فصل اول

« مفاهیم اولیه »

مقدمه

دینامیک بخشی از علم مکانیک است که حرکت اجسام را تحت نیروهای وارد شده مورد بررسی قرار می‌دهد. این علم به دو بخش اصلی به نام‌های سینماتیک و سینتیک تقسیم‌بندی می‌شود.

باید توجه داشت که در سینماتیک، حرکت اجسام را مورد بررسی قرار داده بدون اینکه نیروی وارد بر آنها را در نظر بگیریم، در حالی که در سینتیک به نیروهای وارد بر اجسام در حال حرکت می‌پردازیم. این نکته را به خاطر داشته باشید که در سینماتیک، حرکت اجسام از جنبه ریاضی اهمیت داشته، البته قوانین فیزیکی حاکم بر آن مانند قوانین نیوتن در نظر گرفته نمی‌شوند.

در این کتاب، در ابتدا به معرفی سینماتیک و سینتیک ذرات می‌پردازیم، سپس سینماتیک و سینتیک اجسام صلب را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. قبل از اینکه مباحث اصلی دینامیک را شروع کنیم، مفاهیم اساسی این درس را به طور خلاصه بیان می‌کنیم.

* **جرم:** جرم یک جسم مقدار لختی و مقاومت جسم در برابر تغییرات سرعت خطی نامیده می‌شود.

ذره: به جسمی با ابعاد بسیار کوچک و جرم محدود، نقطه مادی یا ذره می‌گوییم، دقت کنید در مطالعه‌ی حرکت جسم، زمانی آن را ذره در نظر می‌گیریم که ابعاد جسم وابسته به حرکت یا نیروهای وارد بر آن نباشد. پس می‌توانیم بگوییم که در بسیاری از مسائل، برای بررسی جنبه‌های حرکت جسم، لزومی به داشتن اندازه و شکل جسم نیست، بلکه جرم جسم است که مهم می‌باشد.

نیرو: به اثر برداری یک جسم بر جسم دیگرکه می‌تواند عامل حرکت شود، نیرو می‌گوییم.

جسم صلب: جسمی که تحت نیروهای وارد بر آن، تغییرات شکلی بسیار کوچک و ناچیزی داشته باشد، جسم صلب گفته می‌شود.

قوانین نیوتن

الف) قانون اول: اگر برآیند نیروهای وارد برجسمی مساوی صفر باشد، در صورتی که جسم ساکن باشد همچنان در حالت سکون باقی مانده و اگر در حال حرکت باشد با سرعتی ثابت به حرکت خود در مسیر مستقیم ادامه می‌دهد.

ب) قانون دوم: اگر برجسمی نیرویی وارد شود، جسم در جهت آن نیرو شتابی می‌گیرد که مقدار آن با مقدار نیرو نسبت مستقیم داشته، در حالی که با جرم جسم نسبت عکس دارد.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

ج ـ قانون سوم: قانون سوم نیوتن نه تنها مربوط به دینامیک و مواردی از این قبیل می‌باشد بلکه در زندگی روزمره نیز بسیار از آن استفاده می‌شود، بی‌آنکه مردم بدانند این قانون به نام قانون سوم نیوتن معروف است. این قانون بسیار آشنا می‌گوید: برای هر عملی عکس‌العملی مساوی و در خلاف جهت آن وجود دارد.

قانون جاذبه عمومی نیوتن: با توجه به این قانون هر دو جسم بر هم نیروی جاذبه‌ای اعمال می‌کنند که مقدار این نیرو با حاصل ضرب جرم‌های دو جسم نسبت مستقیم و با مجذور فاصله دو مراکز جرم دو جسم نسبت معکوس دارد.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

در رابطه فوق F نیروی جاذبه متقابل بین دو ذره، m_1 و m_2 جرم‌های آنها و همچنین r فاصله بین مرکزهای آن دو می‌باشد. از طرفی G موسوم بـه ثابـت جهانی گرانش بوده و برابر $6/673\times10^{-11}\,\frac{m^3}{kg.s^2}$ است.

سیستم آحاد: به طور معمول در این درس با دو سیستم متریک SI و سیستم آمریکایی مواجه هستیم. در جدول زیر کمیت‌هـای اصـلی و نمادهـای آن در این دو سیستم را نشان داده‌ایم:

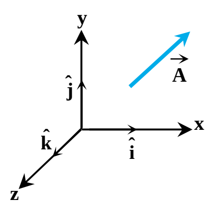
کمیت	واحد SI	نماد	واحد امریکایی	نماد
جرم M	کیلوگرم	kg	اسلاگ	slug
طول L	متر	m	فوت	ft
زمان T	ثانیه	s	ثانیه	sec
نیرو F	نیوتن	N	پوند	lb

اسکالر: اسکالر کمیتی است که تنها دارای مقدار می‌باشد، مانند: جرم، طول، زمان، دما و ...

بردار: بردار کمیتی است که علاوه بر مقدار، دارای جهت نیز بوده و طبق قانون متوازی الاضلاع با هم جمع می‌شوند، مانند: نیرو، سرعت، شتاب و ... .

می‌دانید که در علم دینامیک باید با جبر بردارها آشنا باشید، پس برای آشنایی شما در این قسمت بخشی از خواص مورد نیاز بردارها را به طور خلاصه بیان می‌کنیم.

جبر بردارها



بردار در فضا: برداری مانند $\vec{A}$ را در یک دستگاه مختصات سه بعدی مانند شکل زیر به این صورت بیان می‌کنیم.

$$\boxed{\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}} \qquad (1)$$

در رابطه فوق A_x و A_y و A_z مولفه‌های بردار $\vec{A}$ به ترتیب در راستای محورهای x و y و z می‌باشند.

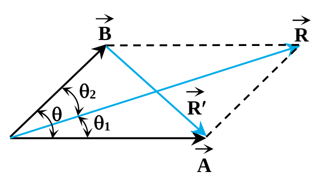
با استفاده از مولفه‌های بردار می‌توانیم اندازه بردار $|\vec{A}|$ را به صورت زیر تعیین کنیم.

$$\boxed{A=|\vec{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}} \qquad (2)$$

ضرب اسکالر در بردار: حاصلضرب اسکالر m در بردار $\vec{A}$ را با $m\vec{A}$ نشان داده که برداری در جهت بردار $\vec{A}$ می‌باشد و با توجه به رابطه زیر بدست می‌آید:

$$m\vec{A}=mA_x\hat{i}+mA_y\hat{j}+mA_z\hat{k} \qquad (3)$$

جمع و تفاضل بردارها: برای جمع دو بردار از قانون متوازی‌الاضلاع استفاده می‌کنیم. در شکل زیر $\vec{R}$ و $\vec{R}'$ به ترتیب مجمـوع و تفاضـل دو بـردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ خواهند بود.



$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}$$

$$\vec{R}'=\vec{A}-\vec{B}$$

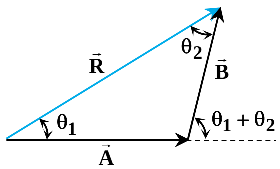
برای به دست آوردن اندازه بردارهای $\vec{R}$ و $\vec{R}'$ از قانون کسینوس‌ها مطابق رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

$$R=|\vec{R}|=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta} \qquad \text{(۴ الف)}$$

$$R'=|\vec{R}'|=\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta} \qquad \text{(۴ ب)}$$

لازم به ذکر است که A و B به ترتیب اندازهٔ بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و R و R' اندازه بردارهای $\vec{R}$ و $\vec{R}'$ می‌باشند.

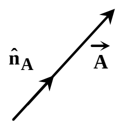
www.modaresanesharif.ac.ir



قانون مثلث: قانون مثلث یا قانون سینوس را می‌توان بین اضلاع و زوایای هر مثلث دلخواهی نوشت. طبق این قانون، نسبت اندازه هر ضلع مثلث به سینوس زاویه مقابلش مقداری ثابت است. پس همان‌گونه که در شکل نیز می‌بینید داریم:

$$\frac{A}{\sin\theta_2}=\frac{B}{\sin\theta_1}=\frac{R}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \qquad (۵)$$

بردار یکه: بردار یکه برداری است که برابر نسبت هر بردار به اندازه‌اش بوده و در جهت بردار اولیه می‌باشد. اندازه‌ی این بردار مساوی یک است.



$$\hat{n}_A=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{\vec{A}}{A} \qquad (۶)$$

توجه داشته باشید که مؤلفه‌های بردار یکه، کسینوس‌های هادی بردار می‌باشند. در صورتی که بردار با محورهای x و y و z به ترتیب زوایای α و β و γ تشکیل دهند، آن‌گاه بردار یکه را می‌توانیم به صورت زیر محاسبه کنیم:

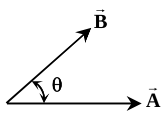
$$\hat{n}_A=\cos\alpha\hat{i}+\cos\beta\hat{j}+\cos\gamma\hat{k} \qquad (۷ \text{ الف})$$

$$1=\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma} \qquad (۷ \text{ ب})$$

اکنون با توجه به روابطی که بیان شد مولفه‌های یک بردار مانند بردار $\vec{A}$، توسط کسینوس‌های هادی آن بردار به صورت زیر قابل بیان است.

$$A_x=A\cos\alpha \quad , \quad A_y=A\cos\beta \quad , \quad A_z=A\cos\gamma$$

ضرب نقطه‌ای (اسکالر) دو بردار: برای به دست آوردن حاصل‌ضرب اسکالر دو بردار از یکی از دو رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:



$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta \qquad (۸)$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \qquad (۹)$$

در رابطهٔ فوق θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌باشد.

به ضرب نقطه‌ای، ضرب داخلی نیز می‌گوییم.

لازم به ذکر است که اگر بخواهیم تصویر اسکالر و تصویر برداری یک بردار، مانند $\vec{A}$ را بر برداری مانند $\vec{B}$ محاسبه کنیم، از روابط ضرب داخلی استفاده نموده و آنها را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A_B=\vec{A}.\frac{\vec{B}}{B} \quad (\text{تصویر اسکالر بردار } \vec{A} \text{ بر بردار } \vec{B}) \qquad (۱۰)$$

$$\vec{A}_B=(\vec{A}.\frac{\vec{B}}{B})\frac{\vec{B}}{B}=A_B\frac{\vec{B}}{B} \qquad (۱۱)$$

ضرب خارجی (برداری) دو بردار: حاصل‌ضرب خارجی دو بردار، برداری است که بر صفحه‌ی دو بردار عمود بوده و با توجه به قاعده‌ی دست راست جهت آن را تعیین می‌کنیم.

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k} \qquad (۱۲)$$

طبق قاعده دست راست، سه انگشت اشاره، میانی و شست دست راست را دو به دو عمود بر هم قرار می‌دهیم، سپس بردار اول که بردار $\vec{A}$ بوده در راستای انگشت اشاره و بردار دوم یعنی بردار $\vec{B}$ در راستای انگشت میانی در نظر گرفته می‌شوند در این صورت بردار $\vec{C}$ در راستای انگشت شست دست راست می‌باشد.

رابطه‌ی زیر می‌تواند برای محاسبه‌ی مقدار حاصل‌ضرب خارجی دو بردار مورد استفاده قرار گیرد:

$$C=|\vec{C}|=|\vec{A}\times\vec{B}|=AB\sin\theta \qquad (۱۳)$$

در رابطهٔ فوق θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌باشد. یکی از کاربردهای ضرب خارجی، محاسبه لنگر نیرو حول یک نقطه است.

www.modaresanesharif.ac.ir

ضرب سه‌گانه مختلط برداری: در ضرب سه گانه‌ی مختلط برداری از هر دو ضرب داخلی و خارجی استفاده می‌کنیم. توجه کنید که این ضرب بین سه بردار تعریف شده و حاصل آن یک مقدار اسکالر است. (لازم به ذکر است که در ضرب سه گانه مختلط برداری، ضرب داخلی باید بیرون پرانتز باشد.)

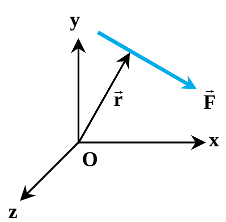
$$(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C}=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}=(\vec{C}\times\vec{A}).\vec{B}=(\vec{B}\times\vec{C}).\vec{A} \qquad (۱۴)$$

برای محاسبه گشتاور نیرو حول یک محور از ضرب سه‌گانه‌ی مختلط استفاده می‌شود.

ضرب سه گانه برداری: این ضرب مانند ضرب سه‌گانه مختلط بین سه بردار تعریف شده با این تفاوت که در این ضرب، فقط از ضرب خارجی استفاده می‌کنیم. حاصل این ضرب را می‌توان از ضرب داخلی طبق رابطه‌ی زیر بدست آورد.

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} \qquad (۱۵)$$

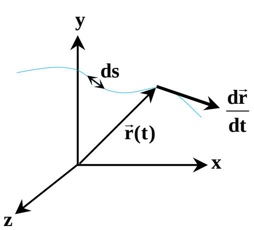
لنگر یا گشتاور یک بردار: لنگر برداری مانند نیروی $\vec{F}$ حول یک نقطه مانند O مساوی است با:



$$\vec{M}_O=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ r_x & r_y & r_z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix} \qquad (۱۶)$$

در رابطه فوق $\vec{r}$ بردار مکان بوده که ابتدای آن نقطه‌ای است که نسبت به آن گشتاورگیری می‌شود و انتهای آن یک نقطه دلخواه از راستای نیرو می‌باشد.

مشتق توابع برداری: برای به دست آوردن مشتق یک تابع برداری مانند بردار مکان $\vec{r}(t)$ (که در دستگاه مختصات دکارتی ثابت قرار دارد)، نسبت به متغیر میدان به صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$\boxed{\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}} \qquad (۱۷)$$

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\hat{i}+\frac{dy}{dt}\hat{j}+\frac{dz}{dt}\hat{k}} \qquad (۱۸)$$

بهتر است بدانید که مولفه‌های تابع برداری $\vec{r}(t)$ یعنی x و y و z خود تابعی از متغیر t بوده همچنین بردارهای یکه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ ثابت بوده و مشتق آنها صفر است.

راستای بردار $\frac{d\vec{r}}{dt}$ مماس بر منحنی $\vec{r}(t)$ بوده و مقدار آن مساوی است با:

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^۲+(\frac{dy}{dt})^۲+(\frac{dz}{dt})^۲}=\frac{ds}{dt} \qquad (۱۹)$$

s در این رابطه طول قوس منحنی است.

اگر تابع برداری برحسب متغیر طول قوس بیان شود $r=r(s)$، در نتیجه می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{dx}{ds}\hat{i}+\frac{dy}{ds}\hat{j}+\frac{dz}{ds}\hat{k} \qquad (۲۰)$$

با توجه به تعریف مشتق، بردار فوق در امتداد مماس بر منحنی می‌باشد. بنابراین برای به دست آوردن مقدار این بردار از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|=\frac{dr}{ds}=\sqrt{(\frac{dx}{ds})^۲+(\frac{dy}{ds})^۲+(\frac{dz}{ds})^۲}=\sqrt{\frac{۱}{(ds)^۲}[(dx)^۲+(dy)^۲+(dz)^۲]}=\sqrt{\frac{(ds)^۲}{(ds)^۲}}=۱ \qquad (۲۱)$$

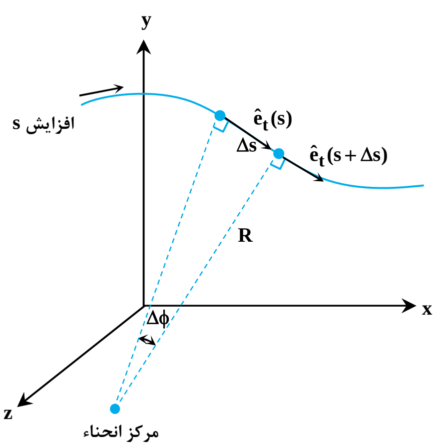
www.modaresanesharif.ac.ir

توجه کنید که بردار $\frac{d\vec{r}}{ds}$ دارای مقدار واحد بوده بنابراین این بردار، بردار یکه مماس بر منحنی می‌باشد. همچنین جمله‌های $\frac{dx}{ds}$ و $\frac{dy}{ds}$ و $\frac{dz}{ds}$ کسینوس‌های هادی خط مماس بر منحنی خواهند بود.

$$\hat{e}_t = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \Rightarrow \boxed{\hat{e}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}} \qquad (۲۲)$$

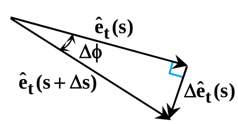
همان‌طور که قبلاً گفتیم بردار $\vec{r}(t)$ بردار مکان یک ذره نامیده می‌شود. اکنون با توجه به این توضیح، $\frac{d\vec{r}}{dt}$ بردار سرعت ذره و $\frac{d\vec{r}}{ds}$ یا $\hat{e}_t$ بردار یکه مماس بر مسیر حرکت ذره می‌باشند.

$$\boxed{\vec{v} = v\hat{e}_t = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \frac{d\vec{r}}{ds}} \qquad (۲۳)$$



ذره‌ای را در نظر بگیرید که مطابق شکل بر روی مسیر حرکت می‌کند. بردار یکه مماس بر مسیر حرکت را در دو لحظه متوالی با $\hat{e}_t(s)$ و $\hat{e}_t(s+\Delta s)$ نشان می‌دهیم. به صفحه‌ای که مماس بر $\hat{e}_t(s)$ به موازات $\hat{e}_t(s+\Delta s)$ رسم شود، صفحه بوسان می‌گوییم.

می‌بینید که تغییرات بردار یکه موازی با صفحه بوسان است، در نتیجه مقدار آن را از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌کنیم.



$$\frac{d\hat{e}_t}{ds} = \underset{\Delta s \to ۰}{\text{حد}} \frac{\hat{e}_t(s+\Delta s) - \hat{e}_t(s)}{\Delta s}$$

با توجه به اینکه بردار یکه $\hat{e}_t$ همواره دارای مقدار واحد بوده بنابراین تغییرات آن تنها شامل تغییر جهت بردار می‌باشد که همان‌طور که در شکل فوق ملاحظه می‌شود عمود بر راستای $\hat{e}_t$ است.

از طرفی چون بردار $\hat{e}_t$ مماس بر مسیر حرکت بوده بنابراین مشتق برداری بردار یکه $\hat{e}_t$، در صفحه قائم آن منحنی واقع خواهد بود. به امتداد قائم بر بردار یکه $\hat{e}_t$، امتداد قائم اصلی می‌گوییم.

$$\left|\frac{d\hat{e}_t}{ds}\right| = \left|\underset{\Delta s \to ۰}{\text{حد}} \frac{\Delta\hat{e}_t}{\Delta s}\right| = \underset{\Delta s \to ۰}{\text{حد}} \left|\frac{\Delta\hat{e}_t}{\Delta s}\right| = \underset{\Delta s \to ۰}{\text{حد}} \frac{|\hat{e}_t|\Delta\phi}{\Delta s} = ۱ \times \frac{d\phi}{ds} = \kappa \qquad (۲۴)$$

توجه کنید که مقدار κ انحنای منحنی را نشان داده که این مقدار برابر عکس شعاع انحنای خمشی منحنی است.

$$\boxed{\kappa = \frac{۱}{R}} \qquad (۲۵)$$

$$\boxed{\frac{de_t}{ds} = \frac{۱}{R}} \qquad (۲۶)$$

همانطور که در شکل می‌بینید جهت بردار $\frac{d\hat{e}_t}{ds}$ همواره به سمت مرکز انحناء بوده، پس بردار یکه آن را با $\hat{e}_n$ نشان داده و آن را بردار یکهٔ قائم اصلی می‌نامیم. یعنی:

$$\hat{e}_n = \frac{\frac{d\hat{e}_t}{ds}}{\left|\frac{d\hat{e}_t}{ds}\right|} \Rightarrow \hat{e}_n = \frac{۱}{\kappa}\frac{d\hat{e}_t}{ds} = R\frac{d\hat{e}_t}{ds} \qquad (۲۷)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

لازم به ذکر است که در هر نقطه از منحنی برای محاسبه‌ی مقدار انحنای یک منحنی از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{de_t}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{ds}\right) = \frac{d^2 r}{ds^2}$$

$$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} \Rightarrow \frac{d^2r}{ds^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

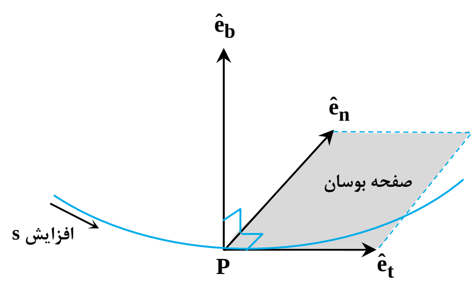
$$\boxed{\kappa = \frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}} \qquad (۲۸)$$

حال با توجه به بردار یکهٔ $\hat{e}_n$ که در مورد آن توضیح داده شد، یک دستگاه مختصات سه وجهی قائم $(\hat{e}_t, \hat{e}_n, \hat{e}_b)$ را تعریف نموده کـه راسـتای اول آن را با بردار یکه $\hat{e}_t$ نشان می‌دهیم که در امتداد خط مماس بر منحنی و در جهت مثبت طول کمان است. راسـتای دوم را با بـردار یکـه $\hat{e}_n$ نشـان داده کـه در امتداد قائم اصلی و در جهت تقعر منحنی است.

در نتیجه راستای سوم دستگاه سه وجهی که در امتداد عمود بـر صـفحه $\hat{e}_t$ و $\hat{e}_n$ اسـت بـا اسـتفاده از قـانون دسـت راسـت و رابطـه‌ی ضـرب بـرداری $\hat{e}_b = \hat{e}_t \times \hat{e}_n$ تعیین می‌شود.

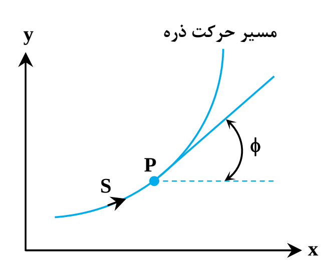
به بردار یکه $\hat{e}_b$ بردار یکهٔ قائم مضاعف می‌گوییم. دستگاه قائم سه وجهی $(\hat{e}_t, \hat{e}_n, \hat{e}_b)$ در شکل زیر نشان داده شده است. اما بردارهای یکـه ایـن دسـتگاه به اختصار با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\boxed{\begin{cases} \hat{e}_t = \dfrac{d\vec{r}}{ds} \\ \hat{e}_n = \dfrac{\frac{d\hat{e}_t}{ds}}{\left|\frac{d\hat{e}_t}{ds}\right|} = \dfrac{\frac{d\hat{e}_t}{dt}}{\left|\frac{d\hat{e}_t}{dt}\right|} = \hat{e}_b \times \hat{e}_t \\ \hat{e}_b = \hat{e}_t \times \hat{e}_n \end{cases}} \qquad (۲۹)$$



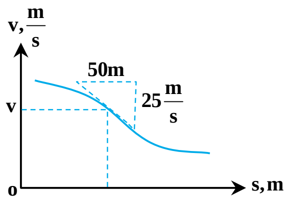
انحنای یک منحنی صفحه‌ای: در شکل مقابل مسیر حرکت ذره‌ای را می‌بینید کـه در یـک نقطه مانند P شیب خط مماس برمنحنی با زاویه ϕ نمایش داده شده است. بـردار مکـان ذره در هر لحظه با $\vec{R}(t)$ تعیین می‌شود. مولفـه‌های ایـن بـردار $x(t)$ و $y(t)$ بـوده بنـابراین بردار $R(t)$ برابر است با:

$$\vec{R}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$



www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۰: v سرعت یک ذره مطابق شکل، با جابه‌جایی تغییر می‌کند. اگر سرعت ذره در هر ثانیه $۳۰\frac{m}{s}$ کاهش یابد، سرعت آن را در لحظه‌ای که s برابر $۴۰m$ است، به دست آورید.



☑ **پاسخ:** همان‌طور که در صورت مسأله ذکر شده است سرعت ذره در هر ثانیه $۳۰\frac{m}{s}$ کاهش می‌یابد بنابراین:

$$a=-۳۰\frac{m}{s^۲} \qquad (۱)$$

از طرفی شیب خط مماس بر منحنی $(v-s)$ (سرعت ـ مکان) در $s=۴۰m$ با توجه به شکل صورت مسأله برابر است با:

$$\frac{dv}{ds}=-\frac{۲۵\frac{m}{s}}{۵۰m}=-\frac{۱}{۲}\frac{۱}{s} \qquad (۲)$$

در نتیجه طبق رابطه (۳) متن درس، سرعت در لحظه‌ی موردنظر را به دست می‌آوریم.

$$ads=vdv \Rightarrow \frac{dv}{ds}=\frac{a}{v}\xrightarrow{(۱),(۲)}-\frac{۱}{۲}\frac{۱}{s}=-\frac{۳۰\frac{m}{s^۲}}{v\frac{m}{s}}\Rightarrow v=۶۰\frac{m}{s}$$

مثال۱۱: ذره‌ای مادی به جرم m از نقطه‌ای مرتفع نسبت به سطح زمین پرتاب می‌گردد (به طور افقی) فاصله افقی طی شده توسط این ذره $s_۱$ اندازه‌گیری می‌شود. اگر شتاب ثقل کره ماه $\frac{۱}{۶}$ شتاب ثقل کره زمین فرض شده باشد و این ذره از نقطه‌ای مشابه در سطح ماه به طور افقی و با سرعت برابر پرتاب شود، فاصله افقی $s_۲$ طی شده با $s_۱$ چه رابطه‌ای دارد؟

۱) $s_۲=۶s_۱$ ‏ ۲) $s_۲=\sqrt{۶}s_۱$ ‏ ۳) $s_۲=\frac{۱}{۶}s_۱$ ‏ ۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» همان‌طور که در توضیحات متن درس گفتیم، حرکت در راستای افقی، یک حرکت بدون شتاب است در نتیجه:

$$\begin{cases} s_۱=vt_۱ \\ s_۲=vt_۲ \end{cases}\Rightarrow s_۲=\frac{t_۲}{t_۱}s_۱ \qquad (۱)$$

از طرفی می‌دانیم که حرکت در راستای عمودی شتابدار است و شتاب آن مساوی شتاب ثقل می‌باشد. پس داریم:

$$h=\frac{۱}{۲}g_۱t_۱^۲=\frac{۱}{۲}g_۲t_۲^۲\Rightarrow\frac{t_۲^۲}{t_۱^۲}=\frac{g_۱}{g_۲}\Rightarrow\frac{t_۲}{t_۱}=\sqrt{\frac{g_۱}{g_۲}}=\sqrt{۶} \qquad (۲)$$

حال از رابطه‌ی ۱و ۲ نتیجه می‌گیریم که:

$$\left.\begin{matrix}(۱)\\(۲)\end{matrix}\right\}\Rightarrow s_۲=\sqrt{۶}s_۱$$

مثال۱۲: سرعت ذره‌ای که در راستای محور s حرکت می‌کند، با رابطه $v=۵s^{۳/۲}$ بیان شده که در آن s برحسب میلیمتر و v برحسب میلیمتر بر ثانیه است. شتاب ذره، وقتی s برابر $۲mm$ است، برابر کدام گزینه است؟

۱) $۱۰۰\frac{mm}{s^۲}$ ‏ ۲) $۱۵۰\frac{mm}{s^۲}$ ‏ ۳) $۷۵\frac{mm}{s^۲}$ ‏ ۴) $۲۰۰\frac{mm}{s^۲}$

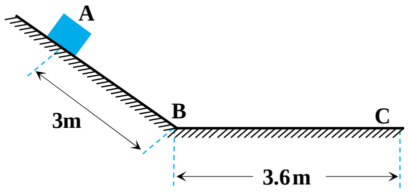
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق رابطه (۳) می‌توان نوشت:

$$v=۵s^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow dv=۵\times\frac{۳}{۲}s^{\frac{۱}{۲}}ds=\frac{۱۵}{۲}s^{\frac{۱}{۲}}ds$$

$$vdv=ads\Rightarrow ۵s^{۳/۲}\times۵\times\frac{۳}{۲}s^{۱/۲}\,ds=ads\Rightarrow ds\times(\frac{۷۵}{۲}s^۲-a)=۰$$

$$a=\frac{۷۵}{۲}s^۲=\frac{۷۵}{۲}\times۲^۲=۱۵۰\frac{mm}{s^۲}$$

مثال ۱۳: بسته‌ها در نقطه A دارای سرعت $1/2\frac{m}{s}$ می‌باشند، در فاصله A تا B بسته‌ها دارای شتاب $0/3g$ بوده و در نقطه C متوقف می‌شوند. شتاب بسته‌ها در فاصله B تا C چه اندازه است؟



۱) $-2/65\frac{m}{s^2}$ ۲) $-3/2\frac{m}{s^2}$

۳) $-2/9\frac{m}{s^2}$ ۴) $-1/6\frac{m}{s^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به توضیحات صورت مسأله متوجه می‌شویم که در فاصلهٔ A تا B شتاب ثابت است. بنابراین ابتدا باید سرعت را در نقطه B به دست آوریم. برای به دست آوردن این سرعت از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$v_B^2 - v_A^2 = 2ax \Rightarrow v_B^2 - 1/2^2 = 2\times 0/3\times 9/81\times 3 \Rightarrow v_B = 4/37\frac{m}{s}$$

حال سرعت در نقطه‌ی B را داریم، از طرفی رابطه‌ی فوق را هم داریم. پس، از این دو استفاده می‌کنیم و شتاب بسته‌ها را در فاصله‌ی B تا C به دست می‌آوریم.

$$v_C^2 - v_B^2 = 2ax \Rightarrow 0 - 4/37^2 = 2\times a\times 3/6 \Rightarrow a = -2/65\frac{m}{s^2}$$

مثال ۱۴: گلوله‌ای با سرعت v_0 درون سیالی شلیک می‌شود. (در راستای افق) در صورتی که مقاومت سیال در برابر حرکت گلوله شتابی برابر $-kv$ به گلوله بدهد پس از طی چه مدت زمانی سرعت گلوله نصف می‌شود؟

۱) $k\ln 2$ ۲) $-k\ln 2$ ۳) $\frac{\ln 2}{k}$ ۴) $\frac{2\ln 2}{k}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

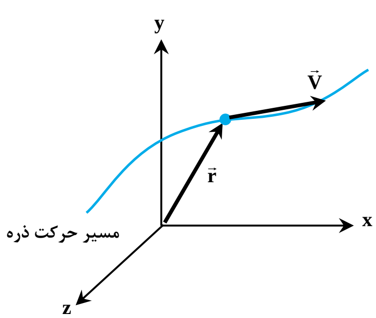
$$a = -kv = \frac{dv}{dt} \Rightarrow -kdt = \frac{dv}{v} \Rightarrow -kt = \int_{v_0}^{\frac{v_0}{2}} \frac{dv}{v} \Rightarrow -kt = [\ln v]_{v_0}^{\frac{v_0}{2}} \Rightarrow t = -\frac{1}{k}[\ln\frac{v_0}{2} - \ln v_0] = \frac{\ln 2}{k}$$

حرکت خمیده فضایی

در این بخش برای اینکه حرکت ذره در فضا را توضیح دهیم از چهار دستگاه مختصات مختلف استفاده می‌کنیم.

الف ـ دستگاه مختصات دکارتی

اگر موقعیت ذره در فضا نسبت به دستگاه مختصات دکارتی xyz را با بردار مکان $\vec{r}$ مشخص کنیم، از طریق روابط زیر می‌توانیم بردار سرعت و شتاب ذره را تعیین کنیم. (دقت داشته باشید که دستگاه مختصات دکارتی xyz ثابت فرض می‌شود.)



۱۳ الف) بردار مکان ذره در هر لحظه $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

z, y, x مؤلفه‌های بردار مکان ذره در هر لحظه است که تابعی از متغیر زمان t می‌باشد.

۱۳ ب) بردار سرعت ذره $\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}}$

۱۳ ج) بردار شتاب ذره $\boxed{\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}}$

۱۳ د) اندازه سرعت و شتاب ذره $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$ $\quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

از مختصات دکارتی معمولاً در مسائل حرکت مستقیم الخط یا حرکت پرتابه ذره استفاده می‌کنیم یا آنکه در حرکت‌هایی که مولفه‌های x و y و z شتاب آن به طور مستقیم با استفاده از مشتق‌گیری نسبت به زمان بدست می‌آیند، می‌توانیم روابط فوق را به کار ببریم.

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۵: نقطه مادی با سرعت ثابت v در امتداد منحنی فضایی حرکت می‌کند. $x=\cos\theta$ و $y=\sin\theta$ و $z=\theta$ مقدار شتاب نقطه مادی برابر است با:

۱) $\frac{v^2}{2}$ ۲) v^2 ۳) صفر ۴) $v^2\cos\theta$

پاسخ: گزینه «۱» همانطور که از صورت مسأله مشخص است مؤلفه‌های بردار مکان در مختصات دکارتی بوده پس برای حل این مسأله از روابط شتاب در مختصات دکارتی استفاده می‌کنیم. برای به دست آوردن مؤلفه‌های شتاب نقطه مادی از x و y و z نسبت به زمان دوبار مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \\ z=\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}=-\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y}=\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z}=\dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}=-\ddot{\theta}\sin\theta-\dot{\theta}^2\cos\theta \\ \ddot{y}=\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{z}=\ddot{\theta} \end{cases}$$

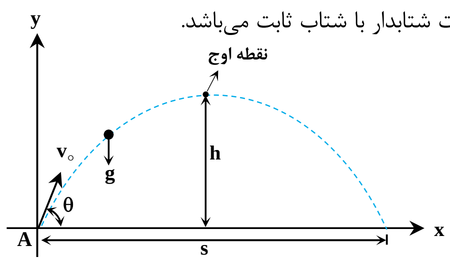
$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=\sqrt{(-\dot{\theta}\sin\theta)^2+(\dot{\theta}\cos\theta)^2+\dot{\theta}^2} \Rightarrow v=\dot{\theta}\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta}=\frac{v}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

اما از طرفی می‌دانیم که سرعت ثابت است در نتیجه طبق رابطه $(v=\sqrt{2}\dot{\theta})$، $\dot{\theta}$ نیز ثابت بوده، بنابراین $\ddot{\theta}$ نیز مساوی صفر خواهد بود. در این حالت مولفه‌های شتاب مساوی است با:

$$\begin{cases} \ddot{x}=-\dot{\theta}^2\cos\theta \\ \ddot{y}=-\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{z}=\ddot{\theta}=0 \end{cases} \Rightarrow a=\sqrt{(-\dot{\theta}^2\cos\theta)^2+(-\dot{\theta}^2\sin\theta)^2+0}=\sqrt{\dot{\theta}^4} \xrightarrow{(1)} a=\sqrt{\frac{v^4}{4}}=\frac{v^2}{2}$$

حرکت پرتابه

ذره‌ای را در نظر بگیرید که با سرعت v_0 و با زاویه θ نسبت به افق به سمت بالا پرتاب می‌شود، این ذره مسیری را طی می‌کند که این مسیر یک سهمی می‌باشد. بردار سرعت ذره در هر لحظه بر مسیر مماس است و به این دلیل که در راستای افق نیرویی بر ذره اعمال نمی‌شود، مولفه‌ی افقی سرعت همواره در طول حرکت ثابت است، ولی مؤلفه‌ی قائم سرعت، تحت اثر شتاب ثقل تغییر می‌کند. از روابط زیر می‌توانیم برای حرکت‌های پرتابه‌ای استفاده کنیم. به طور کلی حرکت ذره در راستای افق، حرکت با سرعت ثابت بوده اما حرکت آن در راستای قائم، حرکت شتابدار با شتاب ثابت می‌باشد.



۱۴ الف) حرکت ذره در راستای افق، حرکت با سرعت ثابت است.

$$\boxed{v_x=v_0\cos\theta=\text{ثابت}}$$

۱۴ ب) حرکت ذره در راستای قائم، شتاب‌دار است.

$$\boxed{v_y=-gt+v_0\sin\theta}$$

۱۴ پ) موقعیت افقی ذره در هر لحظه

$$\boxed{x=v_0\cos\theta\times t}$$

۱۴ ت) موقعیت قائم ذره در هر لحظه

$$\boxed{y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\theta\times t+y_0}$$

۱۴ ج) در نقطه اوج مولفه قائم سرعت برابر صفر بوده بنابراین $v_y=0$ می‌باشد.

$$v_y=0 \Rightarrow \text{زمان اوج} \Rightarrow t=\frac{v_0\sin\theta}{g}$$

۱۴ د) با جایگذاری زمان رفت یا زمان اوج در y ارتفاع نقطه اوج را به دست می‌آوریم.

$$\text{ارتفاع اوج} \Rightarrow h=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}+y_0$$

۱۴ ر) زمان رفت و برگشت دو برابر زمان رفت است.

$$\text{زمان رفت و برگشت} \Rightarrow t=\frac{2v_0\sin\theta}{g}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

(۱۴هـ) برای محاسبه برد یک پرتابه کافی است در عبارت x، به جای t مدت زمان رفت و برگشت را قرار دهیم.

$$s = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$ برد پرتابه

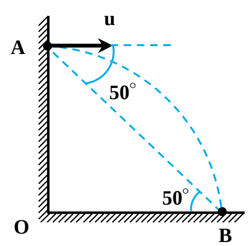
(۱۴ ی)

$$\left.\begin{array}{l} x = v_0 \cos\theta \times t \Rightarrow t = \dfrac{x}{v_0 \cos\theta} \\ y = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta \times t + y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ معادله حرکت پرتابه مستقل از زمان t $$\boxed{y = x\,tg\,\theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2}\sec^2\theta + y_0}$$

همان‌طور که از رابطه فوق مشخص است، مسیر حرکت پرتابه در صفحه قائم، یک مسیر سهمی‌گون می‌باشد.

مثال ۱۶: از نقطه A بالای یک برج، سنگی به طور افقی پرتاب می‌شود و ۳/۵ ثانیه بعد در نقطه B به زمین اصابت می‌کند. خط دید از A تا B با افق زاویه ۵۰° می‌سازد. اندازه u، سرعت اولیه سنگ را محاسبه کنید.

پاسخ: از روابط حرکت با سرعت ثابت برای محاسبه برد استفاده می‌کنیم، چون حرکت جسم در راستای افق شتابدار نیست.



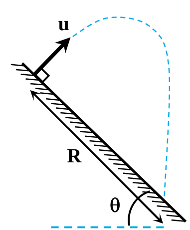
$$s = v_0 t \Rightarrow v_0 = u = \frac{s}{t} \quad ; \quad \cot g\,50 = \frac{OB}{OA} = \frac{s}{h}$$

با توجه به اینکه حرکت سنگ در راستای قائم مانند حرکت سقوط آزاد است، پس می‌توانیم سرعت اولیه سنگ را به دست آوریم.

$$h = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \times 9/81 \times 3/5^2 = 60\,m$$

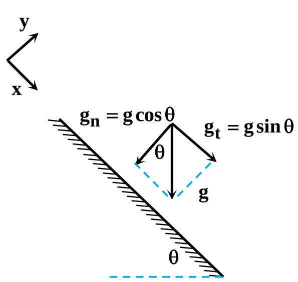
$$s = h \cot g\,50 = 60 \times 0/84 = 50/5\,m \Rightarrow v_0 = u = \frac{50/5}{3/5} = 14/42 \frac{m}{s}$$

مثال ۱۷: پرتابه‌ای با سرعت u با زاویه قائمه نسبت به سطح شیبدار شلیک می‌شود. برد R ذره پرتاب شده را برحسب مفروضات مسأله بدست آورید.



پاسخ: فرض می‌کنیم که T زمان پرتابه باشد در نتیجه چون شتاب ثابت است، با استفاده از سرعت متوسط، برد ذره را به دست می‌آوریم.

$$R = \frac{v_x + v_{0x}}{2} \times T \qquad (1)$$

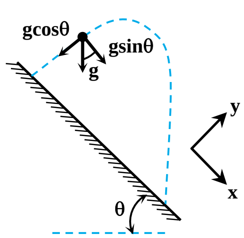


در این مساله باید شتاب ثقل را به دو مولفه موازی سطح شیبدار و عمود بر سطح شیبدار تجزیه نمود. اگر g_t مولفه شتاب ثقل را موازی سطح شیبدار و g_n مولفه شتاب ثقل را عمود بر سطح شیبدار در نظر بگیریم، می‌توانیم آنها را با استفاده از شکل روبه‌رو به دست آوریم:

دقت کنید که v_x مولفه افقی سرعت ذره در لحظه برخورد به سطح شیبدار است.

$$v_x = v_{0x} + (g\sin\theta)t = g\sin\theta t \qquad (2)$$

$$v_{0y} = u \Rightarrow v_y = u - g\cos\theta \times t \qquad (3)$$

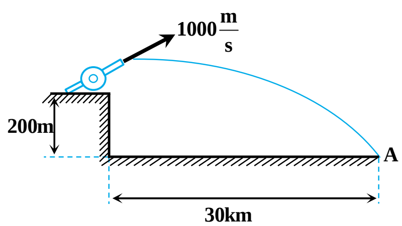


لازم به ذکر است که سرعت رفت و برگشت ذره در یک موقعیت مشخص با یکدیگر مساوی است و تنها جهت حرکت آنها مخالف است، در نتیجه با جایگذاری در رابطه (۳) زمان کل پرتاب به دست می‌آید.

$$\Rightarrow -u = u - g\cos\theta \times t \Rightarrow T = \frac{2u}{g\cos\theta}$$

رابطه (۱) $$\Rightarrow R = \frac{g\sin\theta \times T + 0}{2} \times T = \frac{g\sin\theta}{2} \times T^2 \Rightarrow R = \frac{2u^2}{g}\tan\theta \times \sec\theta$$

مثال ۱۸: توپ با چه زاویه‌ای شلیک شود تا به هدفی در نقطه A برخورد کند؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$



پاسخ: برای حل مسأله از رابطه (۲) استفاده می‌کنیم.

$$y = xtg\theta - \frac{gx^۲}{۲v_۰^۲}\sec^۲\theta$$

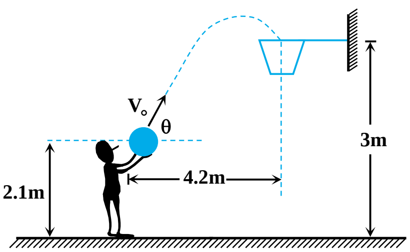
$$\Rightarrow ۲۰۰ = ۳۰\times۱۰^۳\ tg\theta - \frac{۱۰\times(۳۰\times۱۰^۳)^۲}{۲\times۱۰۰۰^۲}\sec^۲\theta \qquad (\sec\theta = \frac{۱}{\cos\theta})$$

$$\Rightarrow ۲۰۰ = ۳۰\times۱۰^۳\ tg\theta - ۴۵۰۰(۱+tg^۲\theta) \Rightarrow ۴۵۰۰tg^۲\theta - ۳۰۰۰۰tg\theta + ۴۷۰۰ = ۰$$

اکنون با حل معادله درجه دوم فوق می‌توانیم ریشه‌های معادله را تعیین نموده که به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} tg\theta_۱ = ۶/۵ \Rightarrow \theta_۱ = ۸۱/۲۵^\circ \\ tg\theta_۲ = ۰/۱۶ \Rightarrow \theta_۲ = ۹/۱^\circ \end{cases}$$

مثال ۱۹: مطابق شکل، بازیکن بسکتبال می‌خواهد پرتاب آزاد خود را با زاویه $\theta = ۵۰^\circ$ نسبت به افق انجام دهد. سرعت اولیه $v_۰$ چقدر باشد تا توپ درست از وسط حلقه عبور کند؟



پاسخ: چون حرکت توپ در راستای x بدون شتاب است، در نتیجه:

$$x = v_x t \Rightarrow ۴/۲ = v_۰\cos۵۰\times t \Rightarrow t = \frac{۴/۲}{v_۰\cos۵۰} \qquad (۱)$$

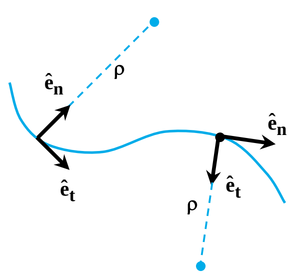
از طرفی برای حرکت توپ در راستای قائم رابطه‌ی زیر را داریم:

$$y = y_۰ - \frac{۱}{۲}gt^۲ + v_{۰y}t \Rightarrow ۳ = ۲/۱ - \frac{۱}{۲}\times۹/۸۱t^۲ + v_۰\sin۵۰\,t \qquad (۲)$$

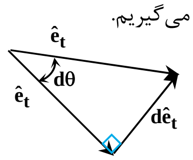
در نتیجه از ترکیب رابطه (۱) و (۲) سرعت اولیه توپ را به دست می‌آوریم.

$$(۱),(۲) \Rightarrow ۰/۹ = -۴/۹۰۵\times(\frac{۴/۲}{v_۰\cos۵۰})^۲ + v_۰\sin۵۰\times\frac{۴/۲}{v_۰\cos۵۰} \Rightarrow v_۰ = ۷/۱۴\frac{m}{s}$$

ب ـ دستگاه مختصات قائم و مماسی $(n-t-z)$



برای بررسی حرکت ذرات در مسیرهای منحنی می‌توان از دستگاه مختصات قائم ـ مماسی به صورت زیر استفاده نمود. در این دستگاه مختصات، راستای مماسی t، همواره بر مسیر حرکت مماس بوده و راستای قائم n عمود بر مسیر حرکت و در جهت مرکز انحنا می‌باشد. در این حالت ρ را شعاع انحنای مسیر در نظر می‌گیریم.



بردار سرعت و شتاب در این دستگاه را می‌توان به صورت زیر به دست آورد.

(دقت کنید $\hat{e}_t$ و $\hat{e}_n$ به ترتیب بردارهای یکه مماسی و یکه نرمال می‌باشند.)

$$\boxed{\vec{v} = v\hat{e}_t = \dot{s}\hat{e}_t} \qquad \text{(۱۵ الف)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}\hat{e}_t + v\dot{\hat{e}}_t \\ \dot{\hat{e}}_t = \frac{d\hat{e}_t}{dt} = \frac{d\hat{e}_t}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\hat{e}_t}{ds} = \frac{v}{\rho}\hat{e}_n \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \ddot{s}\hat{e}_t + \frac{v^۲}{\rho}\hat{e}_n \Rightarrow \begin{cases} a_t = \ddot{s} = \dot{v} & \text{(شتاب مماسی)} \\ a_n = \frac{v^۲}{\rho} & \text{(شتاب جانب مرکز)} \end{cases}} \qquad \text{(۱۵ب)}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

همچنین مشتق بردار یکه در این دستگاه را می‌توانیم به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt}=\frac{d\hat{e}_t}{ds}\times\frac{ds}{dt}=v\frac{d\hat{e}_t}{ds}=v\frac{d\hat{e}_t}{\rho d\theta}=\frac{v}{\rho}\frac{d\hat{e}_t}{d\theta}$$

می‌دانیم که جهت بردار $\frac{d\hat{e}_t}{d\theta}$ در جهت عمود بر بردار $\hat{e}_t$ یا همان بردار $\hat{e}_n$ می‌باشد از طرفی داریم:

$$\left|\frac{d\hat{e}_t}{d\theta}\right|=\left|\frac{\hat{e}_t d\theta}{d\theta}\right|=|\hat{e}_t|=1$$

بنابراین نتیجه می‌شود بردار $\frac{d\hat{e}_t}{d\theta}$، بردار یکه بوده که آن را با $\hat{e}_n$ نشان می‌دهیم.

در رابطه فوق $\vec{\omega}$، آهنگ زمانی تغییر زاویه محورهای قائم ـ مماسی نسبت به راستای افق بوده که سرعت زاویه‌ای نامیده می‌شود. لازم به ذکر است برای آنکه مشتق بردار یکه را به صورت برداری نشان دهیم کافی است از رابطه ضرب خارجی زیر استفاده کنیم، این رابطه برای مشتق‌گیری از بردارهای یکه دیگر نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt}=\frac{v}{\rho}\hat{e}_n$$

$$\dot{\hat{e}}_t=\vec{\omega}\times\hat{e}_t=\omega\hat{e}_z\times\hat{e}_t=\omega\hat{e}_n=\frac{v}{\rho}\hat{e}_n$$

حالت خاص (مسیر دایروی)

در حرکت بر روی مسیر دایروی، شعاع انحنای مسیر حرکت ثابت می‌باشد. این حرکت حالت خاصی از حرکت بر روی مسیر منحنی است.

روابط سرعت و شتاب در این حالت مساوی است با:

$$\boxed{\mathbf{v=R\dot{\theta}}} \qquad (۱۶ \text{ الف})$$

$$a_t=\dot{v}=\dot{R}\dot{\theta}+R\ddot{\theta}\xrightarrow{\dot{R}=0} \qquad \boxed{\mathbf{a_t=R\ddot{\theta}\ ,\quad a_n=R\dot{\theta}^2=\frac{v^2}{R}}} \qquad (۱۶ب)$$

$$vdv=a_t ds\Rightarrow R\dot{\theta}d(R\dot{\theta})=R\ddot{\theta}ds\Rightarrow R\dot{\theta}d\dot{\theta}=\ddot{\theta}(Rd\theta)\Rightarrow\boxed{\mathbf{\dot{\theta}d\dot{\theta}=\ddot{\theta}d\theta}} \qquad (۱۶ ج)$$

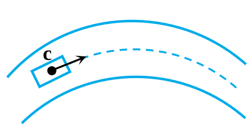
نکته ۱: این نکته را به خاطر داشته باشید که در نقطه عطف مسیر حرکت ذره (جایی که جهت تقعر منحنی مسیر عوض می‌شود) به دلیل بی‌نهایت بودن شعاع انحنای مسیر، شتاب جانب مرکز صفر می‌باشد $(a_n=\frac{v^2}{\rho}=0)$ و شتاب کل مساوی مولفه شتاب مماسی می‌باشد. $(a=a_t)$

مثال۲۰: اتومبیلی در پیچی افقی که شعاع خمیدگی آن مساوی $300m$ است با سرعت ثابت حرکت می‌کند. حداکثر سرعت اتومبیل چقدر بوده تا شتاب عمودی آن نتواند بدون لغزش اتومبیل از $0/8g$ فراتر رود؟

☑ پاسخ:

$$\rho=300m\ \Rightarrow\ a_n=\frac{v^2}{\rho}\Rightarrow v^2=0/8\times9/81\times300\Rightarrow v=48/5\frac{m}{s}$$

مثال۲۱: وقتی اتومبیل با آهنگ $1/5\frac{m}{s^2}$ بر سرعتش افزوده شود و شعاع خمیدگی آن $200m$ و شتاب کل آن مساوی $2/5\frac{m}{s^2}$ باشد دارای چه سرعتی خواهد بود؟



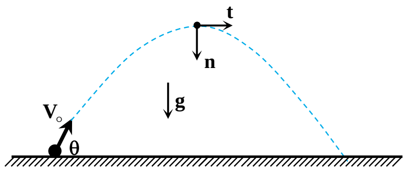
☑ **پاسخ:** با توجه به اینکه نرخ تغییرات مقدار سرعت بیانگر مقدار شتاب مماسی است، پس می‌توانیم اینگونه بنویسیم:

$$a_n^2+a_t^2=a^2\Rightarrow(\frac{v^2}{200})^2+1/5^2=2/5^2\Rightarrow v=20\frac{m}{s}=72\frac{km}{h}$$

نکته۲: طبق توضیحات متن درس مقدمه، هرگاه مسیر حرکت ذره دارای معادله $y=f(x)$ باشد شعاع انحنای مسیر را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

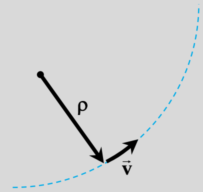
$$\boxed{\rho=\frac{[1+y'^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}}$$

www.modaresanesharif.ac.ir



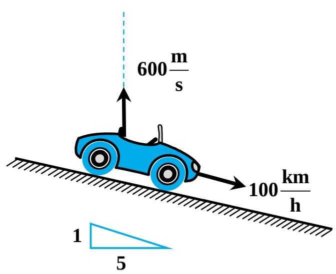
نکته ۳: همانطور که گفتیم در حرکت پرتابه در نقطه اوج، مؤلفه قائم سرعت مساوی صفراست، در نتیجه تنها مؤلفه افقی سرعت وجود دارد. در این حالت شتاب مماسی مساوی صفر (چون مؤلفه افقی سرعت ثابت می‌باشد) و شتاب جانب مرکز مساوی شتاب ثقل است.

$$\text{در نقطه اوج}: \begin{cases} v_t = v_x = v_\circ \cos\theta \\ v_y = \circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_t = \circ \\ a_n = \dfrac{v^۲}{\rho} = \dfrac{v_\circ^۲ \cos^۲\theta}{\rho} = g \end{cases}$$



نکته ۴: هرگاه بردار سرعت و شتاب ذره در یک نقطه از مسیر معین باشد، انحنای مسیر در آن نقطه را از رابطه‌ی زیر می‌توان به‌دست آورد. (برای دانستن توضیحات بیشتر به فصل پیشین (مفاهیم اولیه) مراجعه کنید.)

$$\text{انحنا}\ \kappa = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^۳} \Rightarrow \text{شعاع انحنا}\ \rho = \frac{|\vec{v}|^۳}{|\vec{v}\times\vec{a}|}$$



مثال ۲۲: سرعت گلوله شلیک شده به سمت بالا مساوی $۶۰۰\,\dfrac{m}{s}$ نسبت به دهانه تفنگ است. اگر اتومبیل با سرعت $۱۰۰\,\dfrac{km}{h}$ بر روی مسیر شیب‌دار به سمت پائین حرکت کند. شعاع خمیدگی مسیر گلوله در حداکثر ارتفاع چه اندازه است؟

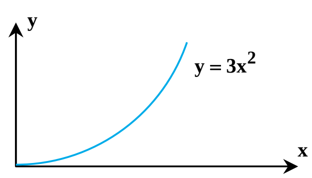
پاسخ: با توجه به آنچه که در نکته ۳ ذکر شد شعاع انحناء در نقطه اوج پرتابه مساوی $\rho = \dfrac{(v_\circ \cos\theta)^۲}{g}$ می‌باشد که سرعت $v_\circ \cos\theta$ همان مؤلفه افقی سرعت است در نتیجه:

$$v_x = \left(\frac{۱۰۰}{۳/۶}\right)\cos\theta = \frac{۱۰۰}{۳/۶}\times\frac{۵}{\sqrt{۲۶}} = ۲۷/۲۳۸\,\frac{m}{s} \quad \Rightarrow \rho = \frac{۲۷/۲۳۸^۲}{۹/۸۱} = ۷۵/۶۳\,m$$

نکته ۵: برای به دست آوردن انحنای یک منحنی صفحه‌ای با معادلات $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ بر حسب زمان می‌توانیم از رابطه‌ی زیر استفاده کنیم.

$$\boxed{\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^۲ + \dot{y}^۲)^{\frac{۳}{۲}}}}$$

استفاده از رابطه فوق در تعیین شعاع انحنای مسیر حرکت ذره بسیار مفید می‌باشد.



مثال ۲۳: ذره‌ای با سرعت ثابت $۳\,\dfrac{m}{sec}$ در امتداد مسیر نشان داده شده حرکت می‌کند. شتاب a در محل $x = ۱/۵m$ چقدر است؟

پاسخ: همان‌طور که صورت مسأله هم می‌گوید چون سرعت ذره ثابت است. پس می‌دانیم که مقدار شتاب مماسی a_t برابر صفر است اما شتاب جانب مرکز a_n وجود دارد. برای محاسبه شتاب جانب مرکز باید مقدار شعاع انحناء را داشته باشیم. برای محاسبه مقدار شعاع انحناء با توجه به اینکه معادله منحنی به صورت $x = f(x)$ معلوم است، از نکته (۲) استفاده می‌کنیم.

$$y = f(x) = ۳x^۲ \Rightarrow y' = ۶x \Rightarrow y'' = ۶$$

$$\rho = \frac{(۱+y'^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{y''} = \frac{(۱+(۶x)^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{۶} = \frac{(۱+۳۶x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{۶} = \frac{(۱+۳۶\times۱/۵^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{۶} \Rightarrow \rho = ۱۲۳/۷۵\,m \Rightarrow a_n = \frac{v^۲}{\rho} = \frac{۳^۲}{۱۲۳/۷۵} = ۰/۰۷۲۷\,\frac{m}{s^۲}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

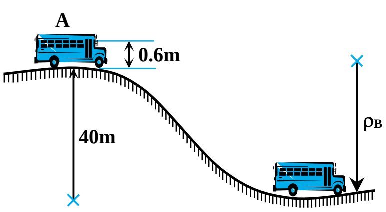
مثال ۲۴: بردار مکان ذره‌ای که در صفحه xy حرکت می‌کند، $\vec{r}(t)=\frac{۳}{۲}t^۲\hat{i}+\frac{۲}{۳}t^۳\hat{j}$ است، که $\vec{r}(t)$ برحسب متر و t برحسب ثانیه است. ρ شعاع خمیدگی مسیر را برای موقعیت ذره در لحظه $t=۲s$ محاسبه کنید.

☑ **پاسخ:**

$$\vec{r}(t)=\frac{۳}{۲}t^۲\hat{i}+\frac{۲}{۳}t^۳\hat{j}\Rightarrow\begin{cases}x(t)=\frac{۳}{۲}t^۲\\ y(t)=\frac{۲}{۳}t^۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}(t)=۳t\\ \dot{y}(t)=۲t^۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ddot{x}(t)=۳\\ \ddot{y}(t)=۴t\end{cases}$$

اما شعاع انحناء طبق نکته (۵) برابر است:

$$\rho=\frac{(\dot{x}^۲+\dot{y}^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|}=\frac{(۹t^۲+۴t^۴)^{\frac{۳}{۲}}}{|۳t\times۴t-۳\times۲t^۲|}=\frac{(۹t^۲+۴t^۴)^{\frac{۳}{۲}}}{۶t^۲}\Rightarrow\rho|_{t=۲}=\frac{(۹\times۲^۲+۴\times۲^۴)^{\frac{۳}{۲}}}{۶\times۲^۲}=۴۱/۶۶m$$



مثال ۲۵: سرعت اتومبیلی به طور یکنواخت نسبت به زمان از $۵۰\frac{km}{h}$ در موقعیت A تا $۱۰۰\frac{km}{h}$ در B در عرض ۱۰ ثانیه افزایش می‌یابد. شعاع انحنای بلندی A برابر ۴۰m می‌باشد. اگر مقدار شتاب کل مرکز جرم اتومبیل در نقاط B و A با هم برابر باشند، شعاع انحنا ρ_B را در قعر جاده در نقطه‌ی B را محاسبه نمایید؟ (مرکز جرم اتومبیل به فاصله ۰/۶ m از سطح جاده قرار دارد.)

☑ **پاسخ:** سرعت اتومبیل‌ها برحسب $\frac{m}{s}$ مساوی است با:

$$v_A=\frac{۵۰}{۳/۶}=۱۳/۸۹\frac{m}{s}\quad,\quad v_B=\frac{۱۰۰}{۳/۶}=۲۷/۸\frac{m}{s}$$

با توجه به محاسبه‌ی سرعت اتومبیل‌ها متوجه می‌شویم که شتاب مماسی ثابت است. چرا؟ چون سرعت اتومبیل در فاصله‌ی A تا B به طور یکنواخت افزایش می‌یابد. اگر اختلاف سرعت را بر زمان طی شده تقسیم کنیم شتاب مماسی ثابت به دست می‌آید.

$$a_t=\frac{v_B-v_A}{t}\Rightarrow a_t=\frac{۲۷/۸-۱۳/۸۹}{۱۰}=۱/۳۹\frac{m}{s^۲}$$

در نقطه A: $a_n=\frac{v_A^۲}{\rho_A}=\frac{(۱۳/۸۹)^۲}{۴۰+۰/۶}=۴/۷۵۲\frac{m}{s^۲}$

شتاب کل در نقطه A: $a_A=\sqrt{a_n^۲+a_t^۲}=\sqrt{۴/۷۵۲^۲+۱/۳۹^۲}=۴/۹۵\frac{m}{s^۲}\xrightarrow{\text{از طرفی طبق داده صورت مسأله}}a_A=a_B$

در نقطه B: $a_n^۲=a_B^۲-a_t^۲\Rightarrow(\frac{v_B^۲}{\rho_B})^۲=a_B^۲-a_t^۲\Rightarrow\rho_B=\sqrt{\frac{v_B^۴}{a_B^۲-a_t^۲}}=\sqrt{\frac{۲۷/۸^۴}{۴/۹۵^۲-۱/۳۹^۲}}=۱۶۲/۶۷m$

$$\Rightarrow\ \rho_B=۱۶۲/۶۷+۰/۶=۱۶۳/۳m$$

این مسأله را می‌توان به روشی دیگر نیز حل نمود:

$$a_A=a_B\ \Rightarrow(a_t)_A+(a_n)_A=(a_t)_B+(a_n)_B$$

چون از A تا B سرعت به طور یکنواخت زیاد می‌شود، شتاب مماسی ثابت خواهد بود با:

$$(a_n)_A=(a_n)_B\ \Rightarrow\frac{v_A^۲}{\rho_A+۰/۶}=\frac{v_B^۲}{\rho_B-۰/۶}\ \Rightarrow\rho_B=۰/۶+(\rho_A+۰/۶)(\frac{v_B}{v_A})^۲\ \Rightarrow\rho_B=۰/۶+۱۰/۶\times(\frac{۱۰۰}{۵۰})^۲=۱۶۳m$$

مثال ۲۶: ذره P در امتداد یک منحنی فضایی حرکت می‌کند، در یک لحظه معین بردار سرعت مساوی $\vec{v}=۴\hat{i}-۲\hat{j}-\hat{k}$ بوده همچنین شتاب ذره در این لحظه مساوی $۸\frac{m}{s^۲}$ می‌باشد. اگر زاویه بین بردار شتاب و بردار سرعت مساوی ۳۰ درجه باشد شعاع انحنای مسیر در این لحظه چه اندازه است؟

۱) ۷/۵m ۲) ۴m ۳) ۴/۵۸m ۴) ۵/۲۵m

www.modaresanesharif.ac.ir

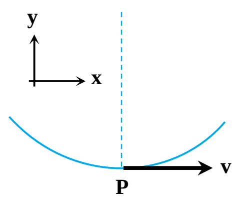
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای محاسبه شعاع انحنای مسیر از رابطه ارائه شده در نکته ۴ استفاده می‌کنیم.

$$\rho=\frac{|\vec{v}|^{۳}}{|\vec{v}\times\vec{a}|}=\frac{|\sqrt{۱۶+۴+۱}|^{۳}}{|\vec{v}||\vec{a}|\sin ۳۰}=\frac{\sqrt{۲۱}\times ۲۱}{\sqrt{۲۱}\times ۸\sin ۳۰}=\frac{۲۱}{۴}=۵/۲۵\text{m}$$

مثال ۲۷: در لحظه‌ای معین، ذرهٔ P که در امتداد مسیر منحنی حرکت می‌کند دارای داده‌های زیر است:

$$\dot{x}=۶۰\,\text{mm}/\text{s} \qquad \dot{y}=۰ \qquad \ddot{x}=۰ \qquad \ddot{y}=۹۰\frac{\text{mm}}{\text{s}^{۲}}$$

شعاع انحنای مسیر در این لحظه چه اندازه است؟

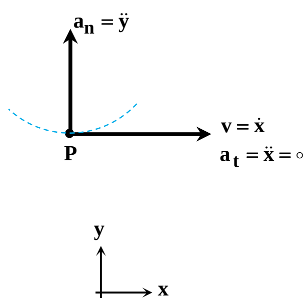


۱) $۴۰\,\text{mm}$

۲) $۶۰\,\text{mm}$

۳) $۹۰\,\text{mm}$

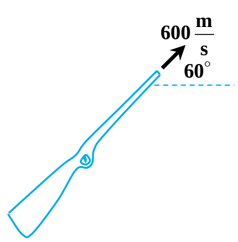
۴) $۸۰\,\text{mm}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای به دست آوردن شعاع در این لحظه، یعنی زمانی کـه ذره‌ی P در امتـداد مسیر منحنی حرکت می‌کند باید به این موارد توجه کنید که مسیر حرکـت ذره P در ایـن نقطـه بـه گونه‌ای است که بردار سرعت بر مسیر در راستای افق مماس و شـتاب بـر مسـیر در راسـتای محـور y عمود می‌باشد، پس داریم:

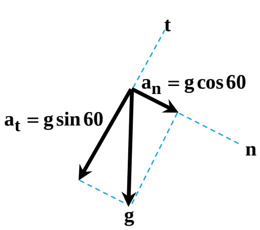
$$a_n=\frac{v^{۲}}{\rho}\Rightarrow \rho=\frac{v^{۲}}{a_n}\Rightarrow \rho=\frac{۶۰^{۲}}{۹۰}=۴۰\,\text{mm}$$

مثال ۲۸: گلوله‌ایی با سرعت اولیه $۶۰۰\frac{\text{m}}{\text{s}}$ مطابق شکل شلیک می‌شود. در صـورتی کـه شـتاب ثقـل را $۱۰\frac{\text{m}}{\text{s}^{۲}}$ فرض کنیم شعاع انحنای مسیر گلوله در لحظه خروج از دهانه تفنگ چه اندازه است؟



۱) ۱۴۴km ۲) $۶۰\,\text{km}$

۳) ۷۲km ۴) ۳۶km



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در ابتدا راستای لوله، راستای مماسی و امتداد عمود بر لوله، راستای جانـب مرکز در نظر گرفته می‌شوند بنابراین مطابق شکل در لحظـه خـروج گلولـه از تفنـگ، شـتاب جانـب مرکز ناشی از شتاب ثقل مساوی $g\cos ۶۰$ می‌باشد بنابراین:

$$a_n=g\cos ۶۰=\frac{v^{۲}}{\rho}\Rightarrow \rho=\frac{۶۰۰^{۲}}{۵}=۷۲۰۰۰\,\text{m}=۷۲\text{km}$$

مثال ۲۹: حداکثر ارتفاع اوج در حرکت پرتابه از سطح افق مساوی کدام گزینه است؟

۱) $\frac{v_۰^{۲}\sin^{۲}\theta}{۲g}$ ۲) $\frac{v_۰^{۲}\sin ۲\theta}{g}$ ۳) $\frac{v_۰^{۲}\sin ۲\theta}{۲g}$ ۴) $\frac{v_۰^{۲}\sin\theta}{g}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$y=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+v_۰\sin\theta t\xrightarrow[t=\frac{v_۰\sin\theta}{g}\ \text{قرار داده می‌شود}]{\text{مقدار زمان اوج در رابطه ارتفاع}} y=-\frac{۱}{۲}g\times\frac{v_۰^{۲}\sin^{۲}\theta}{g^{۲}}+v_۰\sin\theta\times\frac{v_۰\sin\theta}{g}\Rightarrow h=\frac{v_۰^{۲}\sin^{۲}\theta}{۲g}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

فصل پنجم

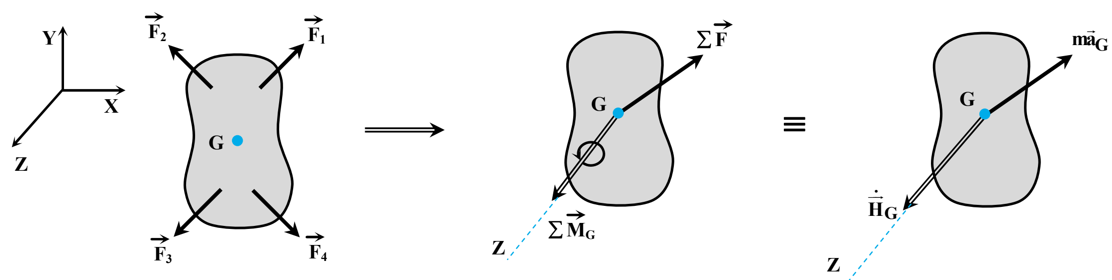
« سینتیک صفحه‌ای اجسام صلب »

مقدمه

در این فصل رابطه بین حرکت انتقالی و چرخشی جسم صلب تحت نیروهای وارد بر آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای اینکه بتوانید از معادلات نیرویی و لنگری حرکت استفاده کنید باید بر روابط سینماتیک جسم صلب تسلط کافی داشته باشید. برای حل مسائل سینتیک جسم صلب ابتدا باید دیاگرام آزاد جسم را به طور صحیح رسم کنیم، سپس با استفاده از یکی از سه روشی که در سینتیک ذره به آن می‌پردازیم مسأله را حل می‌کنیم. در سینتیک اجسام صلبی که حرکت زاویه‌ای دارند، با کمیتی جدید در روابط برخورد می‌کنیم که به آن «لنگر لختی جرم» یا «گشتاور اینرسی جرم» گفته می‌شود. این کمیت نحوه توزیع شعاعی جرم جسم حول محور دوران را نشان می‌دهد.

معادله‌های حرکت صفحه‌ای

جسمی را در نظر بگیرید که مطابق شکل (الف) نیروهایی بر آن وارد می‌شود. با رسم دیاگرام آزاد این جسم، در ابتدا می‌توانیم سیستم معادل نیروهای وارد بر جسم را در مرکز جرم جسم (نقطهٔ G) تعیین کنیم، سپس این معادل را برابر $\Sigma\vec{F}$ و $\Sigma\vec{M}_G$ در نقطه G قرار دهیم. این معادل را در شکل ب مشاهده می‌کنید. مجموعه‌ای به نام نیرو ـ کوپل به دست می‌آید که اگر این سیستم نیرو را در مرکز جرم جسم با دیاگرام سینتیکی جسم معادل قرار دهیم، می‌توانیم معادلات حرکت نیرویی و لنگری جسم را به دست آوریم.



(الف) دیاگرام آزاد جسم　(ب) مجموعه نیرو-کوپل معادل در مرکز جرم　(ج) دیاگرام سینتیکی جسم

توجه کنید که در شکل (ب) $\Sigma\vec{M}_G$ گشتاور نیروهای خارجی است که بر جسم حول مرکز جرم وارد می‌شود.

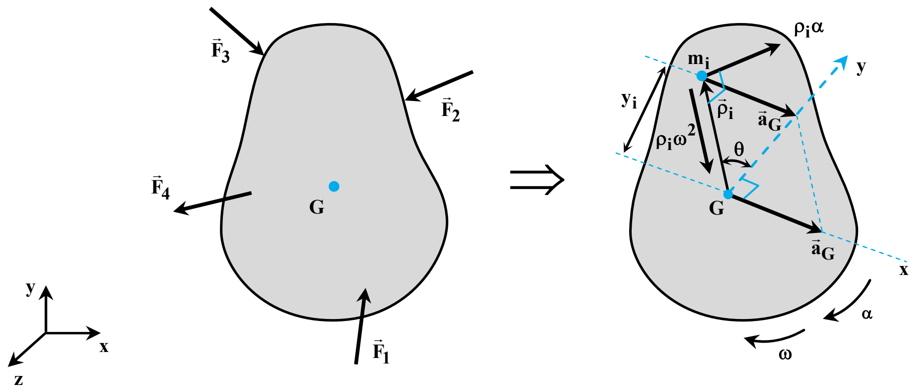
همان‌طور که می‌دانیم گشتاور نیروهای داخلی جسم صفر است زیرا برای هر نیروی داخلی یک عکس‌العمل مساوی و مخالف آن وجود دارد که گشتاوری به همان اندازه و در جهت مخالف ایجاد می‌کند، بنابراین با توجه به این توضیحات حاصل جمع گشتاور نیروهای درونی حول هر نقطه همواره برابر صفر است.

شکل (ج) دیاگرام سینتیکی را نشان می‌دهد که منظور از آن، پاسخ یا عکس‌العمل دینامیکی جسم به نیروی برآیند $\Sigma\vec{F}$ و گشتاور برآیند $\Sigma\vec{M}_G$ است که به آن نیروی لختی $m\vec{a}_G$ و گشتاور لختی $I_G\alpha$ می‌گوییم که در ادامه درباره آن توضیح داده می‌شود.

جسمی را مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم که تحت نیروهای خارجی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ و ... قرار دارد. این نیروها باعث می‌شوند که شتاب انتقالی $\vec{a}_G$ در مرکز جرم و شتاب زاویه‌ای α، حول محور عمود بر صفحه گذرنده از مرکز جرم ایجاد شوند. محورهای مختصات xy را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که محور

www.modaresanesharif.ac.ir

xها در راستای شتاب مرکز جرم جسم باشد. اما توجه کنید که یک ذره دلخواه از جسم مانند m_i علاوه بر اینکه شتاب انتقالی دارد، دو مؤلفه شتاب نسبی نسبت به مرکز جرم نیز دارد. این مؤلفه‌های شتاب نسبی شامل شتاب مماسی $\rho_i\alpha$ و شتاب جانب مرکز $\rho_i\omega^2$ می‌باشند. این مؤلفه‌ها را در شکل می‌بینید.



اکنون با توجه به این اطلاعات می‌توانیم نتیجه بگیریم که برآیند تمامی نیروهای وارد بر جرم m_i باعث ایجاد مؤلفه‌های شتاب $\vec{a}_G$، $\rho_i\alpha$ و $\rho_i\omega^2$ و نیروهای اینرسی $m_i\vec{a}_G$، $m_i\rho_i\alpha$ و $m_i\rho_i\omega^2$ می‌شود. جمع گشتاور این مؤلفه‌های نیرو حول مرکز جرم برای جرم m_i برابر است با:

$$(M_G)_i = m_i a_G(\rho_i\cos\theta) + m_i\rho_i\omega^2 \times 0 + m_i\rho_i\alpha \times \rho_i$$

همان‌طور که در شکل هم مشاهده می‌کنید مؤلفه نیروی $m_i\rho_i\omega^2$ از مرکز جرم عبور می‌کند، پس گشتاوری حول آن ایجاد نمی‌کند.

$$\Rightarrow\ (M_G)_i = m_i a_G \rho_i \cos\theta + m_i\alpha\rho_i^2$$

حال اگر از این رابطه Σ یا انتگرال بگیریم، می‌توانیم گشتاور نیروهای اینرسی تمام ذراتی را که حول مرکز جرم G قرار دارد، به دست آوریم.

$$\sum M_G = \sum (M_G)_i = \sum m_i a_G \rho_i \cos\alpha + \sum m_i\alpha\rho_i^2 = \sum m_i a_G y_i + \sum m_i\alpha\rho_i^2$$

اما دقت کنید که مقادیر a_G و α در رابطه فوق ثابت هستند بنابراین می‌توان آنها را از داخل عبارت Σ خارج نمود.

$$\sum M_G = a_G\sum m_i y_i + \alpha\sum m_i\rho_i^2$$

همان‌طور که می‌دانیم نقطه G مرکز جرم جسم است، پس عبارت جمله اول رابطه فوق برابر صفر می‌شود $(\sum m_i y_i = m\bar{y} = 0)$، در نتیجه رابطه را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sum M_G = \alpha\sum m_i\rho_i^2 = \alpha I_G \quad \text{یا} \quad \alpha\int \rho^2 dm = \alpha I_G = I_G\alpha$$

به عبارت $\sum m_i\rho_i^2$ یا $\int \rho^2 dm$ در رابطه فوق، گشتاور جرمی جسم حول محور عمود بر صفحه گذرنده از G، I_G یا لختی دورانی یا گشتاور لختی جسم می‌گوییم. لختی دورانی خاصیت مهمی از جسم است که در تحلیل نیروها، برای هر جسمی که حول محوری مفروض شتاب دورانی دارد، از آن استفاده می‌کنیم. همان‌طور که m، جرم جسم معادل میزان مقاومت جسم در برابر شتاب انتقالی است، گشتاور لختی نیز میزان مقاومت جسم در برابر شتاب زاویه‌ای است. به عبارت دیگر می‌توانیم بگوییم که I_G میزان مقاومت جسم در برابر تغییر سرعت چرخشی حول محور z گذرنده از G می‌باشد.

$$\boxed{I_G = \sum m_i\rho_i^2 = \int \rho^2 dm}$$

توجه کنید که ρ_i در رابطه فوق فاصله جرم m_i از مرکز جرم می‌باشد.

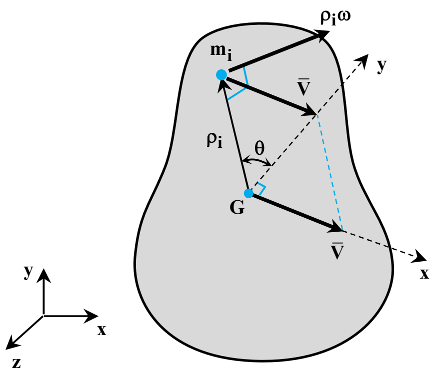
بنابراین به طور خلاصه، معادلات حرکت صفحه‌ای برای یک جسم را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}_G = \dot{\vec{G}}} \qquad \text{(۱ الف)}$$

$$\boxed{\sum \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G = I_G\vec{\alpha}} \qquad \text{(۱ ب)}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

در رابطه فوق حاصل $I_G\alpha$ را می‌توانیم برابر $\dot{H}_G$ درنظر بگیریم. $\dot{H}_G$ آهنگ زمانی تغییرات اندازه حرکت زاویه‌ای جسم حول مرکز جرمش می‌باشد. اما اندازه حرکت زاویه‌ای جسم صلب حول مرکز جرمش H_G را توسط رابطه زیر به دست می‌آوریم:



$$(H_G)_i = m_i\bar{v}(\rho_i\cos\theta) + m_i\rho_i\omega(\rho_i)$$

$$\Rightarrow H_G = \sum (H_G)_i = \bar{v}\sum m_i\rho_i\cos\theta + \omega\sum m_i\rho_i^{۲}$$

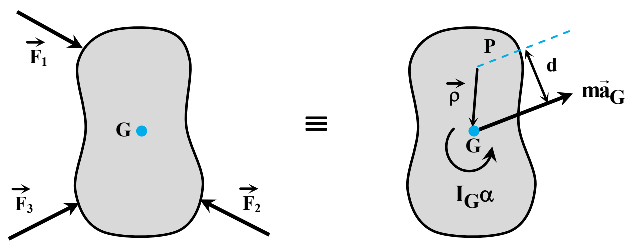
$$\Rightarrow H_G = \bar{v}\sum m_i y_i + \omega I_G = \bar{v}\times ۰ + I_G\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{H_G = I_G\omega} \qquad (۲)$$

معادله حرکت (۱ ب) را به شکل دیگری نیز می‌توانیم بنویسیم. بدین صورت که لنگر کلی را حول یک نقطه دلخواه مانند P می‌نویسیم، در این صورت باید جمله‌ای دیگری را اضافه کنیم. این جمله گشتاور نیروی اینرسی $m\vec{a}_G$ حول نقطه P می‌باشد. پس معادله‌ی حرکت به این صورت درمی‌آید.

$$\boxed{\sum \vec{M}_P = \dot{\vec{H}}_G + \vec{\rho}\times m\vec{a}_G} \qquad (۳)$$

توجه داشته باشید که در رابطه فوق $\vec{\rho}$ برداری از نقطه P به مرکز جرم G بوده و $\vec{a}_G$ شتاب مرکز جرم می‌باشد.

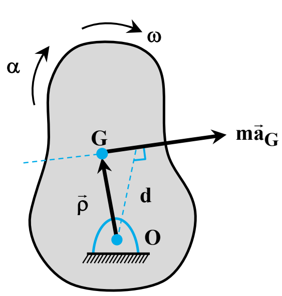


در حرکت صفحه‌ای جسم صلب می‌توانیم رابطه (۳) را به صورت رابطه اسکالر زیر بنویسیم:

$$\boxed{\sum M_P = I_G\alpha + ma_G d = I_G\alpha + m\bar{a}d} \qquad (۴)$$

در این رابطه مدنظر داشته باشید که d فاصله عمودی بین راستای شتاب مرکز جرم و نقطه P است و $\bar{a}$ نیز مقدار شتاب مرکز جرم می‌باشد.در هنگام استفاده از رابطه (۴) باید دقت کافی به جهت گشتاور و ساعتگرد یا پادساعتگرد بودن شتاب زاویه‌ای داشت.

حالت خاص: در یک حالت خاص می‌توانیم معادله‌ی(۳) را حول یک نقطه مانند O که نقطه‌ای ساکن یا با سرعت ثابت است، به شکل زیر در نظر بگیریم.



$$\text{رابطه (۳)}: \sum \vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_G + \vec{\rho}\times m\vec{a}_G \Rightarrow \sum M_O = I_G\alpha + ma_G d$$

از طرفی چون مرکز جرم جسم حول نقطه G بر روی یک مسیر دایروی حرکت می‌کند، بنابراین مقدار شتاب مرکز جرم بر حسب شتاب زاویه‌ای برابر $a_G = d\alpha$ می‌باشد. در نتیجه رابطه فوق را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\boxed{\sum M_O = I_O\alpha}\ \sum M_O = I_G\alpha + dm(d\alpha) = (I_G + md^{۲})\alpha \Rightarrow\ (I_O = I_G + md^{۲})$$

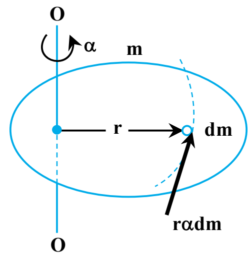
در رابطه فوق از قضیه انتقال محورها در محاسبه گشتاور لختی استفاده کرده‌ایم. این رابطه را مجدداً به صورت برداری می‌نویسیم:

$$\boxed{\sum \vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_O = I_O\vec{\alpha}} \qquad (۵)$$

رابطهٔ (۵) همان رابطه ساده شده معادله (۳) است که در آن I_O لختی چرخشی جسم حول محور دوران گذرنده از نقطه O می‌باشد. لازم به ذکر است که برای محاسبه لختی چرخشی اجسام مختلف (ممان لختی جرم) می‌توانید به جدول موجود در پیوست کتاب مراجعه کنید.

www.modaresanesharif.ac.ir

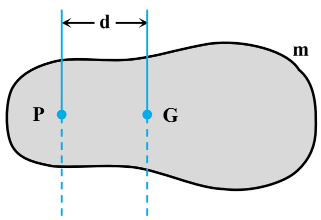
گشتاور لختی جرم حول یک محور:



جسمی را به جرم m مانند شکل زیر در نظر می‌گیریم که حول محور $O-O$ با سرعت زاویه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای α می‌چرخد. تمام ذرات جسم در صفحات موازی حرکت می‌کنند که این صفحات بر محور دوران $O-O$ عمود هستند. جزء کوچکی به جرم dm، مؤلفه‌ی شتاب مماسی‌ای دارد که این مؤلفه بر روی مسیر دایروی به اندازه $r\alpha$ است. با توجه به قانون دوم نیوتن مقدار برآیند نیروی مماسی وارد بر جزء برابر $r\alpha dm$ است. توجه کنید که گشتاور این نیرو حول محور $O-O$ برابر $r(r\alpha dm)=r^2\alpha dm$ است و مجموع گشتاورهای این نیروها برای تمام ذرات تشکیل‌دهنده جرم m برابر $\int r^2\alpha dm$ می‌باشد.

$$M_{O-O}=\int r^2\alpha dm \xrightarrow{\text{برای تمام خطوط شعاعی درون جسم ثابت است } \alpha} M_{O-O}=(\int r^2 dm)\alpha=I_{O-O}\alpha$$

در ادامه کمیتی را تحت عنوان شعاع چرخش k_G، توسط رابطه $\boxed{k_G=\sqrt{\frac{I_G}{m}}}$ یا $\boxed{I_G=k_G^2 m}$ تعریف می‌کنیم که این کمیت نحوه توزیع جرم جسم حول محور مورد نظر را نشان می‌دهد. اگر بتوانیم تمام جرم جسم m را در فاصلهٔ k_G از محور متمرکز کنیم (مانند یک حلقه نازک تو خالی)، گشتاور لختی آن برابر $I_G=k_G^2 m$ می‌شود.



در محاسبه گشتاور لختی جسم، معمولاً از قضیه‌ای تحت عنوان قضیه انتقال محورها استفاده می‌کنیم، به این صورت که اگر گشتاور لختی یک جسم حول محور گذرنده از مرکز جرم مشخص باشد به سادگی می‌توانیم گشتاور لختی را حول هر محور موازی دیگر تعیین کنیم. پس اگر گشتاور لختی جسم حول محور گذرنده از مرکز جرم برابر I_G باشد، گشتاور لختی حول محور گذرنده از نقطه P برابر است با:

$$\boxed{I_P=I_G+md^2}$$

شعاع چرخش جسم حول محور گذرنده از نقطه P را نیز به همین نحو می‌توانیم محاسبه کنیم.

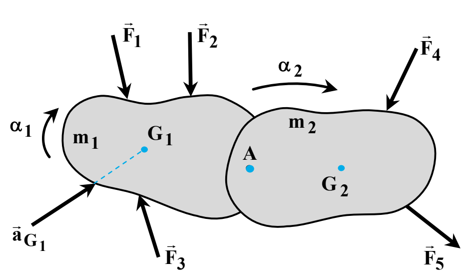
$$I_P=I_G+md^2 \Rightarrow k_P^2 m=k_G^2 m+d^2 m \Rightarrow \boxed{k_P^2=k_G^2+d^2}$$

برای تحلیل مسائلی که دو یا چند جسم صلب دارند و حرکت آنها به صورت سینماتیکی وابسته به هم است، روش مناسب‌تر برای تحلیل مسأله این است که آن‌ها را به صورت یک مجموعه به هم پیوسته ارزیابی کنید. در چنین حالتی روابط (۱ الف) و (۴) را می‌توانید به این صورت بنویسید:

$$\boxed{\sum F=\sum m\vec{a}_G} \quad \text{(۶ الف)}$$

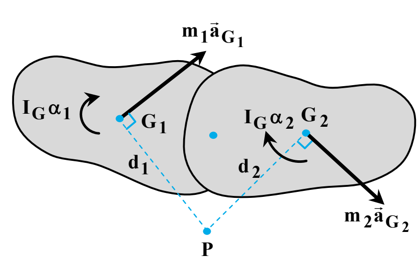
$$\boxed{\sum M_P=\sum I_G\alpha+\sum ma_G d} \quad \text{(۶ ب)}$$

برای مثال دیاگرام سینتیکی و آزاد دو عضو صلب متصل به هم در شکل زیر رسم شده است. در این شکل نقطه‌ای به نام A را در نظر گرفته که این نقطه یک اتصال سینماتیکی مانند مفصل یا لولا بوده و محل تماس دو جسم به هم می‌باشد. در این حالت کافی است نیروهای خارجی وارد بر دو جسم را در روابط (۶) به کار بریم. (توجه کنید که نیروهای داخلی موجود در مفصل A در روابط (۶) ظاهر نمی‌شوند.)



دیاگرام آزاد مجموعه

$\equiv$



دیاگرام سینتیکی مجموعه

www.modaresanesharif.ac.ir

بنابراین سمت راست تساوی روابط (۶) را می‌توانیم به این صورت بازنویسی کنیم:

$$\boxed{\sum \vec{F} = m_1\vec{a}_{G_1} + m_2\vec{a}_{G_2} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = m_1 a_{G_1x} + m_2 a_{G_2x} \\ \sum F_y = m_1 a_{G_1y} + m_2 a_{G_2y} \end{cases}} \quad \text{(۷ الف)}$$

$$\boxed{\sum M_P = (I_{G_1}\alpha_1 + I_{G_2}\alpha_2) + (m_1 a_{G_1} d_1 + m_2 a_{G_2} d_2)} \quad \text{(۷ ب)}$$

سه معادله مستقل در روابط (۷) موجود بوده، در نتیجه در صورتی که مجموعه اجسام صلب متصل به هم دارای سه مجهول باشند به راحتی می‌توانیم مسأله را حل کنیم و مجهولات را به دست آوریم. اما در صورتی که بیش از سه مجهول در مسأله داشته باشیم، در این صورت می‌توانیم اجسام را از یکدیگر جدا نموده و روابط (۷) را به طور مجزا برای هر جسم صلب بنویسیم.

تذکر ۱: لازم به ذکر است که یک مسأله قابل حل صفحه‌ای اجسام صلب نباید بیش از پنج مجهول اسکالر داشته باشد، چون در این مسائل سه معادله اسکالر حرکت $\sum F_x = ma_{G_x}$ و $\sum F_y = ma_{G_y}$ و $\sum M_G = I_G\alpha$ وجود دارد و همچنین از معادله شتاب نسبی بین دو نقطه از جسم صلب نیز می‌توانیم دو رابطه بنویسیم.

انواع حرکت صفحه‌ای جسم صلب

جسم صلب سه حالت حرکت صفحه‌ای دارد که شامل حرکت انتقالی، حرکت دورانی حول یک محور ثابت و حرکت کلی که ترکیبی از انتقال و دوران است، می‌باشد. به دلیل اهمیت بالای مباحث مربوط به این نوع حرکت‌ها، هر یک جداگانه مورد بررسی قرار داده می‌شود.

الف ـ حرکت انتقالی

در این حرکت همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم هر خطی که بر جسم صلب قرار دارد در تمامی لحظات به موازات موقعیت اولیه‌اش باقی می‌ماند. همان‌طور که در شکل‌های زیر هم نشان داده‌ایم حرکت انتقالی به دو صورت انتقالی مستقیم‌الخط و انتقالی منحنی‌الخط وجود دارد.

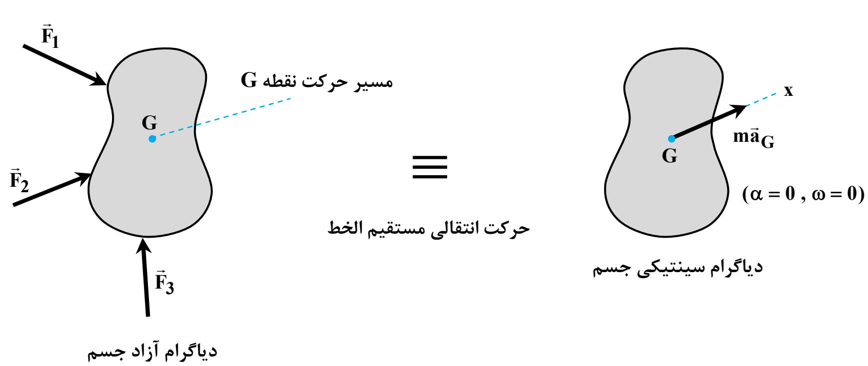
معادلات حرکت در این حالت را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_G \quad \text{(۸ الف)}$$

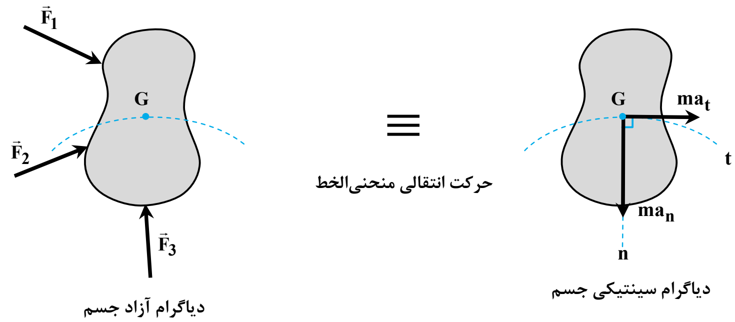
$$\sum M_G = I_G\alpha = 0 \quad \text{(۸ ب)}$$

می‌توانید با توجه به نوع مسأله‌ای که در دستگاه مختصات دکارتی یا دستگاه مختصات قائم ـ مماسی با آن مواجه می‌شوید، رابطه (۹ الف) را بنویسید: دقت کنید که (سرعت زاویه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای α در این حالت مساوی صفر است). در شکل‌های زیر نحوه ترسیم دیاگرام را نشان داده‌ایم.

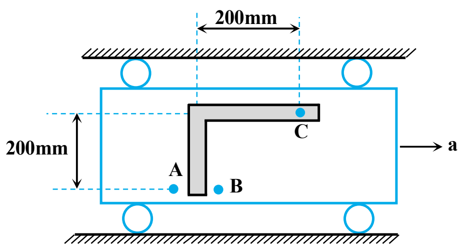
$$\boxed{\begin{cases} \sum F_x = ma_{Gx} = ma_x & \text{(۹ الف)} \\ \sum F_y = ma_{Gy} = ma_y & \text{(۹ ب)} \\ \sum M_G = 0 & \text{(۹ ج)} \end{cases}}$$



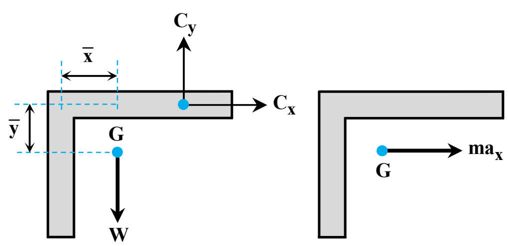
$$\begin{cases}\sum F_t = ma_{Gt} = ma_t & (۱۰\ الف)\\ \sum F_n = ma_{Gn} = ma_n & (۱۰\ ب)\\ \sum M_G = ۰ & (۱۰\ ج)\end{cases}$$



مثال۱: **میله قائم‌الزاویه‌ای به جرم ۳kg با اضلاع مساوی آزادانه در نقطه C به صفحه عمودی لولا شده است. دو میخ A و B که روی صفحه ثابت‌اند مانع چرخش میله می‌شوند. مطلوب است a ، شتاب صفحه که به ازای آن هیچ یک از میخ‌های A یا B نیرویی بر میله وارد نمی‌کنند.**



پاسخ: ابتدا باید موقعیت مرکز جرم میله قائم‌الزاویه را به دست آوریم. پس میله را مانند یک منحنی در نظر گرفته و برای محاسبه مرکز آن از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:



$$\begin{cases}\bar{x} = \dfrac{x_۱L_۱ + x_۲L_۲}{L_۱ + L_۲} = \dfrac{۰ + ۲۰۰\times۱۰۰}{۲۰۰+۲۰۰} = ۵۰\text{mm}\\[2ex] \bar{y} = \dfrac{y_۱L_۱ + y_۲L_۲}{L_۱ + L_۲} = \dfrac{۲۰۰\times۱۰۰+۰}{۲۰۰+۲۰۰} = ۵۰\text{mm}\end{cases}$$

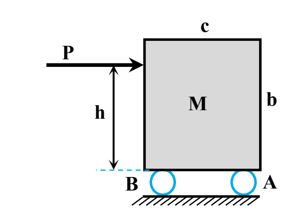
با تعیین مرکز جرم میله اکنون می‌توانیم از روابط (۹) استفاده کنیم، چون حرکت میله از نوع انتقالی مستقیم‌الخط است.

$$\begin{cases}\sum F_x = ma_x \Rightarrow C_x = ma = ۳a & (۱)\\ \sum F_y = ma_y \Rightarrow C_y - W = ۰ \Rightarrow C_y = mg = ۳g & (۲)\end{cases}$$

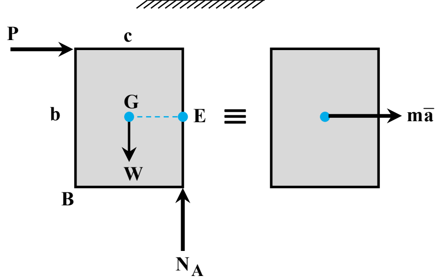
همان‌طور که قبلاً اشاره شده است اگر جسم حرکت انتقالی داشته باشد، شتاب زاویه‌ای آن برابر صفر است. در این مسأله میله دارای حرکت انتقالی بوده در نتیجه شتاب زاویه‌ای آن برابر صفر است.

$$\sum M_G = I_G\alpha = ۰ \Rightarrow -C_x\times۵۰ + C_y\times۱۵۰ = ۰ \xrightarrow{(۱),(۲)} -۳a\times۵۰ + ۳g\times۱۵۰ = ۰ \Rightarrow a = ۳g$$

مثال۲: **صندوق همگن به جرم M بر روی چرخ‌های A و B قرار دارد. حداکثر نیروی P چه اندازه می‌تواند باشد به طوری که صندوق حول قسمت جلویی آن زمانی که h = b می‌باشد، واژگون نشود؟**



پاسخ: لحظه‌ای که صندوق واژگون می‌شود، تماس صندوق با تکیه‌گاه در B قطع می‌شود، در نتیجه $N_B = ۰$ است. اکنون مناسب‌ترین روشی که می‌توانیم استفاده کنیم این است که حول یک نقطه مانند E گشتاور بگیریم، پس طبق رابطه (۴) می‌توانیم بنویسیم:

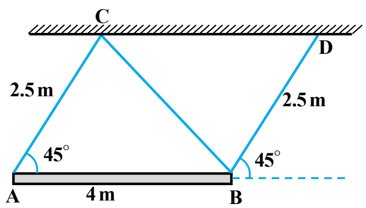


$$\sum M_E = I_G\alpha + m\bar{a}d \Rightarrow P\times\frac{b}{۲} - W\times\frac{c}{۲} = I_G\times۰ + ma\times۰ = ۰$$

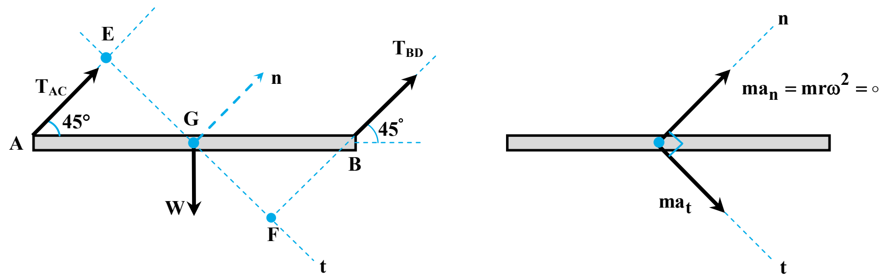
www.modaresanesharif.ac.ir

چون جسم واژگون نمی‌شود، پس شتاب زاویه‌ای ندارد ($\alpha = ۰$). از طرفی امتداد شتاب انتقالی از نقطه E می‌گذرد، در نتیجه $d = ۰$ است. بنابراین رابطه فوق را به صورت روبه‌رو ساده می‌کنیم:
$$Wc = Pb \Rightarrow P = mg\frac{c}{b}$$

مثال ۳: تیر یکنواخت AB به جرم ۱۰۰kg در وضعیت افقی به وسیله سه سیم مطابق شکل آویزان شده است. اگر سیم BC پاره شود کشش سیم BD را بلافاصله پس از پاره شدن حساب کنید.



پاسخ: روش اول: لحظه‌ای که طناب BC پاره می‌شود، میله‌ی AB بر روی مسیر دایروی حرکت انتقالی منحنی‌الخط دارد، از طرفی سرعت نقاط A و B بر طناب‌های AC و BD عمود است. در نتیجه بردار سرعت این دو نقطه موازی می‌باشند. به همین دلیل امتداد عمود بر این دو سرعت همدیگر را در بی‌نهایت قطع نموده یا به عبارت دیگر مرکز آنی دوران میله صلب AB در بی‌نهایت واقع است. به چنین حرکتی، حرکت انتقالی گفته می‌شود. اما نقطه G مرکز جرم میله بر روی مسیر دایروی حرکت می‌کند. توجه کنید که در آغاز حرکت سرعت صفر است اما شتاب وجود دارد. برای اینکه مسأله را ساده‌تر حل کنیم از مختصات قائم ـ مماسی استفاده می‌کنیم و گشتاور حول نقطه E یعنی محل تلاقی امتداد شتاب a_t و نیروی طناب AC را می‌گیریم، چون می‌خواهیم فقط نیروی وزن و نیروی طناب BD حول این نقطه گشتاور داشته باشند، در این صورت خواهیم داشت:

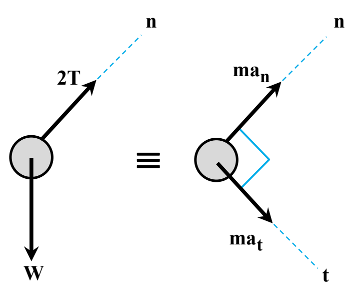


$$\sum M_E = I_G\alpha + ma_n d \Rightarrow T_{BD} \times EF - W\sin ۴۵ \times EG = I_G \times ۰ + m \times ۰ \times d = ۰$$: رابطه (۴)

(در این مسأله حرکت میله از نوع انتقالی است، بنابراین $\alpha = ۰$ و سرعت زاویه‌ای اولیه میله نیز برابر صفر است.)

$$\Rightarrow T_{BD} = \frac{W \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times EG}{EF} \Rightarrow T_{BD} = \frac{۹۸۱ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = ۳۴۶/۷N$$

روش دوم: از آنجا که حرکت میله انتقالی است، می‌توان میله را به صورت جرم متمرکز در نظر گرفت.

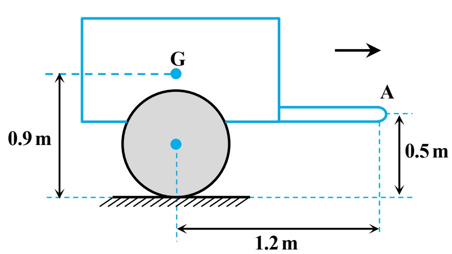


$$\sum \vec{F}_n = m\vec{a}_n = ۰ \quad (\omega = ۰)$$

(سرعت زاویه‌ای اولیه ω یا سرعت خطی اولیه برابر صفر می‌باشد. $a_n = R\omega^۲ = \frac{v^۲}{R} = ۰$)

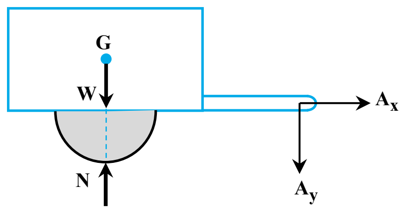
$$\Rightarrow ۲T - W\sin ۴۵ = ۰ \Rightarrow T = \frac{W\sin ۴۵}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(۹۸۱) = ۳۴۷\,N$$

مثال ۴: تریلر حامل باری به جرم ۹۰۰kg و مرکز جرم G در نقطه A به قلاب عقب اتومبیلی متصل است. اگر تریلر و اتومبیل در ۳۰ متری نقطه آغاز به سرعت $۶۰\frac{km}{h}$ برسند و شتاب حرکت ثابت باشد، مولفه عمودی نیروی تحمل شده به وسیله قلاب A را حساب کنید.



www.modaresanesharif.ac.ir

☑ **پاسخ:** با توجه به شکل مسأله جسم حرکت انتقالی مستقیم‌الخط داشته، شتاب آن ثابت بوده و در راستای محور x می‌باشد. با توجه به مقدار مسافت پیموده شده، مقدار شتاب جسم را می‌توانیم محاسبه کنیم.

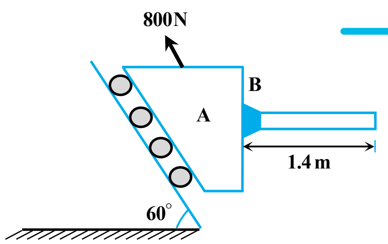


$$v^۲ - v_\circ^۲ = ۲ax \Rightarrow a = \frac{v^۲}{۲x} = \frac{(\frac{۶\circ}{۳/۶})^۲}{۲\times ۳\circ} = ۴/۶۳\frac{m}{s^۲}$$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow A_x = ۹\circ\circ \times ۴/۶۳ = ۴۱۶۷N$$

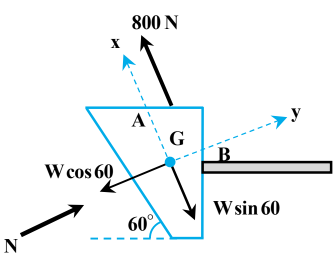
$$\sum M_G = I_G\alpha = \circ$$ (چون حرکت انتقالی است شتاب زاویه‌ای تریلر برابر صفر می‌باشد)

$$\Rightarrow A_x(\circ/۹ - \circ/۵) - A_y \times ۱/۲ = \circ \Rightarrow A_y = \frac{A_x}{۳} = \frac{۴۱۶۷}{۳} = ۱۳۸۹N$$



مثال ۵: قطعه A و میله متصل به آن ۶۰kg جرم دارند و تحت تأثیر نیروی ۸۰۰N مقید به حرکت در هادی شیبدار ۶۰° هستند. میله افقی یکنواخت و جرم آن ۲۰kg است و در نقطه B به قطعه جوش داده شده است . همچنین اصطکاک سطح هادی ناچیز است. لنگر خمشی M که به وسیله جوش در B بر میله وارد می‌شود چقدر است؟

☑ **پاسخ:** محورهای مختصات را به شکل روبه‌رو انتخاب می‌کنیم و قانون دوم نیوتن را برای آن می‌نویسیم.

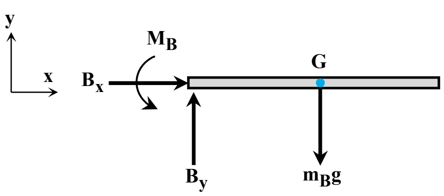


دیاگرام آزاد (I)

(I) دیاگرام آزاد $\sum F_x = ma_x$

$$\Rightarrow ۸\circ\circ - (m_A + m_B)g\sin ۶\circ = (m_A + m_B)a_x$$

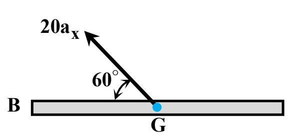
$$\Rightarrow ۸\circ\circ - ۶\circ \times ۱\circ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶\circ a_x \Rightarrow a_x = ۴/۶۷\frac{m}{s^۲}$$



(II) دیاگرام آزاد $\sum M_G = I_G\alpha = \circ$

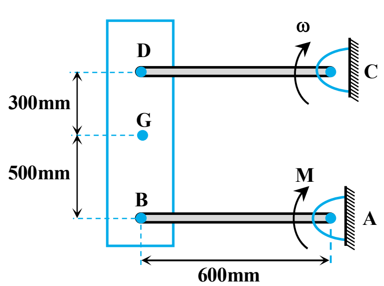
(چون حرکت انتقالی است شتاب زاویه‌ای برابر صفر است)

$$\Rightarrow M_B - B_y \times \circ/۷ = \circ \Rightarrow M_B = \circ/۷\, B_y \qquad (۱)$$



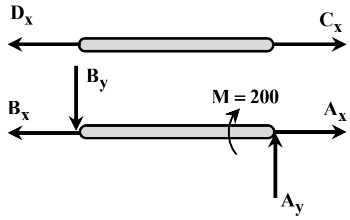
$$\sum F_y = m_B a_y \Rightarrow B_y - ۲\circ \times ۱\circ = ۲\circ \times ۴/۶۷ \sin ۶\circ \Rightarrow B_y = ۲۸۱N \qquad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow M_B = \circ/۷ \times ۲۸۱ = ۱۹۶/۶ N.m$$



مثال ۶: میله BD به جرم ۲۵kg به دو رابط سبک AB و CD متصل است و در صفحه عمودی در حرکت است. به رابط پایینی گشتاور ساعتگرد $M = ۲\circ\circ N.m$ در نقطه A وارد می‌شود. اگر هر یک از دو رابط حین عبور از وضعیت افقی سرعت زاویه‌ای $\omega = ۵\frac{rad}{s}$ داشته باشد، نیرویی را که در این لحظه رابط بالایی در نقطه D و در رابطه پایینی در نقطه D بر میله وارد می‌کند حساب کنید. شتاب زاویه‌ای رابط‌ها در این وضعیت چه اندازه است؟

www.modaresanesharif.ac.ir



☑ **پاسخ:** ابتدا دیاگرام آزاد سه جزء نشان داده شده در شکل فوق را رسم می‌کنیم. قبل از اینکه به حل مسأله بپردازید این نکته را باید بگوییم که عضو DC بی‌وزن است و گشتاوری بر آن اعمال نمی‌شود، پس این عضو، یک عضو دو نیرویی است و نیرو را به صورت محوری تحمل می‌کند. دقت داشته باشید که جرم میله رابط AB بسیار کم است، از این رو ممان لختی جرمی آن مساوی صفر در نظر گرفته می‌شود. در ابتدا برای این میله حول نقطه A گشتاور می‌گیریم.

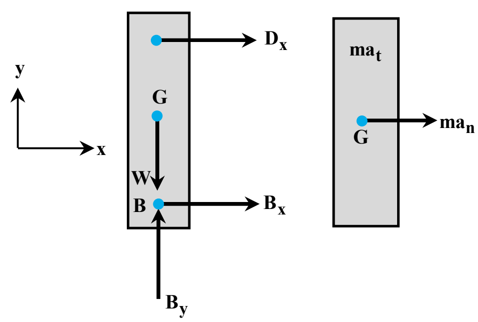
چون نقطه A یک نقطه ثابت است پس می‌توانید از رابطه (۶) استفاده کنید، البته در صورتی که I_A را مساوی صفر در نظر بگیرید.

$(m_{AB}=۰ \Rightarrow I_A=۰)$

دیاگرام آزاد جسم صلب AB: $\sum M_A = I_A\alpha = ۰ \Rightarrow B_y \times ۰/۶ - ۲۰۰ = ۰ \Rightarrow B_y = ۳۳۳\text{N}$

از طرفی میله BD حرکت انتقالی منحنی‌الخط دارد، در نتیجه شتاب زاویه‌ای آن مساوی صفر است اما مرکز ثقل نقطه G بر روی مسیر دایروی حرکت می‌کند. با گشتاورگیری حول نقطه B برای این میله خواهیم داشت:

دیاگرام آزاد جسم صلب BD: $\sum M_B = I_G\alpha + mad = ma_n d \Rightarrow D_x \times ۰/۸ = ۲۵ \times a_n \times ۰/۵$ (۱)



اما شتاب a_n را می‌توانیم با استفاده از $\frac{v^۲}{R}$ به دست آوریم:

$$a_n = \frac{v^۲}{R} = \frac{(R\omega)^۲}{R} = R\omega^۲ = ۰/۶ \times ۵^۲ = ۱۵\frac{m}{s^۲}$$

$$(۱) \Rightarrow D_x \times ۰/۸ = ۲۵ \times ۱۵ \times ۰/۵ \Rightarrow D_x = ۲۳۴/۴\,\text{N}$$

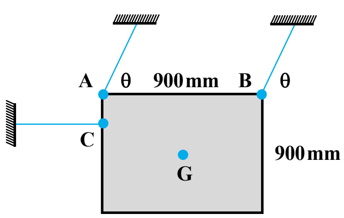
$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow D_x + B_x = ۲۵ \times R\omega^۲ = ۲۵ \times ۰/۶ \times ۵^۲$$

$$\Rightarrow D_x + B_x = ۳۷۵\text{N} \Rightarrow ۲۳۴ + B_x = ۳۷۵ \Rightarrow B_x = +۱۴۱\text{N}$$

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow B_y - W = ma_t \Rightarrow ۳۳۳ - ۲۵ \times ۹/۸۱ = ۲۵ \times a_t \Rightarrow a_t = ۳/۵۱\frac{m}{s^۲}$$

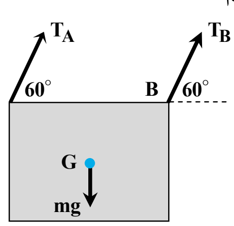
حال می‌توانیم شتاب مماسی میله BD را برحسب شتاب زاویه‌ای رابطها به این صورت بنویسیم:

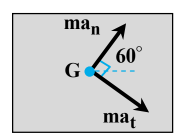
$$a_t = r\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{a_t}{r} = \frac{۳/۵۱}{۰/۶} = ۵/۸۵\frac{rad}{s^۲}$$

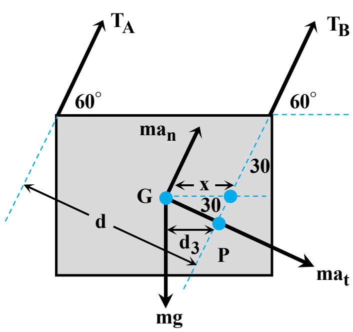


مثال ۷: جعبه‌ای به جرم ۹۰۰Kg مطابق شکل توسط سه طناب A و B و C نگه داشته شده است. اگر در $\theta = ۶۰^\circ$ ناگهان طناب C پاره شود، مقدار کشش طناب A در آن لحظه چه اندازه است؟

☑ **پاسخ:** در ابتدا دیاگرام آزاد جعبه را در لحظه رهایی طناب C رسم می‌کنیم.







در لحظه اولیه سرعت زاویه‌ای جعبه صفر است، بنابراین شتاب جانب مرکز جعبه برابر صفر می‌شود. حال اگر محل تلاقی امتداد نیروی مجهول T_B و نیروی اینرسی ma_t را نقطه P بنامیم، با نوشتن معادله گشتاور حول این نقطه، مجهول T_A را به دست می‌آوریم.

$$\sum M_P = I_G\alpha + ma_n d_۱ + ma_t d_۲$$

www.modaresanesharif.ac.ir

در رابطه فوق شتاب زاویه‌ای جسم برابر صفر است و از طرفی جسم دارای حرکت انتقالی است و سرعت زاویه‌ای اولیه نیز صفر است، پس با توجه به این موارد مقدار شتاب جانب مرکز نیز صفر می‌باشد. اما امتداد نیروی اینرسی ma_t همان‌طور که در شکل هم می‌بینید از نقطهٔ P می‌گذرد بنابراین $d_۲$ برابر صفر می‌باشد.

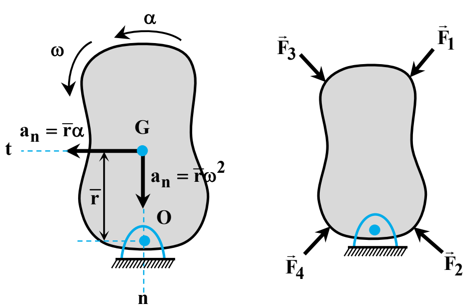
$$\sum M_P = ۰ \Rightarrow -T_A \times d + mgd_۳ = ۰ \qquad (۱)$$

$$x = ۰/۴۵۰ - ۰/۴۵۰ \times tg۳۰ = ۰/۱۹۰\,m \quad ; \quad d = ۰/۹۰۰ \cos ۳۰ = ۰/۷۷۹\,m$$

$$d_۳ = (\overline{PG})\cos ۳۰ = (x\cos ۳۰)\cos ۳۰ = ۰/۱۹۰ \times \frac{۳}{۴} = ۰/۱۴۲۵\,m$$

$$(۱) \Rightarrow T_A \times ۰/۷۷۹ = ۹۰۰ \times ۹/۸۱ \times ۰/۱۴۲۵ \Rightarrow T_A = ۱۶۱۵\,N$$

ب ـ چرخش حول محور ثابت



جسم صلبی را مطابق شکل در نظر بگیرید که حول نقطهٔ ثابت O دوران می‌کند. معادلات کلی حرکت برای جسم صلب نشان داده شده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_G \Rightarrow \boxed{\begin{cases}\sum F_n = ma_n \\ \sum F_t = ma_t\end{cases}} \qquad (۱۲)$$

$$\boxed{\Sigma M_G = I_G \alpha}$$

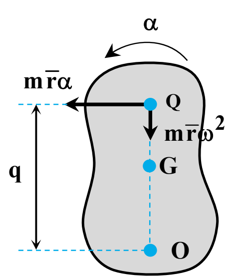
برای چرخش جسم حول محور ثابت بهتر است معادله لنگر را حول نقطه ثابت بنویسیم:

$$\sum M_O = I_G\alpha + ma_t \times \bar{r} + ma_n \times ۰ \Rightarrow \sum M_O = I_G\alpha + m(\bar{r}\alpha)\times\bar{r} = (I_G + m\bar{r}^۲)\alpha$$

$$\sum M_O = I_O\alpha \quad ; \; I_O = I_G + m\bar{r}^۲ \qquad (۱۳)$$

همان‌طور که در شکل هم می‌بینید مقدار $\bar{r}$ برابر فاصله مرکز جرم تا نقطه ثابت O می‌باشد.

همچنین معادله لنگر را می‌توانیم حول نقطه‌ای بنویسیم که گشتاور همه نیروها حول آن نقطه مساوی صفر باشد. به این نقطه مرکز تصادم می‌گوییم و آن را با نقطه Q نمایش می‌دهیم. $\sum M_Q = ۰$



فاصله نقطه تصادم تا نقطه ثابت را با q نشان می‌دهیم که از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\boxed{q = \frac{k_O^۲}{\bar{r}}} \qquad (\text{۱۴ الف})$$

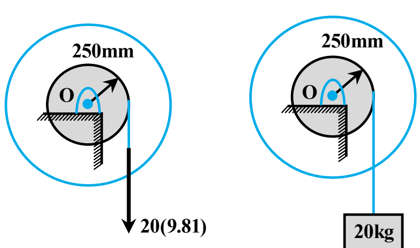
$$\boxed{I_O = k_O^۲ m} \qquad (\text{۱۴ ب})$$

به k_O شعاع چرخش می‌گوییم.

در صورتی‌که فاصله نقطه تصادم را تا نقطه ثابت داشته باشیم، می‌توانیم رابطه (۵) را به صورت زیر بنویسیم:

$$\boxed{\sum M_O = I_O\alpha = k_O^۲ m\alpha = m\bar{r}\alpha q} \qquad (۱۵)$$

تذکر۲: لازم به ذکر است که برآیند همه نیروهایی که بر جسم وارد می‌شوند از نقطه تصادم عبور می‌کند. این نقطه منحصر به فرد بوده و گشتاور همه نیروها حول آن صفر است.



(الف) (ب)

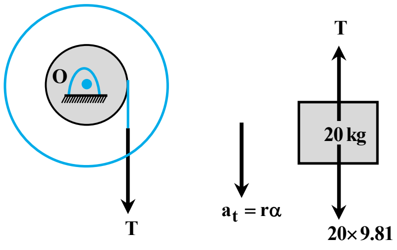
مثال۸: هر یک از دو قرقره نشان داده شده و توپیهای متصل به آنها دارای شعاع ۲۵۰mm، جرم ۱۰۰kg و شعاع چرخش ۳۷۵mm حول مرکز خود هستند. شتاب زاویه‌ای هر یک از دو قرقره را حساب کنید.

☑ **پاسخ:** اگر حول محور ثابت O گشتاور بگیریم و رابطه‌ی (۱۵) را نیز به کار ببریم، خواهیم داشت:

$$\sum M_O = I_O\alpha \Rightarrow Tr = k_O^۲ m\alpha \qquad (۱)$$

$$\Rightarrow T \times ۰/۲۵ = ۰/۳۷۵^۲ \times ۱۰۰\alpha \Rightarrow \alpha = ۰/۰۱۸T \qquad (۲)$$

www.modaresanesharif.ac.ir



اکنون قانون دوم نیوتن را برای جرم ۲۰ کیلوگرمی در راستای قائم می‌نویسیم:

$$\text{(حالت (الف))}: ۲۰(۹/۸۱) - T = mr\alpha \Rightarrow ۲۰(۹/۸۱) - mr\alpha = T \Rightarrow$$

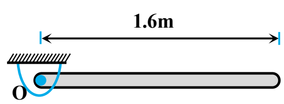
$$\Rightarrow ۲۰\times۹/۸۱ - ۲۰\times۰/۲۵\alpha = T \Rightarrow T = ۱۹۶/۲ - ۵\alpha \quad (۲)$$

$$\left.\begin{matrix}(۱)\\(۲)\end{matrix}\right| \Rightarrow \alpha = ۰/۰۱۸(۱۹۶/۲ - ۵\alpha) \Rightarrow \alpha_a = ۳/۲\frac{rad}{s^۲}$$

در حالت (ب) می‌توانیم گشتاور نیروی خارجی حول محور مرکز قرقره‌ی O را به صورت زیر بنویسیم:

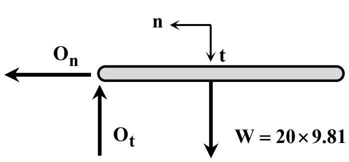
$$\text{(حالت (ب))}: T = ۲۰\times۹/۸۱ = ۱۹۶/۲ \quad \xrightarrow{(۱)} \alpha_b = ۰/۰۱۸\times۱۹۶/۲ = ۳/۵۳\frac{rad}{s^۲}$$

با توجه به نتایج به دست آمده می‌توانیم نتیجه بگیریم که شتاب زاویه‌ای چرخ (ب) بیشتر است.



مثال۹: میله باریک و یکنواخت به جرم ۲۰kg مطابق شکل در نقطه O لولا شده و آزادانه می‌تواند در صفحه قائم نوسان کند. اگر میله از حال تعادل در وضعیت افقی رها شود، نیروی اولیه R که یاتاقان به میله وارد می‌کند را در لحظه پس از رها شدن حساب کنید.

☑ **پاسخ:** برای حل مسأله از دستگاه مختصات قائم ـ مماسی استفاده نموده و معادله گشتاور حول نقطه ثابت O نوشته می‌شود.



$$\sum M_O = I_O\alpha \Rightarrow mg\frac{L}{۲} = I_O\alpha \Rightarrow ۲۰\times۹/۸۱\times۰/۸ = I_O\alpha \Rightarrow ۱۵۷ = I_O\alpha$$

با استفاده از قضیه انتقال محورها می‌توانیم گشتاور لختی میله حول نقطه O را به دست آوریم:

$$\Rightarrow \alpha = \frac{۱۵۷}{I_G + m(\frac{L}{۲})^۲} = \frac{۱۵۷}{\frac{۱}{۱۲}mL^۲ + \frac{mL^۲}{۴}} \Rightarrow \alpha = \frac{۱۵۷}{\frac{۱}{۳}\times۲۰\times۱/۶^۲} = ۹/۲\frac{rad}{s^۲}$$

حرکت مرکز جرم میله بر روی مسیر دایروی بوده بنابراین از دستگاه قائم ـ مماسی برای حل مسأله استفاده می‌شود.

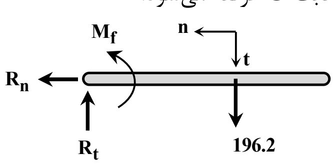
$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow ۲۰\times۹/۸۱ - O_t = ۲۰\times۰/۸\times۹/۲ \Rightarrow O_t = ۴۹N$$

$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow O_n = mr\omega^۲ = ۰ \ (\omega = \alpha t + \omega_0 \Rightarrow \omega = \alpha\times۰ + ۰ = ۰ \ \text{در لحظه شروع حرکت، سرعت زاویه‌ای صفر است})$$

$$R = F_O = \sqrt{O_n^۲ + O_t^۲} = ۴۹N$$

مثال۱۰: اگر در مثال قبل هنگام رها شدن میله از حالت تعادل افقی دارای شتاب زاویه‌ای اولیه $۶\frac{rad}{s^۲}$ باشد لنگر اصطکاک M_f که در نقطه O بر میله وارد می‌شود را حساب کنید. همچنین نیروی R را که توسط یاتاقان در نقطه O وارد می‌شود حساب کنید.

☑ **پاسخ:** برای حل این مسأله از دستگاه مختصات قائم ـ مماسی استفاده نموده و معادله گشتاور حول نقطه ثابت O گرفته می‌شود.



$$\sum M_O = I_O\alpha \Rightarrow ۲۰\times۹/۸۱\times۰/۸ - M_f = \frac{mL^۲}{۱۲} + m(\frac{L}{۲})^۲ = \frac{mL^۲}{۳}\alpha$$

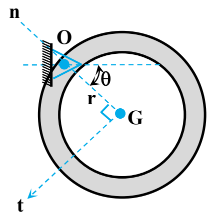
$$\Rightarrow M_f = ۱۵۷ - \frac{۲۰\times۱/۶^۲}{۳}\times۶ = ۵۴/۵ \ N.m$$

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow mg - R_t = mr\alpha \Rightarrow ۱۹۶/۲ - R_t = ۲۰\times۰/۸\times۶ \Rightarrow R_t = ۱۰۰/۲N$$

وقتی میله رها می‌شود، سرعت زاویه‌ای اولیه میله برابر صفر است، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow R_n = mr\omega^۲ = ۰ \Rightarrow R = \sqrt{R_n^۲ + R_t^۲} = ۱۰۰/۲N$$

مثال ۱۱: حلقه نازک نشان داده شده به جرم m آزادانه حول نقطه O در صفحه قائم می‌چرخد. اگر حلقــه از حــال سکون در $\theta = ۰$ رها شود. نیروی موجود در یاتاقان بر حسب θ چه اندازه است؟



پاسخ: در ابتدا حول نقطه O که یک نقطه ثابت است، گشتاورگیری می‌کنیم. در نتیجه گشتاور لختی حلقه حـول ایـن نقطه باید محاسبه شود. برای محاسبه گشتاور لختی حول نقطه ثابت O از قضیه انتقال به صورت زیر استفاده می‌شود.

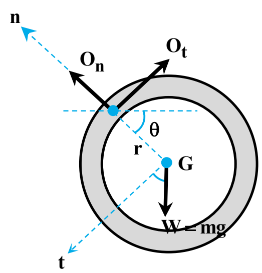
$$I_O = I_G + m\bar{r}^۲ = I_G + mr_{OG}^۲ = mr^۲ + mr^۲ = ۲mr^۲$$

$$\sum M_O = I_O\alpha \Rightarrow mgr\cos\theta = (۲mr^۲)\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{g}{۲r}\cos\theta \qquad (۱)$$

$$\int \omega d\omega = \int \alpha d\theta \Rightarrow \int_۰^\omega \omega d\omega = \int_۰^\theta \frac{g}{۲r}\cos\theta d\theta = \frac{g}{۲r}\sin\theta \Rightarrow \omega^۲ = \frac{g}{r}\sin\theta \qquad (۲)$$

با توجه به اینکه مرکز جرم حلقه بر روی یک مسیر دایروی به مرکز O حرکت می‌کند، بهتر است از دستگاه مختصات قـائم ـ مماسـی بـرای بیـان معادلات حرکت استفاده کنیم.

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow mg\cos\theta - O_t = mr\alpha \overset{(۱)}{=} mr(\frac{g}{۲r}\cos\theta) = \frac{mg}{۲}\cos\theta$$



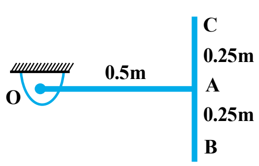
$$\Rightarrow O_t = W\cos\theta - \frac{W}{۲}\cos\theta \Rightarrow O_t = \frac{W}{۲}\cos\theta$$

$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow O_n - W\sin\theta = mr\omega^۲ \overset{(۲)}{=} mr(\frac{g}{r}\sin\theta) = mg\sin\theta$$

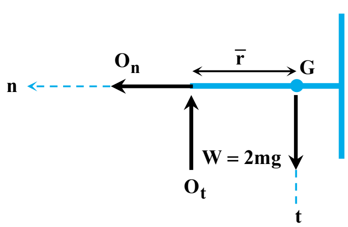
$$\Rightarrow O_n = W\sin\theta + W\sin\theta = ۲W\sin\theta \Rightarrow O_n = ۲W\sin\theta$$

$$F_O = \sqrt{O_n^۲ + O_t^۲} = W\sqrt{\frac{\cos^۲\theta}{۴} + ۴\sin^۲\theta}$$

مثال ۱۲: جرم هر یک از دو میله باریک یکنواخت OA و BC، ۸kg است. میله‌ها به شکل T در نقطه A با هم جوش داده شده‌اند و آزادانه حول محور افقی گذرنده از O می‌چرخند. اگـر سـرعت ω زاویه‌ای میله‌ها حین عبور OA از وضعیت افقی نشان داده شده $۴\frac{rad}{s}$ باشد، نیروی کـل R کـه بـه یاتاقان O وارد می‌شود را حساب کنید.



پاسخ: در ابتدا ممان لختی جرمی دو میله را حول نقطه ثابت O بدست آورده سپس آنها را با هم جمع می‌کنیم.



$$I_O = I_G + mr^۲$$

$$(I_O)_{OA} = \frac{mL^۲}{۱۲} + \frac{mL^۲}{۴} = \frac{mL^۲}{۳}, \ (I_O)_{BC} = \frac{mL^۲}{۱۲} + mL^۲ = \frac{۱۳}{۱۲}mL^۲$$

$$I_O = (I_O)_{OA} + (I_O)_{BC} = \frac{mL^۲}{۳} + \frac{۱۳}{۱۲}mL^۲ = \frac{۱۷}{۱۲}mL^۲$$

حال می‌توانیم موقعیت مرکز جرم میله‌ها را از طریق رابطه زیر تعیین کنیم:

$$x_G = \frac{m_۱\bar{x}_۱ + m_۲\bar{x}_۲}{m_۱ + m_۲} = \frac{m \times \frac{L}{۲} + mL}{۲m} = \frac{۳}{۴}L = \bar{r}$$

$$\sum M_O = I_O\alpha \Rightarrow ۲mg \times \bar{r} = ۲mg \times \frac{۳L}{۴} = \frac{۱۷}{۱۲}mL^۲\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\frac{۳}{۲}mgL}{\frac{۱۷}{۱۲}mL^۲} = \frac{۱۸}{۱۷}\frac{g}{L}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

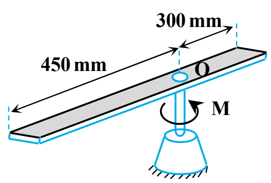
حرکت میله‌ها حول یک نقطه ثابت بوده بنابراین برای حل مسأله از دستگاه مختصات قائم ـ مماسی استفاده می‌کنیم.

$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow O_n = 2m\bar{r}\omega^2 \Rightarrow O_n = 2m\times\frac{3}{4}L\times 4^2 \Rightarrow O_n = 16\times\frac{3}{4}\times 0.5\times 16 = 96N$$

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow -O_t + 2mg = 2m\bar{r}\alpha = 2m\times\frac{3}{4}L\times\frac{18}{17}\frac{g}{L}$$

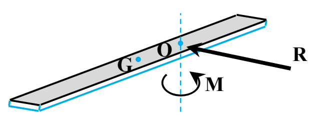
$$\Rightarrow O_t = 2mg - \frac{27}{17}mg = \frac{7}{17}mg = \frac{7}{17}\times 8\times 9.81 = 32.3\,N \Rightarrow F_O = \sqrt{O_t^2 + O_n^2} = 101.3N$$

دقت داشته باشید که اگر بخواهیم $\sum M_O$ را محاسبه کنیم، می‌توانیم گشتاور نیروی وزن میله‌های OA و BC را جداگانه حول نقطه O به دست آوریم، بنابراین دیگر لازم نیست مرکز جرم را تعیین کنید. $\sum M_O = mg\times\frac{L}{2} + mg\times L = \frac{3}{2}mgL$



مثال ۱۳: میله ۷۵۰mm به جرم ۹kg در نقطه O بر محوری عمودی سوار شده است. اگر گشتاور M = ۱۰N.m از طریق محور به میله اعمال شود، نیروی افقی R که در حین آغاز چرخش میله به یاتاقان وارد می‌شود را بدست آورید.

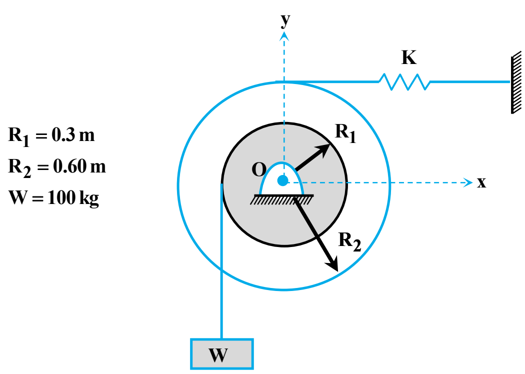
☑ **پاسخ:** اگر نیروی افقی را که بر میله افقی در نقطه O وارد می‌شود با R نمایش دهیم، با نوشتن معادله تعادل گشتاور حول مرکز جرم، این نیرو به دست می‌آید.



$$\sum M_O = I_O\alpha \Rightarrow M = (I_G + md^2)\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{M}{I_G + md^2}$$

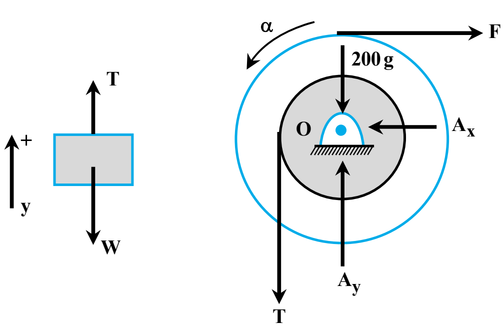
$$\Rightarrow \alpha = \frac{10}{\frac{mL^2}{12} + md^2} = \frac{10}{\frac{9\times 0.75^2}{12} + 9\times 0.075^2} = 21.16\frac{rad}{s^2}$$

$$\sum M_G = I_G\alpha \Rightarrow M + R\times 0.075 = \frac{9\times 0.75^2}{12}\times 21.16 \Rightarrow 10 + 0.075R = 8.9268 \Rightarrow R = -14.3\,N$$



مثال ۱۴: استوانه دو طبقه‌ای مطابق شکل با شعاع چرخش $k_O = 0.4m$ و جرم ۲۰۰kg موجود است. این استوانه از طریق طناب وزنه W به جرم ۱۰۰kg را نگه داشته است و حرکت آن با فنری خطی با ثابت $k = 2\frac{N}{mm}$ محدود می‌شود. وقتی این استوانه بعد از رها شدن از حالت سکون ۱۰° بچرخد، شتاب آن چقدر است؟ فنر ابتدا کشیده نشده است. نیروهای نگهدارنده در این زمان چقدر است؟

☑ **پاسخ:** در ابتدا نمودار آزاد استوانه دو طبقه و وزنه W را مطابق شکل‌های روبرو رسم نموده. سپس معادلات حرکت را برای آن می‌نویسیم:



$$\sum M_O = I_O\alpha \Rightarrow TR_1 - FR_2 = I_O\alpha \Rightarrow TR_1 - k(R_2\theta)R_2 = (k_O^2 m)\alpha$$

$$\Rightarrow T\times 0.3 - (2\times 1000\frac{N}{m})(0.6)^2\theta = (200\times 0.4^2)\ddot{\theta} \qquad (1)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

دقت کنید که θ چرخش استوانه از موضعی متناظر با وضعیت کشیده نشده فنر است. اکنون با در نظر گرفتن اینکه وزنه W حرکت انتقالی دارد می‌توانیم معادله حرکت را برای آن مطابق رابطه زیر بنویسیم:

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow T - W = M\ddot{y} \Rightarrow T - ۱۰۰\times ۹/۸۱ = ۱۰۰\ddot{y} \quad \Rightarrow T = ۱۰۰\times ۹/۸۱ + ۱۰۰\ddot{y} \quad (۲)$$

با توجه به سینماتیک داریم:

$$R_۱\ddot{\theta} = -\ddot{y} \Rightarrow ۰/۳\ddot{\theta} = -\ddot{y} \qquad (۳)$$

$$(۱),(۲),(۳) \Rightarrow [۱۰۰\times ۹/۸۱ + ۱۰۰(-۰/۳\ddot{\theta})](۰/۳) - ۲\times ۱۰۰۰\times ۰/۶^۲\theta = ۲۰۰(۰/۴)^۲\ddot{\theta} \qquad (۴)$$

در حالتی که مقدار θ برابر ۱۰° می‌شود خواهیم داشت:

$$\theta = ۱۰\times\frac{\pi}{۱۸۰} = ۰/۱۷۴۵\,\text{rad} \xrightarrow{(۴)} \ddot{\theta} = ۴/۱۱\,\frac{\text{rad}}{s^۲}$$

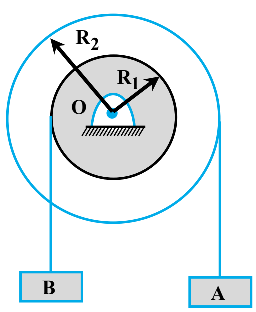
$$(۲),(۳) \Rightarrow T = ۹۸۱ - ۱۲۳/۳ = ۸۵۸\,N$$

اکنون قانون دوم نیوتن را برای مرکز جرم استوانه به کار می‌بریم:

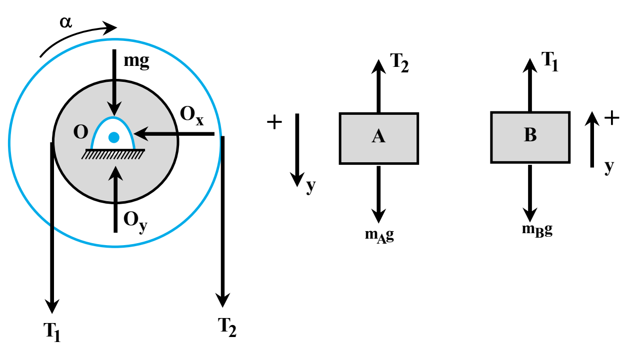
$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow -۸۵۸ - ۲۰۰g + A_y = ۰ \Rightarrow A_y = ۲۸۲۰\,N$$

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow -A_x + F = ۰ \Rightarrow -A_x + kR_۲\theta = ۰ \Rightarrow -A_x + [۲\times ۱۰۰۰](۰/۶)۱۰\times\frac{\pi}{۱۸۰} = ۰ \Rightarrow A_x = ۲۰۹\,N$$

مثال ۱۵: در یک استوانه دو طبقه $R_۱ = ۰/۳\,m$ و $R_۲ = ۰/۶۵\,m$ و شعاع چرخش برابر $۰/۳۵\,m$ است. جرم این استوانه $۱۰۰\,kg$ است. وزنه‌های A و B به استوانه متصل‌اند. اگر وزنه B به جرم $۸۰\,kg$ و وزنه A به جرم $۵۰\,kg$ باشد، A در عرض ۵ ثانیه چقدر حرکت می‌کند. (در چه جهتی حرکت می‌کند؟)



پاسخ: دیاگرام آزاد استوانه دو طبقه و جرم‌های A و B را جداگانه رسم نموده و معادلات حرکت را برای آن می‌نویسیم:



استوانه: $\sum M_O = I_O\alpha \Rightarrow T_۲\times R_۲ - T_۱R_۱ = mk_O^۲\alpha$

$$\Rightarrow T_۲\times ۰/۶۵ - T_۱\times ۰/۳ = ۱۰۰(۰/۳۵)^۲\alpha \Rightarrow ۰/۶۵T_۲ - ۰/۳T_۱ = ۱۲/۲۵\alpha \qquad (۱)$$

$$\begin{matrix}(A)\ \text{جرم}: m_Ag - T_۲ = m_Aa_A \\ (B)\ \text{جرم}: T_۱ - m_Bg = m_Ba_B\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases}۵۰\times ۹/۸۱ - T_۲ = ۵۰a_A \\ T_۱ - ۸۰\times ۹/۸۱ = ۸۰a_B\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۴۹۰/۵ - T_۲ = ۵۰a_A & (۲) \\ T_۱ - ۷۸۴/۸ = ۸۰a_B & (۳)\end{cases}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

اکنون مقدار شتاب نقاط A و B را به ترتیب برحسب شتاب زاویه‌ای استوانه α به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_A = R_2\alpha = 0.65\alpha & (4) \\ a_B = +R_1\alpha = 0.3\alpha & (5) \end{cases} \xrightarrow{(2),(3)} \begin{cases} 490.5 - T_2 = 50(0.65\alpha) \\ T_1 - 784.8 = 80(0.3\alpha) \end{cases}$$

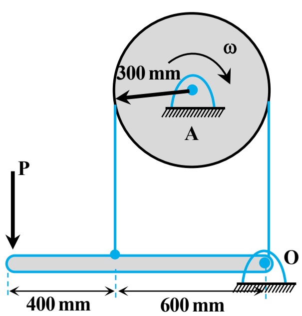
$$\Rightarrow \begin{cases} 490.5 - T_2 = 32.5\alpha \Rightarrow \\ T_1 - 784.8 = 24\alpha \quad \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} T_2 = -32.5\alpha + 490.5 \\ T_1 = 24\alpha + 784.8 \end{cases} \xrightarrow{(1)} 0.65(490.5 - 32.5\alpha) - 0.3(24\alpha + 784.8) = 12.25\alpha$$

$$\Rightarrow 40.575\alpha = 83.385 \Rightarrow \alpha = 2.055\frac{rad}{s^2} \Rightarrow \begin{cases} T_2 = 423.7\,N \\ T_1 = 834.1\,N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_A = 1.3357\frac{m}{s^2} \\ a_B = 0.6165\frac{m}{s^2} \end{cases}$$

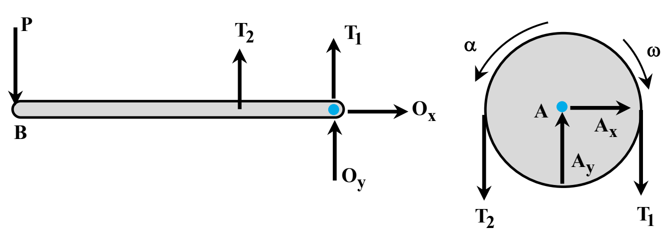
بنابراین مقدار مسافتی که وزنه A در عرض ۵ ثانیه جابه‌جا می‌شود را می‌توانیم توسط رابطه زیر محاسبه کنیم:

$$h_A = \frac{1}{2}a_A \times t^2 = \frac{1}{2} \times 1.3357 \times 5^2 = 16.69\,m$$

مثال ۱۶: قرقره A و لوازم جانبی که با آن می‌چرخند جرمی برابر $1000\,kg$ و شعاع چرخش $0.25\,m$ دارند. مطابق شکل به کمک نیروی P یک ترمز دستی ساده اعمال می‌شود. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین تسمه و قرقره 0.2 باشد نیروی P چقدر باشد تا در عرض $60\,sec$ سرعت را از $1750\,rpm$ به $3000\,rpm$ برساند؟



پاسخ: با ملاحظه دقیق شکل می‌توان متوجه شد که این تسمه‌ای که به دور قرقره پیچیده شده، نقش ترمز را برای آن ایفا می‌کند، بنابراین گشتاوری که از طرف نیروی P به آن وارد می‌شود خلاف جهت حرکت قرقره A می‌باشد. اکنون برای حل مسأله باید دیاگرام آزاد قرقره و اهرم ترمز دستی را رسم نموده و معادلات حرکت را برای جسم صلب OB و قرقره A بنویسیم:



معادله تعادل برای جسم صلب OB (بدون وزن): $\sum M_O = I_O\alpha_{OB} \Rightarrow P \times 1000 - T_2 \times 600 = I_O \times \alpha \Rightarrow 10P - 6T_2 = 0 \Rightarrow P = 0.6T_2 \quad (1)$

جسم صلب قرقره A: $\sum M_A = I_A\alpha \Rightarrow T_1 \times 0.3 - T_2 \times 0.3 = (mk_A^2)\alpha$

$$\Rightarrow 0.3(T_1 - T_2) = 1000 \times 0.25^2\alpha \Rightarrow -T_1 + T_2 = 208.3\alpha \quad (2)$$

همان‌طور که در صورت مسأله هم اشاره شده است بین تسمه و کابل اصطکاک وجود دارد پس می‌بینیم که بین کشش سمت سفت T_1 و سمت شل T_2 رابطه $\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\theta}$ برقرار بوده که μ ضریب اصطکاک جنبشی بوده و θ زاویه تماس کابل با چرخ A می‌باشند.

$$T_2 = T_1e^{\mu\theta} \Rightarrow T_2 = T_1e^{0.2\pi} \Rightarrow T_2 = 1.874T_1 \quad (3)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

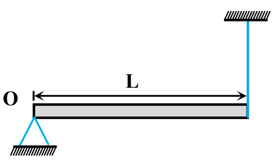
می‌دانیم که سرعت زاویه‌ای قرقره در عرض ۶۰ ثانیه از ۱۷۵۰rpm به ۳۰۰ rpm می‌رسد، بنابراین مقدار شتاب زاویه‌ای قرقره برابر خواهد بود با:

$$\omega=\alpha t+\omega_{\circ}\Rightarrow\alpha=\frac{\omega-\omega_{\circ}}{t}=\frac{۳۰۰-۱۷۵۰}{۶۰}\Rightarrow\alpha=-۲۴/۱۶\frac{rpm}{s}\Rightarrow\alpha=-۲۴/۱۶\times\frac{۲\pi}{۶۰}=-۲/۵۳\frac{rad}{s^{۲}}$$

$$(۲),(۳)\Rightarrow T_{۱}=۶۰۳\Rightarrow T_{۲}=۱۱۳۰\,N$$

$$\xrightarrow{(۱)}P=۰/۶T_{۲}=۰/۶\times۱۱۳۰=۶۷۸\,N$$

مثال ۱۷: یک تیر افقی به وزن W از سمت چپ بر تکیه‌گاه O و از سمت راست به وسیله طنابی به نقطه ثابتی وصل است. با سوزاندن طناب ارتباط سمت راست قطع می‌گردد. کدام‌یک از حالات زیر برای لحظه بعد از قطع طناب صادق است؟



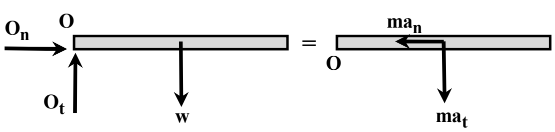
۱) نیروی تکیه‌گاه سمت چپ برابر با $\frac{W}{۲}$ است.

۲) نیروی تکیه‌گاه سمت چپ از $\frac{W}{۲}$ بزرگتر است.

۳) نیروی تکیه‌گاه سمت چپ بین $\frac{W}{۳}$ و $\frac{W}{۲}$ می‌باشد.

۴) نیروی تکیه‌گاه سمت چپ کوچکتر از $\frac{W}{۳}$ است.

پاسخ: گزینه «۴» بعد از این که طناب پاره می‌شود، تیر حول نقطه ثابت O شروع به دوران می‌کند، پس می‌دانیم که باید از دستگاه مختصات قائم ـ مماسی برای حل مسأله استفاده کنیم. (دقت داشته باشید که در لحظه قطع طناب و شروع حرکت $\omega=۰$ است چون $\omega=\alpha t+\omega_{\circ}=\alpha\times۰+۰=۰$)



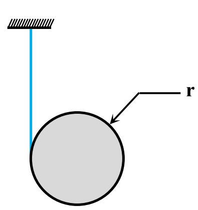
$$\sum F_n=ma_n\Rightarrow -O_n=mr\omega^{۲}\Rightarrow O_n=۰$$

$$\sum F_t=ma_t\Rightarrow -O_t+W=ma_t\Rightarrow O_t=mg-mr\alpha \qquad (۱)$$

$$\sum M_O=I_O\alpha\Rightarrow W\frac{L}{۲}=(\frac{mL^{۲}}{۱۲}+\frac{mL^{۲}}{۴})\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{۳W}{۲mL}=\frac{۳g}{۲L} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow O_t=mg-m\frac{L}{۲}\times\frac{۳g}{۲L}=\frac{mg}{۴} \;؛\; F_O=\sqrt{O_n^{۲}+O_t^{۲}}=\frac{mg}{۴}=\frac{W}{۴}$$

مثال ۱۸: استوانه‌ای به جرم m و به شعاع r به وسیله طنابی که به دور آن پیچیده شده آویزان گردیده است. اگر استوانه رها شود، کشش در طناب برابر است با: (ممان اینرسی استوانه حول مرکز جرم برابر $\frac{۱}{۲}mr^{۲}$ است.)



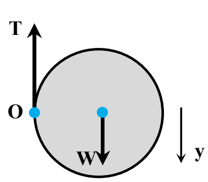
۱) $\frac{mg}{۳}$

۲) $\frac{mg}{۲}$

۳) $\frac{۳mg}{۵}$

۴) صفر

پاسخ: گزینه «۱» همان‌طور که در شکل می‌بینید، طناب در سمت چپ استوانه قرار دارد و چون به تکیه‌گاه ثابت متصل بوده بنابراین سرعت آن صفر است و در نتیجه نقطه O مرکز آنی دوران خواهد بود. از این‌رو شتاب مرکز جرم استوانه مساوی $r\alpha$ است.



$$\Sigma F_y=ma_y\Rightarrow W-T=ma_y\Rightarrow T=W-mr\alpha \qquad (۱)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

از طرفی طبق تعریفی که در فصل چهارم از مرکز آنی دوران ارائه کردیم، نقطه O دارای سرعت صفر است پس می‌توانیم انـرژی جنبشـی اسـتوانه را بـه ایـن صورت بنویسیم:

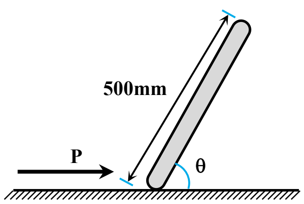
$$T=\frac{۱}{۲}I_G\omega^۲+\frac{۱}{۲}mv_G^۲=\frac{۱}{۲}I_O\omega^۲$$

امّا:

$$I_O=I_G+m\bar{r}^۲=\frac{۱}{۲}mr^۲+mr^۲=\frac{۳}{۲}mr^۲$$

$$+\circlearrowleft\sum M_O=I_O\alpha\Rightarrow Wr=(\frac{۳}{۲}mr^۲)\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{۲g}{۳r}\qquad(۲)\qquad\qquad(۱),(۲)\Rightarrow T=mg-mr\times\frac{۲g}{۳r}=\frac{mg}{۳}$$

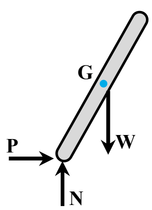
مثال۱۹: به میله همگن به جرم $۴kg$ نیرویی افقی معادل $P=۴۰N$ وارد می‌آید. در صورتی که بخواهیم این میله فقط دارای حرکت انتقـالی باشـد زاویه تمایل آن نسبت به سطح افقی θ چقدر باید باشد؟(سطح افقی بدون اصطکاک فرض می‌شود) $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$



۱) $\theta=۱۳/۲^\circ$　　۲) $\theta=۲۳/۲^\circ$

۳) $\theta=۳۳/۲^\circ$　　۴) $\theta=۴۵^\circ$

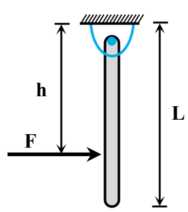
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» می‌بینیم که طبق گفته صورت مسأله، میله فقط حرکت انتقالی دارد، در نتیجه سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای آن مساوی صفر است.



$$\sum M_G=I_G\alpha=۰\Rightarrow P\times۰/۲۵\sin\theta-N\times۰/۲۵\cos\theta=۰$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow tg\theta=\dfrac{N}{P}=\dfrac{N}{۴۰}\\ \text{از طرفی}\sum F_y=۰\Rightarrow N-W=۰\Rightarrow N=W=۴۰N\end{array}\right\}\Rightarrow tg\theta=۱\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۴}$$

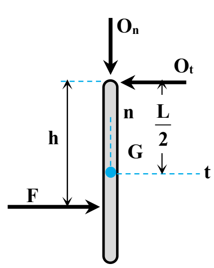
مثال۲۰: میله‌ای به طول L و به جرم m روی سطح افقی قرار دارد. نیروی F در فاصلـه h از مفصل بـه میلـه وارد شـده اسـت. مقـدار h چقـدر باشد تا نیروی وارد بر مفصل برابر صفر شود (در لحظه بعد از ورود نیرو)



۱) $\frac{L}{۳}$　　۲) $\frac{۲L}{۳}$

۳) $\frac{L}{۲}$　　۴) $\frac{L}{۶}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» همان‌طور که در صورت مسأله اشاره شده میله در صفحه افقی قرار داشـته در نتیجـه نیـروی وزن در دیـاگرام آزاد ظـاهر نمی‌شـود. (می‌توانیم برای حل مسأله از مختصات $n-t$ استفاده کنیم.)



$$\sum M_G=I_G\alpha\Rightarrow F(h-\frac{L}{۲})+O_t\times\frac{L}{۲}=\frac{mL^۲}{۱۲}\times\alpha\qquad(۱)$$

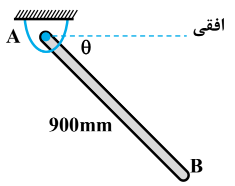
از طرفی طبق فرض صورت مسأله نیروی وارد بر مفصل برابر صفر است در نتیجه $O_t=O_n=۰$ می‌باشد.

$$(۱)\ \Rightarrow F(h-\frac{L}{۲})=\frac{mL^۲}{۱۲}\alpha\ \Rightarrow\alpha=\frac{۱۲F(h-\frac{L}{۲})}{mL^۲}$$

$$\sum F_t=ma_t\Rightarrow F=m\frac{L}{۲}\alpha\ \Rightarrow\ F=\frac{mL}{۲}\times\frac{۱۲F(h-\frac{L}{۲})}{mL^۲}\ \Rightarrow\ ۱=\frac{۶(h-\frac{L}{۲})}{L}=۶h-۳L=L\Rightarrow h=\frac{۲}{۳}L$$

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۲۱: میله نازک و یکنواخت AB دارای جرم ۸kg است و حول پین A در صفحه قائم نوسان می‌کند. اگر هنگامی‌که $\theta = ۳۰^\circ$ است، $\dot{\theta} = ۲\frac{rad}{s}$ باشد، نیرویی که پین A در لحظه مورد نظر تحمل می‌کند، مساوی کدام گزینه است؟



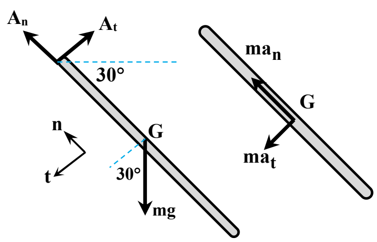
۱) ۱۱۲N

۲) ۷۴N

۳) ۲۸N

۴) ۵۶/۳N

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به شکل مسأله نقطهٔ A نقطه‌ای ثابت بوده پس می‌توانیم معادله گشتاور را حول آن به صورت زیر بنویسیم:



$$\sum M_A = I_A\alpha \Rightarrow mg\frac{L}{۲}\cos ۳۰ = (I_G + md^۲)\alpha = (\frac{mL^۲}{۱۲}+\frac{mL^۲}{۴})\alpha = \frac{۱}{۳}mL^۲\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{mg\frac{L}{۲}\times\cos ۳۰^\circ}{\frac{۱}{۳}mL^۲} = \frac{۳}{۲}\frac{g}{L}\cos ۳۰ = \frac{۳}{۲}\times\frac{۹/۸۱}{۰/۹}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۴/۱۶\frac{rad}{s^۲}$$

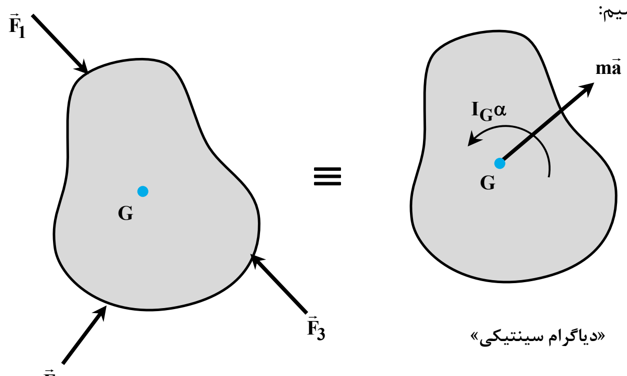
چون حرکت میله دوران حول نقطه‌ی ثابت بوده بنابراین برای حل مسأله از دستگاه قائم ـ مماسی استفاده می‌کنیم:

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow mg\cos ۳۰ - A_t = mr\alpha \Rightarrow ۸\times ۹/۸۱\cos ۳۰ - A_t = ۸\times ۰/۴۵\times ۱۴/۱۶ \Rightarrow A_t = ۱۶/۹۹\ N$$

$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow A_n - mg\sin ۳۰ = mr\omega^۲ = ۸(۰/۴۵)\times ۲^۲ \Rightarrow A_n = ۵۳/۶۴ \Rightarrow F_A = \sqrt{A_t^۲ + A_n^۲} = ۵۶/۳N$$

ج‌ـ حرکت کلی در صفحه: همان‌طور که در مورد حرکت کلی صفحه‌ای سینماتیک ذرات هم اشاره شد، حرکت کلی در صفحه ترکیبی از حرکت انتقالی و حرکت دورانی است، بنابراین برای حل مسائلی که مربوط به این حرکت است، می‌توانیم از روابط (۱) استفاده کنیم. البته در انتخاب معادله گشتاور باید دقت کافی داشت که گشتاور حول نقطه‌ای گرفته شود که حل مسأله را ساده‌تر کند.

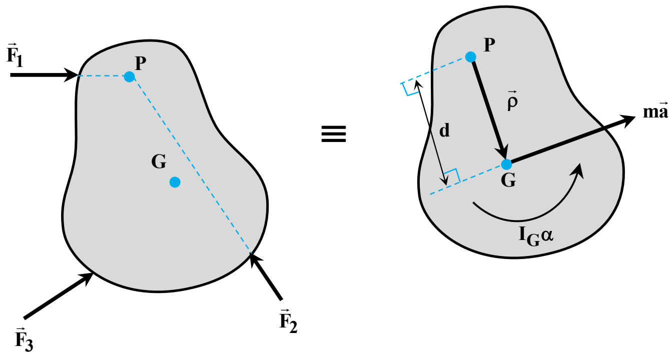
معادلات حرکت را می‌توانیم برای سهولت مانند بخش‌های قبل به صورت زیر بنویسیم:



«دیاگرام آزاد جسم» «دیاگرام سینتیکی»

$$\begin{cases}\sum \vec{F} = m\vec{a}\\ \sum M_G = I_G\alpha\end{cases}$$

روش دیگری که برای حل معادلات حرکت مورد استفاده قرار می‌گیرد، این است که معادله گشتاور حول یک نقطه دلخواه مانند P در نظر گرفته می‌شود، در این صورت یک جمله به معادله $\sum M_G = I_G\alpha$ به صورت زیر اضافه می‌شود:



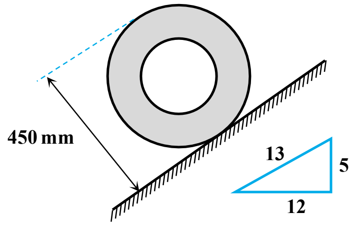
$$\begin{aligned}&\sum \vec{F} = m\vec{a}\\ &\sum M_P = I_G\alpha + mad\end{aligned}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

در نوشتن معادله گشتاور حتماً به ساعتگرد و پادساعتگرد بودن گشتاور نیروهای اینرسی توجه کنید.

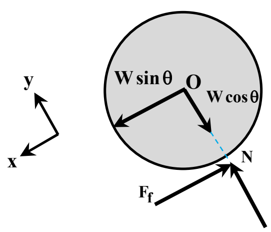
در اینجا باید تأکید نمود که حرکت برخی از اجسام صلب در صفحه توسط تکیه‌گاه‌ها مقید می‌باشد، در چنین حرکت‌هایی ابتدا باید رابطه سینماتیکی بین شتاب خطی و شتاب زاویه‌ای جسم را تعیین نموده، سپس از معادلات حرکت استفاده کنیم. در حرکت‌های نامقید دقت کنید که هیچ‌گونه ارتباطی بین شتاب خطی و شتاب زاویه‌ای وجود ندارد و دو کمیت مستقل از هم محسوب می‌شوند.

به عنوان مثال در حرکت غلتش خالص یک دیسک بر روی سطح افقی نقطه تماس دیسک با سطح، مرکز آنی دوران بوده و رابطه بین شتاب زاویه‌ای و شتاب خطی مرکز چرخ برابر $a = r\alpha$ می‌باشد. این در حالی است که اگر دیسک حرکت غلتشی توام با لغزش داشته باشد چنین رابطه‌ای دیگر برقرار نیست به عبارت دیگر $a \neq r\alpha$.



مثال ۲۲: شعاع چرخش چرخی به جرم $۳۰kg$ حول مرکز جرم آن $۱۵۰mm$ است. اگر اصطکاک برای جلوگیری از لغزش کافی باشد، نیروی اصطکاک F که حین غلتش چرخ به پایین، به آن وارد می‌شود را محاسبه کنید. حداقل ضریب اصطکاک ایستایی برای جلوگیری از لغزش چقدر است؟

☑ **پاسخ:** ابتدا باید محور x را موازی سطح شیبدار در نظر گرفته و از قانون دوم نیوتن برای حل مسأله استفاده کنیم:



$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow W\sin\theta - F_f = mr\alpha$$

$$\Rightarrow F_f = W\sin\theta - mr\alpha \qquad (۱)$$

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow N - W\cos\theta = ۰ \Rightarrow N = W\cos\theta$$

$$\Rightarrow N = ۳۰\times ۹/۸۱\times\frac{۱۲}{۱۳} = ۲۷۲\,N$$

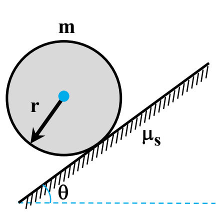
با توجه به اینکه نقطه O مرکز جرم چرخ است، می‌توانیم معادله گشتاور را حول این نقطه بنویسیم:

$$\sum M_O = I_O\alpha \Rightarrow F_f r = k_O^۲ m\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F_f r}{k_O^۲ m}$$

$$\xrightarrow{(۱)} F_f = W\sin\theta - mr\frac{F_f r}{k_O^۲ m} = W\sin\theta - \frac{F_f r^۲}{k_O^۲} \Rightarrow F_f = \frac{W\sin\theta}{(۱+\frac{r^۲}{k_O^۲})} \Rightarrow F_f = \frac{۳۰\times ۹/۸۱\times\frac{۵}{۱۳}}{(۱+\frac{۰/۲۲۵^۲}{۰/۱۵^۲})} = ۳۴/۸\,N$$

حال رابطه بین ضریب اصطکاک و نیروی اصطکاک در آستانه لغزش را به دست می‌آوریم که برابر است با:

$$F_f = \mu_s N \Rightarrow \mu_s = \frac{۳۴/۸\,N}{۲۷۲\,N} = ۰/۱۲۸$$



مثال ۲۳: به ازای μ_s ضریب اصطکاک ایستایی معین، حداکثر زاویه θ که به دیسک دایره‌ای تویر نشان داده شده در شکل امکان می‌دهد تا بدون لغزش به پایین سطح شیبدار بغلتد چقدر است؟

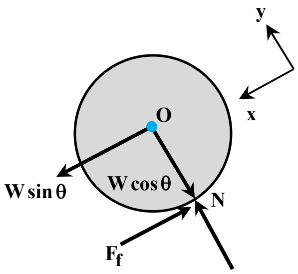
☑ **پاسخ:** چنان‌چه صورت مسأله هم می‌گوید دیسک غلتش بدون لغزش دارد، در نتیجه می‌توانیم نیروی اصطکاک را در حداکثر زاویه θ به صورت $F_f = \mu_s N$ بنویسیم.

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow N = W\cos\theta \qquad (۱)$$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow W\sin\theta - \mu N = mr\alpha \Rightarrow W\sin\theta - \mu W\cos\theta = mr\alpha \qquad (۲)$$

معادله گشتاور را حول نقطه O مرکز جرم به صورت زیر می‌نویسیم. باید توجه کنید که ممان اینرسی دیسک حول مرکزش برابر $\frac{mr^۲}{۲}$ می‌باشد.

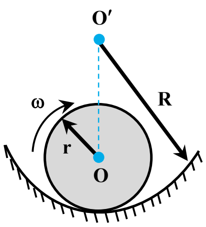
www.modaresanesharif.ac.ir



$$\sum M_O = I_O\alpha \Rightarrow F_f r = \frac{mr^۲}{۲}\alpha \overset{(۱)}{\Rightarrow} \mu W\cos\theta r = \frac{mr^۲}{۲}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{۲\mu g\cos\theta}{r} \quad (۳)$$

$$\left.\begin{matrix}(۲)\\(۳)\end{matrix}\right\} \Rightarrow W\sin\theta - \mu W\cos\theta = mr(\frac{۲\mu g\cos\theta}{r}) = ۲\mu W\cos\theta$$

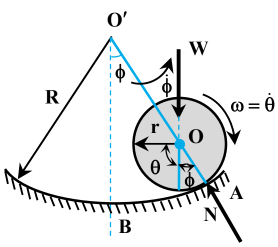
$$\Rightarrow W\sin\theta = ۳\mu W\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = ۳\mu_s \Rightarrow \theta = \tan^{-۱}(۳\mu_s)$$



مثال ۲۴: دیسک دایره‌ای به جرم m و شعاع r، در قسمت پایین مسیر دایره‌ای به شعاع R می‌غلتد. اگر در این لحظه سرعت زاویه‌ای دیسک ω باشد، N نیروی اعمال شده از طرف مسیر بر دیسک چقدر است؟

☑ **پاسخ:** همان‌طور که در شکل هم می‌بینید دیسک بر روی یک مسیر دایروی حرکت می‌کند که شعاع انحنای آن فاصله مرکز جرم دیسک تا نقطه O′ است، از این‌رو می‌توان نوشت:

شعاع انحنا $\rho = R - r$



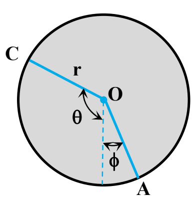
$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow N - W\cos\phi = m(R-r)\dot{\phi}^۲ \quad (۱)$$

از طرفی چون دیسک غلتش بدون لغزش انجام می‌دهد بنابراین سرعت مرکز دیسک را می‌توان برحسب سرعت زاویه‌ای $\dot{\phi}$ یا سرعت زاویه‌ای دیسک $\dot{\theta}$ نوشت.

$$(R-r)\dot{\phi} = r\dot{\theta} = r\omega \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{r\omega}{R-r} \quad (۲)$$

در لحظه $\phi = ۰$ $\xrightarrow{(۱),(۲)} N = W + m(R-r)\frac{r^۲\omega^۲}{(R-r)^۲} \Rightarrow N = mg + \frac{mr^۲\omega^۲}{R-r} = m(g + \frac{r^۲\omega^۲}{R-r})$

به روشی دیگری نیز می‌توان به رابطه‌ی (۲) رسید. همان‌طور که اشاره شد دیسک بر روی مسیر دایروی حرکت غلتش خالص دارد، پس طول کمان‌هایی که بر روی دیسک و مسیر دایروی طی می‌شود یکسان است.

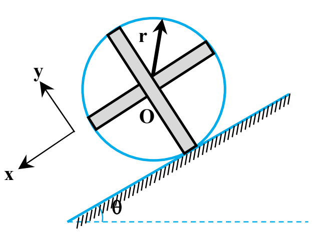


طول کمان $\widehat{AB} = \widehat{AC}$

$$\Rightarrow R\phi = r\theta + r\phi$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{(R-r)}{r}\phi$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{(R-r)}{r}\dot{\phi}$$



مثال ۲۵: حلقه نشان داده شده به شعاع r و جرم ناچیز دارای چهارپره با فاصله مساوی از هم هر یک به جرم m و طول r می‌باشد. اگر حلقه برروی سطح شیبدار رها شود و بدون لغزش به پایین بغلتد a شتاب مرکز حلقه و F نیروی اصطکاک وارد بر حلقه را حساب کنید؟

برای زاویه مفروض θ حداقل مقدار μ_s ضریب اصطکاک ایستایی که مانع لغزش می‌شود را محاسبه کنید.

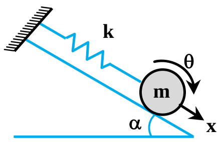
☑ **پاسخ:** با توجه به محورهای مختصات نشان داده شده می‌توانیم معادلات حرکت را به صورت زیر بنویسیم:

$(W = ۴mg)$

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow N - ۴mg\cos\theta = ۰ \Rightarrow N = ۴mg\cos\theta \quad (۱)$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هفتم

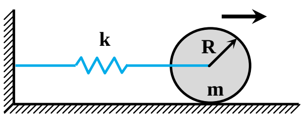
۱ـ فرکانس طبیعی f_n سیستم زیر کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۴)



۱) $\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{۲k/۳m}$ ۲) $\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{۳k/۲m}$

۳) $\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{۳k/۴m}$ ۴) $\frac{۱}{\pi}\sqrt{۲k/۳m}$

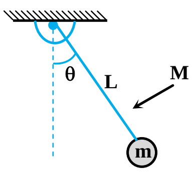
۲ـ در شکل زیر استوانه همگنی می‌تواند بدون لغزیدن روی سطح افقی حرکت نوسانی انجام دهد. فرکانس طبیعی این نوسان کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۵)



۱) $\sqrt{\frac{۲k}{۵m}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۲k}{۳m}}$

۳) $\sqrt{\frac{۳k}{۲m}}$ ۴) $\sqrt{\frac{۵k}{۲m}}$

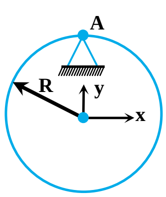
۳ـ فرکانس طبیعی سیستم را بدون صرف‌نظر کردن از جرم میله پیدا کنید. (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۵)



۱) $\omega_n=[\frac{m+M/۲}{۲m+M/۳}.(g/L)]^{۱/۲}$ ۲) $\omega_n=[\frac{m/۲+M}{m/۳+M}.(g/L)]^{۱/۲}$

۳) $\omega_n=[\frac{۲m+M}{m+M}.(g/L)]^{۱/۲}$ ۴) $\omega_n=[\frac{m+M/۲}{m+M/۳}.(g/L)]^{۱/۲}$

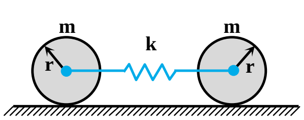
۴ـ حلقه‌ای به جرم M و شعاع R از یک لبه‌ی تیز آویزان است به طوری که حلقه می‌تواند در صفحه خود همچون آونگی ساده نوسان کند. T_1 دوره تناوب نوسانات کوچک آن برابر است با: (مهندسی مکانیک «ساخت و تولید» ـ آزاد ۸۰)



۱) $۶\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ ۲) $۲\pi\sqrt{\frac{R}{۲g}}$

۳) $۴\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ ۴) $۲\pi\sqrt{\frac{۲R}{g}}$

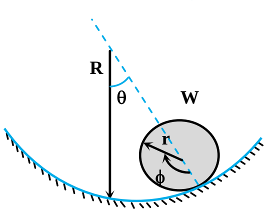
۵ـ دو دیسک همگن و کاملاً مشابه به جرم m و شعاع r روی سطح بدون اصطکاک افقی قرار داده شده است و توسط فنری به سختی k به یکدیگر بسته شده‌اند. اگر دو استوانه در خلاف جهت یکدیگر گردانیده شوند به طوری که فنر تغییر طول یافته و نیروی F در آن ایجاد شود و سپس رها گردد، حداکثر سرعت مرکز جرم استوانه‌ها چقدر خواهد بود؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۸۲)



۱) $\frac{F}{\sqrt{۲mk}}$ ۲) $\frac{F}{\sqrt{۳mk}}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}F}{\sqrt{mk}}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}F}{\sqrt{mk}}$

۶ـ یک استوانه به وزن W و شعاع r در داخل یک سطح استوانه‌ای به شعاع R بدون لغزش می‌غلطد. فرکانس طبیعی حرکت نوسانی استوانه ω_n کدام گزینه است؟ (شتاب جاذبه را g فرض کنید) (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۸۲)



۱) $\omega_n=\sqrt{\frac{۳g}{۲(R-r)}}$ ۲) $\omega_n=\sqrt{\frac{g}{۳(R-r)}}$

۳) $\omega_n=\sqrt{\frac{۲g}{۳(R-r)}}$ ۴) $\omega_n=\sqrt{\frac{۳g}{(R-r)}}$

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هفتم

۱ـ گزینه «۱» با فرض صرف‌نظر کردن از اصطکاک، انرژی مکانیکی جسم ثابت باقی می‌ماند.

انرژی پتانسیل کشسانی : $V_e = \frac{1}{2}kx^2$ ‌‌‌‌‌‌ ‌ انرژی جنبشی : $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

با فرض حرکت غلتش خالص می‌توان رابطه بین سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای را به صورت روبرو نوشت: $(\omega = \frac{v}{R})$

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2 \qquad T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

انرژی مکانیکی سیستم ثابت بوده پس مشتق آن نسبت به زمان مساوی صفر است.

$$\frac{d}{dt}(T+V) = 0 = \frac{3}{2}m\ddot{x}\dot{x} + kx\dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}\left(\frac{3}{2}m\ddot{x} + kx\right) = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{\frac{3}{2}m}} = \sqrt{\frac{2k}{3m}} \Rightarrow f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

در این تست اثر نیروی وزن توسط فنر خنثی شده و در فرکانس طبیعی ظاهر نمی‌شود.

۲ـ گزینه «۲» در حرکت بدون لغزش: $v = R\omega$ یا $\omega = \frac{\dot{x}}{R}$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 \Rightarrow T = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 \quad , \quad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

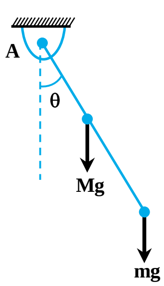
سیستم پایستار بوده بنابراین، انرژی مکانیکی آن ثابت و تغییرات آن نسبت به زمان مساوی صفر است.

$$\frac{d}{dt}(T+V_e) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{\frac{3}{2}m}} = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

با مقایسه این تست و تست قبلی می‌توان نتیجه گرفت که زاویه سطح شیب‌دار در فرکانس طبیعی سیستم تاثیری ندارد.

۳ـ گزینه «۴» فرکانس طبیعی سیستم برای زوایای کوچک تعیین می‌شود که در این حالت:



$$\sin\theta \simeq \theta$$

$$\sum M_A = I_A\alpha \Rightarrow -Mg\frac{L}{2}\sin\theta - mgL\sin\theta = I_A\alpha$$

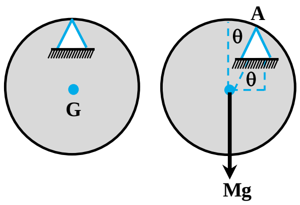
$$I_A = mL^2 + \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = mL^2 + \frac{1}{3}ML^2 \Rightarrow \left(mL^2 + \frac{M}{3}L^2\right)\ddot{\theta} + \left(Mg\frac{L}{2} + mgL\right)\theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\left(\frac{M}{2}+m\right)gL}{\left(mL^2 + \frac{ML^2}{3}\right)}} = \sqrt{\frac{\frac{M}{2}+m}{m+\frac{M}{3}}\left(\frac{g}{L}\right)}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

۴ـ گزینه «۴»

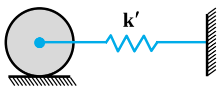
$$\sum M_A = I_A\,\alpha \Rightarrow -MgR\sin\theta = (MR^۲ + MR^۲)\alpha$$



برای نوسانات کوچک $\sin\theta \simeq \theta$ در نظر گرفته می‌شود. $\Rightarrow \alpha + \frac{g}{۲R}\theta = ۰ \quad (\alpha = \ddot{\theta}) \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{g}{۲R}}$

$$\begin{cases} \omega_n = \dfrac{۲\pi}{T} \\ \omega_n^۲ = \dfrac{g}{۲R} \end{cases} \Rightarrow T = ۲\pi\sqrt{\frac{۲R}{g}}$$

۵ـ گزینه «۱» به دلیل تقارن تنها نیمی از فنر بین دو دیسک در نظر گرفته می‌شود. مطابق مثال (۵) می‌توان نوشت:



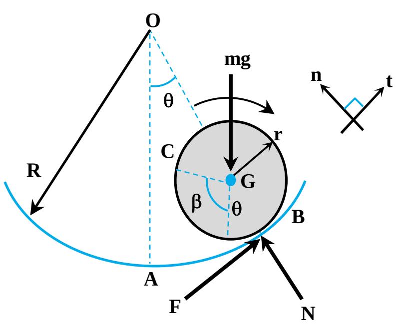
$$\frac{۱}{k} = \frac{۱}{k'} + \frac{۱}{k'} = \frac{۲}{k'} \Rightarrow k' = ۲k$$

به دلیل آنکه سطح افقی بدون اصطکاک است دیسک بر روی سطح تنها دارای حرکت لغزشی است. با استفاده از رابطه انرژی می‌توان نوشت:

$$T_۱ + V_۱ = T_۲ + V_۲ \Rightarrow ۰ + \frac{۱}{۲}k'\delta^۲ = \frac{۱}{۲}mv_{max}^۲ + ۰$$

$$\frac{۱}{۲}k' \times \left(\frac{F}{k'}\right)^۲ = \frac{۱}{۲}mv_{max}^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times \frac{F^۲}{۲k} = \frac{۱}{۲}mv_{max}^۲ \Rightarrow v_{max}^۲ = \frac{F^۲}{۲mk} \Rightarrow v_{max} = \frac{F}{\sqrt{۲mk}}$$

۶ـ گزینه «۳» چون حرکت استوانه غلتش بدون لغزش است، در نتیجه:



$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow R\theta = r(\theta + \beta) \Rightarrow \beta = \left(\frac{R}{r} - ۱\right)\theta$$

$$\sum M_G = I_G\ddot{\beta} \Rightarrow Fr = \frac{۱}{۲}mr^۲(-\ddot{\beta}) \qquad (۱)$$

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow -mg\sin\theta + F = mr\ddot{\beta} \qquad (۲)$$

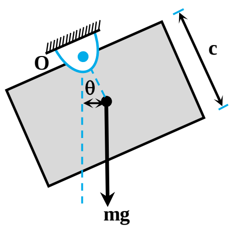
با حذف F از روابط (۱)و(۲) و جایگذاری $\ddot{\beta} = \left(\frac{R}{r} - ۱\right)\ddot{\theta}$ و با فرض کوچک بودن θ $(\sin\theta = \theta)$ داریم:

$$\ddot{\theta} + \frac{۲g}{۳(R - r)}\theta = ۰ \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{۲g}{۳(R - r)}}$$

۷ـ گزینه «۳»

$$\left.\begin{array}{l} F = k\delta_{st} = mg \Rightarrow \dfrac{\delta_{st}}{g} = \dfrac{m}{k} \\ \text{از طرفی} \quad f = \dfrac{۱}{۲\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{array}\right\} \Rightarrow f = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$$

۸ـ گزینه «۱»



$$\sum M_O = I_O\alpha \Rightarrow -mg\frac{c}{۲}\sin\theta = I_O\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow I_O = \frac{۱}{۱۲}m(b^۲ + c^۲) + m\left(\frac{c}{۲}\right)^۲ \Rightarrow b = c \Rightarrow I_O = \frac{۵}{۱۲}mb^۲$$

برای نوسانات کوچک می‌توان نوشت

$$: \sin\theta \approx \theta \Rightarrow \frac{۵mb^۲}{۱۲}\ddot{\theta} + mg\frac{b}{۲}\theta = ۰ \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mg\frac{b}{۲}}{\frac{۵}{۱۲}mb^۲}\theta = ۰ \Rightarrow \omega_n^۲ = \frac{۶g}{۵b} \Rightarrow T = ۲\pi\sqrt{\frac{۵b}{۶g}}$$

www.modaresanesharif.ac.ir