سؤالات آزمون گروه فنی و مهندسی دکتری ۹۸

استعداد تحصیلی

بخش اول: درک مطلب

■ **راهنمایی:** در این بخش، دو متن به‌طور مجزا آمده است. هریک از متن‌ها را به‌دقت بخوانید و پاسخ سؤال‌هایی را که در زیر آن آمده است، با توجه به آنچه می‌توان از متن استنتاج یا استنباط کرد، پیدا کنید و در پاسخنامه علامت بزنید.

متن (۱)

او در نظریه خود که بعدها با مشاهدات تجربی هم تأیید شد، نشان داد که زمان و فضا عناصر جدای از هم نیستند، بلکه ما در حالِ زندگی در جهانی به‌هم پیوسته و درهم‌تنیده هستیم که از چهار بُعد تشکیل شده است. چهار بُعدی که سه‌تای آن را ابعاد مکانی و یک مورد آن را بُعد زمان تشکیل می‌دهد، اما در کل، یک ساختار واحد به نام فضا ــ زمان می‌سازند. او همچنین ثابت کرد که همه این پارامترها، بسته به شرایط تغییر می‌کنند. برای مثال، اگر شما با سرعتی بسیار بالا (یعنی سرعتی قابل مقایسه با سرعت نور) حرکت کنید، ساعت شما آهسته‌تر گذر زمان را نشان می‌دهد؛ به این معنی که زمان برای شما کندتر از کسی می‌گذرد که با آن سرعت حرکت نمی‌کند. آزمایش معروف و ذهنی اینشتین این موضوع را به‌خوبی تأیید می‌کند. طبق این آزمایش، اگر سرعت شما به عدد ممنوعه سرعت نور برسد (از مشکلات فنی و نتایج آن بر بدنتان صرف‌نظر کنید)، زمان برای شما متوقف خواهد شد و هیچ زمانی برای شما نخواهد گذشت.

بسیار اغواکننده است که یک گام این موضوع را جلوتر ببریم و بگوییم که اگر با سرعت بیش از نور حرکت کنیم، بدین ترتیب می‌توانیم زمان را دور بزنیم. متأسفانه اینشتین و طبیعت مانع شما می‌شوند و آنها سرعت بیش از نور را برای جهان ما ممنوع کرده‌اند. اما تا همین جا هم امکان دستکاری در زمان به‌وجود آمده است. اما آیا علم می‌تواند راه‌هایی برای سفر زمان پیشنهاد کند؟

به نظر می‌رسد دانشمندان سعی می‌کنند راه‌هایی، حداقل به شکل نظری، برای این مشکل پیدا کنند. با استفاده از نظریه اینشتین و توجه به پیوستگی فضا ــ زمان، شاید هندسه جهان به کمک ما بیاید. اگر فضا ــ زمان، موجودی پیوسته باشد که امروزه می‌دانیم این‌گونه است و اگر بتوانیم به گونه‌ای بر هندسه فضا ــ زمان تأثیر بگذاریم، شاید بتوانیم منحنی‌هایی در فضا ــ زمان پیدا کنیم که ما را به گذشته یا آینده ببرد. به عنوان مثال، می‌دانیم که جرم بر شکل فضا ــ زمان تأثیر می‌گذارد و درواقع، این یکی از پیش‌بینی‌های نسبیت اینشتین بود که نخستین‌بار در حینِ یک خورشیدگرفتگی توسط فیزیکدان آمریکایی، ادینگتون، تأیید شد. ادینگتون برای تأیید این نظر، هنگام یک خورشیدگرفتگی کامل، تصویری از خورشید تیره‌شده و ستاره‌های اطراف خورشید تهیه کرد. اگر اینشتین درست می‌گفت وجود خورشید به‌عنوان یک جرم بزرگ باید موجب ایجاد خمیدگی اندکی در فضا ــ زمان می‌شد. برای اینکه این موضوع را درک کنید، یک لحظه تصور کنید فضا ــ زمان مانند یک ورقه پلاستیکی بزرگ است که آن را محکم در دست گرفته‌اید. حال اگر یک توپ فلزی سنگین روی این ورقه پلاستیکی بگذارید، درجایی‌که این توپ قرار گرفته است، این ورقه پلاستیکی شما اندکی خمیده می‌شود. خورشید در این آزمایش، نقش همان توپ فلزی را بازی می‌کرد. اگر خورشید این انحنا را ایجاد می‌کرد، آن‌وقت نور ستاره‌هایی که از نزدیکی خورشید می‌گذشتند، اندکی منحرف می‌شد و در مکانی اندکی متفاوت با جایی که باید باشند، دیده می‌شدند. ادینگتون برای اینکه این مسئله را آزمایش کند، شش‌ماه پیش از کسوف که خورشید در نیمه دیگر آسمان بود، از همان منطقه که قرار بود خورشیدگرفتگی رخ دهد، تصویربرداری کرد و موقعیت دقیق ستاره‌ها نسبت به یکدیگر را ثبت کرد و این حالتی است که هنوز گلوله فلزی را روی صفحه نگذاشته‌اید، سپس این تصویر را با تصویر هنگام کسوف مقایسه کرد و متوجه شد ستاره‌هایی که در اطراف خورشید وجود داشتند، هنگام گرفت، در مختصات اندکی متفاوت با جای پیشین خود دیده می‌شدند: یعنی خورشید توانسته است انحنای کوچکی در فضا ــ زمان خود ایجاد کند. حال اگر این گلوله شما بسیار سنگین‌تر شود، چه اتفاقی خواهد افتاد؟ این انحنا بیشتر و بیشتر می‌شود و ممکن است در نهایت، بینِ دو ناحیه فضا ــ زمان پل بزند. چنین اجرامی در عالم وجود دارند.

۱ـ مقصود اصلی متن، کدام است؟

۱) ارزیابی نقش ادینگتون در بسط نظریه اینشتین
۲) بررسی تحول نظریه ساختار واحد فضا ـ زمان
۳) نقد و بررسی نظریه اینشتین درباره زمان
۴) بررسی امکان سفر در زمان

۲ـ کدام مورد، به‌درستی، نقش پاراگراف ۲ را در متن توصیف می‌کند؟

۱) پیش‌زمینه برای بحث مطرح در پاراگراف بعدی خود را فراهم می‌آورد.
۲) با نادیده انگاشتن محدودیت‌های مطرح در پاراگراف ۱، موضوع را به مطلبی کاملاً نظری تبدیل می‌کند.
۳) با ذکر دو معضل مهم، دلیل آنکه پاراگراف ۱، عدد ممنوعه برای رسیدن به سرعت نور مطرح می‌سازد را کمی توضیح می‌دهد.
۴) نشان می‌دهد که نظریه اینشتین که در پاراگراف ۱ آمده است، وقتی هیجان‌انگیز است که برخی پیش‌شرط‌های آن را حذف کنیم.

۳ـ طبق متن، کدام مورد درست به حساب می‌آید؟

۱) موجودیت پیوسته فضا ـ زمان
۲) تغییرناپذیری پارامترهای فضا ـ زمان
۳) مستقل بودن شکل فضا ـ زمان از جرم
۴) مشاهده دو ناحیه مختلف فضا ـ زمان به‌طور همزمان

۴ـ طبق پاراگراف ۳، عبارت زیر که در متن، زیرِ آن خط کشیده شده است، به کدام پدیده اشاره دارد؟

«این حالتی است که هنوز گلوله فلزی را روی صفحه نگذاشته‌اید.»

۱) زمانی که ادینگتون، فرضیه خود را به بوته آزمایش واقعی گذاشت.
۲) زمانی که نور ستاره‌هایی که در اطراف خورشید بودند، شروع به انحراف کردند.
۳) زمانی که خورشید هنوز تأثیر خود را برجا نگذاشته بود.
۴) زمانی که موقعیت ستاره‌ها نسبت به خود و نسبت به خورشید تثبیت شده بود.

متن (۲)

توربین‌های بادی قادر به تبدیل انرژی باد به انرژی الکتریکی بوده و عموماً در دو نوع عمودی و افقی ساخته می‌شوند. در مدل‌های توربین بادی محور افقی، ژنراتور و تبدیل‌کننده نیروی باد به انرژی الکتریکی در بالای محور مرتفعی قرار دارد که پروانه‌های توربین در بالای آن واقع شده‌اند. طول و تعداد پره‌های توربین‌های بادی، براساس شرایط محیطی، متنوع و مختلف است، اما در بیشتر مناطق دنیا، از توربین‌های سه‌پره استفاده شده و طول پره‌ها نیز بستگی مستقیم به نوع بادخیز بودن منطقه دارد. به طور میانگین، طول پره‌های توربین‌های بادی بینِ ۲۰ تا ۴۰ متر بوده و ارتفاع میله‌های محور اصلی آن نیز می‌تواند بینِ ۶۰ تا ۹۰ متر باشد. البته در این موارد، استاندارد مشخصی وجود نداشته و طراحان و مهندسان، با توجه به شرایط بومی هر منطقه، نسبت به طراحی و مشخص کردن ابعاد توربین‌ها اقدام می‌کنند.

در نوع دیگر توربین‌های بادی موجود در دنیا که به توربین‌های محور عمودی شهرت دارند، سیستم تبدیل‌کننده انرژی به‌صورت عمودی قرار گرفته و این موضوع سبب می‌شود که توربین نیازی به چرخش به سمت باد را نداشته باشد. البته استفاده از این مدل توربین‌ها، به نسبت توربین‌های محور افقی، چندان رایج نبوده و بیشتر مختص موارد ویژه‌ای است که در آن، امکان نصب توربین‌های افقی وجود نداشته یا جهت وزش باد، دائماً در حالِ تغییر است. در کل، باید در نظر داشت که توربین‌های گروه اول یا همان توربین‌های بادی محور افقی، دارای کاربری بیشتری بوده و از نظر اقتصادی نیز مقرون به‌صرفه‌تر هستند.

اتفاقاتی که در داخل یک توربین بادی محور افقی در هنگام وزش باد می‌افتد، از این قرار است: وزش باد سبب چرخش پره‌های توربین می‌شود که به قسمت گرداننده متصل است. [۱] محور توربین شروع به چرخیدن به حول خود کرده و انرژی جنبشی را از باد دریافت می‌کند. این نیرو توسط محور مرکزی پشتیبانی و تبدیل می‌شود. در بخش داخلی ناسل (nacelle) که اصلی‌ترین بخش توربین محسوب شده و در بالای محور میله و انتهای قاعده پره‌ها قرار دارد، یک جعبه‌دنده یا گیربکس ویژه‌ای وجود دارد که نیروی ایجادشده ناشی از چرخش آرام پره‌های توربین را که به‌طور متوسط در حدود شانزده دور در دقیقه است، به سرعت زیادی، برابر با هزاروششصد دور در دقیقه تبدیل می‌کند که این میزان سرعت، برای تأمین انرژی ژنراتور توربین کفایت می‌کند. [۲] ژنراتور دقیقاً در پشت جعبه‌دنده توربین‌ها قرار گرفته و انرژی چرخشی تقویت‌شده را به انرژی الکتریکی تبدیل می‌کند. بادسنج‌ها که نوع و چگونگی وزش باد را تحت کنترل دارند، در بخش تحتانی ناسل قرار گرفته

زبان عمومی

PART A: Grammar

Directions: Select the answer choice (1), (2), (3) or (4) that best completes the blank. Then mark the correct choice on your answer sheet.

31- Thunder is caused by lightning, …….. essentially a stream of electrons flowing between or within clouds or between a cloud and the ground.

1) which is 2) that is 3) to be 4) it is

32- In ancient Egypt and India, people produced large blocks of ice with the help of evaporative cooling (the principle …….. draw heat from their surroundings).

1) water molecules that vaporizes 2) that vaporizing water molecules
3) to vaporize water molecules 4) water molecules are vaporized

33- By the end of the 1800s, naturally occurring reserves of nitrogen-based compounds had been so badly depleted by their use as fertilizers …….. some feared a worldwide famine when supplies ran out.

1) that 2) then 3) which 4) when

34- Work is currently under way on planes that could potentially fly …….. the speed of sound.

1) faster than 20 times of 2) more than 20 times as much as that of
3) at 20 times 4) 20 times faster than that of

35- In 1894, …….. by the theories of physicist James Clerk Maxwell, Italian physicist Guglielmo Marconi began work on a technique to transmit electromagnetic signals through the air over long distances.

1) when was inspired 2) having inspired 3) to be inspired 4) inspired

36- Because concrete generates considerable heat as it sets, large volumes can become exceedingly hot, ……..

1) so the material's structural strength damaged 2) that damages the material's structural strength
3) and the material's structural strength damages 4) damaging the material's structural strength

37- Back in the 1966 movie *Fantastic Voyage,* a band of intrepid travelers were scrunched down to the size of blood cells …….. they could swim through the veins of a big-shot diplomat and destroy a life-threatening blood clot.

1) so that 2) since 3) as though 4) in which

38- The space telescope, after all, has broken all kinds of records, including probably ……..

1) any single astronomical project produces the most newspaper headlines
2) the most newspaper headlines produced by any single astronomical project
3) producing the most newspaper headlines by any single astronomical project
4) the most newspaper headlines of any single astronomical project is ever produced

پاسخنامه آزمون گروه فنی و مهندسی دکتری ۹۸

استعداد تحصیلی

بخش اول: درک مطلب

پاسخ سؤالات متن (۱)

۱ـ گزینه «۴» نویسنده به‌دنبال بررسی امکان سفر در زمان در چهارچوب نظریات علمی است و این موضوع از جملات انتهایی هر سه پاراگراف و محتوای پارگراف دوم نیز مشخص می‌گردد.

نادرستی سایر گزینه‌ها:

بررسی گزینه (۱): نویسنده از آزمایش ادینگتون به عنوان وسیله‌ای در جهت تقویت نظریه‌ی نسبیت اینشتین استفاده می‌کند که حامی مقصود اصلی‌اش می‌باشد که بررسی امکان سفر در زمان است.

بررسی گزینه (۲): سیر تحول نظریه فضا ـ زمان در متن بررسی نشده و فقط نظریه‌ی نهایی آن مطرح گردیده است.

بررسی گزینه (۳): نقدی بر نظریه‌ی اینشتین درباره‌ی زمان در متن صورت نگرفته است. آزمایش ادینگتون نظریه‌ی اینشتین درباره‌ی تأثیر جرم بر فضا ـ زمان را بررسی می‌کند.

۲ـ گزینه «۱» پاراگراف سوم دقیقاً جوابی است که برای سؤال انتهایی مطرح‌شده در انتهای پاراگراف دوم، آورده شده است. در نتیجه، پاراگراف دوم حکم پیش‌زمینه را برای پاراگراف بعدی خود دارد.

۳ـ گزینه «۱» در جملات ابتدایی پاراگراف اول آشکارا درهم تنیده و پیوسته بودن ابعاد فضا و زمان مطرح شد.

نادرستی سایر گزینه‌ها:

بررسی گزینه (۲): هدف متن بررسی امکان‌پذیری تغییر دادن پارامتر زمان بود و در انتها هم به نتیجه‌ای دال بر غیرممکن‌بودن آن نرسید.

بررسی گزینه (۳): در جملات ابتدایی پاراگراف اول آشکارا از مستقل نبودن مفاهیم فضا و زمان از یکدیگر صحبت شد.

بررسی گزینه (۴): در مورد این موضوع در متن چیزی نیامده است.

۴ـ گزینه «۳» در پاراگراف سوم از تمثیل «گلوله‌ی فلزی روی یک صفحه» برای نشان‌دادن تأثیر جرم (خورشید) بر فضا ـ زمان استفاده شد. پس منظور عبارت «هنوز گلوله‌ی فلزی را روی صفحه نگذاشته‌اید» این است که هنوز خورشید، فضا ـ زمان را خمیده نکرده و تأثیر خود را نگذاشته است.

پاسخ سؤالات متن (۲)

۵ـ گزینه «۲» در جمله‌ی انتهایی پاراگراف اول آورده شده است که ابعاد توربین اندازه‌های استاندارد ندارد و مهندسان بر اساس شرایط هر منطقه آن‌ها را طراحی می‌کنند. پس گزینه (۲) صحیح است.

نادرستی سایر گزینه‌ها:

بررسی گزینه (۱): در مورد مکانیزم تبدیل انرژی در توربین‌ها در این دو پاراگراف مطلبی نیامده است.

بررسی گزینه (۳): در پاراگراف اول به ارتباط طول پره با بادخیز بودن منطقه اشاره شده است نه ارتفاع میله. همچنین به معکوس یا مستقیم بودن این وابستگی نیز اشاره‌ای نشده است.

بررسی گزینه (۴): در انتهای پاراگراف دوم به وضوح از مقرون به‌صرفه‌تر بودن توربین‌های افقی صحبت شده است.

زبان عمومی

بخش اول: دستور زبان

در سؤالات زیر، از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) پاسخی را انتخاب کنید که به بهترین نحو جای خالی را پر کند. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.

۳۱ـ گزینه «۱» تندر در اثر رعد و برق ایجاد می‌شود که اساساً جریانی از الکترون‌ها است که بین ابرها یا بین ابر و زمین در جریان هستند.

توضیح گرامری: اگر جمله را ترجمه کنیم، می‌بینیم به یک گزاره وصفی برای جای خالی نیاز داریم. پس گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست هستند چون ضمیر موصولی ندارند. ضمناً گفتیم بعد از کاما that کاربرد ندارد؛ پس گزینه ۲ هم نادرست است. حالا فقط گزینه (۱) می‌ماند که در اینجا lightening مرجع و از جای خالی به بعد هم گزاره وصفی است. البته چون گزاره وصفی ما بعد از کاما به کار رفته، از نوع غیرضروری است.

۳۲ـ گزینه «۲» در مصر و هند باستان، مردم با کمک سردسازی تبخیری (یعنی این اصل که مولکول‌های بخار آب، گرما را از محیط خود جذب می‌کنند) یخ تولید می‌کردند.

توضیح گرامری: برای پاسخگویی فقط به اطلاعات داخل پرانتز نیاز داریم. پس بیایید داخل پرانتز را تحلیل کنیم. The principle فاعل ما است؛ پس (۱) و (۴) حذف می‌شوند چون هر کلاز (جمله‌واره) یک فاعل نیاز دارد نه بیشتر. ضمناً در مبحث گزاره اسمی گفتیم یکی از کاربردهای that clause این است که بعد از یک‌سری اسم مثل belief، view، principle و .... بیاید. پس فقط (۲) صحیح است.

۳۳ـ گزینه «۱» تا پایان دهه ۱۸۰۰، منابع و مخازن طبیعی ترکیبات نیتروژنی به‌خاطر کاربردشان به‌عنوان کود شیمیایی چنان به پایان رسیدند که برخی می‌ترسیدند هنگام اتمام این مخازن، قحطی سرتاسر جهان را در برگیرد.

توضیح گرامری: تست خیلی راحتی است. نویسنده از الگوی زیر استفاده کرده است:

so + صفت + that ⇒ … So badly depleted … that …

۳۴ـ گزینه «۳» محققان در حال حاضر روی هواپیماهایی کار می‌کنند که می‌توانند ۲۰ برابر سرعت صوت پرواز کنند.

توضیح گرامری: در گزینه‌های (۲) و (۴) اساساً معلوم نیست that به چه چیزی برمی‌گردد؛ پس هر دو نادرست هستند. گزینه (۱) هم به این دلیل نادرست است که قاعدتاً می‌گوییم 20 times faster than نه faster than 20 times.

۳۵ـ گزینه «۴» در سال ۱۸۹۴، فیزیکدان ایتالیایی به نام گولیلمو مارکونی که از نظریه‌های جیمز کلرک ماکسول الهام گرفته بود، شروع به پژوهش در مورد فنی برای انتقال سیگنال‌های الکترومغناطیسی از طریق هوا در طول فواصل زیاد کرد.

توضیح گرامری: خب بدل مدنظر سؤال است. پس گزینه‌های (۱) و (۳) حذف می‌شوند. حالا بیایید صورت سؤال را بررسی کنیم. بعد از جای خالی by آمده که نشانه ساختار مجهول است، اما گزینه (۲) که فعل مجهول نیست؛ پس این گزینه هم نادرست است. برای اینکه ببینیم چرا گزینه (۴) صحیح است باید اول اصل جمله را پیدا کنیم که این‌گونه بوده است:

In 1894, Italian physicist Guglielmo Marconi, **who was inspired by the theories** ……., began work ….

خب قسمتی را که بولد (تیره) کردیم، گزاره وصفی غیرضروری است چون بین دو کاما قرار گرفته است. حالا می‌توانیم گزاره وصفی را کوتاه کنیم:

In 1894, Italian physicist Guglielmo Marconi, **inspired by the theories** ……., began work ….

حالا قسمت بولدشده، بدل غیرضروری است. گفتیم بدل را می‌توانیم به قبل از مرجع انتقال دهیم. پس داریم:

In 1894, **inspired by the theories** ……., Italian physicist Guglielmo Marconi began work ….

سؤالات مهندسی برق ــ مخابرات

مجموعه دروس تخصصی (ریاضیات مهندسی، مدارهای الکتریکی ۱ و ۲، الکترومغناطیس، سیگنال‌ها و سیستم‌ها)

۱ــ فرض کنید $z = x + iy$ باشد. مقدار ماکزیمم $|\sin z|$ در دامنه مربعی شکل $D = \{(x,y), \circ \le x,y \le 2\pi\}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $e^{2\pi}$ ۳) $\sinh 2\pi$ ۴) $\cosh 2\pi$

۲ــ جواب مسئله پواسن زیر کدام است؟

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} = \frac{\sin\theta}{r^2} \ , \ \circ < r < 2 \ , \ \circ < \theta < 2\pi \\ \omega(r, \circ) = \circ \\ \omega(2, \theta) = \sin 3\theta \end{cases}$$

۱) $\omega(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin 3n\theta$

۲) $\omega(r,\theta) = \frac{1}{2} r \sin\theta + \frac{1}{8} r^3 \sin\theta$

۳) $\omega(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (r^n + r^{-n}) \sin 3n\theta$

۴) $\omega(r,\theta) = (\frac{1}{2} r - 1)\sin\theta + \frac{1}{8} r^3 \sin 3\theta$

۳ــ انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} |\sin x| & , |x| \le \pi \\ \circ & , |x| > \pi \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\infty} \frac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^2}\cos(\omega x)d\omega$

۲) $\frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\infty} \frac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^2}\omega\cos(\omega x)d\omega$

۳) $\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{\infty} \frac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^2}\cos(\omega x)d\omega$

۴) $\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{\infty} \frac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^2}\omega\cos(\omega x)d\omega$

۴ــ معادله دیفرانسیل جزئی ناهمگن زیر با تغییر متغیر $u(x,t) = v(x,t) + r(x)$ به یک معادله همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل می‌شود. $v(x,\circ)$ کدام است؟

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + x - 1 \ , \ \circ < x < 2 \ , \ t > \circ \\ u(\circ,t) = 3 \quad , u(2,t) = -1 \ , t > \circ \\ u(x,\circ) = 1 - x^3 \quad , \circ < x < 2 \end{cases}$$

۱) $-\frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x - 2$

۲) $-\frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x - 2$

۳) $-\frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + 3$

۴) $-\frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + 3$

۵ــ اگر $v(x,y)$ مزدوج همساز تابع $u(x,y) = (x^2 - y^2 + 1)^2 - 4x^2y^2$ با شرط $v(\circ,\circ) = \circ$ باشد، مقدار $v(1,1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۴ ۴) -4

۶ــ سری نیم‌دامنه سینوسی تابع $f(x) = x(\pi - x)$ در فاصله $\circ < x < \pi$ کدام است؟

۱) $\sum_{m=\circ}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)\pi}\sin(2m+1)x$

۲) $\sum_{m=\circ}^{\infty} \frac{8}{(2m+1)^3\pi}\sin(2m+1)x$

۳) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m\pi}\sin 2mx$

۴) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3\pi}\sin 2mx$

۷ــ اگر $F(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)e^{-i\omega x}dx$ تبدیل فوریه $f(x)$ باشد، تبدیل فوریه جواب مسئله زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) \ , \ t > \circ \ , \ x \in \mathbb{R} \\ u(x,\circ) = \circ \ , \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

۱) $\int_{\circ}^{t} F(\omega,\tau)e^{a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$

۲) $\int_{\circ}^{t} F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$

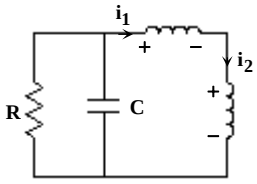
۳) $\int_{\circ}^{\infty} F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$

۴) $\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$

۸ــ فرض کنید تابع تحلیلی $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ برای هر $z \in \mathbb{C}$ در نامساوی $|f(z) - 2z^2 - iz| \le \sqrt{2}$ صدق کند. در این‌صورت مقدار $\oint_{|z|=1} f\left(\frac{1}{z}\right)dz$ کدام است؟

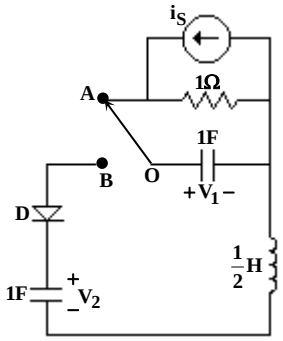
۱) $2\pi i$ ۲) $-2\pi i$ ۳) 2π ۴) -2π

۱۵ـ در مدار زیر، سلف‌های غیرخطی با مشخصه‌های $\phi_1 = -i_1^3$ و $\phi_2 = i_2^3 + i_2$ داده شده است. اگر $R = \frac{1}{2}\Omega$، $0 < C < 1$ و i_1 پاسخ این مدار باشد، پاسخ این مدار چگونه است؟



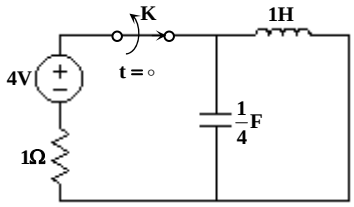
۱) میرای ضعیف
۲) میرای شدید
۳) میرای بحرانی
۴) نوسانی

۱۶ـ در مدار زیر، $i_s = 2u(-t)$ و شرط اولیه $V_2(0^+) = 1$ ولت است. اگر در لحظه $t = 0$ کلید را از وضعیت OA به وضعیت OB بچرخانیم، مدت زمان هدایت دیود ایده‌آل D چند ثانیه خواهد بود؟



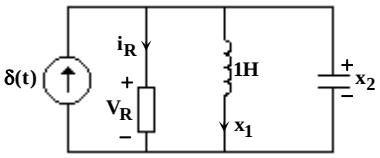
۱) $\frac{\pi}{4}$
۲) $\frac{\pi}{2}$
۳) $\frac{3\pi}{4}$
۴) π

۱۷ـ در مدار زیر کلید K مدت زمان زیادی بسته بوده است. آن را در لحظه $t = 0$ باز می‌کنیم. مسیر حالت برای $t > 0$، روی کدام معادله قرار دارد؟



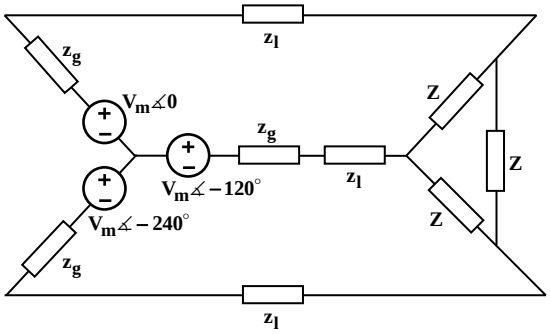
۱) $4x_1^2 + 16x_2^2 = 1$
۲) $x_1^2 + 4x_2^2 = 16$
۳) $x_1^2 + 64x_2^2 = 16$
۴) $4x_1^2 + x_2^2 = 64$

۱۸ـ در مدار غیرخطی زیر، بار خازن $q = x_2^2$، جریان مقاومت غیرخطی $i_R = \frac{1}{V_R}$ و سلف 1H خطی است. معادلات حالت این مدار کدام است؟



۱) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-1}{2x_2^2} - \frac{x_1}{2x_2} + \frac{\delta(t)}{2x_2} \end{cases}$
۲) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-1}{x_2^2} - \frac{x_1}{x_2} + \frac{\delta(t)}{x_2} \end{cases}$
۳) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{2x_2^2} - \frac{x_1}{2x_2} - \frac{\delta(t)}{2x_2} \end{cases}$
۴) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-1}{2x_2^2} + \frac{x_1}{2x_2} + \frac{\delta(t)}{2x_2} \end{cases}$

۱۹ـ در مدار زیر، Z چقدر باشد تا ماکزیمم توان دریافتی را داشته باشد؟



$z_g = 0/2 + j0/5$
$z_l = 0/8 + j0/1$
$Z = R + jX$

۱) $z = 0/6 - j$
۲) $z = 1 - j0/6$
۳) $z = 1/8 - j3$
۴) $z = 3 - j1/8$

پاسخنامه مهندسی برق ــ مخابرات

مجموعه دروس تخصصی (ریاضیات مهندسی، مدارهای الکتریکی ۱ و ۲، الکترومغناطیس، سیگنال‌ها و سیستم‌ها)

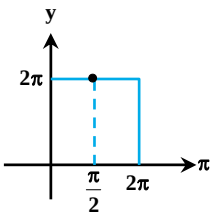
۱ــ گزینه «۴» در مثال متن کتاب ریاضی مهندسی مدرسان شریف، بخش توابع هذلولی مختلط ثابت کردیم که $|\sin z|$ برابر با $\sqrt{\sin^2 x+\sinh^2 y}$ است.

می‌توانید اندازه $\sin z$ را از رابطه‌ی مقابل حساب کنید: $\sin z = \sin x\cosh y + i\cos x\cosh y$

پس $|\sin z|$ قطعاً بزرگ‌تر یا مساوی $\sinh y$ است؛ چون حداقلِ $\sin^2 x$ صفر است، از طرفی می‌توان نوشت:

$$|\sin z| = \sqrt{1-\cos^2 x+\cosh^2 y-1} = \sqrt{\cosh^2 y-\cos^2 x}$$

چون حداقلِ $\cos^2 x$ صفر است، پس حداکثر $\sin z$ هم برابر با $\cosh y$ است. ماکزیمم $\cosh z$ در ناحیه مشخص شده برابر با $\cosh 2\pi$ است. در واقع ماکزیمم روی مرز و در نقطه‌ی $(x,y)=(\frac{\pi}{2},2\pi)$ اتفاق می‌افتد. البته در صورت تسلط بر روی اصل ماکزیمم و کمی تجربه به راحتی می‌توان با توجه به شکل مقابل گفت؛ ماکزیمم در نقطه‌ی $(x,y)=(\frac{\pi}{2},2\pi)$ رخ می‌دهد و با توجه به رابطه‌ی $\sin z$ به وضوح $\text{Max}\,|\sin z| = \cosh 2\pi$ است.



۲ــ گزینه «۴» از سؤالاتی است که سابقه طرح در آزمون‌های تستی را ندارد! البته همه می‌دانیم روش رد گزینه اکثر اوقات یاریگر ما در روبه‌رو شدن با سؤالات این‌چنینی است. ابتدا روش تشریحی سؤال را ارائه می‌دهیم. با توجه به این که عامل ناهمگنی برابر با $\frac{\sin\theta}{r^2}$ می‌باشد، بنابراین معادله پواسون که همان معادله لاپلاس ناهمگن است به فرم مقابل تبدیل می‌گردد: $\omega(r,\theta) = u(r,\theta) - \sin\theta$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \\ u(r,0)=0 \\ u(2,\theta)=\sin\theta+\sin 3\theta \end{cases}$$

می‌دانیم که معادله لاپلاس روی یک دیسک، مثلاً در این سؤال $0<\theta<2\pi$ با $0<r<2$ دارای جوابی به صورت زیر می‌باشد: (در متن کتاب ریاضی مهندسی مدرسان شریف مطرح شده است)

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

حال با در نظر گرفتن شرط $u(r,0)=0$ خواهیم داشت $A_n = 0$ (برای $n = 0,1,2,3$). همچنین مطابق با شرط $u(2,\theta)=\sin\theta+\sin 3\theta$ ضرایب $B_1 = \frac{1}{2}$ و $B_3 = \frac{1}{8}$ به دست می‌آیند. در نتیجه داریم:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}r\sin\theta + \frac{1}{8}r^3\sin 3\theta$$

در نهایت با جایگزینی به دست می‌آوریم:

$$\omega(r,\theta) = u(r,\theta) - \sin\theta = \frac{1}{2}r\sin\theta + \frac{1}{8}r^3\sin 3\theta - \sin\theta = (\frac{1}{2}r-1)\sin\theta + \frac{1}{8}r^3\sin 3\theta$$

روش رد گزینه : با توجه به شرایط مرزی اگه به جای r عدد ۲ رو قرار بدیم باید به $\sin 3\theta$ برسیم، به وضوح گزینه (۴) تو این شرایط صدق می‌کنه!!

۳ــ گزینه «۳» سؤال بسیار پرتکرار و نسبتاً ساده است. با توجه به این که تابع زوج است، پس تبدیل فوریه کسینوسی باید مورد استفاده قرار بگیرد:

$$I = F_c(\omega) = \int_0^{\infty} |\sin x|\cos\omega x dx = \int_0^{\pi} \sin x\cos\omega x dx$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء داریم:

	مشتق	انتگرال
⊕	$\cos\omega x$	$\sin x$
⊖	$-\omega\sin\omega x$	$-\cos x$
⊕	$-\omega^2\cos\omega x$	$-\sin x$

→ انتگرال می‌گیریم

چون مشتق صفر نمی‌شود، لذا در مرحله‌ی سوم انتگرال می‌گیریم:

$$I = -[\cos x\cos\omega x]_0^{\pi} - [\omega\sin x\sin\omega x]_0^{\pi} + \omega^2 I \Rightarrow (1-\omega^2)I = 1+\cos\pi\omega \Rightarrow I = F_c(\omega) = \frac{1+\cos\pi\omega}{1-\omega^2} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1+\cos\pi x}{1-\omega^2}\cos\omega x d\omega$$

۴ــ گزینه «۲» ابتدا از طرفین رابطه‌ی $u(x,t)=v(x,t)+r(x)$ دو بار نسبت به x و در یک مرحله‌ی دیگر یک‌بار نسبت به t مشتق می‌گیریم و داریم:

$$u_{xx}=v_{xx}+r_{xx}\ ,\ u_t(x,t)=v_t(x,t)+0$$

حالا در معادله جایگزین می‌کنیم:

$$v_{xx}+r_{xx}=v_t(x,t)+x-1$$

بر اساس دو شرط اولیه صورت سؤال داریم:

$$u(0,t)=v(0,t)+r(0)\Rightarrow 3=v(0,t)+r(0)\quad ,\quad u(2,t)=v(2,t)+r(2)\Rightarrow -1=v(2,t)+r(2)$$

برای این که شرایط مرزی برحسب v همگن شود باید $r(0)=3$ و $r(2)=-1$ شود، بنابراین با دستگاه معادلات زیر برای همگن شدن معادله و شرایط مرزی آن روبه‌رو هستیم:

$$\begin{cases} r_{xx}=x-1\Rightarrow r_x=\frac{x^2}{2}-x+c_1\Rightarrow r(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+c_1x+c_2 \\ r(0)=3, r(2)=-1 \end{cases}$$

حالا از شرط $r(0)=3$ به راحتی c_2 برابر با ۳ به‌دست می‌آید و از شرط $r(2)=-1$ داریم:

$$-1=\frac{2^3}{6}-\frac{2^2}{2}+c_1(2)+3\Rightarrow -4=\frac{4}{3}-2+2c_1\Rightarrow 2c_1=-2-\frac{4}{3}\Rightarrow c_1=-\frac{5}{3}$$

بنابراین داریم: $r(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-\frac{5}{3}x+3$.

ما دنبال $v(x,0)$ هستیم. اگر دوباره به تغییر متغیر صورت سؤال برگردیم، رابطه‌ی مقابل را داریم:

$$v(x,0)=v(x,0)+r(x)$$

$$\Rightarrow 1-x^3=v(x,0)+\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-\frac{5}{3}x+3\Rightarrow v(x,0)=-\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{3}x-2$$

روش تستی: خُب! از شرط صورت سؤال داریم:

$$u(x,t)=v(x,t)+r(x)\qquad (*)$$

با توجه به داده‌های دیگه دو شرط $u(0,t)=3$ و $u(2,t)=-1$ داریم، پس فعلاً از این دو شرط کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} u(0,t)=v(0,t)+r(0)\Rightarrow 3=v(0,t)+r(0) \\ u(2,t)=v(2,t)+r(2)\Rightarrow -1=v(2,t)+r(2) \end{cases}$$

چون قراره معادله برحسب v یک معادله‌ی همگن با شرایط مرزی همگن باشه، پس باید $v(0,t)=v(2,t)=0$ باشه، بنابراین $r(0)=3$ و $r(2)=-1$ نتیجه‌ای که تا اینجا داریم. دنبال $v(x,0)$ هستیم؛ در رابطه‌ی (*) به جای tها صفر قرار می‌دیم:

$$u(x,0)=v(x,0)+r(x)\Rightarrow v(x,0)=u(x,0)-r(x)\Rightarrow \boxed{v(x,0)=1-x^3-r(x)}$$

اگه در طرفین رابطه‌ی فوق به جای xها عدد صفر رو قرار بدیم، داریم:

$$v(0,0)=1-0-r(0)\xrightarrow{r(0)=3} v(0,0)=-2$$

تو گزینه‌ها فقط گزینه‌های (۱) و (۲) هستن که اگه به جای xهای اونا صفر قرار بدیم، مقدارشون برابر منفی (۲) میشه، پس تا اینجا گزینه‌های (۳) و (۴) میپرن!

حالا برای انتخاب از بین گزینه‌های (۱) و (۲) از شرط $r(2)=-1$ کمک می‌گیریم:

$$v(2,0)=1-2^3-r(2)\Rightarrow v(2,0)=1-8-(-1)=-6$$

کافیه از بین گزینه‌های (۱) و (۲) تو یکی به جای x عدد ۲ قرار بدیم، مثلاً تو گزینه (۲) داریم:

$$v(2,0)=-\frac{7}{6}(2^3)+\frac{1}{2}(2)^2+\frac{5}{3}\times 2-2=-\frac{7\times 4}{3}+2+\frac{10}{3}-2=\frac{-28+6+10-6}{3}=-\frac{18}{3}=-6$$

پس همین گزینه جوابه . میتونین تو گزینه (۱) به جای x، عدد ۲ رو قرار بدین و ببینین که برابر با ۶- نمیشه! (اگه این کارو هم میکردین باز هم می‌تونستین بدون محاسبه‌ی گزینه (۲)، به جواب برسین فرقی نداره!)

۵ــ گزینه «۳» از سؤالات تکراری که چند بار تاکنون عین آن طرح شده است! یک روش این است که به جای yها، صفر و به جای xها، z قرار دهیم و مستقیم به ضابطه‌ی z برسیم و روش دیگر مبتنی بر فرمول زیر است:

$$v=\int \frac{\partial u}{\partial x}dy-\int(\text{عبارتی که از حذف توابع شامل } y \text{ در ضابطه‌ی } \frac{\partial u}{\partial y} \text{ حاصل می‌شود})dx$$

$$v=\int[2(x^2-y^2+1)(2x)-8xy^2]dy-\int(0)dx=4x^3y-\frac{y^3}{3}\times 4x+4xy-\frac{8xy^3}{3}+c=4x^3y-\frac{12xy^3}{3}+4xy+c$$

$$\Rightarrow v(x,y)=4xy(x^2-y^2+1)+c\xrightarrow{v(0,0)=0} c=0\Rightarrow v(x,y)=4xy(x^2-y^2+1)\Rightarrow v(1,1)=4$$

روش دیگر: وقتی u را داریم می‌توانیم از فرمول مقابل به z و بعد از آن به v برسیم.

$$f(z)=u(z,\circ)+iv(z,\circ)$$

در ضابطه‌ی $u(x,y)$ به جای تمام xها z و به جای تمام yها صفر قرار می‌دهیم:

$$f(z)=(z^{۲}+۱)^{۲}+iv(z,\circ)$$

با توجه به این که $v(\circ,\circ)=\circ$، پس $f(\circ)=۱$ و با توجه به ضابطه‌ی u قطعاً $v(z,\circ)=\circ$ خواهد بود، لذا $f(z)=(z^{۲}+۱)^{۲}$. از این‌جا داریم:

$$f(z)=(z^{۲}+۱)^{۲}=(x^{۲}-y^{۲}+۱+i۲xy)^{۲}=v(x,y)+i۴xy(x^{۲}-y^{۲}+۱)\Rightarrow v(x,y)=۴xy(x^{۲}-y^{۲}+۱)\Rightarrow v(۱,۱)=۴$$

۶ـ گزینه «۲» سؤال بسیار تکراری از سری فوریه است و اساساً جنبه‌ی محاسباتی دارد. سؤال را به دو روش حل می‌کنیم، روش اول، روش تشریحی و عادی حل سؤال است:

با توجه به اینکه سری فوریه سینوسی مدنظر است، لذا باید b_n را حساب کنیم:

$$b_n=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}x(\pi-x)\sin nx\,dx=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}(\pi x)\sin(nx)dx+\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}-x^{۲}\sin(nx)dx=۲\int_{\circ}^{\pi}x\sin(nx)dx-\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}x^{۲}\sin(nx)dx=I_{۱}-I_{۲}$$

دو انتگرال جزء به جزء داریم که از روش جدول برای هر دوی آن‌ها کمک می‌گیریم:

	x	$\sin nx$
$\oplus$	۱	$\frac{-۱}{n}\cos(nx)$
$\ominus$	$\circ$	$-\frac{۱}{n^{۲}}\sin nx$

$$\Rightarrow I_{۱}=۲[-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{۱}{n}\sin nx]_{\circ}^{\pi}=۲\times[-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)]=-\frac{۲\pi}{n}\cos n\pi$$

برای محاسبه $I_۲$ داریم:

	$x^{۲}$	$\sin nx$
$\oplus$	$۲x$	$\frac{-۱}{n}\cos(nx)$
$\ominus$	۲	$-\frac{۱}{n^{۲}}\sin(nx)$
$\oplus$	$\circ$	$+\frac{۱}{n^{۳}}\cos(nx)$

$$\Rightarrow I_{۲}=\frac{۲}{\pi}[-\frac{x^{۲}}{n}\cos(nx)+\frac{۲x}{n^{۲}}\sin(nx)+\frac{۲}{n^{۳}}\cos(nx)]_{\circ}^{\pi}\Rightarrow I_{۲}=\frac{۲}{\pi}[(-\frac{\pi^{۲}}{n}\cos(n\pi)+\frac{۲}{n^{۳}}\cos n\pi-\frac{۲}{n^{۳}}\cos(\circ)]$$

$$\Rightarrow I_{۲}=-\frac{۲\pi}{n}\cos n\pi+\frac{۴}{\pi n^{۳}}\cos(n\pi)-\frac{۴}{\pi n^{۳}}$$

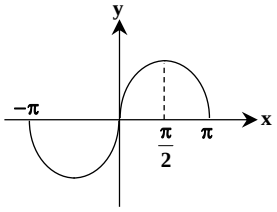
بنابراین $b_n=I_{۱}-I_{۲}$ برابر با مقدار مقابل است:

$$b_n=I_{۱}-I_{۲}=-\frac{۴}{\pi n^{۳}}\cos n\pi+\frac{۴}{\pi n^{۳}}$$

اگر n زوج باشد، آنگاه $\cos n\pi=۱$ و لذا $b_n=\circ$ می‌شود و اگر n فرد باشد (یعنی $n=۲m+۱$) آنگاه داریم:

$$b_n=-\frac{۴(-۱)}{\pi(۲m+۱)^{۳}}+\frac{۴}{\pi(۲m+۱)^{۳}}=\frac{۸}{(۲m+۱)^{۳}\pi}$$

همان‌طور که می‌بینید b_n به‌دست آمده همان b_n داده شده در گزینه (۲) می‌باشد.



روش رد گزینه: دقت کنین، چون تابع پیوسته هستش، پس قطعاً سرعت رشد ضریب از درجه یک نیست و این یعنی گزینه‌های (۱) و (۳) غلطن. از بین گزینه‌های (۴) و (۲) باید یکی رو انتخاب کنیم. هم از بحث تقارن می‌تونیم برای حذف کمک بگیریم و هم از روش مقدارگذاری؛ چون روش مقدارگذاری اطلاعاتی در حد دبیرستان نیاز داره، پس از اون کمک می‌گیریم:

برای مقدارگذاری می‌تونیم $x=\frac{\pi}{۲}$ در نظر بگیریم:

$$f(\frac{\pi}{۲})=\frac{\pi}{۲}(\pi-\frac{\pi}{۲})=\frac{\pi}{۲}\times\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi^{۲}}{۴}$$

با فرض $\pi^{۲}\simeq ۱\circ$، $f(\frac{\pi}{۲})=۲/۵$ هستش، پس واضحه که گزینه (۴) غلطه، چون به ازای $x=\frac{\pi}{۲}$، $\sin ۲mx=\sin x\pi=\circ$ میشه.

۷ــ گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که تبدیل فوریه $u(x,t)$ را با $u(\omega,t)$ و تبدیل فوریه u_{xx} برابر با $(i\omega)^2 u(\omega,t)$ است. حالا از طرفین معادله تبدیل فوریه می‌گیریم، $\frac{du(\omega,t)}{dt} - a^2[-\omega^2 u(\omega,t)] = F(\omega,t)$ با یک معادله‌ی خطی مرتبه اول روبه‌رو هستیم:

$$u(\omega,t) = e^{-a^2\omega^2 t}[\int_0^t F(\omega,t)e^{+a^2\omega\tau}\,d\tau + C(\omega)]$$

$$u(\omega,0) = 0 \Rightarrow C(\omega) = 0 \Rightarrow u(\omega,t) = \int_0^t F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\,d\tau$$

۸ــ گزینه «۴» از سؤالاتی که در دو سال اخیر مورد توجه طراحان قرار گرفته است. سؤال مبتنی بر قضیه لیوویل طراحی شده است. چون سمت چپ نامساوی $|f(z)-2z^2-iz| \le \sqrt{2}$ همه جا تحلیلی است، لذا داریم: $f(z)-2z^2-iz = c \Rightarrow f(z) = c+2z^2+iz \Rightarrow f(\frac{1}{z}) = c+\frac{2}{z^2}+\frac{i}{z}$

حالا سراغ محاسبه‌ی انتگرال می‌رویم: $I = \oint_{|z|=1} f(\frac{1}{z})dz = \oint_{|z|=1} c\,dz + \oint_{|z|=1}\frac{2}{z^2}dz + i\oint_{|z|=1}\frac{1}{z}dz \Rightarrow I = 0+0+i\times 2\pi i = -2\pi$

دقت کنید بر طبق انتگرال کوشی یعنی $\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} = 2\pi i\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$، برای انتگرال‌های فوق، حاصل دو انتگرال صفر است و حاصل انتگرال دیگر برابر $2\pi i f(0) = 2\pi i\times 1 = 2\pi i$ می‌شود که با ضرب در i ، مقدار آن برابر با -2π شده است.

۹ــ گزینه «۱» یک سؤال بسیار پرتکرار و نسبتاً ساده از نگاشت $w = \frac{1}{z}$ طرح شده است. می‌دانیم تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$، رابطه‌های $x = \frac{u}{u^2+v^2}$ و $y = \frac{-v}{u^2+v^2}$ را داریم و چون $2x+3y = 5$، لذا با جایگذاری داریم:

$$\frac{2u}{u^2+v^2} - \frac{3v}{u^2+v^2} = 5 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } u^2+v^2} 2u-3v = 5u^2+5v^2 \Rightarrow 5u^2-2u+5v^2+3v = 0$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } 5} u^2-\frac{2}{5}u+v^2+\frac{3}{5}v = 0$$

حالا با اضافه و کم کردن اعداد مناسب سعی می‌کنیم متغیرهای u و v را به صورت مربع کامل بنویسیم:

$$[u^2-\frac{2}{5}u+(\frac{1}{5})^2-(\frac{1}{5})^2]+[v^2+\frac{3}{5}v+(\frac{3}{10})^2-(\frac{3}{10})^2] = 0 \Rightarrow (u-\frac{1}{5})^2-\frac{1}{25}+(v+\frac{3}{10})^2-\frac{9}{100} = 0 \Rightarrow (u-\frac{1}{5})^2+(v+\frac{3}{10})^2 = \frac{13}{100}$$

۱۰ــ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیستند. سؤال فوق‌العاده غیر استاندارد می‌باشد و نه تنها در کتاب‌های کنکوری چنین سؤالاتی وجود ندارد، بلکه در کتاب‌های دانشگاهی و سؤالات پایان ترم هم چنین سؤالاتی طرح نمی‌شود. ظاهراً بحث فقط برای این بوده که کسی سؤال را جواب ندهد و ضمناً گزینه‌ها هم غلط هستند و سؤال باید حذف شود.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \begin{cases} te^{-|x+y|} & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} = f(x,y,t)$$

تبدیل فوریه کلی روی y:

$$F(u(x,y,t)) = \hat{u}(x,\omega,t)$$

$$F(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = (-i\omega)^2\hat{u}(x,\omega,t) = -\omega^2\hat{u}(x,\omega,t)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} - 9\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + 9\omega^2\hat{u} = \hat{f}(x,\omega,t)$$

تبدیل فوریه سینوسی روی x :

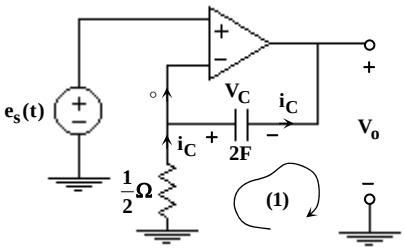
$$F_s(\hat{u}(x,\omega,t)) = \tilde{\hat{u}}(m,\omega,t)$$

$$F_s(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}) = \frac{2}{\pi}\cancel{m\hat{u}(0,\omega,t)} - m^2\tilde{\hat{u}} = -m^2\tilde{\hat{u}}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\hat{u}}}{\partial t^2} + 9m^2\tilde{\hat{u}} + 9\omega^2\tilde{\hat{u}} = \tilde{\tilde{f}}(x,\omega,t) \Rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{\hat{u}}}{\partial t^2} + \tilde{\hat{u}}\,9(m^2+\omega^2) = \tilde{\tilde{f}}(x,\omega,t)$$

$$f(x,y,t) = te^{-|x+y|} \Rightarrow \hat{f} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega y}f(x,y,t)\,dy$$

۱۲ــ گزینه «۴» با توجه به این‌که در آپ‌امپ ایده‌آل جریان پایه‌های ورودی صفر است، مطابق شکل داریم:



$$KVL\,(1):\frac{1}{2}i_C+V_C+V_o=0\Rightarrow V_o=-\frac{1}{2}i_C-V_C \quad (1)$$

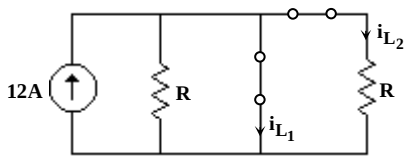
با توجه به نمودار ترسیم‌شده، در بازه‌ی زمانی $0<t<1$ ثانیه، $V_C=t$ بوده، و جریان خازن برابر است با:

$$i_C=2\frac{dV_C}{dt}=2\times1=2A$$

بنابراین طبق رابطه‌ی (۱) داریم:

$$V_o=-\frac{1}{2}\times2-t=-t-1$$

۱۳ــ گزینه «۳» ابتدا مدار را در حالتی‌که کلید بسته است، تحلیل کرده و جریان سلف‌ها را محاسبه می‌کنیم. در این وضعیت با فرض آن‌که مدار در حالت دائمی باشد، سلف‌ها همچون اتصال کوتاه عمل می‌کنند. بنابراین مدار به‌شکل روبه‌رو مدل می‌شود:



مشخص است که تمام جریان منبع ۱۲ آمپری از L_1 می‌گذرد و داریم:

$$i_{L_1}=12A\ ,\ i_{L_2}=0$$

پس از باز شدن کلید، دو سلف موجود در مدار با یکدیگر سری‌شده و جریانشان یکی می‌شود. مقدار جریان i_{L_1} بلافاصله پس از باز شدن کلید برابر است با:

$$i_{L_1}(0^+)=\frac{i_{L_1}(0^-)-2i_{L_2}(0^-)}{L_1+L_2}=\frac{12-0}{2+1}=4A$$

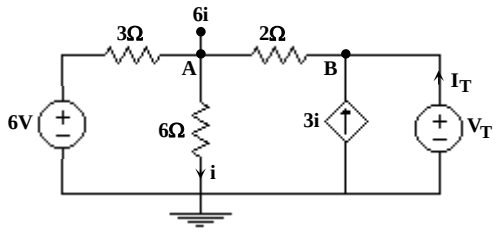
در ادامه مدار همچون یک مدار مرتبه اول با ثابت زمانی $\tau=\frac{L_1+L_2}{R}=\frac{3}{R}$ عمل می‌کند. پس پاسخ i_{L_1} برابر است با:

$$i_{L_1}(t)=\underbrace{i_{L_1}(\infty)}_{0}+[\underbrace{i_{L_1}(0^+)}_{4}-\underbrace{i_{L_1}(\infty)}_{0}]e^{-\frac{t}{\tau}}=4e^{-\frac{R}{3}t}$$

مقدار i_{L_1} در لحظه‌ی $t=1$ ثانیه باید برابر ۲ آمپر باشد، یعنی:

$$4e^{-\frac{R}{3}\times1}=2\Rightarrow e^{\frac{R}{3}}=2\xrightarrow{Ln()}\frac{R}{3}=Ln2\Rightarrow R=3Ln2=Ln8\Omega$$

۱۴ــ گزینه «۱» باید مدار معادل تونن را از دو سر a و b پیدا کنیم. برای این کار منبع ولتاژ تست V_T را در دو سر a و b قرار داده و رابطه V_T با I_T که جریان عبوری از منبع می‌باشد را به‌دست می‌آوریم:



با نوشتن روابط KCL در گره‌های A و B داریم:

$$KCL\,A:\frac{6i-6}{3}+i+\frac{6i-V_T}{2}=0\Rightarrow 6i-\frac{V_T}{2}-2=0\Rightarrow i=\frac{V_T}{12}+\frac{1}{3} \quad (1)$$

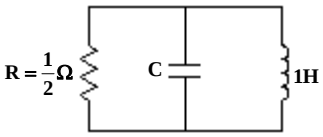
$$KCL\ B:\frac{V_T-6i}{2}-3i-I_T=0\Rightarrow -6i+\frac{V_T}{2}-I_T=0\xrightarrow{(1)}-\frac{V_T}{2}-2+\frac{V_T}{2}-I_T=0\Rightarrow I_T=-2A$$

می‌بینیم که مقدار جریان I_T ثابت بوده و مستقل از V_T است؛ بنابراین مدار همچون یک منبع جریان مستقل (نابسته) عمل می‌کند.

۱۵ــ گزینه «۲» سعی می‌کنیم دو سلف موجود در مدار را با یک سلف معادل جایگزین کرده و سپس وضعیت میرایی مدار را تعیین کنیم. در سلف‌های سری جریان سلف‌ها یکسان بوده و با توجه به رابطه $V=\frac{d\varphi}{dt}$، شار معادل سلف‌ها همچون ولتاژ آن‌ها جمع می‌شود. پس دو سلف موجود در مدار همچون سلف واحدی عمل می‌کند که جریان و شارش برابر است با: $i_e=i_1=i_2$

$$\varphi_e=\varphi_1+\varphi_2=-i_1^3+i_2^3+i_2=-i_e^3+i_e^3+i_e=i_e\Rightarrow\varphi_e=i_e$$

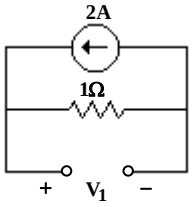
با توجه به رابطه‌ی $\varphi_e = i_e$، سلف معادل یک سلف خطی با ظرفیت ۱ هانری است. حال وضعیت میرایی مدار را با محاسبه‌ی ضریب کیفیت آن مشخص می‌کنیم. در مدار RLC موازی زیر داریم:



$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{C}{1}} = \frac{\sqrt{C}}{2} < \frac{1}{2}$$

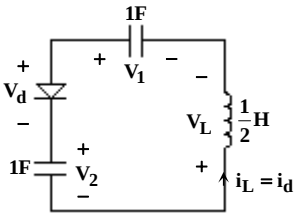
با توجه به این‌که مقدار C کوچکتر از یک است، مقدار Q کوچکتر از $\frac{1}{2}$ بوده و مدار در حالت میرایی شدید قرار دارد.

۱۶ــ گزینه «۲» در گام اول ولتاژ V_1 را در لحظه‌ی صفر محاسبه می‌کنیم. در $t < 0$، i_S برابر ۲ آمپر بوده و کلید در وضعیت OA قرار دارد. با فرض آن‌که مدار در حالت دائمی باشد، خازن همچون مدار باز عمل کرده و داریم:



$$V_1(0) = 2\times 1 = 2V$$

با تغییر وضعیت کلید به حالت OB و با فرض روشن بودن دیود، یک مدار LC خواهیم داشت:



خازن معادل در این مدار برابر است با:

$$C_{eq} = \frac{1}{2}F$$

بنابراین فرکانس نوسانات مدار برابر $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}} = 2\frac{rad}{s}$ می‌باشد. در لحظه‌ی اول ولتاژ $V_1 - V_2 = 2 - 1 = 1V$ بر روی دیود قرار گرفته و دیود روشن می‌شود. پس از آن ولتاژ دیود بلافاصله صفر شده و این ولتاژ مثبت بر روی سلف قرار گرفته و جریان سلف شروع به افزایش می‌کند. روشن بودن دیود تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که جریان سلف مثبت باشد. حال با در نظر گرفتن شرایط اولیه مدار یعنی $i_L(0^+) = 0$، $V_1(0^+) = 2V$ و $V_2(0^+) = 1V$، تابع تغییرات جریان سلف را محاسبه می‌کنیم:

$$i_L(t) = A\sin 2t + B\cos 2t \quad , \quad t \geq 0$$

$$i_L(0^+) = B = 0$$

$$V_L(t) = \frac{1}{2}\frac{di_L}{dt} = A\cos 2t \ , \ V_L(0^+) = V_1(0^+) - V_2(0^+) = 2 - 1 = 1V \Rightarrow V_L(0^+) = A = 1$$

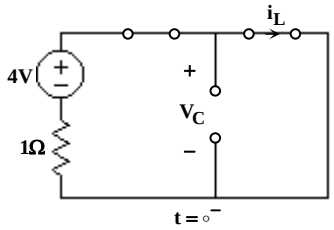
$$\Rightarrow i_L(t) = \sin 2t$$

حال باید ببینیم تا چه زمانی i_L مثبت باقی می‌ماند:

$$i_L(t) = \sin 2t \geq 0 \Rightarrow 2t < \pi \Rightarrow t < \frac{\pi}{2}s$$

بنابراین زمان هدایت دیود $\frac{\pi}{2}$ ثانیه خواهد بود. لازم به ذکر است با صفر شدن i_L دیود خاموش شده و مدار در شرایط ماندگار قرار می‌گیرد.

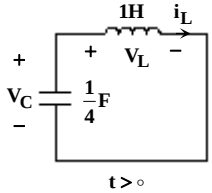
۱۷ــ گزینه «۴» ابتدا با تحلیل مدار در $t = 0^-$، شرایط اولیه مدار را به‌دست می‌آوریم. در این لحظه خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه است:



$$i_L(0^-) = \frac{4}{1} = 4A$$

$$V_C(0^-) = 0$$

در $t > 0$ با باز شدن کلید یک مدار LC سری با شرایط اولیه‌ی $V_C(0^+) = 0$ و $i_L(0^+) = 4A$ خواهیم داشت. فرکانس طبیعی این مدار برابر است با:



$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1\times\frac{1}{4}}} = 2\frac{rad}{s}$$

بنابراین پاسخ $i_L(t)$ به شکل زیر است:

$$i_L(t) = A\sin 2t + B\cos 2t$$

حال با توجه به شرایط اولیه مدار، مقادیر A و B را مشخص می‌کنیم:

$$i_L(0^+) = B = 4$$

$$V_L(t) = \frac{di_L}{dt} = 2A\cos 2t - 2B\sin 2t \Rightarrow V_L(0^+) = 2A = V_C(0^+) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\Rightarrow i_L(t) = 4\cos 2t$$

پاسخ $V_C(t)$ نیز به‌راحتی محاسبه می‌شود:

$$V_C(t) = V_L(t) = \frac{di_L}{dt} = -8\sin 2t$$

حال می‌توان نوشت:

$$\sin^2 2t + \cos^2 2t = 1 \Rightarrow \left(\frac{V_C}{-8}\right)^2 + \left(\frac{i_L}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{V_C^2}{64} + \frac{i_L^2}{16} = 1 \xrightarrow{\times 64} V_C^2 + 4i_L^2 = 64$$

با فرض $x_1 = i_L$ و $x_2 = V_C$، مسیر حالت به شکل $4x_1^2 + x_2^2 = 64$ خواهد بود.

۱۸ــ گزینه «۱» با توجه به موازی بودن تمامی المان‌های مدار، ولتاژ خازن یا x_2، ولتاژ سلف که برابر مشتق جریان سلف یا x_1 است و ولتاژ مقاومت یا V_R با هم برابرند:

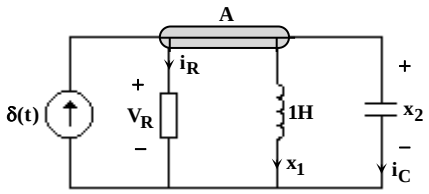
$$x_2 = \dot{x}_1 = V_R \qquad (1)$$

حال جریان i_R و جریان خازن را برحسب x_2 محاسبه می‌کنیم:

$$i_R = \frac{1}{V_R} \xrightarrow{(1)} i_R = \frac{1}{x_2} \qquad (2)$$

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(x_2^2) = 2\dot{x}_2 x_2 \qquad (3)$$

مطابق شکل با نوشتن رابطه‌ی KCL در گره‌ی A داریم:

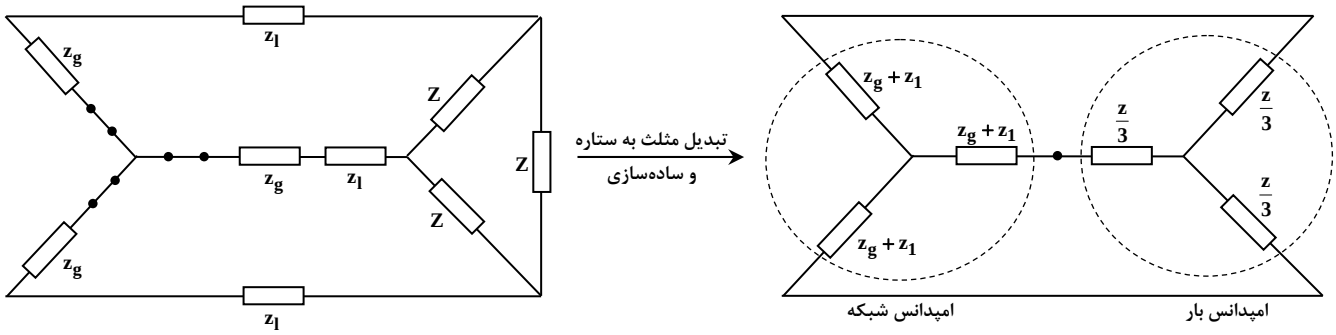


$$KCL\,A: -\delta(t) + i_R + x_1 + i_C = 0 \xrightarrow{(2)\,و\,(3)} -\delta(t) + \frac{1}{x_2} + x_1 + 2\dot{x}_2 x_2 = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{1}{2x_2^2} - \frac{x_1}{2x_2} + \frac{\delta(t)}{2x_2} \qquad (4)$$

از روابط (۱) و (۴) معادلات حالت مدار به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{2x_2^2} - \frac{x_1}{2x_2} + \frac{\delta(t)}{2x_2} \end{cases}$$

۱۹ــ گزینه «۴» این مدار یک مدار سه‌فاز متعادل است. برای تحلیل مدار همچون مدارهای معمول می‌توان منابع مدار را خاموش کرد و امپدانس معادل مدار را به‌دست آورده و سپس با استفاده از تکنیک تطبیق امپدانس مقدار Z را محاسبه کرد. منتها با توجه به سه‌فاز بودن مدار، امپدانس معادل مدار به شکل یک امپدانس ستاره‌ای‌شکل به‌دست می‌آید. لذا امپدانس بار نیز باید از ساختار مثلثی به ساختار ستاره‌ای تبدیل شود تا بتوان از قضیه تطبیق امپدانس استفاده کرد:



$$\frac{Z}{3} = (Z_g + Z_1)^* \Rightarrow Z = 3\times(0/2 + j0/5 + 0/8 + j0/1)^* = 3\times(1 + j0/6)^* = (3 - j1/8)\Omega$$