ترمودینامیک

مقــدمه ترمودینامیک

ترمودینامیک یکی از دروس مجموعه حرارت و سیالات و شامل واحدهای درسی ترمودینامیک ۱ و ۲ است. این درس به‌طور معمول ۷ سؤال (۳۵ درصد) از ۲۰سؤال مجموعه حرارت و سیالات را تشکیل می‌دهد. تسلط بر این درس که پیش‌نیاز بخش‌هایی از انتقال حرارت هم می‌باشد، برای موفقیت در مجموعه حرارت و سیالات از اهمیت بالایی برخوردار است. داوطلبان با بخش‌هایی از ترمودینامیک در زمان دبیرستان هم آشنا شده‌اند.

مباحث این درس در هفت فصل گنجانده شده است. تلاش ما بر این بوده است که مباحث موردنیاز برای مهندسی مکانیک را در این بخش قرار دهیم و از آوردن مطالب اضافی و مربوط به رشته مهندسی شیمی و ابزار دقیق خودداری کنیم. در متن این درسنامه بر این اصل تأکید شده است که مطالب به‌صورت مفهومی و با حفظیات کمتر در اختیار داوطلبان قرار بگیرد. در واقع، کلید حل سؤالات کنکور، درک مناسب از ترمودینامیک و فراگرفتن مفهوم آن است.

در فصل اول، با مفاهیم اولیه و به نوعی یادآوری مباحث گذشته آشنا می‌شویم و سپس با قانون اول ترمودینامیک سروکار خواهیم داشت. این فصل و فصل دوم مهم‌ترین فصل‌های ترمودینامیک هستند. این فصل حدود ۲۰ درصد سؤالات ترمودینامیک را شامل می‌شود و هر سال از آن سؤال مطرح می‌شود.

در فصل دوم، قانون دوم ترمودینامیک و بازدهی ماشین گرمایی و همچنین مبحث مهم آنتروپی را بررسی می‌کنیم. این فصل پرسؤال‌ترین فصل ترمودینامیک است و می‌توان گفت، در مجموع فصل‌های اول و دوم، سازنده بقیه ترمودینامیک هستند. به نوعی قوانین و روابط دیگر، نتایجی از این دو فصل‌اند.

در فصل سوم، با نمودارهای مختلف $P-V$ ، $P-T$ و $V-T$ در فازهای مختلف یک ماده (عموماً آب) آشنا می‌شویم. این فصل هم فصلی بسیار مهم و پرسؤال در کنکور کارشناسی ارشد مکانیک می‌باشد. فصل چهارم با روابط ترمودینامیکی سروکار دارد. در این فصل، سعی کرده‌ایم روش‌های رد گزینه برای حل سؤالات را معرفی کنیم و با حفظ کردن تنها ۲ یا ۳ رابطه، به سؤالات فصل پاسخ دهیم.

فصل‌ها	تعداد سؤالات
فصل اول: مفاهیم اولیه و قانون اول ترمودینامیک	۲۰
فصل دوم: قانون دوم ترمودینامیک	۲۵
فصل سوم: خواص حجمی سیالات	۱۵
فصل چهارم: روابط ترمودینامیکی	۱۱
فصل پنجم: احتراق هیدروکربن‌ها	۹
فصل ششم: ترمودینامیک فرایندهای جریان‌دار	۸
فصل هفتم: سیکل‌های توان و تبرید	۴

در فصل پنجم احتراق هیدروکربن‌ها را با استفاده از معادلات شیمیایی بررسی می‌کنیم. در این فصل با نحوه موازنه معادله و دمای شعله آشنا می‌شویم. این فصل کوتاه از کتاب دارای ۹ سؤال از سال ۸۷ تاکنون بوده است.

در فصل ششم، با بازدهی کمپرسورها، توربین‌ها و پمپ‌ها و همچنین موج ضربه‌ای که پیش‌زمینه‌ای برای درس سیالات است، آشنا می‌شویم. این فصل نتیجه قوانین اول و دوم ترمودینامیک (فصل‌های ۱ و ۲) است. از این فصل به‌طور مستقیم گاهی در کنکور سراسری سؤال آمده است.

در آخر، با سیکل‌های مختلف توان و تبرید آشنا می‌شویم. سیکل هم جزو سؤالاتی است که گاهی توجه طراحان به آن جلب می‌شود. برای حل سؤالات این فصل، شکل و نمودار چند سیکل را به خاطر خواهیم سپرد.

برای آن دسته از داوطلبان که قصد مطالعه بخشی از درس ترمودینامیک را دارند، مطالعه فصل‌های ۱ (قانون اول)، ۲ (قانون دوم)، ۳ و ۴ توصیه می‌شود، به‌خصوص فصل چهارم که با استفاده از روش‌های رد گزینه می‌توان به سرعت به سؤالات آن پاسخ داد. فصل پنجم یعنی احتراق هیدروکربن‌ها در سال‌های اخیر بیشتر مورد توجه طراحان قرار گرفته است و با توجه به حجم نه چندان زیاد مطالب، مناسب داوطلبانی است که فرصت کمی برای مطالعه دارند.

فصل اول

«مفاهیم اولیه و قانون اول ترمودینامیک»

این فصل یکی از مهم‌ترین فصل‌های درس ترمودینامیک است. مطالعه آن به داوطلبانی که قصد مطالعه بخشی از ترمودینامیک را دارند، توصیه می‌شود. در این فصل ابتدا مفاهیم اولیه ترمودینامیک را یادآوری می‌کنیم. سپس اصل قانون اول را می‌آموزیم و با خصوصیات فرایندهای مختلف آشنا می‌شویم و در نهایت کاربرد قانون اول برای حل مسائل با حجم کنترل را خواهیم آموخت.

ابتدا برخی از مفاهیم را یادآوری می‌کنیم.

۱ـ مفاهیم اولیه

سیستم بسته: سیستمی که جرمی به آن وارد و یا از آن خارج نمی‌شود، مانند یک بطری دربسته.

سیستم باز: سیستمی که با محیط اطراف تبادل جرم دارد، مانند یک اتاق با پنجره باز.

سیستم ایزوله (منزوی): سیستمی که علاوه بر عدم تبادل جرم با محیط، تبادل انرژی هم ندارد، مانند فلاسک ایده‌آل.

سیستم‌های باز و بسته می‌توانند تبادل انرژی داشته باشند.

هنگامی‌که حالت یا وضعیت یک سیستم دچار تغییر شود و به حالتی دیگر برود، می‌گوییم سیستم یک فرایند را انجام داده است.

فرایند برگشت‌پذیر: به فرایندی گفته می‌شود که سیستم قابلیت برگشت به حالت اولیه را داشته باشد. در حقیقت فرایند برگشت‌پذیر فرایندی کاملاً ایده‌آل است.

فرایند برگشت‌ناپذیر: فرایندی که سیستم قابلیت برگشت به حالت اولیه را ندارد، مانند سوختی که با اکسیژن واکنش نشان می‌دهد و دیگر قابلیت تبدیل شدن به سوخت را ندارد.

در بخش فرایندهای همین فصل، با انواع فرایندهای برگشت‌پذیر آشنا می‌شویم.

تابع حالت: تابعی که به مسیر بستگی ندارد و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی وابسته است، مثل انرژی درونی آنتالپی و ... . به توابع غیرحالت تابع مسیر گفته می‌شود، مانند گرما و کار.

توابع حالت دارای دیفرانسیل کامل هستند و تغییر آن‌ها در یک چرخه برابر صفر است.

$$\int_{۱}^{۲} dX = X_{۲} - X_{۱}$$

انرژی: توانایی انجام کار است و مجموع انرژی‌های جنبشی، پتانسیل و انرژی درونی سیستم است.

کار: کار را در ترمودینامیک از رابطه $W = \int_{V_۱}^{V_۲} PdV$ به‌دست می‌آوریم که فرم تبدیل یافته $\int_{۱}^{۲} FdL$ است.

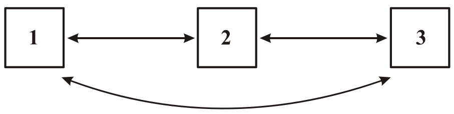
$$W = \int_{۱}^{۲} FdL = \int_{۱}^{۲} (PA)dL = \int_{۱}^{۲} P(AdL) = \int_{۱}^{۲} PdV$$

نکته ۱: کار در سیستم می‌تواند به‌صورت‌های دیگر مثل چرخاندن یک توربین یا جابه‌جایی یک وزنه خود را نشان دهد و می‌توانید از $\int_{۱}^{۲} FdL$ هم کار را به‌دست بیاورید.

نکته ۲: مساحت زیر نمودار $P - V$ برابر با کار انجام شده است.

حجم مخصوص (V): حاصل تقسیم حجم یک سیال نسبت به جرم آن را حجم مخصوص می‌گویند. واحد آن $\frac{m^۳}{kg}$ است. در بسیاری از روابط ترمودینامیکی V و v قابلیت جایگزینی به‌جای یکدیگر را دارند.

۲ـ قانون صفرم ترمودینامیک



چنانچه جسم اول با جسم دوم در تعادل گرمایی باشد (گرمایی بین دو جسم به‌صورت خالص رد و بدل نشود) و جسم دوم هم با جسم سومی در تعادل گرمایی باشد، آنگاه جسم‌های ۱ و ۳ با هم در تعادل گرمایی‌اند.

۳ـ قانون اول ترمودینامیک

قانون اول ترمودینامیک به نوعی پایستگی انرژی را نشان می‌دهد و بیان می‌کند که اگر Q گرمای داده شده به سیستم و W کار انجام شده توسط سیستم باشد، آنگاه:

$$\Delta U = Q - W$$

ΔU به منزله تغییرات انرژی درونی سیستم است و رابطه بالا با این فرض نوشته شده است که تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل صفر باشد (حالتی که معمولاً در ترمودینامیک برقرار است). اگر گرما به سیستم وارد شود Q مثبت و اگر گرما از سیستم خارج شود Q منفی است.

همچنین چنانچه روی سیستم کار انجام شود، مقدار W منفی خواهد بود و عملاً عبارت $-W$ در قانون اول مثبت می‌شود و انرژی درونی سیستم افزایش می‌یابد، چرا که با انجام کار روی سیستم، به آن انرژی وارد می‌کنیم.

۴ـ آنتالپی

به مجموع انرژی درونی سیستم و انرژی پتانسیل آن به واسطه داشتن حجم V و فشار P آنتالپی گفته می‌شود که به‌صورت $H = U + PV$ نوشته می‌شود.

آنتالپی یک تابع حالت است و فقط به نقطه ابتدا و انتها بستگی دارد و می‌توان نوشت:

$$\Delta H = H_۲ - H_۱ = (U_۲ + P_۲V_۲) - (U_۱ + P_۱V_۱) = \Delta U + P_۲V_۲ - P_۱V_۱$$

۵ـ گرمای ویژه

گرمای ویژه در حجم ثابت (C_V): گرمای ویژه در حجم ثابت یعنی میزان گرمایی که به یک واحد جرم از یک ماده باید داده شود تا دمای آن در حجم ثابت یک درجه افزایش یابد؛ یعنی $C_V = (\frac{dQ}{dT})_V$. اما می‌توان نوشت $Q = U + W$ و از آنجایی که $W = \int PdV$ و حجم ثابت است، پس در حجم ثابت عبارت $Q = U$ برقرار است. پس در نهایت داریم:

$$C_V = (\frac{dU}{dT})_V$$

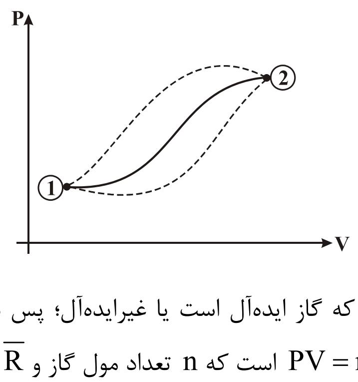
گرمای ویژه در فشار ثابت (C_P): یعنی میزان گرمایی که به جرم واحد از یک ماده در فشار ثابت باید داده شود تا دمای آن یک درجه افزایش یابد یعنی $C_P = (\frac{dQ}{dT})_P$. چون فشار ثابت است، پس $dp = ۰$ و داریم:

$$dU = dQ - dW$$

$$H = U + PV \Rightarrow dH = dU + d(PV) = dU + PdV + \cancel{VdP}^{\,۰} \Rightarrow dQ = dU + dW = dU + PdV$$

$$\Rightarrow dH = dU + PdV = dQ \ \text{فشار ثابت} \ \Rightarrow C_P = (\frac{dH}{dT})_P$$

نکته ۳: دو رابطه $\Delta U = Q - W$ و $H = U + PV$ را به خاطر داشته باشید. مقادیر U و H توابع حالت هستند، یعنی فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی و نه مسیر بستگی دارند. اگرچه گرما و کار به مسیر بستگی دارند.



۶ـ قانون گازهای کامل

گاز ایده‌آل (کامل) گازی است که از نیروهای بین مولکولی آن صرف‌نظر می‌شود. در سؤالات ذکر می‌شود که گاز ایده‌آل است یا غیرایده‌آل؛ پس نگران دانستن این موضوع در حل سؤالات نباشید. رابطه بین حجم (V)، فشار (P) و دما (T) یک گاز کامل $PV = n\overline{R}T$ است که n تعداد مول گاز و $\overline{R}$ ثابت جهانی گازها است و مقدار آن برابر $\overline{R} = ۸/۳۱۴ \frac{J}{mol.K}$ می‌باشد.

می‌دانیم $n = \frac{m}{M}$ می‌باشد که M جرم مولی است. می‌توان نوشت $R = \frac{\overline{R}}{M}$ که R برای هر گاز با توجه به جرم مولی آن متفاوت خواهد بود و داریم:

$$PV = n\overline{R}T = m(\frac{\overline{R}}{M})T = mRt \Rightarrow PV = mRT \ \text{یا} \ P = \rho RT$$

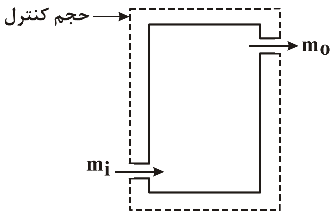
برای گازهای تک اتمی $C_V = \frac{3}{2}\overline{R}$ و $C_p = \frac{5}{2}\overline{R}$ و برای گازهای دو اتمی $C_V = \frac{5}{2}\overline{R}$ و $C_p = \frac{7}{2}\overline{R}$ می‌باشد. دقت کنید که همواره داریم: $C_p - C_V = R$

همچنین نسبت C_p و C_V را با k نشان می‌دهند که $k = \frac{C_p}{C_V}$ می‌باشد. گاهی پاسخ سؤالات برحسب k می‌باشد. با داشتن k و رابطه $C_p - C_V = R$ می‌توانیم ظرفیت گرمایی ویژه گاز در حجم و فشار ثابت (C_p, C_V) را بیابیم:

$$C_p - C_V = R \quad , \quad \frac{C_p}{C_V} = k \Rightarrow (k-1)C_V = R \Rightarrow C_V = \frac{R}{k-1} \quad , \quad C_p = \frac{k}{k-1}R$$

برخی از سؤالات کنکور ارشد به این صورت هستند که به یک سیستم باز، جرم با خصوصیات خاص وارد و مقداری جرم از آن خارج می‌شود و در رابطه با دما یا فشار یا هر خصوصیت دیگری از سیستم نهایی، سؤال پرسیده می‌شود.

۷ـ قانون اول ترمودینامیک برای سیستم باز



این قانون در حقیقت همان قانون اول است. فرض کنید جرم m_i به سیستم وارد و m_o از آن خارج می‌شود. آنچه در سیستم وارد می‌شود به انرژی سیستم اضافه می‌کند و جرم خروجی از انرژی سیستم کم می‌کند:

$$\Delta E_{\text{سیستم}} = Q - W + m_i\left(h_i + gz_i + \frac{V_i^2}{2}\right) - m_o\left(h_o + gz_o + \frac{V_o^2}{2}\right)$$

با تقسیم عبارت بالا بر واحد زمان، داریم:

$$(\dot{\Delta E}) = \dot{Q} - \dot{W} + \dot{m}_i\left(h_i + gz_i + \frac{V_i^2}{2}\right) - \dot{m}_o\left(h_o + gz_o + \frac{V_o^2}{2}\right)$$

برای سیستمی که به حالت پایا رسیده باشد و حالت پایا، جریان پایا (SSSF) باشد، $\dot{\Delta E} = 0$ است، یعنی تغییرات انرژی نداریم. ΔE سیستم را می‌توانیم با استفاده از $E = u + mgz + \frac{1}{2}mV^2$ بازنویسی کنیم؛ لذا داریم:

$$m_2\left(u_2 + gz_2 + \frac{1}{2}V_2^2\right) - m_1\left(u_1 + gz_1 + \frac{1}{2}V_1^2\right) = Q - W + m_i\left(h_i + gz_i + \frac{V_i^2}{2}\right) - m_o\left(h_o + gz_o + \frac{V_o^2}{2}\right)$$

که m_2 جرم سیستم داخل حجم کنترل در لحظه نهایی و m_1 در لحظه آغازین است.

۸ـ فرایندهای برگشت‌پذیر گاز ایده‌آل

اکنون برخی از فرایندهای برگشت‌پذیر را برای گاز کامل بررسی می‌کنیم و کار و گرمای هر کدام را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید که نیازی نیست مقادیر Q و W را برای هر فرایند حفظ کنید. فقط خصوصیت هر فرایند را در خاطر داشته باشید. مثلاً وقتی از فرایند هم‌حجم صحبت می‌کنیم باید بدانید که تغییرات حجم نداریم و $dV = 0$ است یا به طور مثال اگر از فرایند بی‌دررو صحبت می‌کنیم، Q آن صفر می‌شود؛ چون سیستم در طی فرآیند ارتباط گرمایی با بیرون از خود ندارد. بقیه روابط را از سه رابطه اصلی قانون اول ترمودینامیک $(\Delta U = Q - W)$، قانون گازها $(PV = n\overline{R}T)$ و کار $(W = \int PdV)$ به‌دست می‌آوریم.

۹ـ فرایند دما ثابت

انرژی درونی گاز ایده‌آل فقط تابع دما است، پس در فرایند دما ثابت انرژی درونی تغییر نمی‌کند. از ۳ رابطه اصلی گفته‌شده برای محاسبه کار و گرمای فرایند هم‌دما استفاده می‌کنیم. طبق قانون اول ترمودینامیک $\Delta U = Q - W$ می‌باشد که چون $\Delta U = 0$ است، پس $Q = W$ است.

از قانون گازها داریم $PV = n\overline{R}T$ و T هم ثابت است. پس:

$$P = \frac{1}{V}n\overline{R}T$$

حال با استفاده از رابطه کار، مقدار آن را به‌دست می‌آوریم:

$$W = \int PdV = \int_1^2 \frac{1}{V}n\overline{R}T\,dV = n\overline{R}T\int_1^2 \frac{dV}{V} = n\overline{R}T\ln\frac{V_2}{V_1}$$

مقدار Q با W طبق قانون اول برابر است. رابطه به‌دست آمده را می‌توان به فرم‌های مختلف نوشت.

$$PV = n\overline{R}T = \text{const.} \Rightarrow P_1V_1 = P_2V_2 \rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}$$

منظور از .const این است که مقدار موردنظر، ثابت است.

$$Q = W = n\overline{R}T\ln\frac{V_2}{V_1} = n\overline{R}T\ln\frac{P_1}{P_2} = P_1V_1\ln\frac{V_2}{V_1} = P_2V_2\ln\frac{V_2}{V_1}$$

به‌جای مقدار $n\overline{R}T$ می‌توان P_1V_1 یا P_2V_2 قرار داد.

نکته ۴: در فرایندی که به‌صورت آهسته انجام می‌شود، سیستم فرصت تبادل گرما دارد و دمای سیستم ثابت می‌ماند. پس هرجا در سؤال ذکر شد سیستم به‌صورت آهسته عمل می‌کند، آن فرایند را هم‌دما فرض می‌کنیم.

حل تشریحی مسائل

تسلط بر شکل کلی نمودارهای تغییر فاز و تعریفات مربوط به آن مانند کیفیت (x)، نقطه بحرانی و محل بخار و مایع اشباع روی نمودار برای حل مسائل تغییر فاز کافی می‌باشد. علاوه بر آن، رابطه کلاپیرون و نحوه به‌دست آوردن معادله کلازیوس ـ کلاپیرون (یا خود معادله) را در خاطر داشته باشید و مطابق با الگوی حل ۱ که در درسنامه ذکر شد، در مسائل از آن استفاده کنید. نهایتاً دانستن تعاریف مربوط به هوای مرطوب در حد درک مفهومی کافی می‌باشد.

مثال ۱: آب اشباع با کیفیت ۴۰% در درون یک سیستم سیلندر ـ پیستون تحت فشار حاصل از نیروی وزن پیستون و فشار اتمسفر قرار دارد. با انتقال حرارت به سیستم، بخار اشباع حاصل می‌شود. افزایش حجم سیستم نسبت به حجم اولیه با تقریب مناسب چند درصد است؟ از حجم مخصوص مایع اشباع در مقایسه با حجم مخصوص بخار اشباع صرف‌نظر کنید. (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۷)

۱) ۱۵% ۲) ۳۰% ۳) ۵۰% ۴) ۸۵%

پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. در این سؤال در رابطه با کیفیت پرسیده شده است، لذا تعریف آن را می‌نویسیم. در صورت سؤال ذکر شده است تا از حجم مخصوص مایع اشباع (v_f) صرف‌نظر کنیم. لذا v_f را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$x=\frac{v-v_f}{v_g-v_f} \qquad , \qquad x_1=\frac{v_1}{v_g}=0/4 \Rightarrow v_1=0/4\,v_g$$

با انتقال حرارت بخار اشباع حاصل می‌شود، یعنی v با v_g برابر می‌شود. $(x=1)$

$$v_2=v_g \quad , \quad \frac{\Delta v}{v_1}=\frac{v_2-v_1}{v_1}=\frac{v_g-0/4\,v_g}{0/4\,v_g}=\frac{0/6}{0/4}=1/5=\%150$$

جواب در هیچ‌کدام از گزینه‌ها نیست.

الگوی حل (۲)

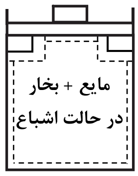
گاهی در سؤالات معادله حالت غیرایده‌آل به شما داده می‌شود، یعنی معادله فرم $PV=n\bar{R}T$ یا $Pv=RT$ را ندارد. سپس در رابطه با آن سؤالی پرسیده می‌شود. این معادلات اصولاً دارای ثوابتی می‌باشند. برای حل این سؤالات ابتدا دیمانسیون (بُعد) این ثوابت را به‌دست آورید. برای به‌دست آوردن بعد ثوابت، بررسی کنید که دیمانسیون سمت چپ یا راست معادله چیست و بُعد ثوابت را بیابید. چنانچه گزینه‌ها به‌صورت پارامتری باشند، شاید بتوانید با روش تحلیل ابعادی و بدون استفاده از دست گزینه‌های نادرست را حذف کنید و پاسخ را بیابید. چنانچه جواب‌ها عددی باشند یا با روش تحلیل ابعادی نتوانستید تمام گزینه‌های نادرست را حل کنید، از خود معادله استفاده کنید و با جایگذاری پاسخ را بیابید.

مثال ۲: اگر فشار بخار P_{sat} برای یک مایع با معادله $\ln P_{sat}=A-\frac{B}{T}$ داده شده باشد که در آن A و B مقادیر ثابت و T دمای مطلق هستند، برای این ماده کدام‌یک از روابط زیر صادق است؟ $(v_{fg}=v_g-v_f\,,s_{fg}=s_g-s_f)$ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۷)

۱) $s_{fg}=\frac{v_{fg}T^2}{B.P_{sat}}$ ۲) $s_{fg}=v_{fg}\frac{B.P_{sat}}{T^2}$ ۳) $s_{fg}=\frac{T^2}{B.v_{fg}.P_{sat}}$ ۴) $s_{fg}=\frac{B.P_{sat}}{v_{fg}T^2}$

پاسخ: گزینه «۲» مطابق با الگوی حل ۲، ابتدا بُعد ثوابت A و B را به‌دست می‌آوریم. سمت چپ معادله $\ln$ دارد و لذا بی‌بُعد است. با توجه به عبارت $A-\frac{B}{T}$ در سمت راست که باید بی‌بُعد باشد، به‌دست می‌آید که A بدون بُعد و B دارای بعد دما (K) می‌باشد. حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. فرض کنید که یک m در دو طرف تساوی‌ها ضرب کرده‌ایم تا گزینه‌ها را از حالت مخصوص خارج کنیم؛ بنابراین سمت چپ تمامی گزینه‌ها S_{fg} است. می‌دانیم آنتروپی دیمانسیون $\frac{J}{K}$ دارد، پس سمت راست معادله هم باید $\frac{J}{K}$ باشد. می‌دانیم ضرب فشار و حجم (PV) بعد انرژی و J دارد، پس در سمت راست کافی است عبارت با بُعد $\frac{PV}{T}$ داشته باشیم. تنها گزینه (۲) است که این بُعد را دارد. دقت کنید که بُعد B و T با هم یکسان است و $\left[\frac{B}{T^2}\right]=\left[\frac{1}{T}\right]$. اگر به بقیه گزینه‌ها غیر از گزینه (۲) دقت کنید، می‌بینید که بُعد انرژی (J) را ایجاد نمی‌کنند. این سؤال را با نوشتن رابطه کلاپیرون به‌صورت تشریحی هم می‌توانید حل کنید.

مثال ۳: یک سیلندر پیستون (مطابق شکل) دارای مخلوطی از مایع و بخار اشباع آب در فشار P_1 می‌باشد. وزن پیستون و جسم روی آن جمعاً W و مساحت پیستون A و نسبت $\frac{W}{A}$ برابر با P_2 و بزرگ‌تر از P_1 است. به سیستم حرارت می‌دهیم، کدام ترتیب برای فرآیندها امکان‌پذیر است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۸)



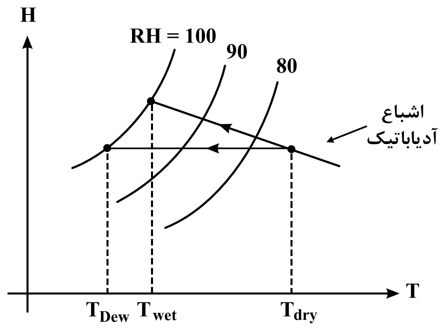
۱) دما ثابت ـ فشار ثابت ـ حجم ثابت
۲) فشار ثابت ـ دما ثابت ـ حجم ثابت
۳) دما ثابت ـ حجم ثابت ـ فشار ثابت
۴) حجم ثابت ـ دما ثابت ـ فشار ثابت

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» فشار اولیه سیلندر P_1 کمتر از فشار بیرونی است، پس با حرارت دادن به آن سیستم نمی‌تواند پیستون را بلند کند؛ زیرا هنوز فشار آن به P_2 نرسیده است. پس در ابتدا فرایندی هم‌حجم را شاهد خواهیم بود. می‌توانیم گزینه (۴) را انتخاب کنیم؛ زیرا تنها گزینه‌ای که فرایند آغازین آن هم‌حجم می‌باشد این گزینه است. پس گزینه (۴) صحیح است. برای یادگیری بیشتر، دقت کنید که در مرحله آخر چه اتفاقی می‌افتد. سیستم در حال افزایش حجم است درحالی‌که فشار آن با فشار P_2 برابر است و شاهد فرایندی فشار ثابت خواهیم بود.

مثال ۴: برای مخلوط هوا و بخار آب کدام‌یک از تعاریف زیر صحیح‌تر است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۸)

۱) دمای حباب مرطوب همان دمای حباب خشک است اگر رطوبت مطلق (نسبت رطوبت) بالا باشد.
۲) دمای حباب مرطوب تقریبی است از دمای اشباع آدیاباتیک
۳) دمای حباب مرطوب تقریبی است از دمای حباب خشک، اگر مخلوط کاملاً خشک باشد.
۴) دمای حباب مرطوب همان دمای نقطه شبنم است اگر درجه حرارت بالای دمای نقطه انجماد آب باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» نمودار رطوبت ـ دما را در نظر بگیرید. گفتیم دمای هوای مرطوب، خشک، شبنم و اشباع آدیاباتیک وقتی با هم برابر می‌شوند که رطوبت نسبی ۱۰۰% باشد. پس گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست هستند. دمای هوای مرطوب روی $RH = \%100$ تعریف می‌شود (مطابق شکل) و ربطی به خشک بودن هوا ندارد. پس گزینه (۳) هم نادرست است و تنها گزینه (۲) است که می‌تواند صحیح باشد (مطابق شکل).



مثال ۵: مخزن صلبی حاوی مخلوطی از دو گاز ایده‌آل است که میل شیمیایی با یکدیگر ندارند. این مخلوط سرد می‌شود، طی این فرایند فشار جزئی هریک از گازها .... و نسبت فشارهای جزئی آن‌ها............. (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۰)

۱) کاهش ـ نیز کاهش می‌یابد ۲) کاهش ـ ثابت می‌ماند ۳) کاهش ـ افزایش می‌یابد ۴) ثابت ـ نیز ثابت می‌ماند

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به رابطه $PV = nRT$ به‌دلیل ثابت بودن V (زیرا حجم ظرف ثابت است)، با کم شدن دما (T) مقدار فشار کاهش می‌یابد. می‌دانیم بنابر قانون دالتون، نسبت فشار دو گاز در یک ظرف به نسبت مول آن‌ها بستگی دارد ($\frac{P_A}{P_B} = \frac{n_A}{n_B}$). کم شدن دما تغییری در مول گازها ایجاد نمی‌کند، پس نسبت فشارهای جزئی ثابت می‌ماند.

مثال ۶: مخلوط هوا و بخار آب در یک اتاق دارای دمای $35^\circ C$ و رطوبت نسبی $\phi = \%50$ می‌باشد. اگر فشار کل مخلوط $100kPa$ و فشار اشباع جزء بخار در دمای مخلوط $P_g = 5/6kPa$ باشد. رطوبت مطلق مخلوط یا نسبت رطوبت (ω) (به طور تقریبی) چند $\frac{g_{vapor}}{kg_{air}}$ است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۱)

۱) ۵/۵ ۲) ۱۲۰/۸ ۳) ۰/۰۱۵ ۴) ۱۷/۹

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» این سؤال تلفیقی از قانون دالتون و رطوبت می‌باشد. ابتدا با استفاده از تعریف رطوبت نسبی، فشار بخار آب را به دست می‌آوریم:

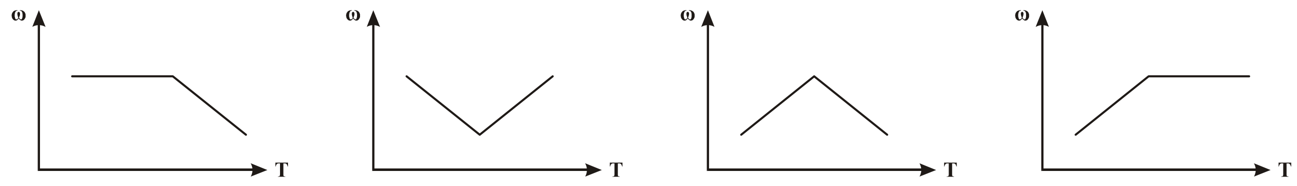
$$\phi = \frac{P_g}{P_{sat}} = \frac{P_g}{5/6} = 0/5 \Rightarrow P_g = 2/8\,kPa$$

حال می‌توانیم با استفاده از قانون دالتون، نسبت مول بخار آب و هوا را به‌دست آوریم:
$$\frac{n_g}{n_{air}}=\frac{۲/۸}{۱۰۰}\quad,\quad \frac{m_g}{m_{air}}=\frac{n_g}{n_{air}}\times\frac{M_g}{M_{air}}$$

جرم مولی آب برابر جرم مولی $H_۲O$ و برابر $۱۸\frac{g}{mol}$ و جرم مولی هوا برابر جرم مولی ۷۵% از گاز نیتروژن $(M_{N_۲}=۲\times۱۴=۲۸)$ و ۲۵% از گاز اکسیژن $(M_{O_۲}=۲\times۱۶=۳۲)$ است و آن را برابر $۲۹\frac{g}{mol}$ در نظر می‌گیریم.
$$\frac{m_g}{m_{air}}=\frac{۲/۸}{۱۰۰}\times\frac{۱۸}{۲۹}\times۱۰۰۰\simeq۱۸$$

چون گرم بخار آب به کیلوگرم هوا خواسته شده است، عدد ۱۰۰۰ در عبارت ضرب شده است. با توجه به مقدار به‌دست آمده، گزینه (۴) صحیح است.

مثال ۷: کدام نمودار تغییرات نسبت رطوبت هوای مرطوب با دمای هوا است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۴)



(۱)　(۲)　(۳)　(۴)

پاسخ: گزینه «۱» با افزایش دما، میزان تبخیر زیاد می‌شود؛ لذا نسبت رطوبت افزایش می‌یابد تا زمانی‌که به رطوبت اشباع برسد و پس از آن نسبت ثابت می‌ماند. پس گزینه (۱) صحیح است.

مثال ۸: اگر گرمای نهان تبخیر یک مایع (L) را ثابت فرض کنیم، کدام عبارت گزینه مناسبی برای فشار بخار مایع در شرایط دور از نقطه بحرانی است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۵)

۱) $\exp(\frac{L}{RT})$　۲) $\exp(-\frac{L}{RT})$　۳) $\exp(\frac{L}{RT^۲})$　۴) $\exp(-\frac{L}{RT^۲})$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا گزینه‌ها را از لحاظ ابعادی بررسی می‌کنیم. بعد گرمای نهان تبخیر $\frac{J}{mol}$ یا $\frac{J}{g}$ است. در داخل exp باید عبارتی بدون بعد قرار بگیرد (به طورکلی درون exp و ln باید عبارت بدون بُعد باشد). بُعد RT برابر $\frac{J}{mol}$ یا $\frac{J}{g}$ است و بُعد $RT^۲$ برابر $\frac{J.K}{g}$ است، پس برای بدون بُعد شدن عبارت باید L بر RT تقسیم شود و گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست خواهند بود. حال فرض کنید گرمای نهان تبخیر (L) زیاد شود. این یعنی به انرژی بیشتری برای تبخیر نیازمندیم. یعنی تبخیر سخت‌تر است و با افزایش L، باید فشار بخار کاهش یابد. اما در گزینه (۱)، با افزایش گرمای نهان تبخیر، فشار بخار به طرز چشمگیری افزایش می‌یابد که تناقض است. لذا گزینه (۲) صحیح است.

مثال ۹: یک مخلوط هوا و بخار با رطوبت نسبی ϕ و دمای T و فشار کل P وارد یک فرایند تهویه مطبوع می‌شود. مقدار جرم بخار آب ورودی به کل جرم هوا و بخار برابر کدام است؟ (P_g فشار بخار اشباع در دمای T است.) (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{۰/۶۲۲\phi P_g}{P+۰/۳۷۸\phi P_g}$　۲) $\frac{۰/۶۲۲\phi P_g}{P-P_g}$　۳) $\frac{۰/۶۲۲\phi P_g}{P-۰/۳۷۸\phi P_g}$　۴) $\frac{۰/۶۲۲\phi P_g}{P+P_g}$

پاسخ: گزینه «۳» برای حل نسبت جرم‌ها را می‌نویسیم، می‌دانیم نسبت مولی آب به هوا به این صورت است:
$$\frac{M_g}{M_{air}}=\frac{۱۸}{۲۹}=۰/۶۲۲$$

$$\frac{m_g}{m_{کل}}=\frac{m_g}{m_{air}+m_g}=\frac{\phi P_g M_g}{(P-\phi P_g)M_{air}+\phi P_g M_g}\xrightarrow{\text{تقسیم صورت و مخرج بر } M_{air}}\frac{۰/۶۲۲\phi P_g}{P-\phi P_g+۰/۶۲۲\phi P_g}=\frac{۰/۶۲۲\phi P_g}{P-۰/۳۷۸\phi P_g}$$

پس گزینه (۳) صحیح است. در این مسئله با استفاده از قانون دالتون می‌توانیم به‌جای مول هوای نسبی، فشار هوای نسبی قرار دهیم.

مقـدمه مکانیک سیالات

در بین درس‌های بخش حرارت و سیالات، درس سیالات دارای تست‌های روتین و الگوپذیرتری نسبت به ترمودینامیک و انتقال حرارت است. در برخی تست‌های این بخش نیز می‌توان از روش‌های رد گزینه و حل هوشمندانه برای رسیدن به پاسخ نهایی بهره برد. با ما همراه باشید تا با مباحث درس سیالات آشنا شوید.

در فصل اول ابتدا با مفاهیم اصلی و خواص سیال آشنا می‌شوید.

در فصل دوم با نحوه محاسبات و سبک سؤالات مطرح شده در فصل استاتیک سیالات مواجه خواهید شد.

در فصل سوم جریان سیال و مفاهیم بنیادی آن مثل برنولی و غیره مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل چهارم فرم دیفرانسیلی قوانین اصلی بررسی می‌شود.

در فصل پنجم آنالیز ابعادی و تشابه را یاد می‌گیرید.

در فصل ششم لوله‌ها و جریان تراکم‌ناپذیر در آن مطرح می‌گردند.

در فصل هفتم توربو ماشین‌ها و محاسبات آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرند.

در فصل هشتم تئوری لایه مرزی نیروهای درگ و غیره بررسی می‌شوند.

یکی از محبوب‌ترین مباحث برای طرح سؤال نزد طراحان کنکور سراسری فصل نهم و بحث جریان و پتانسیل است.

در فصل دهم جریان تراکم‌پذیری کانال روباز بررسی می‌شود.

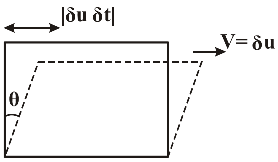
آمار پخش سؤالات در کنکورهای ۸۷ تا ۹۹ در جدول زیر آمده است. فصل ۳ و فصل ۹ فصول جذابی برای طراحان سؤالات کنکور سراسری هستند. در صورت نداشتن فرصت کافی، فصول ۱، ۲ و ۳ را حتماً بخوانید، سپس مستقیم به سراغ فصل ۹ بروید. به این شکل شانس پاسخ‌گویی به حداقل نصف سؤالات را خواهید داشت. اما توصیه ما به خواندن تمام نکات داده شده در کتاب است. این کتاب چکیده و فشرده تمامی دروس را در حجمی کم ارائه داده است. قابل توجه است که در سال ۹۷، تنها از فصول ۱، ۲، ۳ و ۹ این کتاب سؤال مطرح شده است.

فصل‌ها	تعداد سؤالات
فصل اول: مفاهیم اصلی و کلیات	۶
فصل دوم: استاتیک سیالات	۱۳
فصل سوم: مفاهیم جریان سیال و معادلات بنیادی	۱۷
فصل چهارم: دینامیک ذره‌ای سیال لزج و غیرلزج با روش دیفرانسیلی	۱۰
فصل پنجم: آنالیز ابعادی و تشابه	۱
فصل ششم: جریان در لوله‌ها	۱۱
فصل هفتم: توربو ماشین‌ها	۴
فصل هشتم: لایه مرزی	۷
فصل نهم: جریان و پتانسیل	۱۶
فصل دهم: جریان تراکم‌پذیر و کانال روباز	۲

فصل اول

«مفاهیم اصلی و کلیات»

۱ـ تعاریف



سیال ماده‌ای است که تحمل کوچکترین تنش برشی را ندارد و با اعمال تنش برشی، دچار تغییر شکل می‌شود. سیال نیوتونی سیالی است که در آن $\tau \propto \frac{d\theta}{dt}$ باشد. از طرفی طبق شکل $\frac{\delta\theta}{\delta t}=\frac{\delta u}{\delta y}$ است. بنابراین

در سیال نیوتونی $\tau=\mu\frac{du}{dy}$ است که ضریب رابطه را μ در نظر می‌گیریم و لزجت دینامیکی نام دارد.

سیال را در کلیه محاسبات پیوسته در نظر می‌گیریم. در اینجا بد نیست که با چند تعریف آشنا شویم.

سیال قابل تراکم و غیرقابل تراکم: سیالی قابل تراکم است که با تغییر فشار بر روی آن حجم آن عوض شود و یا با ثابت ماندن دما چگالی متغیر نداشته باشد. سیال غیر قابل تراکم رفتاری مخالف خواهد داشت.

سیال لزج و غیر لزج: اگر μ در رابطه بالا کوچک باشد، سیال غیر لزج است؛ یعنی با تنش برشی کوچک، تغییر شکل زیادی در آن ایجاد می‌شود، مانند آب. اما سیال لزج در مقابل تغییر شکل مقاومت زیادی دارد، مانند عسل و ... .

سیال ایده‌آل و غیر ایده‌آل: سیالی که تراکم‌پذیر نباشد و غیر لزج باشد، سیال ایده‌آل نامیده می‌شود.

تبدیل واحد در سیالات: جدول زیر را به خاطر بسپارید.

Primary Dimension	SI Unit	BG Unit	Conversion Factor
Mass {M}	Kilogeram (kg)	Slug (slug)	$۱slug = ۱۴/۵۹۳۹kg$
Length {L}	Meter (m)	Foot (ft)	$۱ft = ۰/۳۰۴۸m$
Time {T}	Second (s)	Second (s)	$۱s = ۱s$
Temperature {θ}	Kelvin (k)	Rankine ($^\circ R$)	$۱k = ۱/۸^\circ R$

چگالی: چگالی یا ρ برابر جرم واحد حجم یک ماده است. در واقع: $\rho_A=\lim(\frac{\delta m}{\delta\forall})_{\delta\forall\to ۰}$

وزن مخصوص برابر با $\gamma=\rho g$ است و SG چگالی نسبت به آب است. فرضاً برای روغن $SG=۰/۸$ است، یعنی چگالی آن برابر با $۸۰۰\frac{kg}{m^۳}$ می‌باشد.

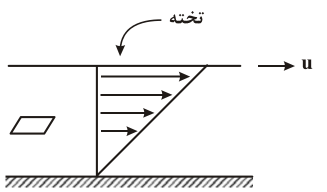
فشار: فشار نسبت به خلأ را فشار مطلق و فشار نسبت به اتمسفر را فشار نسبی می‌گویند. $p_{atm}=۱۰۱۳۳۰Pa=۱۴/۶۹۶Psi$

دما: درجه حرارت شاخصی از انرژی نهفته در جنبش‌های مولکولی یا انرژی داخلی است. مسئله مهمی که ممکن است در حل سؤالات مطرح شود، تبدیل مقیاس‌ها نسبت به هم است. $^\circ C=(^\circ F-۳۲)\times\frac{۵}{۹}\quad,\quad ^\circ R={}^\circ F+۴۵۹/۶۷$

فشار بخار: اگر فشار یک مایع به‌طور موضعی کمتر از حد معینی بشود و مایع در آن نقطه به جوش آید، به فشار بخار مایع رسیده‌ایم. در مجاورت پره‌ها و یا در کانال‌ها ممکن است در نقاطی این جوشش موضعی اتفاق بیفتد که به این پدیده کاویتاسیون می‌گویند. این پدیده معمولاً با سروصدای زیادی همراه است و موجب آسیب‌دیدگی شدید می‌شود.

۲ـ ویسکوزیته دینامیکی و سینماتیکی

در ابتدای فصل ویسکوزیته دینامیکی را معرفی کردیم. عبارت $\nu=\frac{\mu}{\rho}$ را ویسکوزیته سینماتیکی می‌گویند. طبق مشاهدات با افزایش دما، ویسکوزیته دینامیکی گازها افزایش و ویسکوزیته دینامیکی سیالات کاهش می‌یابد. تأثیر فشار بر روی ویسکوزیته کمتر از تأثیر دما بر روی آن است.

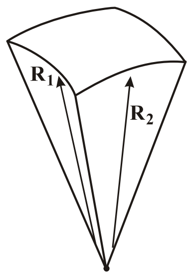


در شکل روبرو با فرض نازک بودن ضخامت فیلم سیال و یکنواخت بودن میزان درجه حرارت، می‌توان پروفیل سرعت سیال را خطی فرض کرد. در همه مسائل مطرح شده از این مبحث این فرض درست است، مگر آنکه در صورت سؤال ذکر شود که پروفیل خطی نیست. اگر پروفیل سرعت سیال خطی باشد، یعنی $u(y)=\frac{u}{h}y$ باشد، درنتیجه خواهیم داشت:

$$\tau=\mu\frac{du}{dy}=\mu\frac{u}{h} \quad , \quad \tau=\frac{F}{A}$$

این عبارت مهم‌ترین رابطه در محاسبات مربوط به این مبحث می‌باشد. F نیروی لازمه برای به حرکت در آوردن تخته و نگه‌داشتن آن در سرعت ثابت U است.

۳ـ کشش سطحی



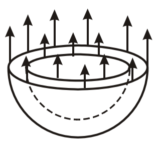
سطح آب به‌صورت کلی

در اثر وجود کشش سطحی به اجسامی که در سطح آب قرار می‌گیرند نیرویی وارد می‌شود که متناسب با طول خیس شده است. حباب نیز در اثر کشش سطحی ایجاد می‌شود. به‌طور کلی می‌توان اختلاف فشار درون و بیرون یک محیط را که توسط کشش سطحی ایجاد می‌شود، از رابطه زیر به‌دست آورد:

$$\Delta P=P_2-P_1=(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})\sigma$$

برای یک قطره فرمول بالا به این شکل جواب می‌دهد:

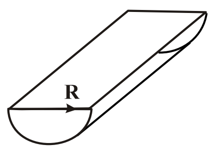
$$R_1=R_2=R \ \Rightarrow \ (\frac{1}{R}+\frac{1}{R})\sigma=\Delta P_{\text{قطره}}=\frac{2\sigma}{R}$$



حباب که از وسط برش‌خورده است.

اگر یک حباب آب را از وسط برش بزنیم متوجه می‌شویم که کشش سطحی در دو سطح داخلی و خارجی وجود دارد. بنابراین مقدار اختلاف فشار دو برابر مقدار یک قطره است:

$$\Delta P_{\text{حباب}}=\frac{4\sigma}{R}$$



جت سیال که برش‌خورده است.

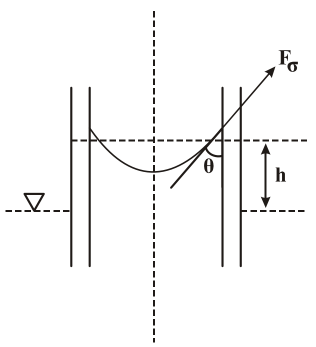
برای یک جت سیال $R_1=\infty$ ، $R_2=R$ می‌شود، بنابراین $\Delta P_{\text{جت}}=\frac{\sigma}{R}$.

به‌طور کلی برای محاسبه نیروی کشش سطحی $(F\propto L)$ نیرو متناسب با طول خیس شده می‌باشد که ضریب تناسب برابر σ یا کشش سطحی می‌باشد.

$$F=\sigma L$$

۴ـ پدیده مویینگی

اگر لوله مویین از جنس شیشه را داخل مایعی همچون آب فرو ببریم، در اثر چسبندگی بین آب و شیشه، آب در درون لوله مویین، بالا می‌آید. در مورد برخی سیالات مانند جیوه به علت چسبندگی بین جیوه و شیشه، سیال پایین می‌رود. زاویه θ، زاویه تماس بین سیال و شیشه است. این زاویه بسته به نوع سیال و جنس لوله تعیین می‌شود. درمورد سیالات بالارونده از لوله زاویه θ کمتر از 90° است و آن سیال را ترکننده می‌نامند. سیالاتی مانند جیوه را که از لوله پایین می‌روند اصطلاحاً ترنکننده می‌گویند و $\theta>90^\circ$ است.



اگر یک لوله را درون سیالی مانند آب فرو ببریم، شکل روبرو حاصل می‌شود که محاسبات در آن به صورت زیر است:

$$\sum F_z=0 \ \Rightarrow \ F_\sigma\cos\theta=W \ \Rightarrow \ \sigma(2\pi R)\cos\theta=\pi R^2 h\gamma \ \Rightarrow \ h=\frac{2\sigma\cos\theta}{\gamma R}$$

حال اگر دو صفحه موازی به فاصله d را درون آب فرو ببریم h از رابطه زیر حساب می‌شود:

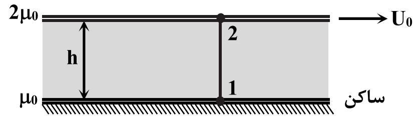
$$h=\frac{2\sigma\cos\theta}{\gamma d}$$

حل تشریحی مسائل

الگوی اول: محاسبه نیروی ایجاد شده توسط ویسکوزیته

تنها سبکی که طراحان کنکور در ده سال اخیر، از این فصل تست طرح کرده‌اند، محاسبه ویسکوزیته و نیروی ایجاد شده توسط آن است. مبانی آن در درسنامه ارائه شده است. با ما همراه باشید تا با دیدن مثال‌ها به این مبحث مسلط شوید. اگر در تستی، گزینه‌ها به‌صورت پارامتری داده شده بود، با پارامترها بازی کنید تا گزینه‌های غلط حذف شوند.

مثال ۱: سیال لزجی مطابق شکل فضای بین دو صفحه موازی را که به فاصله بسیار کوچک h از یک‌دیگر قرار دارند پر نموده است. اگر ویسکوزیته این سیال به‌طور خطی از μ_0 در صفحه پایینی تا $2\mu_0$ در صفحه فوقانی تغییر کند، کدام‌یک از گزینه‌های زیر درمورد تنش برشی در نقاط ۱ و ۲ درست است؟ (صفحه با سرعت ثابت U_0 در حال حرکت است) (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۷)



۱) $\tau_1 < \tau_2$

۲) $\tau_1 > \tau_2$

۳) $\tau_1 = \tau_2$

۴) بدون معلوم بودن نوع سیال (از نظر گاز بودن یا مایع بودن) نمی‌توان نظر داد.

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم که $\tau = \mu \dfrac{du}{dy}$ است. در مقایسه بین نقطه ۱ و ۲، $\dfrac{du}{dy}$ وارد نمی‌شود، چون پروفیل سرعت سیال به‌علت کوچک بودن h خطی است. بنابراین تفاوت بین نقطه ۱ و ۲ توسط μ رخ می‌دهد. بنابراین $\tau_1 < \tau_2$.

مثال ۲: دو مایع غیرقابل اختلاط با چگالی‌های یکسان و لزجت‌های متفاوت فضای بین دو صفحه افقی به فاصله $2H$ را پر کرده‌اند. صفحه پایینی ثابت و صفحه بالایی با سرعت ثابت U کشیده می‌شود. فشار در جهت حرکت ثابت است. تنش برشی (τ) که به صفحه پایینی وارد می‌شود چقدر است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۰ و ۹۷)

۱) $\dfrac{\mu_2 U(1+\frac{\mu_2}{\mu_1})}{H}$

۲) $\dfrac{\mu_1 U}{H(1+\frac{\mu_2}{\mu_1})}$

۳) $\dfrac{\mu_2 U}{H(1+\frac{\mu_2}{\mu_1})}$

۴) $\dfrac{H(1+\frac{\mu_2}{\mu_1})}{\mu_2 U}$

پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه تنش برشی در دیواره پایینی به مقدار سرعت در مرز دو سیال احتیاج داریم، زیرا:

$$\tau = \mu_2 \frac{\Delta v}{\Delta y} = \mu_2 \frac{V}{H}$$

در مرز دو سیال تنش برشی با هم برابر است، بنابراین داریم:

$$\tau_1 = \tau_2 \Rightarrow \mu_1 \frac{U-V}{H} = \mu_2 \frac{V}{H} \Rightarrow V = \frac{\mu_1 U}{\mu_1 + \mu_2}$$

حال V را در معادله بالا جایگذاری می‌کنیم:

$$\tau = \mu_2 \frac{\mu_1 U}{(\mu_1+\mu_2)H} = \frac{\mu_2 U}{H(1+\frac{\mu_2}{\mu_1})}$$

همیشه به روش‌های ردگزینه در سؤالات پارامتری فکر کنید، شاید بتوان چند گزینه را حذف کرد و شاید حتی به پاسخ نهایی رسید. در این سؤال هم می‌توان گزینه‌ها را حذف کرد. اگر $\mu_1 = \infty$ باشد، دلیلی ندارد که تنش برشی وارده به صفحه پایینی نیز بی‌نهایت شود. درواقع این تنش فقط به μ_2 وابسته می‌شود و مرز بین دو سیال نیز با سرعت U حرکت می‌کند (گزینه ۲ حذف شد). اگر $\mu_1 = 0$ باشد، تنش برشی وارد شده به مرز برابر صفر می‌شود، بنابراین مرز حرکت نمی‌کند، در نتیجه تنش برشی وارد شده به دیواره پایینی نیز صفر می‌شود. پس گزینه‌های (۱) و (۴) نیز از پاسخ‌ها حذف می‌شوند و تنها گزینه (۳) درست است.

مشاهده می‌شود که این تست عیناً در سال ۹۷ تکرار شده است. این خود تأییدی است بر اینکه تست‌های سال‌های اخیر مطرح شده، بسیار حائز اهمیت هستند.

مدرسان شریف

فصل سوم

«مفاهیم جریان سیال و معادلات بنیادی»

۱ـ دیدگاه‌های مختلف سینماتیکی

بیان سرعت و شتاب در دیدگاه لاگرانژی، به این معناست که ذرات در حین حرکت دنبال شوند و تغییر مکان‌ها به‌صورت تابعی پیوسته باشد. کاربرد این دیدگاه در جامدات است:

$$\vec{V}_A = \frac{d}{dt}(\vec{r}_A) \Rightarrow \vec{a}_A = \frac{d}{dt}(\vec{V}_A) = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_A)$$

دیدگاه اویلری می‌گوید سیال را در هنگام عبور از میدان یا فضای خاص مطالعه کنید. درواقع سرعت و شتاب تابعی از زمان و مکان بررسی آن می‌باشند. عبارات روبه‌رو بیان کننده این مسئله هستند.

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{Du}{Dt} = \dfrac{du}{dt} + u\dfrac{du}{dx} + v\dfrac{du}{dy} + w\dfrac{du}{dz} \quad (*) \\ a_y = \dfrac{Dv}{Dt} = \dfrac{dv}{dt} + u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{dv}{dy} + w\dfrac{dv}{dz} \\ a_z = \dfrac{Dw}{Dt} = \dfrac{dw}{dt} + u\dfrac{dw}{dt} + v\dfrac{dw}{dy} + w\dfrac{dw}{dz} \end{cases}$$

عبارات بالا درواقع از قضیه‌ای به‌نام مشتق مادی نتیجه گرفته شده‌اند. اگر بخواهیم برای سرعت در یک میدان قضیه مشتق مادی را بنویسیم به عبارت روبه‌رو می‌رسیم:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V}.\nabla)\vec{V}$$

قضیه مشتق مادی را می‌توان برای هر متغیر دیگر به غیر از سرعت نیز به‌کار برد. توصیه ما به شما حفظ کردن یکی از جهت‌ها در محاسبه شتاب است. با توجه به روند و مفهوم جهات دیگر را استخراج کنید. شتاب در جهت x (یعنی فرمول *) را در نظر بگیرید. مفهوم آن این است که، شتاب در جهت x را می‌توان با محاسبه تغییرات u (سرعت در جهت x) برحسب زمان، به اضافه تغییرات سرعت u در جهت x ضربدر سرعت در آن جهت، به اضافه تغییرات سرعت u در جهت y ضربدر سرعت در آن جهت و به همین ترتیب برای جهت z به‌دست آورد.

۲ـ انواع جریان‌ها

جریان قابل تراکم و غیرقابل تراکم: نسبت سرعت سیال به سرعت صوت در همان محیط، عدد ماخ نامیده می‌شود. اگر جریانی دارای عدد ماخ کوچک‌تر از ۰/۳ باشد غیرقابل تراکم است و اگر ماخ بیشتری داشته باشد قابل تراکم است.

جریان لزج و غیرلزج: در جریان لزج تنش برشی مخالف صفر است. اگر تنش برشی صفر بود جریان غیر لزج است.

جریان ایده‌آل: جریانی که هم غیرقابل تراکم باشد و هم غیر لزج باشد ایده‌آل است. غیر از آن غیر ایده‌آل است.

جریان دائم و غیردائم: تمام خواص سیال، تمام خواص جریان و تمام خواص هندسی در جریان دائم مستقل از زمان است. اگر در موارد ذکر شده، وابستگی به زمان وجود داشت، جریان غیردائم است.

جریان چرخشی و غیرچرخشی: اگر ذرات سیال حول نقطه‌ای در حال چرخش باشد، جریان چرخشی است؛ اما اگر در جریان ما $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ برقرار باشد، جریان غیرچرخشی است. در اینجا یک مفهوم به اسم بردار ورتیسیته مطرح می‌گردد که از عبارت $\zeta = 2 \times \vec{w} = 2 \times \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{V})$ حساب می‌شود که به‌طور کلی نشان‌دهنده چرخش سیال می‌باشد. دو عامل در حالت کلی باعث چرخش سیال می‌شود: ۱) تنش برشی ۲) فشار

جریان پتانسیل و غیرپتانسیل: جریان پتانسیل جریانی است که بتوان بردار سرعت آن را از یک تابع اسکالر جدا کرد. در فصل نهم به‌طور مفصل درباره این جریان توضیح می‌دهیم. اگر ϕ تابع پتانسیل سرعت باشد $\vec{V}=\nabla\vec{\phi}$ می‌شود. یعنی:

$$\begin{cases} u=\dfrac{d\phi}{dx} \quad v=\dfrac{d\phi}{dy} \quad w=\dfrac{d\phi}{dz} \\ V_r=\dfrac{d\phi}{dr} \quad V_\theta=\dfrac{1}{r}\dfrac{d\phi}{d\theta} \quad V_z=\dfrac{d\phi}{dz} \end{cases}$$

اگر بخواهیم اشاره کوتاهی داشته باشیم، اگر جریان چرخشی باشد، برای آن، تابع پتانسیل تعریف نمی‌شود.

جریان یکنواخت و غیریکنواخت: اگر سرعت در همه نقاط جریان، هم از نظر مقدار و هم از نظر جهت یکسان باشد، جریان یکنواخت است و ما میدان یکنواخت داریم. اگر چنین نباشد، جریان غیریکنواخت است.

جریان توسعه‌یافته و غیرتوسعه‌یافته: اگر درون یک لوله در نقطه‌ای، جریان به شکلی شود که پروفیل سرعت آن در تمام نقاط بعد از آن نقطه یکسان باشد، جریان توسعه یافته شده است. از آن نقطه به قبل جریان غیر توسعه‌یافته است.

جریان آرام، درهم و گذرا: اگر سرعت سیال از حد خاصی کمتر باشد، جریان آرام است. این حد بستگی به ویژگی‌های سیال و همچنین هندسه مسئله دارد. در فصل‌های بعدی درباره آن بیشتر صحبت می‌کنیم. وقتی جریان آرام می‌شود، تبادل مومنتوم بین لایه‌های مجاور هم در مقیاس میکروسکوپی (یا مولکولی) صورت می‌گیرد. در جریان درهم این تبادل در مقیاس ماکروسکوپی انجام می‌شود.

جریان یک‌بعدی، دوبعدی و سه‌بعدی: تعداد مؤلفه‌های مکانی ظاهر شده در بردار سرعت تعیین‌کننده تعداد بعدهای یک جریان است. فرضاً در جریانی به‌صورت $\vec{V}=xy\vec{i}$، جریان دوبعدی است.

جریان یک‌جهته، دوجهته و سه‌جهته: تعداد مؤلفه‌های غیرصفر در بردار سرعت تعیین‌کننده تعداد جهت‌های جریان است. به‌طور مثال، جریان فوق، یعنی $\vec{V}=xy\vec{i}$، یک‌جهته است.

۳ـ انواع خطوط در سیالات

خط مسیر (Path Line): خطی است فیزیکی که توسط ذره خاص از سیال در دیدگاه لاگرانژی ترسیم می‌شود. به این معنی که یک ذره را در طول زمان دنبال می‌کنیم و مسیر ترسیم شده توسط آن را به‌عنوان خط مسیر گزارش می‌کنیم. برای به‌دست آوردن خط مسیر کافی است زمان را از معادله سرعت حذف کنیم. فرض کنید جریان دوبعدی و دوجهته باشد: $\vec{V}=(u(x,y,t)\ ,\ v(x,y,t))$

داریم: $u=\dfrac{dx}{dt}$. با انتگرال‌گیری از این معادله به عبارتی خواهیم رسید که آن را نگه می‌داریم. همین کار را برای v انجام می‌دهیم. در نهایت t را از دو رابطه به‌دست آمده حذف می‌کنیم و خط مسیر به‌دست می‌آید. برای مشاهده این خط می‌بایست در سیال پودر آلومینیوم ریخت و درحالی‌که به آن نور شدید می‌تابانیم عکس بگیریم که خطوط مسیر مشخص می‌شوند.

خط اثر یا رگه (Streak Line): خطی است فیزیکی که توسط ذرات مختلف سیال در دیدگاه اویلری رسم می‌شود. خطوط اثر یک ویژگی مشترک دارند و آن اینکه همگی قبلاً از یک نقطه عبور کرده‌اند. برای مشخص کردن آن با یک سرنگ محلول رنگی را وارد سیال می‌کنیم. در صورت معلوم بودن میدان سرعت، خطوط حاصله خط اثر است.

خط جریان (Stream Line): در تمام نقاط این خط، بردار سرعت بر خط مماس است. از رابطه زیر می‌توان معادله خطوط جریان را به‌دست آورد:

$$\frac{u}{dx}=\frac{v}{dy}=\frac{w}{dz}$$

۴ـ رابطه برنولی

اگر خیلی ساده بخواهیم رابطه برنولی را شرح دهیم، اینگونه توصیف می‌کنیم که مجموعه فشار استاتیکی (P)، فشار دینامیکی $(\rho\frac{v^2}{2})$ و فشار هیدرواستاتیکی (γz) برای ذره‌ای از سیال ثابت است.

$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\gamma z_1=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\gamma z_2=cte$$

معادله برنولی به شکل بالا را برای جریان دائمی، تراکم‌پذیر و غیرلزج و برای نقاط واقع بر روی یک خط جریان و بدون کار محوری پمپ یا توربین می‌توانیم استفاده کنیم. با تقسیم عبارت بالا به ρg یا γ به عبارت مقابل می‌رسیم:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+z_2=cte$$

ترم اول عبارت بالا را هد استاتیکی، ترم دوم را هد دینامیکی و ترم سوم را هد هندسی می‌نامیم. علت نامگذاری هد بر روی این ترم‌ها این است که بعد آن‌ها طول است. در ادامه می‌خوانیم که می‌توان هدهای اتلافی و یا تزریقی به سیستم را هم وارد رابطه کرد.

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}+z_1+h_P-h_t-h_l=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+z_2$$

h_p: هد پمپ، h_l: هد اتلاف، h_t: هد توربین

مفهوم عبارت بالا این است که فرض کنید بین نقطه اول و دوم در نظر گرفته شده، یک پمپ، یک توربین و ادوات تلف‌کننده (انرژی مثل اصطکاک لوله‌ها، زانویی‌ها و ...) موجود باشد. وقتی از نقطه یک به نقطه دو می‌رویم، هر پمپ به مجموعه انرژی تزریق می‌کند، پس به هد افزوده می‌شود، اما هد توربین و هد اتلاف از سیستم انرژی می‌گیرند و کم می‌شوند.

۵ـ دینامیک توده‌ای سیال

در این بخش به تحلیل پیچیدگی‌های درون سیستم کاری نداریم بلکه تنها خروجی و برایند آن برای ما مهم است. در اینجا باید قضیه انتقال رینولدز را معرفی کنیم. اگر یک سیستم یا حجم کنترل (ناحیه‌ای از میدان در حال مطالعه) را در نظر بگیریم و B یک خاصیت دلخواه از آن سیستم باشد، عبارت زیر قضیه انتقال رینولدز است.

$$\frac{D}{Dt}(B_{sys})=\frac{d}{dt}\int_{c.v}b(\rho dv)+\oint_{c.s}b(\rho\vec{V}.d\vec{A}) \quad , \quad b=\frac{dB}{dm}$$

دقت شود که منظور از $\vec{V}$ بردار سرعت و منظور از dv المان کوچک حجم است.

رابطه بالا بیان می‌کند که تغییرات خاصیت B در یک سیستم برابر است با تغییرات درونی سیستم به اضافه تغییرات B در اثر خروج یا ورود به سیستم.

حال می‌توان به‌جای B انواع خاصیت‌ها را قرار داد.

الف) فرم انتگرالی قانون بقای جرم

اگر به‌جای B، m_{sys} یعنی جرم سیستم را قرار دهیم به عبارت روبه‌رو می‌رسیم:

$$0=0+\sum m_{out}-\sum m_{in}$$

عبارت بالا بیان می‌کند که در یک سیستم با سیال تراکم‌ناپذیر، جرم ورودی برابر با جرم خروجی است. اگر از دو طرف تساوی نسبت به زمان مشتق بگیریم به دبی جرمی می‌رسیم. دبی جرمی نرخ جرم عبورکننده از یک سطح مشخص می‌باشد. در نتیجه مفهوم عبارت با مشتق زمانی این است که نرخ جرم ورودی با نرخ جرم خروجی برابر است. یعنی داریم:

$$\dot{m}_{in}=\dot{m}_{out}$$

اگر سیال تراکم‌ناپذیر باشد و شرایط دمایی ثابت باشد چگالی نیز تغییر نمی‌کند، بنابراین با تقسیم عبارت بالا بر ρ، حجم عبوری از یک سطح مشخص به‌دست می‌آید که دبی حجمی یا دبی می‌نامند و با Q نشان می‌دهند. Q را از حاصل‌ضرب سرعت سیال در مقطع عبوری نیز به‌دست می‌آورند.

$$Q_{in}=Q_{out}$$

البته نحوه دقیق‌تر محاسبه Q انتگرال‌گیری پروفیل سرعت بر کل سطح عبوری است، یعنی:

$$\oint_{cs}u.dA=Q$$

ب) قضیه رینولدز در ممنتوم خطی یا محاسبه نیرو

اگر در قضیه رینولدز به‌جای B ممنتوم خطی سیال $(\vec{M}=m\vec{V})$ قرار داده شود به عبارت زیر می‌رسیم:

$$\sum\vec{F}=\frac{d}{dt}\int\vec{V_a}(\rho dv)+\oint_{c.s}\vec{V_a}(\rho\vec{V_r}.d\vec{A})$$

$\vec{V}_a$، سرعت واقعی سیال و $\vec{V}_r$ سرعت نسبی سیال (نسبت به سرعت سطح مقطع خروجی) است.

در واقع عبارت بالا نیروی لازمه برای تغییر ممنتوم سیال را بیان می‌کند. به زبان ساده‌تر اگر جلوی سیال مانع قرار دهیم تا جهت آن را عوض کنیم نیروی وارده به مانع از عبارت بالا حساب می‌شود. ساده شده فرمول بالا به شکل کاربردی زیر در می‌آید. فرم عمومی بالا در محاسبات موشک‌ها و قسمت‌هایی که جرم حجم کنترل کم می‌شوند کاربرد دارد. فرم زیر حالت پرکاربرد در آزمون‌های سراسری است که جرم حجم کنترل تغییر نمی‌کند.

$$\sum\vec{F}=\sum\vec{\dot{M}}_{out}-\sum\vec{\dot{M}}_{in} \quad , \quad \vec{\dot{M}}=\dot{m}\vec{V}$$

در حل این مسائل باید به نحوه انتخاب حجم کنترل دقت کرد. در حل مثال‌ها (بعد از درسنامه) به خوبی با این کار آشنا می‌شوید. اصولاً نوشتن معادلات در یک جهت خاص (فرض x) ما را به جواب می‌رساند. بنابراین عبارت زیر را می‌آوریم.

$$\sum F_x=\sum\dot{M}_{out_x}-\sum\dot{M}_{in_x}$$

مقــدمه انتقال حرارت

انتقال حرارت شامل دروس انتقال حرارت ۱ و ۲ از دروس دانشگاهی و یکی از بخش‌های مجموعه حرارت و سیالات کنکور ارشد مکانیک است. انتقال حرارت را می‌توان درسی معرفی کرد که نسبتاً جدید است، اما داوطلبان روی آن شهود خوبی دارند. یعنی نسبت به اتفاقاتی که در یک مسئله می‌افتد، درک و حس دارند، همین امر باید علتی برای داوطلبان باشد تا این درس را جدی بگیرند و حذف این درس را برای کنکور در برنامه خود قرار ندهند. سؤالات این درس برخلاف دو درس ترمودینامیک و سیالات، نسبت به آنچه که آموخته می‌شود، درجه سختی کمتری دارند. یادگیری این درس به صورت مفهومی، تسلط بر روابط و فرمول‌های مورد نیاز و استفاده درست از این روابط کلید رسیدن به حل ۶ سؤال (۳۰ درصد) از ۲۰ سؤال مجموعه حرارت و سیالات است. در این بخش از کتاب، سعی کرده‌ایم با روشی مفهومی و با نمایان کردن فرمول‌های اساسی، به تسلط مطلوب بر درس انتقال حرارت برسیم.

فصل‌ها	تعداد سؤالات
فصل اول: مفاهیم و انتقال حرارت هدایتی	۱۹
فصل دوم: انتقال حرارت ناپایا (گذرا)	۹
فصل سوم: فین‌ها (پرّه‌ها)	۲
فصل چهارم: انتقال حرارت جابه‌جایی	۱۷
فصل پنجم: جریان داخلی	۱۲
فصل ششم: جابه‌جایی آزاد	۲
فصل هفتم: مبدل‌های حرارتی	۴
فصل هشتم: جوشش و میعان	۰
فصل نهم: تشعشع	۱۳

مباحث درس انتقال حرارت را در ۹ فصل تنظیم کرده‌ایم. جدول بالا توزیع سؤالات ۱۱ سال اخیر برای هر فصل را نشان می‌دهد. بدون شک، مهم‌ترین فصل کتاب، فصل اول آن است و به عنوان اولین فصل، باید اولویت اول مطالعه قرار بگیرد. این فصل شاکله و مقدمه درس انتقال حرارت است و انتقال حرارت هدایتی در هندسه‌های مختلف و روش حل بسیاری از سؤالات کنکور را شامل می‌شود.

در فصل دوم، انتقال حرارت گذرا برای یک جسم فشرده (Lumped) و جسم نیمه بی‌نهایت را بررسی می‌کنیم. این فصل، درسنامه کوتاهی دارد و به صورت تقریبی شامل یک سؤال در هر سال می‌شود.

در فصل سوم، با فین‌ها (پرّه‌ها) آشنا می‌شویم. پره‌ها محاسبات دیفرانسیلی سنگینی دارند و پرسش در مورد آن‌ها به عنوان یک تست آزمون را از مفهومی بودن دور می‌کند و دلیل کم بودن سؤالات مربوط به آن هم همین است. از این فصل در کنکور سراسری ۹۷، یک تست مفهومی آورده شده است.

فصل چهارم، شامل انتقال حرارت جابه‌جایی، دومین فصل مهم انتقال حرارت است. مقدمات این فصل در قسمت مفاهیم آورده می‌شود؛ اما انتقال حرارت جابه‌جایی به صورت گسترده در این فصل گردآوری شده است. فرمول‌های این فصل هم از اهمیت بالایی برخوردارند.

در فصل پنجم، با جریان داخل لوله‌ها و محاسبات مربوط به آن‌ها که نشأت گرفته از اساس فصل چهارم است، سر و کار داریم و فرمول‌های این فصل هم مهم هستند.

در فصل ششم، با جابه‌جایی آزاد و عدد گراشف آشنا می‌شویم. مطالعه این فصل زمان‌بر نیست و یادگیری آن به صورت مفهومی برای کنکور کافی است.

در فصل هفتم، با مبدل‌های حرارتی آشنا می‌شویم. این فصل برآمده و نتیجه‌ای از فصول اول و چهارم است.

در فصل هشتم، با مفاهیمی از جوشش و میعان آشنا می‌شویم. این فصل نیز دارای درسنامه‌ای کوتاه و مفهومی است.

در پایان، فصل بسیار مهم تشعشع را داریم. با مفهوم تشعشع در فصل اول آشنا می‌شویم؛ اما این فصل بیشتر در رابطه با ضریب شکل در تشعشع صحبت می‌کند. این فصل هر ساله یک سؤال در کنکور دارد و مطالعه آن برای حل سؤالات تشعشع، لازم است.

تلاش ما بر این بوده است تا با حداقل حفظیات و حداکثر مفاهیم، بتوانیم بر درس پر از فرمول اما قابل درک انتقال حرارت تسلط پیدا کنیم.

به عنوان نکته آخر، در درس انتقال حرارت تسلط به دیمانسیون ثوابت و پارامترها، هم امکان حل سؤالات پارامتری به صورت تحلیل ابعادی را به شما می‌دهد و هم اینکه راحت‌تر می‌توانید فرمول‌ها را در صورت فراموشی به‌خاطر بیاورید.

فصل اول

«مفاهیم و انتقال حرارت هدایتی»

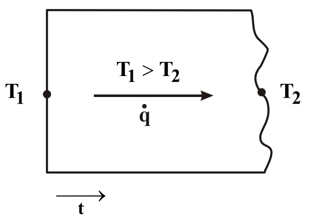
این فصل، مهم‌ترین بخش درس انتقال حرارت است. چیزی در حدود یک سوم سؤالات کنکور ارشد، در این فصل مطرح شده‌اند. در این فصل ابتدا با روش‌های انتقال حرارت و روابط حاکم بر آن‌ها آشنا می‌شویم، سپس به بررسی جزئی انتقال حرارت هدایتی می‌پردازیم. روابط آن را برای دستگاه دکارتی، استوانه‌ای و کروی با وجود تولید گرما مورد بررسی قرار می‌دهیم. در نهایت در پایان فصل، قادر به حل یک مسئله عمومی انتقال حرارت با داشتن ثوابت و ضرایب مورد نیاز خواهیم بود. در پایان، مروری کلی بر انتقال حرارت دوبعدی خواهیم داشت.

۱ـ روش‌های انتقال حرارت

الف) انتقال حرارت هدایتی

در این روش حرارت در یک جسم جامد (یا مایع ساکن) به واسطه‌ی اختلاف دما منتقل می‌شود. میزان انتقال حرارت بر واحد زمان برابر است با:

$$\dot{q} = -kA\frac{dT}{dx}$$



علامت منفی جهت انتقال حرارت را نشان می‌دهد و بیان می‌کند که اگر در جهت مورد نظر، دما کم شود، جهت انتقال گرما مثبت است. به عنوان مثال در شکل روبه‌رو اگر $T_۱ > T_۲$ باشد و جهت مثبت را از چپ به راست در نظر بگیریم، جهت انتقال حرارت در جهت مثبت خواهد بود. مسئله‌ای که با شهود خود هم می‌توانید بیابید. پس در سؤالات برای یافتن جهت انتقال گرما، از شهود خود کمک بگیرید.

$\frac{dT}{dx}$ تغییرات دما نسبت به تغییرات طول را نشان می‌دهد. A مساحت سطح مقطع عمود بر جهت انتقال حرارت است (عمق در ارتفاع) و k ضریب انتقال حرارت است. اگر گرما بخواهد از یک فلز یا پلاستیک عبور کند ضریب انتقال حرارت این تفاوت را مشخص می‌کند. برای فلزات و به‌طورکلی رساناهای الکتریکی مقدار k زیاد و برای هوا و پلاستیک‌ها مقدار k کم است. واحد k، $\frac{w}{m°C}$ یا $\frac{w}{mK}$ است.

ب) انتقال حرارت جابه‌جایی

در این روش حرارت به‌دلیل حرکت سیال، انتقال می‌یابد. به عنوان مثال، قرار دادن یک گوی داغ در محیط که عامل اصلی خنک شدن آن، انتقال حرارت به روش جابه‌جایی است. میزان انتقال گرما بر واحد زمان با روش جابه‌جایی برابر است با:

$$\dot{q} = hA\Delta T = hA(T - T_\infty)$$

که A مساحت قسمتی است که با سیال در تماس است، ΔT اختلاف دما و h ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی است. در فصل چهارم به‌طور دقیق در رابطه با این ضریب و روش به دست آوردن آن بحث می‌شود. وقتی یک لیوان آب داغ را با فوت کردن سریع‌تر از حالت عادی خنک می‌کنید، در حقیقت با افزایش h، میزان انتقال حرارت آن را زیاد می‌کنید. واحد h، $\frac{w}{m^۲°C}$ یا $\frac{w}{m^۲K}$است.

ج) انتقال حرارت تشعشعی (تابشی)

در این روش حرارت به واسطه تابش منتقل می‌شود و مثال بارز آن، خورشید است که با تشعشع زمین را گرم می‌کند. در حقیقت، همه اجسام به هم تابش و انتقال حرارت دارند که به واسطه دمای کم، حس نمی‌شود. میزان انتقال گرمای تابشی برابر است با:

$$\dot{q} = \varepsilon\sigma AT^۴$$

ε ضریب صدور است و مقداری بین ۰ و۱ دارد. T دمای جسم است و باید برحسب کلوین (K) در رابطه قرار بگیرد و σ ثابت بولتزمن و برابر $\sigma = ۵/۶۷\times ۱۰^{-۸}\ \frac{W}{m^۲.K^۴}$ است. در فصل نهم با این مبحث بیشتر آشنا می‌شوید. A هم مساحت سطح تابنده جسم است.

به $q'' = \frac{\dot{q}}{A}$ شار حرارتی می‌گویند که میزان انتقال حرارت در زمان بر واحد مساحت را نشان می‌دهد.

جسم سیاه، جسمی است که تمامی انرژی تابیده شده به خودش را جذب می‌کند و در دمایی مشخص، بیشترین صدور انرژی را دارد و ε برای آن برابر با ۱ است.

اکنون، به بررسی بیشتر انتقال حرارت هدایتی می‌پردازیم. در ابتدا، انتقال حرارت هدایتی در دستگاه دکارتی (x,y,z) را بررسی می‌کنیم.

۲ـ انتقال حرارت هدایتی در دستگاه دکارتی

به‌طورکلی فرم شار گرمایی در دستگاه مختصات x، y و z به این صورت است.

$$q'' = -k(\hat{i}\frac{\partial T}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial T}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial T}{\partial z}) = -k\nabla T$$

که از آنجایی که حل آن به صورت ۲ بعدی یا بالاتر پیچیده می‌باشد، در کنکور با انتقال حرارت یک بعدی سروکار داریم که به صورت $q'' = -k\frac{dT}{dx}$ می‌باشد.

برای یافتن توزیع و دما در جسم از معادله زیر استفاده می‌کنیم. $\dot{q}$ نرخ تولید گرما بر واحد حجم درون جسم می‌باشد که واحد آن $\frac{W}{m^۳}$ است:

$$\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial T}{\partial z}) + \dot{q} = \rho C_P\frac{\partial T}{\partial t}$$

همان‌گونه که گفتیم معادله را برای حالت یک‌بعدی می‌نویسیم:

$$\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial T}{\partial x}) + \dot{q} = \rho C_p\frac{\partial T}{dt}$$

چنانچه k ثابت باشد و با x تغییر نکند، از پرانتز بیرون می‌آید و به صورت $k\frac{\partial^۲ T}{\partial x^۲}$ می‌شود.

چنانچه در شرایط پایا باشیم، تغییرات دمایی نسبت به زمان نداریم $(\frac{\partial T}{\partial t} = ۰)$ و چنانچه گرما در سیستم تولید نشود $\dot{q} = ۰$ خواهد بود.

اکثر مسائل به صورت پایا هستند و در مسئله ذکر می‌شود که شرایط با زمان تغییر می‌کند یا نه. با حرارت ناپایا در فصل آینده آشنا می‌شویم.

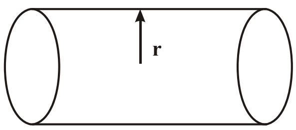
چنانچه k تابعی از x نباشد، داریم:

$$\frac{\partial^۲ T}{\partial x^۲} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{\rho C_P}{k}\frac{\partial T}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial^۲ T}{\partial x^۲} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{۱}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

به مقدار $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$ ضریب نفوذ یا ضریب پخش حرارتی گفته می‌شود که واحد آن $\frac{m^۲}{s}$ است. هرچه ضریب حرارتی بیشتر باشد و ظرفیت گرمایی کمتر باشد، α بزرگ‌تر و $\frac{۱}{\alpha}$ کوچک‌تر خواهد بود و دما زودتر بالا می‌رود.

۳ـ انتقال حرارت در دستگاه استوانه‌ای

چنانچه دستگاه مختصات به صورت استوانه‌ای باشد، مانند یک سیم که حرارت جریان الکتریکی در آن تولید می‌شود، نیاز به یک دستگاه مختصات استوانه‌ای داریم:



$$\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{۱}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

۴ـ دستگاه مختصات کروی

چنانچه نیاز به تعریف انتقال حرارت در یک کره باشد (مانند ساچمه)، از دستگاه مختصات کروی بهره می‌بریم.

$$\frac{۱}{r^۲}\frac{\partial}{\partial r}(r^۲\frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{۱}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

شرایط مرزی: معادله‌های دیفرانسیل گفته شده درجه ۲ می‌باشند. پس بعد از حل، نیاز به دو شرط مرزی دارند.

شرایط مرزی به دو صورت هستند:

الف) دما در موقعیت مشخص

ب) انتقال حرارت در موقعیت مشخص

چنانچه حالت (الف) باشد، $T(x)$ یا $T(r)$ را در موقعیت موردنظر با دمای داده شده برابر قرار می‌دهیم.

چنانچه حالت (ب) برقرار باشد، مقدار $-k\dfrac{dT}{dx}(x)$ را برابر میزان انتقال حرارت قرار می‌دهیم. چنانچه محل موردنظر عایق باشد، $\dfrac{dT}{dx}(x)$ برابر صفر خواهد بود. اگر جسم در موقعیت با ضریب هدایت جابه‌جایی h باشد، داریم:

$$-k\frac{dT}{dx}(x)=h\Delta T$$

نکته مهم: برای استوانه یا کره توپر، میزان انتقال حرارت (یا مقدار $\dfrac{\partial T}{\partial r}$) در $r=0$ برابر صفر است. دلیل این مسئله تقارن در مرکز می‌باشد.

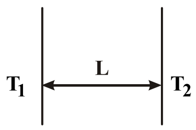
$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0}=0$$

۵ـ مقاومت حرارتی

در برخی موارد در رابطه با مقاومت حرارتی سؤال پرسیده می‌شود. همان‌گونه که اختلاف پتانسیل (ΔV) موجب تولید جریان الکتریکی (I) می‌شود، در انتقال حرارت هم اختلاف دما (ΔT) موجب انتقال حرارت بر واحد زمان (q) می‌شود. مقاومت حرارتی به صورت زیر تعریف می‌شود و واحد آن $\dfrac{K}{w}$ یا $\dfrac{^\circ c}{w}$ است:

$$R=\frac{\Delta T}{q}$$

اگر بخواهیم مقاومت را به‌دست آوریم، به عنوان مثال برای یک دیوار مسطح، به شکل زیر عمل می‌کنیم:



$$q=-kA\frac{dT}{dx}\Rightarrow |q|=kA\frac{\Delta T}{L}\Rightarrow R=\frac{\Delta T}{q}=\frac{L}{kA}\Rightarrow R=\frac{L}{kA}$$

چنانچه محیط با ضریب حرارتی h داشته باشیم، مقاومت آن برابر با $R_h=\dfrac{1}{hA}$ خواهد بود. مقاومت‌های حرارتی که بین دو اختلاف دما قرار دارند، با هم جمع می‌شوند.

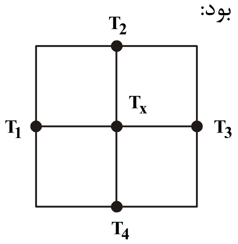
گاهی برای کاهش انتقال حرارت، از مقاومت حرارتی استفاده می‌شود. این مقاومت که به صورت عددی است با مقاومت هدایتی و جابه‌جایی جمع می‌شود، دقیقاً مانند مقاومت در مدار الکتریکی. اکنون در رابطه با انتقال حرارت دوبعدی توضیحاتی داده خواهد شد.

۶ـ انتقال حرارت در دو بُعد

انتقال حرارت دوبعدی نیاز به المان‌بندی و ریز کردن شکل دارد و روشی است که با استفاده از کامپیوتر برای حل مسائل به‌کار می‌روند. به همین دلیل، مسائل مربوط به آن برای فضای آزمون باید ساده باشد که قابل حل باشد. در نتیجه رغبت طراحان به طرح سؤال از این قسمت کم است.

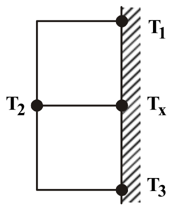
چنانچه معادله $T(x,y)$ برحسب یکی از متغیرها (x یا y) در دسترس باشد، می‌توان با استفاده از معادله $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\dfrac{\dot q}{k}=0$ در حالت پایا، T را برحسب متغیر دیگر نیز به دست آورد.

زمانی‌که دمای گره در دسترس نباشد و بخواهیم دمای آن را به دست بیاوریم، دمای گره برابر میانگینی از گره‌های اطراف خواهد بود:



$$T_x=\frac{1}{4}(T_1+T_2+T_3+T_4)$$

چنانچه گره‌های اطراف عایق باشند، ضریب گره‌های دیگر در اطراف ۲ برابر خواهد شد:

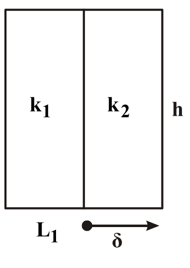


$$T_x=\frac{1}{4}(2T_2+T_1+T_3)$$

با نوشتن مجموعه معادلات و همچنین استفاده از شهود خود، می‌توانید دمای هر گره را به دست بیاورید.

۷ـ شعاع بحرانی عایق

اگر یک دیوار مسطح داشته باشیم و عایق k_2 به ضخامت δ را به آن اضافه کنیم، مقاومت حرارتی برابر است با:



$$R=\frac{L_1}{k_1A}+\frac{\delta}{k_2A}+\frac{1}{hA}$$

استاتیک

فصل دوم

«خرپا»

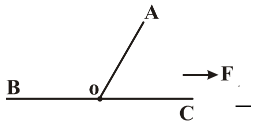
خرپا به سازه‌ای گفته می‌شود که از تعدادی عضو دو نیرویی تشکیل شده باشد؛ نیروهای خارجی فقط در مفاصل اعمال می‌شود و از اثر وزن عضوها در خرپا، صرف‌نظر می‌شود.

۱ـ آنالیز خرپا

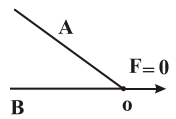
منظور از آنالیز خرپا به‌دست آوردن نیرو در تمامی اعضای خرپا است. دو روش برای این‌کار داریم. یکی روش مفصل‌ها و دیگری روش مقطع. روش مفصل به این‌گونه است که مفاصل را پشت‌سر هم تحلیل می‌کنیم تا تمامی خرپا بررسی شود. برای این‌کار باید از نقطه یا گره‌ای شروع کنیم که دارای یک یا دو نیروی مجهول باشد. در نظرگیری کل خرپا و به‌دست آوردن نیرو در تکیه‌گاه‌ها نیز می‌تواند مفید باشد. روش مقطع به این‌گونه است که با یک برش در خرپا آن را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم و کل قسمت برش زده شده را به‌صورت یک جسم که نیروهای خارجی به آن وارد می‌شود، می‌بینیم. اگر مقطع را از محل مناسب برش بزنیم می‌توان به راحتی نیروهای اجزای خواسته شده را محاسبه کرد.

خواص و نکات در خرپاها

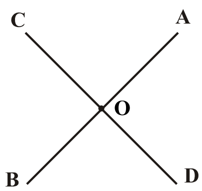
زمانی‌که در خرپا عضوی وجود داشته باشد که نیروی آن برابر صفر باشد، آن عضو را صفر نیرویی می‌نامیم. در شرایط زیر عضوها صفر نیرویی می‌شوند.

۱ـ 

نیروی OA برابر صفر است. با نوشتن تعادل در نقطه‌ی O، ثابت می‌شود.

۲ـ 

در این شکل درصورتی‌که $F=0$ باشد، هم عضو OA و هم عضو OB صفر نیرویی است.



در شکل مقابل نیز این روابط برقرار است:

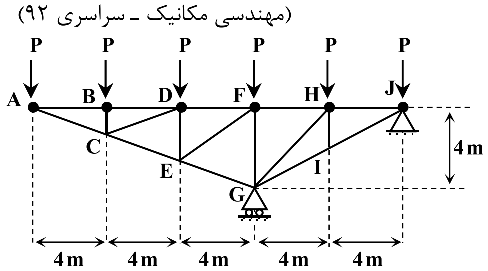
$$F_{CO}=F_{OD}\ ,\ F_{OB}=F_{AO}$$

حل تشریحی مسائل

الگوی حل (۱): تحلیل نیرو

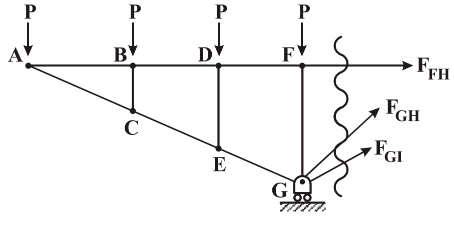
برای حل تست‌های این الگو مباحث مطرح شده در درسنامه را بخوانید و با حل تست‌های بیشتر به تسلط برسید. مثال‌های زیر نمونه‌ای از این الگو می‌باشد.

مثال۱: نیروی داخلی عضو FH، در مکانیزم روبه‌رو، کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۲)



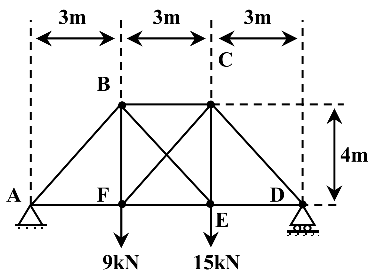
۱) $8P$
۲) $5P$
۳) $6P$
۴) $4P$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» همان‌طور که در شکل می‌بینید، اگر مقطع را از ناحیه‌ی مناسبی برش بزنیم مسئله بسیار آسان حل می‌شود. در این شکل کافیست تا برای باقیمانده خرپا معادله گشتاوری را حول نقطه‌ی G بنویسیم:



$$\sum M_G=0 \Rightarrow (P\times 12)+(P\times 8)+(P\times 4)=(F_{FH}\times 4) \Rightarrow F_{FH}=6P$$

مثال۲: در خرپای زیر، اعضای BE و CF کابل بوده و بدون تماس با یکدیگر کشش را می‌توانند تحمل کنند. کابل .... تحت کشش قرار داشته و عضو AB تحت نیروی .... کیلونیوتن قرار دارد. (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۲)



۱) CF، فشاری $\frac{۶۵}{۴}$

۲) BE، فشاری $\frac{۵۵}{۴}$

۳) CF، کششی $\frac{۵۵}{۴}$

۴) BE، کششی $\frac{۳۳}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اعضای BE و CF کابل هستند. کابل‌ها توانایی تحمل فشار ندارند و فقط کشش را تحمل می‌کنند. بنابراین در حل باید به این نکته توجه کنیم.

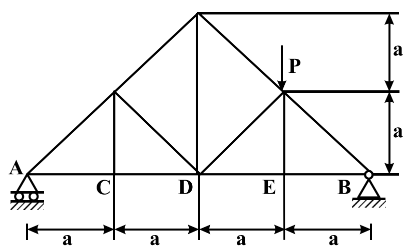
این سبک از سؤال در کنکور سراسری پرتکرار بوده است. توصیه ما به شما استفاده از شهود برای یافتن کابل تحمل‌کننده‌ی بار است، به این معنا که اگر در شکل فوق به نقطه‌ی E نیروی بیشتری نسبت به F وارد شده، بنابراین نسبت به نقطه‌ی F پایین‌تر می‌آید، پس کابل BE برای آنکه از ایجاد اختلاف بیشتر جلوگیری کند وارد عمل می‌شود و نیرو تحمل می‌کند تا نقطه‌ی E بیش از حد پایین نیاید. بدین ترتیب ما با استفاده از شهود خود کابل کششی را تشخیص داده‌ایم. حال برای یافتن نیروی عضو AB باز هم از شهود خود بهره می‌گیریم.

با توجه به آنکه کابل CF نیرویی را تحمل نمی‌کند، بنابراین تمام نیروی ۹KN که به مفصل F وارد شده توسط عضو BF تحمل می‌گردد. پس در مفصل B ما دو نیرو با مؤلفه‌ی روبه سمت پایین داریم. تنها راه خنثی کردن این نیروها آن است که عضو AB فشاری باشد، بنابراین بدون استفاده از حل تشریحی به گزینه‌ی صحیح رسیدیم. در نظر داشته باشید که نمی‌توان مطمئن بود در همه‌ی موارد با استفاده از شهود می‌توان به پاسخ نهایی رسید، لذا به نحوه‌ی حل تشریحی نیز مسلط باشید. استفاده از شهود راهی سریع برای رسیدن به پاسخ نهایی است.

الگوی حل (۲): تعداد عضوهای صفر نیرویی

تشخیص عضوهای صفر نیرویی و به‌دست آوردن تعداد آن‌ها، سبک متداولی از طرح سؤال توسط طراحان کنکور سراسری می‌باشد. در ضمن تشخیص آن‌ها می‌تواند به حل سؤال‌های تحلیل نیرویی خرپا نیز کمک کند. به نکات ارائه شده در درسنامه توجه کنید و مثال زیر را بخوانید.

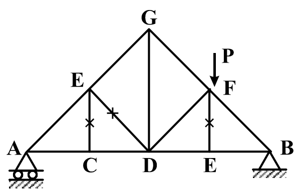
مثال۳: بار P به خرپای زیر وارد می‌شود. نیروی میله CD، کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۷)



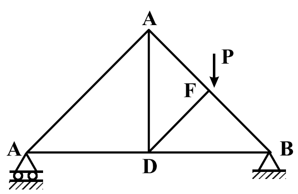
۱) $\frac{-P}{۸}$ ۲) $\frac{-P}{۴}$

۳) $\frac{P}{۸}$ ۴) $\frac{P}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا عضوهای صفر نیرویی را حذف می‌کنیم، پس مسأله راحت‌تر حل می‌شود. عضو EC صفر نیرویی است، پس عضو ED هم صفر نیرویی می‌شود.



در سمت دیگر خرپا تنها عضو EF با توجه به گره E صفر نیرویی است. حالا بار دیگر خرپا را رسم می‌کنیم. ابتدا مسأله را در حالت کلی حل می‌کنیم.



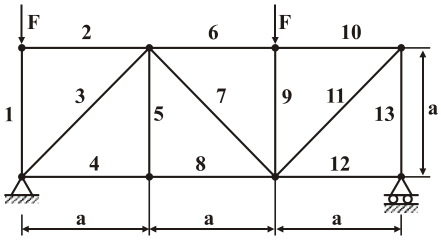
ممان اینرسی حول A : $\sum M_A = ۰ \Rightarrow F_B \times ۴a - p \times ۳a = ۰ \Rightarrow F_B = \frac{۳}{۴}p$

تعادل در جهت عمودی : $\sum F_y = ۰ \Rightarrow F_A = \frac{۱}{۴}p$

حال همه چیز برای محاسبه نهایی آماده شده است.

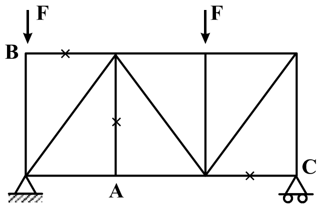
تعادل در گره A $\Rightarrow AD = \tan ۴۵ A_y \Rightarrow AD = \frac{۱}{۴}p$

مثال۴: خرپای زیر توسط ۱۳ میله بنا نهاده شده و مطابق شکل بارگذاری شده است. تعداد میله‌هایی که هیچ باری را تحمل نمی‌کنند، چند عدد است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۷)



۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

پاسخ: گزینه «۲» با استدلال‌های زیر به پاسخ می‌رسیم:

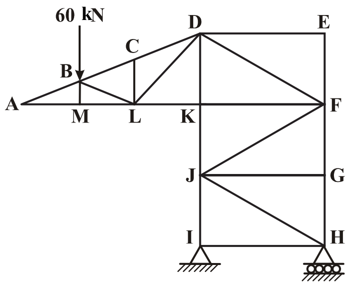


اگر تیر ۵ بار تحمل کند، در گره A نشان داده شده، تعادل برقرار نمی‌شود.

اگر تیر، ۲ نیرو داشته باشد، در گره B تعادل برقرار نمی‌شود.

اگر تیر ۱۲ بار تحمل کند، تعادل در تکیه‌گاه C برقرار نمی‌شود.

مثال۵: در خرپای زیر چند عضو صفر نیرویی وجود دارد؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۴)

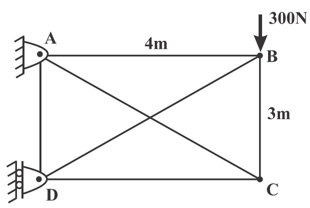


۱) ۶
۲) ۸
۳) ۷
۴) ۹

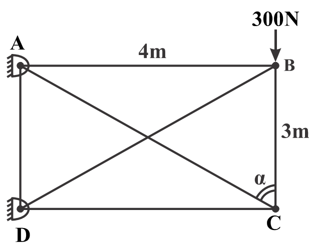
پاسخ: هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. طرح تست غلط در کنکور سراسری ممکن است، پس در مواجهه با این‌گونه سؤال‌ها زمان زیادی را صرف نکنید. خرپای مذکور ۱۱ عضو صفر نیرویی دارد. توجه کنید که عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه I صفر است. حال به معرفی این عضوها می‌پردازیم: به ترتیب اعضای JF , JH , IH , JG , EF , DE , CL , ML , AM , AB , BM صفر نیرویی هستند.

بررسی علت صفر نیرویی بودن بر عهده‌ی خود شماست، با نکات مطرح شده در درسنامه می‌توان به آن‌ها رسید.

مثال۶: قاب زیر از چهار میله و دو طناب AC و BD تشکیل شده است. با فرض اعمال نیروی ۳۰۰N به نقطه B، تعداد اعضای صفر نیرویی چند تا و مجموع نیروی عضوهای کششی چند نیوتن است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۹)



۱) ۲ و ۴۰۰
۲) ۳ و ۵۰۰
۳) ۳ و ۴۰۰
۴) ۲ و ۵۰۰



پاسخ: گزینه «۲» از آنجایی که عضو BD طناب است و فشار تحمل نمی‌کند، بنابراین اولین عضو صفر نیرویی است. طناب AC حتماً دچار کشش می‌شود تا خرپا را نگه دارد. عضوهای BC و CD فشاری خواهند بود. عضوهای AB و AD نیز صفرنیرویی هستند. بنابراین ۳ عضو صفر نیرویی داریم.

در ضمن با تعادل در نقطه C:

$$\left.\begin{array}{l} AC \times \cos\alpha = BC = ۳۰۰N \\ \overset{\Delta}{ABC} : \text{قائم‌الزاویه} \end{array}\right\} \Rightarrow AC = ۵۰۰N$$

مجموع نیروهای کششی برابر ۵۰۰N است.

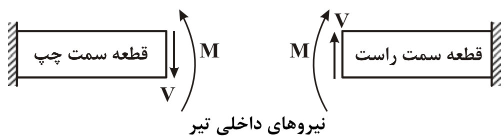
مدرسان شریف

فصل سوم

«تیرها»

۱ـ تعاریف و مقدمه

در بخش‌های قبل نیروهای خارجی و اتصالات را بررسی کردیم. در این بخش به بررسی نیروهای داخلی می‌پردازیم. هدف اصلی این فصل محاسبه نیروهای محوری، برشی و گشتاور خمشی در مقطعی از تیر است. اگر تیری برش زده شود نیروهای داخلی جهت مثبت برطبق قرارداد مطابق شکل زیر نمایش داده می‌شوند:



۲ـ روش برشی برای محاسبه نیروی برشی داخلی و گشتاور داخلی

برای انجام روش برش مراحل زیر را به ترتیب طی می‌کنیم:

۱ـ ابتدا کوپل‌ها و نیروهای عکس‌العمل پایه‌های تیر را به‌دست می‌آوریم.

۲ـ کلیه نیروهای خارجی و عکس‌العمل‌ها را به دو مؤلفه عمود بر تیر و موازی با محور تیر تجزیه می‌کنیم.

۳ـ با توجه به بارگذاری‌های تیر، برش را از مقطعی خاص می‌زنیم تا نهایتاً قسمتی را نگه داریم که محاسبات در آن راحت‌تر باشد.

۴ـ $M(x)$ و $V(x)$ را با توجه به علائم و جهت استاندارد به‌دست می‌آوریم و سپس نمودار را رسم می‌کنیم.

راه ساده‌تر

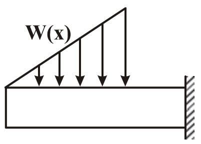
برای برش، فرض کنید یک ناظر بر روی تیر است و به سمتی نگاه می‌کند که می‌خواهیم مقطع را نگه داریم. تمام نیروهایی را که دیده می‌شود، برآیند می‌گیریم. نیروی داخلی در جهت مخالف برآیند نیروها و برابر با همان مقدار است.

برای خمش، باز هم همان ناظر را تصور کنید. مجموع کوپل‌ها را محاسبه کنید. ممان خمشی داخلی برابر با همان مقدار و در جهت مخالف است.

۳ـ تشخیص درستی نمودار برش و خمش با استفاده از روابط

رابطه‌ی بین بارگذاری تیر، نیروی برشی و گشتاور خمشی تیر به‌صورت مقابل می‌باشد:

$$\frac{dV}{dx}=-W \quad , \quad \frac{dM}{dx}=V$$



بنابراین نمودارها باید با روابط بالا هم‌خوانی داشته باشد. برای مثال در شکل روبه‌رو با زیاد شدن X، V به‌صورت سهمی زیاد می‌شود. M به‌صورت درجه ۳ زیاد می‌شود. از این روندها برای آنالیز نمودارهای $V(x)$ و $M(x)$ بهره خواهیم برد.

۴ـ به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم نیروی برشی و گشتاور خمشی در تیر

برای $V(x)$ زمانی اکسترمم داریم که $\frac{dV}{dx}=0$ باشد. طبق تعریف معنای این عبارت این است که نقطه‌ی ماکسیمم یا مینیمم برش زمانی است که $W(x)=0$ می‌شود، یا به عبارتی بار گسترده به صفر می‌رسد. در نقاط وارد شدن نیروی متمرکز نیز این موضوع را بررسی کنید: به همین ترتیب برای $M(x)$ می‌بایست $\frac{dM}{dx}=0$ باشد که معنای آن صفر بودن نیروی برشی در تیر است.

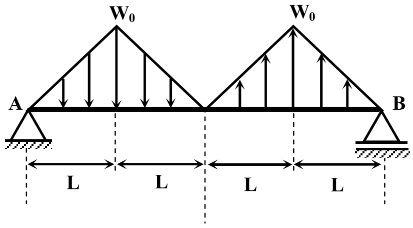
بنابراین زمانی گشتاور خمشی ماکسیمم داریم که برش در تیر صفر باشد. نقاط وارد شدن ممان متمرکز را نیز بررسی کنید.

حل تشریحی مسائل

الگوی حل (۱): گشتاور یا برش حداکثر

به مبانی ارائه شده در درسنامه رجوع کنید. برای گشتاور حداکثر باید $\frac{dM}{dx}=0$ باشد، یعنی $V=0$ شود. برای برش $\frac{dV}{dx}=0$ باشد، یعنی $W=0$ شود. از بررسی نقاطی که بار متمرکز داریم (چه به‌صورت نیرو چه به‌صورت ممان) غافل نشوید.

مثال۱: مقدار گشتاور حداکثر در تیر نشان داده شده تحت بار گسترده کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری۸۸)

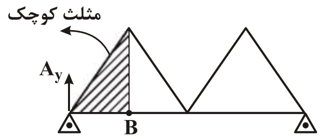


۱) $\frac{1}{2}w_\circ L^2$
۲) $\frac{3}{2}w_\circ L^2$
۳) $\frac{1}{3}w_\circ L^2$
۴) $w_\circ L^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا لازم است نیروهای وارد بر تکیه‌گاه‌ها در تیرها به‌دست آیند:

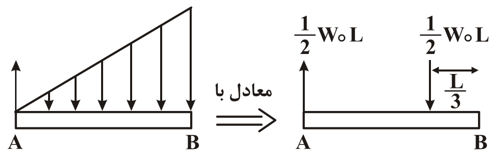
$$\sum M_B=0 \Rightarrow A_y\times 4L-w_\circ L\times 3L+w_\circ L\times L=0 \Rightarrow A_y=\frac{1}{2}w_\circ L$$

حال می‌بایست نقطه‌ای را پیدا کنیم که در آن $V(x)=0$ می‌شود تا آنجا را به‌عنوان نقطه‌ی ماکسیمم گشتاور خمشی اعلام کنیم.



همان‌طور که مشاهده کردید، در محاسبات نیروی A_y برابر $\frac{1}{2}w_\circ L$ محاسبه شد. از طرفی مساحت مثلث هاشورزده نیز برابر با $\frac{1}{2}w_\circ L$ است، پس در نقطه‌ی B، $V_{(x)}=0$ می‌شود.

حال باید ممان را در آن نقطه حساب کنیم:

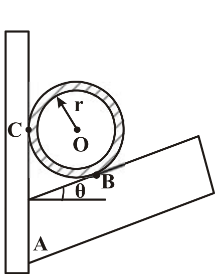


$$\Rightarrow M_{max}=\frac{w_\circ L}{2}\times L-\frac{w_\circ L}{2}\times\frac{L}{3}=\frac{1}{3}w_\circ L^2$$

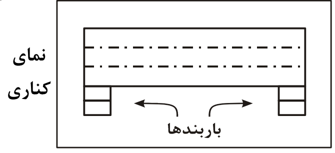
الگوی حل (۲): تحلیل تیر

انتخاب درست نقطه برش و جهت‌های مرجع مهم‌ترین نکته در حل این سؤالات است. به مبانی مسلط شوید و سپس مثال‌ها را مطالعه کنید.

مثال۲: باربند نشان داده شده برای نگه داشتن هریک از دو انتهای لوله‌ای صاف به وزن کلی W مورد استفاده قرار می‌گیرد. گشتاور خمشی ایجاد شده در مقطع A چند برابر Wr است؟ (از تغییر شکل لوله صرف‌نظر شود.) (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۶)



۱) $\frac{1+\sin\theta}{2\cos^2\theta}$
۲) $\frac{1+\cos\theta}{2\cos^2\theta}$
۳) $\frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta}$
۴) $\frac{1+\cos\theta}{\cos^2\theta}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از باربند برای نگه داشتن دو انتهای لوله استفاده شده است. معنی این عبارت این است که لوله توسط دو باربند به دیوار تکیه داده شده است. این به این معنا است که بر روی هر باربند نصف وزن لوله قرار می‌گیرد. مسئله پارامتری است، بنابراین با اسلحه ردگزینه وارد میدان می‌شویم.

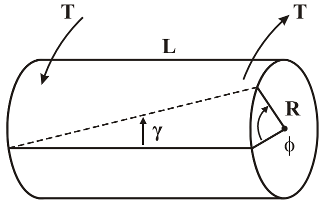
خب ساده‌ترین حالت مسئله چیست؟ بله اگر $\theta=0$ باشد، ساده‌ترین حالت مسئله رخ می‌دهد. اگر $\theta=0$ باشد، گشتاور خمشی در مقطع A برابر $\frac{wr}{2}$ می‌شود؛ پس حاصل گزینه‌ها به ازای $\theta=0$ باید برابر $\frac{1}{2}$ باشد که فقط گزینه (۱) چنین شرایطی را دارا است.

فصل دوم

«پیچش»

۱ــ پیچش در مقاطع دایروی

پیچش: تحت اثر گشتاور در امتداد محور، در اجسام تنش و تغییر شکل حاصل می‌شود. به این گشتاور، گشتاور پیچشی می‌گویند. برای بررسی این پیچش و کمّی کردن آن نیاز است از ابتدا فرضیات خاصی را در بررسی‌هایمان رعایت کنیم.



۱) مقاطع دایروی بعد از پیچش نیز عمود بر محور اصلی باقی می‌مانند.

۲) تغییر کرنش برشی به صورت خطی است، یعنی مقدار γ در طول L ثابت است.

۳) برای حالت الاستیک جسم از رابطه‌ی هوک پیروی می‌کند.

با این فرضیات تنش برشی از رابطه‌ی $\tau = \frac{Tr}{J}$ محاسبه می‌شود که T برابر گشتاور پیچشی است و r شعاع محل قرارگیری المان نسبت به محور میله است.

مقدار J برای مقاطع مختلف در انتهای کتاب آمده است، اما برای مقطع دایروی بسیار مهم است که آن را حفظ باشید و مقدار آن برابر با $J = \frac{1}{2}\pi R^4$ یا $J = \frac{1}{32}\pi D^4$ می‌باشد. برای یک لوله مقدار J برابر با $\frac{1}{32}\pi(D_2^2 - D_1^2)$ است. برای مقدار زاویه پیچش طبق شکل بالا $\gamma L = R\phi$ است، از طرفی $\gamma = \frac{\tau}{G}$ می‌باشد، در نتیجه $\phi = \frac{TL}{GJ}$ است.

در صورتی‌که گشتاور پیچشی و یا سطح مقطع میله متغیر باشد، زاویه پیچش از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)dx}{GJ(x)}$$

مانند فصل قبل که میله تحت بار محوری را با یک فنر مدلسازی کردیم، الان نیز به همان روش محور تحت پیچش را با یک فنر مدل می‌کنیم.

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \Rightarrow T = \frac{GJ}{L}.\phi \Rightarrow \frac{GJ}{L} = K_t$$

اگر گشتاور پیچشی گسترده‌ای بر روی میله‌ای یکنواخت داشتیم، عبارت روبه‌رو زاویه پیچش را محاسبه می‌کند:

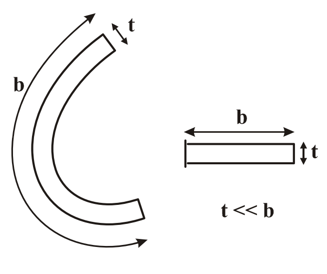
$$\phi = \int_0^L \frac{xq(x)}{GJ}dx$$

۲ــ مقاطع جدار نازک

مقاطع جدار نازک به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱) جدار نازک باز ۲) جدار نازک بسته

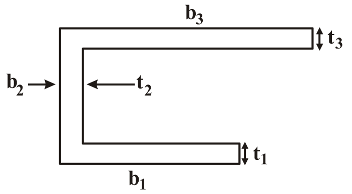
جدار نازک باز: اگر ضخامت مقدار ثابت t باشد، طول آن L باشد و عرض مقطع برابر b باشد، عبارات زیر برقرار هستند.



$$\tau = \frac{Tt}{J} \quad , \quad \phi = \frac{TL}{GJ} \quad , \quad J = \frac{1}{3}t^3 b$$

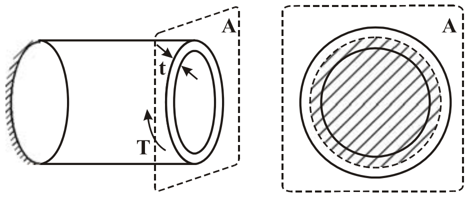
لازم به ذکر است که طول L به سمت داخل است و در شکل دیده نمی‌شود.

اگر چند مقطع در کنار هم قرار داشته باشند، مانند شکل روبه‌رو مقدار J از عبارت زیر حساب می‌شود:



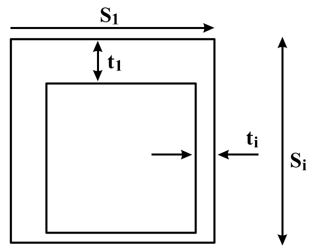
$$J = \frac{1}{3}\sum b_i t_i^3$$

جدار نازک بسته: A مساحت محصور بین منحنی بسته‌ای است که از وسط ضخامت سطح مقطع عبور می‌کند. در این صورت مقدارهای زیر به‌دست می‌آیند:



$$\tau = \frac{T}{2At} \qquad \phi = \frac{TL}{GJ}$$

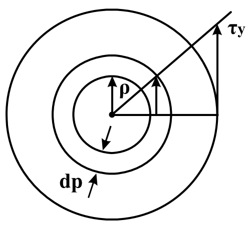
حال برای این مقاطع باید J را تعریف کنیم. J به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$J = \frac{4A^2}{\int \frac{ds}{t}} \xrightarrow{\text{که در آن}} \int \frac{ds}{t} = \sum \frac{s_i}{t_i}$$

۳ـ پیچش پلاستیک

در لبه‌ی مقطع همیشه بیشترین تنش برشی را داریم. τ_y مقدار نهایی این تنش می‌باشد، از آن به بعد رفتار میله رفتار پلاستیک خواهد شد. گشتاوری که باعث می‌شود لبه‌ی میله به تنش τ_y برسد را T_y می‌نامیم و به طریق زیر محاسبه می‌شود. در المان نشان داده شده در شکل گشتاور برشی برابر با dT_y است. با انتگرال‌گیری روی کل سطح T_y به‌دست می‌آید.

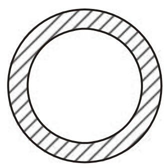


$$dT_y = \tau\rho dA \Rightarrow T_y = \int_0^R 2\pi \frac{\tau_y}{R}\rho^3 d\rho \Rightarrow T_y = \frac{1}{2}\pi R^3 \tau_y$$

T_p گشتاوری است که در آن تمام سطح مقطع وارد ناحیه پلاستیک می‌شود و مقدار آن برابر با $T_p = \frac{4}{3}T_y$ به‌دست می‌آید.

حل تشریحی مسائل

الگوی حل (۱): تنش در اثر پیچش در جدار نازک‌ها

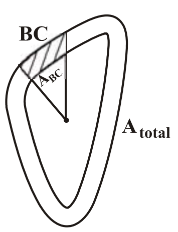


نکات لازم برای حل مسئله در درسنامه ارائه شده است. نکات کوچک را نیز برای حل مسائل به خاطر داشته باشید.

برای دایره جدار نازک داریم:

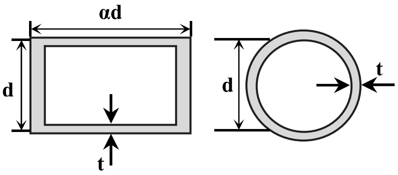
$$J = 2\pi r^3 t$$

در مقطع زیر گشتاور پیچشی که قسمت BC تحمل می‌کند از رابطه $T_{BC} = \frac{A_{BC}}{A_{total}}T$ به‌دست می‌آید.



مثال ۱: دو محور جدار نازک یکی با مقطع دایره به قطر میانگین d و دیگری با مقطع مستطیل به ابعاد میانگین d و αd که ضخامت هر دوی آنها t می‌باشد، تحت اثر گشتاور پیچشی T قرار گرفته‌اند. مقدار α چقدر باشد تا تنش برشی بیشینه وارد بر هر دو محور یکسان باشد؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۸)



۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$

۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مقطع‌های داده شده جدار نازک بسته می‌باشند. بنابراین تنش در آن‌ها از رابطه‌ی $\tau=\frac{T}{۲A_t}$ به‌دست می‌آید، بنابراین:

$$\tau_۱=\tau_۲ \Rightarrow \frac{T}{۲A_{۱t}}=\frac{T}{۲A_{۲t}} \Rightarrow A_۱=A_۲ \Rightarrow \frac{\pi}{۴}d^۲=\alpha d\times d \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{۴}$$

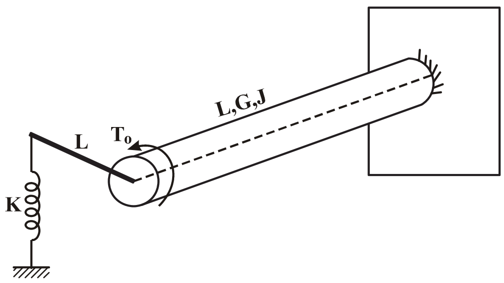
◆ ◆ ◆ ◆

الگوی حل (۲): K معادل

این سبک از سؤال در فصل پیچش بسیار متداول است. کافی است تا با مفهوم K معادل و روابط آن آشنا باشید تا بتوانید مسائل مربوط را حل کنید. تبدیل فنر خطی به فنر پیچشی و به عکس ممکن است در مسائل به ما کمک کنند.

$$K_{\text{پیچشی}}=K_t=K_{\text{خطی}}\times(\text{فاصله فنر خطی از فنر پیچشی})^۲=K_{\text{خطی}}\times r^۲$$

مثال ۲: میل‌گردان زیر با مقطع دایره توسط یک میله صلب به طول L به فنری با سختی k متصل شده است. میل گردان تحت گشتاور پیچشی $T_\circ$ در انتها قرار می‌گیرد. زاویه چرخش انتهای آن چقدر است؟ (مدول برش G و ممان اینرسی قطبی مقطع J است.) (مهندسی مکانیک ـ سراسری۹۴)



۱) $\frac{۲T_\circ L}{GJ+kL^۳}$ ۲) $\frac{T_\circ L}{GJ}$

۳) $\frac{T_\circ L}{GJ+kL^۳}$ ۴) $\frac{۲T_\circ L}{۲GJ+۳kL^۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌توان مسئله را به شکل دو فنر پیچشی موازی مدل کرد.

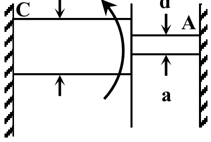
$$\begin{cases}\text{فنر۱: فنر خطی در فاصله } L \Rightarrow K_{t_۱}=KL^۲\\ \text{فنر۲: محور در حال پیچش} \Rightarrow K_{t_۲}=\frac{GJ}{L}\end{cases} \Rightarrow K_{total}=KL^۲+\frac{GJ}{L}$$

$$T=K_{total}\times\phi \Rightarrow T_\circ=(KL^۲+\frac{GJ}{L})\phi \Rightarrow \phi=\frac{T_\circ L}{GJ+KL^۳}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۳: محور ABC با قطر d در فاصله‌ی AB و $۲d$ در فاصله‌ی BC در دو انتها به تکیه‌گاه صلبی جوش شده، و در نقطه‌ی B تحت گشتاور پیچشی T قرار گرفته است. برای این که دو تکیه‌گاه گشتاور مساوی تحمل کنند، نسبت $\frac{a}{L}$ چقدر باید باشد؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۲)



۱) $\frac{۱}{۱۷}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

پاسخ: گزینه «۱» از آنجایی که صفحه B بین هر دو میله مشترک است، مقدار چرخش این صفحه به هر دو محور اعمال می‌شود؛ بنابراین:

$$\phi_{AB}=\phi_{BC}$$

$$\phi=\frac{T}{K_t}\Rightarrow\frac{T_{AB}}{K_{t_{AB}}}=\frac{T_{BC}}{K_{t_{BC}}}$$

از طرفی می‌خواهیم $T_{AB}=T_{BC}$ باشد، در نتیجه می‌توان نوشت:

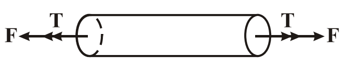
$$K_{t_{BC}}=K_{t_{AB}}\Rightarrow\frac{G_{AB}J_{AB}}{L_{AB}}=\frac{G_{BC}J_{BC}}{L_{BC}}$$

$$\Rightarrow\frac{J_{AB}}{L_{AB}}=\frac{J_{BC}}{L_{BC}}\Rightarrow\frac{\frac{\pi}{۳۲}d^۴}{a}=\frac{\frac{\pi}{۳۲}(۲d)^۴}{L-a}\Rightarrow ۱۶a=L-a\Rightarrow\frac{L}{a}-۱=۱۶\Rightarrow\frac{L}{a}=۱۷\Rightarrow\frac{a}{L}=\frac{۱}{۱۷}$$

الگوی حل (۳): محاسبات تنش

نکات لازم برای محاسبه محاسبات تنش در درسنامه ارائه شده است. آن را مطالعه کنید و از اطلاعات فصل اول برای محاسبه کمک بگیرید.

مثال ۴: میله توپری به طول L و سطح مقطع دایروی به شعاع r تحت اثر گشتاور پیچشی T و بار محوری F در دو انتهاست. اختلاف بین بیشترین و کمترین تنش برشی بیشینه در سطح مقطع، کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۶)



۱) $\frac{Tr}{J}+\frac{۱}{۲}\sqrt{(\frac{F}{A})^۲+(\frac{۲Tr}{J})^۲}$

۲) $\frac{۱}{۲}\sqrt{(\frac{F}{A})^۲+(\frac{۲Tr}{J})^۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{(\frac{F}{A})^۲+(\frac{۲Tr}{J})^۲}-\frac{F}{A})$

۴) $\frac{۱}{۲}\frac{F}{A}$

پاسخ: گزینه «۳» این تست را به سادگی می‌توان با روش‌های رد گزینه حل کرد. به‌طورکلی هر زمانی که با گزینه‌های پارامتری مواجه شدید می‌توانید امیدوار باشید که شاید سؤال با روش‌های رد گزینه حل شود. مهم‌ترین مسئله این است که شما به فیزیک و مکانیک مسئله آشنا باشید.

با توجه به آنکه مسئله از ما اختلاف بیشترین و کمترین تنش برشی را خواسته است، بنابراین باید این نقاط را شناسایی کنیم. تنش برشی در هیچ جای مقطع صفر نیست. در مرکز مقطع، ما نیروی کششی داریم که این نیروی کششی حتی اگر باعث ایجاد شدن صرفاً تنش کششی باشد، با توجه به دایره مور، در آن المان تنش برشی نیز خواهیم داشت. در باقی مقطع نیز پیچش اثر برشی خود را نشان خواهد داد. بنابراین گزینه‌ای جواب است که حاصل اختلاف دو مقدار مثبت باشد. تنها گزینه با این ویژگی گزینه (۳) است.

مثال ۵: یک محور استوانه‌ای که از جنس ترد می‌باشد، تحت اثر نیروی محوری ۵۰ کیلونیوتن و گشتاور پیچشی ۳۷۶ نیوتن – متر قرار گرفته است. اگر قطر محور ۶۰ میلی‌متر باشد، زاویه صفحهٔ شکست نسبت به امتداد محور تقریباً چند درجه است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۵)

۱) ۹۰

۲) ۶۷/۵

۳) ۴۵

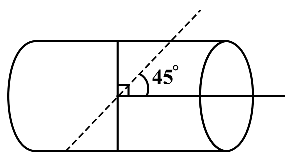
۴) ۲۲/۵

$$\sigma_\theta=\sigma_x\cos^۲\theta+\sigma_y\sin^۲\theta+۲\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

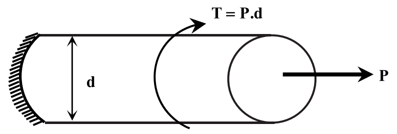
$$\tau_\theta=-(\sigma_x-\sigma_y)\sin\theta\cos\theta+\tau_{xy}(\cos^۲\theta-\sin^۲\theta)$$

پاسخ: گزینه «۲» این تست را بدون دخالت دست و خودکار حل می‌کنیم.

برای جنس ترد محوری که تحت پیچش خالص باشد، در زاویه ۴۵° و محوری که تحت کشش خالص باشد با توجه به شکل در ۹۰° می‌شکنند. حال که بارگذاری حالتی بین این دو دارد، بنابراین زاویه شکست نیز بین ۴۵° تا ۹۰° باید باشد. تنها گزینه (۲) به این موضوع اشاره دارد.



مثال ۶: میله زیر، بار محوری P و کوپل پیچشی T = P.d را تحمل می‌کند. مقدار مجاز P بر اساس معیار تسلیم ترسکا (Tresca) و ضریب اطمینان ۲ چقدر است؟ (تنش تسلیم جنس میله Y می‌باشد.) (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۰)



۱) $\frac{\pi d^{2}Y}{4\sqrt{20}}$ ۲) $\frac{\pi d^{2}Y}{8\sqrt{20}}$

۳) $\frac{\pi d^{2}Y}{4\sqrt{65}}$ ۴) $\frac{\pi d^{2}Y}{4\sqrt{260}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مقطع بحرانی در میله بر روی سطح آن قرار دارد. تنش در هر المان دلخواه واقع بر روی سطح خارجی، ناشی از نیروی محوری P و لنگر پیچشی T است.

$$\begin{cases} J=\frac{\pi d^{4}}{32} \\ T=Pd \end{cases} \Rightarrow \tau=\frac{TR}{J}=\frac{16T}{\pi d^{3}} \Rightarrow \tau=\frac{16P}{\pi d^{2}}\ ,\ \sigma=\frac{P}{A}=\frac{4P}{\pi d^{2}}$$

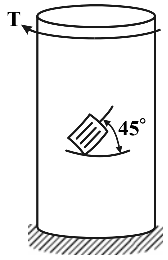
از طرفی تنش برشی ماکزیمم برابر شعاع دایره مور است. با توجه به اینکه $\sigma_y=0$ است، پس داریم:

$$\tau_{max}=\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^{2}+\tau_{xy}^{2}}=\sqrt{(\frac{\sigma}{2})^{2}+(\tau)^{2}}=\frac{P}{\pi d^{2}}\sqrt{260}$$

از ما خواسته شده است که بر طبق معیار ترسکا ضریب اطمینان را لحاظ کنیم و P را بیابیم.

$$\begin{cases} n=\frac{s_{sy}}{\tau_{max}} \\ S_{sy}=0/5Y \end{cases} \Rightarrow 2=\frac{\frac{Y}{2}}{\frac{P\sqrt{260}}{\pi d^{2}}} \Rightarrow P=\frac{Y\pi d^{2}}{4\sqrt{260}}$$

مثال ۷: میله‌ای با مقطع دایره‌ای به شعاع 1cm، تحت گشتاور پیچشی T = 30 N.m قرار دارد. میله از ماده‌ای با E = 200GPa و G = 80GPa ساخته شده است. کرنش‌سنج نصب شده روی سطح میله، چه عددی را نشان می‌دهد؟ ($\pi = 3$ فرض شود) (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۷)



۱) -10^{-4}

۲) -125×10^{-6}

۳) 125×10^{-6}

۴) 10^{-4}

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» جسم نشان داده شده فقط تحت اثر پیچش قرار گرفته است. بنابراین در آن فقط کرنش پیچشی ایجاد می‌شود.

از فرمول روبه‌رو استفاده می‌کنیم:

$$\varepsilon'_x=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\theta+\frac{\gamma_{xy}\sin 2\theta}{2}$$

$$\varepsilon_x=0\ ,\ \varepsilon_y=0\ ,\ \gamma_{xy}=\frac{\tau}{G}=\frac{Tr}{JG}=\frac{-30\times0/01}{\frac{1}{2}\pi(0/01)^{4}\times80\times10^{9}}=-2/5\times10^{-4}$$

$$\Rightarrow \varepsilon'_x=\frac{-2/5\times10^{-4}}{2}=-1/25\times10^{-4}=-125\times10^{-6}$$

علامت منفی از جهت وارد شدن T به میله به‌دست آمده است.

طراحی اجزاء

مدرسان شریف

فصل دوم

«طراحی اتصالات»

در فصل دوم با طراحی اتصالات دائمی و غیردائمی و همچنین پیچ‌های قدرت آشنا می‌شویم. در ابتدا با پیچ‌ها که شامل بخش‌های پیچ‌های قدرت (در جک‌ها) و همچنین اتصالات بین آنها است، آشنا می‌شویم. سپس به مبحث جوش و اصول طراحی با جوش می‌پردازیم. مبحث طراحی اتصالات در حدود ۵ الی ۲۰ درصد از سؤالات کنکور را شامل می‌شود که همه بخش‌ها مانند تنش وارده به یک پیچ در یک قطعه، بارگذاری مرکب در پیچ‌ها و ضریب اطمینان جوش که از مباحث پرتکرار در کنکور هستند را نیز دربرمی‌گیرد.

فرمول‌های این فصل در حد معمول (نه خیلی زیاد و نه خیلی کم) هستند و تلاش می‌کنیم تا بر فرمول‌های ضروری تأکید شود.

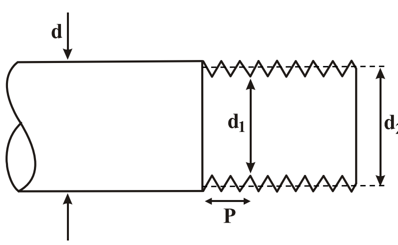
این فصل به دو قسمت کلی الف) پیچ، پین و خار و ب) جوش تقسیم می‌شود.

پیچ، پین و خارها

در این فصل با مقاومت پیچ‌ها، پیچ‌های قدرت و بازده آن‌ها و خارها و اتصالات مرکب آشنا می‌شویم. چنانچه قصد خواندن قسمتی از این فصل را دارید، حتماً قسمت اتصالات مرکب را مطالعه کنید.

۱ــ پیچ

به میزان پیشروی طولی پیچ به ازای هر دور چرخاندن آن، گام پیچ گفته می‌شود و آن را با P نشان می‌دهیم.



پیچ‌ها می‌توانند یک‌راهه، دوراهه یا چندراهه باشند که با (n) نمایش داده می‌شوند.

چنانچه پیچی چندراهه باشد، پیش روی کلی آن در تعداد راه‌های پیچ ضرب می‌شود و برابر nP خواهد بود. $(\ell = nP)$

d قطر بزرگ، $d_۱$ کوچک‌ترین قطر پیچ (قطر دایره ریشه) و $d_۲$ قطر متوسط پیچ می‌باشد. پیچ‌ها را براساس قطر بزرگ نام‌گذاری می‌کنند. مثلاً وقتی پیچی $M۱۲$ است، قطر بزرگ (d) آن $۱۲mm$ است. گاهی گام پیچ را هم همراه با آن می‌نویسند $(M۱۲ \times ۱/۷۵)$: گام ۱/۷۵ میلی‌متر.

۲ــ مقاومت پیچ

درجه پیچ به‌صورت کلی $\frac{M}{N}$ تعریف می‌شود که:

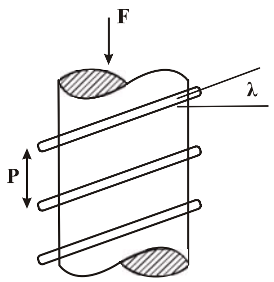
$$S_{ut} = M \times ۱۰۰ MPa \ , \ S_y = \frac{N}{۱۰} \times S_{ut}$$

به‌عنوان مثال پیچی با درجه ۶/۸ دارای $S_{ut} = ۶۰۰ MPa$ و $S_y = ۰/۸ \times ۶۰۰ = ۴۸۰ MPa$ است.

مقاومت گواه (S_p): مقاومت گواه، تنش نهایی است که پیچ تا قبل از رسیدن به آن، تغییر شکل پلاستیک نداشته باشد. مقاومت گواه از رابطه $S_p = ۰/۸۵ S_y$ حاصل می‌شود. برای محاسبه تنش روی پیچ نیروی وارد بر آن را بر سطح مقطع دایروی پیچ تا قطر متوسط تقسیم می‌کنیم.

۳ــ پیچ‌های قدرت

پیچ‌های قدرت برای بالا یا پایین بردن استفاده می‌شود. بدین صورت که با چرخاندن پیچ، جابه‌جایی انتقالی حاصل می‌شود.

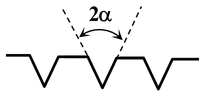


$$\tan\lambda = \frac{\ell}{\pi d_m}$$

گشتاور بالارونده (T_R) و پایین‌رونده (T_L) برای پیچ قدرت از این رابطه‌ها به‌دست می‌آید:

$$T_R = \frac{F.d_m}{۲}\left(\frac{\ell + \pi\mu.d_m}{\pi d_m - \mu\ell}\right) \ , \ T_L = \frac{F.d_m}{۲}\left(\frac{\pi\mu d_m - \ell}{\pi d_m + \mu\ell}\right)$$

F مقدار بار، d_m قطر متوسط، ℓ مقدار پیشروی و μ ضریب اصطکاک است. در پیچ قدرت ACME، μ به‌صورت $\frac{\mu}{\cos\alpha}$ ظاهر می‌شود و به نوعی تأثیر نیروی اصطکاک بیشتر می‌شود.

پیچ قدرت ACME: 

پیچ قدرت مربعی: 

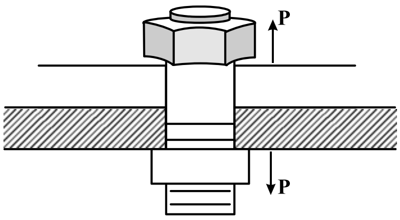
خودقفلی: اگر T_L منفی یا صفر باشد، پیچ بدون اعمال گشتاور به سمت پایین حرکت می‌کند که نامطلوب است. پیچ باید در محل تعیین شده قرار بگیـرد که به آن خودقفلی می‌گویند. برای خودقفلی که مطلوب ما است باید:

$$\pi\mu d_m > \ell \Rightarrow \mu > \tan\lambda$$

بازدهی پیچ قدرت: به‌دلیل وجود اصطکاک، برای پیچ‌های قدرت بازدهی تعریف می‌شود که برابر است با:

$$\eta = \frac{T_{\text{در حالت بدون اصطکاک}}}{T_R} = \frac{T(\mu = ۰)}{T_R} = \frac{F\ell}{۲\pi T_R}$$

۴ــ پیچ‌های اتصال‌دهنده



نیروی وارده بر پیچ و اعضا به این صورت به‌دست می‌آید:

نیروی وارد بر پیچ $\quad F_b = \frac{K_b}{K_b + K_m} P + F_i$

نیروی وارد بر اعضا $\quad F_m = \frac{K_m}{K_b + K_m} P - F_i$

F_i نیروی پیش‌بار می‌باشد که حین سفت کردن پیچ به‌وجود می‌آید. K_b سختی پیچ و K_m سختی اعضا است. به $C = \frac{K_b}{K_b + K_m}$ شاخص پیچ گفته می‌شود.

افزایش پیش‌بار (F_i) باعث می‌شود نیرو و تنش بیشتری روی پیچ بیفتد و F_m خیلی کوچک نشان‌دهنده ضعف طراحی است.

$$F_b = CP + F_i$$
$$F_m = (۱ - C)P - F_i$$

در بارگذاری‌های دینامیکی اعمال پیش‌بار مطلوب است، چرا که باعث کاهش دامنه و افزایش طول عمـر مـی‌شـود. سـختی پـیچ از رابطـه $K_b = \frac{A_t E_b}{L_b}$ به‌دست می‌آید که A_t مساحت کششی، L_b طول قسمت رزوه شده و E_b مدول یانگ می‌باشد.

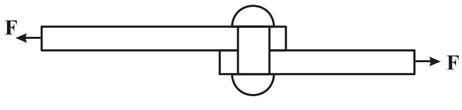
از لحاظ محاسباتی، سختی پیچ مانند سختی فنر (k) است و روابط سری و موازی فنرها را می‌توانید در صورت نیاز برای آن بـه کـار ببریـد. بـرای محاسـبه ضریب اطمینان σ_b را به‌دست آورده و S_p را بر آن تقسیم کنید.

$$n = \frac{S_p}{\sigma_b}$$

σ_b تنش وارد بر پیچ است که از تقسیم F_b بر مساحت پیچ حاصل می‌شود.

۵ــ پرچ‌ها

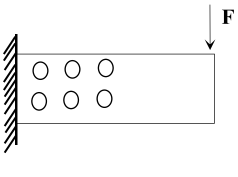
پرچ‌ها اصولاً اتصالاتی دائمی هستند و محاسبه تنش برشی در آن‌ها معیار طراحی است.



برای محاسبه تنش برشی کافی است نیروی وارد بر مجموعه را بر مساحت و تعداد پرچ‌ها تقسیم کنیم:

$$\tau = \frac{F}{NA}$$

۶ــ اتصالات مرکب



این بخش، مهم‌ترین قسمت فصل می‌باشد. سؤال کلی به این صورت است که نیرویی برشی همراه با خمش به مجموعه‌ای از پرچ‌ها وارد می‌شود و می‌خواهیم تنش بیشینه و یا ضریب اطمینان را برای آن به‌دست آوریم.

برای محاسبه تنش کافی است نیروی وارد بر پرچ موردنظر را به‌دست آوریم و نیرو را بر مساحت پرچ تقسیم کنیم. نیروی F بین n پرچ تقسیم می‌شود، پس $\frac{F}{n}$ نیروی وارد بر هر پرچ می‌شود. اما این نیرو تولید گشتاور خمشی هم می‌کند.

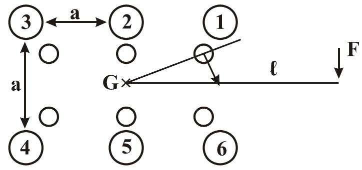
الگوی حل (۱)

نحوه یافتن تنش در یک پرچ مشخص در اتصال مرکب:

۱ـ ابتدا محل مرکز سطح مجموعه اتصالات را مشخص کنید. (نقطه G)

۲ـ با استفاده از رابطه $M = F\ell$ ممان خمشی را در نقطه G بیابید.

۳ـ با استفاده از رابطه $F_n = \frac{Mr_n}{r_1^2 + r_2^2 + \cdots}$ نیروی ناشی از خمش روی پرچ دلخواه n را بیابید. دقت کنید که r_i، فاصله پرچ iام از مرکز سطح G است. در شکل اگر طول ضلع هر مربع a باشد، $r_1 = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}}$ به‌دست می‌آید.



۴ـ راستای نیروی وارد بر هر پرچ عمود بر راستای خط واصل پرچ و مرکز سطح است.

۵ـ برای به‌دست آوردن جهت روی این راستا از شهود استفاده کنید. مثلاً نیروی روبه پایین F می‌خواهد پرچ ۱ را به سمت پایین جدا کند و یا به پرچ شماره ۳ نیرویی به سمت بالا (و کمی متمایل به راست) وارد می‌کند.

۶ـ نیروی به‌دست آمده را با $\frac{F}{n}$ جمع برداری کنید و با تقسیم بر مساحت پرچ، تنش روی آن را بیابید.

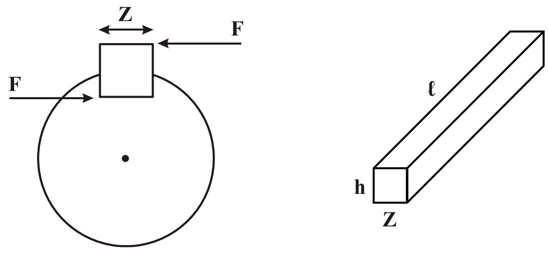
۷ـ خار

معیار طراحی خار تنش برشی و لهیدگی می‌باشد. با توجه به شکل داریم:

$$\text{تنش برشی} = \frac{F}{Z\ell} \quad , \quad \text{تنش لهیدگی} = \frac{2F}{h\ell}$$

همچنین درصورتی‌که گشتاور T به محور وارد شود، داریم:

$$Fh = T$$

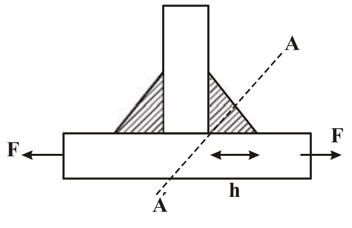


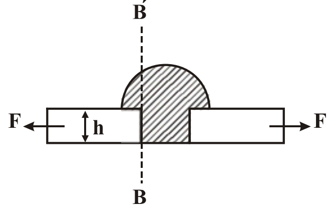
جوش

جوشکاری از انواع اتصالات دائم است. متداول‌ترین نوع جوش، جوشکاری با قوس الکتریکی است. در جوشکاری عموماً با تنش برشی سروکار داریم و بیشینه تنش برشی را که در کوچک‌ترین سطح مقطع رخ می‌دهد محاسبه می‌کنیم. در جوش نواری (شکل سمت چپ)، کمترین سطح مقطع در قسمت AA' و در جوش لب به لب (شکل سمت راست)، کمترین سطح مقطع، قسمت BB' است. ℓ طول جوش است.

$$\tau_{AA'} = \tau_{max} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\sqrt{2}}{2}h\ell} = \frac{F}{0/7h\ell}$$

$$\tau_{BB'} = \frac{F}{A} = \frac{F}{h\ell}$$





برای محاسبه تنش برشی جوش نیرو بر مساحت کوچک‌ترین سطح مقطع جوش تقسیم می‌شود. گشتاور پیچشی (نیروی ناشی از پیچش) هم باعث به وجود آمدن تنش برشی روی جوش می‌شود:

$$\tau = \frac{Tr}{J} = \frac{Tr}{0/7hJ_u}$$

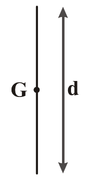
مقدار J_u ممان اینرسی قطبی پیچشی جوش است و از جداول به‌دست می‌آید و به هندسه جوش بستگی دارد. تنش ناشی از پیچش با تنش برشی باید جمع برداری شود. به‌همین ترتیب نرمال ناشی از خمش برای جوش تعریف می‌شود که به این صورت به‌دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{Mr}{I} = \frac{Mr}{۰/۷hI_u}$$

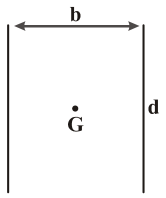
I_u ممان اینرسی سطح جوش برای خمش می‌باشد.

چنانچه به یک قطعه مجموعه‌ای از بارگذاری‌ها اعمال شود با دایره مور، حداکثر تنش برشی را به‌دست آورید و براساس معیار ترسکا طراحی کنید. روابط زیر مقادیر J_u و I_u برای برخی مقاطع مهم را نشان می‌دهد.

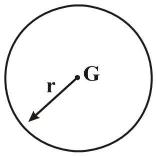
نیازی به حفظ کردن دیگر مقادیر J_u و I_u جز موارد ذکر شده در زیر نیست.



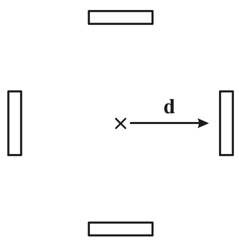
$$A = ۰/۷hd \ ،\ J_u = \frac{d^۳}{۱۲} \ ،\ I_u = \frac{d^۳}{۱۲}$$



$$A = ۱/۴۱hd \ ،\ J_u = \frac{d(۳b^۲ + d^۲)}{۶} \ ،\ I_u = \frac{d^۳}{۶}$$



$$A = ۱/۴۱\pi hr \ ،\ J_u = ۲\pi r^۳ \ ،\ I_u = \pi r^۳$$



نکته۱: در صورت فاصله گرفتن جوش از مرکز سطح جوش‌ها عبارت $Ad^۲$ به مقدار J اضافه می‌شود.

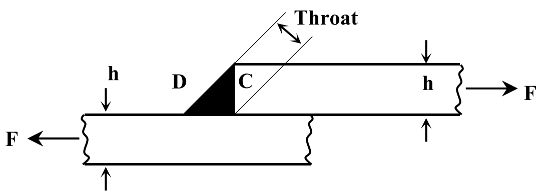
$$J = ۰/۷hJ_u + Ad^۲$$

در جوشکاری تنش مجاز برحسب نوع بارگذاری به‌صورت ضرایبی از S_y تعیین می‌شود. مثلاً برای بارگذاری کششی و فشاری تنش مجاز $۰/۶S_y$ و بارگذاری برشی $۰/۴S_y$ است.

حل تشریحی مسائل

مثال۱: در جوش نشان داده شده h اندازه ساق و L طول جوش می‌باشد. معمولاً طراحی این نوع جوش براساس تنش برشی $\frac{\sqrt{۲}F}{h.L}$ می‌باشد. زیرا:

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۷)



۱) این مقدار بیشترین تنش اصلی می‌باشد.

۲) تنش فون میسز در سطح گلویی BD برابر $\frac{\sqrt{۲}F}{h.L}$ می‌باشد.

۳) تنش برشی ماکزیمم در سطح گلویی BD برابر $\frac{\sqrt{۲}F}{h.L}$ می‌باشد.

۴) این مقدار تقسیم نیروی F به سطح گلویی به دست می‌آید که از تنش برشی ماکزیمم بیشتر تداخل و محافظه‌کارانه می‌باشد.

پاسخ: گزینه «۴» بررسی کردیم که برای جوش‌ها میزان تنش برشی در کوچک‌ترین مقطع را در نظر می‌گیریم که برای به‌دست آوردن تنش برشی نیروی F بر سطح $۰/۷hL$ تقسیم می‌شود. پس گزینه (۴) صحیح است.

مقــدمه دینامیک

درس دینامیک پایه و نیاز اصلی کلیه دروس مجموعه دینامیک و ارتعاشات است. مباحث درس مکانیک به‌صورت مستقیم و غیرمستقیم در تمامی سؤالات این مجموعه نقش دارند. تمامی داوطلبان از زمان دبیرستان با این درس آشنا هستند. سؤالات و مفاهیم این درس نسبت به دروس دیگر کنکور بیشتر قابل درک هستند؛ همین مسئله باعث شده است تا برای ایجاد فضای رقابتی سؤالات آن متنوع‌تر و سخت‌تر از دروس دیگر باشند. داوطلبان زیادی وجود دارند که این درس را به دلیل وقت‌گیر بودن یا سختی یا کمبود وقت مطالعه کنار می‌گذارند. در این بخش از کتاب تلاش می‌کنیم تا با هم در زمانی کوتاه به درک خوبی از درس دینامیک برسیم. بسیاری از تست‌های درس دینامیک را می‌توان به سادگی با جایگذاری در فرمولی ساده و یا استفاده از گزینه‌ها (بدون نوشتن و با استفاده از شهود) حل کرد. نکته کلیدی در این درس، استفاده از شهود و درک کافی از مسأله است که در فصول پیش‌رو تلاش می‌کنیم آن را برای حل سؤالات کنکور تقویت کنیم.

در ابتدا خلاصه‌ای از مفاهیم اولیه را بیان می‌کنیم که به‌صورت مستقیم در سال‌های اخیر سؤالی از آن‌ها نیامده است. این مفاهیم بیشتر در رابطه با جبر برداری است و تسلط بر آن‌ها برای حل سؤالات مربوط به مباحث دیگر الزامی است.

فصل دوم در رابطه با سینماتیک یا سرعت‌شناسی ذره‌هاست. در این کتاب و به‌طور کلی درس دینامیک هر زمان که با کلمه ذره مواجه شدید، یعنی جسمی با ابعاد ناچیز و با جرم متمرکز را به‌صورت نقطه‌ای در نظر می‌گیریم. یادگیری این مبحث مقدمه‌ای برای درک فصل سوم یعنی سینتیک ذره‌ها است.

در فصل سینتیک ذره‌ها علاوه بر سرعت و شتاب، با نیرو، تکانه، قضیه کار و انرژی و به‌طور کلی مدل‌سازی یک مسئله دینامیکی سروکار داریم. این فصل مهم‌ترین فصل دینامیک از لحاظ مفاهیم و زیربنای اساسی آن است.

فصل چهارم در رابطه با سینماتیک اجسام صلب است. هر بار با اجسام غیر از ذره سروکار داشته باشیم، یعنی جسمی را با ابعاد و جرم فرض کنیم و جرمش به‌صورت نقطه‌ای نباشد، به آن به‌جای ذره، لفظ «جسم صلب» اطلاق می‌شود. زمانی که از روش‌های ترسیمی سرعت یا شتاب یک میله را به‌دست می‌آورید، دقیقاً از درک خود از این فصل استفاده می‌کنید.

فصل سوم و پنجم پرسؤال‌ترین فصول دینامیک هستند. این دو فصل مجموعاً ۸۰ درصد سؤالات دینامیک را شامل می‌شوند. در این فصل نیروها، گشتاورها، تکانه‌های خطی و زاویه‌ای، ممان اینرسی و غلتش و به‌طور کلی تحلیل اجسام با ابعاد را بررسی می‌کنیم.

دینامیک ۳ بعدی، کاربرد قضایای قبلی در ۳ بعد است و مبحث جدیدی نیست. طراحان در سال‌های اخیر به‌صورت موردی روی این فصل مانور داده‌اند. استفاده مناسب از شهود، کلید حل این مسائل است.

دینامیک حرکات نوسانی مقدمه‌ای بر درس دیگر این مجموعه ارتعاشات است. در سال‌های اخیر تنها یک سؤال ساده از آن در سال ۸۹ آمده است.

در قسمت بالا با مفاهیم هر فصل آشنا شدیم. جدول زیر توزیع سؤالات هر فصل را در ۱۳ سال اخیر (۸۷ تا ۹۹) نشان می‌دهد. سینماتیک ذره تا حدی مورد توجه طراحان بوده است و در برخی سال‌ها یک سؤال از آن آمده است. فصل سینتیک ذره مهم‌ترین فصل دینامیک به تنهایی ۴۰% سؤالات را تشکیل می‌دهد. در سال‌های ۸۷، ۸۸، ۸۹ و ۹۷ یک سؤال و در سال‌های دیگر از ۲ تا ۴ سؤال از ۵ سؤال دینامیک از این فصل بوده است. سینماتیک اجسام صلب در سال ۸۷ یک سؤال داشته است و تا قبل از سال ۹۵ هیچ سؤالی از آن نیامده بود. طراحان نشان دادند که می‌توانند به سنت‌ها وفادار نباشند و در سال ۹۷ دو سؤال از آن داده شد و در سال‌های اخیر نیز به آن توجه شده است. اهمیت فصل پنجم هم مانند فصل ۳ مشخص است و همه ساله از آن سؤال آمده است. دینامیک ۳ بعدی در سال‌های ۹۲، ۹۴ و ۹۶ یک سؤال داشته است و فصل آخر هم یک سؤال ساده در سال ۸۹ داشته است که به راحتی قابل حل بوده است.

فصل‌ها	تعداد سؤالات
فصل اول: مفاهیم اولیه	۰
فصل دوم: سینماتیک ذره	۷
فصل سوم: سینتیک ذره	۲۳
فصل چهارم: سینماتیک اجسام صلب	۷
فصل پنجم: سینتیک اجسام صلب	۲۵
فصل ششم: دینامیک سه‌بعدی	۳
فصل هفتم: دینامیک حرکات نوسانی	۱

مدرسان شریف

فصل اول

«مفاهیم اولیه»

در این فصل ابتدا با مفاهیم کلی آشنا می‌شویم و سپس جبر برداری و انواع عملیات برداری مختصراً معرفی می‌شوند. همچنین شعاع یک مسیر منحنی را معرفی می‌کنیم که حتی در درس ریاضی ۲ هم کاربرد دارد. همانند فرمت کلی کتاب، پس از درسنامه تست‌های رد گزینه یا تست‌هایی که با راه‌حل‌های هوشمند حل می‌شوند گردآوری می‌شوند و سپس به حل تست‌های تشریحی می‌پردازیم؛ از این فصل تستی در کنکور نیامده است، بنابراین بیشتر جنبه یادآوری، خلاصه و زمینه‌سازی برای فصل‌های آتی دارد.

۱ـ مقدمه

جرم (mass): مقدار لختی و مقاومت جسم در برابر تغییر سرعت را می‌گویند که آن را با m نمایش می‌دهیم.

ذره: به هر جرم که ابعاد آن در نظر گرفته نشود و به‌صورت نقطه‌ای فرض شود، ذره گفته می‌شود.

زمانی‌که ابعاد یک جسم اهمیت نداشته باشد یا قابل صرف‌نظر کردن باشد، ذره فرض می‌شود. مثلاً جسمی جعبه‌ای به جرم m را که با سرعت ثابت بدون وجود نیرویی پیش می‌رود، می‌توانیم ذره فرض کنیم، چرا که ابعاد آن در حرکت، اهمیتی ندارد.

جسم صلب: هرگاه ابعاد یک جسم اهمیت پیدا کند، دیگر ذره نیست و به آن جسم می‌گوییم. جسم صلب یعنی با وجود نیروها، خود جسم تغییر شکل پیدا نکند. تیری که تحت نیروها تغییر شکل نمی‌دهد یا دیسکی که روی زمین می‌غلتد، مثال‌هایی از جسم صلب‌اند.

۲ـ قوانین نیوتن

قانون اول: اگر برآیند نیروهای وارد بر جسمی صفر باشد، جسم ساکن می‌ماند یا با سرعتی که دارد به مسیر ادامه می‌دهد و به نوعی شتاب نمی‌گیرد.

قانون دوم: اگر به جسم نیرویی وارد شود، در آن جهت شتاب می‌گیرد که از رابطه $\vec{F} = m\vec{a}$ پیروی می‌کند.

قانون سوم: برای هر نیرو، عکس‌العملی در خلاف جهت آن وجود دارد.

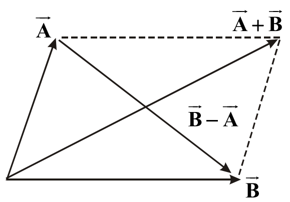
یک سؤال بنیادی: چرا وقتی عمل و عکس‌العمل داریم و در خلاف جهت هم هستند همدیگر را خنثی نمی‌کنند؟ چون این دو نیرو به دو جسم وارد می‌شوند و نه یک جسم. اگر با دست خود به دیوار نیرو وارد کنیم، نیروی عکس‌العمل به دست ما و در خلاف جهت وارد می‌شود.

۳ـ جبر بردارها

۱ـ بردار: به هر کمیت که علاوه بر مقدار جهت داشته باشد، بردار گفته می‌شود؛ مانند نیرو، سرعت، شتاب، گشتاور و به هر کمیتی که فقط مقدار داشته باشد، اسکالر می‌گویند، مانند زمان، جرم، دما و ... .

۲ـ اندازه بردار: اگر برداری را در فضا به‌صورت $\vec{A} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ نشان دهیم، اندازه آن از رابطه $|A| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ به‌دست می‌آید.

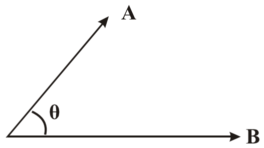
۳ـ جمع و تفاضل بردارها: برای اینکه تشخیص دهید جمع یا تفریق بردارها را درست نمایش می‌دهید، از شهود خود استفاده کنید. وقتی می‌گوییم $\vec{B} - \vec{A}$ بردار حاصل باید از جمع $\vec{B}$ و $(-\vec{A})$ حاصل شده باشد.



۴ـ ضرب دو بردار

اکنون دو نوع از عملیات ضربی برداری را بررسی می‌کنیم.

۱ـ ضرب داخلی: ضرب داخلی یا اسکالر که به‌صورت $\vec{A}.\vec{B}$ نمایش داده می‌شود، حاصل یک عدد است. نمونه‌ای از ضرب داخلی $w=\vec{F}.\vec{d}$ یعنی کار مساوی نیروی ضرب داخلی در جابه‌جایی است و مقدار آن برابر است با:

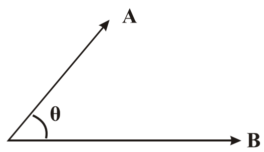


$$A=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k} \quad , \quad \vec{A}.\vec{B}=|A||B|\cos\theta$$

یا

$$B=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k} \quad , \quad \vec{A}.\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

۲ـ ضرب خارجی: حاصل آن یک بردار است و جهت آن عمود بر دو برداری است که در هم ضرب می‌شوند و آن را با علامت $\times$ نشان می‌دهند. محاسبه گشتاور از رابطه $\tau=\vec{r}\times\vec{F}$ یک نمونه کاربردی است:



$$|A\times B|=|A||B|\sin\theta$$

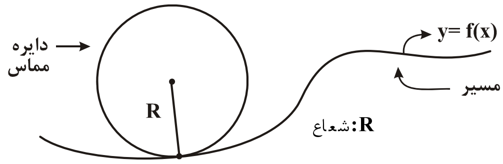
$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=(A_yB_z-B_yA_z)\hat{i}-(A_xB_z-A_zB_x)\hat{j}+(A_xB_y-B_xA_y)\hat{k}$$

برای پیدا کردن جهت بردار حاصل از ضرب خارجی ۴ انگشت دست (به غیر از شصت) را در راستای بردار اول قرار دهید، چهار انگشت خود را در جهت بردار خم کنید. شصت دست شما جهت بردار حاصل را نشان می‌دهد (قانون دست راست).

با مفاهیم اولیه برداری آشنا شدیم. این بخش حکم گرم کردن و یادآوری را داشته است. اکنون به بررسی مبحث مهم شعاع مسیر می‌پردازیم.

۵ـ شعاع مسیر

فرض کنیم ذره‌ای در مسیری خاص حرکت می‌کند. در هر مکان از حرکت، اگر یک دایره رسم کنیم که بر مسیر مماس باشد، شعاع این دایره برابر با شعاع مسیر است و دانستن مقدار آن برای حل برخی از مسائل ضروری است.



شعاع دایره از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{R}=\frac{y''}{(۱+y'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

همواره در تحلیل مسائل به بُعد (Dimension) عبارت‌ها دقت کنید. به‌طور مثال در عبارت فوق، بُعد y'' برابر یک بر روی طول است. معکوس شعاع نیز دارای همین ابعاد است. توجه به نکات زیر در تعیین شعاع نیز می‌تواند مفید باشد.

۱ـ ذره‌ای که روی مسیر صاف می‌رود، شعاع مسیرش بی‌نهایت است.

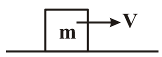
۲ـ ذره‌ای که روی دایره می‌چرخد، شعاع مسیرش شعاع همان دایره است.

مدرسان شریف

فصل دوم

«سینماتیک ذره»

موضوع مورد بحث در این فصل، سرعت‌شناسی ذره است. حرکت جسم را صرفاً انتقالی فرض می‌کنیم و از دوران یک جسم حول خودش یا حرکت نسبی اجزای یک جسم نسبت به هم صرف‌نظر می‌کنیم، چراکه جسم را در این مسائل می‌توان ذره در نظر گرفت. حال یا ابعاد آن کوچک است و در مسئله ذکر می‌شود یا ابعاد جسم اهمیتی ندارد، مانند جسمی مکعبی که حرکت انتقالی دارد.



اکنون درسنامه این فصل را با هم می‌خوانیم. بخش اعظم این درسنامه برای داوطلبان از زمان دبیرستان آشناست.

ابتدا به سراغ حرکت مستقیم‌الخط (حرکت در یک راستای ثابت) می‌رویم. جهت حرکت ذره ثابت است و در این راستای مشخص ذره می‌تواند شتاب بگیرد.

۱ـ حرکت مستقیم‌الخط

سرعت: جابه‌جایی ذره در واحد زمان را می‌گویند:

الف ـ سرعت متوسط: جابه‌جایی در یک بازه زمانی که از رابطه $\bar{V}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ به‌دست می‌آید.

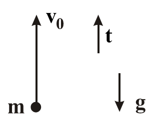
ب ـ سرعت لحظه‌ای: چنانچه در رابطه بالا $\Delta t \to 0$ برود، سرعت لحظه‌ای حاصل می‌شود و سرعت ذره در لحظه را نشان می‌دهد، مانند سرعت‌سنج خودرو.

شتاب: تغییرات سرعت در واحد زمان را شتاب می‌گوییم.

می‌توانیم مانند سرعت متوسط و لحظه‌ای، شتاب متوسط و لحظه‌ای به‌صورت $\bar{a}=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ و $a=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ تعریف کنیم. شتاب می‌تواند متغیر باشد، مانند خودرویی که در مسیر گاز می‌دهد یا ترمز می‌کند! مثال آشکار حرکت با شتاب ثابت، حرکت ذره در گرانش زمین است که شتاب g به سمت زمین است. نمونه‌ای از حرکت بدون شتاب ذره‌ای است که در فضا بدون تأثیر ستاره یا جرم حرکت می‌کند. اکنون روابط حرکت مستقیم‌الخط را با هم مرور می‌کنیم.

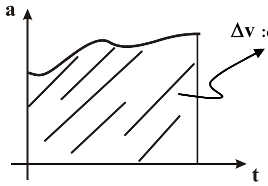
۲ـ حرکت با شتاب ثابت

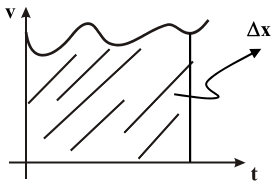
ابتدا برای حرکت یک جهت مثبت انتخاب می‌کنیم. اگر هر کدام از پارامترهای جابه‌جایی (Δx)، سرعت (v) و شتاب (a) در جهت مثبت قرار بگیرند، مقداری مثبت و در غیر این صورت مقداری منفی دارند. می‌دانیم $a=\dfrac{dv}{dt}$ و $v=\dfrac{dx}{dt}$ است. با انتگرال‌گیری و جایگذاری شرایط اولیه به رابطه $\Delta x=\dfrac{1}{2}at^2+v_0t$ می‌رسیم که t زمان گذشته از لحظه آغاز (لحظه صفر) است. در این روابط می‌توان به‌جای a، g قرار داد. فقط به علامت‌ها دقت کنید. اگر جهت مثبت را رو به بالا بگیریم، بردار شتاب که به سمت زمین است، منفی خواهد بود و اگر جسم فرضاً به سمت بالا پرت شود، v_0 هم مثبت خواهد بود.



۳ـ حرکت با شتاب متغیر

در این بخش باید از روابط $a=\dfrac{dv}{dt}$ و $v=\dfrac{dx}{dt}$ در صورتی که امکان‌پذیر باشد، انتگرال گرفت و نمی‌توان رابطه‌ای مشخص مانند بخش قبل به‌دست آورد. برای حل، در صورتی که $a(t)$ یا $v(t)$ در دسترس باشد، می‌توان از روابط $v=\int a\,dt$ و $x=\int v\,dt$ انتگرال‌گیری کرد. اگر ممکن بود، زمان‌های محاسبه را به بازه‌های با شتاب ثابت بشکنید، مثلاً اگر ذره‌ای از ثانیه ۰ تا ۲ شتاب مثبت ثابت، از زمان ۲ تا ۵ بدون شتاب و از زمان ۵ تا ۷ شتاب منفی بگیرد، می‌توانیم زمان‌های محاسبه را به این ۳ بازه بشکنیم. می‌دانیم انتگرال یک تابع، مساحت زیرمنحنی آن است. پس مساحت زیرنمودار $v-t$ انتگرال تابع v در زمان است که برابر با جابه‌جایی است. به همین ترتیب، مساحت زیرنمودار $a-t$ برابر تغییرات سرعت است.





۴ـ رابطه بسیار مهم: حذف زمان از معادلات

گاهی در صورتی که از زمان سؤال نشده باشد و $a(x)$ یعنی شتاب برحسب مکان را داشته باشیم، می‌توانیم چنین عمل کنیم:

$$\begin{cases} a = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow dt = \dfrac{dv}{a} \\ v = \dfrac{dx}{dt} \end{cases}$$

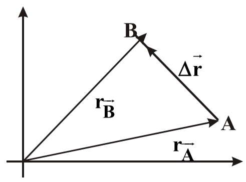
با جایگذاری dt در رابطه بالا داریم:

$$v = \frac{dx}{\frac{dv}{a}} \Rightarrow \mathbf{vdv = adx} \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \int adx$$

با انتگرال‌گیری از رابطه بالا می‌توان سرعت را برحسب مکان به‌دست آورد. در صورتی که $a(x)$ را داشته باشیم، برای حرکت با شتاب ثابت $a = g$. پس می‌توانیم به‌دست آوریم: $v^2 - v_0^2 = 2g\Delta x$

به‌طور کلی حرکت مستقیم‌الخط به‌صورت مستقیم مدنظر طراحان کنکور نبوده است. این بخش زیربنای مبحث تکانه خطّی و حرکت منحنی‌الخط است.

۵ـ حرکت منحنی‌الخط



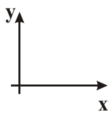
۱) جهت حرکت هم علاوه بر اندازه سرعت می‌تواند تغییر کند. تغییر جهت سرعت نیز باعث شتاب می‌شود.

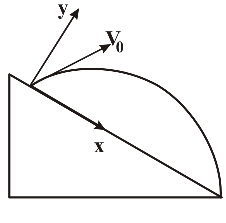
۲) $\vec{V} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ (مماس بر مسیر)

۳) تعریف شتاب هم به‌صورت تعریف سرعت $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$ است.

در حرکت منحنی‌الخط نیاز به دو محور مختصات برای توصیف حرکت داریم. این حرکت را می‌توان در دستگاه‌های مختلف توصیف کرد که اکنون به معرفی این دستگاه‌ها و کاربردشان می‌پردازیم. دستگاه‌های کارتزین، مختصات مماسی و نرمال و مختصات قطبی معروف‌ترین دستگاه‌های مختصات‌اند.

۶ـ مختصات کارتزین (x,y)

۱) محورهای y و x آشنا به صورت  معروف‌ترین نوع مختصات کارتزین‌اند.

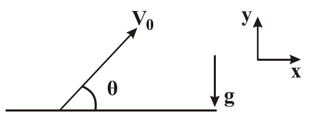


۲) محورهای مختصات کارتزین ثابت‌اند و با حرکت جسم عوض نمی‌شوند.

۳) مشخص کردن جهت مثبت هر محور فراموش نشود. هر دو محور دلخواهی را می‌توان به عنوان محورهای مختصات انتخاب کرد و لزومی ندارد بر هم عمود باشند.

۴) مهم‌ترین کاربرد این دستگاه، حرکت پرتابه و سطح شیبدار می‌باشد.

کار با این دستگاه ساده است. روابط حرکت منحنی‌الخط را برای هر محور جداگانه و مستقلاً بنویسید، یعنی در راستای x شتاب x را قرار دهید و در راستای y شتاب y را.



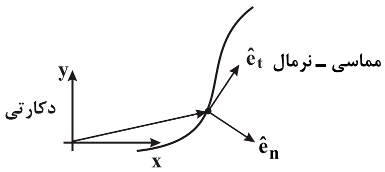
مثلاً اگر پرتابه ساده را در نظر بگیریم:

شتاب محور x، صفر و شتاب محور y برابر با $-g$ خواهد بود.

$$a(t) = \ddot{x}(t)\hat{i} + \ddot{y}(t)\hat{j} \Rightarrow |a| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}\ ,\ \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \Rightarrow \vec{v}(t) = \dot{x}(t)\hat{i} + \dot{y}(t)\hat{j} \Rightarrow |v| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

زمانی که با شتاب با جهت ثابت (مثلاً شتاب گرانش) در مسئله روبه‌رو شدیم، مختصات کارتزین بهترین خواهد بود؛ چراکه شتاب را در جهت مورد نظر می‌نویسیم و از روابط حرکت مستقیم‌الخط استفاده می‌کنیم. حال به معرفی عمومی‌ترین مختصات کاربردی، یعنی مختصات مماسی‌ـ نرمال می‌پردازیم. همان‌طور که از اسمش پیدا است، یک محور مماس و یک محور عمود بر مسیر داریم.

۷ـ مختصات مماسی ـ نرمال (t مماسی و n عمودی)



۱) یک محور مماس بر مسیر و یک محور عمود بر آن داریم. S مسافت طی شده بر روی منحنی نسبت به مبدأ است.

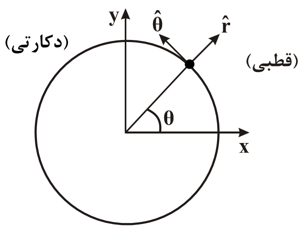
۲) $|v| = \dot{s}\ ,\ \vec{V} = v\hat{e}_t$

۳) $\vec{a} = \dot{v}\hat{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{e}_n$ که ρ شعاع انحنای مسیر است.

در فصل قبل، شعاع انحنای مسیر را معرفی کردیم و گفتیم در برخی مسائل نیاز می‌شود. مختصات مماسی ـ نرمال یک نمونه از آن است که برای محاسبه شتاب به شعاع نیاز داریم. شعاع انحنای مسیر از رابطه $\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ یا $\rho = \frac{|v|^3}{|v \times a|}$ به‌دست می‌آید.

جهت محورهای مختصات مماسی ـ نرمال عوض می‌شود، پس در مسیرهایی که جهت شتاب عوض می‌شود یا مسیرهایی که دایره‌ای یا مستقیم‌الخط نیستند یا مهم‌تر از همه مسیر معادله‌ای مشخص و غیرخطی دارند (مانند $y = x^2$ یا مسیر مثلثاتی دلخواه)، از این مختصات استفاده می‌شود که قابلیت تعریف حرکت به عمومی‌ترین شکل ممکن را دارد. اکنون به معرفی مختصات قطبی (دایره‌ای) می‌پردازیم.

۸ـ مختصات قطبی (r,θ)



۱) این مختصات زمانی به کار می‌رود که ذره مقید به حرکت روی دایره باشد.

۲) سرعت در مختصات قطبی به‌صورت بردار $v = \dot{r}\ \hat{r} + r\dot{\theta}\ \hat{\theta}$ می‌باشد.

۳) شتاب نیز به‌صورت $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$ است.

$\dot{r}$: سرعت شعاعی (سرعت دور شدن ذره از مرکز دایره)، $\dot{\theta}$: سرعت زاویه‌ای، $\ddot{r}$: تغییر مقدار سرعت شعاعی، $r\dot{\theta}^2$: شتاب جانب مرکز، $r\ddot{\theta}$: شتاب ناشی از شتاب زاویه‌ای و $2\dot{r}\dot{\theta}$: شتاب کوریولیس است. در آخرین بخش این فصل حرکت نسبی را معرفی می‌کنیم که گاهی مدنظر طراحان بوده است.

۹ـ حرکت نسبی

دو جسم A و B را در نظر بگیرید. جسم A، دارای سرعت و شتاب دلخواه V_A و a_A و جسم B، دارای سرعت و شتاب دلخواه V_B و a_B هستند. $\vec{r}_{\frac{A}{B}}$ مکان ذره A نسبت به ذره B است.

۱) مستقیم الخط: در حرکت مستقیم‌الخط راستای سرعت‌ها و شتاب‌ها برای دو جسم یکسان است و از روابط روبه‌رو به‌دست می‌آید. $\dot{r}_A = \dot{r}_B + \dot{r}_{\frac{A}{B}}$

در حرکت مستقیم‌الخط، $\dot{r}_{\frac{A}{B}}$ همان $v_{\frac{A}{B}}$ است. $v_{rel} = v_A - v_B \quad , \quad a_{rel} = a_A - a_B$

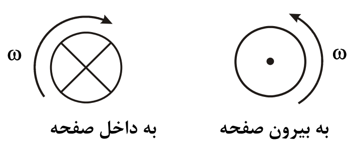
۲) منحنی‌الخط (دستگاه مختصات چرخان): در حرکت منحنی‌الخط، راستاهای حرکت دلخواه است. $\vec{\omega}$ سرعت زاویه‌ای دستگاه می‌باشد.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\frac{A}{B}} + \vec{v}_{rel}$$

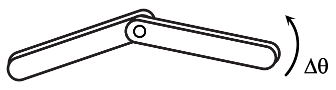
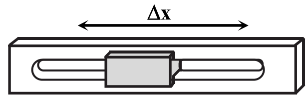
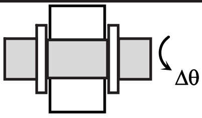
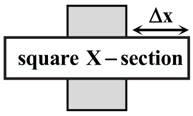
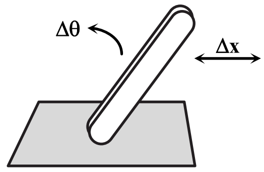
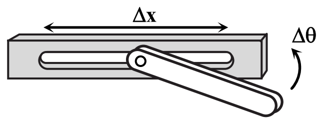
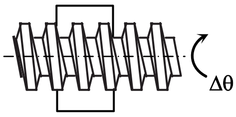
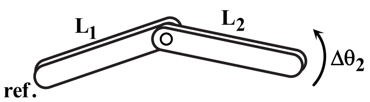
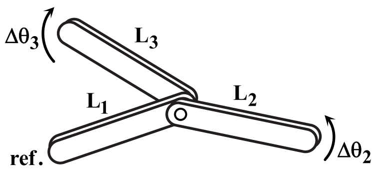
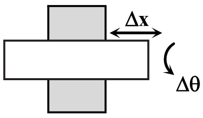
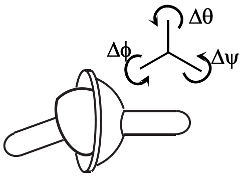
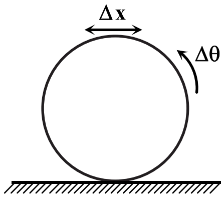
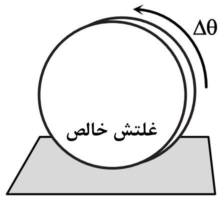
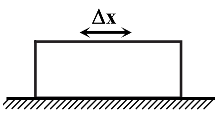
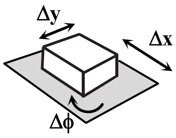
$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{شتاب زاویه‌ای}}}{\vec{\alpha}} \times \vec{r}_{\frac{A}{B}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\frac{A}{B}}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

v_{rel} سرعت نسبی است. بردارهای سرعت v_A و v_B را اگر از هم کم کنیم v_{rel} به دست می‌آید و با $v_{\frac{A}{B}}$ فرق دارد. چرا که $\vec{v}_A - \vec{v}_B = v_{\frac{A}{B}} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{\frac{A}{B}} + \vec{v}_{rel}$، مگر آنکه حرکت مستقیم‌الخط باشد. در سؤال‌ها وقتی شتاب یا سرعت دو جسم نسبت به هم خواسته می‌شود، منظور $\vec{v}_{\frac{A}{B}}$ و $\vec{a}_{\frac{A}{B}}$ است و دقت کنید اشتباهاً $\vec{v}_{rel}$ یا $\vec{a}_{rel}$ را به عنوان پاسخ اعلام نکنید.

برای پیدا کردن جهت $\vec{\omega}$ یا $\vec{\alpha}$ دست راست خود را طوری قرار دهید که جهت بسته شدن مشت دست در جهت گردش ω یا α باشد و در این صورت، شست دست جهت بردار را نشان می‌دهد.



انواع اتصالات و درجه آزادی‌های مقید شونده

اتصالات مرتبه بالا	اتصالات مرتبه پایین
 اتصال مفصلی  اتصال لغزشی «اتصال یک درجه آزادی»	 جفت چرخشی ـ یک درجه آزادی  جفت لغزشی ـ یک درجه آزادی
  «اتصال غلتشی ـ لغزشی ـ اتصال دو درجه آزادی»	 جفت مارپیچی ـ یک درجه آزادی
  « تعداد درجات آزادی برابر تعداد اعضای متصل به هم منهای یک »	 جفت استوانه‌ای ـ دو درجه آزادی  جفت کروی ـ سه درجه آزادی
 غلتش همراه لغزش  غلتش خالص  لغزش خالص «غلتش خالص یا لغزش خالص (یک درجه آزادی) ـ غلتش همراه با لغزش دو درجه آزادی»	 جفت سطحی ـ سه درجه آزادی شش جفت مرتبه پایین

۲ـ محاسبه درجه آزادی

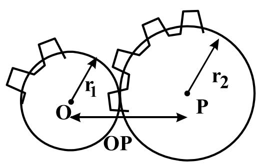
برای محاسبه تعداد درجات آزادی یک مکانیزم از رابطه کوتزباخ استفاده می‌کنیم. رابطه کوتزباخ به شرح زیر است.

$$DOF_p = \text{تعداد درجات آزادی مکانیزم‌های صفحه‌ای} = ۳(n-۱)-۲f_۱-f_۲$$

$$DOF_s = \text{تعداد درجات آزادی مکانیزم‌های فضایی} = ۶(n-۱)-۵f_۱-۴f_۲-۳f_۳-۲f_۴-f_۵$$

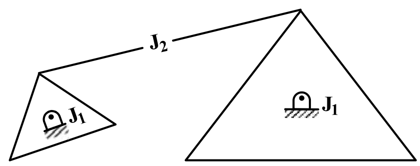
n در رابطه بالا بیانگر تعداد لینک‌های مکانیزم است. f_i (یعنی $f_۱, f_۲$ و ...) بیانگر تعداد درجه آزادی‌هایی است که یک اتصال دارد. i،f_i درجه آزادی را به سیستم می‌دهد. اتصالات یک درجه را $J_۱$، دو درجه را $J_۲$ و i درجه را J_i می‌نامند. دقت کنید که در محاسبه تعداد لینک زمین را هم ۱ لینک بشمارید.

در مکانیزم‌های صفحه‌ای، اتصال بین دو چرخدنده $J_۲$ است. به طور کلی اگر فاصله‌ی خط‌المرکزین محور دوران آن دو عضو متصل برابر با مجموع شعاع محل تماس دو عضو باشد، اتصال $J_۲$ است، علی‌رغم آنکه غلتش خالص داریم. تسمه‌ها و زنجیرها نیز $J_۲$ هستند.



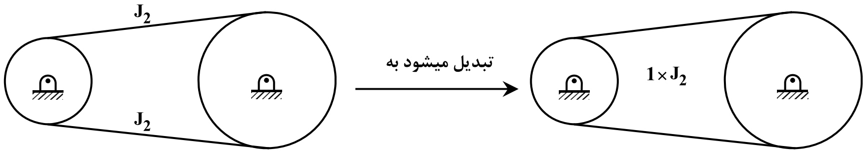
$$r_۱ + r_۲ = OP$$

$$DOF = ۳(۳-۱)-۲\times۲-۱=۱$$

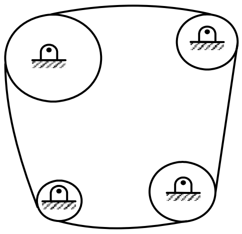


$$DOF = ۳(۳-۱)-۲\times۲-۱=۱$$

اگر طول تسمه در اثر اتصال تغییر نکند، به ازای هر تسمه، یک درجه آزادی را حساب نمی‌کنیم. در شکل بالا طول تسمه در اثر حرکت تغییر می‌کند؛ اما در روبه‌رو تغییر نمی‌کند. بنابراین داریم:

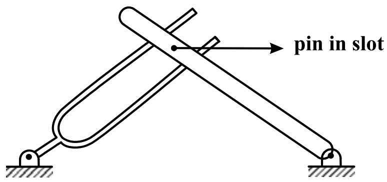


بر طبق همین موضوع اگر تعداد k پولی توسط مته پوشانده شود، تعداد $(k-۱)J_۲$ درجه آزادی از سیستم گرفته می‌شود. یعنی به ازای تسمه‌ی کشیده شده روی پولی‌ها، یک درجه سلب شده را حساب نکردیم:



$$(۴-۱)\times J_۲ = ۳J_۲$$

اتصال چنگکی یا pin in slot، $J_۲$ درنظر گرفته می‌شود. حواسمان باشد فنر، نه درجه آزادی از سیستم کم می‌کند و نه به آن اضافه می‌کند.



۳ـ انتقال حرکت

انتقال حرکت به سه روش ممکن است:

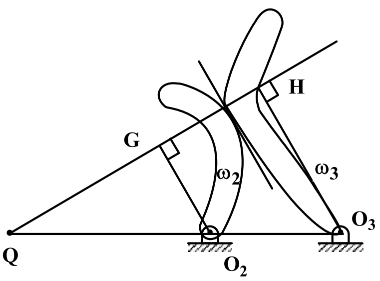
الف) انتقال حرکت با یک عضو میانی ب) انتقال به وسیله اتصالات ج) انتقال به وسیله اتصال سیستم دو عضو و لغزش آن‌ها روی هم

شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید. می‌خواهیم با فرض داشتن $\omega_۳$، $\omega_۲$ را به‌دست آوریم.

از روابط به دست می‌آید که:

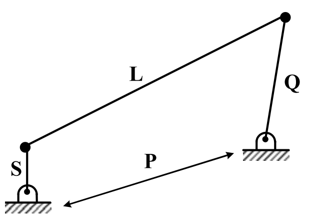
$$\frac{\omega_۲}{\omega_۳} = \frac{O_۳Q}{O_۲Q} = \frac{O_۳H}{O_۲G}$$

از این رابطه برای انتقال سرعت استفاده می‌کنیم.



۴ـ مکانیزم چهارمیله‌ای

مکانیزم‌هایی با ۴ لینک را مکانیزم‌های ۴ میله‌ای می‌نامند. اگر عضو ثابت متحرک شود و یکی از عضوهای متحرک، ثابت شود، مکانیزم وارون ایجاد می‌شود. شکل زیر را نگاه کنید. طول کوچک‌ترین عضو را S بنامید. طول بزرگ‌ترین عضو را L در نظر بگیرید. طول دو عضو دیگر را P و Q بنامید. برقراری شرایط $L+S \le P+Q$ از نظر طولی، چرخش کامل یکی از عضوها که S باشد را تضمین می‌کند. اگر برقرار نباشد هیچ‌کدام نمی‌توانند کامل بچرخند.

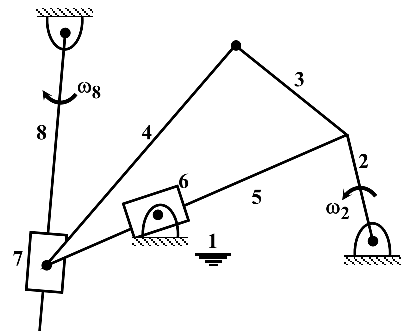


حل تشریحی مسائل

الگوی حل (۱): تعداد درجات آزادی

در این الگو، سبک‌های متفاوتی از طرح سؤال وجود دارد. ممکن است به‌طور مستقیم تعداد درجات آزادی خواسته شود، یا ممکن است ارتباط بین تعداد خروجی‌ها و ورودی‌ها مدنظر طراح باشد. نکته‌ی مهم در حل این سؤالات تعبیر مناسب گزینه‌هاست. این‌که دقیقاً متوجه شوید خواسته سؤال چیست، قسمت بزرگی از حل سؤال است.

مثال۱: کدام عبارت درباره اهرم‌بندی مصداق دارد؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۸)



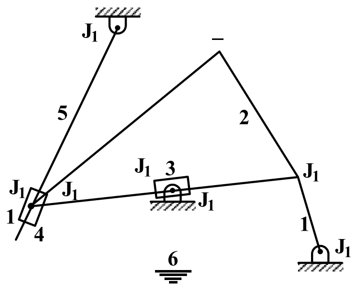
۱) اهرم‌بندی دارای یک حرکت غیرقابل پیش‌بینی است.

۲) به ازای ورودی ω_2 مجموعه دارای یک درجه آزادی است.

۳) اهرم‌بندی در بخشی از حرکتش قفل خواهد کرد.

۴) مجموعه به ازای ω_2 و یا ω_8 دارای دو حرکت متفاوت خواهد بود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای درک بهتر سؤال ابتدا گزینه‌ها را تفسیر می‌کنیم:



در گزینه (۱) یکی از درجه آزادی‌های سیستم برای ما غیرقابل تعیین است که این غلط است. ما درجه آزادی نامقید نداریم.

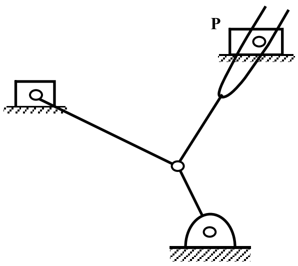
طبق گزینه (۲) سیستم دارای یک درجه آزادی است. طبق گزینه (۳) سیستم صفر درجه آزادی است. گزینه (۴) به این مسأله اشاره می‌کند که اگر ما ω_2 را به سیستم بدهیم و ω_8 را بگیریم، در صورت دادن ω_8 سیستم به ما ω_2 را نمی‌دهد که اگر سیستم یک درجه آزادی باشد این گزینه غلط است. در سیستم‌های یک درجه آزادی به ازای هر ورودی یک خروجی یکتا به دست می‌آید و برعکس.

همان‌طور که می‌دانید اگر با سه لینک و سه مفصل دورانی یک مثلث بسازید، یک سازه به‌دست می‌آید و می‌توان آن را جسم صلب فرض کرد. بنابراین شماره‌گذاری لینک‌ها و نوع مفاصل به شکل بالا هستند. پس:

$$DOF = 3\times(6-1)-2\times 7 = 1$$

در نتیجه گزینه (۲) درست است.

مثال۲: در مکانیزم شکل مقابل، اگر بخواهیم مکانیزم از وضعیت موجود به وضعیت جدیدی که در آن بلوک خروجی P به اندازه‌ی یک واحد به سمت راست جابه‌جا شده باشد، به چند ورودی نیاز است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۰)



۱) یک

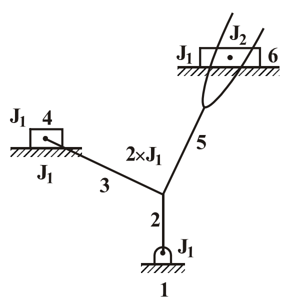
۲) دو

۳) سه

۴) چهار

☑ **پاسخ:** تمام مفهوم صورت سؤال این است که مکانیزم چند درجه آزادی دارد.

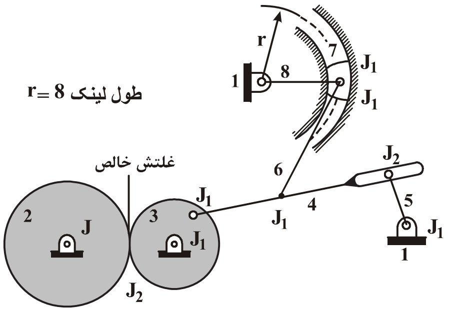
$$3\times(6-1)-2\times 6-1=2$$



تنها نکته محاسباتی این سؤال دقت به اتصال چنگکی یا pin in slot است.

در حل سؤالات درجه آزادی می‌توان از شهود نیز بهره گرفت. به این معنی که در صورت قفل کردن یا گرفتن دو درجه آزادی از مکانیزم بالا سیستم قفل می‌شود. فرض کنید اجازه ندهیم اسلایدر ۴ و ۶ بلغزند. بنابراین درجه آزادی را گرفتیم. اگر دقت کنید سیستم قفل می‌شود. بنابراین درجه آزادی سیستم برابر ۲ است.

مثال۳: درجه آزادی مکانیزم زیر چند است؟ (لولای اتصال عضو ۸ با زمین، مرکز انحنای مسیر لغزنده ۷ است.) (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۴)

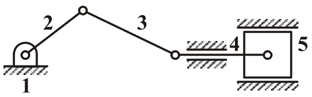


۱) صفر
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در سیستم داده شده، ما ۸ لینک داریم. باید تکلیف مفاصل را معلوم کنیم. دقت کنید که میله ۸ هیچ اثـری در مکـانیزم نـدارد. در صورت نبودن آن باز هم اسلایدر ۷ در مسیر تعبیه‌شده خودش می‌لغزد. بنابراین لینک ۸ و مفصل آخر یعنی مفصل متصل‌کننده لینک ۸ بـه زمـین را کنـار می‌گذاریم. pin in slot ، $J_۱$ است و بین دو دیسک نیز اتصال $J_۲$ برقرار است.

$$DoF: ۳\times(۷-۱)-۲\times۷-۲=۲$$

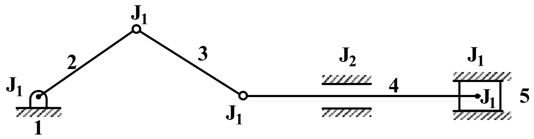
مثال۴: مکانیزم روبه‌رو، چند درجه آزادی دارد؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۵)



۱) دو
۲) یک و نیم
۳) یک
۴) صفر

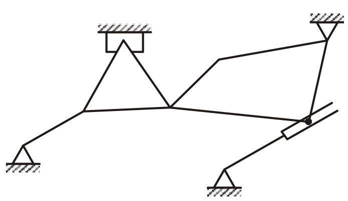
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از نظر شهودی به سادگی می‌توان به این سؤال پاسخ داد. جلوی لغزش اسلایدر ۵ را بگیرید، سیستم قفل می‌شود. این یعنـی یـک درجه آزادی بیشتر نداریم. اما برای محاسبه نیز باید مفاصل و قیود را به خوبی بشناسید و اعمال کنید. قید اعمال شـده درجـه آزادی چـرخش را از لینـک می‌گیرد. پس:

$$۳\times(۵-۱)-۲\times۵-۱=۱$$



دقت کنید مواردی مثل «۱/۵ درجه آزادی» در درس دینامیک ماشین وجود ندارد، پس بلافاصله آنها را از گزینه‌ها حذف کنید.

مثال۵: با به‌کارگیری رابطه کوتزباخ (Kutzbach)، $DOF=۳(n-۱)-۲(j_۱)-j_۲$ که در آن $j_۱, n$ و $j_۲$ به‌ترتیب تعداد عضـوها، تعـداد مفاصـل ساده و مرکب می‌باشند، کدام رابطه برای مکانیزم زیر درست است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۶)



۱) $DOF=۳(۱۰-۱)-۲(۱۱)-(۱)=۴$
۲) $DOF=۳(۹-۱)-۲(۱۰)-(۱)=۳$
۳) $DOF=۳(۱۰-۱)-۲(۱۲)-(۱)=۲$
۴) $DOF=۳(۹-۱)-۲(۱۱)-(۱)=۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به ۹ لینکی بودن سیستم طبق شکل زیر گزینه (۱) و (۳) خارج می‌شوند و سیستم ۱۱ مفصل $J_۱$ دارد. پس گزینه (۴) جواب است.