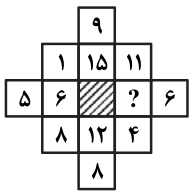
## بخش چهارم: حل مسئله

■ **راهنمایی:** این بخش از آزمون استعداد، از انواع مختلف سؤال‌های کمّی، شامل مقایسه‌های کمّی، استعداد عددی و ریاضیاتی، حل‌مسئله و...، تشکیل شده است.

• توجه داشته باشید به‌خاطر متفاوت بودن نوع سؤال‌های این بخش از آزمون، هر سؤال را براساس دستورالعمل ویژه‌ای که در ابتدای هر دسته سؤال آمده است، پاسخ دهید.

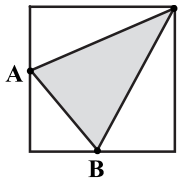
**راهنمایی:** هرکدام از سؤال‌های ۲۴ تا ۲۷ را به‌دقت بخوانید و جواب هر سؤال را در پاسخنامه علامت بزنید.

۲۴ـ در شکل زیر، بینِ اعداد ارتباط خاصی برقرار است. به‌جای علامت سؤال، کدام عدد باید قرار بگیرد؟




۱) ۳
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۹

۲۵ـ در شکل زیر، نقاط A و B وسط اضلاع مربع قرار دارند. چند درصد از مساحت مربع، هاشورخورده است؟




۱) ۲۲/۵
۲) ۲۵
۳) ۳۲/۵
۴) ۳۷/۵

۲۶ـ کوچک‌ترین عدد ۴ رقمی که اگر یکی از آن کم شود، بر ۷ و اگر یکی به آن اضافه شود، بر ۳ بخش‌پذیر خواهد بود را درنظر بگیرید. مجموع ارقام این عدد، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۱ ۳) ۱۴ ۴) ۱۷

۲۷ـ نسبت پول A به B، ۳ به ۵ است. دو نفر به اسامی C و D که هیچ پولی ندارند، به آنها ملحق می‌شوند. A، مقداری از پولش را به C می‌دهد و B، مقداری از پولش را بینِ C و D (نه لزوماً برابر) تقسیم می‌کند، به‌طوری‌که نهایتاً، هر چهار نفر به یک اندازه پول خواهند داشت. C، چند درصد از پول دریافتی را از B گرفته است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

**راهنمایی:** سؤال ۲۸، شامل دو مقدار یا کمیت است، یکی در ستون «الف» و دیگری در ستون «ب». مقادیر دو ستون را با یکدیگر مقایسه کنید و با توجه به دستورالعمل، پاسخ صحیح را به شرح زیر تعیین کنید:

- اگر مقدار ستون «الف» بزرگ‌تر است، در پاسخنامه گزینه ۱ را علامت بزنید.
- اگر مقدار ستون «ب» بزرگ‌تر است، در پاسخنامه گزینه ۲ را علامت بزنید.
- اگر مقادیر دو ستون «الف» و «ب» با هم برابر هستند، در پاسخنامه، گزینه ۳ را علامت بزنید.
- اگر براساس اطلاعات داده‌شده در سؤال، نتوان رابطه‌ای را بین مقادیر دو ستون «الف» و «ب» تعیین نمود، در پاسخنامه، گزینه ۴ را علامت بزنید.

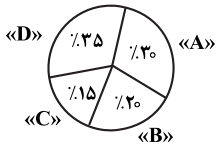
۲۸ـ دو ساعت رومیزی، همزمان رأس یک ساعت خاص، شروع به کار می‌کنند. یکی از ساعت‌ها هر ۵ ثانیه و دیگری هر ۸ ثانیه یک بوق می‌زند.

| الف | ب |
|---|---|
| حداقل مدت‌زمانی که از شروع، لازم است تا هر دو ساعت، برای دومین‌بار با هم بوق بزنند. | حداقل مدت‌زمانی که از شروع، لازم است تا دو ساعت، مجموعاً ۲۶ بوق بزنند. |

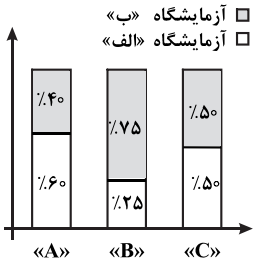
**راهنمایی:** با توجه به اطلاعات و نمودارهای زیر، به سؤال‌های ۲۹ و ۳۰ پاسخ دهید.

چهار ماده شیمیایی « A »، « B »، « C » و « D »، در مجموع به یک مقدار در دو آزمایشگاه «الف» و «ب» موجود است. نمودار شماره ۱، درصد مقدار هر ماده شیمیایی از مجموع مقادیر مواد شیمیایی در دو آزمایشگاه و نمودار شماره ۲، درصد مقدار سه ماده شیمیایی « A »، « B » و « C » به تفکیک دو آزمایشگاه «الف» و «ب» را نشان می‌دهد.

نمودار شماره ۱: «درصد مقدار هر ماده شیمیایی از مجموع مقادیر مواد شیمیایی در دو آزمایشگاه»




نمودار شماره ۲: «درصد مقدار سه ماده شیمیایی« A »، « B » و « C » به تفکیک دو آزمایشگاه «الف» و «ب» »




۲۹ـ اختلاف مقدار ماده شیمیایی D در دو آزمایشگاه، چند درصد از مجموع مقادیر چهار ماده شیمیایی در دو آزمایشگاه است؟

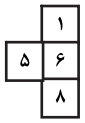
۱) ۴/۵ ۲) ۴ ۳) ۳/۵ ۴) ۳

۳۰ـ اگر آزمایشگاه «ب»، ۹/۶ لیتر ماده شیمیایی A داشته باشد، آزمایشگاه «الف»، چند لیتر ماده شیمیایی B دارد؟

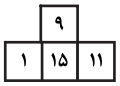
۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۲

## بخش چهارم: حل مسئله

**۲۴- گزینه «۱»** سؤال راحتی است! در هر باکس چهارتایی سه عدد که در یک ردیف هستند، با هم جمع می‌شوند و تقسیم بر ۳ می‌شوند و عدد چهارم نوشته می‌شود. به عنوان مثال داریم:




$\Rightarrow ۱+۶+۸=۱۵ \Rightarrow \frac{۱۵}{۳}=۵$ ,

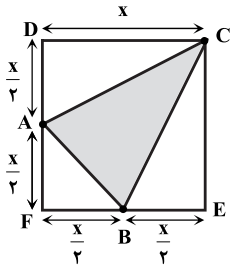



$\Rightarrow ۱+۱۵+۱۱=۲۷ \Rightarrow \frac{۲۷}{۳}=۹$

بنابراین داریم: $\frac{۱۱+?+۴}{۳}=۶ \Rightarrow ۱۱+?+۴=۱۸ \Rightarrow ?=۱۸-۱۵=۳$

---

**۲۵- گزینه «۴»** بیشترین مطلبی که در صورت سؤال داده شده است، این است که رئوس A و B وسط اضلاع مربع هستند. اگر ضلع مربع را x فرض کنیم، داریم:




می‌خواهیم بدانیم مساحت مثلث هاشورخورده چند درصدِ مساحت مربع است؟ می‌توان مساحت هاشورنخورده را حساب کرد و از مساحت مربع کم کرد. دو مثلث یکسان ADC و BEC داریم که مساحت هر کدام از آن‌ها برابر $\frac{۱}{۲}\times\frac{x}{۲}\times(x)$ است، پس مجموع مساحت این دو مثلث $۲\times\frac{۱}{۲}\times\frac{x}{۲}\times x=\frac{x^۲}{۲}$ است. مساحت مثلث ABF هم برابر $\frac{۱}{۲}\times\frac{x}{۲}\times\frac{x}{۲}=\frac{x^۲}{۸}$ است، پس مساحت مثلث هاشورخورده برابر است با:

$$\text{مساحت قسمت هاشورخورده}=x^۲-(\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۲}{۸})=x^۲(۱-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۸})=x^۲(\frac{۸-۴-۱}{۸})=\frac{۳}{۸}x^۲ \xrightarrow{\text{صورت و مخرج ضرب در ۱۲/۵}}$$

$$\text{مساحت قسمت هاشورخورده}=\frac{۳\times۱۲/۵}{۸\times۱۲/۵}=\frac{۳۷/۵}{۱۰۰}x^۲$$

---

**۲۶- گزینه «۱»**

**روش اول:** طبق داده‌های سؤال داریم:

$$a=۳k-۱=۳(k-۳)+۸$$
$$a=۷k'+۱=۷(k'-۱)+۸$$

حال چون باقی‌مانده‌ی عدد موردنظر (a) بر ۳ و ۷ برابر می‌شود با ۸، پس باقی‌مانده‌ی آن عدد بر ۲۱ نیز برابر ۸ می‌باشد. پس باید کوچک‌ترین عدد ۴ رقمی که بر ۲۱ بخش‌پذیر است را به علاوه عدد ۸ کنیم تا عدد موردنظر به‌دست آید.

$$۲۱k>۱۰۰۰ \Rightarrow k>\frac{۱۰۰۰}{۲۱} \Rightarrow k>۴۷/۶۲$$

اولین عدد صحیح بزرگ‌تر از رقم بالا $k=۴۸$ می‌باشد، پس داریم: $۲۱\times۴۸=۱۰۰۸ \Rightarrow a=۱۰۰۸+۸=۱۰۱۶$

**روش دوم:** فرض کنیم عدد موردنظر N باشد، آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases}N-۱=۷k\\N+۱=۳k'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}N=۷k+۱\\N=۳k'-۱=۳k''+۲\end{cases}$$

N باید عددی باشد که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۷ و ۳ به ترتیب ۱ و ۲ باشد. کافی است اولین عدد با این ویژگی را پیدا کنیم. اولین عددی که در این شرایط صدق کند ۲۹ است. اعداد بعدی را می‌توانیم با اضافه کردن کم‌م ۳ و ۷ به اولین عدد محاسبه کنیم:

$$N_۱=۲۹ \ , \ N_۲=۲۱+۲۹ \ , \ N_۳=۲\times۲۱+۲۹ \ , \ N_۴=۳\times۲۱+۲۹ \ , \ \ldots$$
$$N_{k+۱}=k\times۲۱+۲۹ \xrightarrow{k_{max}=۴۷} N=۴۷\times۲۱+۲۹=۱۰۱۶$$

که مجموع ارقام این عدد ۸ می‌باشد.

**توضیح بیشتر:** در حالتی که $\begin{cases}N=aq+m\\N=bq'+n\end{cases}$ را داریم، کافی است اولین N که در این شرایط صدق می‌کند را پیدا کنیم. برای یافتن اعداد بعدی با این شرایط کافی است کم‌م a و b را به $N_۱$ اضافه کنیم.

**۲۷- گزینه «۳»** ابتدا صورت سؤال را به زبان ریاضی ترجمه می‌کنیم:

گفته شده نسبت پول A به B، ۳ به ۵ است. پس $\frac{A}{B}=\frac{۳}{۵}$. از طرفی با فرض این که A، به اندازه‌ی x از پول خودش را به C داده و B به اندازه y به C و به اندازه z به D بدهد، لذا با توجه به این که در نهایت پول چهار نفر یکسان می‌شود، داریم:

$$\underbrace{A-x}_{\text{پول A}}=\underbrace{x+y}_{\text{پول C}}=\underbrace{B-y-z}_{\text{پول B}}=\underbrace{z}_{\text{پول D}}$$

از معادله‌ی اول و دوم سمت چپ داریم:

$$A-x=x+y \Rightarrow A=۲x+y$$

از معادله‌ی سوم و چهارم و همچنین مقایسه معادله‌ی آخر و معادله‌ی اول داریم:

$$B-y-z=x+y \xrightarrow{z=A-x} B-y-A+x=x+y \Rightarrow B=A+۲y \xrightarrow{A=۲x+y} B=۲x+y+۲y=۲x+۳y$$

چون $\frac{A}{B}=\frac{۳}{۵}$، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{۲x+y}{۲x+۳y}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow ۱۰x+۵y=۶x+۹y \Rightarrow ۴x=۴y \Rightarrow x=y$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x+y}=\frac{y}{y+y}=\frac{۱}{۲}=۵۰\%$$

---

**۲۸- گزینه «۳»** با توجه به صورت سؤال باید کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۵ و ۸ را حساب کرد.

مقدار ستون (الف): در ثانیه‌ی ۸۰ام هر دو ساعت برای دومین بار با هم بوق می‌زنند. حال باید ببینیم مقدار ستون (ب) از عدد ۸۰ بیشتر است یا کمتر؟ تا ثانیه ۸۰ داریم:

$$\begin{cases} ۱۶\times ۵=۸۰ \\ ۱۰\times ۸=۸۰ \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع تعداد زنگ این دو ساعت تا ثانیه } ۸۰ = ۱۶+۱۰=۲۶$$

پس مقدار ستون (ب) هم همان ۸۰ ثانیه است که دو ساعت مجموعاً ۲۶ بار بوق می‌زنند.

---

فرض کنیم کل حجم ماده‌های شیمیایی N باشد، از این مقدار $\frac{N}{۲}$ سهم آزمایشگاه (الف) و $\frac{N}{۲}$ سهم آزمایشگاه (ب) است. مواد A، B، C و D به‌ترتیب ۳۰، ۲۰، ۱۵ و ۳۵ درصد N هستند. جدول سمت چپ را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| آزمایشگاه (ب) | $\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{۳۰}{۱۰۰}N=۰/۱۲N$ | $\frac{۷۵}{۱۰۰}\times\frac{۲۰}{۱۰۰}N=۰/۱۵N$ | $\frac{۵۰}{۱۰۰}\times\frac{۱۵}{۱۰۰}N=\%۷/۵N$ | $\frac{N}{۲}-(۰/۱۲N+۰/۱۵N+۰/۰۷۵N)=۰/۱۵۵N$ |
| آزمایشگاه (الف) | $\frac{۶۰}{۱۰۰}\times\frac{۳۰}{۱۰۰}N=۰/۱۸N$ | $\frac{۲۵}{۱۰۰}\times\frac{۲۰}{۱۰۰}N=۰/۰۵N$ | $\frac{۵۰}{۱۰۰}\times\frac{۱۵}{۱۰۰}N=\%۷/۵N$ | $\frac{N}{۲}-(۰/۱۸N+۰/۰۵N+۰/۰۷۵N)=۰/۱۹۵N$ |

اکنون مقادیر مواد شیمیایی در هر آزمایشگاه به تفکیک مشخص شده و می‌توانیم به سؤالات پاسخ دهیم:

**۲۹- گزینه «۲»** اختلاف D در دو آزمایشگاه $=۰/۱۹۵N-۰/۱۵۵N=۰/۰۴N$

مقدار کل را چون N فرض کردیم، پس پاسخ ۰/۰۴ درست است. یعنی اختلاف ماده D در دو آزمایشگاه ۰/۰۴از کل مواد شیمیایی است.

---

**۳۰- گزینه «۳»** ماده‌ی A در آزمایشگاه مطابق جدول برابر است با:

$$۰/۱۲N=۹/۶ \Rightarrow N=۸۰$$

اکنون می‌توانیم حجم ماده‌ی B در آزمایشگاه (الف) را محاسبه کنیم:

$$۰/۰۵N=۰/۰۵\times ۸۰=۴$$

## سؤالات آزمون گروه علوم پایه دکتری ۹۹

## استعداد تحصیلی

### بخش اول: درک مطلب

■ راهنمایی: در این بخش، دو متن به‌طور مجزا آمده است. هریک از متن‌ها را به‌دقت بخوانید و پاسخ سؤال‌هایی را که در زیرِ آن آمده است، با توجه به آنچه می‌توان از متن استنتاج یا استنباط کرد، پیدا کنید و در پاسخنامه علامت بزنید.

**متن (۱)**

ویژگی‌های خاص توفان تندری (بعد از این توفان نامیده می‌شود) که می‌تواند مخاطرات جبران‌ناپذیری را برجای گذارد، برای غالب هواشناسان کم‌وبیش روشن است. دیوبادها، فروپکش‌ها (downburst)، بادهای بسیار شدید و سیلاب‌های لحظه‌ای، ازجمله شرایط جوّی خطرناکی است که با توفان همراهی می‌شوند. همچنین، همراهی غالب پدیده‌های مخاطره‌انگیز جو در هوانوردی، ازجمله تلاطم، یخ‌زدگی، چینش باد، آذرخش، تگرگ و مانند آن با توفان، موجب شده است از این پدیده، به منزله مخرّب‌ترین پدیده جوّی در عملیات پرواز یاد شود. [۱] ازاین‌رو، به‌نظر می‌رسد که پیش‌بینی آن، در حکم یکی از اصولی‌ترین وظایف مراکز پیش‌بینی برای برطرف ساختن نیازهای جوامع اجتماعی گوناگون، ازجمله هوانوردی، کشاورزی، دریایی و مانند آن مطرح باشد.

[۲] از ۱۹۵۱ تاکنون، روش‌های زیادی برای پیش‌بینی توفان‌های قوی (توفان تندری قوی، توفانی است که بادهای بسیار شدید جستی با سرعت ۲۵/۷ متر بر ثانیه در سطح زمین تولید می‌کند یا با تگرگ‌هایی با قطر حداقل۲ سانتی‌متر همراه می‌شود. [۳]) مطرح شده است. ولی غالب این روش‌ها، زمانی کاربردی هستند که سامانه‌های فعال بزرگ‌مقیاس در منطقه وجود داشته باشند. [۴] داسول در ۱۹۸۱ و مادوکس و داسول در ۱۹۸۲، روشن ساختند که روش‌های پیشنهادی تا آن زمان، شیوه مناسبی برای پیش‌بینی توفان‌ها نبوده‌اند و غالب دیوبادهای شدید با شرایط جوّی ویژه‌ای که در الگوهای همدیدی قابل مشاهده و بررسی نیست، همراهی می‌شوند. روش‌های پیش‌بینی به کمک درخت تصمیم‌گیری (decision tree)، از سال ۱۹۷۵ با عرضه الگویی از سوی دوراک برای دیوبادهای مناطق حارّه آغاز شد. بلویل و جانسون (۱۹۸۲)، از این روش برای پیش‌بینی بارش برف و ویژگی‌های کیفی آن استفاده کردند. پیش‌بینی بادهای فروشیب نیز به کمک این روش، در ۱۹۸۶ از سوی براون مطرح شده است. ویس (۱۹۸۵) نیز از این روش برای پیش‌بینی دیوبادهای همراه با توفان‌های مناطق حارّه‌ای استفاده کرد. روشی که در این تحقیق مطرح می‌شود نیز، الگوریتمی است که کولکوهن (۱۹۸۷) برای پیش‌بینی توفان، توفان‌های شدید و دیوبادها مطرح ساخت.

۱ـ مقصود اصلی نویسنده متن، کدام مورد زیر است؟

۱) واکاوی اجمالی دلیل معضلی که هنوز لاینحل مانده است.
۲) ایجاد زمینه برای نشان دادن اهمیت اجرای پروژه‌ای تحقیقی
۳) تأکید بر لزوم کاربردی بودن علم و پروژه‌های تحقیقی
۴) تعریف و توصیف پدیده‌ای طبیعی، ولی خطرناک

۲ـ متن حاضر، برگرفته از کدامین بخشِ یک مقاله علمی است؟

۱) مقدمه ۲) چکیده ۳) نتیجه‌گیری ۴) تحلیل داده‌ها

۳ـ کدام مورد، به بهترین وجه، رابطه میان پاراگراف اول با پاراگراف دوم را نشان می‌دهد؟

۱) راه‌حل برای یک معضل ۲) تناقض و رفع تناقض ۳) تعریف و طبقه‌بندی ۴) علت و معلول

۴ـ کدام محل در متن که با شماره‌های[۱] ، [۲]، [۳] و [۴] مشخص شده‌اند، بهترین محل برای قرار گرفتن جمله زیر است؟

«باران‌های سنگین و یا سیل‌آسا نیز شامل این تعریف می‌شوند.»

۱) [۱] ۲) [۲] ۳) [۳] ۴) [۴]

## متن (۲)

**خیلی پیش‌تر از آنکه عصر فضا آغاز شود، دانشمندان فرصت این را داشتند تا نمونه‌های فضایی را روی زمین بررسی کنند. شهاب‌سنگ‌ها همگی نمونه‌هایی از فضای اطراف ما هستند که به زمین می‌رسند. اگر بتوانیم آنها را پیدا کنیم، به راحتی و رایگان توانسته‌ایم نمونه‌هایی از فضاهای دوردست‌تر را روی زمین بررسی کنیم. روزانه چند تن ذرات ریز و درشت فضایی به جوّ زمین برخورد می‌کنند. آنهایی که کوچک‌ترند، در جو می‌سوزند و به شکل شهابی کوچک در آسمان دیده می‌شوند. اما برخی از آنها به اندازه کافی بزرگ هستند که از سوختن در جو زمین، جان سالم به‌دربرند و به شکل یک شهاب‌سنگ، روی زمین یا درون دریاها سقوط کنند. بسیاری از این شهاب‌سنگ‌ها، با توجه به ترکیبی که دارند و تغییراتی که هنگام برخورد با زمین در آنها رخ می‌دهد، آنچنان قابلیت استخراج داده‌های مهم را ندارند. اما گاه در بینِ این سنگ‌های سرگردان، نمونه‌های فوق‌العاده ارزشمندی پیدا می‌شود؛ شهاب‌سنگ‌هایی از ماه و مریخ. این سنگ‌ها، زمانی بخشی از سطح مریخ یا ماه بوده‌اند. شاید چند میلیون سال پیش، برخوردی بزرگ با سطح ماه یا مریخ باعث شده باشد تا بخشی از خرده‌سنگ‌هایی که از محلّ برخورد به هوا برخاسته‌اند، از دام گرانش این اجرام فرار کرده و به فضای بینِ‌سیارات وارد شوند. آنها میلیون‌ها سال در این فضا سرگردان مانده‌اند تا اینکه سرانجام به دام گرانش زمین افتاده‌اند و به شکل شهاب‌سنگی روی زمین سقوط کرده‌اند. ارزش این سنگ‌های بادآورده به قدری زیاد است که گروه‌های جست‌وجو، سالانه در مناطقی که شانس پیدا کردن شهاب‌سنگ‌ها بیشتر است (مانند قطب جنوب)، دنبال این سنگ‌ها می‌گردند و اگر بتوانند نمونه‌ای از آنها را پیدا کنند، به گنجینه‌ای بی‌نظیر دست یافته‌اند. گاهی قیمت این سنگ‌ها، از قیمت الماس هم‌وزنشان بیشتر است؛ مثلاً یکی از جنجال‌برانگیزترین بحث‌ها درباره وجود حیات در مریخ، مربوط به یکی از همین شهاب‌سنگ‌هاست، شهاب‌سنگی به نام ALH8400 که در قطب جنوب پیدا شده و منشأ مریخی دارد و در دهه ۱۹۹۰ در صدر اخبار جهان قرار گرفت، چون گروهی از محققان اعلام کرده بودند که نمونه‌ای از فسیل یا نشانه‌های حیاتی در آن پیدا کرده‌اند. البته جامعه علمی، حتی آن موقع، از این‌همه تعجیل و ساده‌انگاری در نتیجه‌گیری که شده بود، متعجب شدند: سفری طولانی در فضا و سوختن در جوّ زمین و برخورد با زمین، باعث تغییر در شرایط سنگ‌ها می‌شود. به همین دلیل، این نمونه‌ها اگرچه بسیار ارزشمند هستند، اما دانشمندان ترجیح می‌دهند خود محلّ نمونه‌برداری را تعیین کنند.**

**۵ـ با توجه به متن، کدام مورد زیر، توصیفی مختصر و مناسب از شهاب‌سنگ‌های مطروحه در متن است؟**

۱) مهمانان بی‌موقع ۲) پیام‌هایی از گذشته ۳) بادآورده‌های ارزشمند ۴) پیش‌آهنگان عصر جدید

**۶ـ کدام مورد، به بهترین وجه، مقصود اصلی متن از بحث شهاب‌سنگ‌ها را نشان می‌دهد؟**

۱) توصیف کاربری آنها
۲) تعریف و طبقه‌بندی
۳) توصیف فیزیکی و تعیین منشأ
۴) به چالش‌کشیدن فرضیه‌ای قدیمی و جاافتاده

**۷ـ مطابق متن، کدام مورد درخصوص شهاب‌سنگ‌ها صادق است؟**

۱) هنوز اظهارنظر درباره مفید بودن یا مفید نبودن شهاب‌سنگ‌ها برای بررسی امکان وجود حیات در کرات دیگر زود است، زیرا بسیاری از شهاب‌سنگ‌هایی که در قعر اقیانوس‌ها مدفون هستند، تجزیه‌وتحلیل نشده‌اند.

۲) اگر همه شهاب‌سنگ‌ها می‌توانستند به زمین برسند، امروزه فرضیات معتبرتری از امکان وجود حیات در کرات دیگر در دسترس داشتیم.

۳) بیشتر شهاب‌سنگ‌هایی که می‌توانند از سد جوّ زمین بگذرند، در آب‌های قطبین فرود می‌آیند.

۴) اگر سنگ‌ها بلافاصله بعد از جدایی از منبع خود می‌توانستند به زمین برسند، منبع بهتر و موثق‌تری برای بررسی برخی ویژگی‌های مکانی که از آن آمده بودند، در اختیار انسان قرار می‌دادند.

**۸ـ کدام مورد، به بهترین وجه، دیدگاه جامعه علمی دهه ۱۹۹۰ در ارتباط با ادعای مربوط به شهاب‌سنگی به نام ALH8400 را توصیف می‌کند؟**

۱) هیجان و تعجب
۲) شک و تردید عمیق
۳) بی‌اعتمادی و نگرانی
۴) بی‌تفاوتی، ولی همراه با امیدواری

# پاسخنامه آزمون گروه علوم پایه دکتری ۹۹

## استعداد تحصیلی

### بخش اول: درک مطلب

**پاسخ سؤالات متن (۱)**

**خلاصه پاراگراف‌های متن:**

**پاراگراف اول:** بیان ویژگی‌های طوفان تندری، شرایط جوی به وجود آمده در اثر این پدیده و لزوم نیاز به پیش‌بینی این پدیده.

**پاراگراف دوم:** بیان تاریخچه روش‌های پیش‌بینی توفان‌های قوی، علت ناکارآمد بودن روش‌های قدیمی و بیان روش‌های نوین در پیش‌بینی این دسته از توفان‌ها.

**۱ـ گزینه «۲»** نویسنده در پاراگراف اول متن به بیان ویژگی‌های توفان تندری و تأثیر مخرب آن بر جوامع اجتماعی پرداخته و در پاراگراف دوم به توضیح تاریخچه‌ای از روش‌های پیش‌بینی این توفان‌ها اشاره دارد. بنابراین هدف اصلی او ایجاد زمینه برای نشان دادن اهمیت انجام پروژه‌ای تحقیقاتی در مورد روش‌های نوین پیش‌بینی این توفان‌ها می‌باشد.

**۲ـ گزینه «۱»** در مقالات علمی در بخش مقدمه به بیان مسئله اصلی مورد بررسی در مقاله و همچنین پیشینه تاریخی و کارهای انجام‌شده قبلی و ایرادات و نواقص احتمالی آنها پرداخته می‌شود و نویسنده با روش‌های پیشنهادی جدید سعی در برطرف کردن و بهبود این نواقص دارد.

**۳ـ گزینه «۴»** علت بیان تاریخچه و روش‌های پیش‌بینی توفان‌های تندری این است که این توفان‌ها تأثیر مخرب بر جوامع اجتماعی داشته و بسیاری از روش‌های قدیمی در این زمینه ناکارآمد بودند و شدت تأثیر این توفان‌ها بر فعالیت‌های انسانی آن‌قدر زیاد است که نیازمند پیش‌بینی دقیق می‌باشد.

**۴ـ گزینه «۳»** در عبارت «باران‌های سنگین و یا سیل‌آسا نیز شامل این تعریف می‌شوند» به بیان یک‌سری ویژگی پرداخته می‌شود که مربوط به توفان تندری می‌باشد. کلمه «نیز» بیان‌کننده این است که در جمله قبل باید ویژگی‌های دیگری در مورد این توفان‌ها بیان شده باشد که با توجه به متن، عبارت قبل از [۳] به بیان ویژگی‌های توفان تندری قوی پرداخته است.

**پاسخ سؤالات متن (۲)**

**خلاصه متن:** یکی از روش‌های بررسی و مطالعه پیرامون فضای اطراف ما، بررسی شهاب‌سنگ‌هایی است که وارد جو زمین شده‌اند و توانسته‌اند به شکل تقریباً سالم به سطح زمین برسند. البته بسیاری از این شهاب‌سنگ‌ها پس از جدا شدن از محل اولیه خود و با ورود به جو زمین دچار تغییراتی می‌شوند و قابلیت استخراج داده‌های مهم را ندارند.

یکی از جنجال برانگیزترین این شهاب‌سنگ‌ها، شهاب‌سنگی به نام ALH۸۴۰۰ بود که در قطب جنوب پیدا شد و منشأ مریخی داشت و نمونه‌ای از فسیل با نشانه‌های حیاتی در آن پیدا شد.

**۵ـ گزینه «۳»** شهاب‌سنگ‌هایی که به سطح زمین می‌رسند اشیاء بسیار باارزش برای بررسی فضای پیرامون ما می‌باشند که بدون هیچ زحمتی و به‌راحتی در اختیار ما قرار می‌گیرند. پس می‌توان آن‌ها را بادآورده‌های ارزشمندی دانست که به مطالعه پیرامون فضا کمک شایانی می‌نمایند.

**۶ـ گزینه «۱»** مقصود اصلی نویسنده متن از بیان بحث شهاب‌سنگ‌ها توصیف کاربری آنها در مطالعه پیرامون فضای اطراف ما می‌باشد که با استفاده از آنها می‌توان به مطالعه پیرامون فضا و سایر سیاره‌ها و ستاره‌های اطرافمان بپردازیم.

**۷ـ گزینه «۴»** شهاب‌سنگ‌ها پس از جدایی از منبع خود و رهایی از گرانش آن، وارد فضای بین سیارات می‌شوند و ممکن است میلیون‌ها سال در این فضا سرگردان باشند و دچار تغییرات ساختاری شوند.

پس اگر بلافاصله بعد از جدایی از منبع خود توسط گرانش زمین بر روی زمین سقوط کنند کمتر دچار تغییرات شده و منبع موثق‌تری برای بررسی ویژگی‌های مکان اولیه خود می‌باشند.

**۸ـ گزینه «۲»** در سطر ۱۶ و ۱۷ بیان شده است که شهاب‌سنگ ALH ۸۴۰۰ سفری طولانی در فضا داشته و سوختن در جو زمین و برخورد با آن، باعث تغییر در شرایط آن شده است. پس یافتن نمونه‌ای از فسیل با نشانه‌های حیاتی در آن، تعجیل و ساده‌انگاری در نتیجه‌گیری می‌باشد که باید به آن شک و تردید داشت.

## زبان عمومی

**PART A: Grammar**
**Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then, mark the correct choice on your answer sheet.**

**31- The rate that bright comets enter the solar system implies there should be around 3000 of them buzzing around, ..... only 25 are known.**
1) nonetheless 2) regardless of the fact 3) and yet 4) as there are

**32- Contemporary theories of interpretation require that, in our analyses of texts, we consider not only what the text says .....“made.”**
1) also its meaning gets and 2) but also gets the meaning of it
3) but its meaning also gets 4) but how its meaning gets

**33- ..... individual behavior is influenced by social networks is beyond dispute.**
1) That 2) An 3) The 4) It is that

**34- Plant scientists have been trying for years to genetically modify flowers for aesthetic purposes. The first to go on sale were blue carnations ..... in Australia, in 1996.**
1) were produced 2) produced 3) had been produced 4) to produce

**35- Weapons have been carried and delivered by a wide variety of vehicles, ..... weapon platforms.**
1) they are often called 2) often called 3) called they are often 4) that are called often

**36- Articulating what the difference between humans and other creatures consists of ..... behind it have formed a large and difficult project tackled by biologists, anthropologists, psychologists, and philosophers.**
1) uncovering the biology 2) the biology of uncovering
3) the biology uncovering 4) and uncovering the biology

**37- Most healthcare professionals view depression as “just part of getting old and argue that this illness, ....., can have serious, even fatal consequences.**
1) untreated then 2) untreated whether it is 3) if untreated 4) that is untreated

**38- Ted had a terrible habit of boasting so much about his smallest accomplishments ..... his vainglory became renowned throughout the small college campus.**
1) that 2) as 3) in that 4) as though

**PART B: Vocabulary**
**Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then, mark the correct choice on your answer sheet.**

**39- Dogs growl and show their teeth in an attempt to frighten the animal or person they perceive as a .....**
1) habitat 2) prey 3) suspicion 4) threat

**40- Based on his recent poor decisions, it was obvious that Seth lacked even a modicum of good .....**
1) sentiment 2) sense 3) sensation 4) sensitivity

**41- The judge ..... the extraneous evidence because it was not pertinent to the trial.**
1) disclosed 2) distended 3) dismissed 4) distorted

**42- The more frequently employees take time to exercise during working hours each week, the fewer sick days they .....**
1) expend 2) save 3) take 4) recall

**43- Classic psychology experiments have shown that when rats are first ..... with an electrical shock to fear a tone when it sounds, they later fear the tone even without the associated shock.**
1) conditioned 2) sparkled 3) displayed 4) intended

## زبان عمومی

**بخش اول: دستور زبان**

**در سؤالات زیر، از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) پاسخی را انتخاب کنید که به بهترین نحو جای خالی را پر کند. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.**

**۳۱ـ گزینه «۳»** با توجه به سرعت و تعداد ورود ستاره‌های دنباله‌دار به منظومه شمسی می‌توان حدس زد که باید تقریباً ۳۰۰۰ مورد از آن‌ها وجود داشته؛ با این حال تنها ۲۵ عدد از آنها شناسایی شده‌اند.

**توضیح:** همان‌طور که می‌دانید nonetheless قید ربط است؛ یعنی قبل از آن باید نقطه یا نقطه‌ویرگول و بعد از آن باید حتماً کاما بیاید. با این حساب گزینه (۱) نادرست است. گزینه (۲) در صورتی ارزش بررسی کردن دارد که طراح بعد از fact از حرف ربط that استفاده می‌کرد. گزینه (۳) صحیح است، هم با توجه به مفهوم جمله و هم با توجه به اینکه قبل از and کاما می‌آید. و گزینه (۴) نادرست است چون بعد از as دو تا فعل داریم؛ یکی are و یکی know.

---

**۳۲ـ گزینه «۴»** نظریه‌پردازان معاصر در زمینه ترجمه شفاهی باور دارند ما در آنالیز متن، علاوه بر چیزی که متن می‌گوید، باید به نحوه شکل‌گیری معنی آن نیز توجه داشته باشیم.

**توضیح:** همان‌طور که می‌بینیم این تست با مبحث not only …but also سروکار دارد. اول از همه اینکه در این ساختار but also می‌تواند به صورت but یا also هم به کار برود. پس امیدوارم فوری گزینه (۲) را نزده باشید.

ضمناً می‌دانیم ساختار not only ….but (also) مستلزم رعایت ساختار موازی است؛ بنابراین چون بعد از not only کلمه پرسشی what را داریم باید بعد از but(also) هم از کلمه‌ی پرسشی how استفاده کنیم:

…. **not only what** the text says **but how** its meaning gets made.

---

**۳۳ـ گزینه «۱»** اینکه شبکه‌های اجتماعی بر روی رفتار افراد تاثیرگذار هستند، قابل تردید نمی‌باشد.

**توضیح:** تست بسیار ساده‌ای است. توی مبحث جمله‌واره‌ی اسمی گفتیم یکی از کاربردهای that clause این است که قبل از فعل be به عنوان فاعل استفاده شوند. گفتیم در این موارد that به صورت «اینکه» ترجمه می‌شود:

**That individual behavior is influenced by social networks** is beyond dispute.

مثال بیشتر:

**That coffee grows in Brazil** is well known.

---

**۳۴ـ گزینه «۲»** گیاه‌شناسان سال‌هاست که با استفاده از اصلاح ژنتیک به دنبال زیباتر ساختن گل‌ها هستند. گل میخک آبی اولین موردی بود که برای فروش عرضه شد. این گل در سال ۱۹۹۶ در استرالیا تولید شد.

**توضیح:** این تست از دو جمله تشکیل شده که برای پاسخگویی به آن فقط به جمله دوم نیاز داریم. جمله دوم دارای فعل اصلی were می‌باشد، با این حساب به هیچ فعل اصلی دوم دیگری نیاز نداریم چون هر جمله فقط‌وفقط باید یک فعل اصلی داشته باشد. این یعنی حذف همزمان گزینه‌های (۱) و (۳). گزینه (۴) نادرست است چون قصد بیان هدف نداریم.

ضمناً شکل اولیه گزینه (۲) این‌طوری بوده:

The first to go on sale were blue carnations **that were produced** in Australia, in 1996.

اگر that were را حذف کنیم، به گزینه (۲) می‌رسیم.

---

**۳۵ـ گزینه «۲»** سلاح‌ها از طریق وسایل نقلیه مختلفی حمل و تحویل داده می‌شوند. این وسایل نقلیه اغلب با نام پلتفرم سلاح شناخته می‌شوند.

**توضیح:** تقریباً هر سال از این مبحث سؤال می‌آید و ما هم هر سال می‌گوییم بعد از کاما کاربرد that ممنوع است. (این یعنی حذف گزینه (۴)). گزینه (۱) در صورتی صحیح است که کاما به نقطه تبدیل بشود و they هم به They. مهم‌ترین دلیل رد گزینه (۳) کاربرد they بعد از called است.

ضمناً شکل اولیه‌ی گزینه‌ی ۲ این طوری بوده:

Weapons have been carried and delivered by a wide variety of vehicles, **which are often called** weapon platforms.

اگر which are را حذف کنیم، به گزینه (۲) می‌رسیم.

**۳۶ـ گزینه «۴»** درک تفاوت بین انسان و سایر موجودات و مسائل بیولوژیکی نهفته در آن باعث بوجود آمدن مباحث و تحقیقات دشوار و گسترده‌ای شده است که دانشمندانی از رشته‌های مختلف مانند زیست‌شناسی، انسان‌شناسی، روانشناسی و فلسفه به آن می‌پردازند.

**توضیح**: توی تست‌هایی که این‌قدر طولانی هستند، اولین کار این است که به دنبال فعل اصلی باشیم. فعل اصلی سوال ما have formed است. پس به خاطر حضور have باید فاعلمون جمع باشد. اما articulating به تنهایی به فعل مفرد نیاز دارد، این یعنی باید articulating را با and به یک ساختار ing دار موازی دیگر متصل کنیم تا آن موقع کاربرد فعل have هم معنی پیدا کند. و چون فقط گزینه (۴) است که دارای and می‌باشد، می‌توانیم باقی گزینه‌ها را رد کنیم.

---

**۳۷ـ گزینه «۳»** اکثر متخصصین حوزه بهداشت و درمان، افسردگی را بخشی از پروسه افزایش سن می‌دادند و اعتقاد دارند که در صورت عدم درمان می‌تواند عواقب بسیار وخیمی داشته و یا حتی باعث مرگ بیمار شود.

**توضیح**: اول از همه اینکه طراح سؤال ظاهراً یادش رفته آن (") را که باز کرده ببندد. باید این علامت را قبل از and بیاورد. حالا می‌رسیم به رد گزینه‌ها. کاربرد that بعد از کاما ممنوع است (یعنی رد گزینه (۴)). گزینه ۱ نادرست است چون معلوم نیست طراح سوال آن then را بابت چی استفاده کرده. گزینه (۲) هم کنار می‌رود چون بعد از is هیچ عبارت کامل‌کننده‌ای نداریم.

اما برای اینکه ببینیم چرا گزینه (۳) صحیح است باید اصل جمله را پیدا کنیم.

Most healthcare professionals argue that this illness, **if it is untreated**, can have serious, even fatal consequences.

چون it به this illness برمی‌گردد، می‌توانیم با فرض اینکه فاعل‌ها یکسان هستند، فاعل جمله‌واره‌ی وابسته یعنی it و فعل is را حذف کنیم و یک وجه وصفی بسازیم:

Most healthcare professionals argue that this illness, **if untreated**, can have serious, even fatal consequences.

---

**۳۸ـ گزینه «۱»** تد اخلاق بسیار زشتی داشت و به خاطر کوچک‌ترین موفقیت‌هایش بقدری فخرفروشی می‌کرد که عادت خودستایی او در سرتاسر محوطه‌ی کوچک دانشگاه زبانزد عام و خاص بود.

**توضیح**: از ساختار so ….that استفاده شده.

….**so** much about ….. **that ….**

**بخش دوم: واژگان**

**دستورالعمل: در سؤالات زیر، از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) پاسخی را انتخاب کنید که به بهترین نحو جای خالی را پر کند. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.**

**۳۹ـ گزینه «۴»** سگ‌ها در هنگام مواجهه با خطر / تهدید، پارس می‌کنند و دندان‌های خود را نشان می‌دهند تا حیوان یا شخص مورد نظر را بترسانند.

۱) زیستگاه، زیست‌بوم ۲) طعمه ۳) سوءظن، تردید ۴) خطر، تهدید

---

**۴۰ـ گزینه «۲»** ضعفِ تصمیمات اخیر **سِت** نشان می‌دهد که کوچکترین درکی نسبت به مسائل مختلف ندارد.

۱) تمایل، گرایش، احساس ۲) شعور، معنی، ادراک ۳) احساس، هیجان ۴) حساسیت

---

**۴۱ـ گزینه «۳»** قاضی شواهد غیرضروری را مردود اعلام کرد زیرا ارتباط چندانی با روال دادرسی نداشت.

۱) افشاء کردن، فاش کردن ۲) بزرگ کردن، منبسط کردن ۳) مردود شمردن، رد کردن ۴) کج کردن، تحریف کردن

---

**۴۲ـ گزینه «۳»** کارمندان هرچقدر در طول هفته بیشتر ورزش کنند، کمتر به مرخصی استعلاجی نیاز پیدا می‌کنند.

**توضیح**: جواب این سؤال عیناً توی خود سؤال آمده. یعنی اول بوده take time حالا شده take days.

اصطلاح take sick days یعنی «استعلاجی گرفتن.»

---

**۴۳ـ گزینه «۱»** طبق آزمایشات روانشناسی کلاسیک، وقتی موش‌ها برای ترسیدن از یک صدای بخصوص به وسیله شوک الکتریکی شرطی شوند، بعدها بدون وجود شوک الکتریکی هم از آن صدا می‌ترسند.

۱) شرطی کردن ۲) درخشیدن، برق زدن ۳) نمایش دادن ۴) قصد داشتن

## سؤالات آزمون گروه علوم پایه دکتری ۱۴۰۱

### استعداد تحصیلی

### بخش اول: درک مطلب

■ **راهنمایی:** در این بخش، دو متن به‌طور مجزا آمده است. هریک از متن‌ها را به‌دقت بخوانید و پاسخ سؤال‌هایی را که در زیرِ آن آمده است، با توجه به آنچه می‌توان از متن استنتاج یا استنباط کرد، پیدا کنید و در پاسخنامه علامت بزنید.

**متن (۱)**

سوخت‌های زیستی به عنوان سوخت سبز جایگزین و تجدیدپذیر تولیدشده از منابع مختلف بیولوژیکی تعریف شده است. محتوای انرژی سوخت زیستی از منابع زیستی و مواد آلی که بدن موجودات زنده را می‌سازند، به‌وجود آمده است. در واقع، سوخت زیستی نوعی از سوخت است که از منابع زیست‌توده (بیومس) به‌وجود می‌آید. این بدان معنا است که ماهیت سوخت زیستی به گیاهان برمی‌گردد و همین امر، موجب تجدیدپذیر بودن آن می‌شود. سوخت‌های زیستی را براساس مواد اولیه مورد استفاده در تولید آنها، به سه نسل طبقه‌بندی کرده‌اند: نسل اول، دوم و سوم.

سوخت‌های نسل اول یا سوخت‌های زیستی معمولی، سوخت‌های تولیدشده از محصولات غذایی و زراعی‌اند. نسل اول سوخت‌های زیستی (FGF) از قند، نشاسته، روغن و چربی حیوانی و گیاهی به‌دست می‌آیند. این سوخت‌ها شامل دیزل‌زیستی، الکل‌زیستی، اتانول و گازهای زیستی مانند متان‌اند و در محصولات خوراکی مانند دانه‌های روغنی، سویا، گندم، تخم شلغم روغنی، سیب‌زمینی، نارگیل، جو، نیشکر، چغندرقند، ذرت و...، یافت می‌شوند. اتانول ذرت در آمریکا، اتانول نیشکر در برزیل و سایر سوخت‌های زیستی در جاهای دیگر، از اولین نسل مواد خام برای برآوردن تقاضای انرژی جهانی در بینِ سال‌های ۲۰۰۰ تا ۲۰۰۸ بوده است. در این نسل، مواد غذایی باارزش فقط برای تولید سوخت زیستی باید کشت شود که این امر، موجب به خطر انداختن امنیت چرخه غذایی می‌شود. همچنین کشت محصولات برای تولید سوخت زیستی، لزوماً اقتصادی نیست.

سوخت‌های نسل اول، با وجود تجدیدپذیر بودن نمی‌تواند یک گزینه عملی برای تأمین نیاز انرژی جهانی باشد. ازاین‌رو، نسل دوم (SGF) شناسایی شدند که شامل سوخت زیستی محصولات غیرغذایی یا ضایعات کشاورزی، به‌ویژه زیست‌توده‌های لیگنوسلولزی هستند. مواد اولیه این نسل از سوخت‌ها، جزو مواد غذایی محسوب نمی‌شوند. مواد لیگنوسلولز، کاه غلات، باگاس (تفاله) نیشکر، گیاه کاساوا، بقایای (تفاله‌های) جنگلی، گیاه میسانتوس (علف نقره‌ای)، ضایعات جامد شهرداری، چمن‌های گیاهی، گیاه جاتروفا و چوب، مثال‌هایی از سوخت نسل دوم هستند. درحالِ‌حاضر، استفاده از این نسل برای تولید سوخت‌های زیستی در مراحل مختلف با سرعت کامل انجام می‌شود. با وجود مزایای فراوان این نسل از سوخت‌ها، ممکن است استخراج سوخت از مواد اولیه ذکرشده دشوار باشد. تولید سوخت‌های زیستی نسل دوم، به فنّاوری‌های گران‌قیمت و پیشرفته‌ای نیاز دارد.

میکروجلبک‌ها مواد اولیه سوخت‌های زیستی نسل سوم (TGF) هستند. آزمایشات فراوانی بر روی جلبک‌ها به‌عنوان منبع غنی از چربی برای تولید سوخت‌های زیستی انجام شده است. با استخراج چربی و همچنین استفاده مستقیم از این جلبک‌ها، سوخت‌های زیستی نسل سوم تولید شده‌اند. پرورش و کشت جلبک‌ها به‌عنوان منبع غنی از چربی برای اولین‌بار در سال‌های ۱۹۷۸ تا ۱۹۹۶ مورد آزمایش قرار گرفت و ایده پرورش این جلبک‌ها در تصفیه‌خانه فاضلاب نیز مطرح شد. تولید جلبک برای تولید سوخت به‌دلیل گران‌قیمت بودن، هنوز در مقیاس تجاری، جایگاه خود را نیافته است، اما مطالعات امکان‌سنجی برای دستیابی به عملکرد بالا صورت گرفته است. تولید سوخت‌های نسل سوم باعث کاهش تولید مواد غذایی نمی‌شود و همچنین نیازی به زمین‌های کشاورزی وسیع و آب شیرین نیست و تولید به‌صرفه سوخت در این رده، دور از انتظار نیست.

**۱ـ طبق متن، درحالِ‌حاضر، کدام مورد، مسئله مشترک درخصوص سوخت‌های زیستی نسل دوم و سوم است؟**

۱) تولید با استفاده از ضایعاتی که مصرف غذایی انسانی ندارند
۲) نحوه استخراج سوخت از مواد اولیه
۳) هزینه تولید مربوطه
۴) سرعت بالای تولید

**۲ـ کدام مورد، عملکرد جمله‌ای از پاراگراف ۳ که زیرِ آن خط کشیده شده است را به بهترین وجه، توصیف می‌کند؟**

۱) شاهدی بر درستی ادعایی که در جمله ماقبلِ آن آورده شده است
۲) تأکید بر تنوع مواد قابلِ‌استفاده برای تولید سوخت زیستی نسل دوم
۳) خاطرنشان کردن مزیت بارز این نسل از سوخت زیستی نسبت به نسل اول این سوخت‌ها
۴) ارائه مثال‌هایی عینی مبنی‌بر بی‌ضرربودن موادی که در فرایند تولید نسل دوم سوخت زیستی مصرف می‌شود

**۳ـ مبنای طبقه‌بندی سوخت‌های زیستی در متن، کدام است؟**

۱) پیچیدگی فنّاوری لازم
۲) مقرون به‌صرفه بودن
۳) کارآمدی نهایی
۴) ماده اولیه

**۴ـ اطلاعات کافی برای پاسخ به کدام سؤال زیر، در متن موجود است؟**

۱) چرا نسل اول سوخت‌های زیستی، از محصولات غذایی تهیه شد؟

۲) آیا بودجه لازم برای تولید سوخت‌های زیستی نسل دوم، قابل تهیه است؟

۳) تولید به‌صرفه کدام‌یک از سه نسل سوخت‌های زیستی نسبت به بقیه، محتمل‌تر به نظر می‌رسد؟

۴) دلیل استفاده از مواد مختلف در محل‌های مختلف، در تولید سوخت‌های زیستی نسل اول چه بوده است؟

**متن (۲)**

**برخی از فعالیت‌های انسانی موجب تغییرات وضعیت تنش ساختگاهی و حتی زمین‌ساختی شده که پیامد آن می‌تواند زمین‌لرزه باشد. به این نوع زمین‌لرزه‌ها، زمین‌لرزه القایی یا تحریک‌شده می‌گویند. از میان زمین‌لرزه‌های القایی، آبگیری مخازن سدها باعث ایجاد بزرگ‌ترین لرزه‌ها شده‌اند. بخشی از مسئله لرزه‌خیزی القایی که به وابستگی زمین‌لرزه‌ها به آبگیری مخزن سدها، به‌ویژه تغییرات سطح آب در مخزن سد و در نتیجه، بارگذاری و باربرداری مربوط است، برای اولین‌بار توسط کاردر (۱۹۷۰) مطرح شد. وقوع یک زمین‌لرزه مخرّب با بزرگای ۶/۳ در سد کویِنا در هند (۱۹۶۷) موجب توجه بین‌المللی به این مسئله شد (سیمپسون و همکاران، ۱۹۸۸). زلزله‌های القایی نه‌تنها در اثر آبگیری دریاچه سدها، بلکه در هنگام تخلیه دریاچه‌ها نیز ممکن است رخ دهند.**

**محل احداث اکثر سدهای ایران، در مناطق لرزه‌خیز و کوهستانی واقع شده است، ازسوی‌دیگر به‌دلیل پراکندگی گسل‌ها در مناطق کوهستانی و فرسایش شیب دامنه آنها، خطراتی را برای سد به‌دنبال خواهد داشت؛ زیرا سدها معمولاً در درّه‌ها ساخته می‌شوند و عواقب شکست سد و بروز سیل می‌تواند فاجعه‌آفرین باشد. از این‌رو، لزوم مطالعات دقیق‌تر درخصوص زلزله‌های القایی مخزن ضروری به‌نظر می‌رسد؛ بنابراین با دخالت دادن عوامل لرزه‌خیزی نواحی گوناگون در توزیع سکونتگاه‌های انسانی و مراکز مهم اقتصادی و وضع مقررات ایمنی متناسب با خطر زمین‌لرزه، می‌توان از تلفات و خسارات ناشی از زمین‌لرزه که پدیده‌ای اجتناب‌ناپذیر می‌باشد، کاست.**

**براساس تجربیات موجود در مورد مخزن بزرگ با ژرفای آب بیش از ۸۰ تا ۱۰۰ متر می‌توان وقوع زمین‌لرزه‌ای با بزرگای ۶/۵ را انتظار داشت. البته ذکر این نکته مهم است که معمولاً زمین‌لرزه‌های القایی بزرگ در نواحی با زمین‌ساخت جنبا و احتمال گسیختگی کواترنر رخ می‌دهد. ازسوی‌دیگر، امکان گسیختگی سطحی زمین‌لرزه‌ای نیز در لرزه‌خیزی القایی وجود دارد. مثلاً زلزله ۱۹۶۷ سد کویِنا در هند (سیمپسون و همکاران، ۱۹۸۸؛ گوپتا، ۲۰۰۲) با وقوع ۳۰ سانتی‌متر تغییرمکان سطحی در راستای یک گسل کواترنر که از یکی از جناح‌های مخزن سد عبور می‌کند، همراه بود. [۱] بدیهی است که چنین گسیختگی در زیرِ محور سد نیز می‌تواند رخ دهد و از آنجا که مخزن سد توزیع تنش را درون گسل‌های منطقه تغییر می‌دهد، گسل‌های غیرفعال نیز می‌توانند در چنین شرایطی، فعالیت لرزه‌ای نشان دهند.**

**مطالعات انجام‌شده، نشانگر تشابه زمین‌لرزه‌های القایی با زمین‌لرزه‌های طبیعی در اکثر موارد بوده و بزرگای آن تا حدّ زیادی به وضعیت زمین‌ساختی منطقه نیز مربوط است. [۲] ازسوی‌دیگر، احتمال وقوع این رویدادها در درون مخزن یا نزدیک آن بیشتر بوده و بیشتر در بازه تا ۱۰ سال بعد از احداث سد را شامل می‌شود. سازوکار زمین‌لرزه القایی در اثر آبگیری مخزن سد، تحت‌تأثیر افزایش فشار آب منفذی است. تجربیات قبلی نشان می‌دهند که با گذشت زمان، به عمق زمین‌لرزه‌ها افزوده و برعکس، از تعداد آنها کاسته می‌شود. [۳] این زمین‌لرزه‌ها خصوصاً در مناطق با سوابق لرزه‌ای، ممکن است موجب چکانش زمین‌لرزه‌های بزرگ شود. [۴]**

**۵ـ مقصود اصلی متن، کدام است؟**

۱) هشدار دادن نسبت به بی‌توجهی به پدیده‌ای که برخی آن را طبیعی می‌پندارند.

۲) مقایسه دو پدیده ظاهراً مشابه و تأثیر آنها بر یکی از مهم‌ترین ساخته‌های بشر

۳) بررسی علل و تبعات زیست‌محیطی پدیده‌ای نسبتاً جدید

۴) توصیف یک پدیده و بررسی عوامل مؤثر در ایجاد آن

**۶ـ طبق متن، چرا مطالعه زلزله‌های القایی مخزن، در ایران ضروری است؟**

۱) پیامدهای وقوع آن، قابل اغماض نیست.

۲) اطلاعات کافی درباره آن وجود ندارد.

۳) در برخی نقاط جهان، مشکل‌زا بوده است.

۴) با یکی از مسائل حیاتی، یعنی منابع تأمین آب برای انسان گره خورده است.

**۷ـ طبق متن، درخصوص زمین‌لرزه‌های القایی، کدام مورد صحیح نیست؟**

۱) گسیختگی سطحی زمین‌لرزه‌ای در اثر آنها، امری محتمل است.

۲) آنها ممکن است در زمان خالی کردن آب دریاچه سدها نیز روی دهند.

۳) بزرگای آنها ارتباط کمی با وضعیت زمین‌ساختی منطقه مربوطه‌شان دارد.

۴) سازوکار آنها به هنگام آبگیری مخزن سد، بی‌تأثیر از افزایش فشار آب منفذی نیست.

**۸ـ کدام محل در متن که با شماره‌های [۱]، [۲]، [۳] و [۴] مشخص شده‌اند، بهترین محل برای قرار گرفتن جمله زیر است؟**

**«همچنین در صورت آبگیری تدریجی سد، احتمال کاهش رویدادهای لرزه‌ای وجود دارد»**

۱) [۴] ۲) [۳] ۳) [۲] ۴) [۱]

## بخش دوم: استدلال منطقی

■ **راهنمایی: برای پاسخگویی به سؤال‌های این بخش، لازم است موقعیتی را که در هر سؤال مطرح شده، مورد تجزیه‌وتحلیل قرار دهید و سپس گزینه‌ای را که فکر می‌کنید پاسخ مناسب‌تری برای آن سؤال است، انتخاب کنید. هر سؤال را بادقت بخوانید و با توجه به مطالب مطرح‌شده در هر سؤال و نتایجی که بیان شده و بیان نشده ولی قابل استنتاج است، پاسخی را که صحیح‌تر به‌نظر می‌رسد، انتخاب و در پاسخنامه علامت بزنید.**

**۹ـ با بررسی پاسخ‌های دانشجویانی که در این مطالعه شرکت کردند، می‌توان نتیجه گرفت که کلاس‌های مجازی اساتید، التزام کمتری به قانع کردن دانشجویانی دارند که پرسش‌هایی را مطرح می‌کنند و بستر برای سرسری گرفتن پاسخ به سؤالات آنها مهیاست. بنابراین، اگر در شرایط حضوری، یکی از عواملی که به کنترل میزان سواد استاد منجر می‌شود، پرسش‌های چالش‌برانگیز دانشجویان باشد، آنگاه می‌توان استدلال کرد که این عامل، با تزلزل همراه شده است. یکی از ویژگی‌های فضای مجازی، قدرت‌بخشی به کنشگرانی (کاربرانی) است که در شرایط حضوری، نقایص و محدودیت‌هایی دارند.**
**فرضی که قبول نتیجه‌گیری نویسنده برمبنای آن قرار گرفته است، کدام است؟**

۱) کلاس مجازی برای برخی اساتید که از دانش کافی برای پاسخ به سؤالات چالش‌برانگیز برخوردار نیستند، ایده‌آل است.
۲) جواب کامل استاد به سؤالات چالش‌برانگیز دانشجویان، از ملاک‌های اصلی ارزیابی کلاس کارآمد است.
۳) لازم است بر نحوه تعامل استاد و دانشجو در کلاس‌های مجازی، نظارت دقیق انجام پذیرد.
۴) پاسخ شرکت‌کنندگان در مطالعه مذکور، منعکس‌کننده واقعیت موجود بوده است.

**۱۰ـ امروزه مشخص شده که مهم‌ترین عامل تولید، نیروی انسانی کارآمد است. بهره‌مندی نیروی انسانی از توانمندی بیشتر و کیفیت بهتر کار، گذشته از اینکه نقش بزرگی در افزایش تولید بازی می‌کند، به بهره‌گیری گسترده‌تر از منابع فیزیکی و طبیعی می‌انجامد. بیشتر اندیشمندان علوم انسانی ازجمله جامعه‌شناسان، اقتصاددانان و متخصصان علم مدیریت، بر این نکته توافق دارند که آنچه سرانجام ویژگی‌ها و روند توسعه اقتصادی، اجتماعی، فرهنگی و سیاسی کشور را تعیین می‌کند، منابع انسانی است.**
**کدام مورد، رابطه دو بخش از متن که زیرِ آنها خط کشیده شده است را به بهترین وجه توصیف می‌کند؟**

۱) اولی، قانونی عام است و دومی، آن را به حوزه‌های مختلف علم تسرّی می‌دهد.
۲) اولی، ادعای متن است و دومی، تمسّک به منبع موثق برای تأیید آن است.
۳) اولی و دومی، هر دو ادلّه‌ای هستند که نتیجه‌گیری متن را تقویت می‌کنند.
۴) اولی، قانونی عمومی را بیان می‌دارد و دومی، کاربرد عملی آن را مشخص می‌کند.

**۱۱ـ بسیاری از انسان‌های نخستین به‌دلیل انجماد در یخ، تقریباً سالم به ما رسیده‌اند. آنها خصوصیات ژنتیکی هزاران سال پیش را در دل خود دارند و می‌توان «دی‌ان‌ای» آنها را استخراج کرد. نکته مشکل‌ساز ماموت‌ها درباره انسان وجود ندارد و می‌توان از میزبان مشابه با نمونه منقرض‌شده انسان استفاده کرد. به این ترتیب، به نظر می‌رسد پیش از ماموت‌ها و دایناسورها، فرصت برای زنده کردن دوباره انسان‌های باستانی فراهم باشد. کدام مورد را می‌توان به درستی، از متن استنباط کرد؟**

۱) ماموت‌هایی که می‌توان از آنها برای احیای دوباره این موجود استفاده کرد، در یخ یافت شده‌اند.
۲) وجود نمونه زنده و شبیه به موجودی که منقرض شده باشد، به کار احیای آن کمک می‌کند.
۳) استخراج «دی‌ان‌ای» جانورانی که نمونه مشابهی با آنها درحالِ‌حاضر وجود ندارد، مشکل است.
۴) پیشرفت‌های حاصل از کار در زمینه بازیابی حیوانات منقرض، انسان را به فکر زنده کردن دوباره انسان‌های باستانی انداخته است.

**۱۲ـ کارمند: برای فروش آخرین مدل موتورسیکلت‌های تولیدی شرکت، یک روش خوب در شرایط موجود، حضور و فعالیت بیشتر در شبکه‌های اجتماعی و کار تبلیغی زیاد در این زمینه است.**
**مدیر: کاملاً مخالفم. دو سال پیش که از همین طریق، دست به معرفی نسل قبلی همین محصول زدیم، راه به جایی نبردیم. دنبال راه دیگری باشید.**
**کدام مورد، در صورتی که صحیح فرض شود، جواب مدیر را به قوی‌ترین وجه تضعیف می‌کند؟**

۱) مردم در شبکه‌های اجتماعی، زمانی‌که نسل قبلی موتورسیکلت‌های شرکت، تولید و به بازار روانه شد، حضور کمرنگی داشتند.
۲) بسیاری از کارخانه‌ها و شرکت‌ها، از تبلیغات تلویزیونی برای معرفی محصولات خود استفاده می‌کنند و فروش بالایی هم دارند.
۳) در یک نظرسنجی به‌عمل‌آمده، افرادی که در مصاحبه‌ها شرکت کردند، به کارایی بالای تبلیغ از طریق شبکه‌های اجتماعی، امتیاز خوبی دادند.
۴) شرکت‌های رقیب که محصول خود را از طریق همین شبکه‌های اجتماعی عرضه و تبلیغ می‌کنند، به اذعان مدیران ارشدشان، از این نوع تبلیغ، به نتیجه موردِانتظارشان نرسیده‌اند.

**۱۳ـ سال گذشته در منطقه «الف» که در آنجا میوه «ب» رویانده می‌شود، هوا به‌طور استثنایی بسیار گرم شد، ولی این هوای گرم که همیشه باعث هجوم انواع ملخ‌ها ازجمله ملخ خاصی که به این میوه حمله می‌کند می‌شود، موجب آسیب به این میوه نشد. نظر بر این است که هوای گرم باعث ایجاد ترکیب خاصی در این میوه می‌شود که ملخ‌های طرفدار این میوه را از خود می‌راند.**
**کدام مورد، در صورتی‌که صحیح فرض شود، نتیجه‌گیری متن را به بهترین وجه تقویت می‌کند؟**

۱) ترکیب خاصی که در میوه «ب» در زمان گرما ایجاد می‌شود، در برخی گیاهان دیگر نیز وجود دارد.
۲) سرعت تولیدمثل و رشدونمو ملخی که به میوه «ب» علاقه‌مند است، از افزایش دمای هوا تأثیر می‌پذیرد.
۳) در آن سال، تمامی محصولات کشاورزی و گیاهی دیگرِ منطقه، به شدت تخریب شده و آسیب جدّی دیدند.
۴) سال گذشته، گرم شدن هوا خاص منطقه «الف» نبود و بسیاری مناطق دیگر که به پرورش میوه «ب» مشغول هستند نیز، این گرمایش را تجربه کردند.

**۱۴ـ کاندیدای ریاست جمهوری: درصورتی‌که به من رأی بدهید و انتخاب شوم، مالیات‌های ناعادلانه را حذف و حداقل دستمزد را افزایش می‌دهم تا به رونق اقتصادی و رفاه اجتماعی بهتری دست یابیم.**
**کاندیدای رقیب: فکر می‌کنید او واقعاً فرد مناسبی برای انتخاب شما است؟ وی اگر آدم باهوشی بود، به‌جای شغل دولتی، تا حالا یک شرکت خصوصی تأسیس کرده بود و خودش و دیگران را به نان و نوایی رسانده بود.**
**مهم‌ترین خطای منطقی در استدلال کاندیدای رقیب، کدام است؟**

۱) نادیده گرفتن امکان ایجاد تغییر در شرایط محیطی و شخصیتی انسان‌ها
۲) نادیده گرفتن ویژگی‌های فردی لازم برای تصدی پست‌های گوناگون
۳) برجسته کردن یک استثنا و جا زدن آن به عنوان قانونی مطلق
۴) حمله به شخصیت فرد، به‌جای پاسخ به راهکار و استدلال او

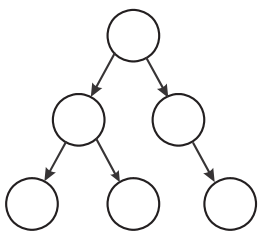
**۱۵ـ آب، آب داغ یا آب جوش مصارف زیادی دارند؛ یک مقدار پودر نسکافه با کمی شکر را درون یک فنجان آب داغ بریزید و به‌هم بزنید تا از یکی از لذت‌بخش‌ترین مصارف آنها باخبر شوید! از مصارف دیگر آن چه؟ مثل شستن و ....؛ ولی فکر کنم تا به‌حال درباره استفاده از آب و مشتقات آن به‌عنوان سیال محرک در وسایل حمل‌ونقل چیزی نشنیده باشید. تصور کنید یک نفر کنار جاده ایستاده و یک چهارلیتری را با دستش تکان می‌دهد و از خودروهای دیگر، تقاضای سوخت می‌کند. شما که فردی باشخصیت بوده و با خودرو درحالِ عبور از جاده هستید، با دیدن صحنه و با وجود قحطی سوخت، دلتان به رحم می‌آید و خودروی خود را جلوتر متوقف می‌کنید و از آن فرد می‌پرسید: «بنزین تمام کرده‌اید»؟ آن فرد هم با یک حالت خاصی جواب می‌دهد: «.....»!**
**کدام مورد، به منطقی‌ترین وجه، جای خالی در متن را کامل می‌کند؟**

۱) نه پس، آب خوردن می‌خوام
۲) نه، خودروی من بنزین مصرف نمی‌کنه
۳) فکر کنم ماشین من رو، دستِ‌کم گرفتی
۴) خداروشکر که بالاخره تو این دنیا یکی پیدا شد

## بخش سوم: سؤالات تحلیلی

■ **راهنمایی:** در این بخش، توانایی تحلیلی شما مورد سنجش قرار می‌گیرد. سؤال‌ها را به‌دقت بخوانید و پاسخ صحیح را در پاسخنامه علامت بزنید.
**راهنمایی: با توجه به اطلاعات زیر، به سؤال‌های ۱۶ تا ۱۹ پاسخ دهید.**

**در یک خانواده ۶ نفری به اسامی A، B، C، D، E و F، یک نفر از محیط بیرون از منزل، ویروس کرونا را گرفته، وارد محیط خانه کرده است و این ویروس، مطابق الگوی زیر، به دیگر اعضای خانواده انتقال یافته است. پس از مدتی، چهار نفر از افراد خانواده بهبود می‌یابند و دو نفر فوت می‌کنند. اطلاعات زیر در این خصوص موجود است.**
**– دو نفری که فوت می‌شوند، نه C جزوشان است و نه به یکدیگر ویروس را انتقال داده‌اند.**
**– A به B، ویروس را منتقل کرده است.**
**– حداقل یکی از افراد فوت‌شده، از F ویروس را گرفته است.**
**– یکی از افراد فوت‌شده ویروس را به D منتقل کرده است.**



# پاسخنامه آزمون گروه علوم پایه دکتری ۱۴۰۱

## استعداد تحصیلی

### بخش اول: درک مطلب

**پاسخ سؤالات متن (۱)**

**۱ـ گزینه «۳»** با توجه به مطالب سطر ۱۱ تا پایان متن و خصوصاً سطر ۱۶ همچنین سطر ۲۰ پاسخ به سؤال، گزینه (۳) است.

**۲ـ گزینه «۱»** قبل از عبارتی که زیر آن خط کشیده شده است، جمله‌ی زیر آمده است:

«مواد اولیه این نسل از سوخت‌ها، جزو مواد غذایی محسوب نمی‌شوند»

و در ادامه، مثال‌ها و در واقع شاهدی از نوع این مواد آورده شده است. بنابراین پاسخ به سؤال، گزینه (۱) است.

**۳ـ گزینه «۴»** در خط ۴ اشاره شده است که سوخت‌های زیستی را براساس مواد اولیه مورد استفاده در تولید آن‌ها، به سه نسل طبقه‌بندی کرده‌اند.

**۴ـ گزینه «۳»** به موارد (۱)، (۲) و (۴) به هیچ وجه در متن پاسخی داده نشده است، ولی پاسخ به سؤال مطرح شده در گزینه (۳) به نوعی قابل دریافت است.

**پاسخ سؤالات متن (۲)**

**۵ـ گزینه «۴»** متن به توصیف پدیده «زمین‌لرزه‌های القایی» پرداخته و در سراسر متن تأثیرات آن را بیان می‌کند. بنابراین بهترین جواب گزینه (۴) است.

**۶ـ گزینه «۱»** با توجه به سطر ۷ و ۸، جواب گزینه (۱) است.

**۷ـ گزینه «۳»** به وضوح در سطرهای ۱۲ و ۱۳ عنوان شده است که معمولاً زمین‌لرزه‌های القایی بزرگ در نواحی با زمین ساخت جنیا و احتمال گسیختگی کواترنر رخ می‌دهد و این یعنی بزرگای زمین‌لرزه‌های القایی ارتباط مستقیم با زمین‌ساخت منطقه دارد. همچنین عیناً در سطر ۱۷ و ۱۸ اشاره شده است که بزرگای زمین‌لرزه‌های القایی تا حد زیادی به وضعیت زمین‌ساختی منطقه دارد.

**۸ـ گزینه «۲»** با توجه به وجود کلمه‌ی همچنین در جمله‌ی داده‌شده در صورت این سؤال و قرار داشتن عبارت «از سوی دیگر» در ابتدای قسمت [۲] و نظر به ارتباط مستقیم جمله داده شده در سؤال و سطور قبل و بعد[۲]، بهترین مکان قسمت [۲] می‌باشد.

### بخش دوم: استدلال منطقی

**۹ـ گزینه «۴»** در سؤالات «فرض پنهان» دنبال گزینه‌ای هستیم که اگر آن گزینه را معکوس کنیم، اعتبار و صحت استدلال از بین می‌رود. معکوس گزینه (۴) به شکل زیر است:

معکوس گزینه (۴): پاسخ شرکت‌کنندگان در مطالعه مذکور، منعکس‌کننده واقعیت موجود **نبوده است.**

خُب، اگر معکوس گزینه (۴) صحیح باشد، استدلال و نتیجه‌گیری نویسنده به طور کامل زیر سؤال می‌رود و بنابراین پاسخ صحیح به سؤال، همین گزینه است.

**۱۰ـ گزینه «۲»** واضح است قسمت اول ادعای نویسنده و متن است و قسمت دوم با استناد به نظر بیشتر اندیشمندان، اقتصاددانان و جامعه‌شناسان ادعای متن را تأیید و تقویت می‌کند. پس گزینه (۲) به بهترین شکل نقش دو قسمت را تعیین می‌کند.

**۱۱ـ گزینه «۲»** در متن، به عبارت گزینه (۲) اشاره شده است و تنها گزینه‌ای است که می‌توان به طور صددرصد از متن استنباط کرد، همین است.

**۱۲ـ گزینه «۱»** خلاصه استدلال این است که کارمند می‌گوید اگر در رسانه‌های اجتماعی تبلیغ کنیم، فروش **موتورهای جدید** بالا می‌رود. مدیر در پاسخ می‌گوید **دو سال** پیش که **نسل قبلی** موتورها را در **رسانه‌های اجتماعی** تبلیغ کردیم، راه به جایی نبردیم. واضح است در رد استدلال مدیر، بهترین عبارت گزینه (۱) است. در واقع مدیر دارد از دو سال قبل و عدم فروش موتورهای دو سال قبل صحبت می‌کند و حال اینکه مردم در دو سال پیش حضور کمرنگی در رسانه‌های اجتماعی داشته‌اند، پس نمی‌شود، عدم موفقیت تبلیغ در رسانه‌های اجتماعی در آن زمان را به زمان حال تعمیم دهیم.

**۱۳ـ گزینه «۳»** خلاصه متن این است که گرم شدن هوا در منطقه الف که باعث افزایش و هجوم ملخ‌ها می‌شود باعث آسیب به میوه (ب) نشده است و **دلیل** آن این است که **گرم شدن هوا ترکیب خاصی** در میوه (ب) ایجاد می‌کند که ملخ‌ها را از خود می‌راند. می‌خواهیم این استدلال را تقویت کنیم. معمولاً باید به گزینه‌ای توجه کنیم که **دلیل پایه‌ای** را تأیید و تقویت می‌کند. گزینه (۳) به خوبی این کار را کرده است و دقیقاً می‌گوید همان ترکیب خاص در میوه (ب) **باعث** راندن ملخ‌ها و درنتیجه عدم آسیب به میوه (ب) شده است. چون تمام میوه‌های دیگر تخریب شده‌اند.

**۱۴ـ گزینه «۴»** کاندیدای رقیب به جای پاسخ منطقی به ادعای کاندیدای ریاست جمهوری به شخصیت کاندید و عدم توانایی او در برخی موارد، حمله می‌کند. پس بهترین گزینه، گزینه (۴) است.

**۱۵ـ گزینه «۲»** سؤال راحتی است و گزینه (۲) باید در پایان متن قرار گیرد. فکر می‌کنم گزینه‌های دیگر خنده‌دار باشند تا اینکه بخواهند کمی ما را به شک بیندازند!

**PART C: Reading Comprehension**

**Directions: Read the following two passages and select the choice (1), (2), (3), or (4) that best answers each question. Then mark the correct choice on your answer sheet.**

**Passage 1:**

Good work-life balance has been found beneficial for businesses because it can reduce absenteeism, increase job satisfaction, promote better job autonomy, attract talents, improve employee retention, improve employee attitudes and behaviors, and improve productivity. Despite these benefits, the construction industry is still known for its poor work-life balance. For example, the average number of hours worked in the construction industry was 62.5 among site-based project staff, 56.1 among office-based project staff, and 49.0 among head or regional office staff, far longer than the typical 38-hour working week in Australia.

The male-dominated nature of the construction industry makes the culture of 'work hard and play hard' the norm of the industry. The industry is also highly competitive, forcing construction organizations to reduce their labor cost, operate with low profit margin, and work with unreasonable time constraints. This culture in the Australian construction industry drives employees to work longer hours than contractually obligated. The work-life balance of employees in the construction industry has been sacrificed for a large salary award, which has led to serious relationship strains and mental health issues, such as suicide and burnout. Despite the efforts to implement work-life balance strategies and initiatives, the work-life balance in the industry remains poor because of a lack of enforcement and the industry culture.

Previous research has identified factors that can affect work-life balance. Technology development has given individuals a greater sense of mobility in their daily lives. This increased mobility and interconnectedness has enabled the workforce to become more itinerant, thus allowing individuals to work from home, communicate while in transit, and be available 24 hours a day, seven days a week. Technology has the potential to improve work-life balance. For example, parents can complete work from home, thus allowing individuals to start a family, while undertaking the majority of work roles and responsibilities on one mobile device. This offers greater flexibility to individuals than traditional office-based personnel and helps individuals manage both work and life commitments with greater ease.

**51- The statistics presented in the last sentence of paragraph 1 are intended to which of the following?**

1) To suggest that there is a deficiency blocking progress in the construction industry
2) To justify a problem mentioned earlier in the same paragraph
3) To underscore a tendency to disregard a common challenge
4) To support an earlier assertion

**52- Which of the following best describes the main purpose of paragraph 2?**

1) To help resolve a paradox
2) To explore the causes of a phenomenon
3) To compare one domain of work with some others
4) To point out the shortcomings in a specific area of industry

**53- Which of the following is NOT stated in the passage about the issue of the poor work-life balance in the construction industry?**

1) The job contracts may sometimes not reflect the true severity of the issue.
2) The issue has the potential to lead to a state of mental exhaustion.
3) The competitiveness of this industry makes the issue insoluble.
4) The issue, as it is, has certain health-related consequences.

**54- Which of the following best describes the author's attitude towards the effect technology can have on the work-life balance in the construction industry?**

1) Favorable 2) Skeptical 3) Mild irritation 4) Resigned acceptance

**55- Which of the following is more likely to be the topic of the paragraph that comes after this passage?**

1) Need for further research to illuminate the impact of technology on work-life balance
2) Reasons why work-life balance has gained prominence in recent times
3) Problems associated with traditional office-based jobs
4) Another factor that can affect work-life balance

**Passage 2:**

Positivism is a current of thought whose beginning is usually attributed to the approaches of Auguste Comte, who only considered the knowledge from the empirical sciences valid. This paradigm, also known as Quantitative or Rationalist, establishes the existence of a certain uniformity and order in nature, which means that the natural world has its own existence, independent of who investigates it. Based on this, it is governed by laws that allow explaining, predicting and controlling phenomena. This paradigm is particularly predominant in engineering education, where students are passive throughout the learning process, and depend on the educator as a source of information and not on themselves as constructors of knowledge.

From an epistemological point of view, Positivism has an objective position, a distant and non-interactive attitude between the subject and the peers, assuming that reality is given and can be absolutely known by the subject (e.g., an engineering student), and therefore requires finding the right and valid method to discover that reality. Consequently, positivist science is based on the assumption that the subject has an absolute possibility of knowing reality through a specific method. This is the type of problems that engineering students often encounter in classrooms, by using this traditional approach, which do not necessarily prepare them for the real problems that they will find as future engineers.

Hence, Positivism emphasizes verification, based on observation and opposing any science that is constructed without any empirical correlates. The most important characteristic of positivist theory is the search for a systematic, verifiable and measurable knowledge, focusing on the cause of phenomena that occur, from observation, measurement and statistical procedure. In this way, this paradigm leads the students to answer tests in the most accurate way possible in terms of either what educator has taught or study books, getting much better academic grades but not necessarily a better understanding.

**56- The type of class run based on positivism, as it is described in the passage, is one which …….**

1) stresses group work
2) presents highly subjective topics
3) is teacher-fronted
4) is project-oriented

**57- What does the underlined "it" in paragraph 1 refer to?**

1) uniformity
2) positivism
3) existence
4) world

**58- The passage provides sufficient information to answer which of the following questions?**

1) What attribute of positivism is said to be the most consequential?
2) How has positivism come to underlie the teaching methodology in engineering classes?
3) Is the assumption that "reality is given" a widely accepted one in the scientific community?
4) When are two positivist researchers likely to arrive at two different readings of the same outside reality?

**59- Which of the following could best be inferred from the passage?**

1) To investigate each type of reality, a positivist is required to use a discrete scientific method.
2) The laws established by Auguste Comte as those governing nature are accepted as such by other positivists.
3) Engineering students trained based on the tenets of positivism cannot efficiently handle their job demands once they start work.
4) The contribution of positivism to the discovery of the real world is undisputed, though there are some philosophers who argue otherwise.

**60- The underlined "subject" in paragraph 2 can best be replaced by which of the following?**

1) problem
2) researcher
3) assumption
4) scientific theme

**بخش سوم: درک مطلب**

**دو متن زیر را بخوانید و از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) گزینه‌ای را انتخاب کنید که برای هر سؤال بهترین پاسخ باشد. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.**

**متن ۱:** تعادل کار - زندگی خوب برای کسب‌وکارها مفید و مؤثر است چون می‌تواند غیبت از کار را کاهش دهد، رضایت شغلی را افزایش دهد، استقلال کاری بهتر را ارتقا دهد، افراد بااستعداد را جذب کند، حفظ و سرکار ماندن کارمندان را بالا ببرد، نگرش و رفتار کارکنان را بهتر کند، و بهره‌وری را بهبود ببخشد. به رغم این مزایا، صنایع عمرانی همچنان به خاطر تعادل کار - زندگی ضعیف‌شان معروف هستند. مثلاً، تعداد متوسط ساعت‌های کاری در صنایع عمرانی بین کارکنان پروژه‌ای مبتنی بر محل ۶۲/۵ ساعت بود، بین کارکنان پروژه‌ای مبتنی بر دفتر ۵۶/۱ ساعت بود، و بین کارکنان دفتری هیئت مدیره یا منطقه‌ای ۴۹ ساعت بود، که {تمام این ارقام} بسیار بیشتر از ۳۸ ساعت کار معمول در هفته در استرالیا است.

تسلط مردان بر صنایع عمرانی باعث می‌شود فرهنگ «سخت کار کن، سخت بازی کن» به یک هنجار در این صنعت تبدیل شود. همچنین رقابت در این صنعت بسیار بالاست که این موضوع شرکت‌های عمرانی را وادار می‌کند هزینه کار را کاهش دهند، با حاشیه سود پایین فعالیت کنند، و با محدودیت‌های زمانی غیرمعقولی کارکنند. این فرهنگ در صنایع عمرانی استرالیا کارکنان را وادار می‌کند که ساعت‌های طولانی‌تری از آنچه در قرارداد تعهد داده‌اند کار کنند. تعادل کار – زندگی کارکنان صنایع عمرانی، فدای حقوق بیشتر شده که این موضوع به روابط پُرتنش و بیماری‌ها و مسائل ذهنی از قبیل خودکشی و فرسودگی شغلی منجر شده است. به رغم تلاش‌های صورت گرفته جهت پیاده‌سازی استراتژی‌ها و راهکارهای تعادل کار-زندگی، تعادل کار-زندگی در صنایع عمرانی به خاطر نبود قوانین و فرهنگ صنعتی، ضعیف باقی مانده است.

پژوهش‌های پیشین، عوامل تأثیرگذار بر تعادل کار – زندگی را شناسایی کرده است. توسعه فناوری به افراد حس پویایی بیشتری در زندگی روزانه‌شان داده است. این افزایش پویایی و پیوند و همبستگی، نیروی کار را قادر ساخته که دوره‌گردتر شوند و در نتیجه به افراد اجازه می‌دهد که از خانه کار کنند، حین رفت‌وآمد با هم ارتباط برقرار کنند، هر روز هفته ۲۴ ساعته در دسترس باشند. فناوری این توانایی را دارد که تعادل کار –زندگی را بهتر کند. مثلاً، والدین می‌توانند از خانه کارهایشان را انجام دهند که این موضوع به افراد اجازه می‌دهد تشکیل خانواده بدهند، و اکثریت نقش‌ها و مسئولیت‌های کاری را بر روی یک موبایل انجام دهند. این، انعطاف‌پذیری بیشتری به افراد می‌دهد تا به پرسنل مبتنی بر دفتر سنتی و به افراد کمک می‌کند کار و تعهدات زندگی‌شان را با سهولت بیشتری مدیریت کنند.

**۵۱ـ گزینه «۴»** هدف از آمار و ارقام ارائه شده در جمله آخر پاراگراف ۱ چیست؟

گزینه (۴): پشتیبانی از ادعایی که قبل‌تر (در خط قبلی) مطرح شده است.

**توضیح:** به عنوان یک قانون سرانگشتی می‌توانیم بگوییم که اصلی‌ترین هدفِ ارائه مثال (exemplification) **پشتیبانی از ایده‌های قبلی** است. یعنی چون آمار و ارقام مذکور در قالب مثال آمده، می‌توان گفت آخرین جمله پاراگراف اول از جمله پُررنگ زیر حمایت و پشتیبانی می‌کند:

Despite these benefits, **the construction industry is still known for its poor work-life balance**. **For example,** the average number of hours worked in the construction industry was 62.5 among site-based project staff, 56.1 among office-based project staff, and 49.0 among head or regional office staff, far longer than the typical 38-hour working week in Australia.

**۵۲ـ گزینه «۲»** کدام یک از موارد زیر هدف اصلی پاراگراف ۲ را به بهترین نحو توصیف می‌کند؟

گزینه (۲): بیان علت و دلایل یک پدیده

**توضیح:** پاراگراف دوم در مورد causes (دلایل) این پدیده بحث می‌کند:

The construction industry is still known for its poor work-life balance.

**۵۳ـ گزینه «۳»** کدام یک از موارد زیر درباره مسئله تعادل کار – زندگی ضعیف در صنایع عمرانی در متن ذکر نشده است؟

گزینه (۳): رقابت {زیاد} در این صنایع باعث می‌شود این مسئله غیرقابل حل (insoluble) شود.

**توضیح:** متن اصلاً چیزی در مورد «غیرقابل‌حل بودن، حل‌نشدنی بودن» این مسئله نگفته اما باقی گزینه‌ها به وضوح در متن گفته شده‌اند:

**گزینه (۱):**

This culture in the Australian construction industry drives employees to work longer hours than *contractually obligated.*

**گزینه‌های (۲) و (۴):**

The work-life balance of employees in the construction industry has been sacrificed for a large salary award, which has led to serious relationship strains and *mental health issues* (choice 4), such as suicide and *burnout* (choice 2)

**۵۴ـ گزینه «۱»** کدام یک از موارد زیر به بهترین نحو نگرش نویسنده متن را به تأثیر فناوری بر تعادل کار – زندگی در صنایع عمرانی توصیف می‌کند؟

گزینه (۱): {نگرش} مثبت و مطلوب

**توضیح:** با مطالعه پاراگراف آخر متن به سادگی در می‌یابیم که نویسنده نگرش مثبتی به این موضوع دارد.

**۵۵ـ گزینه «۴»** کدام یک از موارد زیر احتمالاً عنوان پاراگرافی خواهد بود که به دنبال این متن می‌آید؟
گزینه (۴): عامل دیگری که می‌تواند بر تعادل کار – زندگی اثر بگذارد.
**توضیح**: برای پاسخگویی به سؤالاتی که عنوان پاراگراف بعد از متن را می‌خواهند باید آخرین جمله (و گاهی اولین جملهٔ آخرین پاراگراف) متن را بخوانیم. در این مورد، اولین جملهٔ آخرین پاراگراف متن این است: Previous research has identified **factors** that can affect work-life balance.
یکی از این عوامل، «فناوری» است که در پاراگراف آخر بهش پرداخته شده. بنابراین پاراگراف بعدی احتمالاً در مورد یک عامل دیگر خواهد بود.

---

**متن ۲:** پوزیتیویسم یکی از مکاتب فکری است که آغازش معمولاً به رویکردهای آگوست کومته نسبت داده می‌شود. کومته صرفاً دانش به دست آمده از علوم تجربی را معتبر می‌دانست. این پارادایم که «کمّی» یا «عقل‌گرایی» هم نامیده می‌شود، معتقد است در طبیعت نوعی همسانی و نظم مشخص وجود دارد که این یعنی جهان طبیعی وجودیت مختصی دارد که مستقل از کسانی است که آن {جهان طبیعی} را بررسی می‌کنند. براساس این نگرش، قوانینی بر جهان طبیعی حاکم هستند که توضیح، پیش‌بینی و کنترل پدیده‌ها را میسر می‌کنند. این پارادایم خصوصاً در آموزش مهندسی غالب است که در آن دانشجویان در طول فرایند یادگیری غیرفعال‌اند و به آموزش‌دهنده به عنوان منبع اطلاعات متکی‌اند و نه به خودشان به عنوان خلق‌کننده دانش.
از منظر معرفت‌شناختی، پوزیتیویسم یک موضع بی‌طرف دارد؛ یک نگرش ازراه‌دور و غیرتعاملی بین سوژه و هم‌سن‌وسالانش، با این فرض که واقعیت مشخص است و سوژه (مثلاً یک دانشجوی مهندسی) می‌تواند آن را به طور کامل بداند؛ و بنابراین نیاز است روش مناسب و معتبر برای کشف آن واقعیت را پیدا کرد. در نتیجه، علم پوزیتیویست براساس این فرضیه است که سوژه از این شانس مطلق برخوردار است که واقعیت را از طریق یک روش خاص بداند. این از جمله مشکلاتی است که دانشجویان مهندسی اغلب در کلاس درس با آنها مواجه هستند، با استفاده از این رویکرد سنتی، که لزوماً آنها را برای مشکلات حقیقی که آنها ممکن است به عنوان مهندسان آینده با آنها روبه‌رو شوند، آماده نمی‌کند.
بنابراین، پوزیتیویسم بر تأیید (verification) تأکید دارد، آن هم براساس مشاهده و با هر گونه علمی که بدون استفاده از همبستگی‌های تجربی ایجاد شود، مخالف است. مهم‌ترین ویژگی نظریه پوزیتیویست، جستجو برای دانش سیستماتیک، قابل‌تایید و قابل‌اندازه‌گیری از طریق مشاهده، اندازه‌گیری و رویه‌های آماری است. به این ترتیب، این پارادایم دانشجویان را هدایت می‌کند که آزمون‌ها را به دقیق‌ترین روش ممکن پاسخ دهند، یا براساس آنچه معلم تدریس کرده یا براساس مطالعه کتاب و کسب نمرات بسیار بهتر اما نه لزوماً درک و شناخت بهتر.

**۵۶ـ گزینه «۳»** آن‌طور که در متن گفته شده، کلاسی که براساس پوزیتیویسم اداره شود، کلاسی است که ..... .
۱) بر کار گروهی تأکید دارد
۲) موضوعاتی بسیار ذهنی و سلیقه‌ای ارائه می‌دهد
۳) معلم‌محور است
۴) مبتنی بر پروژه است
**توضیح**: در پاراگراف اول چنین گفته شده:
This paradigm [positivism] is particularly predominant in engineering education, where students are **passive** throughout the learning process, and depend on the *educator as a source of information* and not on themselves as constructors of knowledge.
از این جمله می‌توان برداشت کرد کلاسی که براساس پوزیتیویسم باشد، کلاسی است که دانشجویان نقش غیرفعالی در آن دارند و معلم به عنوان منبع اطلاعات نقش پررنگ‌تری دارد.

---

**۵۷ـ گزینه «۴»** ضمیر it به natural world برمی‌گردد.

---

**۵۸ـ گزینه «۱»** براساس اطلاعات متن به کدام یک از سؤالات زیر می‌توان پاسخ داد؟
گزینه (۱): مهم‌ترین ویژگی و مشخصه پوزیتیویسم چیست؟
**توضیح**: پاسخِ سؤال مطرح شده در گزینه (۱) در این خطوط یافت می‌شود:
*The most important characteristic of positivist theory* is the **search for a systematic, verifiable and measurable knowledge**, focusing on the cause of phenomena that occur, from observation, measurement and statistical procedure.
گزینه‌های (۳) و (۴) به وضوح رد می‌شوند. گزینه (۲) هم کنار می‌رود چون معنی‌اش می‌شود: «پوزیتیویسم چگونه به اصل زیربناییِ روش تدریس مرسوم در کلاس‌های مهندسی تبدیل شد؟» که در متن چیزی در این مورد گفته نشده.

---

**۵۹ـ گزینه «۳»** کدام یک از موارد زیر به درستی از متن استنباط می‌شود؟
گزینه (۳): دانشجویان مهندسی‌ای که براساس اصول پوزیتیویسم آموزش می‌بینند نمی‌توانند به محض شروع کار، به طرز مؤثری مسائل و مشکلات کاری‌شان را مدیریت کنند.
**توضیح**: پاسخ از خطوط آخر پاراگراف دوم استنباط می‌شود:
This is the type of problems that engineering students often encounter in classrooms, by using **this traditional approach [positivism]**, which *do not necessarily prepare them for the real problems that they will find as future engineers.*

---

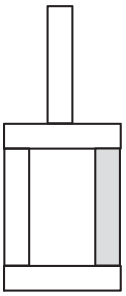
**۶۰ـ گزینه «۲»** لغت subject در پاراگراف دوم را می‌توان با کدام یک از موارد زیر جایگزین کرد؟
گزینه (۲): محقق
**توضیح**: subject (که در متون پژوهشی به صورت «سوژه» ترجمه می‌شود) در اینجا به engineering student برمی‌گردد؛ یا به کسی که طبق متن in search of knowledge باشد. پس می‌توان آن را با researcher جایگزین کرد.

۱۳ـ یک نخ با طول نامعلوم که سرعت سوختن در سراسر آن ثابت است، در اختیار داریم. قرار است نخ را از نقاطی آتش بزنیم و مدت زمان سوختن کامل آن را اندازه بگیریم.

| «الف» | «ب» |
|---|---|
| مدت زمان سوختن کامل نخ، اگر آن را از دو سر و نقطه‌ای که طول نخ را به نسبت ۲ به ۳ تقسیم کند، همزمان آتش بزنیم. | مدت زمان سوختن کامل نخ، اگر آن را از دو نقطه که هرکدام از یک سرِ نخ، فاصله‌ای به اندازه ۳۰ درصد طول نخ دارند، همزمان آتش بزنیم. |

## بخش سوم: سؤالات تحلیلی

■ **راهنمایی:** در این بخش، توانایی تحلیلی شما مورد سنجش قرار می‌گیرد. سؤال‌ها را به‌دقت بخوانید و پاسخ صحیح را در پاسخنامه علامت بزنید.
راهنمایی: با توجه به اطلاعات و شکل زیر، به سؤال‌های ۱۴ تا ۱۶ پاسخ دهید.



کودکی توسط ۵ آجر A، B، C، D و E که یکی از آن‌ها تیره است، سازه مقابل را با گذاشتن سه آجر به طور عمودی و دو آجر به طور افقی ساخته است. درخصوص ساخت این سازه، اطلاعات زیر در دست است.

- آجرهای B و C، یکی به طور افقی و دیگری عمودی قرار گرفته‌اند و این اتفاق برای آجرهای D و E نیز رخ داده است.
- آجر A با آجر E در تماس است، ولی با آجر B در تماس نیست.
- آجرهای B و D، هیچ‌کدام تیره رنگ نیستند.

۱۴ـ اگر پایین‌ترین آجر B باشد، کدام آجر با سه آجر دیگر، در تماس است؟

۱) A ۲) C ۳) D ۴) E

۱۵ـ اگر آجر D فقط با یک آجر در تماس باشد، جایگاه چند آجر از ۴ آجر دیگر، به طور قطع مشخص می‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۶ـ اگر آجرهای B و E با هم در تماس نباشند، جایگاه کدام آجر یا آجرهای زیر در سازه، به طور قطع مشخص می‌شود؟

A.I D.II E.III

۱) فقط II ۲) II و III ۳) فقط III ۴) I و II

**راهنمایی:** با توجه به اطلاعات زیر، به سؤال‌های ۱۷ تا ۲۰ پاسخ دهید.

پنج نفر به اسامی A، B، C، D و E برای خرید فرش به یک فروشگاه فرش مراجعه و هرکدام یک تخته فرش می‌خرند. فرش‌های فروشگاه در سایزهای ۶، ۹ و ۱۲ متری و در رنگ‌های لاکی و کرم عرضه می‌شوند. از ۵ فرش خریداری‌شده، ۲ عدد ۶ متری، ۲ عدد ۹ متری و ۱ عدد ۱۲ متری بوده است. اطلاعات زیر درخصوص سایز و رنگ فرش‌های خریداری‌شده موجود است:

- C، نه فرش ۹ متری خریده است و نه فرشی همرنگ فرش‌های خریداری‌شده توسط A و D.
- فرشی که E خریده، از فرشی که A خریده، کوچک‌تر و همرنگ فرش ۱۲ متری فروخته‌شده بوده است.
- فرش‌های A و B، نه هم‌اندازه بوده‌اند و نه همرنگ.

۱۷ـ اگر D یک فرش ۶ متری لاکی خریده باشد، B کدام‌یک از فرش‌های زیر را خریده است؟

۱) ۹ متری کرم ۲) ۶ متری کرم ۳) ۹ متری لاکی ۴) ۶ متری لاکی

۱۸ـ اگر B یک فرش ۱۲ متری کرم خریده باشد، کدام مورد زیر درخصوص نام افراد و فرش‌هایی که خریده‌اند، صحیح نیست؟

۱) C و E ـ فرش‌های همرنگ ۲) B و C ـ فرش‌های همرنگ ۳) C و D ـ فرش‌های هم‌اندازه ۴) A و D ـ فرش‌های هم‌اندازه

۱۹ـ اگر D و E، فرش‌های کاملاً مشابهی خریده باشند، کدام مورد زیر درخصوص نام فرد و فرشی که خریداری کرده است، به‌طور قطع صحیح است؟

۱) B ـ فرش ۹ متری ۲) C ـ فرش ۶ متری ۳) E ـ فرش لاکی ۴) A ـ فرش کرم

۲۰ـ اگر B از A فرش بزرگ‌تری آن هم به رنگ لاکی خریده باشد، چه کسی یک فرش ۶ متری کرم خریده است؟

۱) C ۲) E
۳) هیچ‌کس ۴) B نمی‌تواند فرش لاکی بزرگ‌تر از فرش A خریده باشد.

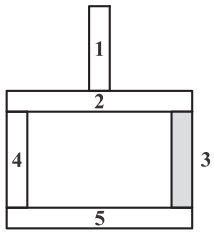
در اینجا نیز ۴ مسیرِ برای سوختن داریم:

مسیرهای (۵) و (۸) هرکدام $3x/0$ و مسیرهای (۶) و (۷) نیز هرکدام $2x/0$ را می‌سوزانند. ← (۵) →، (۶) ←، (۷) →، (۸) ←

بنابراین مدت زمان سوختن در هر دو حالت یکی است و گزینه (۳) صحیح است.

## بخش سوم: سؤالات تحلیلی

**۱۴ـ گزینه «۴»**




آجر شماره ۳، با سه آجر دیگر در تماس است؛ بنابراین باید این آجر را نامگذاری کنیم.

اگر آجر ۵، B باشد، چون D تیره رنگ نیست، یکی از آجرهای ۱، ۲ یا ۴، D خواهد بود.

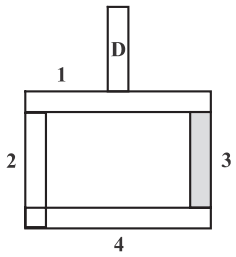
از طرف دیگر چون B افقی است، C باید عمودی باشد و می‌تواند یکی از آجرهای ۱، ۳ یا ۴ باشد.

همچنین چون آجر A نباید با B در تماس باشد، یا آجر شماره ۱ است و یا آجر شماره ۲.

حال فرض می‌کنیم آجر A شماره‌ی ۲ باشد، خواهیم داشت: D یا ۱ خواهد بود یا ۴؛ بنابراین حتماً یک آجر عمودی است، ولی چون در این صورت باید افقی باشد و گزینه‌ای برایش نمی‌ماند، A باید آجر شماره‌ی ۱ باشد.

چون A آجر شماره‌ی ۱ است و باید با آجر E در تماس باشد، آجر شماره‌ی۲، آجر E است.

**۱۵ـ گزینه «۲»**




اگر آجر D فقط با یک آجر در تماس باشد، یعنی موقعیت بالاترین آجر را دارد.

چون آجر B نباید تیره‌رنگ باشد، یکی از آجرهای ۱، ۲ یا ۴ خواهد بود.

از طرف دیگر، چون آجر D عمودی است، آجر E باید افقی باشد و یکی از آجرهای ۱ و ۴ خواهد بود.

اگر E، آجر شماره ۱ باشد، آجر B یا ۲ خواهد بود یا:

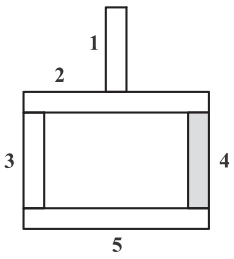
۴:
- ۱← اگر B,۲ باشد، C آجر ۴ و A آجر ۳ می‌شود (زیرا C در این صورت باید افقی باشد).
- ۲← اگر B,۴ باشد، A قطعاً ۲ یا ۳ خواهد بود و چون با E در تماس خواهد بود، امکان‌پذیر نیست.

اگر E، آجر شماره ۴ باشد، آجر B یا ۱ خواهد بود یا:

۲:
- ۳← اگر B,۲ باشد، C آجر ۱ و A آجر ۳ می‌شود (زیرا C در این صورت باید افقی باشد).
- ۴← اگر B,۱ باشد، A قطعاً ۲ یا ۳ خواهد بود و چون با E در تماس خواهد بود، امکان‌پذیر نیست.

بنابراین تنها حالت‌های ۱ و ۳ امکان‌پذیر هستند، که جایگاه B (آجر ۲) و جایگاه A (آجر ۳) را به‌طور قطعی مشخص می‌کنند.

**۱۶ـ گزینه «۱»** طبق شکل زیر آجرهای شماره «۳ و۱»، «۴ و۱»، «۵ و۱» و «۵ و۲»، «۴ و۳» با هم در تماس نیستند و حالت‌های زیر را خواهیم داشت: (۱۰حالت؛ زیرا آجرهای B و E نیز جایگشت دارند: $۲\times۵=۱۰$)




**حالت ۱:** اگر B، ۱ و E، ۳ باشد، در این حالت A آجر شماره‌ی۵، C آجر شماره‌ی۲ و D آجر شماره‌ی ۴ خواهد بود، ولی چون D نمی‌تواند آجر تیره‌رنگ باشد، این حالت غیرقابل قبول است.

**حالت ۲:** اگر E، ۱ و B، ۳ باشد، در این حالت آجر۲، آجر A خواهد بود و چون با B در تماس می‌شود، غیرقابل قبول است.

**حالت ۳:** اگر B، ۱ و E، ۴ باشد، در این حالت A آجر شماره‌ی ۵، C آجر شماره‌ی ۲ و D آجر شماره‌ی ۳ خواهد بود و چون D و E هر دو عمودی می‌شوند، غیرقابل قبول است.

**حالت ۴:** اگر E، ۱ و B، ۴ باشد، در این حالت چون B تیره رنگ می‌شود، غیرقابل قبول است.

**حالت ۵:** اگر B، ۱ و E، ۵ باشد، در این حالت، A آجر شماره‌ی ۴، C آجر شماره‌ی ۲ و D آجر شماره‌ی ۳ خواهد بود و قابل قبول است.

**حالت ۶:** اگر E، ۱ و B، ۵ باشد، در این حالت A آجر شماره‌ی ۲، C آجر شماره‌ی ۴ و D آجر شماره‌ی ۳ خواهد بود، و چون D و E هر دو عمودی می‌شوند، غیرقابل قبول است.

**حالت ۷:** اگر B، ۲ و E، ۵ باشد، در این حالت آجر A یکی از آجرهای ۳ یا ۴ خواهد بود و در نتیجه با آجر ۲ که B است، تماس خواهد داشت؛ بنابراین غیرقابل قبول است.

**حالت ۸:** اگر E، ۲ و B، ۵ باشد، در این حالت A آجر شماره‌ی ۱، C آجر شماره‌ی ۴ و D آجر شماره‌ی ۳ خواهد بود و قابل قبول است.

**حالت ۹:** اگر B، ۳ و E، ۴ باشد، در این حالت A یکی از آجرهای ۲ یا ۵ خواهد بود و قطعاً با B است، تماس خواهد داشت؛ بنابراین غیرقابل قبول است.

**حالت ۱۰:** اگر E، ۳ و B، ۴ باشد، در این حالت چون آجر B تیره رنگ می‌شود، غیرقابل قبول است.

بنابراین حالت‌های ۵ و ۸، حالت‌های قابل قبول هستند و نقطه‌ی اشتراک آن‌ها، قطعی بودن جایگاه D به‌عنوان آجر شماره‌ی ۳ است.

---

**۱۷ـ گزینه «۱»** متناسب با خرید فرش ۶ متری لاکی توسط خریدار D و فرضیات ارائه شده در صورت سؤال، جدول زیر را ترسیم می‌نماییم:

| خریدار | سایز | رنگ |
|---|---|---|
| D | ۶ | لاکی |
| A | ۶ یا ۱۲ | لاکی |
| B | ۶ یا ۹ یا ۱۲ | کرم |
| C | ۶ یا ۱۲ | کرم |
| E | ۶ یا ۹ | ? |

→ با توجه به گزینه‌های داده شده، یا ۶ یا ۹ خواهد بود.

طبق فرضیات، رنگ فرش‌های خریداران A و D با هم و رنگ فرش‌های خریداران C و B با هم یکسان است؛ در نتیجه فرش خریداری شده توسط B قطعاً کرم است.

اگر B فرش ۶ متری خریداری کرده باشد، چون D نیز ۶ متری خریداری کرده است، ۲ فرش ۹ متری و ۱ فرش ۱۲ متری باقی می‌ماند؛ چون C فرش ۹ متری نخریده است، فرش ۱۲ متری برای اوست و A و E هر دو ۹ متری خریده‌اند که با فرض دوم سؤال در تناقض است.

پس B یک فرش ۹ متری کرم خریداری نموده است.

---

**۱۸ـ گزینه «۳»** متناسب با خرید فرشِ ۱۲ متری کرم توسط B و فرضیات ارائه شده توسط صورت سؤال، جدول زیر را ترسیم می‌نماییم:

| خریدار | سایز | رنگ |
|---|---|---|
| B | ۱۲ | کرم |
| A | ۹ | لاکی |
| C | ۶ | کرم |
| D | ۹ | لاکی |
| E | ۶ | کرم |

→ مشاهده می‌کنیم که این دو فرش، هم‌اندازه نیستند.

---

**۱۹ـ گزینه «۲»** چون D و E فرش‌های کاملاً مشابه خریداری کرده‌اند، یا هر دو باید ۶ متری خریداری کرده باشند یا ۹ متری. اگر E و D، ۶ متری خریداری کرده باشند؛ به دلیل اینکه C، فرش ۹ متری نمی‌خرد، باید ۱۲ متری خریداری کرده باشد و B و A، ۹ متری، که برخلاف فرضِ سوم صورت سؤال است؛ بنابراین این حالت غیرقابل قبول است و E و D، ۹ متری خریداری کرده‌اند و چون فرش A باید بزرگ‌تر از فرش E باشد، A، ۱۲ متری و B و C، ۶ متری خواهند بود؛ پس به‌طور قطعی، خریدار C، فرش ۶ متری خریده است.

---

**۲۰ـ گزینه «۳»** B از A فرش بزرگ‌تری خریده است و طبق فرضِ دوم صورت سؤال نیز A از E فرش بزرگ‌تری خریداری کرده است؛ بنابراین قطعاً B، ۱۲ متری، A، ۹ متری و E، ۶ متری خریداری کرده‌اند و چون C، ۹ متری نخریده است، فرش او ۶ متری خواهد بود و D است که ۹ متری خریده است. در مورد رنگ‌ها هم می‌دانیم که A و D یک رنگ و B و C نیز یک رنگ خواهند بود و چون فرش خریداری شده توسط E، هم‌رنگ فرش ۱۲ متری است، B و C و E یک رنگ می‌شوند که طبق گفته‌ی صورت سؤال، لاکی هستند؛ در نتیجه A و D، فرش کرم خریده‌اند و جدول مقابل را خواهیم داشت:

| خریدار | سایز | رنگ |
|---|---|---|
| B | ۱۲ | لاکی |
| A | ۹ | کرم |
| C | ۶ | لاکی |
| D | ۹ | کرم |
| E | ۶ | لاکی |

در نتیجه، هیچ‌کس یک فرش ۶ متری کرم نخریده است.

## سؤالات فیزیک

**مجموعه دروس تخصصی (مکانیک کوانتومی و مکانیک کوانتومی پیشرفته، الکترومغناطیس و الکترودینامیک، ترمودینامیک و مکانیک آماری پیشرفته ۱)**

۱ـ هامیلتونی یک دستگاه کوانتومی $H=\frac{ch}{\lambda}(a_0 I+\vec{a}.\vec{\sigma})$ است که $I$ و $\vec{\sigma}=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$ به‌ترتیب ماتریس واحد و ماتریس‌های پاولی در فضای هیلبرت با بعد ۲ هستند. $\lambda$، $a_0$ و $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ ثابت‌اند. اگر این دستگاه گسیل الکترومغناطیسی انجام دهد، طول موج آن چقدر است؟ ($h$ ثابت پلانک و $c$ سرعت نور در خلأ است.)

۱) $\frac{\lambda}{2\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$ ۲) $\frac{\lambda}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$ ۳) $\frac{\lambda a_0}{2\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$ ۴) $\frac{\lambda a_0}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$

۲ـ ذره‌ای به جرم $m$ در چاه پتانسیل یک بعدی $V(x)=\begin{cases}\infty & x<0\\ \frac{-\hbar^2}{ma}\delta(x-a) & x\geq 0\end{cases}$ در نظر بگیرید ($a>0$). اگر انرژی حالت مقید را به‌صورت $E=\frac{-\hbar^2k^2}{2m}$ نشان دهیم، مقدار $k$ از کدام رابطه به‌دست می‌آید؟

۱) $\tan(ka)=\frac{2}{ka}-1$ ۲) $\tanh(ka)=\frac{2}{ka}-1$ ۳) $\tan(ka)=(\frac{2}{ka}-1)^{-1}$ ۴) $\tanh(ka)=(\frac{2}{ka}-1)^{-1}$

۳ـ نمایش عملگر $\hat{O}$ روی حالت $|\alpha\rangle$ در فضای مکان به‌صورت $<x'|\alpha>$ است. مقدار $<x'|\hat{O}|\alpha>=(\frac{d}{dx'}+\frac{d^2}{dx'^2})<x'|\alpha>$ با کدام رابطه برابر است؟

۱) $(\frac{2}{(x'-x'')^2}-\frac{1}{(x'-x'')})\delta(x'-x'')$ ۲) $(\frac{1}{(x'-x'')^2}-\frac{1}{(x'-x'')})\delta(x'-x'')$

۳) $(\frac{2}{(x'-x'')^2}+\frac{1}{(x'-x'')})\delta(x'-x'')$ ۴) $(\frac{1}{(x'-x'')^2}+\frac{1}{(x'-x'')})\delta(x'-x'')$

۴ـ هامیلتونی یک دستگاه کوانتومی در پایه‌های راست هنجار $\{|+\rangle,|-\rangle\}$ به‌صورت زیر است. در لحظه $t=0$ دستگاه در حالت $|+\rangle$ است. احتمال این‌که این دستگاه در لحظه $t>0$ در حالت مانای متناظر با ویژه مقدار بزرگتر انرژی باشد، چقدر است؟

$$H=\hbar\omega(|+\rangle\langle+|-i\sqrt{5}|+\rangle\langle-|+i\sqrt{5}|-\rangle\langle+|-3|-\rangle\langle-|)$$

۱) $\frac{11}{36}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{25}{36}$

۵ـ هامیلتونی سیستمی متشکل از دو نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی جفت شده به‌صورت زیر است. انرژی اولین تراز برانگیخته این دستگاه کدام است؟

$$H=\frac{P_x^2}{2m}+\frac{P_y^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)+\frac{1}{2}m\omega^2xy$$

۱) $\sqrt{\frac{3}{8}}(1+\sqrt{2})\hbar\omega$ ۲) $\frac{3}{\sqrt{8}}(1+\sqrt{3})\hbar\omega$ ۳) $\sqrt{\frac{3}{8}}(1+\sqrt{3})\hbar\omega$ ۴) $\frac{3}{\sqrt{8}}(1+\sqrt{2})\hbar\omega$

۶ـ ذره‌ای به جرم $m$ و مقید در چاه پتانسیل یک بعدی $V(x)=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|x|}$ در محدوده $-\infty<x<+\infty$ در نظر بگیرید. در تقریب WKB انرژی حالت پایه کدام گزینه است؟ $\left(\int_0^1\frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{u}}du=\frac{\pi}{2}\right)$

۱) $-\frac{8m}{9\hbar^2}(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0})^2$ ۲) $-\frac{16m}{9\hbar^2}(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0})^2$ ۳) $-\frac{16m}{\hbar^2}(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0})^2$ ۴) $-\frac{8m}{\hbar^2}(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0})^2$

۷ـ انتشارگر یک ذره بین دو نقطه $\vec{x}'$ و $\vec{x}''$ به‌صورت $K(\vec{x}'',\vec{x}';t-t_0)=<\vec{x}''|e^{\frac{-i(t-t_0)H}{\hbar}}|\vec{x}'>$ تعریف می‌شود. اگر $[T(\vec{\ell}),H]=0$ که در آن $T(\vec{\ell})=e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\ell}.\vec{P}}$ عملگر انتقال و $\vec{\ell}$ برداری دلخواه است، کدام خاصیت برای انتشارگر درست است؟

۱) $K(\vec{x}'',\vec{x}',t-t_0)=K(-\vec{x}'',-\vec{x}';t-t_0)$ ۲) $K(\vec{x}'',\vec{x}',t-t_0)=K(\vec{x}',\vec{x}'';t-t_0)$

۳) $K(\vec{x}'',\vec{x}',t-t_0)=K(\vec{x}''-\vec{x}';t-t_0)$ ۴) $K(\vec{x}'',\vec{x}',t-t_0)=K^*(\vec{x}'',\vec{x}';t-t_0)$

www.modaresanesharif.ac.ir

۸ــ کدام ماتریس می‌تواند نمایش ماتریسی یک عملگر دوران در فضای هیلبرت دوبعدی باشد؟
( $\vec{\sigma}=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$ ماتریس‌های پاولی، $\vec{a}=\sin\beta\cos\alpha\hat{i}+\sin\beta\sin\alpha\hat{j}$ است و $\alpha,\beta$ هر مقدار دلخواهی می‌توانند اختیار کنند.)

۱) $\frac{\cos\beta+i\vec{\sigma}.\vec{a}}{\sin\beta-i\vec{\sigma}.\vec{a}}$ ۲) $\cos\beta+i\vec{\sigma}.\vec{a}$ ۳) $\sin\beta-i\vec{\sigma}.\vec{a}$ ۴) $\frac{\cos\beta+i\vec{\sigma}.\vec{a}}{\cos\beta-i\vec{\sigma}.\vec{a}}$

۹ــ اگر $\hat{D}^{(j=\frac{1}{2})}(\hat{n},\phi)$ عملگر دوران یک دستگاه کوانتومی حول محور $\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i}+\sqrt{\frac{2}{3}}\hat{j}$ به اندازه زاویه $\phi=+60^\circ$ باشد. دوران‌یافته حالت $|+\rangle$ تحت این عملگر کدام است؟ ( $|\pm\rangle$ ویژه بردارهای ماتریس پاولی $\sigma_z$ و $\hat{j},\hat{i}$ بردارهای یکه در جهت محورهای x و y هستند.)

۱) $\frac{1}{2\sqrt{3}}((\sqrt{2}-i)|+\rangle+3|-\rangle)$ ۲) $\frac{1}{2\sqrt{3}}(3|+\rangle+(\sqrt{2}-i)|-\rangle)$
۳) $\frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}|+\rangle+(\sqrt{2}+i)|-\rangle)$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{6}}((\sqrt{2}+i)|+\rangle+\sqrt{3}|-\rangle)$

۱۰ــ مجموعه‌ای متشکل از دو ذره هر یک با اسپین یک $(s_1=1,s_2=1)$ در نظر بگیرید. ویژه مقدار $\hat{S}_z$ مجموعه برابر $+\hbar$ است که $\hat{S}_z=\hat{S}_{1z}\otimes\hat{I}_2+\hat{I}_1\otimes\hat{S}_{2z}$ است. اگر $P_2$ احتمال این‌که اسپین کل مجموعه $s=2$ و $P_1$ احتمال این‌که اسپین کل آن $s=1$ باشد، مقدار $\frac{P_2}{P_1}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۱ــ اگر $\psi_\ell^{j,m_j}$ ویژه تابع مشترک عملگرهای $J^2$، $L^2$، $J_z$ به‌ترتیب با ویژه مقادیر $\hbar^2j(j+1)$، $\hbar^2\ell(\ell+1)$، $m_j\hbar$ باشد، کدام عبارت در مورد توابع $\phi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_2^{\frac{5}{2},\frac{3}{2}}+i\psi_2^{\frac{5}{2},\frac{3}{2}}\right)$ و $\phi_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_3^{2,2}-\psi_3^{2,-2})$ درست است؟

۱) $\phi_2$ ویژه تابع مشترک عملگرهای پاریته و وارونی زمان است.
۲) $\phi_1$ ویژه تابع مشترک عملگرهای پاریته و وارونی زمان است.
۳) $\phi_1$ و $\phi_2$ هر دو ویژه تابع عملگر وارونی زمان هستند اما $\phi_1$ ویژه تابع عملگر پاریته نیست.
۴) $\phi_1$ و $\phi_2$ هر دو ویژه تابع عملگر پاریته هستند اما هیچ‌یک ویژه تابع عملگر وارونی زمان نیستند.

۱۲ــ ذره‌ای به جرم m در چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی $V(x)=\begin{cases}0 & |x|\le a\\ \infty & |x|>a\end{cases}$ در نظر بگیرید. با تابع موج آزمون و بهنجار $\Psi(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{(2\lambda+1)(\lambda+1)}}{2\lambda a^\lambda\sqrt{a}}(a^\lambda-|x|^\lambda) & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$ و روش وردش، انرژی حالت پایه به ازای کدام $\lambda$ کمینه است؟ $(\lambda>1)$

۱) $\lambda=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-1)$ ۲) $\lambda=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+1)$ ۳) $\lambda=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+1)$ ۴) $\lambda=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-1)$

۱۳ــ اتم هیدروژنی در حالت برانگیخته $|n\ell m\rangle$ توسط میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}_0$ مختل می‌شود به‌طوری‌که انرژی پتانسیل برهمکنش به شکل $V(t)=\begin{cases}e\vec{E}_0.\vec{r}\sin(\omega t) & 0\le t\le T\\ 0 & t<0\ ,\ t>T\end{cases}$ است. با استفاده از نظریه اختلال وابسته به زمان مرتبه اول، گذار به کدام حالت‌های نهایی $|n'\ell'm'\rangle$ امکان‌پذیر است؟ $(\Delta m=m'-m,\Delta\ell=\ell'-\ell)$

۱) $\Delta m=0,\pm1,\Delta\ell=0$ ۲) $\Delta m=0,\pm1,\Delta\ell=\pm1$ ۳) $\Delta m=\pm1,\pm2,\Delta\ell=0,\pm1$ ۴) $\Delta m=\pm1,\pm2,\Delta\ell=\pm1,\pm2$

۱۴ــ پرتویی از پروتون که جریانی به شدت $5\times10^{-9}\ A$ تولید می‌کند به هدفی از مس برخورد می‌کند. ضخامت هدف چنان است که چگالی سطحی آن $0/2\ \frac{mg}{cm^2}$ است. آشکارسازی با مساحت $0/5\ cm^2$ عمود بر پرتوی پراکنده شده در راستایی معین و به فاصله $20\ cm$ از هدف قرار دارد. اگر در هر ثانیه $10$ پروتون توسط آشکارساز شمرده شود، سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی از مس در این راستا چند $\frac{cm^2}{atom\over steradian}$ است؟

۱) $4/0\times10^{-6}$ ۲) $8/1\times10^{-7}$ ۳) $1/3\times10^{-25}$ ۴) $6/7\times10^{-25}$

www.modaresanesharif.ac.ir

## پاسخنامه فیزیک

**مجموعه دروس تخصصی (مکانیک کوانتومی و مکانیک کوانتومی پیشرفته، الکترومغناطیس و الکترودینامیک، ترمودینامیک و مکانیک آماری پیشرفته ۱)**

**۱ـ گزینه «۱» روش اول (حل تشریحی)**: کافی است ویژه مقادیر انرژی هامیلتونی را محاسبه کنیم. دراین‌صورت فرض کنید $E_1$ و $E_2$ ویژه مقادیر انرژی هامیلتونی باشد. با گذار سیستم بین دو ویژه مقدار انرژی فوتونی با انرژی $h\nu = |E_2 - E_1|$ گسیل می‌شود که همان موج الکترومغناطیسی گسیلی سیستم است. قبل از محاسبه ویژه مقادیر انرژی سیستم به دو نکته زیر توجه کنید:

**نکته (۱):** $V$ یک ویژه بردار ماتریس $A$ می‌باشد، اگر و تنها اگر $V$ یک ویژه بردار ماتریس $\alpha I + \beta A$ باشد. در اینجا $I$ ماتریس واحد و $\alpha$ و $\beta$ ثوابتی دلخواه هستند.

**نکته (۲):** اگر $\hat{n}$ بردار یکه $\hat{n} = n_x\hat{i} + n_y\hat{j} + n_z\hat{k}$ باشد (به عبارتی $\hat{n}.\hat{n} = 1$) آن‌گاه همواره داریم: $(\sigma.\hat{n})^2 = I$

بنابراین از نکته (۱) چنانچه $|\psi_1>$ ویژه بردار $\hat{H} = \alpha I + \beta\sigma.\hat{n}$ باشد آنگاه $|\psi_1>$ ویژه بردار $\beta\sigma.\hat{n}$ نیز خواهد بود:

$$(\alpha I + \beta\sigma.\hat{n})|\psi_1> = \lambda|\psi_1> \Rightarrow \beta\sigma.\hat{n}|\psi_1> = (\lambda - \alpha)|\psi_1>$$

حال چنانچه $\vec{a} = |\vec{a}|\hat{a}$ باشد ($|\vec{a}|$ اندازه بردار $\vec{a}$ و $\hat{a}$ بردار یکه در جهت $\vec{a}$ می‌باشد.) داریم:

$$H = \frac{ch}{\lambda}(a_\circ I + \vec{a}.\vec{\sigma}) = \frac{ch}{\lambda}(a_\circ I + |\vec{a}|\hat{a}.\vec{\sigma})$$

از نکته (۲) نشان می‌دهیم ویژه مقادیر $\sigma.\hat{a}$، $\lambda = \pm 1$ می‌باشند. فرض کنید $\lambda$ ویژه مقدار $\sigma.\hat{a}$ می‌باشد، آنگاه داریم:

$$\sigma.\hat{a}|\psi> = \lambda|\psi> \Rightarrow (\sigma.\hat{a})^2|\psi> = |\psi> = \lambda^2|\psi> \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ یا } \lambda = -1$$

اما دقت کنید که چون بررسی هر ماتریس پاولی $tr(\sigma_i) = \circ$ است. آنگاه: $tr(\hat{n}.\hat{\sigma}) = \circ$

از رابطه بالا و نکته زیر نتیجه می‌شود که هم $\lambda = 1$ و هم $\lambda = -1$ ویژه مقادیر $\sigma.\hat{n}$ می‌باشند.

نکته (۳): دقت کنید که اگر $A$ ماتریسی $n \times n$ با ویژه مقادیر $\lambda_1, ..., \lambda_n$ باشد آنگاه:

$$tr(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \Rightarrow tr(\sigma.\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 = \circ \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2$$

حال فرض کنید $|\psi\rangle$ ویژه بردار $\hat{n}$ باشد. آنگاه طبق نکات بالا داریم:

$$\hat{H}|\psi\rangle = \frac{ch}{\lambda}(a_\circ I + |\vec{a}|\hat{a}.\vec{\sigma})|\psi\rangle = \frac{ch}{\lambda}(a_\circ \pm |\vec{a}|)|\psi\rangle$$

پس:

$$E_{1,2} = \frac{ch}{\lambda}(a_\circ \pm |\vec{a}|) \Rightarrow |E_1 - E_2| = \frac{2ch}{\lambda}|\vec{a}| = \frac{hc}{\lambda_e}$$

$$\Rightarrow \lambda_e = \frac{\lambda}{2|\vec{a}|} = \frac{\lambda}{2\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

که $\lambda_e$ طول موج گسیل الکترومغناطیسی است.

**نکته (۴):** همواره به خاطر بسپارید که ویژه مقادیر $\sigma.\hat{n}$، $\lambda = \pm 1$ هستند. (برای $\hat{n}$ دلخواه)

**روش دوم (حل تستی):** کافی است قرار دهیم $a_x = a_y = a_\circ = \circ$. آنگاه به ازای $a_z = 1$ هامیلتونی به‌صورت زیر در خواهد آمد:

$$\hat{H} = \frac{ch}{\lambda}\sigma_z = \begin{pmatrix} \frac{ch}{\lambda} & \circ \\ \circ & -\frac{ch}{\lambda} \end{pmatrix}$$

پس اختلاف دو ویژه مقدار $\hat{H}$ در این حالت $\frac{2ch}{\lambda}$ خواهد بود و در نتیجه $\lambda_e = \frac{\lambda}{2}$ می‌شود. تنها گزینه‌ای که در شرایط بالا صدق می‌کند گزینه (۱) می‌باشد.

**۲ـ گزینه «۴»** ابتدا دقت کنید که حالت مقید بدین معنی است که مقدار تابع موج به ازای $|x| \to \infty$ به صفر میل کند. به عبارتی دیگر:

$$\lim_{|x|\to\infty} \psi(x) \to \circ$$

به ازای $x \geq \circ$ معادله شرودینگر به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{2\delta(x-a)}{a} - k^2\right)\psi(x) = \circ \quad ; \quad x \geq \circ \qquad (1)$$

در نوشتن رابطه بالا از معادله شرودینگر مستقل از زمان مقابل استفاده کردیم: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$

www.modaresanesharif.ac.ir

همچنین $k^۲ = -\frac{۲mE}{\hbar^۲}$ می‌باشد. دقت کنید با توجه به تعریف $k^۲$، از معادله (۱) برای $x > a$ نتیجه می‌شود که حالات مقید متناظر با $E < ۰$ هستند (برای $E > ۰$ پاسخ‌ها نوسانی‌اند). حال پاسخ‌های معادله (۱) را برای دو بازه $۰ < x < a$ و $x > a$ جداگانه به‌دست می‌آوریم. در این بازه‌ها به راحتی دیده می‌شود که:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{kx} + Be^{-kx} = \psi_۱(x) & , \quad ۰ < x < a \\ Ce^{-kx} = \psi_۲(x) & , \quad x > a \end{cases}$$

در معادله بالا $k > ۰$ فرض شده است.

با توجه به اینکه برای $x < ۰$، پتانسیل بی‌نهایت است پس در $x = ۰$ تابع موج می‌بایست صفر شود.

$$\psi(x = ۰) \Rightarrow A + B = ۰ \Rightarrow B = -A$$

همچنین شرط دیگر پیوستگی تابع موج در $x = a$ می‌باشد. پس داریم:

$$Ae^{ka} - Ae^{-ka} = Ce^{-ka} \qquad (*)$$

که در رابطه بالا از $A = -B$ استفاده کردیم. حال برای به‌دست آوردن شرط دیگر از معادله (۱) در بازه $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{d^۲\psi}{dx^۲} dx + ۲\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \psi(x) \frac{\delta(x-a)}{a} dx - k^۲ \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \psi(x) dx = ۰ \qquad (۲)$$

با میل دادن $\varepsilon$ به سمت صفر با توجه به پیوستگی $\psi(x)$ در $x = a$ جمله سوم در (۲) صفر می‌شود و دو جمله اول به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$\lim_{\varepsilon \to ۰} (\psi_۲'(a+\varepsilon) - \psi_۱'(a-\varepsilon)) + \frac{۲\psi_۲(a)}{a} = ۰ \qquad (۳)$$

$$\psi_۲'(a) = -kCe^{-ka} \qquad (۴)$$

$$\psi_۱'(a) = kAe^{ka} + kAe^{-ka}$$

پس از (۳) و (۴) داریم:

$$-kCe^{-ka} - kAe^{ka} - kAe^{-ka} + \frac{۲Ce^{-ka}}{a} = ۰ \qquad (۵)$$

با قرار دادن (*) در معادله (۵) خواهیم داشت.

$$-kAe^{+ka} + kAe^{-ka} - kAe^{+ka} - kAe^{-ka} + \frac{۲}{a}(Ae^{+ka} - Ae^{-ka}) = ۰ \qquad (۶)$$

حال دقت کنید که:

جملات اول و دوم در (۶) $-kAe^{ka} + kAe^{-ka} = -۲kA\sin h(ka)$

جمله سوم و چهارم در (۶) $-kAe^{ka} - kAe^{-ka} = -۲kA\cos h(ka)$

جمله آخر در (۶) $Ae^{ka} - Ae^{-ka} = ۲A\sin h\, ka$

$$\Rightarrow -۲kA\sin h(ka) - ۲kA\cos h(ka) + \frac{۴A}{a}\sin h\, ka = ۰ \qquad (۷)$$

با تقسیم طرفین معادله بالا بر $۲A\sin h\, ka$ خواهیم داشت:

$$ka\coth(ka) = ۲ - ka \Rightarrow \coth ka = \frac{۲}{ka} = \frac{۲}{ka} - ۱ \Rightarrow \tanh ka = (\frac{۲}{ka} - ۱)^{-۱}$$

که همان گزینه (۴) است.

---

**۳ـ گزینه «۱»** ابتدا دقت کنید که اگر $|x>$ و $|x'>$ دو بردار پایه فضای مکان باشند همواره داریم: $< x | x' > = \delta(x - x')$

بنابراین خواهیم داشت:

$$< x' | \hat{o} | x'' > = (\frac{d}{dx'} + \frac{d^۲}{dx'^۲}) < x' | x'' >$$

$$= (\frac{d}{dx'} + \frac{d^۲}{dx'^۲}) \delta(x' - x'') \qquad (۱)$$

همان‌طور که از رابطه (۱) دیده می‌شود با مشتق مرتبه اول و دوم تابع دلتای دیراک مواجه هستیم.

نکته: مشتق مرتبه $n$ ـ ام تابع دلتای دیراک به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int f(x) \delta^n(x+a) dx = -\int \frac{df}{dx} \delta^{n-۱}(x+a) dx \qquad (۲)$$

حال در رابطه (۲) قرار می‌دهیم $f(x) = (x+a)g(x+a)$ ( $a$ مستقل از $x$ است.)

www.modaresanesharif.ac.ir

پس برای $n=1$ خواهیم داشت:

$$\int (x+a)g(x+a)\delta'(x+a)dx = -\int \delta(x+a)\frac{d}{dx}((x+a)g(x+a))dx$$

$$= -\int \delta(x+a)(g(x+a)+(x+a)g'(x+a))dx = -\int \delta(x+a)g(x+a) \qquad (۳)$$

در رابطه بالا از این موضوع که $\int \delta(x+a)(x+a)g'(x+a)dx = 0$ استفاده کردیم.

(در حالت کلی همواره داریم: $\int \delta(x+a)f(x)dx = f(-a)$) از رابطه (۳) نتیجه می‌گیریم که:

$$(x+a)\delta'(x+a) = -\delta(x+a) \Rightarrow \delta'(x+a) = -\frac{\delta(x+a)}{x+a}$$

چرا که $g(x)$ دلخواه است. مشابهاً برای مشتق مرتبه دوم تابع دلتای دیراک داریم:

$$f(x) = (x+a)^2 g(x+a)$$

$$\Rightarrow \int (x+a)^2 g(x+a)\delta^{(2)}(x+a)dx$$

$$= -\int \delta'(x+a)\frac{d}{dx}((x+a)^2 g(x+a))dx \qquad \text{(با استفاده از تعریف)}$$

$$= \int \delta(x+a)\frac{d^2}{dx^2}((x+a)^2 g(x+a))dx \qquad \text{(با استفاده از تعریف)}$$

$$= \int \delta(x+a)(2g(x+a)+4(x+a)g'(x+a)+(x+a)^2 g''(x+a)dx$$

مشابهاً دو جمله آخر در انتگرال‌گیری بالا حاصل صفر می‌دهند و داریم:

$$\int (x+a)^2 g(x+a)\delta^2(x+a)dx = 2\int \delta(x+a)g(x+a)dx$$

چون $g(x+a)$ دلخواه است پس:

$$\delta^{(2)}(x+a) = \frac{2}{(x+a)^2}\delta(x+a)$$

نکته: در حالت کلی داریم:

$$\delta^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^n} n!\delta(x)$$

حال کافی است در روابط بالا به جای $x, x'$ و به جای $a, -x''$ قرار دهیم. آنگاه خواهیم داشت:

$$\left(\frac{d}{dx'}+\frac{d^2}{dx'^2}\right)\delta(x'-x'') = \left(\frac{-1}{x'-x''}+\frac{2}{(x'-x'')^2}\right)\delta(x'-x'')$$

که همان گزینه (۱) می‌باشد.

---

**۴ـ گزینه «۲»** فرض کنیم که ویژه حالت متناظر با ویژه مقدار بزرگ‌تر انرژی $E_>$ باشد $|\psi_>\rangle$.

(مشابهاً $|\psi_<\rangle$ را برای ویژه مقدار کوچک‌تر انرژی $E_<$ به‌کار می‌بریم.)

آنگاه چنانچه در پایه $\{|\psi_>\rangle, |\psi_<\rangle\}$ را $|+\rangle$ بسط دهیم داریم:

$$|+\rangle = \alpha_>|\psi_>\rangle + \alpha_<|\psi_<\rangle \qquad (۱)$$

تحول زمانی $|+\rangle$ با عمل دادن $e^{-iHt}$ به طرفین رابطه (۱) به‌دست می‌آید. پس چنانچه $|\psi,t\rangle$ نشان‌گر تحول‌یافته حالت اولیه باشد داریم:

$$|\psi,t\rangle = \alpha_> e^{-iE_>t}|\psi_>\rangle + \alpha_< e^{-iE_<t}|\psi_<\rangle$$

احتمال یافتن $|\psi_>\rangle$ بعد از اندازه‌گیری انرژی در زمان $t$ به‌صورت مقابل است:

$$|\langle\psi_>|\psi,t\rangle|^2 = |\alpha_>|^2 = |\langle\psi_>|+\rangle|^2$$

پس کافی است $|\psi_>\rangle$ را محاسبه کرده و در $|+\rangle$ ضرب داخلی کنیم. فرض کنید به‌صورت برداری $|+\rangle, |-\rangle$ به‌صورت زیر باشند:

$$|+\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; |-\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

آنگاه با تعریف بالا $\hat{H}$ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\hat{H} = \hbar\omega\begin{pmatrix}1 & -i\sqrt{5}\\ i\sqrt{5} & -3\end{pmatrix}$$

می‌دانیم که ویژه مقادیر هر ماتریس $A$ به‌صورت مقابل به‌دست می‌آیند:

$$\det(A-\lambda I) = 0$$

www.modaresanesharif.ac.ir

که در رابطه بالا $I$ ماتریس واحد می‌باشد. پس داریم:

$$\begin{vmatrix} ۱-\lambda & -i\sqrt{۵} \\ i\sqrt{۵} & -۳-\lambda \end{vmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow (۱-\lambda)(-۳-\lambda)-۵=۰ \Rightarrow \lambda^۲+۲\lambda-۸=۰ \quad \Rightarrow \lambda=۲ \text{ و } -۴$$

پس ویژه مقدار بزرگ‌تر انرژی $E_> = ۲\hbar\omega$ می‌باشد؛ بنابراین کافی است حالت بهنجار متناظر با این ویژه مقدار را پیدا کنیم.

برای یافتن ویژه مقدار متناظر با $\lambda$ برای ماتریس $A$ معادله مقابل را تشکیل می‌دهیم:

$$(A-\lambda I)|\psi\rangle = ۰$$

و مؤلفه‌های $|\psi\rangle$ (ویژه بردار متناظر با ویژه مقدار بزرگتر انرژی) را در شرایط بهنجار می‌یابیم. پس:

$$\begin{pmatrix} ۱-۲ & -i\sqrt{۵} \\ i\sqrt{۵} & -۳-(۲) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -a-i\sqrt{۵}b=۰ \Rightarrow -i\sqrt{۵}b=a$$

دقت کنید در معادله بالا شکل در نظر گرفته شده برای $|\psi\rangle$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ می‌باشد. بنابراین:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -i\sqrt{۵} \\ ۱ \end{pmatrix} \qquad (*)$$

در (*) $b$ ضریب بنهجارش می‌باشد. برای محاسبه آن داریم:

$$\langle\psi|\psi\rangle = ۱ \Rightarrow |b|^۲(۵+۱)=۱ \Rightarrow |b|^۲ = \frac{۱}{۶}$$

از طرفی:

$$\left|\langle +|\psi\rangle\right|^۲ = ۵|b|^۲ = \frac{۵}{۶}$$

پس گزینه (۲) پاسخ صحیح است.

---

**۵ــ گزینه «۳»** کافی است ابتدا با یک تبدیل مختصات مناسب هامیلتونی مسئله را به‌صورت غیرجفت‌شده بنویسیم. (تعریف می‌کنیم $\alpha \equiv \frac{۱}{۲}m\omega^۲$)

قسمت پتانسیل هامیلتونی را در نظر می‌گیریم:

$$V(x,y) = \alpha(x^۲+y^۲+xy)$$

به دنبال دورانی هستیم که در مختصات جدید دوران یافته پتانسیل بالا از حالت جفت‌شده خارج شود. از تقارن پیداست که این دوران یک دوران با زاویه $\frac{\pi}{۴}$ یا $۴۵^\circ$ خواهد بود. (چون هیچ تفاوتی به لحاظ ضریب بین $x$ و $y$ نیست پس تقارن داریم.)

اما به لحاظ آموزشی مناسب است که به صورت ریاضی این زاویه را پیدا کنیم.

فرض کنیم این زاویه $\theta$ باشد. داریم:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta x' - \sin\theta y' \\ \sin\theta x' + \cos\theta y' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲+xy = (\cos\theta x'-\sin\theta y')^۲ + (\sin\theta x'+\cos\theta y')^۲ + (\cos\theta x'-\sin\theta y')(\sin\theta x'+\cos\theta y') \Rightarrow x^۲+y^۲+xy$$

$$= x'^۲+y'^۲+\cos\theta\sin\theta x'^۲ - \sin\theta\cos\theta y'^۲ + (\cos^۲\theta-\sin^۲\theta)x'y' = (۱+\frac{\sin ۲\theta}{۲})x'^۲ + (۱-\frac{\sin ۲\theta}{۲})y'^۲ + \cos ۲\theta x'y'$$

برای اینکه در مختصات جدید، جفتیدگی نداشته باشیم ضریب $x'y'$ باید صفر باشد. پس:

$$\cos ۲\theta = ۰ \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{۴}$$

پس در مختصات جدید پتانسیل به صورت مقابل در می‌آید: ( $\theta = \frac{\pi}{۴}$ را انتخاب می‌کنیم.)

$$V(x',y') = \frac{۳}{۲}x'^۲ + \frac{y'^۲}{۲}$$

دقت کنید که در مختصات جدید همواره رابطه مقابل برقرار است:

$$\frac{P_x^۲+P_y^۲}{۲m} = \frac{P_{x'}^۲+P_{y'}^۲}{۲m}$$

این موضوع را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

ابتدا دقت کنید که:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta x + \sin\theta y \\ -\sin\theta x + \cos\theta y \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y'} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x'} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial y'}$$

و مشابهاً داریم:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial x'} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial y'}$$

پس:

$$\begin{cases} P_x = \cos\theta P_{x'} - \sin\theta P_{y'} \\ P_y = \sin\theta P_{x'} + \cos\theta P_{y'} \end{cases} \Rightarrow P_x^۲+P_y^۲ = P_{x'}^۲+P_{y'}^۲$$

www.modaresanesharif.ac.ir

دقت کنید در به‌دست آوردن رابطه بالا از $[P_{y'}, P_{x'}] = 0$ استفاده کردیم. پس هامیلتونی در مختصات جدید به صورت زیر در می‌آید:

$$H = \frac{P_{x'}^2 + P_{y'}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\frac{3x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2}\right) = \frac{P_{x'}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_{x'}^2 x'^2 + \frac{P_{y'}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_{y'}^2 y'^2$$

که داریم:

$$\omega_{x'} = \sqrt{\frac{3}{2}}\omega \ , \ \omega_{y'} = \sqrt{\frac{1}{2}}\omega$$

از طرفی می‌دانیم که انرژی هر نوسانگر مثل $H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ به صورت $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ داده می‌شود. پس انرژی کل سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$E_{n_x,n_y} = \hbar\omega_x(n_x + \tfrac{1}{2}) + \hbar\omega_y(n_y + \tfrac{1}{2}) = \hbar\omega\left(\sqrt{\frac{3}{2}}(n_x + \tfrac{1}{2}) + \sqrt{\frac{1}{2}}(n_y + \tfrac{1}{2})\right)$$

با توجه به انرژی بالا اولین تراز برانگیخته به ازای $n_y = 1$ و $n_x = 0$ رخ خواهد داد.

پس خواهیم داشت:

$$E_1 = \hbar\omega\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \hbar\omega\left(\sqrt{\frac{3}{8}} + \frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \sqrt{\frac{3}{8}}(1+\sqrt{3})\hbar\omega$$

---

**۶ــ گزینه «۴»** ابتدا دقت کنید که چون ذره مقید است پس انرژی آن منفی است. $(E < 0)$ همچنین چون ذره مقید است (به عبارتی تابع ذره در بی‌نهایت صفر است.) می‌توان مختصات ذره را محدود به فاصله‌ای مثل $a$ در نظر گرفت.

$$0 \le |x| \le a \qquad (1)$$

در حالت کلی از تقریب WKB، انرژی ذره در یک بعد را می‌توان از رابطه زیر به‌دست آورد:

$$\oint p(x)dx = n\pi\hbar \ , \ n = 1,2,3,\ldots \qquad (2)$$

که در رابطه بالا:

$$\frac{p^2}{2m} = E - V(x) \Rightarrow p = \pm\sqrt{2m(E - V(x))}$$

در اینجا $V(x) = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0|x|}$ می‌باشد. برای تخمین $a$ در رابطه (۱) کافی است قرار دهیم $E = V(a)$ (جایی که تکانه ذره به صورت کلاسیکی صفر می‌شود.)

$$E = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \Rightarrow a = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 E_0} \ ; \ E_0 < 0 \qquad (3)$$

دقت کنید که در رابطه (۲) باید روی یک مسیر بسته که ذره در آن رفت و برگشت می‌کند (برای تکانه ذره هم جواب مثبت و هم جواب منفی داریم.) انتگرال‌گیری نماییم. به عبارتی اگر ذره محدود به فضای $-a \le x \le a$ باشد، آنگاه هم روی مسیر از $-a$ به $a$ (تکانه با علامت مثبت) و هم از مسیر $a$ به $-a$ (تکانه با علامت منفی) باید انتگرال بگیریم. پس می‌نویسیم:

$$\oint p(x)dx = 2\int_{-a}^{a}\sqrt{2m(E - V(x))}dx$$

بنابراین داریم:

$$2\int_{-a}^{a}\sqrt{2m(E_0 + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0|x|})}dx = n\pi\hbar \Rightarrow 4\int_{0}^{a}\sqrt{2m(E_0 + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 x})}dx = \pi\hbar \Rightarrow 4\sqrt{-2mE_0}\int_{0}^{a}\sqrt{\frac{a}{x} - 1}\,dx = \pi\hbar$$

حال با استفاده از تغییر متغیر $x = \frac{a}{r}$ داریم:

$$4a\sqrt{-2mE_0}\int_{0}^{1}\sqrt{\frac{1}{x} - 1}\,dx = \pi\hbar \qquad (4)$$

با استفاده از راهنمایی سؤال می‌دانیم که:

$$\int_{0}^{1}\sqrt{\frac{1}{x} - 1}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین با استفاده از رابطه ۳ و ۴ خواهیم داشت:

www.modaresanesharif.ac.ir

$$۲a\sqrt{-۲mE_{\circ}}=\hbar\Rightarrow\frac{-۲e^{۲}\sqrt{۲m}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}\sqrt{-E_{\circ}}}=\hbar\Rightarrow E_{\circ}=\frac{-۸m}{\hbar^{۲}}(\frac{e^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}})^{۲}$$

---

**۷ــ گزینه «۳»**

**روش تستی:** در حالت کلی هرگاه $[T(\vec{\ell}),H]=\circ$ که در آن $T(\vec{\ell})=e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\ell}.\vec{P}}$ عملگر انتقال می‌باشد، آنگاه می‌توان گفت که سیستم ما تحت انتقال ناوردا است. پس باید انتشارگر به $x'-x''$ وابسته باشد و تنها گزینه ۳ درست است.

**روش تشریحی:** برای بیان دقیق‌تر روش بالا به صورت زیر عمل می‌کنیم:

یک مختصات ثابت از فضا مثل $\vec{y}_{\circ}$ را در نظر بگیرید. به ازای هر $\vec{x}$ انتشارگر زیر را می‌نویسیم.

$$K(\vec{x},\vec{y}_{\circ};t-t_{\circ})=<\vec{x}|e^{\frac{-i(t-t_{\circ})H}{\hbar}}|\vec{y}_{\circ}>$$

حال در رابطه بالا $۱=e^{+\frac{i\vec{p}.\vec{y}_{\circ}}{\hbar}}e^{-\frac{i\vec{p}.\vec{y}_{\circ}}{\hbar}}$ را وارد می‌کنیم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$K(\vec{x},\vec{y}_{\circ};t-t_{\circ})=<\vec{x}|e^{\frac{-i(t-t_{\circ})H}{\hbar}}۱|\vec{y}_{\circ}>$$
$$=<\vec{x}|e^{\frac{-i(t-t_{\circ})H}{\hbar}}e^{\frac{+i\vec{p}.\vec{y}_{\circ}}{\hbar}}e^{-\frac{i\vec{p}.\vec{y}_{\circ}}{\hbar}}|\vec{y}_{\circ}>\qquad(*)$$

از طرفی چون $[T(\pm\vec{y}_{\circ}),H]=\circ$، با استفاده از نکته زیر می‌توان نتیجه گرفت که:

$$[T(\vec{y}_{\circ}),e^{\frac{-iH(t-t_{\circ})}{\hbar}}]=\circ$$

**نکته:** در حالت کلی اگر $[A,B]=\circ$، آنگاه برای هر تابع دلخواه مثل $f(x)$ همواره داریم:

$$[f(A),B]=\circ$$

بنابراین (*) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$K(\vec{x},\vec{y}_{\circ};t-t_{\circ})=<\vec{x}|e^{\frac{i\vec{p}.\vec{y}_{\circ}}{\hbar}}e^{\frac{-i(t-t_{\circ})H}{\hbar}}e^{\frac{-i\vec{p}.\vec{y}_{\circ}}{\hbar}}|\vec{y}_{\circ}>$$

از طرفی با توجه به خاصیت عملگر انتقال می‌دانیم که:

$$e^{\frac{-i\vec{p}.\vec{y}_{\circ}}{\hbar}}|\vec{y}_{\circ}>=|\vec{y}_{\circ}-\vec{y}_{\circ}>=|\circ>$$
$$<\vec{x}|e^{\frac{i\vec{p}.\vec{y}_{\circ}}{\hbar}}=<\vec{x}-\vec{y}_{\circ}|$$

**نکته:** در حالت کلی همواره داریم:

$$e^{\frac{-i\vec{p}.\vec{\ell}}{\hbar}}|\vec{x}>=|\vec{x}-\vec{\ell}>$$

پس خواهیم داشت:

$$K(\vec{x},\vec{y}_{\circ};t-t_{\circ})=<\vec{x}-\vec{y}_{\circ}|e^{\frac{-iH(t-t_{\circ})}{\hbar}}|\circ>$$
$$=K(\vec{x}-\vec{y}_{\circ},\circ;t-t_{\circ})\equiv K(\vec{x}-\vec{y}_{\circ};t-t_{\circ})$$

چون بردار $\vec{y}_{\circ}$ دلخواه بود می‌توان در حالت کلی آن را با $\vec{x}'$ تعریف کرد و داریم:

$$K(\vec{x},\vec{x}';t-t_{\circ})=K(\vec{x}-\vec{x}';t-t_{\circ})$$

که همان گزینه (۳) است.

---

**۸ــ گزینه «۴»** توجه: پاسخ اعلام شده توسط سازمان سنجش گزینه (۴) است اما هم گزینه (۴) و هم گزینه (۲) پاسخ صحیح مسئله هستند.

می‌دانیم که در حالت کلی عملگر دوران در سیستمی با تکانه زاویه‌ی کل $\vec{J}$ حول محور با بردار یکه $\hat{n}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

www.modaresanesharif.ac.ir

$$D(\hat{n},\phi)=\exp(-i\phi\frac{\hat{n}.\vec{J}}{\hbar})$$

$$D(\hat{n},\phi)=\exp(-i\phi\frac{\hat{n}.\vec{\sigma}}{2})$$

در مسئله ما: $\vec{J}=\vec{S}=\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ می‌باشد. بنابراین:

حال به نکات زیر توجه می‌کنیم:

$$\exp(-i\phi\frac{\hat{n}.\vec{\sigma}}{2})=\cos\frac{\phi}{2}I-i\sin\frac{\phi}{2}(\hat{n}.\vec{\sigma})$$

**نکته (۱):** در حالت کلی داریم:

$$(\vec{\sigma}.\hat{n})^2=1$$

**نکته (۲):** چنانچه $\hat{n}$ برداری یکه باشد همواره داریم:

برای نشان دادن نکته (۱) از نکته (۲) استفاده می‌کنیم:

ابتدا داریم:

$$(\vec{\sigma}.\hat{n})^2=1\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}:((\vec{\sigma}.\hat{n})^2)^n=1=(\vec{\sigma}.\hat{n})^{2n}$$

$$(\vec{\sigma}.\hat{n})^{2n}=1\Rightarrow(\vec{\sigma}.\hat{n})^{2n+1}=\vec{\sigma}.\hat{n}$$

بنابراین در حالت کلی می‌توان نوشت:

$$e^{i\phi(\hat{n}.\vec{\sigma})}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(i\phi(\hat{n}.\vec{\sigma}))^m}{m!}$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(\phi\hat{n}.\vec{\sigma})^{2p}}{(2p)!}+i\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q(\phi\hat{n}.\vec{\sigma})^{2q+1}}{(2q+1)!}=I\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\phi^{2p}}{(2p)!}+i(\hat{n}.\vec{\sigma})\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q\phi^{2q+1}}{(2q+1)!}=I\cos\phi+i(\hat{n}.\vec{\sigma})\sin\phi$$

با جایگزینی $\phi\to-\frac{\phi}{2}$ نکته (۱) اثبات می‌شود.

قبل از بررسی گزینه (۴)، ابتدا گزینه (۲) را بررسی می‌کنیم. بردار $\vec{a}$ داده شده در مسئله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{a}=\sin\beta(\cos\alpha\hat{i}+\sin\alpha\hat{j})=\sin\beta\hat{a}$$

که $\hat{a}$ بردار یکه در جهت $\vec{a}$ می‌باشد. پس داریم:

$$\cos\beta+i\vec{\sigma}.\vec{a}=\cos\beta+i(\vec{\sigma}.\hat{a})\sin\beta=\exp(i\beta\hat{a}.\vec{\sigma})=\exp(i2\beta\frac{\hat{a}.\vec{S}}{\hbar})$$

که نشان‌دهنده دورانی حول محور $\hat{a}$ به اندازه زاویه $2\beta$ می‌باشد. به وضوح دیده می‌شود که گزینه (۳) نمی‌تواند درست باشد چرا که:

$$\sin\beta-i\vec{\sigma}.\vec{a}=\sin\beta-i(\vec{\sigma}.\hat{a})\sin\beta$$

و عبارت بالا را نمی‌توان به فرم عملگر دوران نوشت. حال به بررسی گزینه (۴) می‌پردازیم:

$$\frac{\cos\beta+i\vec{\sigma}.\vec{a}}{\cos\beta-i\vec{\sigma}.\vec{a}}=\frac{\cos\beta+i(\vec{\sigma}.\hat{a})\sin\beta}{\cos\beta-i(\vec{\sigma}.\hat{a})\sin\beta}$$

از نکته (۱) داریم:

$$\frac{\cos\beta+i(\vec{\sigma}.\hat{a})\sin\beta}{\cos\beta-i(\vec{\sigma}.\hat{a})\sin\beta}=\frac{e^{i\beta\vec{\sigma}.\hat{a}}}{e^{-i\beta\vec{\sigma}.\hat{a}}}=e^{2i\beta\vec{\sigma}.\hat{n}}=e^{i4\beta\frac{(\vec{S}.\hat{a})}{\hbar}}$$

که بیانگر دورانی به اندازه $4\beta$ حول محور $\hat{a}$ می‌باشد. دقت کنید که در اینجا:

$$\frac{1}{e^{-i\beta\vec{\sigma}.\hat{a}}}\equiv e^{i\beta\vec{\sigma}.\hat{a}}$$

به وضوح گزینه (۱) نیز صحیح نیست چرا که در مخرج کسر عبارت گزینه (۳) ظاهر شده است که نمی‌توان آن را به صورت ماتریس دوران نوشت.

**۹ــ گزینه «۲»** همان‌طور که در سؤال قبل بیان شد عملگر دوران حول محور $\hat{n}$ با زاویه $\phi$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$D^{(j=\frac{1}{2})}(\hat{n},\phi)=\exp(-\frac{i\phi(\hat{n}.\vec{s})}{\hbar})=\exp(-\frac{i\phi}{2}(\hat{n}.\vec{\sigma}))$$

که در رابطه بالا از این موضوع استفاده کرده‌ایم که $\vec{J}=\vec{S}=\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$. حال در رابطه بالا قرار می‌دهیم $\phi=\frac{\pi}{3}$ و داریم:

www.modaresanesharif.ac.ir

$$\exp(-\frac{i\pi}{۶}(\hat{n}.\vec{\sigma})) = \cos\frac{\pi}{۶} - i\sin\frac{\pi}{۶}(\hat{n}.\vec{\sigma}) \quad (۱)$$

که در رابطه (۱) از نتایج سوال قبل استفاده کردیم. بنابراین با قراردادن $\hat{n} = \frac{i}{\sqrt{۳}} + \sqrt{\frac{۲}{۳}}\hat{j}$ در رابطه (۱) داریم:

$$\exp(-\frac{i\pi}{۶}(\hat{n}.\vec{\sigma})) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{pmatrix} - \frac{i}{۲}\begin{pmatrix} ۰ & \frac{۱}{\sqrt{۳}} - i\sqrt{\frac{۲}{۳}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۳}} + i\sqrt{\frac{۲}{۳}} & ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\sqrt{\frac{۱}{۶}} - \frac{i}{۲\sqrt{۳}} \\ +\sqrt{\frac{۱}{۶}} - \frac{i}{۲\sqrt{۳}} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{pmatrix} \quad (۲)$$

حال کافی است رابطه ماتریسی (۳) را بر $\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} = |+\rangle$ (ویژه بردار ماتریس پاولی $\sigma_z = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$) اثر دهیم. بنابراین داریم:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\sqrt{\frac{۱}{۶}} & -\frac{i}{۲\sqrt{۳}} \\ \sqrt{\frac{۱}{۶}} & -\frac{i}{۲\sqrt{۳}} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \sqrt{\frac{۱}{۶}} - \frac{i}{۲\sqrt{۳}} \end{pmatrix}$$

که بردار فوق را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \\ \sqrt{\frac{۱}{۶}} & -\frac{i}{۲\sqrt{۳}} \end{pmatrix} = \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}(۳|+\rangle + (\sqrt{۲} - i)|-\rangle)$$

دقت کنید که در رابطه بالا $\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \end{pmatrix} = |-\rangle$ می‌باشد.

**۱۰ـ گزینه «۱»** ابتدا لازم است که ویژه حالات سیستم را که متناظر با $S_z = ۱$ هستند بیابیم. در حالت کلی می‌دانیم که اگر $S_۱, S_۲$ اسپین‌های ذرات سیستم باشند، مقادیر ممکن برای اسپین کل سیستم به صورت زیر است:

$$|S_۱ - S_۲| \le S \le S_۱ + S_۲$$

بنابراین مقادیر ممکن برای اسپین سیستم موردنظر ما به صورت زیر است: $۰ \le S \le ۱+۱ \Rightarrow S = ۲, S = ۱, S = ۰$

حال برای به‌دست آوردن ویژه حالات سیستم از حالت $S = ۲$ شروع می‌کنیم. دقت کنید که مقادیر ممکن برای $m_S$ (ویژه مقادیر $S_z$) در حالتی که اسپین سیستم $S$ باشد با $m_S = -S, -S+۱, \ldots, S-۱, S$ داده می‌شوند. حالت $|S = ۲, m_S = ۲\rangle$ متناظر با حالتی است که اسپین هر دو ذره در راستای محور $z$ و برابر با ۱ باشد. پس داریم:

$$|۲,۲\rangle = |S_۱ = ۱, m_{S_۱} = ۱\rangle \otimes |S_۲ = ۱, m_{S_۲} = ۱\rangle \equiv |۱,۱;۱,۱\rangle \quad (۱)$$

دقت کنید که $|۲,۲\rangle$ حالت کل سیستم است. حال برای به‌دست آوردن $|۲,۱\rangle$ عملگر پایین برنده $J_- = J_{۱-} \otimes I_۲ + I_۱ \otimes J_{۲-}$ را بر طرفین رابطه (۱) اثر می‌دهیم. دقت کنید که $J_{۱-}$ صرفا بر روی ذره (۱) و $J_{۲-}$ بر روی ذره (۲) اثر می‌کند.

می‌دانیم که اگر $|j,m\rangle$ یک ویژه کت متناظر با ویژه کت $J^۲$ و $J_z$ باشد داریم:

$$J_-|j,m\rangle = \sqrt{j(j+۱) - m(m-۱)}\,|j,m-۱\rangle$$

پس:

$$J_-|۲,۲\rangle = \sqrt{۲(۲+۱) - ۲(۲-۱)}\,|۲,۱\rangle = ۲|۲,۱\rangle \quad (۲)$$

همچنین با اثر دادن $I_۱ \otimes J_{۲-} + J_{۱-} \otimes I_۲$ بر $|۱,۱;۱,۱\rangle$ داریم:

$$(J_{-۱} \otimes I_۲ + I_۱ \otimes J_{-۲})|۱,۱;۱,۱\rangle = \sqrt{۲}(|۱,۱;۱,۰\rangle + |۱,۱;۰,۱\rangle) \quad (۳)$$

با برابر قراردادن رابطه (۲) و (۳) داریم:

$$|۲,۱\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|۱,۱;۱,۰\rangle + |۱,۱;۰,۱\rangle) \quad (۴)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

سایر ویژه حالت‌های مربوط به $S=۲$ متناظر با $S_z=۰,-۱,-۲$ برای سیستم هستند که چون مطلوب ما نیستند آن‌ها را به‌دست نمی‌آوریم. ویژه حالت بعد که دارای $S_z=۱$ می‌باشد مربوط به حالتی است که $S=۱$ باشد. دقت کنید که $|S=۱,m_s=۱\rangle$ باید بر $|S=۲,m_s=۱\rangle$ عمود باشد و به راحتی از (۴) دیده می‌شود که:

$$|۱,۱\rangle=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(|۱,۱;۱,۰\rangle-|۱,۱;۰,۱\rangle) \qquad (۵)$$

دقت کنید نیازی به به‌دست آوردن سایر ویژه حالات متناظر با $S=۱$ نیست، چرا که $S_z\neq ۱$ دارند. همچنین نیازی به به‌دست آوردن ویژه حالت $S=۰$ نیز نیست، چرا که در این حالت $S_z=۰$ می‌باشد.

توجه: هر ترکیب خطی $|۲,۱\rangle$ و $|۱,۱\rangle$ که در روابط (۴) و (۵) داده شده‌اند متناظر با حالتی با $S_z=۱$ است. برای دانستن احتمال بودن سیستم در $|۲,۱\rangle$ یا $|۱,۱\rangle$ نیاز به دانستن حالت سیستم است که در سوال داده نشده است. مثلاً $\frac{۱}{\sqrt{۲}}|۱,۱\rangle+\frac{۱}{\sqrt{۲}}|۲,۱\rangle$ یا $\sqrt{\frac{۱}{۳}}|۱,۱\rangle+\sqrt{\frac{۲}{۳}}|۲,۱\rangle$ و ... حالاتی از سیستم هستند که $S_z=۱$ دارند ولی احتمال بودن آن‌ها در $|۱,۱\rangle$ و $|۲,۱\rangle$ متفاوت است. (دقت کنید که چون لزوماً ذرات سیستم یکسان نیستند پس حالت (۵) می‌تواند به عنوان حالتی از سیستم انتخاب شود. یعنی پادمتقارن بودن آن مهم نیست.) به نظر می‌رسد سوال فرض کرده است که به صورت ساده یکی از ذرات در $S_z=۰$ و یکی دیگر در $S_z=۱$ به سر می‌برد و حالات سیستم به طور خیلی ساده با $|۱,۱;۱,۰\rangle$ یا $|۱,۱;۰,۱\rangle$ داده می‌شوند.

با این فرض از رابطه (۴) و (۵) به سادگی داریم:

$$\begin{aligned}|۱,۱;۰,۱\rangle&=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(|۲,۱\rangle-|۱,۱\rangle)\\ |۱,۱;۱,۰\rangle&=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(|۲,۱\rangle+|۱,۱\rangle)\end{aligned} \qquad (۶)$$

در این حالت‌ها به صورت ساده احتمال حضور سیستم در $S=۲$ یا $S=۱$ با $P_{\pm}=\frac{۱}{۲}$ داده می‌شود. (مجذور ضرایب $|۲,۱\rangle$ و $|۱,۱\rangle$ در (۶)) پس:

$$\frac{P_+}{P_-}=۱$$

که همان گزینه (۱) است.

---

**۱۱ــ گزینه «۱»** برای حل این سوال کافی است به نکات زیر توجه کنیم:

**نکته (۱):** عملگر $\theta$ یا همان وارونی زمان عملگری پادیکانی است. به عبارتی برای C دلخواه و مختلط و یک حالت $|\psi\rangle$ داریم:

$$\theta\subset|\psi\rangle=C^*\theta|\psi\rangle$$

**نکته (۲):** در حالت کلی برای j دلخواه، j نیمه‌صحیح یا صحیح، داریم:

$$\theta|j,m\rangle=(i)^{۲m}|j,-m\rangle$$

که j تکانه زاویه‌ای کل سیستم است.

**نکته (۳):** اگر $\pi$، عملگر پاریته باشد برای حالات $|\ell,m\rangle$، هارمونیک‌های کروی، داریم:

$$\pi|\ell,m\rangle=(-۱)^{\ell}|\ell,m\rangle$$

حال با در نظر گرفتن سه نکته بالا عملگر $\theta,\pi$ را بر روی $|\phi_۱\rangle,|\phi_۲\rangle$ اثر می‌دهیم.

$$\theta|\phi_۱\rangle=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(\theta|\psi_۲^{\frac{۵}{۲},\frac{۳}{۲}}\rangle+\theta(i|\psi_۲^{\frac{۵}{۲},-\frac{۳}{۲}}\rangle))$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(\theta|\psi_۲^{\frac{۵}{۲},\frac{۳}{۲}}\rangle-i\theta|\psi_۲^{\frac{۵}{۲},-\frac{۳}{۲}}\rangle)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}((+i)^{۲\times\frac{۳}{۲}}|\psi_۲^{\frac{۵}{۲},-\frac{۳}{۲}}\rangle-i(i)^{۲\times(-\frac{۳}{۲})}|\psi_۲^{\frac{۵}{۲},\frac{۳}{۲}}\rangle)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(|\psi_۲^{\frac{۵}{۲},\frac{۳}{۲}}\rangle-i|\psi_۲^{\frac{۵}{۲},-\frac{۳}{۲}}\rangle)$$

پس دیده می‌شود که $|\phi_۱\rangle$ یک ویژه کت $\theta$ نیست. در به‌دست آوردن رابطه بالا در دومین تساوی از نکته ۱ و در سومین تساوی از نکته ۲ استفاده کردیم.

پس یا گزینه (۱) یا گزینه (۴) درست است. حال در همین جا کافی است عملگر $\theta$ را بر روی $|\phi_۲\rangle$ اثر دهیم.

$$\theta|\phi_۲\rangle=\frac{\theta}{\sqrt{۲}}(|\psi_۳^{۲,۲}\rangle-|\psi_۳^{۲,-۲}\rangle)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}((i)^{۲\times۲}|\psi_۳^{۲,-۲}\rangle-(i)^{-۲\times۲}|\psi_۳^{۲,۲}\rangle)=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}(|\psi_۳^{۲,۲}\rangle-|\psi_۳^{۲,-۲}\rangle)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

پس دیده می‌شود که $|\phi_2\rangle$ ویژه حالت عملگر $\theta$ با ویژه مقدار $-1$ است. پس در همین‌جا گزینه (۴) رد شده و گزینه (۱) درست خواهد بود. اما به لحاظ آموزشی بهتر است اثر عملگر $\pi$ را هم روی $|\phi_1\rangle$ و $|\phi_2\rangle$ بررسی کنیم. حال دقت کنید که $\left|\psi_\ell^{j,m_j}\right\rangle$ را می‌توان برحسب ضرایب کلبش گوردون برحسب ضرب تانسوری $|S,m_S\rangle$ ($S$ اسپین سیستم) و $|\ell,m\rangle$ نوشت. پس به راحتی دیده می‌شود که

$$\pi\left|\psi_\ell^{j,m_j}\right\rangle=(-1)^\ell\left|\psi_\ell^{j,m_j}\right\rangle$$

به راحتی دیده می‌شود که:

$$\pi|\phi_1\rangle=(-1)^2|\phi_1\rangle=|\phi_1\rangle$$
$$\pi|\phi_2\rangle=(-1)^3|\phi_2\rangle=-|\phi_2\rangle$$

پس هر دوی $|\phi_1\rangle$ و $|\phi_2\rangle$ ویژه حالت $\pi$ هستند.

---

**۱۲ــ گزینه «۳»**

**روش اول (تستی و کوتاه):** با توجه به اینکه در صورت سوال فرض شده است که $\lambda>1$ با توجه به گزینه‌ها، تنها در گزینه (۳)، $\lambda>1$ است. در زیر کوچکتر بودن یا بزرگتر بودن ویژه مقادیر را نسبت به ۱ بررسی کرده‌ایم:

گزینه (۱) $\frac{1}{2}(\sqrt{6}-1)<1\Leftrightarrow\sqrt{6}<3\Leftrightarrow 6<9$ ×

گزینه (۲) $\frac{1}{4}(\sqrt{6}+1)<1\Leftrightarrow\sqrt{6}<3\Leftrightarrow 6<9$ ×

گزینه (۳) $\frac{1}{2}(\sqrt{6}+1)>1\Leftrightarrow 6>1$

گزینه (۴) $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-1)<1\Leftrightarrow 6<25$ ×

www.modaresanesharif.ac.ir

**روش دوم (حل تشریحی):** در حالت کلی می‌دانیم که به ازای حالت $|\psi\rangle$، انرژی سیستم همواره با رابطه مقابل داده می‌شود: $E=\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle$

با توجه به اینکه در $|x|<a$ همواره مقدار پتانسیل صفر است. داریم: $E=\int_{-a}^{a}\psi^{*}(x)(-\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{d^{2}}{dx^{2}})\psi(x)dx$

حال دقت کنید که چون $\psi(x)$ تابعی زوج است بنابراین $\frac{d^{2}\psi}{dx^{2}}$ نیز تابعی زوج است. (همواره مشتق تابعی زوج، فرد است و مشتق تابع فرد زوج است. پس $\frac{d\psi}{dx}$ تابعی فرد و بنابراین $\frac{d}{dx}(\frac{d\psi}{dx})$ تابعی زوج است.) بنابراین می‌توان نوشت:

$$E=-\frac{\hbar^{2}}{m}\int_{0}^{a}\psi^{*}(x)\frac{d^{2}}{dx^{2}}\psi(x)dx=-\frac{\hbar^{2}}{m}\frac{(2\lambda+1)(\lambda+1)}{4\lambda^{2}a^{2\lambda+1}}\int_{0}^{a}(a^{\lambda}-x^{\lambda})(-\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2})dx$$

$$=\frac{\hbar^{2}}{m}\frac{(2\lambda+1)(\lambda+1)}{4\lambda a^{2\lambda+1}}\int_{0}^{a}(a^{\lambda}x^{\lambda-2}-x^{2\lambda-2})dx=\frac{\hbar^{2}}{m}\frac{(2\lambda+1)(\lambda^{2}-1)}{4\lambda a^{2\lambda+1}}(\frac{a^{2\lambda-1}}{\lambda-1}-\frac{a^{2\lambda-1}}{2\lambda-1})$$

$$\Rightarrow E=\frac{\hbar^{2}}{m}\frac{(2\lambda+1)(\lambda^{2}-1)}{4a^{2}(\lambda-1)(2\lambda-1)}=\frac{\hbar^{2}(2\lambda+1)(\lambda+1)}{4a_{m}^{2}(2\lambda-1)}=\frac{\hbar^{2}(2\lambda^{2}+3\lambda+1)}{4a^{2}m(2\lambda-1)}$$

حال کافی است $\frac{\partial E}{\partial\lambda}=0$ را محاسبه کرده و مساوی صفر قرار دهیم تا $\lambda$ متناظر با کمینه انرژی را بیابیم:

$$\frac{\partial E}{\partial\lambda}=\frac{(4\lambda+3)(2\lambda-1)-2(2\lambda^{2}+3\lambda+1)}{(2\lambda-1)^{2}}=0$$

$$\Rightarrow 4\lambda^{2}-4\lambda-5=0$$

پاسخ‌های معادله بالا عبارتند از:

$$\lambda=\frac{4\pm\sqrt{96}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{6}}{2}$$

که چون $\lambda>1$ است پس $\lambda=\frac{1+\sqrt{6}}{2}$ جواب خواهد بود.

---

**۱۳ــ گزینه «۲»** می‌دانیم که احتمال‌گذار از حالت $i$ به $f$ درصورتی‌که پتانسیل اختلالی $\hat{V}(t')$ به سیستم اعمال شود به صورت زیر داده می‌شود. (مرتبه اول تقریب)

$$P_{if}(t)=\left|\frac{-i}{\hbar}\int_{0}^{t}\langle\psi_{f}|\hat{V}(t')|\psi_{i}\rangle e^{-i\omega_{fi}t'}dt'\right|^{2} \qquad (1)$$

که $\omega_{fi}=\frac{E_{f}-E_{i}}{\hbar}$ می‌باشد. حال فرض کنید در حالت خاص پتانسیل هارمونیک مقابل به سیستم اعمال شود: $\hat{V}(t)=\hat{v}e^{i\omega t}+\hat{v}^{\dagger}e^{-i\omega t}$

که $\hat{v}$ عملگری مستقل از زمان است. با قرار دادن پتانسیل بالا در رابطه (۱) داریم:

$$P_{if}(t)=\frac{1}{\hbar^{2}}\left|\langle\psi_{f}|\hat{v}|\psi_{i}\rangle\int_{0}^{t}e^{i(\omega_{fi}+\omega)t'}dt'+\langle\psi_{f}|\hat{v}^{\dagger}|\psi_{i}\rangle\int_{0}^{t}e^{i(\omega_{fi}-\omega)t'}dt'\right|^{2}$$

$$=\frac{1}{\hbar^{2}}\left|\langle\psi_{f}|\hat{v}|\psi_{i}\rangle\right|^{2}\left|\frac{e^{i(\omega_{fi}+\omega)t}-1}{\omega_{fi}+\omega}\right|^{2}+\frac{1}{\hbar^{2}}\left|\langle\psi_{f}|v^{\dagger}|\psi_{i}\rangle\right|^{2}\times\left|\frac{e^{i(\omega_{fi}-\omega)t}-1}{\omega_{fi}-\omega}\right|^{2}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

دقت کنید که در به‌دست آوردن رابطه بالا از ضرب جملات اول و دوم در یکدیگر صرف‌نظر شده است. چرا که این جملات مرتبه دوم می‌باشند و منجر به تحریک گذاری مانا نمی‌شوند. با استفاده از رابطه $\left|e^{i\theta}-1\right|^2=4\sin^2\frac{\theta}{2}$ رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P_{if}(t)=\frac{4}{\hbar^2}\left(\left|\langle\psi_f|\hat{v}|\psi_i\rangle\right|^2\frac{\sin^2\frac{(\omega_{fi}+\omega)t}{2}}{(\omega_{fi}+\omega)^2}+\left|\langle\psi_f|\hat{v}^\dagger|\psi_i\rangle\right|^2\frac{\sin^2\frac{(\omega_{fi}-\omega)t}{2}}{(\omega_{fi}-\omega)^2}\right)$$

با توجه به شکل پتانسیل اختلالی در بازه زمانی $0\le t\le T$ داریم:

$$\hat{V}(t)=e\vec{E}_0.\hat{\vec{r}}\sin\omega t=\frac{e\vec{E}_0.\hat{\vec{r}}}{2}(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})=\frac{e\vec{E}_0.\hat{\vec{r}}}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}e^{i\omega t}+\frac{e\vec{E}_0.\hat{\vec{r}}}{2}e^{-\frac{i\pi}{2}}e^{-i\omega t}\Rightarrow\hat{v}=\frac{e\vec{E}.\hat{\vec{r}}}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow P_{if}(t)=\frac{4}{\hbar^2}\left|\langle\psi_f|\hat{v}|\psi_i\rangle\right|^2\left(\frac{\sin^2(\omega+\omega_{fi})t}{(\omega_{fi}+\omega)^2}+\frac{\sin^2(\omega-\omega_{fi})t}{(\omega-\omega_{fi})^2}\right)$$

از طرفی داریم:

$$\vec{E}_0.\hat{\vec{r}}=r(E_x\sin\theta\cos\phi+E_y\sin\theta\sin\phi+E_z\cos\theta)\qquad(2)$$

حال می‌دانیم که:

$$\sin\theta\cos\phi=-\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(Y_{1,1}-Y_{1,-1})$$

$$\sin\theta\sin\phi=i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(Y_{1,1}+Y_{1,-1})\qquad(3)$$

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{10}\Rightarrow\vec{E}_0.\hat{\vec{r}}=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}r\left(\frac{-E_x+iE_y}{\sqrt{2}}Y_{11}+\frac{E_x+iE_y}{\sqrt{2}}Y_{1,-1}+E_zY_{10}\right)$$

پس با توجه به (۲) و (۳) می‌توان برای حالات $|n_i\ell_im_i\rangle$ و $|n_f\ell_fm_f\rangle$ مربوط به اتم هیدروژن نوشت:

$$\langle n_f\ell_fm_f|\vec{E}.\hat{\vec{r}}|n_i\ell_im_i\rangle=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int_0^\infty r^3R^*_{n_f\ell_f}(r)R_{n_i\ell_i}\,dr$$

$$\times\int Y^*_{\ell_fm_f}(\theta,\varphi)\left(\frac{-E_x+iE_y}{\sqrt{2}}Y_{11}+\frac{E_x+iE_y}{\sqrt{2}}Y_{1,-1}+E_zY_{10}\right)Y_{\ell_im_i}(\theta,\phi)d\Omega\qquad(4)$$

از طرفی همواره داریم:

$$Y_{\ell_1m_1}(\beta,\alpha)Y_{\ell_2m_2}(\beta,\alpha)=\sum_{\ell m}\sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi(2\ell+1)}}\times\langle\ell_1,\ell_2;0,0|\ell,0\rangle\langle\ell_1,\ell_2;m_1,m_2|\ell,m\rangle Y_{\ell m}(\beta,\alpha)$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$\int_0^\pi d\alpha\int_0^\pi Y^*_{\ell m}(\beta,\alpha)Y_{\ell_1m_1}(\beta,\alpha)Y_{\ell_1m_1}\sin\beta d\beta=\sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi(2\ell+1)}}\langle\ell_1,\ell_2;0,0|\ell,0\rangle\times\langle\ell_1,\ell_2;m_1,m_2|\ell,m\rangle\qquad(5)$$

که $\langle\ell_1,\ell_2;m_1,m_2|\ell,0\rangle$ ضریب کلبش گوردون بسط $|\ell,0\rangle$ برحسب $|\ell_1,\ell_2;m_1,m_2\rangle$ می‌باشد.

با توجه به (۴) و (۵) دیده می‌شود که در (۴) حاصل انتگرال روی زاویه فضایی به رابطه زیر منجر می‌شود:

$$\int d\Omega Y^*_{\ell_f\omega_f}Y_{1m'}Y_{\ell_im_i}=\sqrt{\frac{3(2\ell_i+1)}{4\pi(2\ell_f+1)}}\times\langle\ell_i,1;0,0|\ell_f,0\rangle\langle\ell_i,1;m_i,m'|\ell_f,m_f\rangle$$

۱ـ حال دقت کنید در بسط $|\ell_f,m_f\rangle$ برحسب $|\ell_i,1;m_i,m'\rangle$ همواره باید $m_f=m_i+m'$ باشد (دقت کنید که $\hat{L}_z=\hat{L}_{z_1}\otimes\hat{I}_2+\hat{I}_1\otimes\hat{L}_{z_2}$) و بنابراین $m_f=m_i+m'$ نتیجه می‌شود و از طرفی چون یکی از $\ell$ها در $|\ell_i,1;m_i,m'\rangle$ برابر ۱ است، $m'=\pm1$ و ۰ می‌باشد و داریم:

$$m_f-m_i=\Delta m=\pm1,0$$

www.modaresanesharif.ac.ir

۲ـ مقدار $\ell_f$ همواره باید بین $\ell_i - ۱ \le \ell_f \le \ell_i + ۱$ باشد. (بسط $|j,m\rangle$ برحسب حالات $|j_۱,m_۱\rangle$ و $|j_۲,m_۲\rangle$ را به یاد آورید که در آن همـواره داشـتیم $|(j_۱ - j_۲)| \le j \le j_۱ + j_۲$.). پس همواره داریم:

$$\ell_f - \ell_i = -۱, ۰, ۱$$

اما باید به ضرب داخلی $\langle \ell_i, ۱; ۰, ۰ | \ell_f, ۰\rangle$ هم توجه کنیم. دقت کنیم که چنانچه عملگر پاریته را بر $|\ell_i, ۱; ۰, ۰\rangle$ و $|\ell_f, ۰\rangle$ اعمال کنیم داریم:

$$\pi|\ell_f, ۰\rangle = (-۱)^{\ell_f} |\ell_f, ۰)$$

$$\pi|\ell_i, ۱; ۰, ۰\rangle = (-۱)^{\ell_i + ۱}|\ell_i, ۱; ۰, ۰\rangle$$

اما $|\ell_i, ۱, ۰, ۰\rangle$ تنها زمانی در بسط $|\ell_f, ۰\rangle$ ظاهر می‌شود که هم پاریته با $|\ell_f, ۰\rangle$ باشد پس داریم:

$$(-۱)^{\ell_i + ۱} = (-۱)^{\ell_f} \quad \Rightarrow (-۱)^{\ell_f - \ell_i} = -۱$$

بنابراین $\Delta\ell = ۰$ غیرممکن است و داریم $\Delta\ell = \pm ۱$ پس خواهیم داشت: $\Delta\ell = \pm ۱$ و $\Delta m = \pm ۱, ۰$

**نکته تستی:** همان‌طور که دیده می‌شود به‌دست آوردن قواعد گزینش برای دوقطبی الکتریکی $(\vec{E}.\hat{r})$ بسیار طولانی است لذا بهتر است $\Delta\ell = \pm ۱$ و $\Delta m = \pm ۱, ۰$ را برای قواعد گزینش دوقطبی الکتریکی به‌عنوان نکته‌ای تستی به خاطر بسپارید.

---

**۱۴ـ گزینه «۳»** کافی است از تعریف سطح مقطع پراکندگی دیفرانسیلی در واحد اتم در واحد زاویه فضایی $(\frac{d\sigma}{d\Omega})$ استفاده کنیم. در حالت کلی چنانچه $dN$ تعداد ذرات پراکنده شده در زاویه فضایی $d\Omega$ باشد، داریم:

$$dN = Nnt\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega \qquad (۱)$$

در رابطه بالا $N$ تعداد ذرات فرودی بر ماده، $t$ ضخامت ماده هدف (در اینجا مس) و $n$ چگالی تعداد اتم‌های ماده هدف در واحد حجم می‌باشد. چنانچه $t$ تقسیم بر واحد طول بسیار کوچک‌تر از یک باشد می‌توان $nt$ را با چگالی سطحی اتم‌های ماده هدف تقریب زد. (تعریف می‌کنیم $nt \equiv \alpha$). رابطه (۱) را در واحد زمان می‌توان به صورت مقابل نوشت:

$$\frac{\Delta N}{\Delta T} = \frac{N\alpha}{\Delta T}\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega \qquad (۲)$$

حال کافی است اطلاعات مسئله را وارد کنیم:

$$\frac{N}{\Delta T} = \frac{۵\times ۱۰^{-۹}\,A}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}\,C} = \frac{۵\times ۱۰^{۱۰}}{۱/۶}\ \frac{Proton}{s} \qquad \frac{\Delta N}{\Delta T} = ۱۰\ \frac{Proton}{s}$$

دقت کنید که در به‌دست آوردن $\frac{N}{\Delta T}$، میزان جریان پرتون‌های فرودی به صفحه را بر بار هر پروتون تقسیم کرده‌ایم. همچنین:

$$\alpha = \frac{۰/۲\times ۱۰^{-۶}\,kg}{cm^۲}\times\frac{۱c}{۱/۰۵\times ۱۰^{-۲۵}\,kg} = \frac{۲\times ۱۰^{۱۸}}{۱/۰۵}\ \frac{atom}{cm^۲}$$

دقت کنید در رابطه بالا برای $\alpha$ از جرم هر اتم مس که با $m_{cu} = ۱/۰۵\times ۱۰^{-۲۵}\,kg$ داده می‌شود استفاده شده است. حال می‌بایست $d\Omega$ را تقریب بزنیم. می‌دانیم که مساحت سطح مقطع متناظر با زاویه فضایی $\Delta\Omega$ در فاصله $R$ از یک نقطه با رابطه زیر داده می‌شود:

$$R^۲\Delta\Omega = \Delta A \Rightarrow \Delta\Omega = \frac{\Delta A}{R^۲} = \frac{۰/۵cm^۲}{(۲۰\,cm)^۲} = \frac{۰/۵}{۴}\times ۱۰^{-۲}\ steradian$$

حال تمام اطلاعات لازم برای محاسبه $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ را داریم:

$$۱۰(\frac{Proton}{S}) = \frac{۵\times ۱۰^{۱۰}}{۱/۶}(\frac{Proton}{S})\times\frac{d\sigma}{d\Omega}\times\frac{۲\times ۱۰^{۱۸}}{۱/۰۵}\ \frac{atom}{cm^۲}\times\frac{۰/۵}{۴}\times ۱۰^{-۲}\ steradian$$

$$\Rightarrow ۱۰ = \frac{۵\times ۱۰^{۲۶}}{۶/۷۲}\times\frac{d\sigma}{d\Omega} \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = ۱/۳\times ۱۰^{-۲۵}\ \frac{cm^۲}{atom.steradian}$$

---

www.modaresanesharif.ac.ir

**۱۵ــ گزینه «۲»** در حالت کلی اگر $f(\theta,k)$ دامنه پراکندگی ذره‌ای به جرم $m$ و انرژی $E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$ باشد همواره داریم:

$$f(k,\theta)=\frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)e^{i\delta_\ell}\sin\delta_\ell P_\ell(\cos\theta)$$

دقت کنید که امواج S متناظر با $\ell=0$ می‌باشند. در انرژی‌های پایین، سهم غالب در دامنه پراکندگی را $\ell=0$ می‌دهد؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(k,\theta)\simeq\frac{e^{i\delta_0}}{k}\sin\delta_0$$

که در رابطه بالا از $P_0(\cos\theta)=1$ استفاده کردیم. دقت کنید که در تقریب مرتبه صفرم $f(k,\theta)$ به $\theta$ وابسته نیست و می‌توان آن را با بسط sin و cos تا اولین مرتبه غیرصفر برحسب ka بسط داد. پس داریم:

$$f(k,\theta)\simeq\frac{-2mV_0a}{4\hbar^2k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(-2k^2a^2\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}a^2}{6}\right)=\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2}\qquad(1)$$

دقت کنید در انرژی‌های پایین $|\delta_0|\ll1$ و داریم:

$$\frac{\delta_0}{k}\simeq\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2}\Rightarrow\delta_0\simeq\frac{2mV_0a^3k}{3\hbar^2}\qquad(2)$$

دقت کنید که با توجه به رابطه بالا سهم غالب در پراکندگی موج S از پتانسیل کروی داده شده در مسئله (soft potential) از مرتبه $\delta_0\simeq ka$ می‌باشد. هیچ‌کدام از گزینه‌ها مرتبه بزرگی $\delta_0\simeq ka$ را ندارند. اما بین گزینه (۲) و (۴) نزدیک‌ترین گزینه به رابطه (۲) گزینه (۲) است. به نظر می‌رسد که در گزینه‌های (۲) و (۴) یک ضریب $\frac{1}{2k^2a^2}$ جا افتاده است و نزدیک‌ترین گزینه به جواب ما در رابطه (۲) همان گزینه (۲) است. در واقع داریم:

$$\text{بسط گزینه (۲)}\simeq\frac{4ma^5V_0k^3}{3\hbar^2}$$

$$\text{بسط گزینه (۴)}\simeq\frac{8ma^5V_0k^3}{3\hbar^2}$$

علت وجود یک ضریب ۲ بیشتر در گزینه (۲) نسبت به آنچه که به‌دست آوردیم آن است که احتمالاً در هنگام محاسبه رابطه (۱)، به جای $-2k^2a^2\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}a^2}{6}$ رابطه زیر با یک علامت منفی محاسبه شده است:

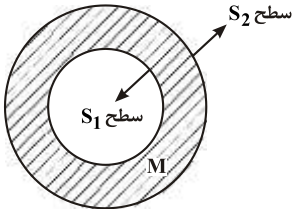
$$-2k^2a^2\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}a^2}{6}=\frac{4mV_0a^3}{3\hbar^2}$$

---

**۱۶ــ گزینه «۳»** کافی است از رابطه $\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ استفاده کنیم. ناحیه بین دو پوسته کروی را با M نشان می‌دهیم. پس:

$$\frac{Q}{\varepsilon_0}=\int_M\vec{\nabla}.\vec{E}\,dV=\oint_{S_2}\vec{E}.d\vec{s}-\oint_{S_1}\vec{E}.d\vec{s}\qquad(1)$$

که در رابطه (۱) از قضیه دیورژانس استفاده کرده‌ایم. دقت کنید که M دارای دو سطح است:




www.modaresanesharif.ac.ir

رابطه (۱) را می‌توان اینگونه هم تصور کرد که $\oint_{S_۲} \vec{E}.d\vec{s}$ حاصل بار الکتریکی داخل کره به شعاع $R_۲$ و $\oint_{S_۱} \vec{E}.d\vec{s}$ حاصل بار الکتریکی داخل کره به شعاع $R_۱$ را می‌دهد پس بار موجود در فضای $M$ تفاضل میزان بار موجود در دو کره است.

حال داریم:

$$\oint_{S_۲} \vec{E}.d\vec{s} = E(R_۲)۴\pi R_۲^۲ = \frac{q}{\varepsilon_\circ}(۱-e^{-\frac{R_۲}{R}}) = \frac{q}{\varepsilon_\circ}(۱-e^{-\frac{۲R}{R}}) = \frac{q}{\varepsilon_\circ}(۱-e^{-۲})$$

که در آن از تقارن کروی $\vec{E}(r)$ استفاده کرده‌ایم. (دقت کنید که روی سطح $S_۲$ $d\vec{s} \parallel \hat{r}$ ) مشابهاً داریم:

$$\oint_{S_۱} \vec{E}.ds = \frac{-q}{\varepsilon_\circ}(۱-e^{-\frac{R_۱}{R}}) = \frac{-q}{\varepsilon_\circ}(۱-e^{-۱})$$

پس:

$$\frac{Q}{\varepsilon_\circ} = \oint_{S_۲} \vec{E}.d\vec{s} - \oint_{S_۱} \vec{E}.d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_\circ}e^{-۱} - \frac{q}{\varepsilon_\circ}e^{-۲} \quad \Rightarrow Q = \frac{q(e^{+\circ/۵} - e^{-\circ/۵})}{e^{۱/۵}} = \frac{۲q\sinh(\circ/۵)}{e^{۱/۵}}$$

---

**۱۷ــ گزینه «۴»** فرض کنیم تنها یک خط بار با چگالی بار $\lambda$ داریم. فرض کنید این خط بار در زاویه $\theta = \theta_\circ$ و در فاصله شعاعی $\rho = \rho_\circ$ نسبت به مبدأ قرار دارد. در مختصات قطبی فرض می‌کنیم چگالی حجمی این خط بار برابر $d = \alpha\delta(\rho-\rho_\circ)\delta(\theta-\theta_\circ)$ باشد. $\alpha$ ضریب ثابتی است که باید تعیین شود. انتگرال‌گیری از $d$ در فضا باید به ما بار موجود روی خط بار را بدهد. داریم:

$$Q = \int_\circ^\infty \int_\circ^{۲\pi} \int_\circ^{\ell} \alpha\delta(\rho-\rho_\circ)\delta(\theta-\theta_\circ)\rho d\rho\, d\theta\, dz = \ell\alpha\rho_\circ \qquad (۱)$$

دقت کنید که المان حجم در مختصات استوانه‌ای $\rho d\rho\, d\theta dz = dv$ می‌باشد. همچنین در انتگرال‌گیری رابطه (۱) از $\int f(x)\delta(x-x_\circ)dx = f(x_\circ)$ استفاده کرده‌ایم. دقت کنید که انتگرال (۱) تا ارتفاع $\ell$ روی محور $Z$ گرفته شده است. از طرفی مقدار بار موجود روی خط بار در بازه $\circ \le z \le \ell$ برابر $Q = \lambda\ell$ می‌باشد. پس:

$$\lambda\ell = \ell\alpha\rho_\circ \Rightarrow \alpha = \frac{\lambda}{\rho_\circ}$$

پس چگالی حجمی هر خط بار در شعاع $a$ از مبدأ و در زاویه $(\theta = \frac{۲\pi n}{۸} = \frac{n\pi}{۴}, n = \circ, ۱, ...)$ به‌صورت زیر است:

$$d_n = (-۱)^n \frac{\lambda}{a}\delta(\rho-a)\delta(\theta-\frac{n\pi}{۴})$$

در $d_n$، $(-۱)^n$ به گونه‌ای انتخاب شده است که علامت خط بار را به‌ازای شماره آن درست نشان دهد. بنابراین چگالی بار حجمی کل مجموعه به سادگی برابر مجموع تمام $d_n$ها خواهد بود:

$$d_T = \frac{\lambda}{a}\sum_{n=\circ}^{۷}(-۱)^n\delta(\rho-a)\delta(\theta-\frac{n\pi}{۴})$$

---

**۱۸ــ گزینه «۱»** برای حل این مسئله کافی است معادله لاپلاس زیر را حل کنیم:

$$\nabla^۲\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_\circ} \qquad (۱)$$

تابع گرین معادله بالا به‌صورت مقابل می‌باشد:

$$\nabla^۲G(x,x',y,y') = -۴\pi\delta(x-x')\delta(y-y')$$

پاسخ‌های کلی معادله لاپلاس بالا به شکل زیر هستند:

$$\phi(r) = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\int_V \rho(x')G(x,x')d^۳x' + \frac{۱}{۴\pi}\oint_S (G(x,x')\frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi\frac{\partial G}{\partial n'})da''$$

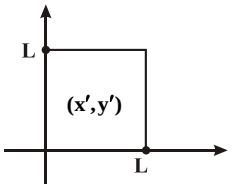
www.modaresanesharif.ac.ir

در رابطه بالا منظور از $\oint_S$ انتگرال روی مرز ناحیه می‌باشد. توجه کنید که چون $\phi(x')$ روی مرز صفر است پس $\phi\frac{\partial G}{\partial n'}=0$. همچنین در انتخاب $G$ در رابطه (۲) این آزادی را داریم که آن را به گونه‌ای انتخاب کنیم که در شرایط مرزی دیریکله صدق کند. بنابراین از رابطه (۲) تنها جمله اول باقی می‌ماند و داریم:

$$\phi(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(x')G(x,x')d^3x'=\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_V G(x,y')d^3x' \qquad (*)$$

بنابراین کافی است تابع گرین مورد نظرمان در مسئله را محاسبه کنیم.

نقطه $(x',y')$ را در شکل زیر در نظر بگیرید:




می‌خواهیم تابع گرین متناظر با شرایط دیریکله در شکل بالا را محاسبه کنیم. مسئله را به دو بازه $y'<y$ و $y<y'$ تقسیم می‌کنیم.

۱) $y>y'$ :

$$\nabla^2 G(x,y;x',y')=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}=0$$

حال با جداسازی متغیرها داریم:

$$G=f(x)g(y)\Rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)}+\frac{g''(y)}{g(y)}=0 \qquad (۲)$$

حال دقت کنید که در رابطه (۲) چون جمع توابعی که صرفاً وابسته به $x$ یا $y$ هستند برابر یک مقدار ثابت (در اینجا $0$) شده است هر کدام از آنها باید ثابت باشند. فرض کنیم یکی از این ثابت‌ها $k^2$ باشد. بنابراین داریم:

$$\frac{f''}{f}=-k^2 \quad ; \quad \frac{g''}{g}=k^2$$

دقت کنید که شرایط مرزی روی $x$ در $y<y'$ باید تناوبی باشد. بنابراین $k^2>0$ و داریم:

$$\begin{cases} f''=-k^2 f \Rightarrow f(x)=A_k\sin kx+B_k\cos kx \\ g''=k^2 g \Rightarrow g(y)=C_k e^{ky}+D_k e^{-ky} \end{cases}$$

حال با توجه به شرایط مرزی به تعیین $k$ می‌پردازیم. چون حاصل تابع گرین روی $x=0$ و $x=L$ صفر است؛ بنابراین داریم:

$$f(x=0)=0 \Rightarrow B_k=0$$

$$f(x=L)=0 \Rightarrow \sin kL=0 \Rightarrow kL=m\pi \;;\; m\in Z \Rightarrow f(x)=A\sin(\frac{m\pi}{L}x)$$

پس:

از طرفی دقت کنید که در $y=L$، تابع گرین صفر است پس:

$$Ce^{kL}+De^{-kL}=0 \Rightarrow D=-Ce^{2kL}=-Ce^{2m\pi}$$

پس تابع گرین را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$G_m=A_m\sin\frac{m\pi x}{L}(e^{\frac{m\pi y_>}{L}}-e^{2m\pi-\frac{m\pi y_>}{L}}) \qquad (۳)$$

$$=A'_m\sin\frac{m\pi x}{L}\sinh(\frac{m\pi y_>}{L}-m\pi)$$

که نماد $y_>$ به معنی $y>y'$ است.

www.modaresanesharif.ac.ir

دقت کنید که همواره می‌توان $e^{\frac{m\pi y}{L}} - e^{2m\pi - \frac{m\pi y}{L}}$ را به‌صورت $A''\sin h(\frac{m\pi y}{L} - m\pi)$ نوشت و حاصلضرب ثابت $A''$ را در $A_m$ با $A'_m$ نشان دادیم. حاصل کلی تابع گرین در $y > y'$، به‌صورت مجموع $G_m$ها می‌باشد و داریم:

$$G(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\frac{m\pi x}{L}\sin h(\frac{m\pi y_>}{L} - m\pi)$$

۲) $y < y'$:

مشابهاً در $y < y'$ هم باید معادله $\nabla^2 G = 0$ را حل کنیم. و باز هم با جداسازی متغیرها و اعمال شرایط تناوبی روی $x$ داریم:

$$G = \tilde{f}(x)\tilde{g}(y)$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(x) = A\sin\frac{m\pi x}{L}$$

با اعمال شرط مرزی روی $y = 0$ می‌توان $\tilde{g}(y)$ را به‌صورت زیر نوشت:

$$\tilde{g}(y) = B\sin h\frac{m\pi y_<}{L}$$

بنابراین داریم:

$$G_m = A_m \sin\frac{m\pi x}{L}\sin h\frac{m\pi y_<}{L} \qquad y < y'$$

که نماد $y_<$ به معنی $y < y'$ می‌باشد. $G$ را در $y < y'$ می‌توان به‌صورت مجموع زیر نوشت:

$$G = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\frac{m\pi x}{L}\sin h\frac{m\pi y_<}{L}$$

دقت کنیم تابع گرین باید روی $(x,y)$ و $(x',y')$ متقارن باشد. بنابراین با تغییر $y \leftrightarrow y'$ نباید $G$ تغییر یابد. پس بدون اینکه خللی به کلیت مسئله وارد شود می‌توان $G$ را در هر دو ناحیه به‌صورت زیر نوشت:

$$G_{1,2} = \sum_{m=1}^{\infty} A_{m_{1,2}} \sin\frac{m\pi x}{L}\sin h\frac{m\pi y_<}{L}\sin h\frac{m\pi}{L}(y_> - L)$$

که رابطه بالا در $y < y'$، $y' = y_>$ و در $y > y'$، $y_< = y'$ خواهد بود. دقت کنید $A_{m_{1,2}}$ مقدار ثوابت در دو ناحیه ۱ و ۲ می‌باشند.

همچنین توجه کنید که $\hat{G}_1(y = y') = \hat{G}_2(y = y') \Rightarrow \hat{A}_{m_1} = \hat{A}_{m_2}$ پس می‌توان اندیس ۱و ۲ را حذف کرد و داریم:

$$G = \sum_{u=1}^{\infty} A_m \sin\frac{m\pi x}{L}\sin h\frac{m\pi y_<}{L}\sin h\frac{m\pi}{L}(y_> - L) \qquad (۳)$$

حال می‌خواهیم $A_m$ها را تعیین کنیم. بدین منظور $G$را از (۳) در معادله پواسون مربوط به تابع گرین جای‌گذاری می‌کنیم و روی $y' - \varepsilon \le y \le y' + \varepsilon$ برای $|\varepsilon| \ll 1$ و ضرب طرفین در $\sin\frac{m\pi x}{L}$ روی $0 \le x \le L$ انتگرال‌گیری می‌کنیم. دقت کنید که $\sin\frac{m\pi x}{L}$ها توابع کاملی هستند و بنابراین همواره داریم:

$$\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{m'\pi x}{L}dx = \frac{L}{2}\delta_{m,m'}$$

که $\delta_{m,m'}$ دلتای کرونکر می‌باشد. دقت کنید که همواره $\frac{d^2G}{dx^2}$ در $y = y'$ پیوسته است (اما $\frac{d^2G}{dy^2}$ نیست) و بنابراین:

$$\int_{y'-\varepsilon}^{y'+\varepsilon}\frac{d^2G}{dx^2} = 0$$

پس نتیجه می‌شود که:

$$\int_{y'-\varepsilon}^{y+\varepsilon'}\frac{d^2G}{dx^2}dy + \int_{y'-\varepsilon}^{y'-\varepsilon}\frac{d^2G}{dy^2}dy = \int_{y'-\varepsilon}^{y'+\varepsilon}\frac{d^2G}{dy^2}dy$$

www.modaresanesharif.ac.ir

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\nabla^2 G = -4\pi\delta(x-x')\delta(y-y')$$

$$\Rightarrow \int_{y'-\varepsilon}^{y'+\varepsilon}\int_0^L \nabla^2 G \sin\frac{m\pi x}{L}dxdy = -4\pi\int_{y'-\varepsilon}^{y'+\varepsilon}\delta(y-y')dy\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\delta(x-x')dx = -4\pi\sin\frac{m\pi x'}{L} \qquad (4)$$

که در رابطه بالا از $\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)$ استفاده کردیم. همچنین داریم:

$$\int_{y'-\varepsilon}^{y'+\varepsilon}\int_0^L \nabla^2 G \sin\frac{m\pi x}{L}dxdy = \int_{y'-\varepsilon}^{y'+\varepsilon}\int_0^L \frac{d^2G}{dy^2}dy\sin\frac{m\pi x}{L}dx$$

$$= \int_{y'-\varepsilon}^{y'+\varepsilon}dy\int_0^L dx\sum_{m'=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{m'\pi x}{L}\frac{d^2}{dy^2}(A_m \sinh\frac{m'\pi}{L}y_< \sinh\frac{m\pi'}{L}(y_> - L))$$

$$= A_m\frac{L}{2}\frac{d}{dy}(\sinh\frac{m\pi}{L}y_<\sin\frac{m\pi}{L}(y_>-L))\Big|_{y=y'-\varepsilon}^{y=y'+\varepsilon} = A_m(\frac{1}{2}\sinh\frac{m\pi}{L}y'(m\pi\cosh\frac{m\pi}{L}(y'-L))$$

$$-\frac{1}{2}m\pi\cosh\frac{m\pi}{L}y'\sinh\frac{m\pi}{L}(y'-L)) \qquad (5)$$

در رابطه بالا در $y = y'-\varepsilon$ و در $y = y'+\varepsilon$ و $y_> = y'$ , $y_< = y'$ می‌باشد. پس از (۴) و (۵) داریم:

$$-A_m\frac{m\pi}{2}\sinh m\pi = -4\pi\sin m\pi x' \qquad (6)$$

در رسیدن از (۵) به (۶) از رابطه زیر استفاده شده است:

$$\sinh(x-y) = \sinh x\cosh y - \cosh y\sinh y$$

پس می‌توان نوشت:

$$A_m = \frac{8}{m\sinh m\pi}\sin m\pi x'$$

بنابراین تابع گرین مسئله ما به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$G(x,y,x',y') = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{8}{m\sinh m\pi}\sin\frac{m\pi x'}{L}\sinh\frac{m\pi y_<}{L}\sinh\frac{m\pi}{L}(y_>-L)\sin\frac{m\pi x}{L}$$

حال کافی است تابع گرین به‌دست آمده را در معادله (*) جای‌گذاری کنیم و انتگرال‌گیری کنیم. (دقت کنید چون مسئله دو بعدی است $d^3x'$ را با $d^2x'$ جایگزین می‌کنیم.)

$$\phi(x) = \frac{2\rho}{\pi\varepsilon_0}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^L\frac{1}{m\sinh m\pi y}\sin m\pi x\sin m\pi x'dx'\int_0^L\sinh\frac{m\pi y_<}{L}\sinh\frac{m\pi}{L}(y_>-L)$$

حال دقت کنید که:

$$\int_0^L\sin\frac{m\pi x}{L}dx = \frac{L\cos\frac{m\pi x}{L}}{m\pi}\Big|_0^L = \begin{cases}0 & m\ \text{زوج}\\ \frac{-2L}{m\pi} & m\ \text{فرد}\end{cases}$$

پس:

$$\phi(x,y) = \frac{-4\rho L}{\pi^2\varepsilon_0}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\int_0^L\sinh\frac{(2m+1)\pi y_<}{L}\sinh\frac{(2m+1)\pi}{L}(y_>-L)$$

$$= \frac{-4\rho L}{\pi^2\varepsilon_0}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2\sinh(2m+1)\pi}(\int_0^{y'}\sinh\frac{(2m+1)\pi y}{L}(\sinh\frac{(2m+1)(y'-L)}{L})dy$$

$$+\int_{y'}^L\sinh\frac{(2m+1)\pi y'}{L}\sinh\frac{(2m+1)\pi}{L}(y-L)dy)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

همچنین داریم:

$$\int_{0}^{y'} \sinh\frac{(2m+1)\pi y}{L}\sinh\frac{(2m+1)\pi(y'-L)}{L}$$
$$=\frac{L}{(2m+1)\pi}\sinh\frac{(2m+1)\pi(y'-L)}{L}(-1+\cosh\frac{(2m+1)\pi y'}{L})$$
$$\int_{y'}^{L} \sinh\frac{(2m+1)\pi y'}{L}\sinh\frac{(2m+1)\pi(y-L)}{L}$$
$$=\frac{L}{(2m+1)\pi}\sinh\frac{(2m+1)\pi y'}{L}(1-\cosh\frac{(2m+1)\pi(y'-L)}{L})$$

از طرفی:

$$\sinh(2m+1)\pi(\frac{y'}{L}-1)\cosh\frac{(2m+1)\pi y'}{L}-\sinh\frac{(2m+1)\pi y'}{L}\cosh\frac{(2m+1)\pi(y'-L)}{L}=-\sinh(2m+1)\pi$$

بنابراین $\phi$ به‌صورت زیر درخواهد آمد:

$$\phi(x,y)=\frac{4\rho L^2}{\pi^3\varepsilon_0}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^3\sinh(2m+1)\pi}\sin\frac{(2m+1)\pi x'}{L}$$
$$\times(\sinh(2m+1)\pi-\sinh\frac{(2m+1)\pi(L-y')}{L}-\sinh\frac{(2m+1)\pi y'}{L})$$

اما:

$$\frac{1}{\sinh(2m+1)\pi}(\sinh(2m+1)\pi-\sinh(2m+1)\pi(1-\frac{y'}{L})-\sinh\frac{(2m+1)\pi y'}{L})$$
$$=1-\frac{2\sinh\frac{(2m+1)\pi}{2}\cosh\frac{(2m+1)\pi}{2}(\frac{y}{L}-\frac{1}{2})}{\sinh(2m+1)\pi}=1-\frac{2\sinh\frac{(2m+1)\pi}{2}\cosh(2m+1)\pi(\frac{y}{L}-\frac{1}{2})}{2\cosh\frac{2m+1}{2}\pi\sinh\frac{2m+1}{2}\pi}=1-\frac{\cosh(2m+1)\pi(\frac{y}{L}-\frac{1}{2})}{\cosh\frac{2m+1}{2}\pi}$$

با جایگذاری رابطه بالا در پتانسیل به گزینه (۱) می رسیم. دقت کنید که در روابط بالا از رابطه‌های زیر استفاده کردیم:

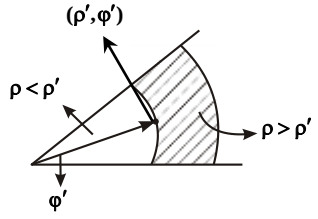
$$\sinh x+\sinh y=2\cosh(\frac{x-y}{2})\sinh(\frac{x+y}{2})$$
$$\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$$

---

**۱۹ــ گزینه «۳»** در حالت کلی تابع گرین دو بعدی در مختصات قطبی در معادله زیر صدق می‌کند:

$$\nabla^2 G(\rho,\varphi,\rho',\varphi')=\frac{-4\pi}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi') \qquad (1)$$

دقت کنید که به دلیل اینکه در مختصات قطبی هستیم تابع دلتای دیراک به‌صورت $\delta(\vec{r}-\vec{r}')=\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi')$ داده می‌شود. حال برای به‌دست آوردن تابع گرین نیاز به حل معادله (۱) داریم. معادله (۱) را در دو حالت $\rho<\rho'$ و $\rho'<\rho$ حل می‌کنیم. فرض کنید بار نقطه‌ای مسئله ما، مطابق شکل زیر در مختصات $(\rho',\varphi')$ واقع شده است.




۱) $\rho<\rho'$:

$$\nabla^2 G(\rho,\varphi;\rho',\varphi')=0 \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial G}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (2)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

## سؤالات فیزیک

### مکانیک کوانتومی و مکانیک کوانتومی پیشرفته

۱ـ عملگر انتقال $T(a)$، تابع $f(x)$ را به $f(x+a)$ تبدیل می‌کند. شکل دیفرانسیلی عملگر $T(a)$ کدام است؟

۱) $1-a\frac{d}{dx}$ ۲) $\exp(a\frac{d}{dx})$ ۳) $1+a\frac{d}{dx}$ ۴) $\exp(-a\frac{d}{dx})$

۲ـ عملگرهای $F=AB-BA$ و $G=AB+BA$ و $H=i(AB-BA)$ مفروض‌اند. اگر $A$ و $B$ عملگرهای هرمیتی باشند، از عملگرهای $F$، $G$ و $H$، کدام هرمیتی است؟

۱) $F$ و $G$ ۲) $G$ و $H$ ۳) $F$ و $H$ ۴) $F$، $G$ و $H$

۳ـ کدام‌یک از ماتریس‌های داده‌شده، با هیچ ماتریس یکانی قطری نمی‌شود؟

۱) $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ ۳) $\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

۴ـ ماتریس تبدیل یکانی که پایه‌های $|S_z,\pm\rangle$ را به پایه‌های $|S_x,\pm\rangle$ تبدیل می‌کند، کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\i&i\end{pmatrix}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-i&i\end{pmatrix}$

۵ـ اگر $a$ و $a^\dagger$ عملگرهای پایین‌آورنده و بالابرنده در تصویر شرودینگر برای یک نوسانگر هماهنگ ساده با فرکانس $\omega$ باشند آنگاه عملگر $a^\dagger a$ در تصویر هایزنبرگ کدام است؟

۱) $a^\dagger a$ ۲) $e^{-i\omega t}a^\dagger a$ ۳) $aa^\dagger$ ۴) $e^{-i\omega t}aa^\dagger$

۶ـ اگر $A$ و $A^\dagger$ عملگرهای پایین‌آورنده و بالابرنده باشند و $|\alpha\rangle$ یک حالت کوانتومی نوسانگر کوانتومی با خاصیت $A|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$ باشد، مقدار $\langle\alpha|e^{\alpha^* A}e^{\alpha A^\dagger}|\alpha\rangle$ برابر با کدام مورد است؟

۱) $e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}$ ۲) $e^{2|\alpha|^2}$ ۳) $e^{3|\alpha|^2}$ ۴) $e^{\alpha^2+\alpha^{*2}}$

۷ـ ذره‌ای به جرم $m$ را که تحت یک پتانسیل جاذبه $V(x)=-V_0\delta(x)$ قرار گرفته است در نظر بگیرید $(V_0>0)$ انرژی آن در حالت مقید کدام است؟

۱) $\frac{-mV_0}{\hbar}$ ۲) $\frac{-mV_0^2}{\hbar^2}$ ۳) $\frac{-mV_0^2}{2\hbar^2}$ ۴) $\frac{-mV_0^2}{2\hbar}$

۸ـ عملگر هامیلتونی یک سیستم دوحالته با $H=a(|1\rangle\langle1|-|2\rangle\langle2|+|1\rangle\langle2|+|2\rangle\langle1|)$ داده شده است که در آن $a$ عددی با بعد انرژی است. ویژه مقادیر انرژی سیستم کدام‌اند؟

۱) $\pm\sqrt{2}a$ ۲) $+\sqrt{2}a$ (دو حالت تبهگن) ۳) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ۴) $+\frac{\sqrt{2}}{2}a$ (دو حالت تبهگن)

۹ـ ذره باردار $Q$ با جرم $M$، بر روی محور $x$، حول مبدأ مختصات، حرکت نوسانی ساده با فرکانس زاویه‌ای $\omega$ انجام می‌دهد. اگر این ذره در معرض میدان الکتریکی یکنواختی در جهت $x$ قرار گیرد، $\vec{E}=E\hat{i}$، ترازهای انرژی آن کدام است؟

۱) $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})-QE$ ۲) $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})-\frac{Q^2E^2}{2M\omega^2}$ ۳) $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})+QE$ ۴) $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})+\frac{Q^2E^2}{2M\omega^2}$

۱۰ـ اگر $s_x$، $s_y$ و $s_z$ مؤلفه‌های عملگر اسپین الکترونی در $t=0$ باشند و هامیلتونی سیستم $H=\omega s_x$ باشد، آنگاه مؤلفه $z$ام عملگر اسپین در لحظه $t$، $s_z(t)$، کدام است؟

۱) $s_z\cos\omega t-s_y\sin\omega t$ ۲) $s_z\cos\omega t+s_y\sin\omega t$ ۳) $s_z\cos\omega t+s_x\sin\omega t$ ۴) $s_z\cos\omega t-s_x\sin\omega t$

۱۱ـ حالت ذره‌ای با اسپین $\frac{1}{2}$ به شکل $|\Psi\rangle=|\alpha\rangle-|\beta\rangle$ توصیف شده است که در آن $|\alpha\rangle=|\uparrow\rangle$ و $|\beta\rangle=\frac{1-i}{2}|\uparrow\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle$. احتمال اینکه ذره در حالت $|\uparrow\rangle$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۲ـ الکترونی در حالت اسپینی $A\begin{pmatrix}1-2i\\2\end{pmatrix}$ قرار دارد که $A$ مقدار ثابتی است. نسبت مقدار چشم‌داشتی $\hat{S}_z$ به مقدار چشم‌داشتی $\hat{S}_x$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) صفر

۱۳ـ الکترونی با بار $(-e)$ در یک میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت در راستای $(\vec{B}=B\hat{k})z$ قرار دارد. اگر در $t=0$ اسپینور الکترون به صورت $\sin\frac{\theta}{2}|+\rangle+e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}|-\rangle$ باشد، $\chi(t)$ کدام است؟ ( $\omega$ فرکانس حرکت تقدیمی اسپین حول میدان مغناطیسی است.)

۱) $\sin\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\omega t}{2}}|-\rangle+\cos\frac{\theta}{2}e^{-i(\varphi+\frac{\omega t}{2})}|-\rangle$ ۲) $\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\omega t}{2}}|+\rangle+\cos\frac{\theta}{2}e^{i(\varphi-\frac{\omega t}{2})}|-\rangle$

۳) $\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\omega t}{2}}|+\rangle+\cos\frac{\theta}{2}e^{i(\varphi+\frac{\omega t}{2})}|-\rangle$ ۴) $\sin\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\omega t}{2}}|+\rangle+\cos\frac{\theta}{2}e^{i(\varphi-\frac{\omega t}{2})}|-\rangle$

۱۴ـ اگر $\vec{J}$ عملگر تکانه زاویه‌ای باشد، حاصل عبارت جابه‌جایی $[J_xJ_y,J_x]$ کدام است؟

۱) $i\hbar J_xJ_z$ ۲) $i\hbar J_zJ_x$ ۳) $-i\hbar J_xJ_z$ ۴) صفر

۱۵ـ فرض کنید که الکترون در اتم هیدروژن در حالتی با تابع موج زیر توصیف می‌شود. $\phi(\theta,\phi)=\frac{2}{\sqrt{6}}Y_{3,-2}(\theta,\phi)+\frac{1}{\sqrt{3}}Y_{3,-2}(\theta,\phi)$، اگر با اندازه‌گیری $L_z$ مقدار $-3\hbar$ حاصل شود، در این حالت زاویه میان‌بردار تکانه زاویه‌ای و محور $z$ چقدر است؟

۱) $30^\circ$ ۲) $60^\circ$ ۳) $120^\circ$ ۴) $150^\circ$

## الکترومغناطیس و الکترودینامیک

۱۶ـ اگر $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ بردار مکان نقطه $(x,y,z)$ و $r=|\vec{r}|$ و حاصل انتگرال حجمی $\int_V r^3dv$ درون حجم $V$ برابر با $\alpha$ باشد، حاصل انتگرال سطحی $\oint_A r^3\vec{r}.\hat{n}da$ کدام است؟ $A$ سطح بسته‌ای است که حجم $V$ را در برگرفته و $\hat{n}$ بردار واحد عمود بر سطح $A$ در هر نقطه روی سطح است.

۱) صفر ۲) $2\alpha$ ۳) $4\alpha$ ۴) $6\alpha$

۱۷ـ بار نقطه‌ای $q$ در نقطه $(0,\frac{3}{4},0)$ قرار دارد. شار الکتریکی عبوری از سطح دایره‌ای به شعاع واحد، واقع بر صفحه $x-z$ که مرکز آن بر مبدأ مختصات قرار دارد، کدام است؟

۱) $\frac{q}{5\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{q}{4\varepsilon_0}$ ۳) $\frac{q}{3\varepsilon_0}$ ۴) $\frac{q}{2\varepsilon_0}$

۱۸ـ یک حلقه باردار به شعاع $R$ دارای بار یکنواخت $Q$ است. این حلقه، در صفحه $xy$ قرار دارد و مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات است. پتانسیل الکتریکی در نقاط $r>R$ کدام است؟

۱) $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{l=0}^{\infty}(\frac{R}{r})^l P_l(\cos\theta)$ ۲) $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{l=0}^{\infty}(\frac{R}{r})^l P_l(0)P_l(\cos\theta)$

۳) $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(\frac{R}{r})^l Y_{lm}(\theta,\phi)$ ۴) $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(\frac{R}{r})^l P_l(0)Y_{lm}(\theta,\phi)$

۱۹ـ بار الکتریکی بین صفحات $x=0$ و $x=a$ با چگالی حجمی $\rho=2\rho_0\frac{x}{a}$ توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی در نقاط $0<x<a$ کدام است؟ (پتانسیل الکتریکی در صفحه $x=0$ برابر با صفر و در صفحه $x=a$ برابر با $V_0$ است.)

۱) $\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 a}(a^3-x^3)+V_0\frac{x}{a}$ ۲) $\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 a}(a^2x-x^3)+V_0\frac{x^2}{a^2}$ ۳) $\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 a}(a^2x-x^3)+V_0\frac{x}{a}$ ۴) $\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 a}(a^3-x^3)+V_0\frac{x^2}{a^2}$

۲۰ـ بار الکتریکی $Q$ به‌طور یکنواخت بر سطح یک قرص دایره‌ای به شعاع $R$ توزیع شده است. قرص بر صفحه $xy$ منطبق است و مرکز آن بر مبدأ مختصات قرار دارد. چگالی حجمی توصیف‌کننده این توزیع بار، در دستگاه مختصات استوانه‌ای کدام است؟ ( $\delta(x)$ تابع دلتای دیراک و $H(x)$ تابع پله‌ای است؟)

۱) $\frac{Q}{\pi R^2}\delta(z)H(R-\rho)$ ۲) $\frac{Q}{\pi R^2}\delta(z)\delta(R-\rho)$ ۳) $\frac{Q}{\pi R^2}H(z)\delta(R-\rho)$ ۴) $\frac{Q}{\pi R^2}H(z)H(R-\rho)$

www.modaresanesharif.ac.ir

# پاسخنامه فیزیک

## مکانیک کوانتومی و مکانیک کوانتومی پیشرفته

**۱ـ گزینه «۴»** عملگر انتقال در مکانیک کوانتومی به صورت مقابل تعریف می‌شود: $T(a)f(x)=f(x+a) \Rightarrow T(a)\equiv \exp(-i\frac{P_x}{\hbar}a)$

از طرفی در مکانیک کوانتومی عملگر تکانه به صورت $P_x=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ با عملگر مکان مرتبط است. پس خواهیم داشت:

$$T(a)\equiv \exp(-i.\frac{-i\hbar}{\hbar}\frac{\partial}{\partial x}a)\equiv \exp(-a\frac{d}{dx})$$

سازمان سنجش گزینه (۲) را به عنوان پاسخ صحیح اعلام کرده است، اما طبق توضیحات فوق گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

---

**۲ـ گزینه «۲»** عملگری هرمیتی است که از قاعده $A^\dagger=A$ تبعیت کند. چون عملگرهای A و B هرمیتی هستند پس داریم $A^\dagger=A$ و $B^\dagger=B$. حال به بررسی عملگرهای F، G و H می‌پردازیم:

$$F=AB-BA \Rightarrow F^\dagger=(AB)^\dagger-(BA)^\dagger=B^\dagger A^\dagger-A^\dagger B^\dagger$$

چون A و B هرمیتی هستند خواهیم داشت: $F^\dagger=BA-AB=-(AB-BA)=-F$

پس F هرمیتی نیست.

$$G=AB+BA \Rightarrow G^\dagger=(AB)^\dagger+(BA)^\dagger=B^\dagger A^\dagger+A^\dagger B^\dagger=BA+AB=AB+BA=G$$

پس G هرمیتی است.

$$H=i(AB-BA) \Rightarrow H^\dagger=[i(AB)-i(BA)]^\dagger=-i(AB)^\dagger+i(BA)^\dagger$$
$$=-iB^\dagger A^\dagger+i(A^\dagger B^\dagger)=-iBA+iAB=i(AB-BA)=H$$

پس H هم هرمیتی است.

---

**۳ـ گزینه «۴»** ماتریسی قطری‌پذیر است که ویژه مقادیر مجزا داشته باشد. برای ماتریس‌های ۲×۲ تعریف‌شده، هر ماتریسی که ۲ ویژه مقدار مجزا داشته باشد قطری می‌شود و در غیر این صورت قطری نمی‌شود. به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم.

گزینه (۱): $\begin{vmatrix}0-\lambda & 1\\ 1 & 0-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (-\lambda)^2-1=0 \Rightarrow \lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda=\pm 1$ قطری‌پذیر است.

گزینه (۲): $\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 0-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow -\lambda(1-\lambda)-1=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda-1=0$

برای حل این معادله از روش دلتا استفاده می‌کنیم. $\Delta=b^2-4ac=(+1)^2-4(1)(-1)=1+4=5 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{5}$

یعنی این معادله دو ریشه مجزا دارد پس ماتریس قطری‌پذیر است.

گزینه (۳): $\begin{vmatrix}0-\lambda & i\\ -i & 0-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (-\lambda)^2-(i)(-i)=0 \Rightarrow \lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda=\pm 1$ قطری‌پذیر است.

گزینه (۴): $\begin{vmatrix}0-\lambda & 1\\ 0 & 0-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (-\lambda)^2-0=0 \Rightarrow \lambda^2=0 \Rightarrow \lambda=0$

چون فقط یک ریشه دارد پس این ماتریس قطری‌پذیر نیست.

---

**۴ـ گزینه «۳»** ماتریس A تبدیل پایه‌های $|S_z,\pm\rangle$ به پایه‌های $|S_x,\pm\rangle$ به صورت مقابل تعریف می‌شود: $A=\begin{bmatrix}\langle S_x,+|S_z,+\rangle & \langle S_x,+|S_z,-\rangle\\ \langle S_x,-|S_z,+\rangle & \langle S_x,-|S_z,-\rangle\end{bmatrix}$

با توجه به اینکه $|S_z,+\rangle=|+\rangle$، $|S_z,-\rangle=|-\rangle$، $|S_x,+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$ و $|S_x,-\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$ مشخص می‌شوند، خواهیم داشت:

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\langle+|+\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\langle-|+\rangle & \frac{1}{\sqrt{2}}\langle+|-\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\langle-|-\rangle\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\langle+|+\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}\langle-|+\rangle & \frac{1}{\sqrt{2}}\langle+|-\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}\langle-|-\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

توجه داشته باشید که از شرط تعامد $\langle+|+\rangle=\langle-|-\rangle=1$ و $\langle+|-\rangle=\langle-|+\rangle=0$ استفاده کرده‌ایم.

www.modaresanesharif.ac.ir

**۵ــ گزینه «۱»** چون هامیلتونی یک نوسانگر هماهنگ ساده $H=\hbar\omega[a^\dagger a+\frac{1}{2}]$ است و بنابراین با عملگر $a^\dagger a$ جابه‌جا می‌شود، پس این عملگر در هر دو تصویر شرودینگر و هایزنبرگ ثابت خواهد ماند.

---

**۶ــ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.** اگر $A$ و $B$ دو عملگر فیزیکی باشند می‌دانیم که: $e^{A+B}=e^A e^B e^{-\frac{[A,B]}{2}}$

اگر فرض کنیم این دو عملگر، عملگرهای نردبانی $A$ و $A^\dagger$ باشند، خواهیم داشت:

$$e^{\alpha^* A+\alpha A^\dagger}=e^{\alpha^* A}e^{\alpha A^\dagger}e^{-\frac{[\alpha^* A,\alpha A^\dagger]}{2}}=e^{\alpha^* A}e^{\alpha A^\dagger}e^{-\frac{\alpha^*\alpha}{2}[A,A^\dagger]}=e^{\alpha^* A}e^{\alpha A^\dagger}e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$$

توجه داشته باشید که برای عملگرهای نردبانی $[A,A^\dagger]=1$ است. به این ترتیب واضح است که: $e^{\alpha^* A}e^{\alpha A^\dagger}=e^{\alpha^* A+e^{\alpha A^\dagger}}e^{\frac{|\alpha^2|}{2}}$

حال می‌توانیم مقدار این عملگر را با توجه به ویژه‌کت‌های $|\alpha\rangle$ که از رابطه $A|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$ تبعیت می‌کنند محاسبه کنیم. البته توجه داشته باشید که $\langle\alpha|A^\dagger=\alpha^*\langle\alpha|$ خواهد بود. پس داریم:

$$\langle\alpha|e^{\alpha^* A}e^{\alpha A^\dagger}|\alpha\rangle=e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}\langle\alpha|e^{\alpha^* A+\alpha A^\dagger}|\alpha\rangle$$

با استفاده از بسط $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$ داریم:

$$\langle\alpha|e^{\alpha^* A}e^{\alpha A^\dagger}|\alpha\rangle=e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}\{\langle\alpha|1+(\alpha^* A+\alpha A^\dagger)+\frac{(\alpha^* A+\alpha A^\dagger)^2}{2!}+\cdots|\alpha\rangle$$

$$=e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}\{1+\alpha^*\alpha+\alpha\alpha^*+\langle\alpha|\frac{(\alpha^{*2}A^2+\alpha^*\alpha AA^\dagger+\alpha\alpha^* A^\dagger A+\alpha^2 A^{\dagger 2})}{2}|\alpha\rangle+\cdots$$

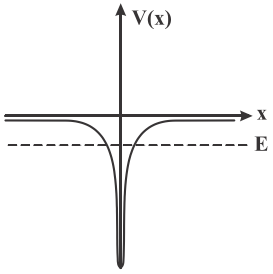
$$=e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}\{1+|\alpha|^2+|\alpha|^2+\frac{\alpha^{*2}\alpha^2+\alpha^*\alpha\alpha^*+\alpha\alpha^*\alpha^*\alpha+\alpha^2\alpha^{*2}}{2!}+\cdots\}$$

$$=e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}\{1+2|\alpha|^2+\frac{4|\alpha|^4}{2!}+\cdots\}=e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}\{e^{2|\alpha|^2}\}=e^{\frac{5|\alpha|^2}{2}}$$

سازمان سنجش گزینه (۳) را به‌عنوان گزینه صحیح اعلام کرده است. احتمالاً طراح محترم سؤال، رابطه اصلی را به‌صورت $e^{A+B}=e^A e^B e^{-[A,B]}$ در نظر گرفته و در نهایت به پاسخ $e^{3|\alpha|^2}$ رسیده است.

---

**۷ــ گزینه «۳»** در حالت مقید نمودار مسئله به صورت روبه‌رو است.




مسئله را در دو ناحیه بررسی می‌کنیم:

الف) ناحیه سمت چپ چاه $(x<0)$: در این ناحیه $V(x)=0$ و بنابراین معادله شرودینگر به صورت $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=E\psi(x)$ در می‌آید. با جابه‌جایی جملات داریم: $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)=0$

از آنجا که $E$ مقداری منفی دارد (حالت مقید) می‌توان $\frac{2mE}{\hbar^2}=-k^2$ را در نظر گرفت ($k^2$ عددی حقیقی و مثبت است)، بنابراین داریم:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}-k^2\psi(x)=0$$

جواب‌های این معادله به صورت $e^{kx}$ و $e^{-kx}$ است. جوابی که در $x\to-\infty$ واگرا نمی‌شود $e^{kx}$ است، بنابراین جواب‌ها در ناحیه $x<0$ به صورت $\psi(x)=Ae^{kx}$ است.

ب) ناحیه سمت راست چاه $(x>0)$: در اینجا نیز $V(x)=0$ است و بنابراین مانند مورد قبل جواب‌ها باید به صورت $e^{kx}$ و $e^{-kx}$ باشد. جوابی که در $x\to+\infty$ واگرا نمی‌شود $e^{-kx}$ است، پس برای ناحیه $x>0$ جواب به صورت $\psi(x)=Be^{-kx}$ خواهد بود.

www.modaresanesharif.ac.ir

می‌ماند بررسی رفتار تابع موج در مرز $(x=0)$، پیوستگی تابع موج در مرز ایجاب می‌کند که $B=A$ و بنابراین:

$$\psi(x)=\begin{cases} Ae^{kx} & x\le 0 \\ Ae^{-kx} & x>0 \end{cases}$$

در مورد پیوستگی مشتق تابع موج در مرز، توجه به یک نکته بسیار ضروری است: مشتق تابع موج در مرز پیوسته است مگر آنکه آنجا پتانسیل دلتایی باشد. ناپیوستگی مشتق تابع موج را می‌توان با انتگرال‌گیری از معادله شرودینگر در بازه‌ای حول مبدأ که پتانسیل در آن $\infty$ است، به دست آورد:

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}-V_0\delta(x)\psi(x)=E\psi(x)]dx \qquad (\varepsilon>0)$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{d}{dx}(\frac{d\psi(x)}{dx})dx-V_0\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\psi(x)\delta(x)dx=E\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\psi(x)dx$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\left.\frac{d\psi(x)}{dx}\right|_{x=+\varepsilon}-\left.\frac{d\psi(x)}{dx}\right|_{x=-\varepsilon}\right\}-V_0\psi(0)=E\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\psi(x)dx$$

در حد $\varepsilon\to 0$، سمت راست رابطه بالا صفر می‌شود و بنابراین ناپیوستگی مشتق تابع موج در مرز به دست می‌آید:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left.\frac{d\psi(x)}{dx}\right|_{0^+}-\left.\frac{d\psi(x)}{dx}\right|_{0^-}\right]=V_0\psi(0)\Rightarrow \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{0^+}-\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{0^-}=\frac{-2mV_0}{\hbar^2}$$

اما $\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{0^-}=Ak$ و $\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{0^+}=-Ak$ بنابراین:

$$-2Ak-Ak=-\frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(0)$$

از طرفی $\psi(0)=A$ و به این ترتیب:

$$-2AK=-\frac{2mV_0}{\hbar^2}A\Rightarrow K=\frac{mV_0}{\hbar^2}$$

اما $E=-\frac{\hbar^2K^2}{2m}$ و به این ترتیب:

$$E=-\frac{mV_0^2}{2\hbar^2}$$

---

**۸ـ گزینه «۱»** ابتدا هامیلتونی را به صورت ماتریسی می‌نویسیم:

$$H=a(|1\rangle\langle 1|-|2\rangle\langle 2|+|1\rangle\langle 2|+|2\rangle\langle 1|)=\begin{pmatrix} a & a \\ a & -a \end{pmatrix}$$

حال برای یافتن ویژه مقادیر این ماتریس از معادله مشخصه $\mathrm{Det}(H-\lambda I)=0$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & a \\ a & -a-\lambda \end{vmatrix}=0\Rightarrow (a-\lambda)(-a-\lambda)-a^2=0\Rightarrow -(a^2-\lambda^2)-a^2=0\Rightarrow \lambda^2-2a^2=0\Rightarrow \lambda^2=2a^2\Rightarrow \lambda=\pm\sqrt{2}a$$

---

**۹ـ گزینه «۲»** اختلال $-QEx$ به نوسانگر هماهنگ وارد شده است. بنابر نظریه اختلال مرتبه اول، جابه‌جایی انرژی در مرتبه اول اختلال برابر با مقدار چشمداشتی پتانسیل اختلالی نسبت به حالت‌های مختل نشده است. ویژه حالت‌های نوسانگر هماهنگ را با $|n\rangle$ در نمایش دیراک نشان می‌دهیم. بنابراین آنچه باید محاسبه شود عبارت است از $\langle n|-QEx|n\rangle$. به این ترتیب داریم:

تصحیح مرتبه اول انرژی : $E_n^{(1)}=\langle n|-QEx|n\rangle=-QE\langle n|x|n\rangle=0$

علت صفر شدن عبارت $\langle n|x|n\rangle$ در این است که پاریته حالت $|n\rangle$ نوسانگر هماهنگ $(-1)^n$ است و پاریته $x$، $(-1)$ است. به این ترتیب $\langle n|x|n\rangle$ دارای پاریته $(-1)^{2n}(-1)$ یا به عبارتی پاریته فرد است و چون پتانسیل نوسانگر هماهنگ، متقارن است پس حاصل $\langle n|x|n\rangle$ صفر است. بنابراین از نظریه مرتبه اول نمی‌توان به طیف انرژی‌ها دست یافت. باید مرتبه‌های بالاتر اختلال را در نظر بگیریم. اینک به محاسبه تصحیح مرتبه دوم انرژی می‌پردازیم:

$$E_n^{(2)}=\sum_{m\neq n}\frac{\left|\langle n^{(0)}|\langle H'|m^{(0)}\rangle\right|^2}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}$$

در اینجا $H'$ برابر $-QEx$ است. $E_n^{(0)}$ و $E_m^{(0)}$ ویژه مقادیر انرژی نوسانگر مختل نشده‌اند که به ترتیب برابر با $(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ و $(m+\frac{1}{2})\hbar\omega$ هستند.

$|n^{(0)}\rangle$ و $|m^{(0)}\rangle$ هم ویژه کت‌های نوسانگر هماهنگ مختل نشده‌اند، بنابراین داریم:

$$E_n^{(2)}=\sum_{m\neq n}\frac{\langle n^{(0)}|(-QEx)|m^{(0)}\rangle\langle m^{(0)}|(-QEx)|n^{(0)}\rangle}{(n+\frac{1}{2})\hbar\omega-(m+\frac{1}{2})\hbar\omega}\Rightarrow E_n^{(2)}=\frac{Q^2E^2}{\hbar\omega}\sum_{m\neq n}\frac{\langle n^{(0)}|x|m^{(0)}\rangle\langle m^{(0)}|x|n^{(0)}\rangle}{n-m}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

اما عملگر $x$ برحسب عملگرهای نردبانی به صورت $x=\sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}}(a+a^{\dagger})$ بیان می‌شود. به این ترتیب داریم:

$$E_n^{(۲)}=\frac{Q^۲E^۲}{\hbar\omega}(\frac{\hbar}{۲m\omega})\sum_{m\neq n}\frac{\langle n^{(۰)}|a+a^{\dagger}|m^{(۰)}\rangle\langle m^{(۰)}|a+a^{\dagger}|n^{(۰)}\rangle}{n-m}$$

$$=\frac{Q^۲E^۲}{۲m\omega^۲}\sum_{m\neq n}\frac{\left(\langle n^{(۰)}|a|m^{(۰)}\rangle+\langle n^{(۰)}|a^{\dagger}|m^{(۰)}\rangle\right)\left(\langle m^{(۰)}|a|n^{(۰)}\rangle+\langle m^{(۰)}|a^{\dagger}|n^{(۰)}\rangle\right)}{n-m}$$

$$=\frac{Q^۲E^۲}{۲m\omega^۲}\sum_{m\neq n}\frac{\left[\sqrt{m}\langle n^{(۰)}|m-۱^{(۰)}\rangle+\sqrt{m+۱}\langle n^{(۰)}|m+۱^{(۰)}\rangle\right]\left[\sqrt{n}\langle m^{(۰)}|n-۱^{(۰)}\rangle+\sqrt{n+۱}\langle m^{(۰)}|n+۱^{(۰)}\rangle\right]}{n-m}$$

$$=\frac{Q^۲E^۲}{۲m\omega^۲}\sum_{m\neq n}\frac{(\sqrt{m}\delta_{n,m-۱}+\sqrt{m+۱}\delta_{n,m+۱})(\sqrt{n}\delta_{m,n-۱}+\sqrt{n+۱}\delta_{m,n+۱})}{n-m}$$

در محاسبات بالا از راست هنجاری ویژه حالت‌های نوسانگر استفاده کرده‌ایم: $\langle n^{(۰)}|m^{(۰)}\rangle=\delta_{nm}$

با توجه به خاصیت تابع دلتای کرونکر داریم:

$$E_n^{(۲)}=\frac{Q^۲E^۲}{۲m\omega^۲}\left\{\frac{(\sqrt{n+۱})(\sqrt{n+۱})}{n-(n+۱)}+\frac{\sqrt{n}\sqrt{n}}{n-(n-۱)}\right\}=\frac{Q^۲E^۲}{۲m\omega^۲}\{-(n+۱)+n\}\Rightarrow E_n^{(۲)}=-\frac{Q^۲E^۲}{۲m\omega^۲}$$

بنابراین طیف انرژی نوسانگر به اندازه $-\frac{Q^۲E^۲}{۲m\omega^۲}$ جابه‌جا می‌شود: $E_n=(n+\frac{۱}{۲})\hbar\omega-\frac{Q^۲E^۲}{۲m\omega^۲}$

روش دوم: هامیلتونی مسئله به صورت $H=\frac{P^۲}{۲m}+\frac{۱}{۲}m\omega^۲x^۲-QEx$ است. این هامیلتونی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$H=\frac{P^۲}{۲m}+\frac{۱}{۲}m\omega^۲(x^۲-\frac{۲QE}{m\omega^۲}x)$$

عبارت داخل پرانتز را مربع کامل می‌کنیم: $H=\frac{P^۲}{۲m}+\frac{۱}{۲}m\omega^۲\left[(x-\frac{QE}{m\omega^۲})^۲-\frac{Q^۲E^۲}{m^۲\omega^۴}\right]=\frac{P^۲}{۲m}+\frac{۱}{۲}m\omega^۲(x-\frac{QE}{m\omega^۲})^۲-\frac{Q^۲E^۲}{۲m\omega^۲}$

هامیلتونی بالا، هامیلتونی نوسانگری است که در آن نقطه تعادل به اندازه $-\frac{QE}{m\omega^۲}$ جابه‌جا شده است و جمله ثابت $-\frac{Q^۲E^۲}{۲m\omega^۲}$ به آن افزوده شده است. به این ترتیب ویژه مقادیر انرژی نوسانگر هماهنگ در این حالت از رابطه $E_n=(n+\frac{۱}{۲})\hbar\omega-\frac{Q^۲E^۲}{۲m\omega^۲}$ محاسبه می‌شود.

---

**۱۰ــ گزینه «۲»** با استفاده از معادله حرکت عملگر در تصویر هایزنبرگ می‌توانیم تغییرات زمانی عملگرها را تعیین کنیم. معادله حرکت عملگر در تصویر هایزنبرگ عبارت است از: $[A(t),H]=i\hbar\frac{d}{dt}A(t)$

در این مثال عملگر هامیلتونی $H=\omega S_x$ است. همچنین عملگر $A(t)$ یکی از مؤلفه‌های عملگر اسپین $S$ است. برای تک‌تک مؤلفه‌های عملگر اسپین داریم:

$$[S_x(t),H]=i\hbar\frac{d}{dt}S_x(t)\Rightarrow[S_x(t),\omega S_x]=i\hbar\frac{d}{dt}S_x(t)\Rightarrow i\hbar\frac{d}{dt}S_x(t)=۰\Rightarrow S_x(t)=S_x(۰)$$

$$[S_y(t),H]=i\hbar\frac{d}{dt}S_y(t)\Rightarrow[S_y(t),\omega S_x(t)]=i\hbar\frac{d}{dt}S_y(t)\Rightarrow\omega[S_y(t),S_x(t)]=\omega(-i\hbar S_z(t))=i\hbar\frac{d}{dt}S_y(t)$$

$$\Rightarrow-\omega S_z(t)=\dot{S}_y(t)\qquad(۱)$$

$$[S_z(t),H]=i\hbar\frac{d}{dt}S_z(t)\Rightarrow[S_z(t),\omega S_x(t)]=i\hbar\frac{d}{dt}S_z(t)$$

$$\Rightarrow\omega[S_z(t),S_x(t)]=\omega(i\hbar S_y(t))=i\hbar\dot{S}_z(t)\Rightarrow\dot{S}_z(t)=\omega S_y(t)\qquad(۲)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

با حل همزمان معادلات (۱) و (۲) می‌توانیم $S_z(t)$ و $S_y(t)$ را تعیین کنیم.

$$\begin{cases}\dot{S}_z(t)=\omega S_y(t) \Rightarrow \ddot{S}_z(t)=\omega\dot{S}_y(t) \Rightarrow \ddot{S}_z(t)=-\omega^2 S_z(t)\\ \dot{S}_y(t)=-\omega S_z(t) \Rightarrow \ddot{S}_y(t)=-\omega\dot{S}_z(t) \Rightarrow \ddot{S}_y(t)=-\omega^2 S_y(t)\end{cases}$$

به این ترتیب با مشتق گرفتن از معادلات حرکت توانستیم معادله دیفرانسیل معرف هر یک از مؤلفه‌های اسپین را تعیین کنیم. حال می‌توانیم این معادلات دیفرانسیل را حل کنیم.

$$\ddot{S}_z(t)+\omega^2 S_z(t)=0 \Rightarrow S_z(t)=A\sin\omega t+B\cos\omega t$$

$$\ddot{S}_y(t)+\omega^2 S_y(t)=0 \Rightarrow S_y(t)=C\sin\omega t+D\cos\omega t$$

در لحظه $t=0$ می‌دانیم که:

$$S_y(0)=C\sin 0+D\cos 0=D \quad , \quad S_z(0)=A\sin 0+B\cos 0=B$$

از طرفی طبق معادله حرکت برای مؤلفه Z اسپین داریم:

$$\dot{S}_z(t)=\omega S_y(t) \Rightarrow A\omega\cos\omega t-B\omega\sin\omega t=c\omega\sin\omega t+D\omega\cos\omega t$$

توجه داشته باشید که معادلات به دست آمده برای $S_z(t)$ و $S_y(t)$ را جایگذاری کرده‌ایم.

$$A\cos\omega t-S_z(0)\sin\omega t=C\sin\omega t+S_y(0)\cos\omega t$$

با مقایسه دو طرف معادله فوق می‌رسیم به:

$$\Rightarrow\begin{cases}A=S_y(0)\\ C=-S_z(0)\end{cases}$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$S_z(t)=S_z(0)\cos\omega t+S_y(0)\sin\omega t \quad , \quad S_y(t)=S_y(0)\cos\omega t-S_z(0)\sin\omega t$$

---

**۱۱ــ گزینه «۱»** می‌دانیم که احتمال حضور ذره‌ای که با حالت $|\psi\rangle$ تعریف شده است در حالت جدید $|\varphi\rangle$ عبارت است از:

$$P=\left|\langle\varphi|\psi\rangle\right|^2$$

در این مثال $|\psi\rangle=|\alpha\rangle-|\beta\rangle$ است. طبق صورت سؤال می‌دانیم که $|\alpha\rangle=|\uparrow\rangle$ و $|\beta\rangle=\frac{1-i}{2}|\uparrow\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle$. بنابراین خواهیم داشت:

$$|\psi\rangle=|\uparrow\rangle-\frac{1-i}{2}|\uparrow\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle$$

همچنین $|\varphi\rangle=|\uparrow\rangle$. پس در نهایت داریم:

$$P=\left|\langle\varphi|\psi\rangle\right|^2=\left|\langle\uparrow|\uparrow\rangle-\left\langle\uparrow\left|\frac{1-i}{2}\right|\uparrow\right\rangle-\left\langle\uparrow\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|\downarrow\right\rangle\right|^2=\left|1-\frac{1-i}{2}\right|^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

توجه داشته باشید که از قضیه تعامد $\langle\uparrow|\downarrow\rangle=\langle\downarrow|\uparrow\rangle=0$ , $\langle\uparrow|\uparrow\rangle=\langle\downarrow|\downarrow\rangle=1$ استفاده کرده‌ایم.

---

**۱۲ــ گزینه «۳»** با توجه به تعریف مؤلفه‌های عملگر اسپین $S_x=\frac{\hbar}{i}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ و $S_z=\frac{\hbar}{i}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ و همچنین با توجه به تعریف حالت اسپینی $|\varphi\rangle=A\begin{pmatrix}1-2i\\2\end{pmatrix}$ برای مقدار چشمداشتی $S_x$ و $S_z$ داریم:

$$\langle S_x\rangle=\langle\psi|S_x|\psi\rangle=|A|^2\,(1+2i \quad 2)\frac{\hbar}{i}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-2i\\2\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{i}|A|^2\,(1+2i \quad 2)\begin{pmatrix}2\\1-2i\end{pmatrix}=\frac{4\hbar}{i}|A|^2$$

$$\langle S_z\rangle=\langle\psi|S_z|\psi\rangle=|A|^2\,(1+2i \quad 2)\frac{\hbar}{i}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-2i\\2\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{i}|A|^2\,(1+2i \quad 2)\begin{pmatrix}1-2i\\-2\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{i}|A|^2$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\langle S_z\rangle}{\langle S_x\rangle}=\frac{\frac{\hbar}{i}|A|^2}{\frac{4\hbar}{i}|A|^2}=\frac{1}{4}$$

توجه داشته باشید که در این مثال چون $|A|^2$ در صورت و مخرج با هم ساده می‌شوند نیازی به محاسبه آن نداریم، ولی در صورتی که بخواهیم فقط مقدار چشم‌داشتی یک کمیت را به دست آوریم باید حتماً تابع موج را بهنجار کرده و ضریب A را تعیین کنیم.

---

www.modaresanesharif.ac.ir