) مقاومتی خالص است، برابر R بوده که این مقدار برابر اندازه امپدانس دیده شده از دو سر N می‌باشد.



بنابراین برای پیدا کردن امپدانس دیده شده از دو سر شبکه N در $\omega = ۲$، مدار معادل تونن شبکه N را قرار می‌دهیم و داریم:

دقت کنید که چون به دنبال امپدانس دیده شده از دو سر N هستیم، منبع ولتاژ مستقل V_S را اتصال کوتاه می‌کنیم.

با توجه به موازی بودن منبع ولتاژ V_{th} با مقاومت ۱Ω و امپدانس $۴j$ اهمی، جریان‌های آن‌ها به ترتیب برابر V_{th} و $\frac{V_{th}}{۴j}$ با جهت نشان داده شده خواهد بود. با نوشتن KCL در گره A، جریان شاخه بالا برابر $i_{th} - V_{th} - \frac{V_{th}}{۴j}$ در جهت نشان داده شده خواهد بود.

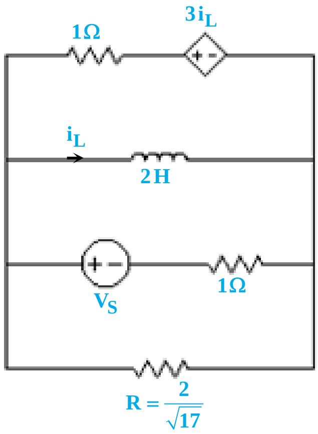
حالا رابطه KVL را در حلقه ۱ می‌نویسیم:

$$\begin{cases} i_{th} - V_{th} - \dfrac{V_{th}}{۴j} + ۳i_L = ۴j\times i_L & \leftarrow KVL \\ i_L = \dfrac{V_{th}}{۴j} & \leftarrow \text{KCL در گره B} \end{cases}$$

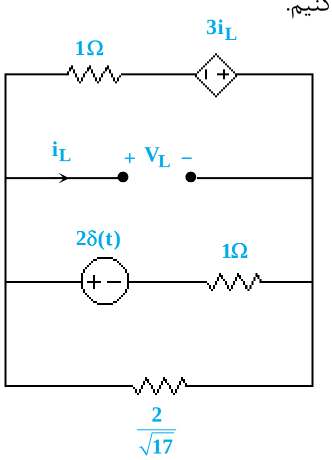
$$\Rightarrow V_{th} = \frac{۲}{۴+j}i_{th} \Rightarrow Z_{th} = \frac{۲}{۴+j} \Rightarrow$$

$\Rightarrow R=\frac{2}{\sqrt{17}}$ $\quad \Rightarrow R=\left|\frac{2}{4+j}\right|=\frac{2}{\sqrt{17}}$ برای این‌که حداکثر توان به N برسد. $\Rightarrow R=|Z_{th}|$

بنابراین مدار به شکل زیر است:

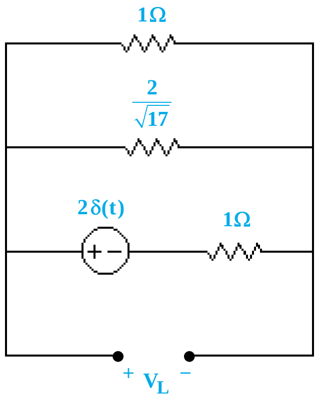


برای پیدا کردن مقادیر متغیرهای مدار در $t=0^+$، سلف را مدار باز می‌کنیم و ولتاژ آن را پیدا می‌کنیم.

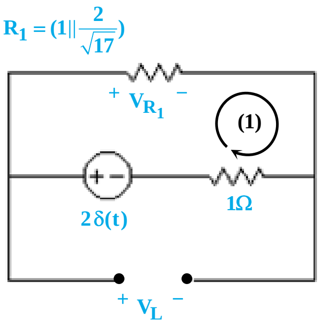


مدار می‌تواند ساده‌تر شود.

$\Rightarrow i_L=0 \Rightarrow 3i_L=0 \Rightarrow$



مدار را باز هم ساده‌تر کرده و سپس رابطه KVL را در حلقه ۱ می‌نویسیم.

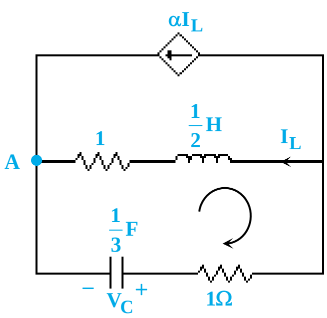


$$\Rightarrow \begin{cases} V_{R_1}=V_L=\dfrac{R_1}{R_1+1}\times 2\delta(t) \\[2mm] R_1=\left(1\,||\,\dfrac{2}{\sqrt{17}}\right)=\dfrac{1\times\dfrac{2}{\sqrt{17}}}{1+\dfrac{2}{\sqrt{17}}}=\dfrac{2}{\sqrt{17}+2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_L=\frac{4}{4+\sqrt{17}}\delta(t) \text{ و } V_L=2i_L' \Rightarrow 2i_L'=\frac{4}{4+\sqrt{17}}\delta(t) \Rightarrow i_L=\frac{2}{4+\sqrt{17}}u(t)+i_L(0^-)$$

$$\Rightarrow i_L(0^+)=\frac{2}{4+\sqrt{17}}+i_L(0^-) \Rightarrow i_L(0^+)=\frac{2}{4+\sqrt{17}}+2$$

۱۵ـ گزینه «۳» با اعمال KCL در گره A داریم:



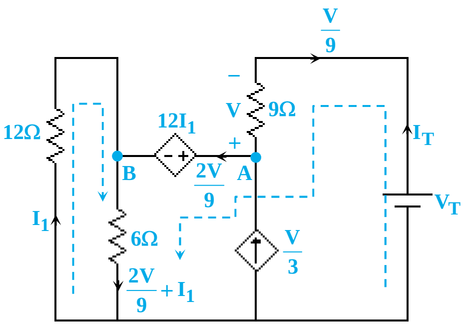
$$\text{KCL (A)}:\ (\alpha+1)I_L+\frac{1}{3}\frac{dV_C}{dt}=0 \Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=-3(\alpha+1)I_L$$

$$\Rightarrow -3(\alpha+1)=-9 \rightarrow \alpha=2$$

پاسخنامه آزمون (۴)

تعداد سؤالات : ۱۵ — **سطح آزمون :** (B) (متوسط)

۱ـ گزینه «۳» برای محاسبه مقدار مقاومت تونن، به دو نقطه A و B، منبع ولتاژ V_T را متصل کرده و رابطه جریان I_T را با V_T محاسبه می‌کنیم. لازم به ذکر است که در این حالت منابع مستقل جریان و ولتاژ را غیرفعال می‌کنیم.



$$KCL(A): \quad \text{جریان منبع ولتاژ وابسته} = \frac{V}{۳} - \frac{V}{۹} = \frac{۲V}{۹}$$

$$KCL(B): \quad \text{جریان مقاومت ۶ اهمی} = I_۱ + \frac{۲V}{۹}$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$-V_T + ۹I_T + ۱۲I_۱ + ۶\times(\frac{۲V}{۹} + I_۱) = ۰ \qquad (۱)$$

با نوشتن قانون اهم برای مقاومت ۹Ω داریم:

$$V = -۹I_T \qquad (۲)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$-V_T + ۹I_T + ۱۲I_۱ + ۶(\frac{۲\times(-۹I_T)}{۹} + I_۱) = ۰ \;\Rightarrow\; -V_T + ۱۸I_۱ - ۳I_T = ۰ \qquad (۳)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$۱۲I_۱ + ۶(\frac{۲V}{۹} + I_۱) = ۰ \;\Rightarrow\; ۱۲I_۱ + \frac{۱۲}{۹}V + ۶I_۱ = ۰ \;\Rightarrow\; V = -\frac{۲۷}{۲}I_۱ \qquad (۴)$$

با ترکیب روابط (۲) و (۴) داریم:

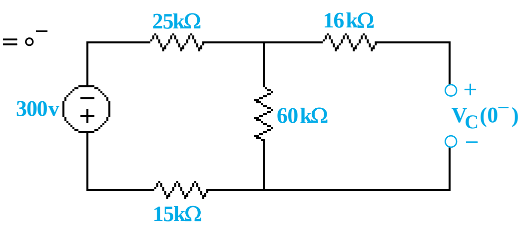
$$-۹I_T = -\frac{۲۷}{۲}I_۱ \;\Rightarrow\; I_۱ = \frac{۲}{۳}I_T \qquad (۵)$$

با جایگذاری رابطه (۵) در رابطه (۳) داریم:

$$-V_T + ۱۸\times\frac{۲}{۳}I_T - ۳I_T = ۰ \;\Rightarrow\; V_T = ۹I_T \;\Rightarrow\; \mathbf{R_{th}} = \frac{\mathbf{V_T}}{\mathbf{I_T}} = ۹\Omega$$

۲ـ گزینه «۱» ابتدا مدار را در $t=۰^-$ تحلیل کرده و ولتاژ خازن را بدست می‌آوریم. سپس با توجه به برابری ولتاژ خازن در $t=۰^-$ با $t=۰^+$، مقدار $V_C(۰^+)$ را در گزینه‌ها چک می‌کنیم. با انجام این‌کار، تعدادی از گزینه‌ها حذف می‌شوند. در ادامه $V_C(\infty)$ را محاسبه کرده و آن را در گزینه‌ها چک می‌کنیم.

$t=۰^-$

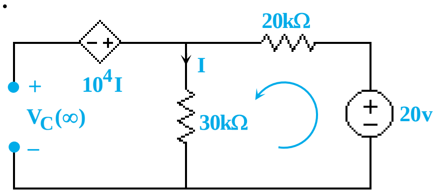


با نوشتن قانون تقسیم ولتاژ داریم:

$$V_C(۰^-) = -۳۰۰\times\frac{۶۰}{۲۵+۱۵+۶۰} = -۱۸۰\,v \Rightarrow V_C(۰^+) = V_C(۰^-) = -۱۸۰\,v$$

با چک‌کردن گزینه‌ها در $t=۰^+$، گزینه‌های (۳) و (۴) حذف می‌شوند. حال مقدار V_C را در $t=\infty$ محاسبه می‌کنیم.

$t=\infty:$



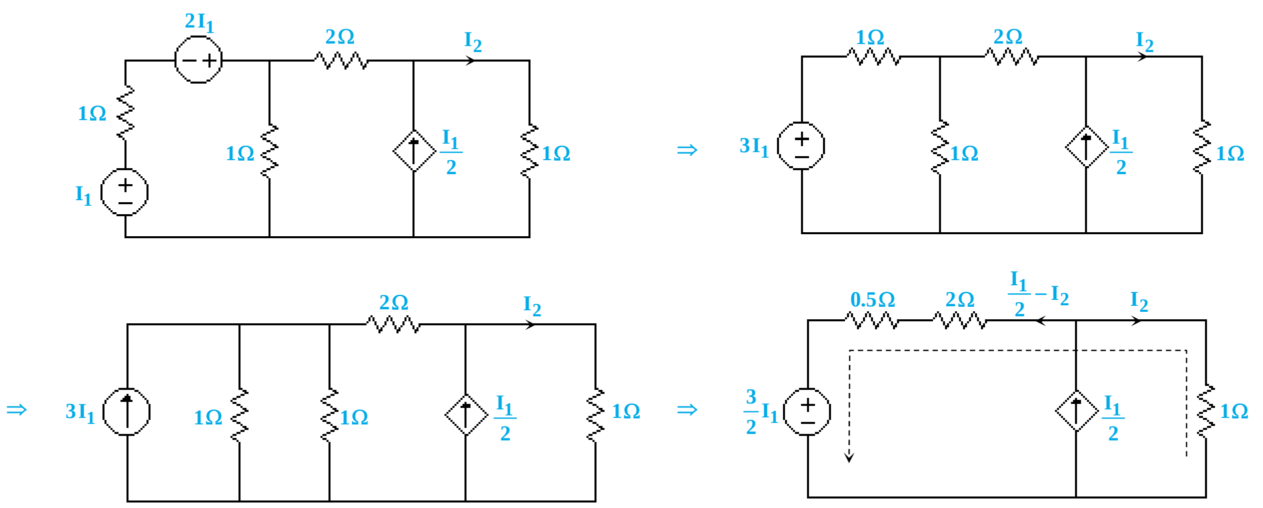
با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$I = \frac{۲۰}{۲۰k+۳۰k} = \frac{۲۰}{۵۰k} = \frac{۲}{۵}mA$$

$$\Rightarrow\; V_C(\infty) = -۱۰^۴\,I + I\times۳۰k = -۱۰^۴\times\frac{۲}{۵}\times۱۰^{-۳} + \frac{۲}{۵}\times۱۰^{-۳}\times۳۰\times۱۰^۳ = ۸v$$

با چک‌کردن گزینه‌های (۱) و (۲) در $t=\infty$، جواب گزینه (۱) است.

۳ـ گزینه «۳» با توجه به این که منبع ولتاژ وابسته $۲I_۱$ به پارامتر مستقل $I_۱$ وابسته است، می‌توان منبع وابسته ولتاژ را به صورت یک منبع **ولتاژ مستقل** در نظر گرفت و با تبدیل منبع جریان به منبع ولتاژ مدار را به صورت زیر ساده کرد:



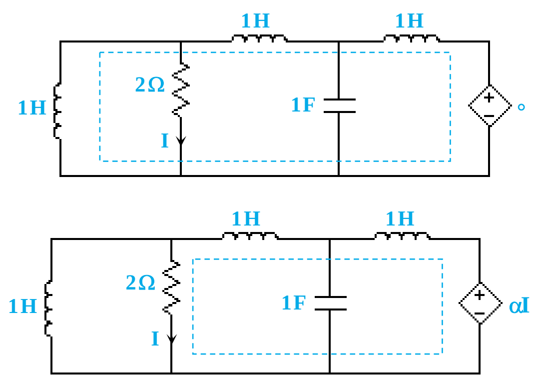
با نوشتن KVL در حلقه مشخص شده داریم:

$$-I_۲ + ۲/۵(\frac{I_۱}{۲} - I_۲) + \frac{۳}{۲}I_۱ = ۰ \Rightarrow ۱/۲۵I_۱ + ۱/۵I_۱ = I_۲ + ۲/۵I_۲ \Rightarrow ۲/۷۵I_۱ = ۳/۵I_۲$$

$$I_۲ = (\frac{۲/۷۵}{۳/۵})I_۱ \Rightarrow \mathbf{I_۲ = \frac{۱۱}{۱۴}I_۱}$$

۴ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه اگر در مدار حلقه سلفی باشد، فرکانس طبیعی صفر نیز وجود دارد، لذا با صفر بودن α، مدار دارای یک حلقه سلفی به شکل روبرو بوده و یک فرکانس طبیعی صفر دارد. علاوه بر این در صورتی که $\alpha = ۲$ باشد، KVL در حلقه مشخص شده فقط شامل ولتاژ دو سلف 1H بوده و ولتاژ مقاومت 2Ω با منبع وابسته $۲I$ اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند و حلقه فقط شامل سلف خواهد بود.

لذا به ازای $\alpha = ۰$ و $\alpha = ۲$ مدار دارای فرکانس طبیعی صفر است.



۵ـ گزینه «۴» برای حل این سؤال، ابتدا معادله‌ی ولتاژ **V** را از ترکیب خطی منابع مستقل مدار در شرایط مسئله بدست می‌آوریم. در ادامه با شرایط جدید، معادله‌ی ولتاژ **V** را بدست آورده و با استفاده از آن توان مقاومت ۲ اهمی را بدست می‌آوریم. حال با توجه به اینکه ولتاژ V، ناشی از ترکیب خطی منابع مستقل ولتاژ جریان و مدار است، داریم:

$$V = \alpha V_S + \beta I_S$$

حال با جایگذاری اطلاعات سؤال در دو حالت، ضرایب α و β را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} V_S = ۲v \\ I_S = ۱A \end{cases} \Rightarrow V = \frac{۲}{۳}v \Rightarrow \frac{۲}{۳} = ۲\alpha + \beta \quad (۱)$$

$$\begin{cases} V_S = ۴v \\ I_S = \frac{۱}{۳}A \end{cases} \Rightarrow V = \frac{۱۷}{۹}v \Rightarrow \frac{۱۷}{۹} = ۴\alpha + \frac{۱}{۳}\beta \quad (۲)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲\alpha + \beta = \frac{۲}{۳} \\ ۴\alpha + \frac{۱}{۳}\beta = \frac{۱۷}{۹} \end{cases}$$

با حل معادلات بدست آمده از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\beta = -\frac{۱}{۳} \quad , \quad \alpha = \frac{۱}{۲}$$

با توجه به مقادیر β و α، برای معادله V داریم:
$$V=\frac{۱}{۲}V_S-\frac{۱}{۳}I_S$$

با جایگذاری اطلاعات جدید در رابطه V داریم:
$$V=\frac{۱}{۲}\times\cos t-\frac{۱}{۳}\times ۳ \;\Rightarrow\; V=\frac{۱}{۲}\cos t-۱$$

برای محاسبه توان مصرفی مقاومت، ابتدا مقدار مؤثر ولتاژ V را بدست می‌آوریم.

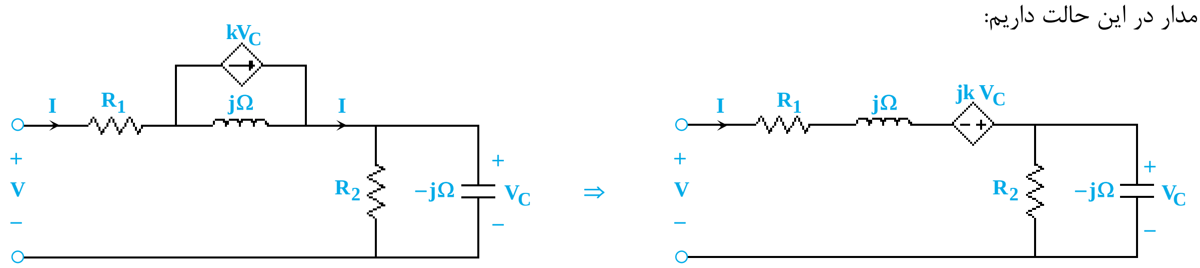
دقت کنید، اگر تابع $f(t)$ از جمع دو تابع $f_۱(t)$ و $f_۲(t)$ محاسبه شود، مقدار مؤثر تابع $f(t)$ به صورت زیر است:
$$f(t)=f_۱(t)+f_۲(t) \;\Rightarrow\; \text{rms}[f(t)]=\sqrt{(\text{rms}[f_۱(t)])^۲+(\text{rms}[f_۲(t)])^۲}$$

حال مقدار مؤثر تابع V به صورت زیر است:
$$V(\text{rms})=\sqrt{(\frac{۱}{۲\sqrt{۲}})^۲+۱^۲}=\frac{۳}{\sqrt{۸}}v \;\Rightarrow\; P_{۲\Omega}=\frac{V(\text{rms})^۲}{۲}=\frac{(\frac{۳}{\sqrt{۸}})^۲}{۲}=\frac{۹}{۱۶}w$$

با توجه به توان بدست آمده برای مقاومت ۲ اهمی، دیده می‌شود که توان مصرفی آن ۹ برابر عدد $\frac{۱}{۱۶}$ می‌باشد.

۶ـ گزینه «۲» با توجه به مستقل بودن گزینه‌ها از مقادیر L و C، برای ساده شدن محاسبات می‌توانیم $L=۱H$ و $C=۱F$ را در نظر بگیریم و امپدانس را از دید a و b بدست می‌آوریم و قسمت حقیقی آن را مساوی $R_۱$ قرار می‌دهیم. حال داریم:
$$\omega=\frac{۱}{\sqrt{LC}}=\frac{۱}{\sqrt{۱\times۱}}=۱(\frac{rad}{sec})$$

با ترسیم مدار در این حالت داریم:

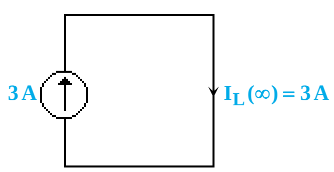


با نوشتن KVL در حلقه مدار داریم:
$$V=R_۱I+jI-jkV_C+V_C \qquad (۱) \quad , \quad V_C=I(R_۲\,||\,(-j)) \;\Rightarrow\; V_C=\frac{-jR_۲I}{R_۲-j} \qquad (۲)$$

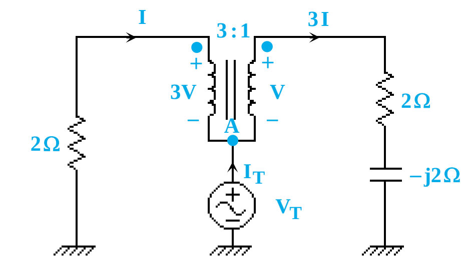
با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:
$$V=I(R_۱+j)+V_C(۱-kj) \;\Rightarrow\; V=I(R_۱+j)+(\frac{-R_۲jI}{R_۲-j})(۱-kj) \;\Rightarrow\; V=I((R_۱+j)+(-\frac{R_۲j}{R_۲-j})(۱-kj))$$
$$\Rightarrow\; V=I(R_۱-\frac{kR_۲^۲-R_۲}{R_۲^۲+۱}+j(۱+\frac{kR_۲-R_۲^۲}{R_۲^۲+۱})) \;\Rightarrow\; Z_{th}=R_۱-\frac{kR_۲^۲-R_۲}{R_۲^۲+۱}+j(۱+\frac{kR_۲-R_۲^۲}{R_۲^۲+۱})$$

اگر قسمت حقیقی امپدانس دیده شده از دو سر a و b برابر با $R_۱$ باشد، باید جمله دوم در Z_{th} صفر شود. حال داریم:
$$-\frac{kR_۲^۲-R_۲}{R_۲^۲+۱}=۰ \;\Rightarrow\; \mathbf{k}=\frac{۱}{\mathbf{R_۲}}$$

۷ـ گزینه «۳» برای حل این سؤال باید به این نکته توجه کرد که سلف در زمان $t=\infty$ به صورت اتصال کوتاه عمل می‌کند و نوع رابطه ϕ با I در اتصال کوتاه بودن سلف بدون تأثیر است. لذا با اتصال کوتاه کردن سلف مقاومت ۱Ω حذف می‌شود و جریان I_L در $t=\infty$ بصورت روبرو محاسبه می‌شود.



۸ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه $\omega = ۱\frac{rad}{sec}$ است، مدار را در حالت عدم وجود منابع مستقل ترسیم کرده و سمت راست مدار را ساده می‌کنیم. حال به جای مقاومت R منبع V_T را قرار می‌دهیم و رابطه V_T با I_T را محاسبه می‌کنیم. با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:



$$V_T = -۳V - ۲I \Rightarrow V = -\frac{۱}{۳}V_T - \frac{۲}{۳}I \qquad (۱)$$

با نوشتن رابطه KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$V_T = -V + ۳I \times ۲ - j۶I \qquad (۲)$$

حال در گره A رابطه KCL را می‌نویسیم.

$$I_T + I = ۳I \Rightarrow I = \frac{۱}{۲}I_T \qquad (۳)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) و (۳) داریم:

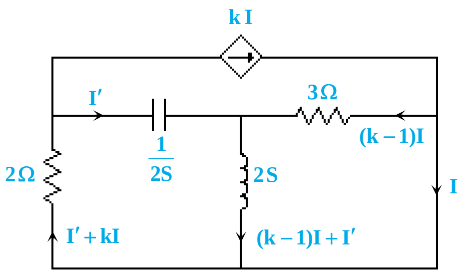
$$\xrightarrow{(۱),(۲),(۳)} V_T = -[-\frac{۱}{۳}V_T - \frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲}I_T] + ۶\times\frac{۱}{۲}I_T - j۶\times\frac{۱}{۲}I_T \Rightarrow V_T = \frac{۱}{۳}V_T + \frac{۱}{۳}I_T + ۳I_T - j۳I_T$$

$$\Rightarrow V_T = I_T(۵ - j۴/۵) \Rightarrow Z_{th} = (۵ - j۴/۵)\Omega$$

برای جذب حداکثر توان در R، مقدار R باید برابر با اندازه امپدانس تونن دیده شده از دو سر خود باشد.

$$\mathbf{R = |Z_{th}| = \sqrt{۵^۲ + ۴/۵^۲} = ۶/۷۲w}$$

۹ـ گزینه «۲» برای حل این تست باید ببینیم کدام kها سیستم را ناپایدار می‌کنند، چون می‌دانیم در یک سیستم ناپایدار، انرژی سیستم به طور نامحدودی رشد می‌کند. بدین منظور ابتدا معادله مشخصه مدار را محاسبه می‌کنیم. با نوشتن KVL در حلقه‌های پایینی مدار داریم:



$$۳(I(k-۱)) + ۲S[(k-۱)I + I'] = ۰ \quad و \quad ۲[I' + kI] + \frac{I'}{۲S} + ۲S[(k-۱)I + I'] = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I'[\frac{۱}{۲S} + ۲S + ۲] + I[۲S(k-۱) + ۲k] = ۰ \\ I'[۲S] + I[(k-۱)(۲S+۳)] = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲S} + ۲S + ۲ & ۲S(k-۱) + ۲k \\ ۲S & (k-۱)(۲S+۳) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I' \\ I \end{bmatrix} = ۰$$

برای به دست آوردن معادله مشخصه، دترمینان ماتریس امپدانس به دست آمده را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow [\frac{۱}{۲S} + ۲S + ۲][(k-۱)(۲S+۳)] - ۲S[۲S(k-۱) + ۲k] = ۰ \Rightarrow (۶k - ۱۰)S^۲ + ۷(k-۱)S + \frac{۳}{۲}(k-۱) = ۰$$

برای آن که یک چندجمله‌ای مشخصه از مرتبه ۲ پایدار باشد باید تمامی ضرایب آن هم علامت باشند:

$$۶k - ۱۰ > ۰ \ , \ ۷(k-۱) > ۰ \ , \ \frac{۳}{۲}(k-۱) > ۰ \Rightarrow k > \frac{۵}{۳}$$

یا

$$۶k - ۱۰ < ۰ \ , \ ۷(k-۱) < ۰ \ , \ \frac{۳}{۲}(k-۱) < ۰ \Rightarrow k < ۱$$

پس k باید خارج از بازه $[۱, \frac{۵}{۳}]$ باشد. برای بررسی حالات مرزی مستقیماً k را در معادله مشخصه قرار می‌دهیم:

$$k = ۱ \Rightarrow -۴S^۲ = ۰ \Rightarrow S_{۱,۲} = ۰$$

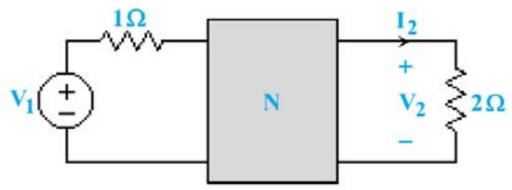
$$k = \frac{۵}{۳} \Rightarrow \frac{۱۴}{۳}S + ۱ = ۰ \Rightarrow S_۱ = -\frac{۳}{۱۴}$$

در حالت $k = ۱$، ریشه‌های مکرر روی محور $j\omega$ مدار را ناپایدار می‌کند و در حالت $k = \frac{۵}{۳}$ مدار پایدار است. با توجه به توضیحات ارائه شده محدوده مجاز k برای پایداری سیستم به صورت روبرو است:

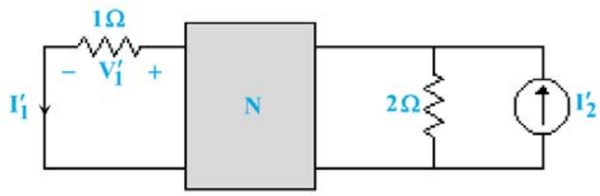
$$k \geq \frac{۵}{۳} \ , \ k < ۱$$

لذا گزینه (۲) پاسخ تست می‌باشد.

۱۰ـ گزینه «۴» با توجه به آزمایش‌های صورت گرفته مطابق با شکل‌های زیر، از بیان سوم قضیه هم‌پاسخی برای حل این تست استفاده می‌کنیم. با در نظر گرفتن مدار (ب) در حالت فازوری می‌توان نوشت: $\frac{V_۲(S=j)}{V_۱(S=j)}=\frac{I'_۱}{I'_۲}$



(الف)



(ب)

حال با توجه به اطلاعات صورت سوال داریم:

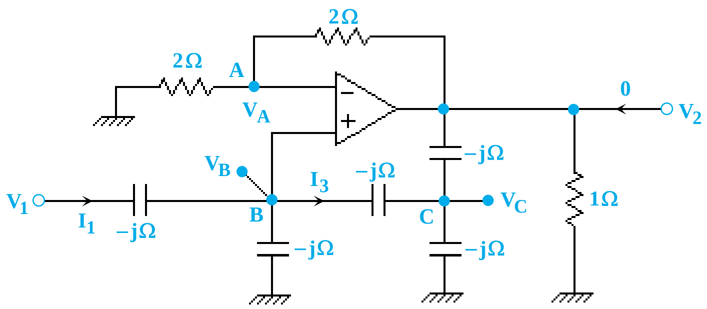
$$V_۱=\delta(t)\ \Rightarrow\ V_۱(S=j)=۱$$

$$V_۲=۲e^{-t}-e^{-۲t}\ \Rightarrow\ V_۲(S)=\frac{۲}{S+۱}-\frac{۱}{S+۲}\ \Rightarrow\ V_۲(S=j)=\frac{۲}{j+۱}-\frac{۱}{j+۲}=\frac{۳}{۵}-j\frac{۴}{۵}$$

$$I'_۲=۱\angle ۰$$

$$\frac{V_۲(S=j)}{V_۱(S=j)}=\frac{I'_۱}{I'_۲}\Rightarrow\frac{\frac{۳}{۵}-j\frac{۴}{۵}}{۱}=\frac{I'_۱}{۱}\ \Rightarrow\ I'_۱=\frac{۳}{۵}-j\frac{۴}{۵}\ \Rightarrow\ V'_۱(t)=۱\times I'_۱(t)=\frac{۳}{۵}\cos t+\frac{۴}{۵}\sin t$$

۱۱ـ گزینه «۲» با توجه به تعریف $Z_{۱۱}=\left.\frac{V_۱}{I_۱}\right|_{I_۲=۰}$، برای بدست آوردن رابطه $V_۱$ با $I_۱$ لازم است که در مسیر ولتاژ $V_۱$ به سمت درون مدار KVL زده شود. لذا باید ولتاژ پایه مثبت ورودی را بر حسب $V_۱$ محاسبه کنیم.



با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$\frac{V_A-V_۲}{۲}+\frac{V_A}{۲}=۰\ \Rightarrow\ V_A=\frac{۱}{۲}V_۲\qquad(۱)$$

با نوشتن KCL در گره C داریم: $\frac{V_C}{-j}+\frac{V_C-V_۲}{-j}+\frac{V_C-V_B}{-j}=۰$

لازم به ذکر است که به علت وجود فیدبک منفی، ولتاژ پایه‌های ورودی آپ‌امپ با هم برابر است. حال با توجه بـه ایـن مسئـله، معادلـه ناشـی از KCL در گره C را بازنویسی می‌کنیم.

$$V_A=V_B=\frac{۱}{۲}V_۲\ \Rightarrow\ ۳V_C-V_۲-V_B=۰\ \Rightarrow\ ۳V_C-V_۲-\frac{۱}{۲}V_۲=۰\ \Rightarrow\ V_C=\frac{۱}{۲}V_۲$$

$$V_A=V_B=V_C=\frac{۱}{۲}V_۲\ \Rightarrow\ I_۳=\frac{V_B-V_C}{-j}=۰$$

دقت شود که جریان پایه‌های ورودی آپ‌امپ صفر است. حال با نوشتن KVL در حلقه ورودی داریم:

$$V_۱=-jI_۱+(I_۱-I_۳)(-j)$$

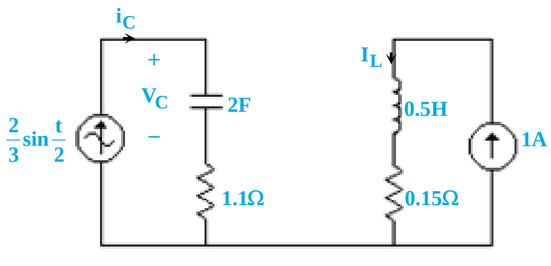
$$I_۳=۰\ \Rightarrow\ V_۱=-۲jI_۱\ \Rightarrow\ \mathbf{Z_{۱۱}=\frac{V_۱}{I_۱}=-j۲\Omega}$$

۱۲ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه ماتریس B به فرم استاندارد $B=[I \mid F]$ نمی‌باشد، ابتدا آن را به صورت استاندارد مرتب می‌کنیم. لذا به دنبال ستون‌هایی می‌گردیم که در آنها عدد یک، فقط یک بار تکرار شده باشد و بقیه درایه‌های آن ستون صفر باشد. در ادامه ستون‌های مذکور را طوری کنار هم قرار می‌دهیم که ماتریس واحد مربعی I تشکیل شود. حال داریم:

$$B=\left[\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

با توجه به ماتریس حلقه‌های اساسی B بدست آمده، شاخه‌های {۴,۳,۲,۱} که در قسمت ماتریس واحد I حضور دارند جزو لینک‌ها بوده و شاخه‌های {۵,۶,۷} که در قسمت ماتریس F حضور دارند، جزو شاخه‌های درخت هستند. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۱۳ـ گزینه «۳» مشخصاً ابتدا باید با تحلیل مدار در $t<0$، شرایط اولیه مدار را محاسبه نمود. مطابق با شکل زیر داریم:



$t<0$

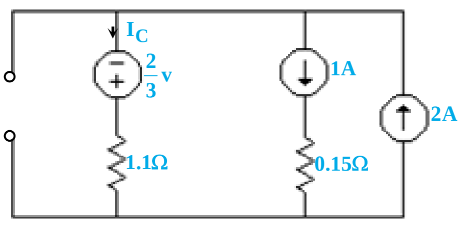
$$I_L(t=0)=1A$$

$$i_C=\frac{2}{3}\sin\frac{t}{2}$$

$$\Rightarrow V_C(t)=\frac{1}{2}\int i_C(t)\,dt=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times 2\times\left(-\cos\frac{t}{2}\right)=-\frac{2}{3}\cos\frac{t}{2}$$

$$\Rightarrow V_C(t=0^-)=-\frac{2}{3}v$$

حال مدار را در زمان‌های $t\ge 0$ در نظر می‌گیریم. با توجه به این‌که مدار فاقد منبع ضربه‌ای، کاتست سلفی و حلقه‌ی خازنی است، ولتاژ خازن و جریان سلف در لحظه‌ی $t=0$ تغییری نمی‌کند. در این لحظه می‌توان به شکل زیر $\frac{dV_C}{dt}$ را محاسبه کرد:

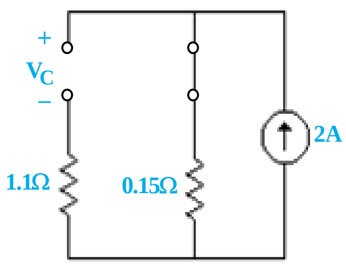


$t=0^+$

$$I_C(0^+)=2-1=1A$$

$$\frac{dV_C}{dt}(0^+)=\frac{1}{C}I_C(0^+)=\frac{1}{2}\times 1=+\frac{1}{2}\frac{v}{sec}$$

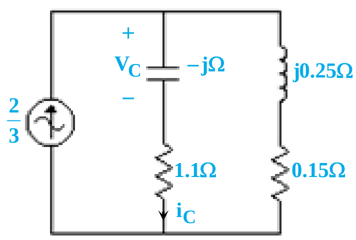
اکنون سعی می‌کنیم با تشخیص فرم پاسخ $V_C(t)$ و با استفاده از شرایط مرزی به دست آمده، $V_C(t)$ را محاسبه کنیم. دقت کنید که پاسخ کامل $V_C(t)$ شامل دو جزء ماندگار ناشی از منبع جریان DC و منبع جریان سینوسی است که می‌توان هر یک را جداگانه محاسبه نمود:



$t=\infty$، تحلیل DC

$$V_C(\text{ماندگار}-DC)=2\times 0.15=0.3v$$

تحلیل فازوری:



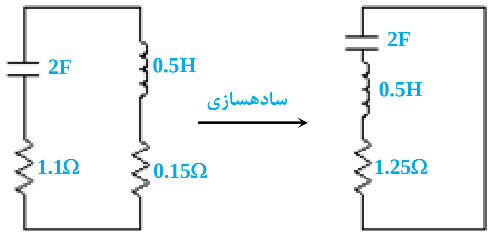
$\omega=\frac{1\,rad}{2\,sec}$، تحلیل فازوری

$$i_C=\frac{j0.25+0.15}{j0.25+0.15-j+1.1}\times\left(-\frac{2}{3}j\right)=\frac{j0.25+0.15}{-j0.75+1.25}\times\left(-\frac{2}{3}j\right)=\frac{2}{15}$$

$$V_C=-j\times i_C=-j\frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow V_C(\text{ماندگار}-AC)=\frac{2}{15}\sin\frac{t}{2}$$

از طرفی $V_C(t)$ شامل پاسخ گذرا نیز هست که می‌توان فرم آن را با استفاده از فرکانس‌های طبیعی مدار تعیین کرد. مطابق شکل با غیرفعال شدن منابع، یک مدار RLC سری داریم که به راحتی می‌توان معادله مشخصه آن و به دنبال آن فرم پاسخ گذرا را تعیین کرد:



$$\text{معادله مشخصه}: S^2+\frac{R}{L}S+\frac{1}{LC}=0$$

$$\Rightarrow S^2+2/5S+1=0 \Rightarrow \begin{cases} S_1=-2 \\ S_2=-0/5 \end{cases}$$

$$\text{فرم پاسخ گذرا}: Ae^{-2t}+Be^{-0/5t}$$

در نهایت داریم:

$$V_C(t)=0/3+\frac{2}{15}\sin\frac{t}{2}+Ae^{-2t}+Be^{-\frac{t}{2}} \qquad (t>0)$$

$$V_C(t=0)=-\frac{2}{3}v \Rightarrow 0/3+0+A+B=-\frac{2}{3} \Rightarrow A+B=-\frac{29}{30} \qquad (1)$$

$$\frac{dV_C}{dt}(t=0)=\frac{1}{2} \Rightarrow 0+\frac{2}{15}\times\frac{1}{2}-2A-\frac{B}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2A+\frac{B}{2}=-\frac{13}{30} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{30} \\ B=-1 \end{cases}$$

و لذا داریم:

$$V_C(t)=0/3+\frac{2}{15}\sin\frac{t}{2}+\frac{1}{30}e^{-2t}-e^{-\frac{t}{2}} \quad , \quad (t>0)$$

۱۴ـ گزینه «۲» برای حل این سؤال کافی است معادله‌ی مشخصه‌ی مدار را بدست آوریم:

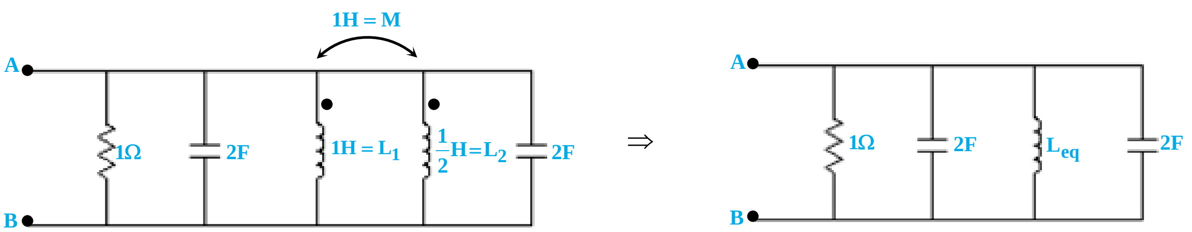
$$\text{معادله‌ی مشخصه}=\det(SI-A)=0 \qquad SI-A=\begin{bmatrix} S & 7 \\ -1 & S+8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(SI-A)=S^2+8S+7=(S+1)(S+7) \Rightarrow S=-1,-7$$

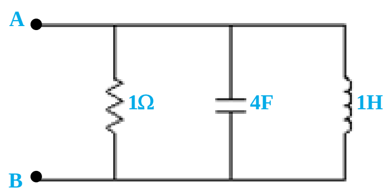
بنابراین فرم پاسخ مدار به شکل روبرو می‌باشد:

$$I_L(t)=k_1e^{-t}+k_2e^{-7t}$$

۱۵ـ گزینه «۲» برای حل سؤال، المان‌های سمت راست ترانس را به سمت چپ منتقل می‌کنیم.



$$L_{eq}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}=1H \Rightarrow$$



$$Y_{AB}=\frac{1}{1}+4j\omega+\frac{1}{1\times j\times\omega}=1+4j\omega-\frac{j}{\omega}=1+j[4\omega-\frac{1}{\omega}]$$

$$Im[Y_{AB}]=4\times\omega-\frac{1}{\omega}=0 \Rightarrow \begin{cases} \omega=\frac{1}{2}\frac{rad}{s} & \text{ق ق} \\ \omega=-\frac{1}{2}\frac{rad}{s} & \text{غ ق ق} \end{cases} \quad , \quad \omega=\frac{1}{2}\frac{rad}{s} \Rightarrow 2\pi\times f=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{f=\frac{1}{4\pi}\ \text{هرتز}}$$

پاسخنامه آزمون (۵)

تعداد سؤالات : ۱۵ — **سطح آزمون : (A)** (سخت)

۱ـ گزینه «۲» اگر ولتاژ گره بالایی مدار را V نام‌گذاری کنیم، با نوشتن رابطه KCL در این گره داریم:

$$\frac{V-۱}{۱}-\sin t+\frac{V}{۰/۷۵}+\frac{V}{۱}+\frac{V-\frac{۱-V}{۱}}{۱}=۰ \qquad (I_۱=\frac{۱-V}{۱})$$

$$\Rightarrow ۴V+\frac{۴}{۳}V-\sin t-۲=۰ \Rightarrow V=\frac{۳}{۸}+\frac{۳}{۱۶}\sin t$$

حال توان مصرفی R_L و توان تولیدی منابع مدار را یک به یک محاسبه می‌کنیم:

$$P_{R_L}=\text{متوسط}\ (\frac{V^۲}{۰/۷۵})=\frac{۴}{۳}\times\ \text{متوسط}\ [(\frac{۳}{۸}+\frac{۳}{۱۶}\sin t)^۲]=\frac{۴}{۳}\times(\frac{۹}{۶۴}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۹}{۲۵۶})=\frac{۲۷}{۱۲۸}W$$

$$P_{(۱v)}=\text{متوسط}\ [۱\times(۱-V)]=\text{متوسط}\ [\frac{۵}{۸}-\frac{۳}{۱۶}\sin t]=\frac{۵}{۸}W$$

$$P_{(\sin t)}=\text{متوسط}\ [\sin t\times(\frac{۳}{۸}+\frac{۳}{۱۶}\sin t)]=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۱۶}=\frac{۳}{۳۲}W$$

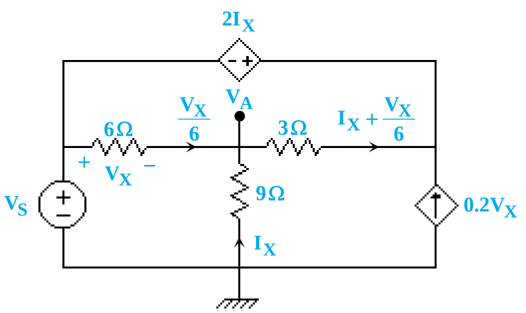
$$P_{\text{منبع وابسته}}=\text{متوسط}\ [I_۱\times(I_۱-V)]=\text{متوسط}[(۱-V)(۱-۲V)]=\text{متوسط}[(\frac{۵}{۸}-\frac{۳}{۱۶}\sin t)(\frac{۱}{۴}-\frac{۳}{۸}\sin t)]=\frac{۵}{۸}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۱۶}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۴۹}{۲۵۶}W$$

$$\frac{P_{R_L}}{\text{توان تولیدی مدار}}=\frac{P_{R_L}}{P_{(۱v)}+P_{(\sin t)}+P_{\text{منبع وابسته}}}=\frac{\frac{۲۷}{۱۲۸}}{\frac{۵}{۸}+\frac{۳}{۳۲}+\frac{۴۹}{۲۵۶}}=\frac{\frac{۲۷}{۱۲۸}}{\frac{۲۳۳}{۲۵۶}}=\frac{۵۴}{۲۳۳}\cong ۲۳\%$$

۲ـ گزینه «۳» ولتاژ دو سر مقاومت ۹ اهمی برابر ۲۷ ولت داده شده است.

لذا جریان I_X با توجه به جهت آن برابر است با:

$$I_X=\frac{-V_A}{۹}=\frac{-۲۷}{۹}=-۳A$$



با توجه به اینکه جریان مقاومت ۶ اهمی برابر $\frac{V_X}{۶}$ می‌باشد، با نوشتن KCL در گره A جریان مقاومت ۳ اهمی نیز بر حسب I_X و V_X مشخص می‌شود.

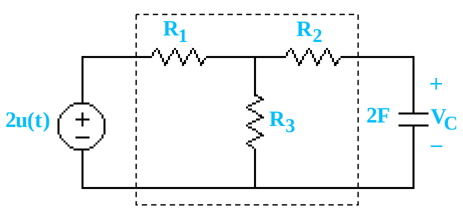
با نوشتن KVL در حلقه بالایی مدار داریم:

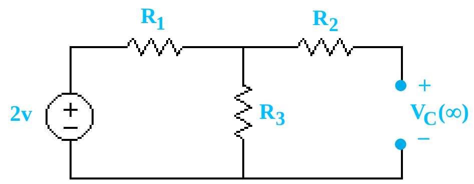
$$V_X+۳(I_X+\frac{V_X}{۶})+۲I_X=۰ \Rightarrow V_X+۳(-۳+\frac{V_X}{۶})+۲(-۳)=۰ \Rightarrow V_X+(-۹)+\frac{۱}{۲}V_X-۶=۰ \Rightarrow V_X=+۱۰\,v$$

حال با اعمال KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$V_S=V_X+V_A=۱۰+۲۷=۳۷v$$

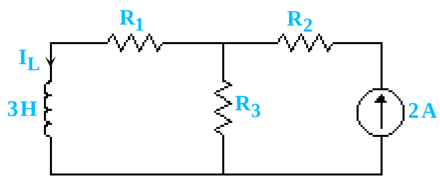
۳ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه شبکه N بصورت مقاومتی است، دارای یک مدار معادل T مقاومتی بصورت روبرو است.





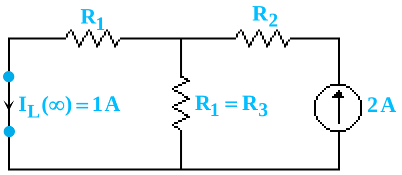
در صورتی که مدار بالا را در $t=\infty$ ترسیم کنیم، خازن با مدار باز مدل می‌شود. حال در این حالت ولتاژ خازن را از قانون تقسیم ولتاژ محاسبه می‌کنیم.

$$V_C(\infty)=\frac{2\times R_3}{R_1+R_3}$$



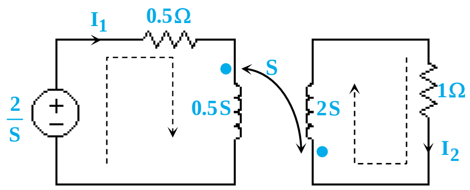
با توجه به معادله $V_C(t)$ در $t=\infty$ داریم:

$$V_C(t=\infty)=1 \Rightarrow \frac{2R_3}{R_1+R_3}=1 \Rightarrow R_1=R_3$$



حال در شرایط جدید به جای خازن، یک منبع جریان 2A قرار می‌دهیم و به جای منبع ولتاژ، یک سلف ۳ هانری جایگزین می‌کنیم. در $t=\infty$ یا حالت ماندگار، سلف با اتصال کوتاه مدل می‌شود و به علت مساوی بودن R_1 و R_3 جریان I_L نصف مقدار منبع جریان و برابر با ۱ آمپر خواهد بود.

۴ـ گزینه «۱» ابتدا مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم و در حلقه‌های مدار KVL می‌زنیم. با توجه به این که هر دو جریان I_1 و I_2 به صورت وارد شونده به نقطه‌ها هستند، القای متقابل در سیم‌پیچ‌ها مثبت در نظر گرفته می‌شود.



با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$I_2\times 1+2SI_2+SI_1=0 \Rightarrow SI_1+(1+2S)I_2=0 \qquad (1)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$-\frac{2}{S}+0.5I_1+0.5SI_1+SI_2=0 \Rightarrow (0.5+0.5S)I_1+SI_2=\frac{2}{S} \qquad (2)$$

با به دست آوردن I_1 از معادله (۱) بر حسب I_2 داریم:

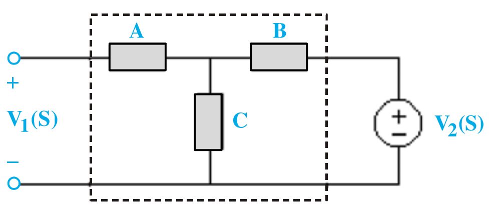
$$\xrightarrow{(1)} I_1=\frac{-(1+2S)}{S}I_2 \qquad (3)$$

از ترکیب روابط (۲) و (۳) داریم:

$$\xrightarrow{(2),(3)} (0.5+0.5S)\times\frac{-(1+2S)}{S}I_2+SI_2=\frac{2}{S} \Rightarrow ((1+S)\times(-1-2S)+2S^2)I_2=4$$

$$\Rightarrow I_2=\frac{-4}{1+3S}=\frac{-\frac{4}{3}}{S+\frac{1}{3}} \Rightarrow I_2(t)=-\frac{4}{3}e^{-\frac{1}{3}t} \Rightarrow I_2(t=3\sec)=-\frac{4}{3}e^{-1}A$$

۵ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه شبکه N شامل R و L و C است، می‌توان یک مدار معادل T برای آن به صورت زیر در نظر گرفت. در آزمایش اول با توجه به رابطه تقسیم ولتاژ داریم:

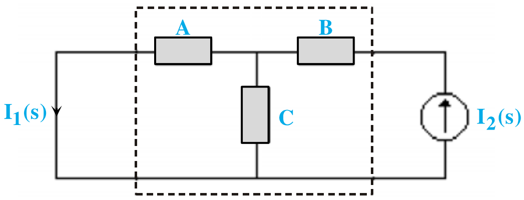


$$V_1(S)=V_2(S)\times\frac{C}{C+B}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1(S)}{V_2(S)}=\frac{C}{C+B}=\frac{S^2}{S^2+S+1}=\frac{S}{S+\frac{1}{S}+1}$$

$$\Rightarrow \frac{C}{C+B}=\frac{S}{S+\frac{1}{S}+1} \Rightarrow \begin{cases} C=S \\ B=1+\frac{1}{S} \end{cases}$$

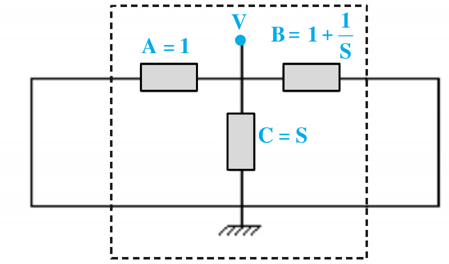
در آزمایش دوم با توجه به رابطه تقسیم جریان داریم:



$$I_۱(S)=I_۲(S)\times\frac{C}{A+C}\ \Rightarrow\ \frac{I_۱(S)}{I_۲(S)}=\frac{C}{A+C}$$

$$\Rightarrow\ \frac{C}{A+C}=\frac{S}{S+۱}\ ,\ C=S\ \Rightarrow\ A=۱$$

با توجه به مقادیر A و B و C بدست آمده در شرایط آزمایش سوم مدار را ترسیم می‌کنیم و با نوشتن KCL در گره بالای مدار، معادله مشخصه را بدست می‌آوریم:



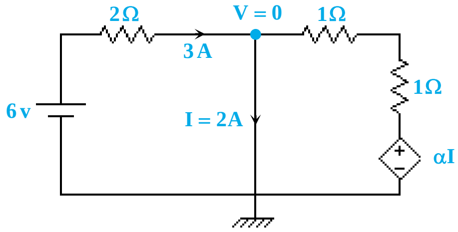
$$\frac{V}{S}+\frac{V}{۱}+\frac{V}{۱+\frac{۱}{S}}=۰\ \Rightarrow\ \frac{۱}{S}+۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{S}}=۰$$

$$\Rightarrow\ \frac{۱}{S}+۱+\frac{S}{S+۱}=۰\ \Rightarrow\ S+۱+S(S+۱)+S^۲=۰$$

$$\Rightarrow\ ۲S^۲+۲S+۱=۰\ \Rightarrow\ S^۲+S+\frac{۱}{۲}=۰$$

$$S_۱,S_۲=\frac{-۱\pm j}{۲}$$

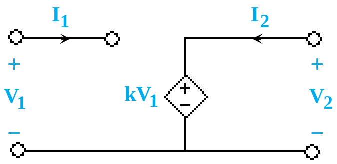
۶ـ گزینه «۲» برای عبور جریان I به اندازه ۲A، در حالتی که $V_S>۰$ باشد، باید دیود هدایت کرده و اتصال کوتاه شود. حال با اعمال تبدیل منابع در سمت راست مدار و اتصال کوتاه کردن دیود در گره بالای مدار KCL می‌زنیم.



$$۳A=I+\frac{۰-\alpha I}{۲}\ \text{و}\ I=۲A\ \Rightarrow\ ۳A=۲+\frac{-۲\alpha}{۲}\ \Rightarrow\ \alpha=-۱$$

لازم به ذکر است به ازای $V_S<۰$ دیود هدایت نمی‌کند و جریان I صفر است.

۷ـ گزینه «۳» با توجه به رابطه $\begin{cases}I_۱=۰\\ V_۲=kV_۱\end{cases}$، به نتایج زیر می‌رسیم:



۱) معادلات T را می‌توان به شکل $\begin{cases}I_۱=۰\,V_۲+۰\,I_۲\\ V_۱=\frac{۱}{k}V_۲+۰\,I_۲\end{cases}$ نوشت.

۲) واضح است $I_۱$ و $I_۲$ را نمی‌توان برحسب $V_۱$ و $V_۲$ نوشت، پس نوشتن معادلات ادمیتانس (Y) ممکن نیست.

۳) $I_۲$ را نمی‌توان برحسب $I_۱$ و $V_۲$ نوشت، پس نوشتن پارامترهای هایبرید (H) ممکن نیست.

۴) $V_۱$ و $V_۲$ را نمی‌توان بر حسب $I_۱$ و $I_۲$ نوشت، پس نوشتن پارامترهای امپدانس (Z) ممکن نیست.

۸ـ گزینه «۴» برای بدست آوردن مقاومت تونن از دو سر b و a، می‌توان یک منبع جریان در نقاط a و b قرار داد و ولتاژ دو سر آن را به جریان آن تقسیم کرد. در این سؤال، می‌توان این منبع جریان را همان منبع جریان ۳ آمپر فرض کرد. لازم به ذکر است که در این حالت، بقیه منابع مستقل ولتاژ و جریان (که در اینجا فقط منبع ولتاژ $۲\cos t$ است) باید حذف شوند. بنابراین قسمت کسینوسی I نیز صفر خواهد شد. حال داریم:

$$I=۲A\ \Rightarrow\ V_{ab}=۲I=۲\times۲=۴v\ \Rightarrow\ \mathbf{R_{th}}=\frac{\mathbf{V_{ab}}}{\mathbf{۳}}=\frac{۴}{۳}\Omega$$

۹ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه پاسخ مدار به ورودی $e^{-t}u(t)$ بصورت $\frac{۱}{۲}(e^{-t}-e^{-۳t})u(t)$ است، می‌توان مقدار پاسخ را در $t=۱sec$ بدست آورد.

$$f(t=۱)=\frac{۱}{۲}[e^{-۱}-e^{-۳}]$$

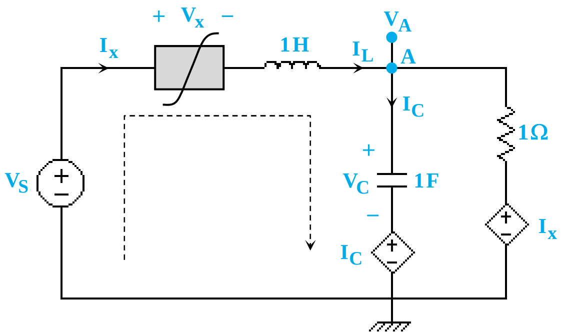
بعد از $t=۱sec$ مدار دارای ورودی نمی‌باشد و با توجه به اینکه مدار مرتبه اول است، می‌توان پاسخ خروجی را به ورودی صفر از فرمول کلی مدارهای مرتبه اول محاسبه کرد. دقت کنید که مقدار $f(t=۱)$ به عنوان شرایط اولیه در مدار عمل خواهد کرد. همچنین با توجه به پاسخ مدار به ورودی

$e^{-t}u(t)$ دیده می‌شود که $f(\infty)=0$ است. لذا در صورت صفر بودن ورودی مدار نیز مقدار $f(\infty)=0$ خواهد بود. دقت کنید که با صفر شدن ورودی، فقط فرکانس طبیعی مدار که $S=-۳$ است، در خروجی ظاهر می‌شود.

$$f(t)=f(\infty)+[f(۱^+)-f(\infty)]e^{-\frac{t-۱}{\tau}} \qquad \text{و} \qquad f(t>۱)=f(۱^+)e^{-۳(t-۱)}$$

$$f(t>۱)=\frac{۱}{۲}[e^{-۱}-e^{-۳}]e^{-۳(t-۱)} \Rightarrow f(t>۱)=\frac{۱}{۲}[e^{-۱}-e^{-۳}]e^{-۳t}\cdot e^{۳} \Rightarrow f(t>۱)=\frac{۱}{۲}[e^{۲}-۱]e^{-۳t}$$

۱۰ـ گزینه «۴» برای بدست آوردن معادلات حالت، ابتدا در حلقه سمت چپ KVL می‌زنیم.



$$-V_S+V_x+L\frac{dI_L}{dt}+V_C+I_C=0$$

$$\Rightarrow -V_S+V_x+\frac{dI_L}{dt}+V_C+\frac{dV_C}{dt}=0 \qquad (۱)$$

در ادامه V_A را بر حسب V_C و I_C بدست می‌آوریم.

$$V_A=V_C+I_C \qquad (۲)$$

با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$I_L=I_C+\frac{V_A-I_x}{R} \qquad (۳)$$

$$I_x=I_L$$

از ترکیب روابط (۲) و (۳) داریم:

$$I_C=C\frac{dV_C}{dt}=\frac{dV_C}{dt} \Rightarrow I_L=\frac{dV_C}{dt}+\frac{V_C+\frac{dV_C}{dt}-I_L}{۱} \Rightarrow \mathbf{\frac{dV_C}{dt}=I_L-\frac{۱}{۲}V_C} \qquad (۴)$$

با توجه به رابطه $I_x^۳-I_x=V_x$ و برابری I_x با I_L داریم:

$$I_L^۳-I_L=V_x \qquad (۵)$$

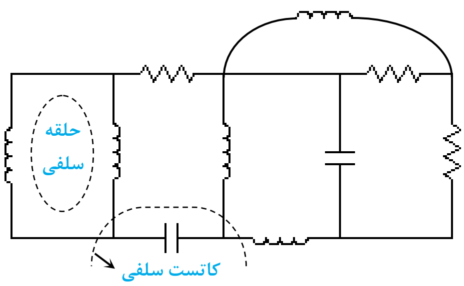
از ترکیب روابط (۱) و (۴) و (۵) داریم:

$$-V_s+I_L^۳-I_L+\frac{dI_L}{dt}+V_C+I_L-\frac{۱}{۲}V_C=0 \Rightarrow \mathbf{\frac{dI_L}{dt}=-I_L^۳-\frac{۱}{۲}V_C+V_s} \qquad (۶)$$

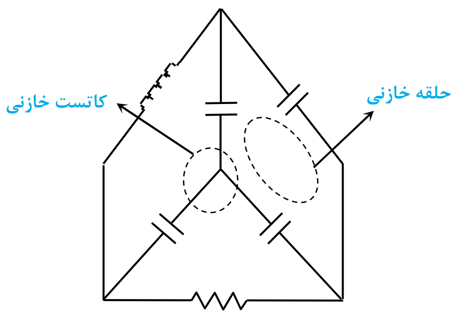
با کنار هم قرار دادن روابط (۴) و (۶) داریم:

$$\begin{cases}\frac{dV_C}{dt}=I_L-\frac{۱}{۲}V_C\\ \frac{dI_L}{dt}=-I_L^۳-\frac{۱}{۲}V_C+V_s\end{cases}$$

۱۱ـ گزینه «۱»



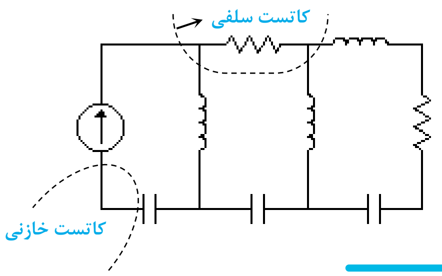
در مدار (الف) تعداد ۷ المان ذخیره‌کننده انرژی وجود دارد. با توجه به وجود یک کاتست سلفی در مدار، از این تعداد یک واحد کم می‌شود. لذا مدار دارای ۶ فرکانس طبیعی است. با توجه به وجود یک حلقه سلفی در مدار یک فرکانس طبیعی صفر نیز در مدار وجود دارد. لذا مدار دارای ۵ فرکانس طبیعی غیرصفر است.



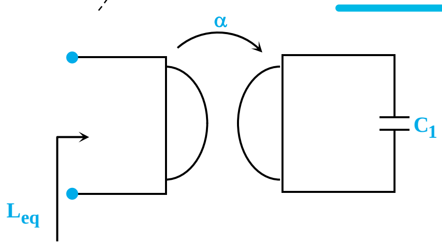
حال به بررسی مدار (ب) می‌پردازیم. در این مدار مقاومت بالای مدار که با اتصال کوتاه موازی است، حذف می‌شود و مدار بصورت روبرو ساده می‌شود.

در مدار ساده شده تعداد ۵ المان ذخیره‌کننده انرژی وجود دارد. حال با توجه به وجود یک حلقه خازنی از این تعداد یک واحد کم می‌شود. لذا این مدار دارای ۴ فرکانس طبیعی است. با توجه به وجود یک کاتست خازنی یکی از این فرکانس‌ها برابر صفر است و مدار (ب) دارای ۳ فرکانس طبیعی غیرصفر است.

مدار (ج) دارای ۶ المان ذخیره‌کننده انرژی می‌باشد. با توجه به وجود یک کاتست سلفی از این تعداد یک واحد کم می‌شود. لذا مدار دارای ۵ فرکانس طبیعی است. با توجه به وجود یک کاتست خازنی، یک فرکانس صفر در مدار وجود دارد. لذا مدار (ج) دارای ۴ فرکانس طبیعی غیرصفر است.

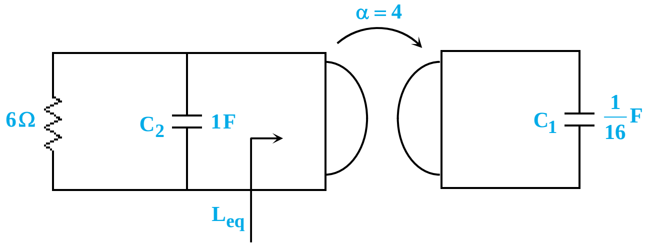


۱۲ـ گزینه «۲» ابتدا به محاسبه فرکانس زاویه‌ای رزونانس مدار شکل (۱) می‌پردازیم. در ابتدا باید توجه شود که مدار ژیراتور می‌تواند خازن را به سلف تبدیل کند. تبدیل خازن به سلف مطابق با فرمول روبرو انجام می‌شود.

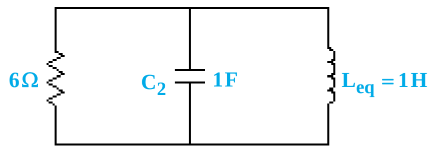


حال می‌توان نوشت: $L_{eq}=\alpha^{۲}.C_{۱}$

$$L_{eq}=\alpha^{۲}.C_{۱}=۴^{۲}\times\frac{۱}{۱۶}=۱H$$

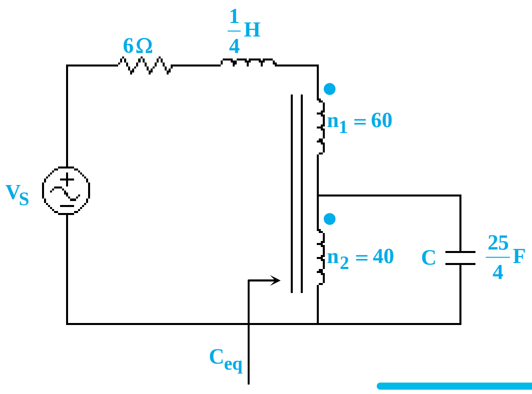


با معادل‌گذاری L_{eq} در مدار داریم:



$$\Rightarrow \omega_r=\frac{۱}{\sqrt{L_{eq}.C_{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{۱\times۱}}=۱(\frac{rad}{sec})$$

در ادامه به محاسبه فرکانس زاویه‌ای رزونانس مدار (۲) می‌پردازیم. ابتدا باید مقدار C_{eq} را بدست آوریم. با توجه به نسبت تبدیل اتوترانس داریم:

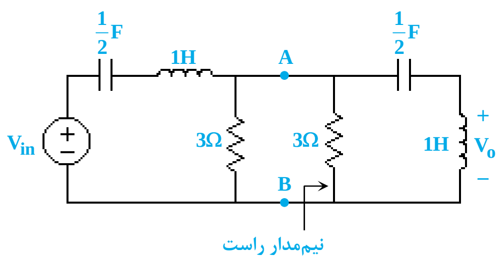


$$C_{eq}=(\frac{n_{۲}}{n_{۱}+n_{۲}})^{۲}.C=(\frac{۴۰}{۶۰+۴۰})^{۲}\times\frac{۲۵}{۴}=۱F$$

$$\omega_r=\frac{۱}{\sqrt{L.C_{eq}}}=\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۴}\times۱}}=۲(\frac{rad}{sec})$$

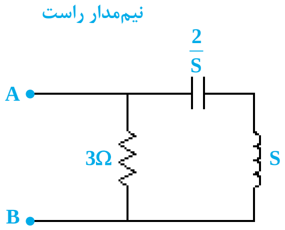
با توجه به فرکانس‌های زاویه‌ای بدست آمده، فرکانس زاویه‌ای رزونانس مدار شکل (۱)، نصف فرکانس زاویه‌ای رزونانس مدار شکل (۲) می‌باشد.

۱۳ـ گزینه «۴» یک راه‌حل این سؤال بردن به حوزه لاپلاس و نوشتن روابط KVL و KCL است که ممکن است وقت‌گیر باشد. راه‌حل دیگر به این صورت است که می‌توان از تقارن مدار برای محاسبه‌ی تابع انتقال $H(S)$ استفاده کرد. مدار را می‌توان به صورت شکل زیر در نظر گرفت:

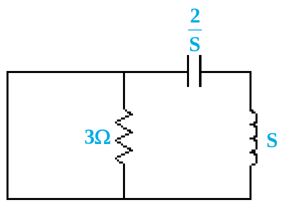


در مدار فوق، فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار، اجتماع فرکانس‌های طبیعی مدار باز و اتصال کوتاه نیم‌مدار راست می‌باشد که به صورت زیر است:

حالت مدار باز =



$$S+\frac{۲}{S}+۳=۰\Rightarrow S^{۲}+۳S+۲=۰\Rightarrow(S+۱)(S+۲)=۰$$



حالت اتصال کوتاه =

$$S+\frac{۲}{S}=۰ \Rightarrow S^۲+۲=۰$$

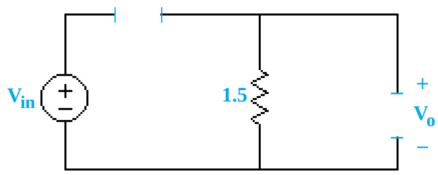
مدار دارای ۲ خازن و ۲ سلف است و شامل هیچ کات‌ست سلفی و حلقه خازنی نیست. پس مدار مرتبه ۴ است. پس در مخرج $H(S)$ حداکثر از درجه ۴ می‌تواند باشد. مخرج $H(S)$ به صورت $(S+۱)(S+۲)(S^۲+۲)$ است. حال به بررسی صورت می‌پردازیم. V_o وقتی می‌تواند صفر شود که $S=۰$ باشد. درجه S مهم است.

تا این جای کار، فقط گزینه‌های (۲) و (۴) در مخرج خود عبارت $(S+۱)(S+۲)(S^۲+۲)$ را دارند.

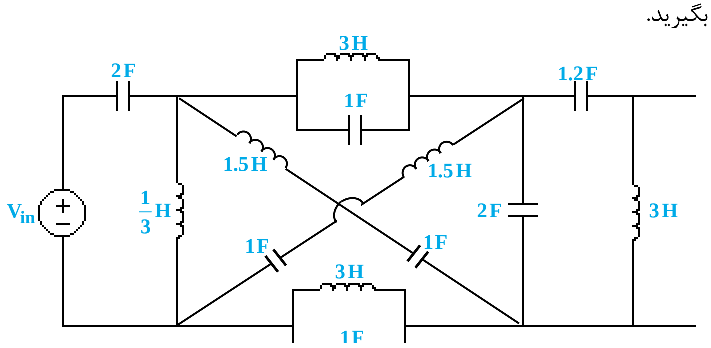
در گزینه‌ی ۲، درجه صورت و مخرج، برابر است یعنی در $S=\infty$، $H(S)$ عددی غیرصفر است.

در $S=\infty$ مدار را رسم می‌کنیم. در این حالت $(V_o=۰)$ است.

پس درجه صورت $S^۴$ نمی‌تواند باشد و گزینه (۴) صحیح است.



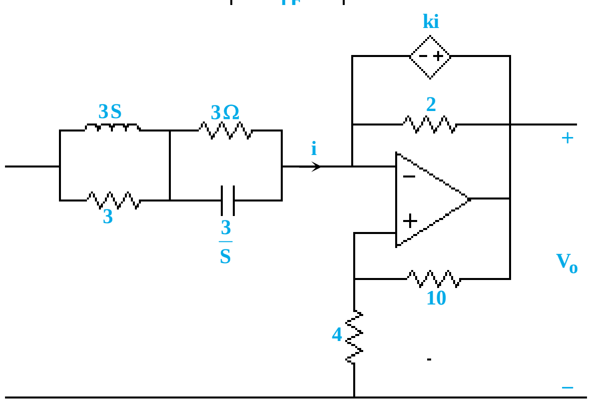
۱۴ــ گزینه «۳» برای حل این تست ابتدا قسمت سمت چپ مدار را در نظر بگیرید.



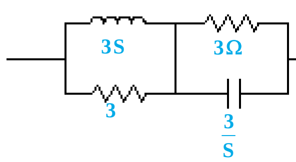
از آن جا که این مدار تنها از سلف و خازن با مقادیر مثبت تشکیل شده و شامل هیچ مقاومت و منبع وابسته‌ای نیست، فرکانس‌های طبیعی همگی بر روی محور $j\omega$ قرار دارند.

حال اگر قسمت سمت راست مدار نیز به صورت موهومی خالص یا مقاومتی با اندازه صفر باشد، تمامی قطب‌های شبکه آن گاه روی محور $j\omega$ است.

حال مدار معادل سمت راست را به دست می‌آوریم. برای این کار مدار را به حوزه لاپلاس می‌بریم:



امپدانس معادل

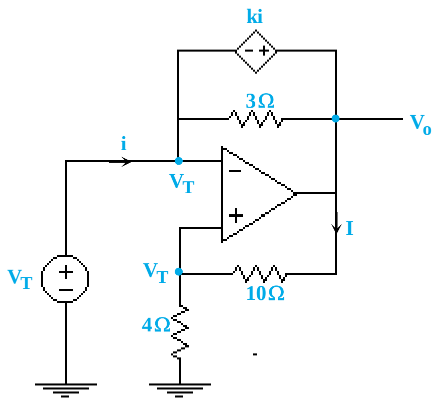


برابر است با:

$$(۳\,||\,۳S)+(۳\,||\,\frac{۳}{S})=\frac{۳(۳S)}{۳+۳S}+\frac{۳(\frac{۳}{S})}{۳+\frac{۳}{S}}=\frac{۳S}{S+۱}+\frac{۳}{S+۱}=۳\Omega$$

حال امپدانس دیده شده از دو سر آپ‌امپ را می‌یابیم. برای این کار از منبع تست V_T که جریان I_T از آن خارج می‌شود استفاده می‌کنیم.

می‌دانیم که در آپ‌امپ ایده‌آل ولتاژ پایانه‌های آپ‌امپ با هم برابر بوده و جریان ورودی به آن‌ها صفر است. بنابراین ولتاژ پایه‌ی پایینی آپ‌امپ برابر V_T می‌شود.



ولتاژ خروجی آپ‌امپ برابر است با:

$$-V_T-ki+V_o=۰ \Rightarrow V_o=V_T+ki$$

جریان مقاومت ۱۰Ω برابر است با:

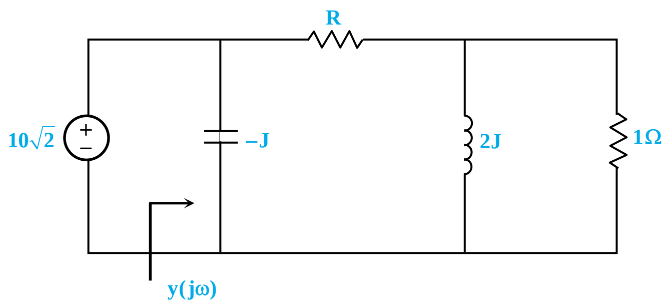
$$I=\frac{V_o-V_T}{۱۰}=\frac{ki}{۱۰}$$

تمام این جریان I وارد مقاومت ۴Ω می‌شود که جریانش $\frac{V_T}{۴}$ است. پس داریم: $I=\frac{ki}{۱۰}=\frac{V_T}{۴} \Rightarrow V_T=۰/۴ki \Rightarrow$ مقاومت دیده شده $=۰/۴k$

از آن جا که این مقاومت معادل با مقاومت ۳Ω سری است، پس اگر حاصل معادل آن‌ها صفر باشد، تمام قطب‌های سیستم روی محور $j\omega$ قرار می‌گیرد.

$۳+۰/۴k=۰ \Rightarrow k=-۷/۵$

۱۵ـ گزینه «۳» $Y(j\omega)$ را پیدا می‌کنیم:



$$Y(j\omega)=j+\cfrac{۱}{R+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۲j}}}=j+\frac{۱+۲j}{R+j(۲R+۲)}$$

$$P=(V_{rms})^۲\,Y(j\omega)=۱۰۰[j+\frac{۱+۲j}{R+j(۲R+۲)}]=۱۰۰[j+\frac{R+۴(R+۱)+j(۲R-۲R-۲)}{R^۲+۴(R+۱)^۲}]$$

$$\xrightarrow{\text{توان حقیقی مطلوب}} Re\{P\}=۱۰۰[\frac{۵R+۴}{R^۲+۴(R+۱)^۲}]$$

با استفاده از $\frac{\partial P}{\partial R}=۰$ نقاط اکسترمم برای تابع $\frac{\partial P}{\partial R}$ را به دست آورده که در واقع همان ریشه‌های صورت هستند.

$$\xrightarrow{\text{به منظور بیشینه شدن}} \frac{\partial P}{\partial R}=\frac{-۲۵R^۲-۴۰R-۱۲}{(R^۲+۴(R+۱)^۲)^۲}=۰ \to R=\begin{cases}-۰/۲\Omega & \text{غ ق ق}\\ -۰/۶\Omega & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

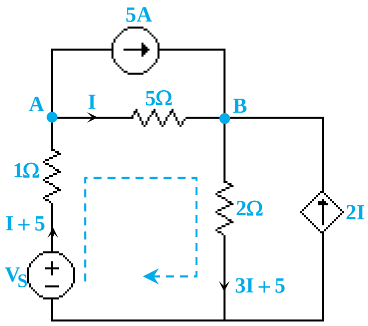
به علت این که $R\geq ۰$ و تابع $\frac{\partial P}{\partial R}$ همواره منفی است، پس تابع $\frac{\partial P}{\partial R}$ نزولی می‌باشد. به همین علت با افزایش مقدار R ، تابع توان کوچکتر خواهد شد. در نتیجه نقطه شروع R که در واقع همان صفر است، بیشینه توان منبع است.

$$P_{max}=۱۰۰\times\frac{۴}{۴}=۱۰۰w$$

پاسخنامه آزمون (۶)

تعداد سؤالات : ۱۵ | **سطح آزمون : (A)** (سخت)

۱ـ گزینه «۲» با توجه به خواسته سؤال لازم است که جریان مقاومت ۲ اهمی برحسب V_S محاسبه شود. حلقه‌های سمت راست و بالای مدار به علت وجود منبع جریان، برای KVL مناسب نمی‌باشد، لذا برای حل مدار کافیست که در حلقه سمت چپ KVL بزنیم. با انجام این کار ابتدا جریان I را محاسبه می‌کنیم و سپس با محاسبه جریان مقاومت ۲ اهم، توان آن را برحسب منبع ولتاژ V_S محاسبه می‌کنیم.



KCL(A): جریان مقاومت ۱ اهم $= I+۵$

KCL(B): جریان مقاومت ۲ اهم $= I+۵+۲I = ۳I+۵$

با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ، داریم:

$$-V_S + ۱\times(I+۵) + ۵I + ۲(۳I+۵) = ۰ \Rightarrow I = \frac{V_S}{۱۲} - \frac{۵}{۴} \quad (۱)$$

با توجه به محاسبه جریان I بر حسب V_S، جریان مقاومت ۲ اهم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

جریان مقاومت ۲ اهمی $= ۳I+۵ = ۳(\frac{V_S}{۱۲}-\frac{۵}{۴})+۵ = \frac{V_S}{۴}+\frac{۵}{۴}$ و توان مقاومت ۲ اهمی $= P = (I_{۲\Omega})^۲ \times ۲ = (\frac{V_S}{۴}+\frac{۵}{۴})^۲ \times ۲$

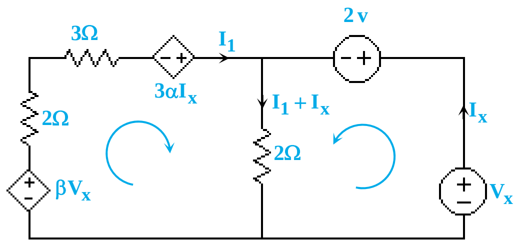
اگر منبع V_S، طبق اطلاعات سوال یک ولت باشد، داریم: $P = (\frac{۱}{۴}+\frac{۵}{۴})^۲ \times ۲ = ۴/۵W$

اگر توان مقاومت ۲ اهمی، $\frac{۱۳}{۸}$ وات اضافه شود، داریم: $P' = ۴/۵ + \frac{۱۳}{۸} = \frac{۴۹}{۸}W \Rightarrow P' = (\frac{V'_S}{۴}+\frac{۵}{۴})^۲ \times ۲ \Rightarrow \frac{۴۹}{۸} = (\frac{V'_S}{۴}+\frac{۵}{۴})^۲ \times ۲$

$$\Rightarrow \frac{۴۹}{۱۶} = (\frac{V'_S}{۴}+\frac{۵}{۴})^۲ \Rightarrow \frac{۷}{۴} = \frac{V'_S}{۴}+\frac{۵}{۴} \Rightarrow \mathbf{V'_S = ۲v}$$

باتوجه به V'_S جدید به دست آمده، باید V_S دو برابر شود.

۲ـ گزینه «۳» برای تشخیص اینکه به ازای چه مقادیری از α و β مدار معادل‌های تونن و نورتن امکان وجود دارند، لازم است که ابتدا مدار معادل‌های تونن و نورتن را برحسب پارامترهای α و β محاسبه کرد. با تبدیل منابع در سمت چپ مدار و اعمال V_x به مدار، رابطه V_x و I_x را به دست می‌آوریم.



با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$-V_x + ۲ + ۲(I_۱+I_x) = ۰ \Rightarrow -V_x + ۲I_x + ۲I_۱ + ۲ = ۰ \quad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ مدار، داریم:

$$-\beta V_x + ۵I_۱ - ۳\alpha I_x + ۲(I_۱+I_x) = \Rightarrow -\beta V_x + ۷I_۱ + I_x(۲-۳\alpha) = ۰ \quad (۲)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) و حذف جریان $I_۱$، داریم:

$$\xrightarrow{(۱)} I_۱ = -۱ - I_x + \frac{۱}{۲}V_x \quad (۳)$$

$$\xrightarrow{(۳),(۲)} -\beta V_x + ۷(-۱ - I_x + \frac{۱}{۲}V_x) + I_x(۲-۳\alpha) = ۰ \Rightarrow V_x = I_x(\frac{۵+۳\alpha}{۳/۵-\beta}) + \frac{۷}{۳/۵-\beta}$$

با توجه به رابطه $V_x = R_{th}I_x + V_{th}$، مقادیر V_{th} و R_{th} به صورت زیر است:

$$\mathbf{R_{th}} = \frac{۵+۳\alpha}{۳/۵-\beta} \quad و \quad \mathbf{V_{th}} = \frac{۷}{۳/۵-\beta} \quad و \quad I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}} = \frac{\frac{۷}{۳/۵-\beta}}{\frac{۵+۳\alpha}{۳/۵-\beta}} \Rightarrow \mathbf{I_N} = \frac{۷}{۵+۳\alpha} \quad و \quad \mathbf{R_N} = \frac{۵+۳\alpha}{۳/۵-\beta}$$

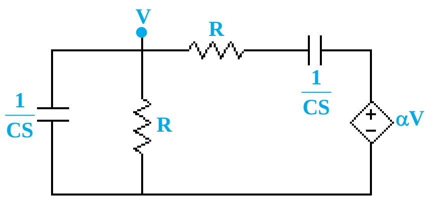
با توجه به روابط بالا دیده می‌شود به ازای $\beta=\frac{7}{2}$ مقدار R_{th} و V_{th} بی‌نهایت بوده و در این حالت مدار معادل تونن موجود نیست. همچنین به ازای مقدار $\alpha=-\frac{5}{3}$ ، R_N برابر صفر و I_N بی‌نهایت است؛ پس در این حالت مدار معادل نورتن موجود نمی‌باشد:

$\beta\neq\frac{7}{2}\Rightarrow$ مدار معادل تونن موجود است و $\alpha\neq-\frac{5}{3}\Rightarrow$ مدار معادل نورتن موجود است

دقت کنید که بی‌نهایت شدن R_N در حالت $\beta=\frac{7}{2}$ دلیلی بر عدم وجود مدار معادل نورتن در این حالت نمی‌باشد؛ در واقع در این حالت مدار، مشابه یک منبع جریان عمل می‌کند.

با توجه به موارد بالا تنها گزینه غلط، همان گزینه (۳) است.

۳ـ گزینه «۱» برای وجود حالت نوسان‌سازی در مدار، باید ریشه‌های معادله مشخصه مدار روی محور $j\omega$ باشند. حال با نوشتن KCL در گره بالای مدار، معادله مشخصه مدار را به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{V}{R}+CSV+\frac{V-\alpha V}{R+\frac{1}{CS}}=0 \Rightarrow \frac{[R+\frac{1}{CS}]+CS(R(R+\frac{1}{CS}))+R(1-\alpha)}{R(R+\frac{1}{CS})}V=0$$

$$\Rightarrow R+\frac{1}{CS}+CSR^2+R+R(1-\alpha)=0\Rightarrow CR^2S^2+S(2R+R(1-\alpha))+\frac{1}{C}=0$$

برای اینکه ریشه‌های معادله مشخصه روی محور $j\omega$ باشند، لازم است که ضریب S در معادله مشخصه مدار صفر باشد.

$$2R+R(1-\alpha)=0 \Rightarrow 2+1-\alpha=0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha=3}$$

۴ـ گزینه «۱» برای جذب توان حداکثر توسط شبکه N، باید امپدانس شبکه برابر با مزدوج امپدانس Z_S شود. حال داریم:

$$Z_n=3+(\frac{2}{4})^2[\frac{1}{j4C}+\frac{R\times j4}{R+j4}] \Rightarrow Z_n=3+\frac{1}{4}[\frac{-j}{4C}+\frac{16R}{R^2+16}+j\frac{4R^2}{R^2+16}] \Rightarrow Z_n=3+\frac{4R}{R^2+16}+j[\frac{-1}{16C}+\frac{R^2}{R^2+16}]$$

$$Z_n=Z_S^* \Rightarrow 3+\frac{4R}{R^2+16}+j[-\frac{1}{16C}+\frac{R^2}{R^2+16}]=(3/5-j4)\Omega$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3+\frac{4R}{R^2+16}=3/5 \Rightarrow \mathbf{R=4\Omega} \\ \frac{R^2}{R^2+16}-\frac{1}{16C}=-4 \Rightarrow \frac{4^2}{4^2+16}-\frac{1}{16C}=-4\Rightarrow \mathbf{C=\frac{1}{72}F} \end{cases}$$

۵ـ گزینه «۲» برای محاسبه V_{in} ، در زمان $t=0^+$ ، لازم است که مقدار I_{in} ، از حاصل‌جمع I_C و I محاسبه شود. حال ابتدا V_C را محاسبه کرده و سپس I_C را به دست می‌آوریم:

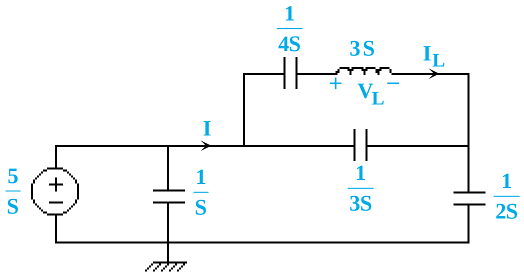
$$V_C=3I+4\frac{dI}{dt}=3\times3\sin t+4\times3\cos t$$

$$I_C=C\frac{dV_C}{dt}=2\times[9\cos t-12\sin t]$$

$$I_{in}=I_C+I=18\cos t-24\sin t+3\sin t \Rightarrow I_{in}=18\cos t-21\sin t \Rightarrow I_{in}(0^+)=18A$$

با استفاده از نمودار $(V_{in}-I_{in})$ ، اگر $I_{in}(0^+)=18A$ باشد، مقدار V_{in} به صورت مقابل است: $\mathbf{V_{in}(0^+)=4v}$

۶ـ گزینه «۱» با ترسیم مدار در حوزه فرکانس داریم:



$$I=\frac{\frac{5}{S}}{\left(\frac{1}{4S}+3S\right)\|\left(\frac{1}{3S}\right)+\frac{1}{2S}}=\frac{\frac{5}{S}}{\frac{1+12S^2}{7S+36S^3}+\frac{1}{2S}}$$

$$I=\frac{\frac{5}{S}}{\frac{2+24S^2+7+36S^2}{14S^2+72S^3}}=\frac{5\times(14S+72S^2)}{9+60S^2}$$

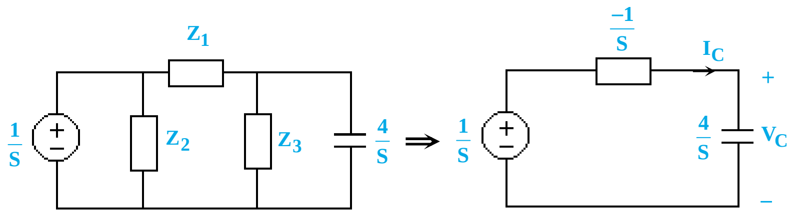
با استفاده از قانون تقسیم جریان داریم:

$$I_L=\frac{5\times(14S+72S^2)}{9+60S^2}\times\frac{\frac{1}{3S}}{\frac{1}{3S}+\frac{1}{4S}+3S}=\frac{5\times(14S+72S^2)}{9+60S^2}\times\frac{4}{36S^2+7}=\frac{20(14S+72S^2)}{(9+60S^2)(7+36S^2)}$$

$$L[\dot{I}_L]=SI_L(S)\Rightarrow L[\dot{I}_L]=\frac{20S(14S+72S^2)}{(9+60S^2)(7+36S^2)}$$

$$\dot{I}_L(0^+)=\lim_{S\to\infty}SL[\dot{I}_L]=\lim_{S\to\infty}\frac{20S^2(14S+72S^2)}{(9+60S^2)(7+36S^2)}=\frac{20\times72}{60\times36}=\frac{2}{3}$$

۷ـ گزینه «۱» ابتدا با در نظر گرفتن مدل π شبکه دو قطبی، ولتاژ خازن $0/25\,F$ و جریان آن را در لحظه $t=1\,sec$ بدست می‌آوریم:



$$Z_1=-\frac{1}{Y_{12}}=-\frac{1}{S}$$

$$Z_2=\frac{1}{Y_{11}+Y_{12}}=\infty$$

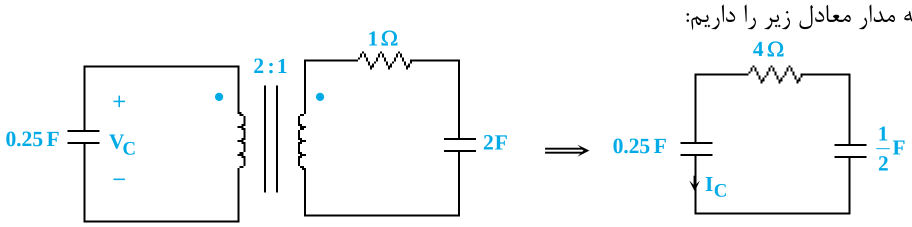
$$Z_3=\frac{1}{Y_{22}+Y_{12}}=\infty$$

$$V_C=\frac{\frac{4}{S}}{\frac{4}{S}-\frac{1}{S}}\times\frac{1}{S}=\frac{4}{3}\times\frac{1}{S}$$

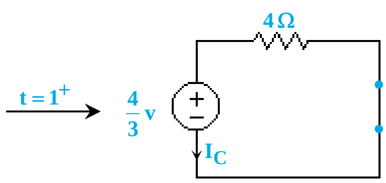
$$\Rightarrow V_C(t)=\frac{4}{3}u(t)$$

$$\Rightarrow I_C(t)=\frac{1}{4}\times\dot{V}_C(t)=\frac{1}{3}\delta(t)$$

حال در زمان $t=1$ ثانیه مدار معادل زیر را داریم:



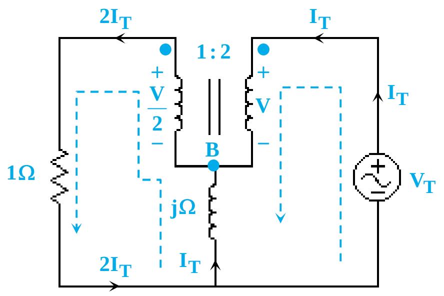
$$V_C(t=1)=\frac{4}{3}v$$



$$I_C(t=1^+)=-\frac{\frac{4}{3}}{4}=-\frac{1}{3}$$

$$I_C(t=1^-)=\frac{1}{3}\delta(t=1)=0$$

$$I_C(1^+)-I_C(1^-)=-\frac{1}{3}-0=-\frac{1}{3}A$$



۸ـ گزینه «۲» برای محاسبه Z_{in}، قسمت سمت راست مدار را جدا کرده و به جای آن، منبع V_T متصل می‌کنیم و رابطه I_T را با V_T محاسبه می‌کنیم. لازم به ذکر است که منبع جریان مستقل در سمت چپ مدار نیز غیرفعال و مدار باز می‌شود.

$$KCL(B): \text{جریان سلف } j \text{ اهم} = ۲I_T - I_T = I_T$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$-V_T + V - j \times I_T = ۰ \qquad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

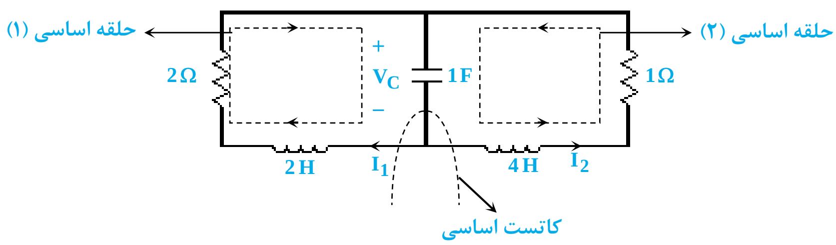
$$I_T \times j - \frac{V}{۲} + ۱ \times ۲I_T = ۰ \qquad (۲)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) و حذف V داریم:

$$\xrightarrow{(۱)} V = jI_T + V_T \qquad (۳)$$

$$\xrightarrow{(۳),(۲)} jI_T - \frac{۱}{۲}(jI_T + V_T) + ۲I_T = ۰ \Rightarrow V_T = I_T(j+۴) \Rightarrow \mathbf{Z_{in} = \frac{V_T}{I_T} = (۴+j)\Omega}$$

۹ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه فقط ماتریس A در معادلات حالت خواسته شده است، می‌توان منابع جریان و ولتاژ مستقل را غیرفعال کرد. دقت شود که منابع ولتاژ و جریان مستقل در مدار فقط در ماتریس B تأثیر داشته و در ماتریس A بدون تأثیر می‌باشند. در ادامه، برای حل سؤال ابتدا جریان سلف‌ها و ولتاژ خازن را به عنوان متغیر حالت انتخاب می‌کنیم و بعد از بدست آمدن معادلات حالت، آنها را بر حسب شار سلف‌ها و بار خازن بازنویسی می‌کنیم. بنابراین درختی را انتخاب می‌کنیم که شامل خازن مدار بوده و سلف‌ها در آن عضو نباشند (در شکل زیر شاخه‌های درخت با خطوط پررنگ مشخص شده است) و سپس معادلات KVL در حلقه‌های اساسی و KCL در کاتست اساسی را می‌نویسیم.



$$\text{KVL در حلقه‌های اساسی (۱)}: \ ۲I_۱ + V_C + \frac{۲dI_۱}{dt} = ۰ \Rightarrow \frac{dI_۱}{dt} = \frac{-۱}{۲}V_C - I_۱ \qquad (۱)$$

$$\text{KVL در حلقه‌های اساسی (۲)}: \ I_۲ \times ۱ + V_C + ۴\frac{dI_۲}{dt} = ۰ \Rightarrow \frac{dI_۲}{dt} = -\frac{۱}{۴}V_C - \frac{۱}{۴}I_۲ \qquad (۲)$$

$$\text{KCL در کاتست اساسی}: \ I_۱ + I_۲ = \frac{dV_C}{dt} \qquad (۳)$$

با کنار هم قرار دادن روابط (۱) و (۲) و (۳) داریم:

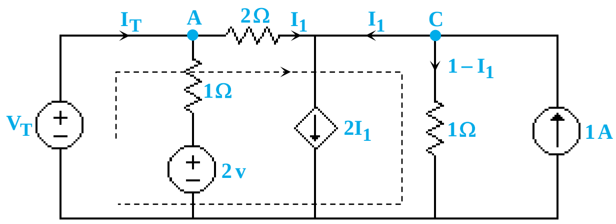
$$\begin{cases} \frac{dV_C}{dt} = I_۱ + I_۲ \\ \frac{dI_۱}{dt} = -\frac{۱}{۲}V_C - I_۱ \\ \frac{dI_۲}{dt} = -\frac{۱}{۴}V_C - \frac{۱}{۴}I_۲ \end{cases}$$

حال با توجه به روابط زیر، معادلات بالا را بازنویسی می‌کنیم.

$$V_C = \frac{Q}{C} = Q \ , \ I_۱ = \frac{\phi_۱}{L_۱} = \frac{\phi_۱}{۲} \ , \ I_۲ = \frac{\phi_۲}{L_۲} = \frac{\phi_۲}{۴}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dQ}{dt}=\dfrac{\phi_۱}{۲}+\dfrac{\phi_۲}{۴}\\[2mm] \dfrac{d(\frac{\phi_۱}{۲})}{dt}=-\dfrac{۱}{۲}Q-\dfrac{\phi_۱}{۲}\\[2mm] \dfrac{d(\frac{\phi_۲}{۴})}{dt}=-\dfrac{۱}{۴}Q-\dfrac{۱}{۴}\times\dfrac{\phi_۲}{۴}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dQ}{dt}=\dfrac{۱}{۲}\phi_۱+\dfrac{۱}{۴}\phi_۲\\[2mm] \dfrac{d\phi_۱}{dt}=-Q-\phi_۱\\[2mm] \dfrac{d\phi_۲}{dt}=-Q-\dfrac{\phi_۲}{۴}\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}\dfrac{dQ}{dt}\\ \dfrac{d\phi_۱}{dt}\\ \dfrac{d\phi_۲}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۴}\\ -۱ & -۱ & ۰\\ -۱ & ۰ & -\frac{۱}{۴}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q\\ \phi_۱\\ \phi_۲\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۴}\\ -۱ & -۱ & ۰\\ -۱ & ۰ & -\frac{۱}{۴}\end{bmatrix}$$

۱۰ـ گزینه «۲» برای محاسبه V_o، ابتدا از دو سر مقاومت غیرخطی، مدار معادل تونن دیده می‌شود. لذا به جای مقاومت غیرخطی، منبع V_T متصل کرده و رابطه V_T را با I_T بدست می‌آوریم.



KCL (C): جریان مقاومت ۱ اهمی $=۱-I_۱$

با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$\frac{V_T-۲}{۱}+I_۱=I_T\ \Rightarrow\ I_T=V_T-۲+I_۱\qquad(۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه نشان داده شده داریم:

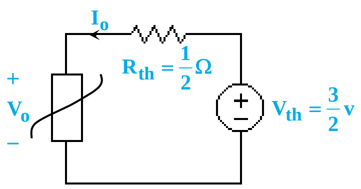
$$V_T=I_۱\times۲+۱\times(۱-I_۱)\ \Rightarrow\ I_۱=V_T-۱\qquad(۲)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۱) داریم:

$$I_T=V_T-۲+V_T-۱\ \Rightarrow\ V_T=\frac{۱}{۲}I_T+\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow\ R_{th}=\frac{۱}{۲}\Omega\ ,\ V_{th}=\frac{۳}{۲}v$$

با ترسیم مدار معادل تونن، در حلقه مدار KVL می‌زنیم.



$$V_o=\frac{۳}{۲}-I_o\times\frac{۱}{۲}\qquad(۳)$$

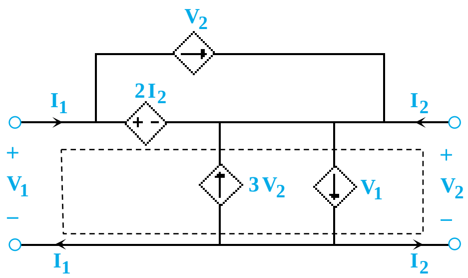
با توجه به رابطه مقاومت غیرخطی در اطلاعات سؤال داریم:

$$V_o^۳-V_o=\frac{۱}{۲}I_o\qquad(۴)$$

با ترکیب روابط (۴) و (۳) داریم:

$$V_o=\frac{۳}{۲}-(V_o^۳-V_o)\ \Rightarrow\ V_o^۳=\frac{۳}{۲}\ \Rightarrow\ V_o=\sqrt[۳]{\frac{۳}{۲}}(v)$$

۱۱ـ گزینه «۴» با توجه به این که المان‌های سری با منابع جریان وابسته، از مدار قابل حذف می‌باشند، مدار را ساده کرده و در حلقه نشان داده شده اعمال KVL می‌کنیم:



$$h_{۲۲}=\frac{I_۲}{V_۲}\Big|_{I_۱=۰}\ ,\ V_۱=۲I_۲+V_۲\qquad(۱)$$

با نوشتن KCL در گره پایین مدار داریم:

$$I_۱+I_۲+۳V_۲=V_۱$$

$$I_۱=۰\ \Rightarrow\ I_۲+۳V_۲=V_۱\qquad(۲)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

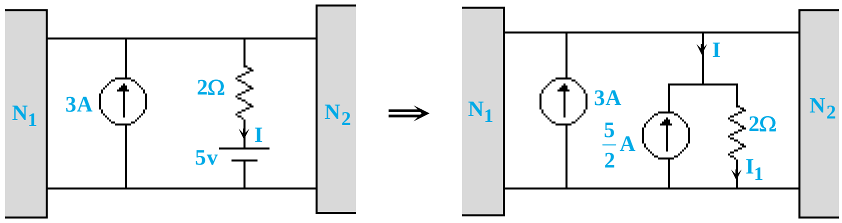
$$I_۲+۳V_۲=۲I_۲+V_۲\ \Rightarrow I_۲=۲V_۲\ \Rightarrow\ \mathbf{h_{۲۲}=\frac{I_۲}{V_۲}=۲}$$

۱۲ــ گزینه «۱» طبق قضیه جمع آثار می‌توان نوشت:

$$I_{old} = \text{جریان مقاومت ۲ اهم} = 2-\frac{1}{5}\cos t = \frac{2}{3}\times(3)-\frac{1}{10}\times(2\cos t) = \frac{2}{3}I_S-\frac{1}{10}V_S \qquad (1)$$

I_S : منبع جریان DC و V_S : منبع ولتاژ سینوسی

حال اگر یک منبع ولتاژ ۵ ولت با مقاومت ۲ اهم سری کنیم، داریم:



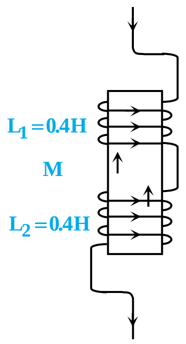
مطابق مدارهای فوق و با توجه به رابطه (۱) داریم:

$$I_1 = \frac{2}{3}\times(3+\frac{5}{2})-\frac{1}{5}\cos t = \frac{11}{3}-\frac{1}{5}\cos t \ \ A$$

$$I_{new} = I_1-\frac{5}{2} = \frac{7}{6}-\frac{1}{5}\cos t \ \ A$$

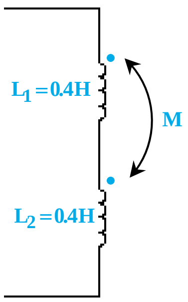
$$I_{new}-I_{old} = \frac{7}{6}-\frac{1}{5}\cos t-2+\frac{1}{5}\cos t = -\frac{5}{6}A$$

۱۳ــ گزینه «۲» از آن‌جا که در این سؤال فقط ماتریس A داده شده و با آن سروکار داریم، پس ماتریس B که ناشی از منابع V_S و I_S است، تأثیری در حل سؤال ندارد. پس می‌توان V_S و I_S را خاموش کرد و فقط ماتریس A را به‌دست آورد. از طرف دیگر مدار نیاز به ساده‌سازی دارد. از آن‌جا که جریان I_L از بالا وارد سیم‌پیچ‌ها می‌شود، برای یافتن ضریب اندوکتانس متقابل M و ضریب تزویج k، ابتدا چهار انگشت دست راست را در جهت جریان قرار می‌دهیم و شست جهت شار را نشان می‌دهد. اگر جهت شارها به یک سمت باشد پس M مثبت بوده و اگر در یک جهت نباشد، M منفی است. شکل مقابل جهت شارها را نشان می‌دهد: از آن‌جا که هر دو جهت در یک راستا هستند، پس M مثبت است.



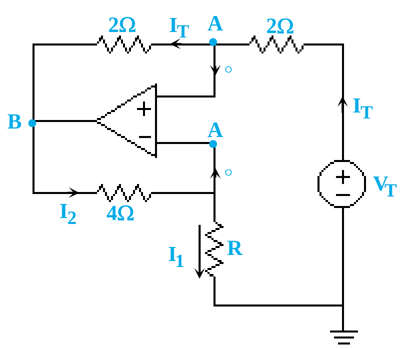
اندوکتانس دیده شده از دو سر این سیم‌پیچی به صورت مقابل است:

شکلِ ساده شده مدار بالا به صورت مقابل است و داریم:



$$L_{eq} = L_1+L_2+2M = 0/4+0/4+2M = (0/8+2M)H$$

از طرف دیگر مقاومت دیده شده از دو سر آپ‌امپ را به‌دست می‌آوریم. برای این کار از منبع V_T که جریان I_T مانند شکل زیر از آن خارج می‌شود، استفاده می‌کنیم و رابطه‌ی بین V_T و I_T را می‌یابیم.



می‌دانیم ولتاژ پایه‌های آپ‌امپ برابر بوده و جریان ورودی به این پایه‌ها صفر است.

ولتاژ گره A برابر است با: $-V_T+2I_T+A=0 \Rightarrow A = V_T-2I_T$ (۱)

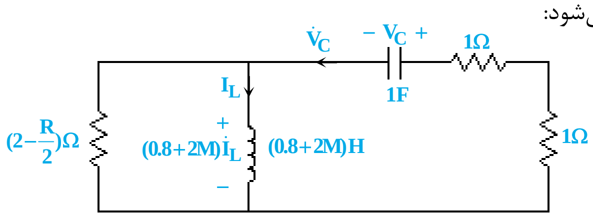
ولتاژ گره B برابر است با: $-A+2I_T+B=0 \Rightarrow B = A-2I_T = V_T-4I_T$ (۲)

جریان مقاومت R برابر با I_1 است که این مقدار با I_2 نیز برابر است. پس داریم:

$$I_1 = I_2 = \frac{A}{R} = \frac{B-A}{4} = \frac{V_T-2I_T}{R} = \frac{-2I_T}{4} \Rightarrow V_T = (2-\frac{R}{2})I_T$$

پس مقاومت دیده شده از دو سر آپ‌امپ برابر با $(2-\frac{R}{2})$ است.

با این ساده‌سازی‌ها مدار به صورت زیر تبدیل می‌شود:



جریان عبوری از خازن برابر با $I_C = C\frac{dV_C}{dt} = \dot{V}_C$ و ولتاژ دو سر سلف به صورت $V_L = L\frac{dI_L}{dt} = (۰/۸+۲M)\dot{I}_L$ است. با اعمال KCL در گره وسط مدار، جریان مقاومت $(۲-\frac{R}{۲})$ برابر با $\dot{V}_C - I_L$ می‌شود.

حال با اعمال KVL در حلقه بیرونی داریم:

$$\dot{V}_C + \dot{V}_C + V_C + (۲-\frac{R}{۲})(\dot{V}_C - I_L) = ۰ \Rightarrow (۴-\frac{R}{۲})\dot{V}_C + V_C + (\frac{R}{۲}-۲)I_L = ۰ \Rightarrow \dot{V}_C = (\frac{-۱}{۴-\frac{R}{۲}})V_C + (\frac{۲-\frac{R}{۲}}{۴-\frac{R}{۲}})I_L$$

با مقایسه این عبارت با عبارت $\dot{V}_C = -\frac{۱}{۳}V_C + \frac{۱}{۳}I_L$ داریم: $R = ۲\Omega$

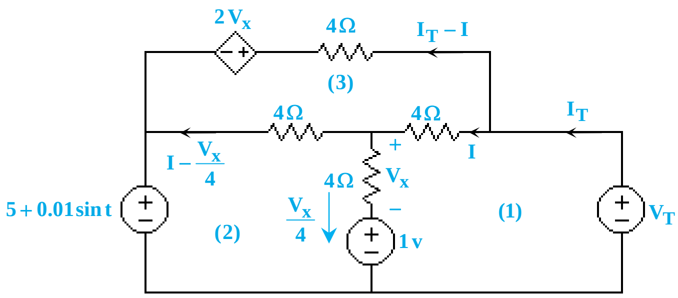
از طرف دیگر با اعمال KVL در حلقه چپ داریم: $-(۰/۸+۲M)\dot{I}_L + (۲-\frac{R}{۲})(\dot{V}_C - I_L) = ۰$

می‌دانیم $R = ۲$ است و $\dot{V}_C = -\frac{۱}{۳}V_C + \frac{۱}{۳}I_L$، داریم: $-(۰/۸+۲M)\dot{I}_L + (-\frac{۱}{۳}V_C + \frac{۱}{۳}I_L - I_L) = ۰ \Rightarrow \dot{I}_L = \frac{-\frac{۱}{۳}}{۰/۸+۲M}V_C + \frac{-\frac{۲}{۳}}{۰/۸+۲M}I_L$

از طرفی می‌دانیم $\dot{I}_L = -\frac{۱}{۳}V_C - \frac{۲}{۳}I_L$ که نتیجه می‌شود: $۰/۸+۲M = ۱ \Rightarrow M = ۰/۱H$

از آن‌جا که سؤال ضریب تزویج را می‌خواهد، داریم: $k = \frac{M}{\sqrt{L_۱L_۲}} = \frac{۰/۱}{\sqrt{۰/۴\times۰/۴}} = \frac{۰/۱}{۰/۴} = ۰/۲۵$

۱۴ـ گزینه «۳» برای حل این مدار بایستی ابتدا مدار معادل تونن دیده شده از دو سر تک‌قطبی را به دست آورده و $i(t)$ را یافت. برای این کار از دو سر تک‌قطبی N یک منبع ولتاژ تست V_T که جریان I_T از آن خارج می‌شود در مدار قرار می‌دهیم. با تعریف جریان یک شاخه با I، جریان سایر شاخه‌ها را می‌یابیم. توجه شود جریان شاخه منبع ولتاژ ۱v برابر با $\frac{V_x}{۴}$ است.



با اعمال KVL در حلقه اول داریم: رابطه (۱) $-V_T + ۴I + V_x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۴I = V_T - V_x - ۱$

با اعمال KVL در حلقه دوم داریم: رابطه (۲) $-۱ - V_x + ۴I - V_x + ۵ + ۰/۰۱\sin t = ۰ \Rightarrow ۴I - ۲V_x + ۴ + ۰/۰۱\sin t = ۰$

از ترکیب رابطه (۱) و (۲) داریم: رابطه (۳) $V_T - V_x - ۱ - ۲V_x + ۴ + ۰/۰۱\sin t = ۰ \Rightarrow ۳V_x = V_T + ۳ + ۰/۰۱\sin t$

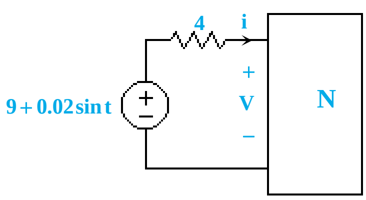
با اعمال KVL در حلقه سوم داریم: رابطه (۴) $۴(I_T - I) + ۲V_x - ۴(I - \frac{V_x}{۴}) - ۴I = ۰ \Rightarrow ۴I_T - ۱۲I + ۳V_x = ۰$

با ترکیب رابطه (۱) و (۴) داریم: رابطه (۵) $۴I_T - ۳V_T + ۳V_x + ۳ + ۳V_x = ۰ \Rightarrow ۴I_T - ۳V_T + ۶V_x + ۳ = ۰$

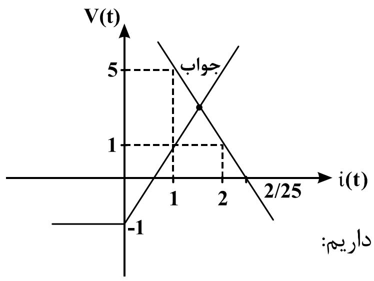
با ترکیب رابطه (۵) و (۳) داریم: $۴I_T - ۳V_T + ۲V_T + ۶ + ۰/۰۲\sin t + ۳ = ۰ \Rightarrow V_T = ۴I_T + ۹ + ۰/۰۲\sin t$

بنابراین مدار دیده شده از دو سر N برابر است با:

با اعمال KVL داریم:



$$-۹ - ۰/۰۲\sin t + ۴i + V = ۰ \Rightarrow V = -۴i + ۹ + ۰/۰۲\sin t$$



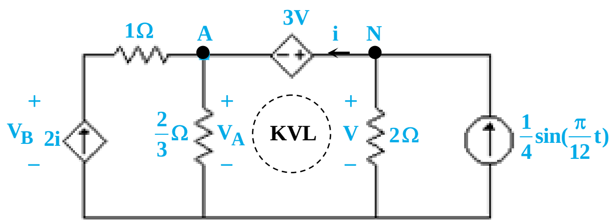
اگر فرض کنیم $۰/۰۲\sin t$ مقدار کوچکی است و از آن صرف‌نظر کنیم و معادله V بر حسب i به دست آمده را با مشخصه $V-i$ که سؤال داده قطع دهیم داریم:

در قسمتی که دو منحنی همدیگر را قطع می‌کنند مشخصه $V-i$ داده شده سؤال برابر است با: $V=۲i-۱$. پس داریم:

$$V=۲i-۱=-۴i+۹+۰/۰۲\sin t \Rightarrow ۶i=۱۰+۰/۰۲\sin t$$

$$i(t)=\frac{۵}{۳}+\frac{۱}{۳۰۰}\sin t=\frac{۱}{۳}(۵+۰/۰۱\sin t)$$

۱۵ـ گزینه «۳» وقتی که کلید بسته می‌شود، با اعمال KVL در حلقه نشان داده شده داریم:



$$-V+۳V+V_A=۰ \Rightarrow \boxed{V_A=-۲V} \qquad (۱)$$

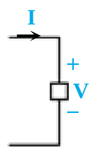
و با اعمال KCL در نقطه A داریم:

$$-۲i+\frac{V_A}{\frac{۲}{۳}}-i=۰ \Rightarrow \boxed{V_A=۲i} \qquad (۲)$$

با حذف V_A از رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$\boxed{i=-V}. \qquad (۳)$$

سؤال مقدار انرژی مبادله شده را در مدت ۱۰s میخواهد. برای هر المان به صورت



انرژی مبادله شده برابر است با:

$$E=\int VI\,dt \qquad (۴)$$

برای استفاده از رابطه (۴) برای منبع جریان وابسته، به ولتاژ و جریان عبوری از آن نیاز داریم.
ولتاژ دو سر آن را V_B می‌نامیم و با اعمال KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$-V_B+(۲i)(۱)+V_A=۰ \Rightarrow \boxed{V_B=V_A+۲i} \qquad (۵)$$

جریان عبوری از آن همان $(۲i)$ است.

حال طبق رابطه (۴) داریم:

$$E=\int(V_A+۲i)(-۲i)dt$$

با اعمال KCL در نقطه N داریم:

$$I_{\text{منبع}}=\frac{V}{۲}+i \qquad (۶)$$

با استفاده از رابطه (۳) و (۶) داریم:

$$I_{\text{منبع}}=\frac{i}{۲} \Rightarrow \boxed{i=۲I_{\text{منبع}}} \qquad (۷)$$

$$\boxed{V=-۲I_{\text{منبع}}}$$

پس مقدار انرژی برابر است با:

$$V_A=۴I_{\text{منبع}} \Rightarrow \boxed{V_B=۸I_{\text{منبع}}}$$

$$E=\int_۱^{۱۱}(۸I_{\text{منبع}})(-۴I_{\text{منبع}})=\int_۱^{۱۱}-۳۲I_{\text{منبع}}^۲=-۳۲\int\frac{۱}{۱۶}\sin^۲(\frac{\pi}{۱۲}t)dt=-۲\int_۱^{۱۱}\frac{۱-\cos(\frac{\pi}{۶}t)}{۲}=\int_۱^{۱۱}(\cos(\frac{\pi}{۶}t)-۱)dt$$

$$=(\frac{۶}{\pi}\sin(\frac{\pi}{۶}t)-t)\Big|_۱^{۱۱}=\frac{-۶}{\pi}-۱۰ \text{ ژول}$$