www.modaresanesharif.ac.ir

فصل اول

« دستگاه اعداد حقیقی و مختلط »

تست‌های تألیفی فصل اول

مثال۱: فرض کنیم که A مجموعه‌ای n عضوی باشد $(n \in \mathbb{N})$ در این صورت کدام گزینه درست نمی‌باشد؟

۱) تعداد کل روابط انعکاسی 2^{n^2-n} است.

۲) تعداد کل روابط متقارن $2^{\frac{n^2+n}{2}}$ است.

۳) تعداد کل روابط انعکاسی و متقارن $2^{\frac{n^2-n}{2}}$ است.

۴) تعداد کل روابط متقارن 2^{n^2-n} است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای حل این تست می‌توان فرض کرد که $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ در این صورت چون می‌خواهیم روابط انعکاسی و متقارن را بشماریم مجموعه $A\times A$ را به دست می‌آوریم: $A\times A=\{(a_1,a_1),...,(a_1,a_n),(a_2,a_1),...,(a_2,a_n),...,(a_n,a_1),...,(a_n,a_n)\}$

فرض کنیم که R رابطه‌ای بر روی مجموعه A باشد $(R\subseteq A\times A)$. اکنون به بررسی حالات زیر می‌پردازیم:

الف) R انعکاسی است. در این حالت چون باید به ازای هر $a_i \in A$ داشته باشیم: $(a_i,a_i)\in R$ لذا باید تمام زوج‌های مرتب $(a_1,a_1),(a_2,a_2),...,(a_n,a_n)$ را در برداشته باشد. (یعنی R نمی‌تواند انعکاسی بوده و یکی از این زوج‌های مرتب ذکر شده را شامل نباشد!) اما در رابطه با سایر زوج‌های مرتب، یعنی زوج‌های مرتبی که در آن‌ها داریم: (a_i,a_j) که $i\neq j$، رابطه R می‌تواند شامل هر کدام از این زوج‌های مرتب باشد و یا نباشد پس برای هر کدام از این زوج‌ها ۲ حالت وجود دارد (بودن یا نبودن در مجموعه R) از آنجا که تعداد کل اعضای مجموعه $A\times A$ برابر n^2 می‌باشد و تعداد کل زوج‌های مرتبی که مؤلفه‌های اول و دوم آن‌ها مساوی‌اند برابر n می‌باشد، پس تعداد کل زوج‌های مرتبی که مؤلفه‌های اول و دوم متمایز دارند برابر است با n^2-n. لذا داریم:

زوج مرتب	(a_1,a_1)	…	(a_n,a_n)	(a_1,a_2)	…	(a_1,a_n)	…	(a_n,a_1)	…	(a_n,a_{n-1})
تعداد حالات	۱	…	۱	۲	…	۲	…	۲	…	۲
	n تا			n^2-n تا						

بنابراین طبق اصل ضرب در ترکیبات داریم:

$$\text{تعداد کل روابط انعکاسی}=\underbrace{1\times\cdots\times 1}_{n\text{ تا}}\times\underbrace{2\times\cdots\times 2}_{n^2-n\text{ تا}}=2^{n^2-n}$$

بنابراین گزینه (۱) درست است.

ب- R متقارن است: در این حالت الزامی به اینکه زوج‌های مرتب (a_i,a_i) یعنی زوج‌های مرتبی که مؤلفه‌ی اول و دوم آنها یکسان می‌باشند، عضو R باشند نیست پس هرکدام از این زوج‌ها می‌توانند عضو R باشند و یا نباشند و لذا برای هر کدام دو حالت امکان دارد. اما در مورد زوج‌های مرتبی به شکل (a_i,a_j) که $i\neq j$ اگر $(a_i,a_j)\in R$ از آنجا که R متقارن است پس باید $(a_j,a_i)\in R$. بنابراین زوج‌های مرتب (a_i,a_j) و (a_j,a_i) یا هر دو باید عضو R باشند و یا هر دو نباید عضو R باشند، زیرا عضویت فقط یکی از آنها در رابطه‌ی R موجب می‌گردد که R دیگر متقارن نباشد. لذا داریم:

زوج مرتب	(a_1,a_1)	…	(a_n,a_n)	$(a_1,a_2)(a_2,a_1)$	…	$(a_{n-1},a_n)(a_n,a_{n-1})$
تعداد حالات	۱	…	۱	۲	…	۲

بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$\text{تعداد کل روابط متقارن و انعکاسی}=\underbrace{1\times\cdots\times 1}_{n}\times\underbrace{2\times\cdots\times 2}_{\frac{n^2-n}{2}}=2^{\frac{n^2-n}{2}}$$

بنابراین گزینه (۳) نیز درست است. لذا گزینه (۴) پاسخ تست است که البته می‌توان با مثال نقض برقرار نبودن آن را نیز نشان داد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۲: کدام گزینه یک رابطه‌ی هم‌ارزی بر مجموعه $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ نمی‌باشد؟

۱) $(a,b)\sim(c,d)\longleftrightarrow ad=bc$

۲) $(a,b)\sim(c,d)\longleftrightarrow a+d=c+b$

۳) $(a,b)\sim(c,d)\longleftrightarrow ac=bd$

۴) $(a,b)\sim(c,d)\longleftrightarrow ۳\,|\,a-c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» این رابطه خاصیت انعکاسی ندارد، زیرا اگر $(a,b)\sim(a,b)$ باید $aa=bb$ پس $a^۲=b^۲$ که در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. بنابراین این رابطه یک رابطه‌ی هم‌ارزی نیست. اثبات هم‌ارزی بودن سایر روابط سرراست است. توجه شود که وقتی می‌گوییم R یک رابطه‌ی هم‌ارزی بر مجموعه X است آنگاه $R\subseteq X\times X$. بنابراین زمانی‌که می‌گوییم R یک رابطه بر مجموعه $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^۲$ است، در این صورت R باید زیرمجموعه مجموعه $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^۲\times\mathbb{Z}^۲$ باشد.

مثال۳: در مورد رابطه‌ی $f=\{(a,۲),(m+n,۲),(۱,m-n+۱)\}$ کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $a=۱$ باشد، می‌توان m و n را چنان یافت که f تابعی یک‌به‌یک باشد.

۲) به ازای هیچ مقداری از a، f تابع نمی‌باشد.

۳) به ازای بعضی مقادیر a، f تابع است ولی به ازای هیچ مقداری از a، رابطه‌ی f نمی‌تواند تابعی یک‌به‌یک باشد.

۴) به ازای هر مقداری از a، f تابعی یک‌به‌یک است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» فرض می‌کنیم که $a=۱$ باشد در این صورت $(۱,۲)\in f$، چون $(۱,m-n+۱)$ نیز عضو مجموعه f است، اگر بخواهیم که f تابع باشد باید $m-n+۱=۲$ شود، زیرا تصویر هر عضوی از دامنه توسط تابع یکتا است. از طرفی اگر بخواهیم f تابعی یک‌به‌یک باشد باید ۲ دارای پیش‌تصویر یکتا باشد لذا $m+n=۱$ با حل دستگاه مقابل داریم:

$$\begin{cases}m-n+۱=۲\\ m+n=۱\end{cases}\Rightarrow m=۱\ ,\ n=\circ$$

بنابراین می‌توان m و n را چنان یافت که f تابعی یک‌به‌یک باشد. درستی این گزینه، گزینه‌های ۲ و ۳ را نیز رد می‌کند اما برای رد گزینه‌ی ۴ اگر $a=۵$ باشد آنگاه چون f، طبق ادعای مطرح شده در این گزینه، باید تابعی یک‌به‌یک باشد لذا $m+n=۵$ حال اگر $m=۳$ و $n=۲$ باشد در این صورت $m+n=۵$ بوده و داریم: $(۱,m-n+۱)=(۱,۱+۱)=(۱,۲)$. پس $(۱,۲)\in f$ و $(۵,۲)\in f$ که این با یک‌به‌یک بودن تابع f در تناقض است.

مثال۴: کدام گزینه درست نمی‌باشد؟

۱) اگر X مجموعه‌ای دلخواه باشد، تابع $\chi_A:X\to\{\circ,۱\}$ به ازای بعضی از Aها که $A\subseteq X$ می‌تواند پوششی باشد.

۲) تابع ثابت $f:X\to Y$ هیچ‌گاه پوششی نمی‌باشد.

۳) تابع $\chi_A:X\to\{\circ,۱\}$ به ازای بعضی از Aها می‌تواند پوششی نباشد.

۴) تابع ثابت $f:X\to Y$ می‌تواند به ازای بعضی از مقادیر Y پوششی باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» فرض کنیم که $f:X\to Y$ یک تابع با شرایط مقابل باشد: $\forall x\in X\ ;\ f(x)=c, Y=\{c\}$. در این صورت f تابعی ثابت و پوششی است (زیرا $\mathrm{Im}(f)=\{c\}=Y$)، بنابراین توابع ثابت را می‌توان با تغییر برد به تابعی پوشا تبدیل ساخت. لذا گزاره آمده در گزینه (۲) غلط بوده و گزینه (۴) درست است.

اما در مورد سایر گزینه‌ها، می‌دانیم که تابع χ_A به ازای مجموعه دلخواه X و $A\subseteq X$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\chi_A(a)=\begin{cases}۱ & a\in A\\ \circ & a\notin A\end{cases}$$

اگر $A=\varnothing$ باشد در این صورت این تابع به تابع ثابت صفر تبدیل می‌گردد، زیرا:

$$\forall a\in X\ ;\ a\notin\varnothing=A\to\chi_A(a)=\circ$$

که پوششی نمی‌باشد. هم‌چنین اگر $A=X$ در این صورت این تابع به تابع ثابت یک تبدیل می‌گردد، زیرا:

$$\forall a\in X\xrightarrow{X=A}a\in A\to\chi_A(a)=۱$$

که باز هم پوششی نمی‌باشد. اما اگر $\varnothing\neq A\neq X$، در این صورت χ_A تابعی پوششی می‌باشد، زیرا حداقل یک $a\in X-A$ و یک $b\in A$ موجود است و داریم:

$$\chi_A(a)=\circ$$
$$\chi_A(b)=۱$$

و لذا χ_A پوششی است. این درستی گزاره‌های مطرح شده در گزینه‌های (۳) و (۱) را نشان می‌دهد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

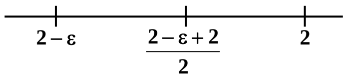
مثال۵: کدام گزینه در مورد ساختار مجموعه $\mathbb{Q}$ درست است؟

۱) $\sup\{q\in\mathbb{Q}\,|\,q>۰\}$ موجود است. ۲) $\sup\{q\in\mathbb{Q}\,|\,q<۰\}$ موجود نمی‌باشد.

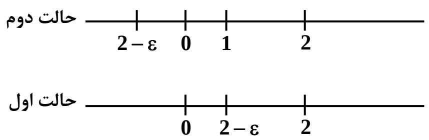
۳) $\sup\{p\in\mathbb{Q}\,|\,(p>۰)\wedge(p^۲<۲)\}=۲$ ۴) $\sup\{(p\in\mathbb{Q}\,|\,(p>۰)\wedge(p^۲<۴)\}=۲$

پاسخ: گزینه «۴» به کمک قضیه‌ای که برای سوپریمم بودن یک عضو بیان کردیم درستی این گزاره را نشان می‌دهیم:

فرض کنیم که $\varepsilon>۰$ با شرط $\varepsilon\in\mathbb{Q}$ داده شده باشد باید نشان دهیم که به ازای یک q عضو مجموعه $\{p\in\mathbb{Q}\,|\,(p>۰)\wedge(p^۲<۴)\}$ داریم $۲-\varepsilon<q\leq ۲$. از آن‌جا که $\varepsilon\in\mathbb{Q}$ لذا $\frac{۲-\varepsilon+۲}{۲}\in\mathbb{Q}$، این نقطه، نقطه وسط بین دو عدد گویای ۲ و $۲-\varepsilon$ است.



اکنون باید دو مطلب را نشان دهیم اول آنکه $\frac{۲-\varepsilon+۲}{۲}$ مثبت است و دوم آنکه مربع آن از عدد ۴ کوچک‌تر است (زیرا فقط در این صورت است که $\frac{۲-\varepsilon+۲}{۲}$ عضو مجموعه $\{p\in\mathbb{Q}\,|\,(p>۰)\wedge(p^۲<۴)\}$ می‌گردد). شرط مثبت بودن $\frac{۴-\varepsilon}{۲}$ این است که $\varepsilon<۴$، لذا اگر $\varepsilon<۴$ باشد، مسئله حل است اما اگر $\varepsilon\geq۴$ باشد در این صورت $\frac{۲-\varepsilon+۲}{۲}\leq۰$ می‌شود در این حالت q مورد نظر را برابر عدد یک اختیار می‌کنیم زیرا $۱\in\mathbb{Q}$، $۱>۰$ و $۱^۲=۱<۴$.



بنابراین در این حالت نیز مسئله حل است. در واقع $q=\begin{cases}۱ & \varepsilon\geq۴\\ \frac{۲-\varepsilon+۲}{۲} & \varepsilon<۴\end{cases}$. فقط باید نشان دهیم که $(\frac{۲-\varepsilon+۲}{۲})^۲<۴$.

$$(\frac{۲+۲-\varepsilon}{۲})^۲=(۲-\frac{\varepsilon}{۲})^۲=۴-۲\varepsilon+\frac{\varepsilon^۲}{۴}=۴-(۲\varepsilon-\frac{\varepsilon^۲}{۴})$$

از طرفی:

$$\varepsilon<۴<۸\rightarrow\frac{\varepsilon}{۴}<۲\xrightarrow{\text{در } \varepsilon>۰ \text{ ضرب می‌کنیم}}\frac{\varepsilon^۲}{۴}<۲\varepsilon\rightarrow۲\varepsilon-\frac{\varepsilon^۲}{۴}>۰$$

لذا:

$$-(۲\varepsilon-\frac{\varepsilon^۲}{۴})<۰\xrightarrow[+۴]{}۴-(۲\varepsilon-\frac{\varepsilon^۲}{۴})<۴\rightarrow(\frac{۲+۲-\varepsilon}{۲})^۲<۴$$

و این یعنی در حالتی که $\varepsilon<۴$ عدد گویای $\frac{۲-\varepsilon+۲}{۲}$ عضو مجموعه $\{p\in\mathbb{Q}\,|\,(p>۰)\wedge(p^۲<۴)\}$ چنان موجود است که $۲-\varepsilon<\frac{۲-\varepsilon+۲}{۲}<۲$، پس عدد ۲ سوپریمم مجموعه $\{p\in\mathbb{Q}\,|\,p>)۰\wedge(p^۲<۴)\}$ می‌باشد.

در مورد گزینه ۱ فرض کنیم که $p\in\mathbb{Q}$ باشد در این صورت عدد $۲p$ نیز عضو مجموعه $\mathbb{Q}$ بوده و واضح است که $p<۲p$. لذا به ازای هر عدد گویا عددی گویا بزرگ‌تر از آن موجود است و این یعنی مجموعه اعداد گویا و به طور مشابه مجموعه اعداد گویای مثبت کران بالا ندارد. در مورد گزینه ۲ مشابه گزینه ۴ می‌توان نشان داد که: $\sup\{p\in\mathbb{Q}\,|\,q<۰\}=۰$. گزینه ۳ نیز با توجه به یکتایی سوپریمم و اثبات آمده برای گزینه ۴ نمی‌تواند درست باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

آزمون فصل اول

۱ـ کدام گزینه در مورد اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها برقرار می‌باشد؟

۱) $B-(\bigcup_{i\in I} A_i)=\bigcup_{i\in I}(B-A_i)$
۲) $B-(\bigcup_{i\in I} A_i)=\bigcap_{i\in I}(B-A_i)$
۳) $B-(\bigcap_{i\in I} A_i)=\bigcap_{i\in I}(B-A_i)$
۴) $B-(\bigcap_{i\in I} A_i)=\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)$

۲ـ اگر $A_n=[0,1-\frac{1}{n}]$ در این صورت:

۱) $\bigcap_{n=2}^{+\infty} A_n=(0,\frac{1}{2})$
۲) $\bigcap_{n=2}^{+\infty} A_n=[0,\frac{1}{2}]$
۳) $\bigcup_{n=2}^{+\infty} A_n=[0,\frac{1}{2})$
۴) $\bigcup_{n=2}^{+\infty} A_n=[0,\frac{1}{2}]$

۳ـ کدام گزینه غلط است:

۱) هر اشتراک شمارا از بازه‌های باز در $\mathbb{R}$ تهی است.
۲) اشتراک شمارایی از بازه‌های باز در $\mathbb{R}$ ممکن است تهی گردد (بازه‌های باز مجزا)
۳) اشتراک شمارایی از بازه‌های بسته در $\mathbb{R}$ ممکن است تهی گردد. (بازه‌های بسته مجزا)
۴) اشتراک ناشمارایی از بازه‌های باز در $\mathbb{R}$ ممکن است تهی گردد. (بازه‌های باز مجزا)

۴ـ کدام گزینه در رابطه با کلاس‌های هم‌ارزی درست است؟($[a]$ = کلاس هم‌ارزی عضو a)

۱) ممکن است به ازای بعضی از a ها داشته باشیم: $[a]=\varnothing$.
۲) $[a]=[b]$ آنگاه $a\sim b$.
۳) اشتراک هر دو کلاس هم‌ارزی مجزا تهی است.
۴) اگر $a\sim b$ آنگاه $[a]=[b]$ ولی عکس آن الزاماً برقرار نمی‌باشد.

۵ـ فرض کنید $f:X\to Y$ یک تابع باشد در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\forall x\in X\ ;\ f(\{x\})=\{f(x)\}$
۲) $f^{-1}(Y)=X \quad f(X)\subseteq Y$
۳) اگر $A\subseteq B\subseteq X\to f(A)\subseteq f(B)$
۴) اگر $A\subseteq B\subseteq Y\to f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(A)$

۶ـ کدام گزینه درست نیست؟ ($f:X\to Y$ تابع است و $B\subseteq Y, A\subseteq X$)

۱) $f(x)\in f(A)\to x\in A$
۲) $y\in f(A)\to \exists x\in A \ni y=f(x)$
۳) $x\in A\to f(x)\in f(A)$
۴) $x\in f^{-1}(B)\to f(x)\in B$

۷ـ کدام گزینه درست نمی‌باشد؟ ($f:X\to Y$ تابع است و $B\subseteq Y, A\subseteq X$)

۱) $f(x)\in B\to x\in f^{-1}(B)$
۲) $y\in B\to \exists x\in f^{-1}(B) \ni f(x)=y$
۳) $x\in f^{-1}(B)\to f(x)\in B$
۴) $x\in A\to f(x)\in f(A)$

۸ـ اگر $A\subseteq\mathbb{R}$ مجموعه‌ای از بالا کراندار باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $\forall\lambda<0\ ;\ \sup(\lambda+A)=\lambda+\inf A$
۲) $\forall\lambda<0\ ;\ \inf(\lambda+A)=\lambda+\sup A$
۳) $\forall\lambda\in\mathbb{R}\ ;\ \sup(\lambda+A)=\lambda+\sup A$
۴) $\forall\lambda\in\mathbb{R}\ ;\ \inf(\lambda+A)=\lambda+\inf A$

۹ـ فرض کنید که $A\subseteq B\subseteq\mathbb{R}$ در این صورت کدام گزینه درست است؟ $(A\neq\varnothing)$

۱) اگر $\sup A$ موجود باشد آنگاه $\sup A\geq\sup B$.
۲) اگر $\sup B$ موجود باشد آنگاه $\sup A\leq\sup B$.
۳) اگر $\inf B$ موجود باشد آنگاه $\inf A\leq\inf B$.
۴) اگر $\inf A$ موجود باشد آنگاه $\inf B\leq\inf A$.

۱۰ـ کدام گزینه درست نمی‌باشد؟

۱) $(\forall\varepsilon>0\ ;\ x^2<\varepsilon)\to x=0$
۲) $(\forall\varepsilon>0\ ;\ x<\varepsilon)\to x=0$
۳) $(\forall\varepsilon>0\ ;\ |x|<\varepsilon)\to x=0$
۴) $(\forall\varepsilon>0\ ;\ \sqrt{x}<\varepsilon)\to x=0$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۱ـ در مورد اعداد حقیقی کدام گزاره درست می‌باشد؟

۱) کوچک‌ترین عدد حقیقی بزرگ‌تر از صفر موجود است.
۲) بزرگ‌ترین عدد حقیقی کوچکتر از صفر موجود است.
۳) بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از یک عدد حقیقی موجود است.
۴) کوچک‌ترین عدد گویا بزرگ‌تر از صفر موجود است.

۱۲ـ اگر X مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آنگاه کدام گزینه در مورد مجموعه X صادق نمی‌باشد؟

۱) اگر X شمارا باشد، هر زیرمجموعه متناهی از آن شمارا است.
۲) هر مجموعه‌ای شامل X نامتناهی است.
۳) X دارای زیرمجموعه‌ای شمارا نامتناهی است.
۴) اگر X ناشمارا باشد، هر زیرمجموعه نامتناهی از آن ناشمارا است.

۱۳ـ کدم گزینه در مورد میدان و فضای برداری درست نمی‌باشد؟

۱) $\mathbb{C}$ یک فضای برداری بر میدان $\mathbb{C}$ است.
۲) فضای برداری متناهی وجود ندارد.
۳) $\mathbb{C}$ یک فضای برداری بر میدان $\mathbb{R}$ است.
۴) هر میدان، یک فضای برداری است.

۱۴ـ در یک فضای ضرب داخلی V کدام گزینه نادرست است؟

۱) $<x,cy>=\overline{c}<x,y>$
۲) $\|x\|^{2}=<x,x>$ یک نرم است.
۳) $<x,y+z>=<x,y>+<x,z>$
۴) $<xy,z>=<x,z><y,z>$

۱۵ـ کدام گزینه در مورد اعداد مختلط درست نمی‌باشد؟

۱) $\operatorname{Re} z=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$
۲) $\operatorname{Re}(z_1z_2)=\operatorname{Re}z_1\operatorname{Re}z_2-\operatorname{Im}z_1\operatorname{Im}z_2$
۳) $\operatorname{Im}\overline{z}=\dfrac{\overline{z}-z}{2i}$
۴) $\operatorname{Im}(z_1z_2)=\operatorname{Re}z_1\operatorname{Im}z_2+\operatorname{Re}z_2\operatorname{Im}z_1$

۱۶ـ کدام گزینه درست است؟

۱) میدان‌های مرتب همگی با هم یکریخت‌اند.
۲) هر میدانی را تنها به یک طریق می‌توان مرتب کرد.
۳) میدان‌های مرتب غیر ارشمیدسی وجود دارد.
۴) میدان‌های مرتب، همگی ارشمیدسی اند.

۱۷ـ در یک میدان کدام گزینه درست است؟

۱)خاصیت ارشمیدسی ← اصل کمال
۲) مرتب بودن ← خاصیت ارشمیدسی
۳) اصل کمال ← خاصیت ارشمیدسی
۴) اصل کمال ← مرتب بودن

۱۸ـ کدام شرط زیر با یک به یک بودن تابع $f:X\to Y$ معادل نمی‌باشد؟ $(A,B\subseteq X)$

۱) $\forall A,B\subseteq X\ ;\ f(A-B)=f(A)-f(B)$
۲) $\exists g:Y\to X \ni fog=I_Y$
۳) $\forall A,B\subseteq X\ ;\ f^{-1}(f(A))=A$
۴) $\exists g:Y\to X \ni gof=I_X$

۱۹ـ اگر $\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$ در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\chi_A\chi_B=\chi_{A\cap B}$
۲) $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}$
۳) $A\subseteq B\to \chi_B\le\chi_A$
۴) $\chi_{A-B}=\chi_A-\chi_{A\cap B}$

۲۰ـ فرض کنید که $A,B\subseteq\mathbb{R}$ ، $\sup A=\sup B$ و $\inf A=\inf B$ در این صورت کدام گزاره نادرست است؟

۱) اگر A و B ناشمارا باشند، با هم برابرند.
۲) اگر B و A بازه باشند طول بازه‌ها با هم برابر است.
۳) $\forall\varepsilon>0\ ;\ \exists a\in A\ \exists b\in B \ni |a-b|<\varepsilon$
۴) ممکن است نه $A\subseteq B$ و نه $B\subseteq A$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

فصل دوم

« فضاهای متریک و توپولوژیک »

تست‌های تألیفی فصل دوم

مثال۱: فرض کنیم که X مجموعه‌ای ناتهی و d و d' دو متر بر مجموعه X باشند که: $\forall a,b \in X; d'(a,b) \le d(a,b)$

در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $\forall a \in X \quad , \quad \forall r > 0 \;;\; B_d(a;r) \subseteq B_{d'}(a;r)$

۲) $\forall a \in X \quad , \quad \forall r > 0 \;;\; B_{d'}(a;r) \subseteq B_d(a;r)$

۳) $\forall a \in X \quad , \quad \forall r > 0 \;;\; B_{d'}(a;r) = B_d(a;r)$

۴) بسته به نقطه‌ی a و شعاع $r > 0$ هرکدام از حالات بالا ممکن است رخ دهد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» فرض کنیم که $y \in B_d(a;r)$ دراین صورت:

$$y \in B_d(a;r) = \{z \in X \mid d(a,z) < r\} \to (y \in X) \qquad \wedge \qquad (d(a,y) < r)$$

اکنون چون $d'(a,y) \le d(a,y)$ لذا $d'(a,y) \le r$ و این یعنی: $y \in B_{d'}(a;r) = \{z \in X \mid d'(a,z) < r\}$ بنابراین $B_d(a;r) \subseteq B_{d'}(a;r)$ و این یعنی گزینه یک درست است.

مثال۲: کدام گزینه در مورد مجموعه $B_{\mathbb{R}^n}(x;r)$ که $x \in \mathbb{R}^n$ و $r > 0$ درست می‌باشد؟ ($\mathbb{R}^n$ را با متر اقلیدسی در نظر بگیرید.)

۱) بسته به مقدار r می‌تواند محدب و یا نامحدب باشد. ۲) این مجموعه غیرمحدب است.

۳) بسته به مقدار x این مجموعه می‌تواند محدب یا نامحدب باشد. ۴) این مجموعه همواره محدب است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» نشان می‌دهیم که این مجموعه همواره محدب است، فرض کنیم که $a,b \in B_{\mathbb{R}^n}(x;r)$ در این صورت

$$(a,b \in \mathbb{R}^n) \qquad \wedge \qquad (d_{\mathbb{R}^n}(a,x) < r) \qquad \wedge \qquad (d_{\mathbb{R}^n}(b,x) < r)$$

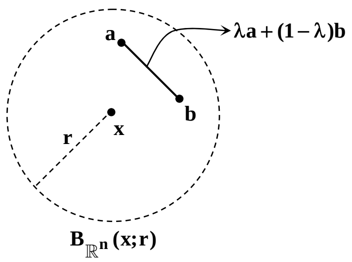
باید نشان دهیم که اگر $1 > \lambda > 0$ باشد آنگاه: $\lambda a + (1-\lambda)b \in B_{\mathbb{R}^n}(x;r)$ و این یعنی: $d_{\mathbb{R}^n}(\lambda a + (1-\lambda)b, x) < r$. می‌دانیم که متر اقلیدسی موجود بر روی $\mathbb{R}^n$ از نرم گرفته شده است به بیان دیگر:

$$d_{\mathbb{R}^n}(a,b) = \| b - a \|$$

که $\| x \| = \| (x_1, \dots, x_n) \| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. بنابراین شرط‌های ذکر شده معادل است با اینکه:

$$(\| a - x \| < r) \qquad \wedge \qquad (\| b - x \| < r) \qquad \xrightarrow[0<\lambda<1]{} \| \lambda a + (1-\lambda)b - x \| < r$$

به شکل توجه شود:



می‌دانیم که نرم دارای خاصیت $\| t+s \| \le \| t \| + \| s \|$ و $\| \mu s \| = |\mu| . \| s \|$ به ازای هر $t,s \in \mathbb{R}^n$ و $\mu \in \mathbb{R}$ است. لذا داریم:

$$\| \lambda a + (1-\lambda)b - x \| = \| \lambda a + (1-\lambda)b - \lambda x - (1-\lambda)x \| = \| \lambda(a-x) + (1-\lambda)(b-x) \|$$

$$\le \| \lambda(a-x) \| + \| (1-\lambda)(b-x) \| = |\lambda| \; \| a-x \| + |1-\lambda| \; \| b-x \|$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

اما چون λ و $1-\lambda$ هر دو اعدادی مثبت‌اند، لذا داریم: $=\lambda\|a-x\|+(1-\lambda)\|b-x\|<\lambda r+(1-\lambda)r=r$

بنابراین $d_{\mathbb{R}^n}(\lambda a+(1-\lambda)b,x)=\|\lambda a+(1-\lambda)b-x\|<r$ و این یعنی: $\lambda a+(1-\lambda)b\in B_{\mathbb{R}^n}(x;r)$.

در نتیجه گوی‌های باز در فضای $\mathbb{R}^n$ (مستقل از مرکز و شعاعشان) همواره محدب‌اند.

مثال ۳: گزاره بیان شده در کدام گزینه درست است؟

۱) مجموعه $\mathbb{Z}^c$ زیرمجموعه بازی از مجموعه $\mathbb{R}$ است.

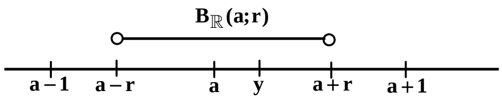
۲) مجموعه $\mathbb{Q}$ زیرمجموعه بازی از مجموعه $\mathbb{R}$ است.

۳) مجموعه $\mathbb{Z}$ زیرمجموعه بازی از مجموعه $\mathbb{R}$ است.

۴) مجموعه $\mathbb{Q}^c$ زیرمجموعه بازی از مجموعه $\mathbb{R}$ است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» دیدیم که $\mathbb{Q}^\circ=\varnothing$ لذا مجموعه $\mathbb{Q}$ در مجموعه $\mathbb{R}$ باز نمی‌باشد و به طور مشابه $\mathbb{Q}^c$ نیز در مجموعه $\mathbb{R}$ باز نمی‌باشد. حال به بررسی مجموعه $\mathbb{Z}$ یعنی مجموعه اعداد صحیح می‌پردازیم. ادعا می‌کنیم که مجموعه $\mathbb{Z}$ باز نمی‌باشد (به عنوان زیرمجموعه‌ای از مجموعه $\mathbb{R}$).

فرض کنیم که $a\in\mathbb{Z}$ و $r>0$. به شکل زیر توجه شود:



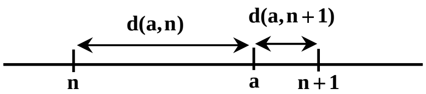
شکل با فرض $r<1$ رسم شده است

در فصل اول دیدیم که هر بازه‌ای در $\mathbb{R}$ شامل حداقل یک عدد گنگ است.

لذا حداقل یک عدد گنگ مانند y چنان موجود است که $y\in(a,a+r)$ و این یعنی $d(a,y)<r$، لذا $y\in B_{\mathbb{R}}(a;r)$. بنابراین $B_{\mathbb{R}}(a;r)$ نمی‌تواند زیرمجموعه مجموعه $\mathbb{Z}$ باشد (توجه شود که اگر $B_{\mathbb{R}}(a;r)$ زیرمجموعه مجموعه $\mathbb{Z}$ باشد آنگاه باید $y\in\mathbb{Z}$ که محال است). بنابراین مجموعه $\mathbb{Z}$ به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ زیرمجموعه‌ای باز نمی‌باشد.

اکنون درستی گزینه (۱) را نشان می‌دهیم: فرض کنیم که $a\in\mathbb{Z}^c$ باشد در فصل اول دیدیم که:

$$n<a<n+1 \qquad \ni \qquad \exists n\in\mathbb{Z}$$



مشابه ایده‌ای که برای اثبات باز بودن بازه‌های باز در $\mathbb{R}$ به کار می‌بردیم قرار می‌دهیم:

$$r=\frac{1}{2}\min\{d(a,n+1),d(a,n)\}=\frac{1}{2}\min\{n+1-a,a-n\}$$

در این صورت ادعا می‌کنیم که: $B_{\mathbb{R}}(a;r)\subseteq\mathbb{Z}^c$

اگر این‌طور نباشد باید $B_{\mathbb{R}}(a;r)\cap\mathbb{Z}\neq\varnothing$ لذا: $\exists m\in\mathbb{Z}\ \ni\ m\in B_{\mathbb{R}}(a;r)$ پس:

$$|a-m|<r<a-n\rightarrow -a+n<a-m<a-n\xrightarrow{\text{از نامساوی سمت راست}}m>n$$

$$|a-m|<r<n+1-a\rightarrow -n-1+a<a-m<n+1-a\xrightarrow{\text{از نامساوی سمت چپ}}m<n+1$$

و این یعنی m عددی صحیح بین دو عدد صحیح متوالی n و $n+1$ است که می‌دانیم این غیرممکن است. لذا فرض خلف باطل بوده و $B_{\mathbb{R}}(a;r)\subseteq\mathbb{Z}^c$. بنابراین مجموعه $\mathbb{Z}^c$ به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ مجموعه‌ای باز است.

البته در آینده راه‌حل ساده‌تری برای این مسئله ارائه خواهیم داد راه‌حلی که از باز بودن بازه‌های $(n,n+1)$ در مجموعه $\mathbb{R}$ و اینکه $\mathbb{Z}^c=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n,n+1)$ بهره می‌گیرد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.in

مثال۴: چه تعداد از گزاره‌های زیر در یک فضای متریک درست می‌باشد؟

الف-اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و $a \in A$ آنگاه $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam}(A - \{a\})$. ب- اگر A مجموعه‌ای دلخواه و $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam}(A - \{a\})$ آنگاه: $a \in A'$. ج- اگر $A \cap B = \varnothing$ و $A, B \neq \varnothing$ آنگاه: $\operatorname{diam}(A \cup B) = \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$. د- اگر A زیرمجموعه‌ای ناتهی دلخواهی از فضای X باشد آنگاه: $\operatorname{diam}(A') = \operatorname{diam}(A)$.

۱) ۰　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تمام رابطه‌های بالا دارای مثال نقض می‌باشند و لذا صحیح نیستند. برای رد گزاره الف فرض کنید که $A = [0,1] \cup \{2\}$ و $a = 2$ در این صورت $\operatorname{diam}(A) = 2$ ولی $\operatorname{diam}(A - \{a\}) = \operatorname{diam}([0,1]) = 1 - 0 = 1$ بنابراین رابطه ذکر شده درست نمی‌باشد. برای رد گزاره ب فرض کنیم که $A = \{0,1,2\}$ و $a = 1$ در این صورت $\operatorname{diam} A = 2 = \operatorname{diam}(A - \{a\})$ ولی مجموعه A هیچ نقطه حدی ندارد و لذا $a = 1$ نمی‌تواند متعلق به مجموعه A' باشد، لذا این گزاره نیز در حالت کلی درست نمی‌باشد. برای رد گزاره ج نیز می‌توان مجموعه‌های $A = \{0\}$ و $B = \{1\}$ را در نظر گرفت در این صورت $\operatorname{diam}(A \cup B) = 1$ ولی $\operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) = 0 + 0 = 0$ بنابراین رابطه $\operatorname{diam}(A \cup B) = \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$ نیز در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. برای رد گزاره د نیز مجموعه $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ را در نظر بگیرید در این صورت $\operatorname{diam}(A') = \operatorname{diam}(\{0\}) = 0$ ولی $\operatorname{diam}(A) = 1$، لذا این رابطه نیز در حالت کلی برقرار نمی‌باشد.

مثال۵: کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟ ((X,d) فضای متری گسسته است.)

الف-اگر $A \subseteq X$ و $a \in A$ آنگاه a یک نقطه حدی برای مجموعه A است. ب-اگر $A \subseteq X$ آنگاه A نقطه حدی ندارد. ج- تمام زیرمجموعه‌های X کامل‌اند. د- اگر $A \subseteq X$ کامل باشد متناهی است.

۱) الف و ب　　۲) فقط ب　　۳) ج و د　　۴) الف و ج

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر $A \subseteq X$ و $a \in X$ باشد دیدیم که $B_X(A;\frac{1}{2}) = \{a\}$ بنابراین نقطه a دارای یک همسایگی می‌باشد که مجموعه A را به جز احتمالاً در نقطه a قطع نمی‌کند به بیان دیگر:

$$(B_X(a;\tfrac{1}{2}) - \{a\}) \cap A = (\{a\} - \{a\}) \cap A = \varnothing \cap A = \varnothing$$

بنابراین a یک نقطه حدی برای مجموعه A نمی‌باشد. حال چون a نقطه‌ای دلخواه بود بنابراین مجموعه A هیچ نقطه حدی در مجموعه X ندارد. توجه شود که حتی نقاطی که عضو مجموعه A می‌باشند نیز برای این مجموعه یک نقطه حدی نیستند و لذا تمام نقاط مجموعه A نقاط تنها برای این مجموعه‌اند. بنابراین گزاره الف نادرست و گزاره ب درست است.

در مورد گزاره ج و د دیدیم که اگر $A \subseteq X$ باشد، مجموعه A نقطه حدی ندارد. در صورتی‌که برای کامل بودن یک مجموعه مانند A باید تمام نقاط آن حدی باشد لذا در فضای متری گسسته هیچ زیرمجموعه‌ی کاملی وجود ندارد. پس گزاره‌های ج و د نیز نادرست است.

مثال۶: کدام‌یک از گزاره‌های ذکر شده درست است؟

الف- اگر مجموعه A فشرده نباشد، هر پوشش باز از آن هیچ زیرپوشش متناهی ندارد که مجموعه A را بپوشاند. ب- اگر مجموعه A فشرده نباشد، یک پوشش باز از آن چنان موجود است که این پوشش هیچ زیرپوشش متناهی ندارد. ج- اگر مجموعه A فشرده باشد، یک پوشش باز از آن چنان موجود است که هر زیرپوشش از این پوشش برای مجموعه A متناهی است. د- اگر مجموعه A فشرده باشد، هر پوشش باز از آن دارای یک زیرپوشش متناهی است.

۱) الف و ب　　۲) ب و د　　۳) د و ج　　۴) الف و ج

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» گزاره د همان تعریف مجموعه فشرده است. این تعریف را می‌توان به زبان ریاضی به صورت زیر نوشت:

$A \subseteq X \leftrightarrow \forall F$ (F یک پوشش باز برای مجموعه A است) ; $\exists E \subseteq F \ni$ (E متناهی بوده) $\wedge (A \subseteq E)$ فشرده است.

به کمک این تعریف می‌توان برای فشرده نبودن مجموعه A گزاره معادلی نوشت:

$A \subseteq X \leftrightarrow \exists F$ (F یک پوشش باز برای مجموعه A است) ; $\forall E \subseteq F$; E متناهی باشد $\rightarrow A \not\subset E$ فشرده نیست.

به بیان دیگر مجموعه A فشرده نمی‌باشد اگر و تنها اگر پوشش بازی از آن چنان موجود باشد که هیچ زیرپوششی متناهی از آن نتواند مجموعه A را بپوشاند.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۷: کدام گزینه نادرست است؟

۱) زیرمجموعه‌های یک مجموعه کلاً کراندار، کلاً کراندارند.

۳) مجموعه‌های فشرده‌ای وجود دارند که کلاً کراندار نیستند.

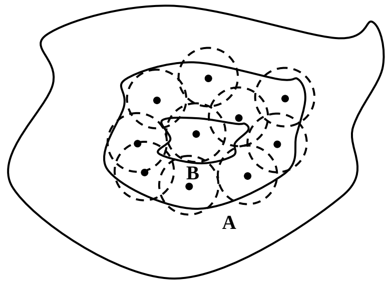
۲) زیرمجموعه‌های بسته از یک فضای متری فشرده، کلاً کراندارند.

۴) بازه $[a,b]$ در مجموعه $\mathbb{R}$ کلاً کراندار است.

پاسخ: گزینه «۳» اثبات کردیم که مجموعه‌های فشرده، کلاً کراندار می‌باشند، لذا این گزینه نادرست است. در مورد گزینه ۱ فرض کنیم که $B\subseteq A\subseteq X$ و A مجموعه‌ای کلاً کراندار باشد نشان می‌دهیم که مجموعه B نیز این‌گونه است، فرض کنیم که $\varepsilon>0$ داده شده باشد، طبق فرض کلاً کرانداری مجموعه A داریم:

$$\exists x_1,x_2,\dots,x_n\in A \qquad \ni \qquad A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}B_X(x_i;\varepsilon)$$

به شکل زیر توجه کنید:



(X,d)

بنابراین مجموعه B نیز زیرمجموعه $\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i;\varepsilon)$ و این یعنی B مجموعه‌ای کراندار کلی است.

مثال ۸: به طور مستقیم، درستی قضیه بولتزانو ــ وایراشتراس را در فضای $\mathbb{R}$ تحقیق کنید.

پاسخ: می‌دانیم که صورت قضیه "بولتزانوـ وایراشتراس" این است: هر زیرمجموعه نامتناهی و کراندار در فضای $\mathbb{R}^n$ دارای حداقل یک نقطه حدی در این فضا است. می‌خواهیم درستی این قضیه را برای مجموعه اعداد حقیقی، یعنی مجموعه $\mathbb{R}$ تحقیق کنیم.

فرض کنیم که مجموعه K زیرمجموعه‌ای نامتناهی و کراندار از $\mathbb{R}$ باشد، چون K کران‌دار است، لذا طبق تعریف کرانداری بازه $[a,b]$ چنان موجود است که $K\subseteq[a,b]$. بازه مذکور را به دو بازه افراز می‌کنیم، اگر بازه‌های $[a,\frac{a+b}{2}]$ و $[\frac{a+b}{2},b]$ هر دو شامل تعداد متناهی از اعضای مجموعه K باشد پس مجموعه K نیز باید متناهی گردد، که تناقض است. پس حداقل یکی از بازه‌های مذکور شامل نامتناهی از اعضای مجموعه K است، آن را I_1 می‌نامیم.

با استدلالی مشابه بازه I_1 را نصف کرده و بازه I_2 را انتخاب می‌کنیم.

با این روند دنباله $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ را با شرط‌های زیر ساخته‌ایم:

۱ـ $I_{n+1}\subseteq I_n$ ۲ـ $\forall x,y\in I_n\ ;\ d(x,y)\le\frac{b-a}{2^n}$ پس $\operatorname{diam}(I_n)\le\frac{b-a}{2^n}$ ۳ـ هر مجموعه I_n مجموعه‌ای فشرده است.

طبق قضیه بازه‌های تودرتو $\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$ ناتهی بوده بنابراین $\exists x\in\mathbb{R}\ ;\ x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$. ادعا می‌کنیم که نقطه x یک نقطه حدی برای مجموعه K است. برای اثبات این ادعا فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد، عدد طبیعی n را طبق خاصیت ارشمیدسی مجموعه اعداد حقیقی چنان انتخاب می‌کنیم که $\frac{b-a}{2^n}\le\varepsilon$. عضو y را با شرط $y\in I_n\bigcap K$ انتخاب می‌کنیم، در این صورت چون $x\in I_n$ لذا $d(x,y)\le\frac{b-a}{2^n}\le\varepsilon$، پس هر همسایگی از نقطه x نقطه‌ای از مجموعه K را دارد در نتیجه نقطه x برای مجموعه K یک **نقطه حدی** است. بنابراین قضیه اثبات شد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

آزمون فصل دوم

۱ـ فرض کنید که (X,d) یک فضای متری و $A \subseteq X$ باشد، کدام گزینه در مورد مرز مجموعه A درست می‌باشد؟

۱) $\partial A = \partial (A^c)$

۲) $\partial A = \overline{A} \bigcap (\overline{A}^c)$

۳) مرز مجموعه A در X هم باز است و هم بسته.

۴) $\partial A = \overline{A} - A^\circ$

۲ـ مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ را با متر $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+2|x-y|}$ درنظر بگیرید در این صورت:

۱) $B_{\mathbb{N}}(1;\frac{1}{4}) = (\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

۲) $B_{\mathbb{N}}(1;\frac{1}{4}) = \{1\}$

۳) $B_{\mathbb{N}}(1;\frac{1}{4}) = (\frac{3}{4},\frac{5}{4})$

۴) $B_{\mathbb{N}}(1;\frac{1}{4}) = \mathbb{N}$

۳ـ کدام گزینه در مورد زیرمجموعه‌های همبند یک فضای متری درست است؟

۱) مرز یک مجموعه هم‌بند، هم‌بند است.

۲) درون یک مجموعه هم‌بند، هم‌بند است.

۳) مجموعه‌های هم‌بند در $\mathbb{R}$، مجموعه‌هایی کامل‌اند.

۴) هم‌بند بودن، مستقل از زیرفضایی است که مجموعه در آن قرار دارد.

۴ـ کدام گزینه در مورد زیرفضای یک فضای متری برقرار است؟

۱) زیرمجموعه‌های فشرده‌ای وجود دارند که کلاً ناهم‌بند می‌باشند.

۲) زیرمجموعه‌های هم‌بند هر فضایی نامتناهی‌اند.

۳) زیرمجموعه‌های فشرده هر فضایی هم‌بند می‌باشند.

۴) زیرمجموعه‌های هم‌بند هر فضایی فشرده‌اند.

۵ـ کدام گزینه غلط است؟ $A,B \subseteq X$ و X یک فضای متری است.

۱) $(B \bigcap A)^\circ = B^\circ \bigcap A^\circ$

۲) $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$

۳) $(B \bigcup A)^\circ \supseteq A^\circ \bigcup B^\circ$

۴) $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$

۶ـ اگر $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های فضای متری (X,d) باشند که $F_{n+1} \subseteq F_n$ در این صورت:

۱) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$

۲) $\exists x \in X \quad \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$

۳) ممکن است اشتراک F_n تهی گردد.

۴) $\bigcap F_n \neq \varnothing$ اگر و تنها اگر F_nها بسته باشند.

۷ـ اگر $A \subseteq X$ در فضای X چگال باشد آنگاه کدام گزینه در مورد مجموعه A غلط است؟

۱) عدد اصلی مجموعه A با عدد اصلی X برابر است.

۲) مجموعه A در هر زیرمجموعه باز ناتهی از X چگال است.

۳) مجموعه A هر زیرمجموعه باز ناتهی X را قطع می‌کند.

۴) $\varnothing$ تنها مجموعه بازی است که از مجموعه A مجزاست.

۸ـ اگر d یک متر بر روی فضای X باشد آنگاه کدام گزینه یک متر کراندار بر روی X می‌گردد؟

۱) $\dfrac{1}{d(x,y)}$ به شرط $x \neq y$ و اگر $x = y$ فاصله صفر باشد.

۲) $\sqrt{d(x,y)}$

۳) $d^2(x,y)$

۴) $\dfrac{d(x,y)}{1+nd(x,y)}$ که $n \in \mathbb{N}$

۹ـ کدام گزینه در مورد مجموعه کانتور غلط است؟

۱) ناشمارا ولی کراندار است.

۲) کامل ولی کلاً ناهمبند است.

۳) فقط شامل نقاط انتهایی بازه‌ها در هر مرحله است.

۴) بسته ولی درون آن تهی است.

۱۰ـ می‌دانیم که برای $A \subseteq X$ قطر مجموعه A به صورت مقابل تعریف می‌گردد. $\operatorname{diam}A = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$ در این صورت:

۱) $A = \varnothing \leftarrow \operatorname{diam}A = 0$

۲) $A \leftarrow \operatorname{diam}A < +\infty$ متناهی است.

۳) $A \leftarrow \operatorname{diam}A = +\infty$ ناشمارا نامتناهی است.

۴) اگر $x \in A$ آنگاه $\operatorname{diam}(A - \{x\}) \leq \operatorname{diam}A$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۱ـ فاصله نقطه $x \in X$ از زیرمجموعه $A \subseteq X$ را در یک فضای متری (X,d) به این صورت تعریف می‌کنیم: $d(x,A) = \inf\{d(x,a) | a \in A\}$ در این صورت کدام گزینه غلط است؟

۱) $d(x,A) = 0 \longleftrightarrow x \in A$　　۲) $x \in (A^c)^\circ \longleftrightarrow d(x,A) > 0$

۳) $d(x,A) = 0 \longleftrightarrow x \in \bar{A}$　　۴) $A \subseteq B \subseteq X \to d(x,A) \geq d(x,B)$

۱۲ـ در مورد یک زیرمجموعه فشرده مجموعه A از فضای متری X کدام گزینه درست است؟

۱) A الزاماً کراندار است ولی کلاً کراندار ممکن است نباشد.　　۲) A نمی‌تواند کلاً ناهم‌بند باشد.

۳) A جدایی‌پذیر است.　　۴) A متناهی یا ناشمارا نامتناهی است.

۱۳ـ کدام گزینه در مجموعه $\mathbb{R}^2$ هیچ جاچگال نمی‌باشد؟

۱) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$　　۲) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$　　۳) $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}^2$　　۴) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$

۱۴ـ به ازای چه مقادیری از a تابع مقابل بر روی فضای ناتهی X متر است؟ $d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ a & x \neq y \end{cases}$　　$d : X \times X \to [0,+\infty)$

۱) $\forall a \in \mathbb{R}$　　۲) $\forall a \quad a \in \mathbb{R} \geq 0$　　۳) $\forall a \in \mathbb{R} \quad 0 < a \leq 1$　　۴) $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \geq 1$

۱۵ـ اگر $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های چگال فضای متری (X,d) باشد در این صورت در مورد اشتراک آن‌ها چه می‌توان گفت؟(هر A_n در X چگال است.)

۱) اگر یکی از A_nها باز باشد $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ در X چگال است.　　۲) همواره $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ در X چگال است.

۳) اگر $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ناتهی باشد در X چگال است.　　۴) اگر همه A_n در X باز باشند $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ نیز در X چگال است.

۱۶ـ برای کدام دنباله می‌توان دنباله $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ از اعداد طبیعی را یافت به طوری که $\lim\limits_{i \to +\infty} a_{n_i}$ موجود باشد؟

۱) $a_n = n\sin(\frac{1}{n})$　　۲) $a_n = n\sin(n)$　　۳) $a_n = \frac{1}{n}\sin(n)$　　۴) $a_n = n\sin(\frac{1}{n^2})$

۱۷ـ اگر $A \subseteq X$ در X کامل باشد آنگاه کدام گزینه در مورد مجموعه A غلط است؟

۱) اگر $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ A می‌تواند شامل هیچ عدد گویایی نباشد.　　۲) اگر $A \neq \varnothing$ و $X = \mathbb{R}^n$ آنگاه A ناشمارا است.

۳) A می‌تواند ناهم‌بند باشد ولی کلاً ناهم‌بند نمی‌تواند باشد.　　۴) A نقطه تنها ندارد.

۱۸ـ کدام گزینه در یک فضای متریک دلخواه در حالت کلی معادل فشردگی است؟ برای یک $A \subseteq X$ ، A فشرده است اگر و تنها اگر . . .

۱) A بسته و کراندار باشد.　　۲) هر زیرمجموعه نامتناهی از A دارای نقطه حدی در مجموعه A است.

۳) A کلاً کراندار باشد.　　۴) A هم‌بند و کامل باشد.

۱۹ـ با تغییر متر یک فضا کدام گزینه صحیح نمی‌باشد:

۱) می‌توان زیر مجموعه نافشرده‌ای را به مجموعه‌ای فشرده تبدیل کرد.　　۲) می‌توان زیرمجموعه بی‌کران را به مجموعه کراندار تبدیل کرد.

۳) می‌توان فضای هم‌بندی را به فضایی ناهم‌بند تبدیل کرد.　　۴) می‌توان عدد اصلی مجموعه را تغییر داد.

۲۰ـ اگر $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های فضای متری $A \subseteq X$ باشند که $A_{n+1} \subseteq A_n$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} diam(A_n) = 0$ آنگاه اگر به ازای هر عدد طبیعی n $A_n \neq \varnothing$ باشد داریم(منظور از اینکه خانواده $\{A_n\}$ بسته (یا فشرده) است این است که هر مجموعه A_n بسته (فشرده) است):

۱) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ حتماً تهی است.　　۲) اگر $\{A_n\}$ بسته باشد، آنگاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ناتهی است.

۳) اگر $\{A_n\}$ فشرده باشند $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ فقط شامل یک نقطه است.　　۴) بسته به شرایط تمام گزینه‌ها درست است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

فصل سوم

« دنباله و سری »

تست‌های تألیفی فصل سوم

مثال۱: فرض کنید که (X,d) یک فضای متری و $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعضای آن باشد که: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ در این صورت کدام گزاره زیر معادل همگرایی این دنباله به نقطه x است؟

الف ــ هر همسایگی از نقطه x شامل نامتناهی نقطه از دنباله $\{x_n\}$ است. ب ــ هر همسایگی از نقطه x شامل تمام اعضای دنباله $\{x_n\}$ به غیر از تعداد متناهی جمله از آن می‌باشد.

۱) فقط گزاره الف ۲) فقط گزاره ب ۳) هر دو گزاره ۴) هیچ‌کدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» درستی گزاره ب را در قضیه قبل نشان دادیم. اکنون نشان می‌دهیم که گزاره الف، علی‌رغم ظاهر بسیار فریبنده‌اش، گزاره‌ای نادرست است. دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه مقابل را در نظر بگیرید:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{۱}{n} & n \text{ زوج} \\ ۱+\dfrac{۱}{n} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

چند جمله اول این دنباله به این صورت است: $\frac{۱}{۲},\frac{۴}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۶}{۵},\frac{۱}{۶},\ldots$. توجه شود که هر همسایگی از نقطه صفر شامل نامتناهی جمله از این دنباله است، ولی $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ برابر صفر نمی‌باشد (زیرا اساساً این حد وجود ندارد). بنابراین گزاره الف درست نمی‌باشد.

مثال۲: کدام گزینه درست است؟ ($\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله حقیقی مقدار هستند.)

۱) اگر از جایی به بعد $a_n \le b_n$ آنگاه همگرایی سری $\sum b_n$ همگرایی سری $\sum a_n$ را نتیجه می‌دهد.

۲) اگر از جایی به بعد $|a_n| \le b_n$ آنگاه واگرایی سری $\sum b_n$ واگرایی سری $\sum b_n$ را نتیجه می‌دهد.

۳) اگر از جایی به بعد $a_n \le b_n$ و دنباله $\{a_n\}$ مثبت باشد آنگاه همگرایی سری $\sum b_n$ همگرایی سری $\sum a_n$ را نتیجه می‌دهد.

۴) اگر از جایی به بعد $a_n \le b_n$ و دنباله $\{b_n\}$ مثبت باشد آنگاه همگرایی سری $\sum b_n$ همگرایی سری $\sum a_n$ را نتیجه می‌دهد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از آنجا که دنباله $\{a_n\}$ دنباله‌ای با جملات مثبت است، لذا $|a_n| = a_n$ بنابراین شرط $a_n \le b_n$ نتیجه می‌دهد که $|a_n| \le b_n$، پس دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ در تمام شرایط قضیه آزمون مقایسه صدق کرده و همگرایی سری $\sum b_n$ همگرایی سری $\sum a_n$ را نتیجه می‌دهد.

برای رد گزینه (۱) قرار دهید $b_n = ۰$ و $a_n = -n$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ در این صورت همواره $a_n \le b_n$ و سری $\sum b_n$ همگرا است، ولی سری $\sum a_n$ واگرا است. برای رد گزینه (۴) دنباله $a_n = -\frac{۱}{n}$ و $b_n = \frac{۱}{n^۲}$ را در نظر می‌گیریم، در این صورت سری $\sum b_n$ همگرا بوده و همواره $a_n \le b_n$ ولی سری $\sum a_n$ واگرا است.

مثال۳: عبارت بیان شده در کدام گزینه درست است؟

۱) آزمون ریشه nام در مورد $p-$ سری‌های ریمان نمی‌تواند اظهارنظر کند.

۲) آزمون ریشه nام در مورد سری‌های توانی نمی‌تواند اظهارنظر کند.

۳) آزمون ریشه nام همگرایی این سری $\Sigma \frac{n}{۳^n}$ را نتیجه نمی‌دهد.

۴) تمام گزینه‌ها درست است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در مورد سری $\sum \frac{۱}{n^p}$ آزمون ریشه nام را به کار می‌بریم: $r = \limsup \sqrt[n]{\left|\frac{۱}{n^p}\right|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{۱}{n^p}} = (\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{۱}{n}})^p = ۱^p = ۱$

بنابراین آزمون ریشه nام درمورد این سری نمی‌تواند نظر بدهد. اما در مورد سری هندسی $\sum\limits_{n=۰}^{+\infty} a^n$ داریم: $r = \limsup \sqrt[n]{|a^n|} = \limsup |a| = |a|$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

لذا $r=|a|$ و اگر $|a|<1$ $r=|a|$ این سری همگرا است و این نتیجه‌ای است که از قبل در مورد سری‌های هندسی به دست آوردیم. بنابراین گزینه ۲ غلط است. در مورد گزینه سوم دقت شود که: $r=\limsup\sqrt[n]{\frac{n}{3^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3}=\frac{1}{3}<1\to\sum\frac{n}{3^n}<+\infty$

پس گزینه (۳) نادرست است.

مثال ۴: کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ در این صورت سری $\sum_{2|n}a_n$ همگرای مطلق است.

۲) اگر $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ در این صورت سری $\sum_{2|n}a_n$ واگرا است.

۳) اگر $a_n=\frac{1}{n^2}$ برای nهای زوج و $a_n=\frac{-1}{2^n}$ برای nهای فرد، آنگاه سری $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

۴) سری $\sum_{2|n}\frac{1}{n}$ همگرا است.

پاسخ: گزینه «۴» گفتیم که اگر سری $\sum a_n$ همگرای مشروط باشد، آنگاه سری‌های $\sum p_n$ و $\sum q_n$ هر دو واگرااند و اگر سری $\sum a_n$ همگرای مطلق باشد، آنگاه سری‌های $\sum p_n$ و $\sum q_n$ همگرااند. در گزینه (۱) سری به طور مطلق همگرا است، لذا سری $\sum q_n=-\sum_{2|n}a_n$ همگرا است و چون جملات این سری همه هم علامت‌اند، پس سری $\sum_{2|n}a_n$ همگرای مطلق است. به طور مشابه در گزینه «۲» چون سری $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ همگرای مشروط است، لذا سری $\sum q_n=-\sum_{2|n}a_n$ واگرا است.

در مورد گزینه (۳) توجه شود که سری $\sum a_n$ به صورت مقابل است: $\sum a_n=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{36}-\cdots$

اگر این سری همگرای مشروط باشد، باید هر دو سری $\sum p_n=\sum\frac{1}{n^2}$ و $\sum q_n=\sum\frac{1}{2^n}$ واگرا باشند که اینگونه نیست. بنابراین این سری همگرای مطلق است.

اما در مورد گزینه «۴» داریم: $\sum_{2|n}\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}=$ واگرا

بنابراین سری $\sum_{2|n}\frac{1}{n}$ همگرا نمی‌باشد.

مثال ۵: کدام گزینه در مورد سری‌های $\sum\frac{(-1)^n}{n+1}$ و $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ درست است؟

۱) هر دو سری همگرای مطلق‌اند و حاصلضرب کوشی سری دوم در خودش همگرا است.

۲) هر دو سری همگرای مشروط‌اند و حاصلضرب کوشی سری دوم در خودش همگرا است.

۳) هر دو سری همگرای مشروط‌اند و حاصلضرب کوشی سری اول در خودش همگرا است.

۴) هر دو سری همگرای مطلق‌اند و حاصلضرب کوشی سری اول در خودش همگرا است.

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم که سری‌های $\sum\frac{1}{n}$ و $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ pـ سری بوده و چون مقدار p برای آن‌ها کوچک‌تر مساوی عدد یک است واگرااند. بنابراین همگرایی دو سری $\sum\frac{(-1)^n}{n+1}$ و $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ همگرایی مشروط است. در تمرین‌ها دیدیم که حاصلضرب کوشی سری $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ در خودش واگرا و حاصلضرب کوشی سری $\sum\frac{(-1)^n}{n+1}$ در خودش همگرا است (البته همگرای مشروط) لذا گزینه (۳) درست است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

آزمون فصل سوم

۱ـ کدام گزینه در مورد ارتباط یک دنباله با زیردنباله‌های آن درست نیست؟

۱) دنباله‌ای وجود دارد که هیچ زیردنباله‌ی همگرا نداشته باشد.

۲) هر دنباله بی‌کران دارای یک زیردنباله است که به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند. (دنباله حقیقی)

۳) اگر دنباله‌ای واگرا باشد، هر زیردنباله از آن واگرا است.

۴) دنباله کوشی که یک زیردنباله همگرا دارد، همگرا است.

۲ـ اگر برای دنباله‌ی حقیقی $\{a_n\}$، $\liminf a_n = -\infty$ گردد در این صورت:

۱) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

۲) زیردنباله‌ی $\{a_{n_k}\}$ از این دنباله چنان موجود است که $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = -\infty$

۳) دنباله هیچ زیردنباله همگرایی ندارد.

۴) $\limsup a_n = -\infty$

۳ـ در مورد تجدید آرایش یک دنباله چه می‌توان گفت؟

۱) می‌توان با تجدید آرایش، دنباله‌ی همگرایی را به دنباله‌ای واگرا تبدیل کرد.

۲) می‌توان با تجدید آرایش، دنباله‌ی واگرایی را به دنباله همگرا تبدیل کرد.

۳) تجدید آرایش هم بودن یک رابطه هم‌ارزی بر روی مجموعه همه دنباله‌ها است.

۴) می‌توان با تجدید آرایش، دنباله‌ی کرانداری را به دنباله بی‌کران تبدیل کرد.

۴ـ حد دنباله‌ی $\left\{\dfrac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\right\}$ کدام است؟

۱) e^{-1} ۲) $+\infty$ ۳) e ۴) 0

۵ـ فرض کنید که $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله در فضای متری (X,d) باشند. $\{z_n\}$ را به این صورت از دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ می‌سازیم که $z_{2n} = x_n$ و $z_{2n-1} = y_n$ در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $\{z_n\}$ همگرا است اگر و تنها اگر $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ همگرا باشند.

۲) اگر $\{z_n\}$ همگرا باشد $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ همگرااند، ولی ممکن است حدهای متفاوتی داشته باشند.

۳) $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ همگرا باشند، آنگاه $\{z_n\}$ همگرا است.

۴) اگر $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ هر دو به نقطه x همگرا باشند، آنگاه دنباله $\{z_n\}$ نیز به نقطه x همگرا است.

۶ـ اگر سری‌های $\sum a_n$ و $\sum b_n$ هر دو همگرا باشند، آنگاه کدام سری الزاماً همگرا نمی‌باشد؟ $(a_n \geq 0)$

۱) $\sum\sqrt{a_n a_{n+1}}$ ۲) $\sum\sqrt{a_n b_n}$ (به شرط $b_n \geq 0$)

۳) $\sum a_n^2$ ۴) $\sum b_n^2$

۷ـ کدام گزینه یک سری همگرا است؟

۱) $\sum\dfrac{n!}{n^n}$ ۲) $\sum\dfrac{n}{(n+1)^n}$ ۳) $\sum\dfrac{n!}{2^n}$ ۴) $\sum\dfrac{n^n}{n!}$

۸ـ به ازای چه مقادیری از x سری مقابل همگرا است؟ $\sum\dfrac{2^n x^n}{(1+x)^n}$

۱) $(-\frac{1}{3},1]$ ۲) $[-\frac{1}{3},1]$ ۳) $[-\frac{1}{3},1)$ ۴) $(-\frac{1}{3},1)$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۹ـ در مورد سری $\sum \frac{1}{n^2+1}$ کدام آزمون نمی‌تواند اظهار نظر کند؟

۱) آزمون انتگرال   ۲) آزمون نسبت (دالامبر)   ۳) آزمون مقایسه   ۴) آزمون مقایسه حدی

۱۰ـ در مورد آزمون‌های همگرایی کدام گزینه درست است؟

۱) اگر آزمون ریشه همگرایی سری را نتیجه دهد، آزمون نسبت نیز همگرایی را نتیجه می‌دهد.

۲) اگر آزمون نسبت همگرایی سری را نتیجه دهد، آزمون ریشه نیز همگرایی را نتیجه می‌دهد.

۳) در آزمون تراکم کوشی، همگرایی $\sum 2^n a_{2n}$ همگرایی $\sum a_n$ را نتیجه می‌دهد ولی عکس آن الزاماً برقرار نمی‌باشد.

۴) در آزمون تراکم کوشی، همگرایی $\sum a_n$ همگرایی $\sum 2^n a_{2n}$ را نتیجه می‌دهد ولی عکس آن الزاماً برقرار نمی‌باشد.

۱۱ـ کدام گزینه در مورد فضاهای تام درست نمی‌باشد؟

۱) هر زیرمجموعه بسته از یک فضای تام، تام است.

۲) هر فضایی قابل نشاندن در یک فضای تام است.

۳) هر دنباله کوشی دارای زیردنباله‌ای همگرا در فضای تام است.

۴) هر فضای تامی کراندار است.

۱۲ـ اگر $p < q$ باشد آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) همگرایی سری $\sum \frac{a_n}{n^q}$ همگرایی سری $\sum \frac{a_n}{n^p}$ را نتیجه می‌دهد.

۲) همگرایی سری $\sum \frac{a_n}{n^p}$ همگرایی سری $\sum \frac{a_n}{n^q}$ را نتیجه می‌دهد.

۳) همگرای هیچ کدام از سری‌ها همگرایی دیگری را نتیجه نمی‌دهد.

۴) اگر $a_n > 0$ باشد آنگاه گزینه ۱ درست است.

۱۳ـ فرض کنید که $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای متری (X,d) باشد که دارای هیچ زیردنباله‌ی همگرایی نیست. در این صورت اگر $A = X - \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ آنگاه:

۱) A باز است.   ۲) A کراندار است.   ۳) A بسته است.   ۴) A هم بند است.

۱۴ـ در مورد آزمون مقایسه کدام گزینه درست است؟

۱) اگر به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $|a_n| \le |c_n|$ آنگاه همگرایی $\sum c_n$ همگرایی سری $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند.

۲) اگر به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n \le c_n$ آنگاه همگرایی $\sum c_n$ همگرایی سری $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند.

۳) اگر به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n \le |c_n|$، و $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ آنگاه همگرایی $\sum c_n$ همگرایی $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند.

۴) اگر به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $|a_n| \le c_n$ آنگاه همگرایی $\sum c_n$ همگرایی سری $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند.

۱۵ـ کدام گزینه درست است؟($\{x_n\}$ دنباله‌ای حقیقی)

۱) اگر $\alpha = \limsup x_n$ آنگاه $\sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ نیز برابر α است.

۲) اگر $\alpha = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ آنگاه $\limsup x_n$ نیز برابر α است.

۳) اگر $\{x_n\}$ صعودی باشد، آنگاه $\limsup x_n \le \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

۴) اگر $\{x_n\}$ نزولی باشد، آنگاه $\limsup x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

۱۶ـ اگر $a_n = [(\frac{3}{2})^{(-1)^n}] + [(\frac{3}{5})^{(-1)^{n+1}}]$ در این صورت:

۱) $\limsup a_n = 0 , \liminf a_n = -2$ ۲) $\limsup a_n = 2 , \liminf a_n = 0$

۳) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$ ۴) $\limsup a_n = 2 , \liminf a_n = 0$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۷ـ فرض کنید که $\{a_n\}$ دنباله‌ای حقیقی و مثبت و $\{s_n\}$ دنباله مجموع‌های جزئی سری $\sum a_n$ باشد. اگر سری $\sum a_n$ واگرا باشد در این صورت:

۱) سری $\sum \frac{a_n}{s_n^2}$ واگرا است.

۲) سری $\sum a_n s_n$ همگرا است.

۳) سری $\sum \frac{a_n}{s_n^2}$ همگرا است.

۴) بسته به شرایط هر کدام ممکن است رخ دهد.

۱۸ـ کدام گزینه نادرست است؟

۱) تجدید آرایش از سری $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ موجود است که دنباله مجموع‌های جزئی آن به π همگراست.

۲) هر تجدید آرایشی از سری $\sum \frac{1}{n^{2/1}}$ همگراست.

۳) تجدید آرایشی از سری $\sum \frac{1}{n^2}$ موجود است که به π همگراست.

۴) هر تجدید آرایشی از سری $\sum \frac{n^2}{2^n}$ همگراست.

۱۹ـ در مورد ضرب کوشی دو سری کدام گزینه درست است؟

۱) اگر سری $\sum a_n$ و سری $\sum b_n$ همگرا باشند، ضرب کوشی آن‌ها نیز همگرا است.

۲) اگر یکی از دو سری همگرای مطلق و دیگری همگرا باشد ضرب کوشی دو سری همگراست.

۳) شرط لازم برای همگرایی حاصل‌ضرب کوشی دو سری کرانداری مجموع‌های جزئی آن‌هاست.

۴) ضرب کوشی سری $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ در خودش همگراست.

۲۰ـ کدام گزینه در مورد مجموعه‌های فشرده درست است؟

۱) هر مجموعه فشرده دنباله‌ای، فشرده پوششی است.

۲) هر مجموعه‌ی فشرده‌ای همبند است.

۳) مجموعه‌های تام، فشرده‌اند.

۴) در فضاهای متریک مجموعه‌های فشرده دنباله‌ای و فشرده پوششی یکسان‌اند.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

فصل چهارم

« حد و پیوستگی »

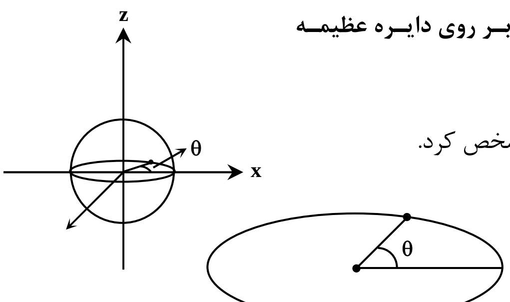
تست‌های تألیفی فصل چهارم

مثال۱: قضیه بولتزانو را به طور مستقیم اثبات کنید.

☑ **پاسخ:** فرض کنیم که $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته و $f(a)f(b)<0$. می‌خواهیم نشان دهیم که تابع f حداقل یکبار در این بازه صفر می‌شود. بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد که $f(a)>0$. مجموعه‌ی A را به صورت $A=\{x\in[a,b]\,|\,f(x)>0\}$ تعریف می‌کنیم. چون $a\in A$، لذا $A\neq\varnothing$ و چون $\forall x\in A\ ;\ x\leq b$. لذا مجموعه‌ی A کراندار است. بنابراین بنا به اصل کمال در مجموعه‌ی $\mathbb{R}$، $\sup A$ موجود است. فرض کنیم که $c=\sup A$ اگر $f(c)>0$، طبق تمرین‌های این فصل $\exists\delta>0 \quad \ni \quad \forall x\in(c-\delta,c+\delta)\ ;\ f(x)>0$
اگر $c<y<c+\delta$، آنگاه $f(y)>0$ و این تناقض با فرض sup بودن c دارد لذا $f(c)\leq 0$ است.
اگر $f(c)<0$ باشد، در این صورت با استدلالی مشابه: $\exists\eta>0 \quad \ni \quad \forall x\in(c-\eta,c+\eta)\to f(x)<0$. بنابراین اگر $c-\eta<z<c$ باشد آنگاه $f(z)<0$ و این یعنی $\forall x\in A: x<z$. پس z یک کران بالا برای مجموعه A است که $z<c$ که تناقض است. از دو استدلال بالا نتیجه می‌شود که $f(c)=0$. بنابراین به ازای حداقل یک $c\in[a,b]$ داریم: $f(c)=0$.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲: فرض کنید که درجه حرارت در سطح زمین تابعی پیوسته باشد، نشان دهید که بر روی دایره عظیمه کره‌ی زمین دو نقطه متقاطر وجود دارند که دماهای آن‌ها یکسان است.



دایره عظیمه زمین

☑ **پاسخ:** هر نقطه بر روی دایره عظیمه زمین را می‌توان به صورت یکتا به کمک یک زاویه مشخص کرد.
بنابراین اگر T تابعی باشد که به هر سه‌تایی (x,y,z) بر روی سطح زمین دمای آن را نسبت دهد، می‌توان بر روی دایره عظیمه آن را تابعی فقط از متغیر θ دانست (زیرا بر روی دایره عظیمه $z=0$ و $x=\cos\theta$ و $y=\sin\theta$ است) یعنی:

$$T(x,y,0)=T(\cos\theta,\sin\theta,0)=T(\theta)$$

اکنون T تابعی است از مجموعه $[0,2\pi]$ به فضای $\mathbb{R}$ (زیرا به هر θ یی یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد.) با این خاصیت که $T(2\pi)=T(0)$. صورت سوال یعنی نشان دهیم که: $\exists\theta\in[0,2\pi]\ni T(\theta)=T(\theta-\pi)$ ($\theta-\pi,\theta$ متقاطراند)

به کمک تابع T می‌توان تابع f را به صورت مقابل نوشت:

$$\begin{cases} f:[\pi,2\pi]\to\mathbb{R} \\ f(x)=T(x)-T(x-\pi) \end{cases}$$

به وضوح تابع f تابعی پیوسته بر بازه $[\pi,2\pi]$ است، اگر $T(\pi)=T(0)$ باشد که مساله حل است، در غیر این صورت:

$$f(\pi)f(2\pi)=(T(\pi)-T(0))(T(2\pi)-T(\pi))=(T(\pi)-T(0))(T(0)-T(\pi))<0$$

اکنون طبق قضیه بولتزانو:

$$\exists\theta\in[\pi,2\pi] \quad \ni \quad f(\theta)=0$$

و این یعنی:

$$f(\theta)=0\to T(\theta)-T(\theta-\pi)=0\to T(\theta)=T(\theta-\pi)$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.in

مثال۳: تابع $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ دارای این ویژگی است که $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ نشان دهید که $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{f(x)}{x})=0$.

پاسخ: فرض کنیم که $\varepsilon>0$ داده شده باشد. در این صورت $\delta>0$ چنان موجود است که:

$$\forall x \quad 0<x<\delta \to \left|\frac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{x}\right|<\varepsilon$$

بنابراین:

$$\forall 0<x<\delta \to |f(x)-f(\frac{x}{2})|<\varepsilon x$$

اگر $0<x<\delta$ و $n\in\mathbb{N}$ آنگاه $0<\frac{x}{2^n}<\delta$ پس داریم:

$$|f(x)-f(\frac{x}{4})|=|f(x)-f(\frac{x}{2^2})|\le|f(x)-f(\frac{x}{2})|+|f(\frac{x}{2})-f(\frac{x}{2^2})|<\varepsilon x+\varepsilon\frac{x}{2}$$

$$|f(x)-f(\frac{x}{2^3})|\le|f(x)-f(\frac{x}{2^2})|+|f(\frac{x}{2^2})-f(\frac{x}{2^3})|<\varepsilon x+\frac{\varepsilon x}{2}+\frac{\varepsilon x}{2^2}$$

بنابراین با استقرایی ساده می‌توان نتیجه گرفت که:

$$|f(x)-f(\frac{x}{2^{n+1}})|\le\varepsilon(x+\frac{x}{2}+\dots+\frac{x}{2^n})=\varepsilon x(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n})$$

اکنون طبق دستور $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1$ و صعودی بودن جملات سری داریم:

$$|f(x)-f(\frac{x}{2^{n+1}})|\le\varepsilon(x+\frac{x}{2}+\dots+\frac{x}{2^n})<\varepsilon\times x=\varepsilon x$$

با میل دادن n به سمت بی‌نهایت داریم $f(\frac{x}{2^{n+1}})\to f(0)$، لذا $|f(x)|<\varepsilon x$ و این یعنی $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

آزمون فصل چهارم

۱ـ فرض کنید $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی نزولی باشد. اگر $f(a)$ موجود باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $f((a,b])=[f(a),f(b)]$ ۲) $f((a,b])=[f(b),f(a)]$ ۳) $f((a,b])=[f(a),f(b))$ ۴) $f((a,b])=[f(a),f(b))$

۲ـ کدام گزینه درست است؟

۱) هر تابع پیوسته و صعودی پیوسته‌ی یکنواخت است. ۲) هر تابع صعودی یک به یک است.

۳) هر تابع صعودی اکید یک به یک است. ۴) هر تابع پیوسته و صعودی یک به یک است.

۳ـ کدام گزینه مجموعه‌ای بسته نیست: ($f,\alpha\in\mathbb{R}$ و g توابعی پیوسته بر مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ و حقیقی‌مقداراند.)

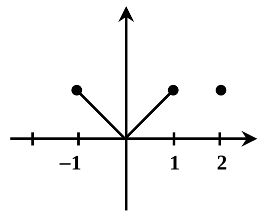
۱) $\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)<\alpha\}$ ۲) $\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\le\alpha\}$ ۳) $\{n\in\mathbb{R}\mid f(x)=x\}$ ۴) $\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=g(x)\}$

۴ـ کدام گزینه نادرست است؟ تابع f را لیپ شیتز می‌نامیم هر گاه $M>0$ چنان موجود باشد که به ازای هر $x,y\in D_f$ داشته باشیم:

$$|f(x)-f(y)|<M|x-y|$$

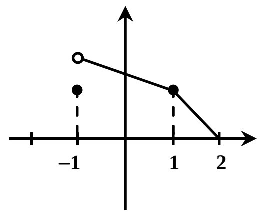
۱) هر تابع محدب پیوسته است. ۲) هر تابع لیپ‌شیتز، پیوسته است. ۳) هر تابع لیپ‌شیتز، محدب است. ۴) هر تابع محدب، لیپ‌شیتز است.

۵ـ کدام تابع ناپیوسته است؟



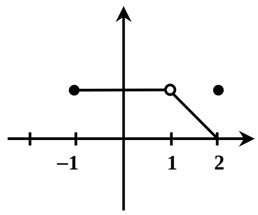
$f:[-1,1]\cup\{2\}\to\mathbb{R}$

(۱)



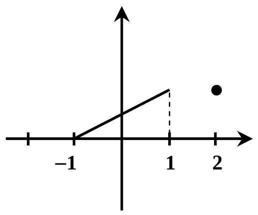
$f:[-1,2]\to\mathbb{R}$

(۲)



$f:[-1,2]-\{1\}\to\mathbb{R}$

(۳)



$f:[-1,1]\cup\{2\}\to\mathbb{R}$

(۴)

۶ـ در مورد ناپیوستگی کدام گزینه نادرست است؟

۱) هر تابع حداکثر در شمارا نقطه، ناپیوستگی نوع اول دارد. ۲) مجموعه‌ی نقاط ناپیوستگی نوع دوم می‌تواند ناشمارا باشد.

۳) ناپیوستگی توابع یکنوا، از نوع اول است. ۴) ناپیوستگی توابع یکنوا، از نوع دوم است.

۷ـ فرض کنید که $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ و $x_1,\dots,x_n\in(a,b)$. در چه صورت رابطه‌ی روبرو برقرار است؟ $\exists c\in(a,b)\ \ni\ f(c)=\frac{1}{n}(f(x_1)+\dots+f(x_n))$

۱) هیچ شرطی وجود ندارد که برای هر تابعی برقرار باشد. ۲) تابع f پیوسته باشد.

۳) تابع f پیوسته و یکنوا باشد. ۴) تابع f یکنوا و بازه بسته باشد.

۸ـ فرض کنید که $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $c\in(a,b)$ و $\begin{cases} I-\lim\limits_{h\to 0}|f(c+h)-f(c)|=0 \\ II-\lim\limits_{h\to 0}|f(c+h)-f(c-h)|=0\end{cases}$. در این صورت:

۱) $\mathrm{II}\leftarrow\mathrm{I}$ ۲) $\mathrm{I}\leftarrow\mathrm{II}$ ۳) $\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}$ ۴) برای هر طرف مثال نقض وجود دارد.

۹ـ کدام تابع بر $[a,+\infty)$ پوشا است:

۱) f صعودی اکید و $\operatorname{Im} f\supseteq\mathbb{N}$ ۲) f پیوسته و $\operatorname{Im} f\supseteq\mathbb{N}\cup\{0\}$

۳) f صعودی اکید $\operatorname{Im} f\supseteq\mathbb{N}\cup\{0\}$ ۴) f پیوسته و $\operatorname{Im} f\supseteq\mathbb{N}$

۱۰ـ کدام گزینه درست است؟

۱) هر تابع پیوسته و کراندار، پیوسته‌ی یکنواخت است. ۲) هر تابع پیوسته‌ی یکنواخت، حافظ کرانداری است.

۳) هر تابع پیوسته، یکنواخت و کراندار است. ۴) هر تابع پیوسته و حافظ کرانداری، پیوسته‌ی یکنواخت است.

۱۱ـ اگر $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد، آنگاه کدام گزینه شرط کافی برای پیوسته یکنواخت بودن تابع f است:

۱) تابع f بر بازه (a,b) کراندار باشد. ۲) حدهای یک طرفه در نقاط انتهایی موجود باشند.

۳) حدهای یک طرفه برابر $+\infty$ یا $-\infty$ نگردد. ۴) تابع f بر هر زیر مجموعه فشرده از مجموعه $f(a,b)$ کراندار باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۲ـ اگر $f:(X,d)\to(Y,d')$ پیوسته باشد آنگاه:

۱) اگر مجموعه X فشرده، آنگاه مجموعه Y فشرده است.

۲) اگر $A\subseteq X$ بسته، مجموعه $f(A)$ بسته است.

۳) اگر مجموعه X فشرده و $A\subset Y$ فشرده $f^{-1}(A)$ در مجموعه X فشرده است.

۴) اگر $A\subseteq Y$ باز و مجموعه X فشرده آنگاه $f^{-1}(A)$ در مجموعه X بسته است.

۱۳ـ تابع $f:(X,d)\to(Y,d')$ دارای این خاصیت است: $\forall x\in X\ \forall r>0\ \ \exists y\in B_X(x;r)\ \ni\ f(y)=0$ در این صورت:

۱) تابع f متحد با صفر است.

۲) f نگاشتی باز است.

۳) اگر تابع f پیوسته باشد، متحد با صفر است.

۴) اگر مجموعه X همبند باشد، تابع f متحد با صفر است.

۱۴ـ کدام گزینه غلط است؟

۱) تابعی وجود دارد که فقط در یک نقطه پیوسته است.

۲) تابعی وجود دارد که بر مجموعه اعداد گویا پیوسته است.

۳) تابعی وجود دارد که بر مجموعه اعداد گنگ پیوسته است.

۴) تابع وجود دارد که در ۲ نقطه پیوسته است.

۱۵ـ کدام تابع بر مجموعه $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت نمی‌باشد:

۱) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

۲) $h(x)=x^2$ اگر $x\in[0,1)$ و $h(x+1)=h(x)$

۳) $g(x)=x$

۴) $s(x)=\sin x^2$

۱۶ـ فرض کنید $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعی با ضابطه مقابل باشد، در این صورت کدام گزینه غلط است؟ $f(x)\begin{cases}1-x & x\in\mathbb{Q}\\ x & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$

۱) $f(x+y)-f(x)-f(y)$ همواره گنگ است.

۲) $f(f(x))=x$

۳) $f(x)+f(1-x)=1$

۴) f فقط در $x=\dfrac{1}{2}$ پیوسته است.

۱۷ـ فرض کنید $f:(X,d)\to(Y,d')$ تابعی پیوسته باشد، در این صورت کدام گزینه غلط است؟

۱) اگر X مجموعه‌ای فشرده و $A\subseteq Y$ فشرده باشد، آنگاه مجموعه $f^{-1}(A)$ در X فشرده است.

۲) اگر Y مجموعه‌ای فشرده و $A\subseteq X$ بسته باشد، آنگاه مجموعه $f(A)$ فشرده است.

۳) اگر فضای X گسسته و $A\subseteq X$ همبند باشد، آنگاه مجموعه $f(A)$ مجموعه‌ای تک عضوی است.

۴) اگر فضای Y گسسته و $A\subseteq X$ فشرده باشد، آنگاه مجموعه $f(A)$ مجموعه‌ای متناهی است.

۱۸ـ تابع $a\in\mathbb{R},f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و دنباله‌های $\{b_n\},\{a_n\}$ چنان موجود است که:

الف: $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ a_n,b_n>a$، ب: $b_n,a_n\to a$ وقتی $n\to+\infty$، ج: $f(a_n)>0\wedge f(b_n)<0$; $\forall n\in\mathbb{N}$. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر f تابعی پیوسته باشد آنگاه $f(a)=0$ است.

۲) $f(a)$ صفر است.

۳) تابعی با این ویژگی وجود ندارد.

۴) تابع پیوسته‌ای با این ویژگی وجود ندارد ولی می‌توان تابع ناپیوسته‌ای را با این خاصیت یافت.

۱۹ـ اگر $(\mathbb{R},d)$ مجموعه $\mathbb{R}$ با متر $d(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+n|x-y|}$, $(\mathbb{R},|\cdot|)$ مجموعه $\mathbb{R}$ با متر معمولی باشد. در این صورت به ازای $\varepsilon>0$ میزان $\delta>0$ باید چگونه باشد تا تابع همانی $I:(\mathbb{R},d)\to(\mathbb{R},|\cdot|)$ پیوسته گردد؟

۱) $\delta<\dfrac{1}{n}$

۲) $\delta<\dfrac{\varepsilon}{1+n\varepsilon}$

۳) $\delta<\varepsilon$

۴) $\delta<\dfrac{\varepsilon}{1-n\varepsilon}$

۲۰ـ تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در شرط $|f(x)-f(y)|\geq M|x-y|$ صدق می‌کند (M یک عدد مثبت ثابت است.). در این صورت:

۱) تابع f یک همسانریختی است

۲) تابع f پیوسته است

۳) اگر تابع f پیوسته باشد، یک همسانریختی است

۴) تابع f دو سویی است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

فصل پنجم

« مشتق‌گیری »

تست‌های تألیفی فصل پنجم

مثال ۱: فرض کنیم $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و $z_f=\{x\in[0,1]\,|\,f(x)=0\}$ نامتناهی باشد در این صورت:

۱) f و f' صفر مشترک ندارند.

۲) $x_0\in[0,1]$ چنان وجود دارد که $f'(x_0)=f(x_0)=0$

۳) $card(z_f)>card(z_{f'})$

۴) $card(z_f)<card(z_{f'})$

پاسخ: گزینه «۲» روش حل کاملاً مشابه حل تست قبل است.

مثال ۲: فرض کنید f و g روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشند و همچنین $f(a)=f(b)=0$ آنگاه:

۱) $x\in(a,b)$ هست که $g(x)f'(x)+f(x)=0$

۲) $x\in(a,b)$ هست که $g'(x)f(x)+f'(x)=0$

۳) $x\in(a,b)$ هست که $g'(x)f'(x)+f(x)=0$

۴) $x\in(a,b)$ هست که $g(x)f(x)+f'(x)=0$

پاسخ: گزینه «۲» قرار دهید $h(x)=e^{g(x)}f(x)$ اکنون تابع h در شرایط قضیه‌ی رُل صدق می‌کند بنابراین $c\in(a,b)$ هست که:

$$0=h'(c)=(g'(c)f(c)+f'(c))e^{g(c)}\Rightarrow g'(c)f(c)+f'(c)=0$$

توجه شود حالتی که در آن $g(x)$ چندجمله‌ای درجه ۱ با ضریب پیشرو $\alpha\in\mathbb{R}$ است چنین است $\alpha f(c)+f'(c)=0$.

مثال ۳: اگر $\frac{a_0}{1}+\frac{2a_1}{2}+\frac{2^2a_2}{3}+\cdots+\frac{2^{n-1}a_{n-1}}{n}+\frac{2^na_n}{n+1}=0$ که در آن $a_0,a_1,\ldots,a_n$ ثوابتی حقیقی هستند آنگاه:

۱) معادله‌ی $a_0+a_1x^{-1}+\cdots+a_{n-1}x^{1-n}+a_nx^{-n}=0$ دست کم یک ریشه‌ی حقیقی بین $(0,1)$ دارد.

۲) معادله‌ی $a_0+a_1x2^x+\cdots+a_{n-1}x^n2^x+a_nx^n2^x=0$ دست کم یک ریشه‌ی حقیقی بین $(0,1)$ دارد.

۳) معادله‌ی $a_0+a_1(2x)+\cdots+a_{n-1}(2x)^{n-1}+a_n(2x)^n=0$ دست کم یک ریشه‌ی حقیقی بین $(0,1)$ دارد.

۴) معادله‌ی $a_0+a_1Lnx+\cdots+a_{n-1}Ln^{n-1}x+a_nLn^nx=0$ دست کم یک ریشه‌ی حقیقی بین $(1,e^2)$ دارد.

پاسخ: گزینه «۴» قرار دهید $f(x)=\frac{a_n}{n+1}Ln^{n+1}x+\cdots+\frac{a_2}{3}Ln^3x+\frac{a_1}{2}Ln^2x+\frac{a_0}{1}Lnx=\sum_{j=0}^{n}\frac{a_j}{j+1}Ln^{j+1}x$. اکنون قضیه‌ی مقدار میانگین یا رُل را برای f روی $[1,e^2]$ به کار می‌بریم.

$$f(1)=0\,,\,f(e^2)=\sum_{j=0}^{n}\frac{a_j}{j+1}(Lne^2)^{j+1}=\sum_{j=0}^{n}\frac{a_j}{j+1}(2Lne)^{j+1}=\sum_{j=0}^{n}\frac{2^{j+1}a_j}{j+1}=2\sum_{j=0}^{n}\frac{2^ja_j}{j+1}\overset{\text{فرض}}{=\!=}2\times 0=0$$

حالا از قضیه‌ی مقدار میانگین نتیجه می‌شود که عدد $c\in(1,e^2)$ چنان وجود دارد که $f(e^2)-f(1)=(e^2-1)f'(c)=0-0=0$ لذا $f'(c)=0$

اما $f'(c)=(\sum_{j=0}^{n}a_jLn^jc)\times\frac{1}{c}$ و چون $c\neq 0$ پس باید $\sum_{j=0}^{n}a_jLn^jc=0$ که همان گزینه ۴ است.

مثال ۴: تابع $f(x)=\begin{cases}x & ,\ x\in\mathbb{Q}\\ \sin x & ,\ x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ مفروض است در این صورت:

۱) f در نقطه‌ی $x=0$ مشتق‌پذیر است و $|f|'(0)$ موجود است.

۲) f در $x=0$ مشتق‌پذیر است و $|f|'(0)$ موجود نیست.

۳) $|f|$ در نقطه‌ی $x=0$ مشتق‌پذیر است.

۴) هیچ‌کدام

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا نشان می‌دهیم که f در نقطه‌ی $x=0$ مشتق‌پذیر است:

$$f'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}\qquad(1)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

چون همواره $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{t}=1$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ صرف‌نظر از اینکه t گنگ باشد یا گویا، پس در هر حال حد موجود در طرف راست عبارت (۱) به سمت عدد ۱ میل می‌کند بنابراین $f'(0)=1$. اگر $x\neq 0$ نشان می‌دهیم که f در x پیوسته نیست با توجه به چگال بودن $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}^c$ در $\mathbb{R}$ می‌توان دنباله‌های (q_n) از اعداد گویا و (t_n) از اعداد گنگ را چنان یافت که $q_n\to x$, $t_n\to x$.

حالا $\lim\limits_{n\to\infty} f(q_n)=x$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n)=\sin x$ در این صورت:

الف) اگر $|x|>1$ ، چون همیشه $|\sin x|\leq 1$ پس $\lim\limits_{n\to\infty} f(q_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n)$ و در نتیجه $\lim\limits_{t\to x} f(t)$ موجود نیست بنابراین f در x پیوسته نیست.

ب) اگر $|x|\leq 1$ $\neq 0$ با توجه به معلومات ریاضی عمومی چون تنها جواب معادله‌ی $\sin x=x$ در بازه‌ی $[-1,1]$ ، در نقطه‌ی صفر اتفاق می‌افتد و چون در اینجا $x\neq 0$ پس دوباره $\lim\limits_{n\to\infty} f(q_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n)$ و در نتیجه f در x پیوسته نیست [توجه اگر معادله‌ی $\sin x=x$ در $[-1,1]$ دارای جواب $c\neq 0$ باشد و آنگاه $-c$ نیز یک جواب دیگر خواهد بود بدون کاستن از کلیت فرض کنید $c>0$ بنابراین تابع $g(x)=x-\sin x$ روی $[-1,1]$ دارای سه ریشه‌ی $-c,0,c$ خواهد بود بنا به قضیه‌ی رُل، g' باید در دو نقطه c_1,c_2؛ $-c<c_1<0<c_2<c$؛ صفر شود، معادلاً این یعنی در دو نقطه‌ی c_1 و c_2 داریم $\cos c_1=\cos c_2=1$ که غیرممکن است].

از طرفی $|f|$ در صفر مشتق‌پذیر نیست چون اگر (q_n) یک دنباله از اعداد گویای مثبت باشد که $q_n\to 0$ و (p_n) دنباله‌ای از اعداد گویای منفی باشد که $p_n\to 0$ آنگاه:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f|(p_n)-|f|(0)}{p_n-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{-p_n}{p_n}=-1\quad,\quad\lim_{n\to\infty}\frac{|f|(q_n)-|f|(0)}{q_n-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{q_n}=1$$

بنابراین $\lim\limits_{t\to 0}\frac{|f|(t)-|f|(0)}{t-0}$ موجود نیست در نتیجه $|f|'(0)$ موجود نیست.

مثال۵: فرض کنید f مشتق‌پذیر باشد در این صورت حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$ کدام است؟

۱) $f'(a)-af(a)$　۲) $f(a)-af'(a)$　۳) $af'(a)-f(a)$　۴) $af(a)-f'(a)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f(a)-a(f(x)-f(a))}{x-a}=f(a)-a\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f(a)-af'(a)$$

مثال۶: فرض کنید تابع حقیقی مقدار f در یک بازه‌ی باز حول نقطه‌ی a تعریف شده و در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشد. (x_n) و (y_n) را دو دنباله در دامنه‌ی f گرفته که هر دو همگرا به a بوده و همواره $x_n\neq a$ ، $y_n\neq a$ در این صورت:

۱) اگر همواره $x_n\neq y_n$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=f'(a)$

۲) اگر همواره $x_n\neq y_n$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=2f'(a)$

۳) اگر همواره $x_n<a<y_n$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=f'(a)$

۴) اگر همواره $x_n<a<y_n$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=2f'(a)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به مفروضات قرار دهید:

$$\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}\cdot\frac{x_n-a}{x_n-y_n}+\frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-a}\cdot\frac{a-y_n}{x_n-y_n}$$

که در آن:

$$0<\frac{x_n-a}{x_n-y_n}<1\quad,\quad 0<\frac{a-y_n}{x_n-y_n}<1\quad,\quad\frac{x_n-a}{x_n-y_n}+\frac{a-y_n}{x_n-y_n}=1$$

بنابراین:

$$\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}<\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}<\frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-a}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

حال با استفاده از قضیه ساندویچ و وجود حدود در دو طرف نامساوی بالا داریم:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=f'(a)$$

توجه شود که مثال نقض برای گزینه ۱ توسط تابع $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} &, x\neq 0\\ 0 &, x=0\end{cases}$ و نقطه‌ی $a=0$ و دنباله‌های $y_n=\frac{1}{2n\pi}$ ، $x_n=\frac{2}{\pi(4n+1)}$ فراهم است چون $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=-\frac{2}{\pi}\neq 0=f'(0)$.

مثال۷: فرض کنید $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و f و f' هیچ صفر مشترکی ندارند در این صورت:

۱) مجموعه‌ی صفرهای f در $[0,1]$ متناهی است.

۲) مجموعه‌ی صفرهای f در $[0,1]$ شمارای نامتناهی است.

۳) مجموعه‌ی صفرهای f در $[0,1]$ ناشماراست.

۴) مجموعه‌ی صفرهای f' از لحاظ کاردینالیته بزرگ‌تر از مجموعه صفرهای f است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» فرض کنیم $Z_f=\{x\in[a,b]:f(x)=0\}$ مجموعه‌ی صفرهای f در $[0,1]$ باشد چون $Z_f=f^{-1}\{0\}$ و f پیوسته است پس Z_f در $[0,1]$ بسته و لذا فشرده هم می‌باشد. فرض خلف که Z_f نامتناهی باشد پس Z_f دارای یک نقطه‌ی حدی چون $x_0\in[0,1]$ هست و چون Z_f بسته است داریم $x_0\in Z_f$. لذا دنباله‌ی (x_n) در Z_f چنان موجود است که $x_n\to x_0$. حالا:
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ \overset{\text{با توجه به وجود مشتق}}{=\!=\!=}\ \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\lim_{n\to\infty}\frac{0-0}{x_n-x_0}$$
و این یعنی $f'(x_0)=0=f(x_0)$ که فرض مسئله را نقض می‌کند. بنابراین باید Z_f متناهی باشد.

مثال۸: فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته روی $[a,b]$ باشد در این صورت:

۱) اگر f در $[a,b]$ دارای حداقل دو صفر متمایز باشد آنگاه $f(x)+f''(x)=f'(x)$ حداقل یک ریشه در $[a,b]$دارد.

۲) اگر f در $[a,b]$ دارای حداقل سه صفر متمایز باشد آنگاه $f(x)+f''(x)=f'(x)$ حداقل یک ریشه در $[a,b]$ دارد.

۳) اگر f در $[a,b]$ دارای حداقل دو صفر متمایز باشد آنگاه $f(x)+f''(x)=2f'(x)$ حداقل یک ریشه در $[a,b]$ دارد.

۴) اگر f در $[a,b]$ دارای حداقل سه صفر متمایز باشد آنگاه $f(x)+f''(x)=2f'(x)$ حداقل یک ریشه در $[a,b]$ دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تابع $g(x)=e^{-x}f(x)$ را روی $[a,b]$ در نظر بگیرید، لذا g روی $[a,b]$ از کلاس C^2 است. در ضمن g روی $[a,b]$ دارای سه صفر متمایز است پس بنا به قضیه رُل $g'(x)=e^{-x}(f'(x)-f(x))$ دارای دو صفر متمایز در $[a,b]$ است. دوباره بنا به قضیه‌ی رُل در مورد g'، نتیجه می‌گیریم که $g''(x)=e^{-x}(f(x)+f''(x)-2f'(x))$ در $[a,b]$ یک ریشه دارد.

مثال۹: کدام گزینه درست است؟

۱) تابع پیوسته‌ای مانند $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ هست که مشتقش در یک زیرمجموعه‌ی ناشمارای سره‌ی $[a,b]$ مثل A موجود نیست و f'روی $[0,1]\setminus A$ صفر است و با این وجود f تابع ثابت هم نیست.

۲) اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه $f'([a,b])$ می‌تواند اجتماع دو بازه‌ی مجزا باشد.

۳) اگر تابع f، تابعی فرد باشد، f' در صورت وجود فرد است.

۴) فرض کنید f بر $[a,b]$ تابعی حقیقی و f'' روی (a,b) موجود و همواره ناصفر است اگر $f(a)=f(b)=0$ آنگاه f در (a,b)ریشه دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ۱) فرض کنید $A=C$ مجموعه‌ی کانتور باشد در این صورت تابع زیر که به تابع کانتور مشهور است دارای خاصیت مذکور است برای ساختن این تابع ابتدا مقدماتی نیاز است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

هر $x\in[0,1]$ دارای یک بسط به پایه‌ی ۳ می‌باشد یعنی $x=\sum_{j=1}^{\infty}a_j 3^{-j}$ که $a_j\in\{0,1,2\}$ این بسط یکتاست مگر اینکه برای اعداد صحیح k,p ، $x=p3^{-k}$. در حالت اخیر x دارای دو بسط است: برای یکی از این بسط‌ها اگر $j>k$ آنگاه $a_j=0$ و برای دیگری اگر $j>k$ آنگاه $a_j=2$.
اگر عدد صحیح p بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، یکی از این بسط‌ها در محل k اُم خود $a_k=1$ را دارد و دیگری در همین مکان «۲ یا $a_k=0$» را دارد. لذا قرارداد می‌کنیم که آن بسطی از x را انتخاب کنیم که در مکان k اُم ۲ یا $a_k=0$ را دارد. پس می‌بینیم که:

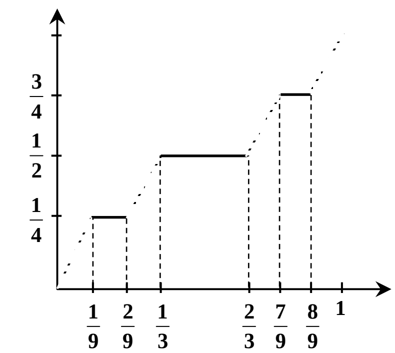
$$a_1=1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$$

$$a_1\neq 1,\ a_2=1 \Leftrightarrow \frac{1}{9}<x<\frac{2}{9} \quad \text{یا} \quad \frac{7}{9}<x<\frac{8}{9}$$

و همین‌طور. در ضمن برای $x=\sum a_j 3^{-j}$, $y=\sum b_j 3^{-j}$ داریم: $x<y \Leftrightarrow \exists n \text{ s.t } a_n<b_n\ ;\ a_j=b_j \text{ for } 1\le j<n$

در این صورت مجموعه‌ی کانتور C برابر است با تمام آن $x\in[0,1]$ که $x=\sum a_j 3^{-j}$ و $a_j\in\{0,2\}$. از طرفی اگر I_j یک زیربازه‌ی $[0,1]$ باشد که برای به دست آوردن C حذف شده است آنگاه نقاط انتهایی آن به فرم $p3^{-k}$ هستند و توجه داریم که این نقاط انتهایی را به فرمی بنویسیم که ۲ یا $a_k=0$. اکنون تابع کانتور $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{a_i}{2}\right)2^{-i} & ;\quad x=\sum_{i=1}^{\infty}a_i 3^{-i}\in C\\ \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{b_i}{2}\right)2^{-i} & ;\quad x=\sum_{i=1}^{\infty}b_i 3^{-i} \ \text{نقطه‌ی انتهایی سمت چپ هر بازه‌ی محذوف مثل } I_j \text{ در به‌دست آوردن مجموعه‌ی کانتور باشد}\end{cases}$$



دقت شود که f روی بازه‌های محذوف ثابت است (به شکل رجوع شود). نشان می‌دهیم f پیوسته است.
اگر حتی قرارداد بالا را متوجه شده‌اید می‌توان تعریف جدیدی از f ارائه داد به این صورت که فرض کنید $x\in[0,1]$ دارای بسط بر مبنای ۳ به صورت $x=(0/x_1x_2\ldots)_3$ باشد، آن‌وقت بسط دو ـ دویی $y=f(x)$ به صورت $(0/y_1y_2\ldots)_2$ است که در آن:

$$y_i=\begin{cases}0 & \exists k<i \quad \text{s.t} \quad x_k=1\\ 1 & x_i=1,\ \nexists k<i \ \text{ s.t } \ x_k=1\\ \frac{x_i}{2} & x_i=0 \ \text{ یا } \ x_i=2\ ,\ \nexists k<i \ \text{ s.t } \ x_k=1\end{cases}$$

به هرحال با توجه به قرارداد اولیه‌ی ما راجع به بسط سه ـ سه‌ای عناصر $[0,1]$؛ تعریف $y=f(x)$ در ضابطه‌ی قبلی خوش تعریف است اما خوش تعریفی تعریف جدید تابع کانتور نیاز به اثبات دارد. برای پیوستگی f فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده است. عدد طبیعی k را چنان اختیار کنید که $\frac{1}{2^k}\le\varepsilon$.

اگر $|x-x'|<\frac{1}{3^k}$ آنگاه در بسط سه‌ـ‌سه‌ای x و x'؛ k محل اول برابرند یعنی اگر $x=(0/x_1x_2\ldots)_3$ و $x'=(0/x'_1x'_2\ldots)_3$ آنگاه $x_1=x'_1,\ldots,x_k=x'_k$ در نتیجه بنا به تعریف $y=f(x)$ داریم که $|f(x)-f(x')|\le\frac{1}{2^{k+1}}<\varepsilon$ و لذا f پیوسته است.

۲) گزینه ۲ غلط است چون $f'([a,b])$ طبق خاصیت مقدار میانی مشتق باید همبند باشد.

۳) گزینه ۳ غلط است چون اگر f فرد باشد f' در صورت وجود زوج است. و اگر f زوج باشد f' در صورت وجود فرد است.

۴) اصلاً f در (a,b) نمی‌تواند ریشه داشته باشد چون اگر $c\in(a,b)$ چنان موجود باشد که $f(c)=0$ آنگاه قضیه‌ی رُل را بر $[a,c]$, $[c,b]$ به کار می‌بریم تا $d_1\in(a,c)$ و $d_2\in(c,b)$ یافت شوند که $f'(d_1)=f'(d_2)=0$ دوباره قضیه‌ی رُل را در مورد f' به کار می‌بریم لذا باید $d\in(d_1,d_2)$ موجود باشد که $f''(d)=0$ و این آشکارا با فرض در تناقض است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۰: در مورد تابع $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \ x\neq 0 \\ 0 & , \ x=0 \end{cases}$ **کدام گزینه درست است؟**

۱) C^∞ است اما C^ω نیست.

۲) برای هر عدد طبیعی $f^{(n)}(0)=0$

۳) برای هر n، $f^{(n)}$ در صفر پیوسته است.

۴) همه‌ی موارد

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر n ، $f^{(n)}(0)=0$. کافی است درستی گزینه‌ی ۲ را نشان دهیم. با استقرا می‌توان اثبات کرد که برای هر چندجمله‌ای حقیقی مانند $p(x)$ داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{e^x}=0 \qquad (*)$$

اکنون ادعا می‌کنیم که برای هر $n\in\mathbb{N}$ و هر $x\neq 0$؛ $f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}p_{3n}(\frac{1}{x})$ که در آن $P_{3n}(t)$ یک چندجمله‌ای حقیقی از درجه‌ی $3n$ است $(n\in\mathbb{N})$. از استقرا استفاده می‌کنیم.

برای $n=0$ داریم $f^{(0)}(x)=f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{x^2}}P_0(\frac{1}{x})$ که در آن $P_0(t)=1$.

برای $n=1$ نیز $f^{(1)}(x)=f'(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^3}=e^{-\frac{1}{x^2}}P_3(\frac{1}{x})$ که در آن $P_3(t)=2t^3$.

حالا فرض کنید ادعای مذکور برای $n=k$ برقرار باشد، نشان می‌دهیم برای $n=k+1$ نیز برقرار است:

$$f^{(k+1)}(x)=(f^{(k)}(x))'\xlongequal{\text{فرض استقرا}}(e^{-\frac{1}{x^2}}P_{3k}(\frac{1}{x}))'=e^{-\frac{1}{x^2}}\{[2(\frac{1}{x})^3P_{3k}(\frac{1}{x})]-[(\frac{1}{x})^2P'_{3k}(\frac{1}{x})]\}$$

اما $[2t^3P_{3k}(t)]-[t^2P'_{3k}(t)]$ یک چندجمله‌ای حقیقی از درجه‌ی $3k+3$ است که اگر آن را با $P_{3k+3}(t)$ نشان دهیم آنگاه خواهیم داشت $f^{(k+1)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_{3k+3}(\frac{1}{x})$. بنابراین ادعای مذکور طبق استقرای ریاضی اثبات شد. حالا از این ادعا بهره می‌بریم تا نشان دهیم که $\forall n\ f^{(n)}(0)=0$. برای $n=0$ که واضح است.

فرض کنید که برای $n=k$ برقرار باشد یعنی $f^{(k)}(0)=0$. نشان خواهیم داد که برای $n=k+1$ نیز داریم $f^{(k+1)}(0)=0$ و دوباره حکم بنا به استقرای ریاضی برقرار است. حال:

$$\frac{f^k(x)-f^k(0)}{x-0}\xlongequal{\text{فرض استقرا}}\frac{f^k(x)}{x}\xlongequal{\text{ادعای بالا}}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}P_{3k}(\frac{1}{x})}{x}=\frac{tP_{3k}(t)}{e^{t^2}}=(\frac{tP_{3k}(t)}{e^t})(\frac{e^t}{e^{t^2}})$$

توجه دارید که در قسمت آخر تساوی بالا از تغییر متغیر $t=\frac{1}{x}$ استفاده شده است لذا $t\to\pm\infty \Leftrightarrow x\to 0^{\pm}$ بنابراین:

$$f^{k+1}(0)=\lim_{x\to 0^\pm}\frac{f^k(x)-f^{(k)}(0)}{x-0}=\lim_{t\to\pm\infty}(\frac{tP_{3k}(t)}{e^t})(\frac{e^t}{e^{t^2}})\xlongequal{\text{از }(*)}0$$

برای گزینه‌ی (۳) شبیه همین رابطه‌ی خط بالا می‌توان دید که: $\lim_{x\to 0}f^{(n)}(x)=f^{(n)}(0)=0$. لذا $f^{(n)}$ در صفر پیوسته است.

برای گزینه ۱ اگر بسط تیلور را حول صفر بنویسیم چون ضرایب a_n سری $\sum_{n=0}^{\infty}a_nh^n$ از رابطه‌ی $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ به دست می‌آیند پس نتیجه می‌شود که سری صفر است در حالی که تابع f حول صفر، صفر نیست.

لذا تابع f بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است (هموار است) اما تحلیلی نیست.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۱: کدام گزینه درست است؟

۱) $3^{\pi} > \pi^{3}$　　　۲) $e^{\pi} < \pi^{e}$

۳) اگر $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ و $0 < p < 1$ آنگاه $(\cos\theta)^{p} \ge \cos(p\theta)$　　　۴) اگر $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ آنگاه $\sin\theta \le \frac{2}{\pi}\theta$

پاسخ: گزینه «۱» برای $x > 0$ قرار دهید $f(x) = 3^{x}x^{-3}$ لذا $f'(x) = \frac{3^{x}}{x^{4}}(x\mathrm{Ln}3 - 3)$ که برای $x > \frac{3}{\mathrm{Ln}3}$ داریم $f'(x) > 0$. لذا f روی $(\frac{3}{\mathrm{Ln}3}, \infty)$ صعودی است و چون $\frac{3}{\mathrm{Ln}3} < 3 < \pi$ پس $1 = f(3) < f(\pi) = \frac{3^{\pi}}{\pi^{3}}$ بنابراین $3^{\pi} > \pi^{3}$. دقت شود که در گزینه‌های دیگر، جهت نامساوی‌ها باید برعکس شود تا نامعادله‌ها برقرار شود. گزینه ۲ را از طریق تابع $g(x) = \mathrm{Ln}x - \frac{x}{e}$ و گزینه‌های دیگر را از طریق قضیه‌ی مقدار میانگین بررسی کنید (البته می‌توان برای گزینه‌های ۳ و ۴ مثال نقض آورد مثلاً در گزینه ۳ قرار دهید $\theta = \frac{\pi}{2}$, $p = \frac{1}{2}$ و در گزینه ۴ قرار دهید $\theta = \frac{\pi}{4}$).

مثال۱۲: فرض کنید $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ پیوسته و روی $(0,1)$ مشتق‌پذیر بوده و $f(0) = 0$ باشد. آنگاه تحت کدام شرط اضافی f روی $[0,1]$ متحداً صفر خواهد شد؟

۱) $M > 0$ موجود باشد که برای هر $x \in (0,1)$، $|f(x)| \le M|f'(x)|$.

۲) $M > 0$ موجود باشد که برای هر $x \in (0,1)$، $|f'(x)| \le M|f(x)|$.

۳) f دارای مشتق کراندار باشد.

۴) f در شرط $|f(x) - f(y)| \le |x - y|$ صدق کند.

پاسخ: گزینه «۲» قرار دهید $A = \{x \in [0,1] |$ روی فاصله‌ی $[0,x]$ صفر شود $f\}$. اولاً چون $0 \in A$ پس A به عنوان زیرمجموعه‌ی $[0,1]$ ناتهی است و با توجه به کراندار بودن A از خاصیت کمال نتیجه می‌شود که $\sup A$ موجود است. قرار دهید $s = \sup A$. چون f پیوسته است پس مجموعه‌ی A بسته می‌باشد و لذا $s \in A$. کافی است نشان دهیم $s = 1$.

فرض خلف که $s < 1$ بنابراین عدد حقیقی $r > 0$ هست که $r < \frac{1}{M}$ و $s + r < 1$. برای هر نقطه‌ی $x \in (s, s+r)$، قضیه‌ی مقدار میانگین وجود $c \in (s,x)$ را با شرط $f(x) - f(s) = f'(c)(x-s)$ تضمین می‌کند و چون $s \in A$ پس $f(s) = 0$ و لذا $f(x) = f'(c)(x-s)$. از طرفی برای هر $x \in [s, s+r]$ داریم:

$$|f(x)| = |f'(c)(x-s)| = |x-s||f'(c)| \le rM|f(c)| \le rM \max_{s \le t \le s+r} |f(t)|$$

همچنین با گرفتن max از سمت چپ خواهیم داشت:

$$\max_{s \le x \le s+r} |f(x)| \le rM \max_{s \le t \le s+r} |f(t)|$$

قرار دهید $B = \max_{s \le u \le s+r} |f(u)|$ لذا $B \le rMB$ اما چون $rM < 1$ پس باید $B \le rMB < 1 \times B = B$ که به وضوح تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و $s = 1$ خواهد شد و این یعنی f روی $[0,1]$ صفر است.

توجه: در برهان از نقاط انتهایی $[0,1]$ هیچ استفاده‌ای به جز $r < \frac{1}{M}$ نشده، لذا همین استدلال برای هر تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ که روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر و $f(a) = 0$ درست است، کافی است که $r < \frac{b}{M}$ اتخاذ شود.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

آزمون فصل پنجم

۱ــ فرض کنید c,a اعداد حقیقی بوده، $c>0$ و f بر $[-1,1]$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^a \sin x^{-c} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & \quad x=0 \end{cases}$ تعریف شده باشد. در این صورت:

۱) $f'(0)$ وجود دارد اگر و فقط اگر $c<1$ همچنین $f''(0)$ وجود دارد اگر و فقط اگر $c>2+a$.

۲) $f'(0)$ وجود دارد اگر و فقط اگر $a\geq 1$ همچنین $f''(0)$ وجود دارد اگر و فقط اگر $a\geq 2+c$.

۳) $f'(0)$وجود دارد اگر و فقط اگر $c\geq 1$ همچنین $f''(0)$ وجود دارد اگر و فقط اگر $c\geq 2+a$.

۴) $f'(0)$وجود دارد اگر و فقط اگر $a>1$ همچنین $f''(0)$ وجود دارد اگر و فقط اگر $a>2+c$.

۲ــ با مفروضات سوال ۱ ، کدام گزینه درست است؟

۱) f' کراندرا است اگر و فقط اگر $a>1+c$. همچنین f'' کراندار است اگر و فقط اگر $a>2+2c$.

۲) f' کراندرا است اگر و فقط اگر $a\geq 1+c$. همچنین f'' کراندار است اگر و فقط اگر $a\geq 2+2c$.

۳) f' کراندرا است اگر و فقط اگر $c\geq 1+a$. همچنین f'' کراندار است اگر و فقط اگر $c\geq 2+2a$.

۴) f' کراندرا است اگر و فقط اگر $c>1+a$. همچنین f'' کراندار است اگر و فقط اگر $c>2+2a$.

۳ــ فرض کنید $(y_n),(x_n)$ دو دنباله‌ی حقیقی باشند. گوییم دنباله‌ی (x_n) تحت تسلط دنباله‌ی (y_n) است و می‌نویسیم $x_n=O(y_n)$ هرگاه که $\frac{x_n}{y_n}$ کراندار باشد [البته توجه دارید که برای n های به اندازه‌ی کافی بزرگ باید $y_n\neq 0$] اکنون فرض کنید تابع f روی فاصله‌ی (a,b) بی‌نهایت بار مشتق پذیر باشد، فرض کنید $[c,d]$ یک زیر بازه‌ی بسته از بازه‌ی باز (a,b) باشد و f در بی‌نهایت نقطه‌ی $[c,d]$ صفر شود و $\sup\left\{|f^{(n)}(x)| : x\in(a,b)\right\}=O(n!)$ در این صورت :

۱) f روی $[c,d]$ برابر صفر است.

۲) f روی $[c,d]$ برابر یک مقدار ثابت ناصفر است.

۳) f روی یک زیر بازه‌ی باز (a,b) برابر یک مقدار ثابت ناصفر است.

۴) f روی یک زیر بازه‌ی باز (a,b) برابر صفر است.

۴ــ فرض کنید f دارای مشتق مرتبه‌ی دوم پیوسته روی $(0,\infty)$ باشد و $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)=\lim\limits_{x\to\infty} xf''(x)=L$ در این صورت $\lim\limits_{x\to\infty} xf'(x)$ کدام است؟

۱) L　　۲) $-\frac{L}{2}$　　۳) $\frac{L}{2}$　　۴) $-L$

۵ــ فرض کنید f روی $(0,\infty)$ مشتق پذیر باشد و $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$. قرار دهید $g(x)=f(x+1)-f(x)$ در این صورت:

۱) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=c\neq 0$　　۲) $\lim\limits_{x\to\infty} xg(x)=0$　　۳) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(g(x))=0$　　۴) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ موجود نیست.

۶ــ تابع حقیقی f را روی (a,b) محدب خوانند هرگاه برروی هر $x,y\in(a,b)$ هر $\lambda\in(0,1)$ داشته باشیم $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

[تعبیر هندسی این معادله چیست؟] فرض کنید g مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

۱) g محدب است اگر و فقط اگر $g'>0$

۲) g محدب است اگر و فقط اگر $g''>0$. (به شرط وجود g'')

۳) g محدب است اگر و فقط اگر g' صعودی باشد.

۴) g محدب است اگر و فقط اگر g صعودی باشد.

۷ــ فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته و دوبار روی (a,b) مشتق پذیر باشد اگر f' هرگز روی (a,b) صفر نشود و g تابع معکوس f باشد در این صورت:

۱) $g''(x)=\frac{-f''(x)}{[f'(x)]^2}$　　۲) $g''(x)=\frac{-f''(x)}{[f'(x)]^2}g'(x)$　　۳) $g''(x)=-\frac{f''(g(x))g'(x)}{[f'(g(x))]^2}$　　۴) $g''(x)=\frac{-g'(x)}{[f'(g(x))]^2}$

۸ــ کدام گزینه درست است؟

۱) یک تابع یکنوای f که بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است چنان وجود دارد که $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)\neq 0$

۲) تابعی مشتق پذیر هست که مشتقش در یک نقطه مثبت است اما در هیچ همسایگی آن نقطه یکنوا نیست.

۳) در دستگاه وسعت یافته‌ی اعداد حقیقی می‌توان تابعی ساخت که ناپیوسته باشد اما همه جا مشتق پذیر باشد.

۴) هر سه گزینه درست است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۹ـ کدام گزینه غلط است؟

۱) یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی $\mathbb{R}$ وجود دارد که مجموعه‌ی ریشه‌های هیچ تابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیری نیست.

۲) فرض کنید $g'(a), f'(a)$ موجود، $f(a)=g(a)=0, g'(a)\neq 0$ در این صورت $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

۳) اگر اعداد q و p مثبت بوده و $p+q=1$ و تابع f در معادله‌ی $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(px+qy)$ برای $x\neq y$ صدق کند آنگاه f یک چند جمله‌ای از حداکثر درجه‌ی ۲ است.

۴) اگر f روی $(0,\infty)$ مشتق‌پذیر بوده و $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ آنگاه $\lim\limits_{x\to\infty}|f'(x)|=0$.

۱۰ـ اگر f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق پذیر که $a>0$ باشد در این صورت:

۱) $x_1\in(a,b)$ هست که $\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=x_1f(x_1)-f'(x_1)$

۲) $x_1\in(a,b)$ هست که $\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=f(x_1)-x_1f'(x_1)$

۳) $x_1\in(a,b)$ هست که $\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=f'(x_1)-x_1f(x_1)$

۴) $x_1\in(a,b)$ هست که $\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=x_1f'(x_1)-f(x_1)$

۱۱ـ f روی $[0,\infty[$ پیوسته، روی $(0,\infty)$ مشتق‌پذیر و $f(0)=0$. در این صورت:

۱) اگر b و a اعدادی مثبت و $a\le f'(x)\le b$ آنگاه $f(x)=\frac{(a+b)}{2}x$.

۲) اگر b و a اعدادی مثبت و $a\le f'(x)\le b$ آنگاه $f(x)=x$.

۳) اگر f' صعودی باشد آنگاه تابع $\frac{f(x)}{x}$ برای $x>0$ صعودی است.

۴) اگر f' صعودی باشد آنگاه برای تابع $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ که $x>0$ ، g' نیز صعودی است.

۱۲ـ فرض کنید $f(0)=0$ و f در $x=0$ مشتق پذیر باشد. اگر k عددی طبیعی باشد آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(f(x)+f(\frac{x}{2})+\ldots+f(\frac{x}{k}))$ کدام است؟

۱) $(1+2+\cdots+k)f'(0)$

۲) $(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k})f'(0)$

۳) $kf'(0)$

۴) $\frac{1}{k}f'(0)$

۱۳ـ فرض کنید تابع f در نقطه‌ی $x=0$ مشتق پذیر است و $f'(0)\neq 0$ در این صورت حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)e^x-f(0)}{f(x)\cos x-f(0)}$ کدام است؟

۱) $\frac{2f(0)}{f'(0)}$

۲) $\frac{f'(0)-f(0)}{f'(0)}$

۳) $\frac{f(0)}{f'(0)}$

۴) $\frac{f'(0)+f(0)}{f'(0)}$

۱۴ـ اگر f روی (a,b) مشتق پذیر بوده و $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$ و اگر $\forall x\in(a,b)\ f'(x)+f^2(x)+1\ge 0$ آنگاه:

۱) $b-a>\pi$

۲) $b-a<\pi$

۳) $b-a\ge\pi$

۴) $b-a\le\pi$

۱۵ـ ضرایب چند جمله‌ای $p(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$ حقیقی بوده، $a_m>0$ و چند جمله‌ای p، m صفر متمایز و حقیقـی دارد. در این صورت در مورد چند جمله‌ای $Q(x)=(p(x))^2-p'(x)$ چه می‌توان گفت؟

۱) اگر m فرد باشد، $m+1$ ریشه مجزا دارد و اگر m زوج باشد $m+2$ ریشه مجزا دارد.

۲) اگر m زوج باشد، $m+1$ ریشه مجزا دارد و اگر m فرد باشد $m+2$ ریشه مجزا دارد.

۳) اگر m فرد باشد، $m+1$ ریشه مجزا دارد و اگر m زوج باشد m ریشه مجزا دارد.

۴) اگر m زوج باشد، $m-1$ ریشه مجزا دارد و اگر m فرد باشد $m+1$ ریشه مجزا دارد.

۱۶ـ برای کدام $a\in(1,\infty)$ نامساوی $x^a\le a^x$ برای هر $x\in(1,\infty)$ درست است؟

۱) $a=e$

۲) $a=\pi$

۳) $a=2$

۴) $a=3$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۷ـ برای کدام مقدار a، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۱}{n}-\sin\frac{۱}{n})^a$ همگرا است؟

۱) سری همگرا است اگر و تنها اگر $a>۳$

۲) سری همگرا است اگر و تنها اگر $a>\frac{۱}{۳}$

۳) سری همگرا است اگر و تنها اگر $a>۱$

۴) سری همگرا است اگر و تنها اگر $a>۲$

۱۸ـ فرض کنید f روی $[-۱,۱]$ دارای مشتق مرتبه سوم پیوسته باشد در این صورت:

۱) سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\{\frac{۱}{n}(f(n)-f(-n))-۲f'(۰)\}$ همگرا است.

۲) سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\{n(f(\frac{۱}{n})-f(-\frac{۱}{n}))-۲f'(۰)\}$ همگرا است.

۳) سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\{n(f(\frac{۱}{n})-f(-\frac{۱}{n}))-۲f'(۰)\}$ واگرا است.

۴) رفتار سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\{n(f(\frac{۱}{n})-f(-\frac{۱}{n}))-۲f'(۰)\}$ از لحاظ همگرایی و واگرایی به ضابطه‌ی تابع f بستگی دارد.

۱۹ـ کدام گزینه درست است؟

۱) برای هر $x>۰$، $e^x>x^t$ اگر و تنها اگر $t\ge e$

۲) برای هر $x>۰$، $e^x<x^t$ اگر و تنها اگر $t>e$

۳) برای هر $x>۰$، $e^x>x^t$ اگر و تنها اگر $۰<t<e$

۴) برای هر $x>۰$، $e^x>x^t$ اگر و تنها اگر $۰<t<e^e$

۲۰ـ فرض کنید f روی $(-۱,۱)$ مشتق مرتبه‌ی دوم پیوسته دارد و $f(۰)=۰$ در این صورت مقدار $\lim_{x\to ۰^+}\sum_{k=۱}^{\lfloor\frac{۱}{\sqrt{x}}\rfloor}f(kx)$ کدام است؟ ($\lfloor\cdot\rfloor$ به معنی جزء صحیح است).

۱) $\frac{۱}{۲}f'(۰)$

۲) $f'(۰)$

۳) $f''(۰)$

۴) $\frac{۱}{۲}f''(۰)$

۲۱ـ اگر f در نقطه‌ی $x=a$ مشتق پذیر باشد، مقدار حد مقابل کدام است؟ $\lim_{n\to\infty}(f(a+\frac{۱}{n^۲})+f(a+\frac{۲}{n^۲})+\dots+f(a+\frac{n}{n^۲})-nf(a))$

۱) $f'(a)$

۲) $۲f'(a)$

۳) $\frac{۱}{۲}f'(a)$

۴) ۰

۲۲ـ مقدار حد $\lim_{n\to\infty}((۱+\frac{a}{n^۲})(۱+\frac{۲a}{n^۲})\cdots(۱+\frac{na}{n^۲}))$ کدام است؟

۱) $e^{\frac{a}{۲}}$

۲) e^a

۳) $\frac{۱}{۲}e^a$

۴) $۲e^a$

۲۳ـ فرض کنید تابع حقیقی f، سه بار بر $[-۱,۱]$ مشتق پذیر باشد به طوری که $f(-۱)=۰$، $f(۰)=۰$، $f(۱)=۱$ و $f'(۰)=۰$ در این صورت:

۱) به ازای x ی در $(-۱,۱)$، $f^{(۳)}(x)<۳$

۲) به ازای x ی در $(-۱,۱)$، $f^{(۳)}(x)\le ۳$

۳) به ازای x ی در $(-۱,۱)$، $f^{(۳)}(x)>۳$

۴) به ازای x ی در $(-۱,۱)$، $f^{(۳)}(x)\ge ۳$

۲۴ـ فرض کنید $f''(x)$ و $f'''(x)$ موجودند،

$$L_۳=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+۳h)-۳f(x+۲h)+۳f(x+h)-f(x)}{h^۳}$$ و $$L_۲=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+۲h)-۲f(x+h)+f(x)}{h^۲}$$ و $$L_۱=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-۲f(x)+f(x-h)}{h^۲}$$

در این صورت:

۱) $L_۱=L_۲=f''(x)\ ,\ L_۳=۳f''(x)$

۲) $L_۱=L_۲=f''(x)\ ,\ L_۳=f'''(x)$

۳) $L_۱=f''(x)\ ,L_۲=-f''(x)\ ,\ L_۳=f''(x)$

۴) $L_۱=-f''(x)\ ,L_۲=f''(x)\ ,\ L_۳=f'''(x)$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۵ـ فرض کنید $f^{(n+1)}(x)$ موجود و ناصفر باشد و $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\dots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)(x+\theta(h)h)$ در اینصورت:

۱) $\lim_{h\to 0}\theta(h)=0$ ۲) $\lim_{h\to 0}\theta(h)=\frac{1}{n+1}$ ۳) $\lim_{h\to 0}\theta(h)=\frac{1}{n}$ ۴) $\lim_{h\to 0}\frac{\theta(h)}{h}=0$

۲۶ـ فرض کنید f سه بار روی $(0,\infty)$ مشتق‌پذیر بوده و $f,f',f''>0$. اگر $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)f'''(x)}{(f''(x))^2}=c\neq 1$ آنگاه مقدار $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2-c}$ ۲) $\frac{1}{1-c}$ ۳) $\frac{2}{1-c}$ ۴) $\frac{1}{c-2}$

۲۷ـ فرض کنید f روی $\mathbb{R}$ از کلاس C^n باشد. در این صورت مقدار حد $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}((-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(a+kh))$ برابر است با:

۱) $f^{(n-1)}(a)$ ۲) $(n-1)f^{(n)}(a)$ ۳) $f^{(n)}(a)$ ۴) $n!f^{(n)}(a)$

۲۸ـ فرض کنید f ، n بار روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، $n\geq 2$ و $M_k=\sup\{|f^{(k)}(x)|:x\in\mathbb{R}\}<\infty$ که $k=0,1,2,\dots,n$ در این صورت:

۱) برای هر $1\leq k\leq n-1$، $M_k\leq 4^{\frac{k(n-k)}{2}}M_0^{1-\frac{k}{n}}M_n^{\frac{k}{n}}$

۲) برای هر $1\leq k\leq n-1$، $M_k\leq 4^{\frac{k(n-k)}{2}}M_0^{\frac{k}{n}}M_n^{1-\frac{k}{n}}$

۳) برای هر $1\leq k\leq n-1$، $M_k\leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}}M_0^{\frac{k}{n}}M_n^{1-\frac{k}{n}}$

۴) برای هر $1\leq k\leq n-1$، $M_k\leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}}M_0^{1-\frac{k}{n}}M_n^{\frac{k}{n}}$

۲۹ـ کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ محدب و از بالا کراندار باشد آنگاه f تابع ثابت است.

۲) اگر $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ محدب و کراندار باشد آنگاه f تابع ثابت است. $(a\in\mathbb{R})$.

۳) اگر $f:(-\infty,a)\to\mathbb{R}$ محدب و کراندار باشد آنگاه f تابع ثابت است. $(a\in\mathbb{R})$.

۴) هر سه گزینه صحیح می‌باشد.

۳۰ـ فرض کنید $x_1,x_2,\dots,x_n\in(0,\pi)$, $x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$. در این صورت:

۱) $\prod_{k=1}^{n}\sin x_k\leq\sin(nx)$ ۲) $\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin x_k}{x_k}\leq(\sin x)^n$ ۳) $\prod_{k=1}^{n}\sin x_k\leq(\sin x)^n$ ۴) $\prod_{k=1}^{n}\sin x_k\leq n\sin x$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

فصل ششم

«انتگرال ریمان ـ اشتیل‌یس»

تست‌های تألیفی فصل ششم

مثال۱: فرض کنید $f \in R(f)$ بر $[a,b]$ در این صورت مقدار $\int_a^b fdf$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}\{(f(b))^۲-(f(a))^۲\}$ ۲) $\frac{۱}{۲}\{f(b)-f(a)\}$ ۳) $(f(b))^۲-(f(a))^۲$ ۴) $f(b)-f(a)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از تعریف دوم انتگرال ریمان ـ اشتیل یس استفاده می‌کنیم. بنا به فرض برای هر $\varepsilon > ۰$ افرازی مانند $P_\varepsilon = \{a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n = b\}$ از $[a,b]$ هست که برای هر افراز P، $P \supseteq P_\varepsilon$ داریم: $|S(P,f,f) - \int_a^b fdf| < \varepsilon$ (※).

و رابطه‌ی بالا برای خود $P = P_\varepsilon$ نیز برقرار است بنابراین:

$$S(P_\varepsilon,f,f) = \sum_{i=۱}^{n} f(\xi_i)\{f(x_i)-f(x_{i-۱})\} \qquad \xi_i \in [x_{i-۱},x_i]$$

حالا ξ_i را هر دفعه یکی از نقاط انتهایی می‌گیریم بنابراین:

$$S(P_\varepsilon,f,f) = \sum_{i=۱}^{n} f(x_{i-۱})(f(x_i)-f(x_{i-۱}))\ ,\ S(P_\varepsilon,f,f) = \sum_{i=۱}^{n} f(x_i)(f(x_i)-f(x_{i-۱}))$$

اکنون با جمع زدن دو تساوی بالا داریم:

$$۲S(P_\varepsilon,f,f) = \sum_{i=۱}^{n}\{f(x_i)+f(x_{i-۱})\}\{f(x_i)-f(x_{i-۱})\}$$

$$= \sum_{i=۱}^{n}(f(x_i))^۲-(f(x_{i-۱}))^۲ = (f(b))^۲-(f(a))^۲ \Rightarrow S(P_\varepsilon,f,f) = \frac{۱}{۲}\{(f(b))^۲-(f(a)^۲)\}$$

و با جایگذاری در (※) و یکتایی انتگرال، نتیجه حاصل می‌شود.

مثال۲: فرض کنید $\alpha(x) = \begin{cases} ۰ & ۰ \le x \le c \\ ۱ & c < x \le ۱ \end{cases}$ که c یک عدد ثابت در $[۰,۱]$ است. در این صورت برای تابع حقیقی و کراندار f روی $[۰,۱]$:

۱) $f \in R(\alpha)$ اگر و تنها اگر f در $x = c$، از چپ پیوسته باشد. در این حالت $\int_۰^۱ fd\alpha = f(c)$.

۲) $f \in R(\alpha)$ اگر و تنها اگر f در $x = c$، از چپ پیوسته باشد. در این حالت $\int_۰^۱ fd\alpha = f(c)(۱-c)$.

۳) $f \in R(\alpha)$ اگر و تنها اگر f در $x = c$، از راست پیوسته باشد، در این حالت $\int_۰^۱ fd\alpha = f(c)$.

۴) $f \in R(\alpha)$ اگر و تنها اگر f در $x = c$، از راست پیوسته باشد، در این حالت $\int_۰^۱ fd\alpha = f(c)(۱-c)$.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به نکته‌ی ۲ باید f در c از راست پیوسته باشد تا $f \in R(\alpha)$. اما اگر افراز $P = \{x_۰,\cdots,x_n\}$ را داده باشند و فرض کنیم c یک نقطه‌ی افراز باشد یعنی برای یک i، $x_{i-۱} = c$ آن وقت برای $c < t_i \le x_i$ و افراز P داریم: $U(P,f) = \sum_{k=۱}^{n} f(t_k)\Delta_k\alpha = f(t_i)$. حال اگر افرازهای ظریف‌تر از P را انتخاب کنیم و از نکته‌ی ۱ـت استفاده کنیم آنگاه: $\int_۰^۱ fd\alpha = \lim_{n\to\infty} f(t_i) = \lim_{x\to c+} f(x) = f(c)$.

مثال۳: کدام گزینه درست است؟ (فرض کنید انتگرال‌پذیری ریمان را روی بازه‌ی فشرده‌ی $[a,b]$ در نظر می‌گیریم و $n \in \mathbb{N}$ طبیعی دلخواه است).

۱) اگر $f^n \in R$ آنگاه $f \in R$.

۲) اگر $f^{۲n+۱} \in R$ آنگاه $f \in R$. همچنین اگر $g \ge ۰$ و $g^{۲n} \in R$ آنگاه $g \in R$.

۳) اگر $fg \in R$ آنگاه $f,g \in R$.

۴) اگر $m > ۰, f \in R$ موجود باشد که $|f| \ge m > ۰$ آنگاه ممکن است که $\frac{۱}{f} \notin R$.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر $f^{2n+1}\in R$ ، تابع $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی $\varphi(x)=\sqrt[2n+1]{x}$ در نظر بگیرید. به وضوح φ پیوسته است، لذا روی هر بازه‌ی فشرده هم انتگرال‌پذیر است اکنون ترکیب $f=\varphi o f^{2n+1}$ با توجه به قضیه‌ی ۷ انتگرال‌پذیر ریمان است. و اگر $f^{2n}\in R$ و $f\geq 0$ ، $\varphi(x)=\sqrt[2n]{x}$، با استدلال مشابهی نتیجه می‌شود که $f=|f|=\varphi o f^{2n}\in R$.

گزینه‌های (۱) و (۳) با اتخاذ $n=2$ و تابع $f(x)=g(x)=\begin{cases}1 & \text{گویا } x\\ -1 & \text{گنگ } x\end{cases}$ رد می‌شوند چون $fg=f^2\equiv 1$ که به وضوح ریمان انتگرال‌پذیر است اما نه f و نه g هیچکدام انتگرال‌پذیر ریمان نیستند (محک لبگ را به یاد بیاورید).

گزینه‌ی (۴) نیز غلط است چون اگر D مجموعه‌ی ناپیوستگی‌های f باشد آنگاه D مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع $\frac{1}{f}$ نیز هست اکنون بنابر محک لبگ:

$f\in R\Leftrightarrow D$ پوچ باشد $\Leftrightarrow \frac{1}{f}\in R$.

توجه دارید که شرط $\forall x\in[a,b]\ |f(x)|\geq m>0$ لازم است وگرنه نتیجه‌ی بالا درست نیست چون ممکن است که $\frac{1}{f}$ بی‌کران شود.

مثال۴: مقدار $\int_a^b f(x)d\lfloor x^2\rfloor$ کدام است؟ (f پیوسته، $0\leq a\leq b$ و مجموع‌های زیر روی اعداد صحیح k گرفته می‌شود.)

۱) $\sum_{a<k\leq b} f(k)$ ۲) $\sum_{a<k\leq b} f(\sqrt{k})$ ۳) $\sum_{a<\sqrt{k}\leq b} f(\sqrt{k})$ ۴) $\sum_{a<k^2\leq b} f(k)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» نقاط جهش $\lfloor x^2\rfloor$ عبارتند از $\{\sqrt{[a^2]+1},\ \sqrt{[a^2]+2},\dots,\sqrt{[b^2]}\}$ و جهش $\lfloor x^2\rfloor$ به اندازه‌ی واحد است. اکنون قضیه‌ی ۱۲ کار را تمام می‌کند. توجه شود که $\sum_{k=[a^2]+1}^{[b^2]} f(\sqrt{k})=\sum_{[a^2]<k\leq[b^2]} f(\sqrt{k})=\sum_{a<\sqrt{k}\leq b} f(\sqrt{k})$.

مثال۵: کدام گزینه در مورد قضیه‌های اول مقدار میانگین برای انتگرال‌ها (حالت‌های ریمان ـ اشتیل‌یسی و ریمانی) درست است؟

۱) در حالت ریمان ـ اشتیل یسی، پیوستگی f لازم است در حالت ریمانی، پیوستگی P لازم نیست.

۲) در حالت ریمان ـ اشتیل یسی، پیوستگی f لازم نیست و در حالت ریمانی، کافی است که $P\in R$.

۳) در حالت ریمان ـ اشتیل یسی، پیوستگی f لازم است در حالی‌که در حالت ریمانی، پیوستگی P لازم نیست ولی باید $P\in R$.

۴) در هر دو حالت، پیوستگی f و P لازم است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» پیوسته بودن f در حالت ریمان ـ اشتیل یسی لازم است. به‌طور مثال قرار دهید $f(x)=\lfloor x\rfloor$، $\alpha(x)=x$ و $0\leq x\leq 2$. حال $\int_0^2 f\,d\alpha=\int_0^1 0dx+\int_1^2 1dx=1$. پس اگر قرار باشد که $c\in[a,b]$ با شرط $f(c)=\frac{1}{\alpha(2)-\alpha(0)}\int_0^2 f\,d\alpha$ موجود باشد باید $\lfloor c\rfloor=f(c)=\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2}$ که یک تناقض است. اما در حالت ریمانی کافی است که $P\in R$. چون اگر m و M به ترتیب مقادیر مینیمم و ماکزیمم تابع f باشند پس $m\leq f(x)\leq M$ بنابراین $m\int_a^b P\leq\int_a^b fP\leq M\int_a^b P$ از طرفی تابع $h(x)=f(x)\int_a^b P(t)dt$ روی $[a,b]$ پیوسته است. لذا مقدار میانی $\int_a^b fP$ را به ازای یک نقطه c، $c\in[a,b]$ اتخاذ می‌کند. پس باید $h(c)=\int_a^b fP$ و چون $h(c)=f(c)\int_a^b P$ پس داریم $\int_a^b fP=f(c)\int_a^b P$.

مثال۶: فرض کنید $f\in R$ بر $[a,b]$، f نامنفی و $\int_a^b f>0$. در این‌صورت:

۱) f روی $[a,b]$ مثبت است.

۲) f روی یک زیربازه $[a,b]$ مثبت است.

۳) f روی یک زیربازه $[a,b]$ پیوسته است.

۴) به ازای هر تابع پیوسته و صعودی h، $\int_a^b fh>0$.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» فرض کنید برای M مثبتی، $0\le f(x)\le M$ و $I=\int_a^b f(x)dx$ که $I>0$. قرار دهید $h=\frac{1}{2}\frac{I}{M+b-a}$ بنابراین $h>0$. اگر نشان دهیم که مجموعه‌ی $T=\{x: f(x)\ge h\}$ شامل یک زیربازه از $[a,b]$ است، کار تمام است. از تعریف دوم انتگرال ریمان ـ اشتیل یس استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\varepsilon=\frac{I}{3}$ داده شده است بنابراین افراز P_ε از $[a,b]$ چنان است که هر مجموع ریمان ـ اشتیل‌یس $S(P,f)$ متناظر آن در $|S(P,f)-I|<\frac{I}{3}$ صدق می‌کند لذا $S(P,f)>\frac{I}{2}$. اما $S(P,f)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k=\sum_{k\in A}+\sum_{k\notin A}$ که در آن $A=\{k:[x_{k-1},x_k]\subseteq T\}$.
کافی است نشان دهیم $A\neq\varnothing$ تا T شامل یک زیربازه شود. اگر $A=\varnothing$ برای هر x، $f(x)\lneq h$ ولی $f(t_k)<h$. حال

$$S(P,f)=\sum_{k\notin A} f(t_k)\Delta x_k<\sum_{k\notin A} h\Delta x_k=h(b-a)\quad (1)$$

از طرفی چون $S(P,f)>\frac{I}{2}=h(M+b-a)$ پس از نامساوی اخیر و رابطه (۱) داریم: $h(M+b-a)<h(b-a)$

که آشکارا تناقض است. لذا بایستی $A\neq\varnothing$ بنابراین برای یک k، $[x_{k-1},x_k]\subseteq T$ و با توجه به تعریف T، روی $[x_{k-1},x_k]$ داریم $f\ge h>0$.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۷: گیریم $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ پیوسته و $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\ell$ و $\ell\in\mathbb{R}$ و L. اگر b و a دو عدد مثبت باشند آنگاه مقدار $\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$ کدام است؟

۱) $(\ell-L)^{-1}\mathrm{Ln}\frac{a}{b}$　　۲) $(\ell-L)\mathrm{Ln}\frac{b}{a}$　　۳) $(L-\ell)^{-1}\mathrm{Ln}\frac{a}{b}$　　۴) $(L-\ell)\mathrm{Ln}\frac{b}{a}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» گیریم $a<b$ بنابراین برای هر دو عد حقیقی $0<t<T$ داریم:

$$\int_t^T\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_t^T\frac{f(ax)}{x}dx-\int_t^T\frac{f(bx)}{x}dx=\int_{at}^{aT}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{bt}^{bT}\frac{f(x)}{x}dx=\int_{at}^{0}\frac{f(x)}{x}dx+\int_{0}^{aT}\frac{f(x)}{x}dx$$

$$-\int_{bt}^{0}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{0}^{bT}\frac{f(x)}{x}dx=\int_{at}^{0}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{bt}^{0}\frac{f(x)}{x}dx+\int_{0}^{aT}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{0}^{bT}\frac{f(x)}{x}dx=\int_{at}^{bt}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{aT}^{bT}\frac{f(x)}{x}dx$$

با اتخاذ $p(x)=\frac{1}{x}$ می‌بینیم که قضیه‌ی اول مقدار میانگین انتگرال‌ها نتیجه می‌دهد که نقاطی مانند C_1 و C_2 و $at\le C_1\le bt$ و $aT\le C_2\le bT$ چنان موجودند که

$$\int_{at}^{bt}\frac{f(x)}{x}dx=f(C_1)\int_{at}^{bt}\frac{1}{x}dx=f(C_1)\mathrm{Ln}\frac{b}{a}$$

$$\int_{aT}^{bT}\frac{f(x)}{x}dx=f(C_2)\int_{aT}^{bT}\frac{1}{x}dx=f(C_2)\mathrm{Ln}(\frac{b}{a})\Rightarrow\int_t^T\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(C_1)\mathrm{Ln}(\frac{b}{a})-f(C_2)\mathrm{Ln}(\frac{b}{a})$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim_{\substack{t\to 0^+\\ T\to+\infty}}\int_t^T\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim_{t\to 0^+} f(C_1)\mathrm{Ln}\frac{b}{a}-\lim_{T\to\infty} f(C_2)\mathrm{Ln}\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\ell\,\mathrm{Ln}\frac{b}{a}-L\,\mathrm{Ln}\frac{b}{a}=(\ell-L)\mathrm{Ln}\frac{b}{a}$$

توجه دارید که اگر جای a و b را عوض کنید آنگاه با توجه به $\mathrm{Ln}(\frac{b}{a})=-\mathrm{Ln}(\frac{a}{b})$، ارتباط بین این مسئله و مسئله‌ی قبل روشن است. توجه کنید که به صورت نمادین می‌نویسیم.

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=(f(0)-f(\infty))\mathrm{Ln}(\frac{b}{a})=(f(\infty)-f(0))\mathrm{Ln}(\frac{a}{b})=f(x)]_0^{\infty}\times \mathrm{Ln}x]_b^a$$

مثلاً قرار دهید $f(x)=e^{-x}$ ، $f(x)=\tan^{-1}x$ و . . . و نتایج جالب به‌دست آورید.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

آزمون فصل ششم

۱ـ قرار دهید $A=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\tan^{-1}(\frac{n}{n^2+k^2})$ و $B=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\tan(\frac{k\pi}{4n+4})$ در اینصورت:

۱) $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{x}dx\ ,\ A=\frac{\pi}{2}$

۲) $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{x}dx\ ,\ A=\frac{\pi}{4}$

۳) $B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}dx\ ,\ A=\frac{\pi}{4}$

۴) $B=A=\frac{\pi}{4}$

۲ـ فرض کنید (a_n) دنباله‌ای از اعداد حقیقی بوده، برای $x\geq 0$ تعریف می‌کنیم $A(x)=\sum_{n\leq x}a_n=\sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor}a_n$ که در آن، $\lfloor x\rfloor$، همان جزء صحیح x است و مجموع‌های تهی را برابر صفر می‌گیریم. همچنین فرض کنید f در بازه‌ی $[1,a]$ مشتق پیوسته داشته باشد در اینصورت مقدار $\sum_{n\leq a}a_nf(n)$ کدام است؟

۱) $A(a)f(a)+\int_1^a A(x)f'(x)dx$

۲) $A(a)f'(a)+\int_1^a A(x)f(x)dx$

۳) $-\int_1^a A(x)f'(x)dx+A(a)f(a)$

۴) $\int_1^a A(x)f'(x)dx+A(a)f(a)$

۳ـ فرض کنید $\varphi_1(x)=\begin{cases}x-\lfloor x\rfloor-\frac{1}{2} & x\notin\mathbb{Z}\\ 0 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ و $\varphi_2(x)=\int_0^x\varphi_1(t)dt$. اگر f'' بر $[1,n]$ پیوسته باشد آنگاه مقدار $\sum_{k=1}^{n}f(k)$ کدام است؟

۱) $\int_1^n f''(x)-\int_1^n\varphi_2(x)f(x)dx+\frac{f(1)+f(n)}{2}$

۲) $\int_1^n f'(x)-\int_1^n\varphi_2(x)f''(x)dx+\frac{f(1)+f(n)}{2}$

۳) $\int_1^n f(x)+\int_1^n\varphi_2(x)f''(x)dx+\frac{f(1)+f(n)}{2}$

۴) $\int_1^n f(x)-\int_1^n\varphi_2(x)f''(x)dx+\frac{f(1)+f(n)}{2}$

۴ـ فرض کنید $\alpha,\beta:[a,b]\to\mathbb{R}$ دو تابع صعودی و تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ نسبت به هر کدام از آنها، ریمان ـ اشتیل یس انتگرالپذیر است. فرض کنید $\underline{I}(\alpha)=\underline{\int_a^b}fd\alpha$ و $\overline{I}(\alpha)=\overline{\int_a^b}fd\alpha$ در اینصورت:

۱) $\underline{I}(\alpha+\beta)=\underline{I}(\alpha)+\underline{I}(\beta)\ ,\ \overline{I}(\alpha+\beta)=\overline{I}(\alpha)+\overline{I}(\beta)$

۲) $\underline{I}(\alpha+\beta)\geq\underline{I}(\alpha)+\underline{I}(\beta)\ ,\ \overline{I}(\alpha+\beta)\leq\overline{I}(\alpha)+\overline{I}(\beta)$

۳) $\underline{I}(\alpha+\beta)\leq\underline{I}(\alpha)+\underline{I}(\beta)\ ,\ \overline{I}(\alpha+\beta)\geq\overline{I}(\alpha)+\overline{I}(\beta)$

۴) $\underline{I}(\alpha+\beta)\geq\underline{I}(\alpha)+\underline{I}(\beta)\ ,\ \overline{I}(\alpha+\beta)\geq\overline{I}(\alpha)+\overline{I}(\beta)$

۵ـ قرار دهید $g(x)=\int_0^1\frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}dt$ ، $f(x)=(\int_0^x e^{-t^2}dt)^2$ در اینصورت مقدار $g(x)+f(x)$ کدام است:

۱) $\frac{\pi}{4}$

۲) $\frac{\pi}{2}$

۳) π

۴) $\frac{\pi^2}{4}$

۶ـ مقدار $\int_0^\pi xe^{\sin x}dx$ کدام است.

۱) π

۲) $e\times\frac{1}{2}\pi^2$

۳) $\frac{\pi}{2}\int_0^\pi e^{\sin x}dx$

۴) ۱

۷ـ توابع f و g را روی $[0,1]$ با ضوابط $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ تعریف می‌کنیم. در اینصورت:

۱) f و g با تغییر کراندارند.

۲) هیچکدام از f و g با تغییر کراندار نیستند.

۳) g با تغییر کراندار است اما f با تغییر کراندار نیست.

۴) f با تغییر کراندار است اما g با تغییر کراندار نیست.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۸ـ فرض کنید f روی $[\circ,a]$ پیوسته باشد اگر $x\in[\circ,a]$ تعریف کنید $f_\circ(x)=f(x)$ و $f_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_\circ^x (x-t)^n f(t)\,dt\ ,\ n=\circ,1,2,\ldots$ در اینصورت:

۱) $f_n^{(n)}=f$ و تعداد تغییرعلامت‌های f در بازه‌ی $[\circ,a]$ از تعداد تغییرعلامت‌ها در مجموعه‌ی مرتب $f(a),f_1(a),\ldots,f_n(a)$ بیشتر نیست.

۲) $f_n^{(n)}=f$ و تعداد تغییر علامت‌های f در بازه‌ی $[\circ,a]$ از تعداد تغییرعلامت‌ها در مجموعه‌ی مرتب $f(a),f_1(a),\ldots,f_n(a)$ کمتر نیست.

۳) $f_n^{(n)}=f^{(n)}$ و تعداد تغییر علامت‌های f در بازه‌ی $[\circ,a]$ از تعداد تغییرعلامت‌ها در مجموعه‌ی مرتب $f(a),f_1(a),\ldots,f_n(a)$ کمتر نیست.

۴) $f_n^{(n)}=f^{(n)}$ و تعداد تغییر علامت‌های f در بازه‌ی $[\circ,a]$ از تعداد تغییرعلامت‌ها در مجموعه‌ی مرتب $f(a),f_1(a),\ldots,f_n(a)$ بیشتر نیست.

۹ـ فرض کنید f روی $[\circ,1]$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}2^{-n} & ,\ 2^{-n-1}<x\le 2^{-n}\ ,\ n=\circ,1,2,\ldots\\ \circ & x=\circ\end{cases}$ داده شده است همچنین فرض کنید $F(x)=\int_\circ^x f(t)\,dt$ و $A(x)=2^{-\lfloor -\text{Ln}x/\text{Ln}2\rfloor}$ که در آن نماد $\lfloor . \rfloor$ همان جزء صحیح یک عدد حقیقی است. در اینصورت برای $\circ<x\le 1$ داریم:

۱) $F'(x)=xA(x)-\frac{1}{3}A(x)^2$

۲) $F(x)=xA(x)-\frac{1}{3}A(x)^2$

۳) $F'(x)=xA(x)-\frac{1}{2}A(x)^2$

۴) $F(x)=xA(x)-\frac{1}{2}A(x)^2$

۱۰ـ فرض کنید مشتق f بر $[a,b]$ نزولی بوده و برای هر x در این بازه $f'(x)\ge m>\circ$ در اینصورت

۱) $\left|\int_a^b \cos((f'(x))\,dx\right|\ge\frac{2}{m}$

۲) $\left|\int_a^b \cos((f'(x))\,dx\right|\le\frac{2}{m}$

۳) $\left|\int_a^b \cos((f(x))\,dx\right|\ge\frac{2}{m}$

۴) $\left|\int_a^b \cos((f(x))\,dx\right|\le\frac{2}{m}$

۱۱ـ کدام گزینه درست است؟

۱) تابعی مانند f وجود دارد که برای آن $g(x)=\int_\circ^x f(t)\,dt$ موجود و همه‌جا مشتق‌پذیر است ولی مجموعه‌ی $\{x:g'(x)\ne f(x)\}$ یک مجموعه‌ی چگال است.

۲) تابعی مانند $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ وجود دارد که پیوسته و مثبت بوده، همچنین $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ موجود است ولی $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ne\circ$.

۳) توابعی مانند f و g وجود دارند که f نسبت به g روی هر دو بازه‌ی $[b,c]$ و $[a,b]$ انتگرالپذیر ریمان ـ اشتیل یس است ولی f نسبت به g روی $[a,c]$ انتگرالپذیر ریمان ـ اشتیل یس نیست.

۴) هر سه گزینه صحیح است.

۱۲ـ فرض کنید $f:[\circ,1]\times[\circ,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 2y & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ قرار دهید $\underline{I}=\underline{\int_\circ^1} f(x,y)\,dx$ و $\overline{I}=\overline{\int_\circ^1} f(x,y)\,dx$ در اینصورت:

۱) $\underline{I}=\begin{cases}1 & \circ\le y\le\frac{1}{2}\\ 2y & \frac{1}{2}<y\le 1\end{cases}$ و $\overline{I}=\begin{cases}2y & \circ\le y\le\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}<y\le 1\end{cases}$

۲) $\underline{I}=\begin{cases}2y & \circ\le y\le\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}<y\le 1\end{cases}$ و $\overline{I}=\begin{cases}2y & \circ\le y\le\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}<y\le 1\end{cases}$

۳) $\underline{I}=\begin{cases}2y & \circ\le y\le\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}<y\le 1\end{cases}$ و $\overline{I}=\begin{cases}1 & \circ\le y\le\frac{1}{2}\\ 2y & \frac{1}{2}<y\le 1\end{cases}$

۴) $\underline{I}=\begin{cases}1 & \circ\le y\le\frac{1}{2}\\ 2y & \frac{1}{2}<y\le 1\end{cases}$ و $\overline{I}=\begin{cases}1 & \circ\le y\le\frac{1}{2}\\ 2y & \frac{1}{2}<y\le 1\end{cases}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۳ـ تابع f سوال قبل را در نظر بگیرید این دفعه قرار دهید $\underline{I}=\underline{\int}_{\circ}^{1} f(x,y)dy$ و $\overline{I}=\overline{\int}_{\circ}^{1} f(x,y)dy$ در اینصورت:

۱) $\overline{I}=\underline{I}=1$

۲) $\overline{I}=2\underline{I}=1$

۳) $\underline{I}=\begin{cases} 2x & \circ \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2}< x \le 1 \end{cases}$, $\overline{I}=\begin{cases} 1 & \circ \le x \le \frac{1}{2} \\ 2x & \frac{1}{2}< x \le 1 \end{cases}$

۴) $\underline{I}=\begin{cases} 1 & \circ \le x \le \frac{1}{2} \\ 2x & \frac{1}{2}< x \le 1 \end{cases}$, $\overline{I}=\begin{cases} 2x & \circ \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2}< x \le 1 \end{cases}$

۱۴ـ تابع f سوال ۱۸ را در نظر بگیرید. قرار دهید $A(x,t)=\int_{\circ}^{t} f(x,y)dy$ در اینصورت:

۱) $A(x,t)=\begin{cases} t & x\in Q \\ 2t & x\notin Q \end{cases}$

۲) $A(x,t)=\begin{cases} t & x\in Q \\ t^2 & x\notin Q \end{cases}$

۳) $A(x,t)=\begin{cases} t^2 & x\in Q \\ t & x\notin Q \end{cases}$

۴) $A(x,t)=\begin{cases} 2t & x\in Q \\ t & x\notin Q \end{cases}$

۱۵ـ دو بازه تابع سوال ۱۸ را در نظر گرفته، قرار دهید $F(x)=\int_{\circ}^{1} f(x,y)dy$ در اینصورت:

۱) $\int_{\circ}^{1} F(x)dx=1$

۲) $\int_{\circ}^{1} F(x)dx=\frac{1}{2}$

۳) $\int_{\circ}^{1} F(x)dx=2$

۴) F انتگرالپذیر نیست

۱۶ـ دو گزاره‌ی p و q به صورت زیر داده شده است. کدام گزینه در مورد آنها درست است؟

p) هرگاه f روی $[a,b]$ انتگرالپذیر بوده و برای هر $x\in[a,b]$ ، $f(x)>\circ$ آنگاه $\int_a^b f(x)dx>\circ$.

q) اگر $\int_a^b f>\circ$ آنگاه f روی یک زیربازه‌ی $[a,b]$ مثبت است.

۱) p غلط است و q درست است.

۲) p درست است و q غلط است.

۳) هم p و هم q ، هر دو درست‌اند.

۴) نه p و نه q هیچکدام درست نیستند.

۱۷ـ دو گزاره‌ی p و q به صورت زیر داده شده‌اند. کدام گزینه در مورد آنها درست است؟

p) اگر f روی $[a,b]$ انتگرالپذیر بوده و برای هر تابع پیوسته‌ی h، $\int fh=\circ$ آنگاه $f=\circ$ روی $[a,b]$.

q) فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته و نامنفی بوده و g روی $[a,b]$ صعودی اکید باشد. در اینصورت $\int_a^b fdg=\circ$ اگر و تنها اگر $f=\circ$ روی $[a,b]$.

۱) هر دوی p و q درست‌اند.

۲) p غلط و q درست است.

۳) p درست، q غلط است.

۴) نه p و نه q هیچکدام درست نیستند.

۱۸ـ فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته و بر (a,b) مشتقات f' و f'' موجود باشند. اگر $f(a)=f(b)=\circ$ و $m=\sup\{|f''(x)|:a<x<b\}$ آنگاه

۱) $\int_a^b |f(x)|dx\le\frac{m(b-a)^2}{4}$

۲) $\int_a^b |f(x)|dx\le\frac{m(b-a)^3}{6}$

۳) $\int_a^b |f(x)|dx\le\frac{m(b-a)^3}{12}$

۴) $\int_a^b |f(x)|dx\ge\frac{m(b-a)^3}{6}$

۱۹ـ قرار دهید $A=\lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{1}\frac{x^n}{1+x}dx$ ، $B=\lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{1}\frac{ny^{n-1}}{1+y}dy$ در اینصورت:

۱) $B=A=\circ$

۲) $A=\frac{1}{2}$ ، $B=\circ$

۳) $B=A=\frac{1}{2}$

۴) $A=\circ$ ، $B=\frac{1}{2}$

۲۰ـ فرض کنید $g:[\circ,1]\to\mathbb{R}$ انتگرالپذیر است در اینصورت مقدار $\int_{\circ}^{1}\int_{x}^{1} g(t)dt\,dx$ کدام است؟

۱) $\int_{\circ}^{1} t^2 g(t)dt$

۲) $\int_{\circ}^{1} tg(t)dt$

۳) $\int_{\circ}^{1} g(t)dt$

۴) $g(1)-g(\circ)$

۲۱ـ قرار دهید $B=\lim_{n\to\infty}\int_{1}^{2}\frac{\sin(nx)}{x}dx$ و $A=\lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{1} nx(1-x^2)^n dx$ در اینصورت:

۱) $A=B=\frac{1}{2}$

۲) $A=\circ$ ، $B=\frac{1}{2}$

۳) $A=\frac{1}{2}$ و $B=\circ$

۴) $A=B=\circ$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۳ـ مقدار $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) وجود ندارد.

۲۴ـ فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته و متناوب با دوره‌ی تناوب T ، $T>0$ باشد. فرض کنید $a<b$ و قرار دهید $A=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(nx)dx$، همچنین فرض کنید $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد و قرار دهید $B=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{ng(x)}{1+n^2x^2}dx$. در اینصورت A و B کدامند.

۱) $A=\frac{b-a}{T}\int_0^T f(x)dx\ ;\ B=\pi g(0)$

۲) $A=\frac{b-a}{T}\int_0^T f(x)dx\ ;\ B=\frac{\pi}{2}g(0)$

۳) $A=(b-a)\int_0^T f(x)dx\ ;\ B=\frac{\pi}{2}g(0)$

۴) $B=0$ اما A موجود نیست

۲۵ـ منحنی‌های $r_i:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ ، $i=1,2,3$ با ضوابط زیر در نظر بگیرید.

$r_1(t)=e^{it}$ و $r_2(t)=e^{2it}$ و $r_3(t)=e^{2\pi it\sin\frac{1}{t}}$ که در آن $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$، در اینصورت:

۱) این سه منحنی یک برد دارند و $\Lambda_{r_1}=\frac{1}{2}\Lambda_{r_2}=4\pi\ ,\ \Lambda_{r_3}=2\pi$

۲) این سه منحنی دارای بردهای متفاوتی هستند و $\Lambda_{r_1}=\frac{1}{2}\Lambda_{r_2}=4\pi\ ,\ \Lambda_{r_3}=2\pi$

۳) این سه منحنی دارای بردهای متفاوتی هستند و $\Lambda_{r_1}=\frac{1}{2}\Lambda_{r_2}=2\pi\ ,\ \Lambda_{r_3}=\infty$

۴) این سه منحنی دارای بردهای یکسانی هستند و $\Lambda_{r_1}=\frac{1}{2}\Lambda_{r_2}=2\pi\ ,\ \Lambda_{r_3}=\infty$

۲۶ـ فرض کنید $f\in C([-1,1])$ قرار دهید $A=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n f(\sin x)dx$ و $B=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n f(|\sin x|)dx$ در اینصورت:

۱) $A=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx\ ,\ B=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sin x)dx$

۲) $A=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sin x)dx\ ,\ B=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

۳) $A=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx\ ,\ B=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$

۴) $A=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx\ ,\ B=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$

۲۷ـ برای $f\in C([a,b])$ قرار دهید $A=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin^2(nx)dx$ و همچنین اگر $g\in C([-1,1])$ قرار دهید:

$$B=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 xg(\sin(2\pi nx))dx$$

در اینصورت:

۱) $A=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx\ ,\ B=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} g(\sin x)dx$

۲) $A=\int_a^b f(x)dx\ ,\ B=\frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi} g(\sin x)dx$

۳) $A=\int_a^b f(x)dx\ ,\ B=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} g(x)dx$

۴) $A=\int_a^b f(x)dx\ ,\ B=\frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi} g(x)dx$

۲۸ـ f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است مقدار $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^b (f(x+h)-f(x))dx$ کدام است؟

۱) $f(a)-f(b)$ ۲) $f(b)-f(a)$ ۳) $\frac{f(a)-f(b)}{2}$ ۴) $\frac{f(b)-f(a)}{2}$

۲۹ـ در مورد انتگرال ناسره‌ی $\int_2^{\infty}\frac{1}{x^p Ln^q(x)}$ چه می‌توان گفت؟

۱) اگر $p>1$ و $q\in\mathbb{R}$ آنگاه انتگرال همگراست.

۲) اگر $p<1$ و $q\in\mathbb{R}$ آنگاه انتگرال واگرا است.

۳) اگر $p=1$ آنگاه انتگرال همگرا است اگر و تنها اگر $q>1$

۴) هر سه گزینه درست است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۳۰ـ فرض کنید f روی $[a,b]$ انتگرالپذیر ریمان است. قرار دهید $C=\int_a^b f^2(x)dx$, $B=\int_a^b f(x)\cos x\,dx$, $A=\int_a^b f(x)\sin x\,dx$ در اینصورت:

۱) $A^2+B^2\le C$ ۲) $A^2+B^2\le(b-a)C$ ۳) $A^2+B^2\ge C$ ۴) $A^2+B^2\ge(b-a)C$

۳۱ـ فرض کنید f روی $[a,b]$ مثبت و انتگرالپذیر ریمان باشد در اینصورت:

۱) $(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx$ ۲) $(b-a)^2\le\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx$

۳) $(b-a)\ge\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx$ ۴) $(b-a)^2\ge\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx$

۳۲ـ در مورد گزاره‌های p و q زیر چه می‌توان گفت؟

p) تابع پیوسته‌ی $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ و عدد $c_1>0$ طوری هستند که $\int_{c_1}^{\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ همگراست. در اینصورت برای هر دو عدد مثبت a و b داریم

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\mathrm{Ln}(\frac{b}{a})$$

q) تابع پیوسته‌ی $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ و عدد $c_2>0$ طوری هستند که $\int_0^{c_2}\frac{f(x)}{x}dx$ همگراست و نیز $\lim_{x\to\infty}f(x)=L\in\mathbb{R}$، قرار می‌دهیم $L=f(\infty)$.

در اینصورت برای هر دو عدد مثبت a و b داریم: $\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(\infty)\mathrm{Ln}\frac{a}{b}$

۱) هر دوی p و q غلط‌اند. ۲) p درست ولی q غلط است. ۳) p درست ولی p غلط است. ۴) هر دوی p و q درست‌اند.

۳۳ـ فرض کنید a و b و a' و b' مثبت بوده و $0<a<b$ قرار دهید $B=\int_0^{\infty}\frac{b'\sin a'x-a'\sin b'x}{x^2}dx$ و $A=\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\sin bx}{x}dx$ در اینصورت:

۱) $A=-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{b-a}{b+a}\ ;\ B=-a'b'\mathrm{Ln}\frac{a'}{b'}$ ۲) $A=-\mathrm{Ln}\frac{b-a}{b+a}\ ;\ B=-a'b'\mathrm{Ln}\frac{b'}{a'}$

۳) $A=\mathrm{Ln}\frac{b-a}{b+a}\ ;\ B=\frac{1}{2}a'b'\mathrm{Ln}\frac{b'}{a'}$ ۴) $A=ab\,\mathrm{Ln}\frac{b-a}{b+a}\ ;\ B=a'b'\mathrm{Ln}\frac{b'}{a'}$

۳۴ـ فرض کنید تابع حقیقی f روی $[0,\infty]$ پیوسته بوده و $\lim_{x\to\infty}(f(x)+\int_0^x f(t)dt)$ موجود و متناهی باشد در اینصورت:

۱) $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ ۲) $\lim_{x\to\infty}f(x)=c\ne0$

۳) ممکن است که $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ ۴) ممکن است که $\lim_{x\to\infty}f(x)$ موجود نباشد.

۳۵ـ فرض کنید تابع حقیقی f روی $[0,\infty]$ پیوسته و نامنفی باشد و $\int_0^{\infty}f(x)dx<\infty$ در اینصورت در مورد $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n xf(x)$ کدام گزینه درست است.

۱) واگرا به ∞ است. ۲) همگرا به 0 است. ۳) همگرا به یک عدد ناصفر است. ۴) هیچ چیزی نمی‌توان گفت.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

فصل هفتم

« دنباله‌ها و سری‌های توابع »

تست‌های تألیفی فصل هفتم

مثال۱: فرض کنید $f_n \xrightarrow[E]{} f$ و $g_n \xrightarrow[E]{} g$ در این صورت:

۱) $f_n \pm g_n \xrightarrow[E]{} f \pm g$

۲) $cf_n \xrightarrow[E]{} cf \,, c \in \mathbb{R}$

۳) به علاوه اگر هر f_n و هر g_n روی E کراندار باشند آنگاه $f_n g_n \xrightarrow[E]{} fg$

۴) همه‌ی موارد

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اثبات ۱ و ۲ با استفاده از خواص قدرمطلق (نامساوی مثلث و $|c|=c|.|$) است. لذا فقط ۳ را اثبات می‌کنیم. ابتدا برای شروع می‌نویسیم:

$$|f_n(x)g_n(x)-f(x)g(x)|=|f_n(x)g_n(x)\pm f(x)g_n(x)-f(x)g(x)|\leq|f_n(x)-f(x)||g_n(x)|+|g_n(x)-g(x)||f(x)| \quad (۱)$$

$$|f_n(x)g_n(x)-f(x)g(x)|\leq\varepsilon|g_n(x)|+\varepsilon|f(x)| \quad (۲)$$

لذا باید رابطه‌ی (۲) (یا ۱) را از قید x و n در سمت راست خلاص کنیم و این امر به کمک کرانداری f و به کمک گزاره‌ی p امکان‌پذیر است. خوب اجازه دهید که اثبات را از نو بنویسیم، این مقدمه جهت اشاره به این ایده بود که در جاهایی که برخی توابع، خواص زیادی دارند، مثلاً دنباله توابع‌اند یا هرکدام پیوسته یا کراندارند و ... استفاده از نامساوی مثلث و کم و زیاد کردن جملات مناسب و . . . مفید است. اولاً چون $f_n \xrightarrow{} f$ و هر f_n کراندار است پس f نیز کراندار است لذا $\forall x\in E \quad |f(x)|\leq M_۱$. دوباره بنابر همان مثال (چون $g_n \xrightarrow{} g$ و هر g_n کراندار است پس) دنباله‌ی (g_n) کراندار یکنواخت است، لذا $\exists M_۲>۰ \quad \forall x\in E\,,\,\forall n\in\mathbb{N} \quad |g_n(x)|\leq M_۲$. اکنون اگر $\varepsilon>۰$ را داده باشند بنا به تعریف همگرایی یکنواخت به دست می‌آوریم:

$$\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N} \quad \forall n\geq N\,,\,\forall x\in E \quad |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{۲(M_۲+۱)}\,,\,|g_n(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{۲(M_۱+۱)} \quad (۳)$$

لذا اگر $n\geq N$ و $x\in E$ آنگاه با استفاده از (۱) و (۳) خواهیم داشت که،

$$|f_n(x)g_n(x)-f(x)g(x)|\leq\frac{\varepsilon}{۲(M_۲+۱)}\cdot M_۲+\frac{\varepsilon}{۲(M_۱+۱)}M_۱<\frac{\varepsilon}{۲}+\frac{\varepsilon}{۲}=\varepsilon$$

و لذا $f_n g_n \xrightarrow{} fg$.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۲: سری‌های $A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2}}{[1+nx^{2}][1+(n+1)x^{2}]}$ **و** $B=\sum_{n=1}^{\infty}x(\frac{n}{1+n^{2}x^{2}}-\frac{n+1}{1+(n+1)^{2}x^{2}})$ **روی** $[0,1]$ **داده شده‌اند. در مورد A و B چه می‌توان گفت؟**

۱) A همگرای یکنواخت است اما B همگرای یکنواخت نیست.

۲) A همگرای یکنواخت نیست اما B همگرای یکنواخت است.

۳) همگرایی هر دو صرفاً نقطه‌ای است.

۴) هر دو همگرای یکنواختند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» جمله‌ی عمومی A را به صورت $f_n(x)=\frac{1}{1+nx^{2}}-\frac{1}{1+(n+1)x^{2}}=\frac{x^{2}}{[1+nx^{2}][1+(n+1)x^{2}]}$ بازنویسی می‌کنیم بنابراین:

$$S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}f_n(x)=1-\frac{1}{1+(N+1)x^{2}}$$

پس دیده می‌شود $S_N\xrightarrow{p.w}S$ که $S(x)=\begin{cases}0 & ; \ x=0\\ 1 & ; \ x\neq 0\end{cases}$.

اکنون با تشکیل دادن $M_N=\sup\{|S_N(x)-S(x)|:x\in[0,1]\}$ می‌بینیم که $M_N=1$ لذا $M_N\not\to 0$ پس همگرایی سری A نقطه‌وار است. برای سری B مشابهاً داریم که $U_N(x)=\sum_{n=1}^{N}g_n(x)=x[\frac{1}{1+x^{2}}-\frac{N+1}{1+(N+1)^{2}x^{2}}]$ اکنون $U_N\xrightarrow{p.w}U$ که $U(x)=\begin{cases}0 & ; \ x=0\\ \frac{x}{1+x^{2}} & ; \ x\neq 0\end{cases}$. اکنون M_N را با قراردادن $M_N=\sup\{|U_N(x)-U(x)|:x\in[0,1]\}$ تشکیل داده و با استفاده از روش مشتق برای ماکزیمم ـ مینیمم می‌بینیم که $M_N=\frac{1}{2}\neq 0$ بنابراین $M_N\not\to 0$ یعنی همگرایی سری B نیز نقطه‌وار است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

آزمون فصل هفتم

۱ــ دو دنباله‌ی $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ و $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ روی $E=[0,+\infty]$ با ضوابط $g_n(x)=x^2e^{-nx}$ و $f_n(x)=xe^{-nx}$ داده شده‌اند در اینصورت:

۱) همگرایی (f_n) صرفاً نقطه‌ای است، امّا همگرایی (g_n) یکنواخت است.

۲) همگرایی (f_n) یکنواخت است، امّا همگرایی (g_n) صرفاً نقطه‌ای است.

۳) همگرایی هر دو یکنواخت است.

۴) همگرایی هر دو صرفاً نقطه‌وار است.

۲ــ دودنباله‌ی $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ و $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ روی $\mathbb{R}$ با ضوابط $g_n(x)=\frac{2x}{\pi}\operatorname{Arctan}(nx)$ و $f_n(x)=\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(nx)$ داده شده‌اند در اینصورت:

۱) همگرایی (f_n) صرفاً نقطه‌ای است، امّا همگرایی (g_n) یکنواخت است.

۲) همگرایی (f_n) یکنواخت است، امّا همگرایی (g_n) صرفاً نقطه‌ای است.

۳) همگرایی هر دو یکنواخت است.

۴) همگرایی هر دو صرفاً نقطه‌ای است.

۳ــ فرض کنید $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی پیوسته روی فضای متریک (X,d) باشد و $f_n \xrightarrow{p.w} f$ روی X در اینصورت f در نقطه‌ی $c\in X$ پیوسته است اگر و تنها اگر (ضعیف‌ترین شرط ممکن را انتخاب کنید).

۱) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0,\ N\in\mathbb{N}\ \text{s.t}\ \ d(x,c)<\delta\ ,\ n\ge N \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

۲) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0,\ N\in\mathbb{N}\ \text{s.t}\ \ d(x,c)<\delta\ ,\ \Rightarrow |f_N(x)-f(x)|<\varepsilon$.

۳) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0,\ N\in\mathbb{N}\ \text{s.t}\ \ d(x,c)<\delta\ ,\ m,n\ge N \Rightarrow |f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

۴) $\forall\varepsilon>0\ \ \forall\delta>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}\ \text{s.t}\ \ d(x,c)<\delta\ ,\ \Rightarrow |f_N(x)-f(x)|<\varepsilon$.

۴ــ کدامیک از دنباله‌های زیر در دامنه‌ی داده شده به طور یکنواخت همگراست؟

۱) $(\frac{x^n}{n})_{n=1}^{\infty}$ روی هر $[0,a]$ که $a\ge 0$

۲) $(\frac{x^n}{n})_{n=1}^{\infty}$ روی $\mathbb{R}$

۳) $(\frac{x^n}{1+x^n})_{n=1}^{\infty}$ روی هر مجموعه‌ی بسته‌ای که شامل عدد یک نباشد.

۴) $(\frac{x^n}{n+x^n})_{n=1}^{\infty}$ روی $[1,+\infty)$

۵ــ کدامیک از دنباله‌های زیر روی دامنه‌ی داده شده به طور یکنواخت همگراست.

۱) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ، $f_n(x)=\cos^n x(1-\cos^n x)$ ، $x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$

۲) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ، $f_n(x)=\cos^n x(1-\cos^n x)$ ، $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

۳) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ، $f_n(x)=\frac{1}{1+(nx-1)^2}$ ، $x\in[0,1]$

۴) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ، $f_n(x)=\frac{x^2}{x^2+(nx-1)^2}$ ، $x\in[0,1]$

۶ــ تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. قرار دهید: $Q_n(x)=n(f(x+\frac{1}{n})-f(x))$ در اینصورت:

۱) اگر f' پیوسته باشد آنگاه $Q_n \rightrightarrows f'$ روی $\mathbb{R}$.

۲) اگر f' پیوسته‌ی یکنواخت باشد آنگاه $Q_n \rightrightarrows f'$ روی $\mathbb{R}$.

۳) اگر f پیوسته‌ی یکنواخت باشد آنگاه $Q_n \rightrightarrows f'$ روی $\mathbb{R}$.

۴) اگر f پیوسته باشد آنگاه $Q_n \rightrightarrows f'$ روی $\mathbb{R}$.

۷ــ گفته می‌شود که دنباله‌ی (f_n) روی فضای متری (X,d)، به طور پیوسته به تابع f همگراست هر گاه داشته باشیم «اگر $x\in X$ و $x_n\to x$ آنگاه $f_n(x_n)\to f(x)$». در اینصورت کدام گزینه درست است. (f_nها و f روی X در نظر گرفته شده‌اند)

۱) اگر f_n به طور پیوسته به تابع f همگرا باشد آنگاه f پیوسته است (حتی اگر f_nها ناپیوسته باشند)

۲) اگر $f_n \rightrightarrows f$ روی X و f پیوسته باشد آنگاه f_n به طور پیوسته به تابع f همگرا است.

۳) اگر X فشرده بوده و f پیوسته باشد آنگاه «همگرایی یکنواخت f_n به f» معادل «همگرایی به طور پیوسته‌ی f_n به f» است.

۴) هر سه گزینه صحیح‌اند.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۸ـ کدام گزینه درست است؟

۱) حد یکنواخت دنباله‌ای از توابع پیوسته‌ی یکنواخت، پیوسته‌ی یکنواخت است.

۲) دنباله‌ی توابع پیوسته‌ی (f_n) روی بازه‌ی $[a,b]$ طوری است که برای هر n، f'_n روی (a,b) موجود است. همچنین فرض کنید دنباله‌ی (f'_n) به طور یکنواخت کراندار باشد. در اینصورت همگرایی نقطه‌وار (f_n) روی $[a,b]$ همگرایی یکنواخت آنرا روی $[a,b]$ می‌دهد.

۳) تابع $x \to e^x$ در $\mathbb{R}$ حد یکنواخت چند جمله‌ای‌ها نیست.

۴) هر سه گزینه صحیح‌اند.

۹ـ کدام گزینه غلط است؟

۱) دنباله‌ی $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ به صورت $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ x \in [0,1]\ \ f_n(x) = n^c x(1-x^2)^n$ تعریف شده است که در آن c عددی حقیقی است. در اینصورت برای هر c، (f_n) نقطه به نقطه همگرا است.

۲) در گزینه‌ی ۱، (f_n) وقتی به طور یکنواخت همگراست که $c < \frac{1}{2}$.

۳) دنباله‌ی $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ روی $[1, e^{\frac{1}{e}}]$ به صورت بازگشتی تعریف شده است: $f_1(x) = x\ ,\ f_n(x) = x^{f_{n-1}(x)}$ در اینصورت f_n به طور یکنواخت به تابع $f(x) = x^{f(x)}$ همگرا است.

۴) دنباله‌ی $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ روی $[-1,1]$ با ضابطه‌ی $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ تعریف شده است. در اینصورت دنباله‌ی مشتقات، $(f'_n)_{n=1}^{\infty}$، روی $[-1,1]$ همگرای یکنواخت است.

۱۰ـ کدامیک از سری‌های داده شده روی مجموعه‌ی داده شده، همگرای یکنواخت نیست؟

۱) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sin(1+\frac{x}{n})$ روی $\mathbb{R}$

۲) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2})$ روی $[0,1]$

۳) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x}$ روی $[0,\infty)$، به شرطی که $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد.

۴) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ روی $[0,\infty)$

۱۱ـ فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، در اینصورت مقدار $\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x}$ کدام است؟

۱) معلوم نیست

۲) $+\infty$ یا $-\infty$

۳) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

۴) $\displaystyle \mathrm{Ln}(|\sum_{n=1}^{\infty} a_n|)$

۱۲ـ قرار دهید $\xi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ در اینصورت کدام گزینه غلط است؟

۱) سری مربوطه روی هر بازه‌ی $[a,+\infty)$ ، $a > 1$، همگرای یکنواخت است.

۲) $\displaystyle \xi^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{Ln}(n))^k}{n^s}$ روی $(1,+\infty)$

۳) $\displaystyle \xi(s) = s\int_1^{\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} dx$

۴) $\displaystyle \xi(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s-1}} dx$، و این انتگرال برای هر $s > 0$ همگراست.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۳ـ کدام گزینه درست است؟

۱) دنباله‌ی توابع $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ روی $[0,\infty)$ با ضابطه‌ی $f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}$ برای $\alpha\le 1$ همگرای یکنواخت است.

۲) سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(xLnx)^n$ روی $(0,1)$ همگرای یکنواخت است.

۳) دنباله‌ی توابع $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ و تابع f از $[a,b]$ به $\mathbb{R}$ داده شده‌اند و همگی این توابع مشتق‌پذیرند. اگر $f'_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f'$ آنگاه $-f(b)+f_n(b)+f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$

۴) تابع $f(x)=\sum\frac{1}{3^n}\sin(3^n x)$ همه جا پیوسته است. همچنین در نقطه‌ی $x=0$ مشتق‌پذیر است.

۱۴ـ توابع $f_n(x)=\begin{cases}0 & x<\frac{1}{n+1}\\ \sin^2\frac{\pi}{x} & \frac{1}{n+1}\le x\le\frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{n}<x\end{cases}$ **و** $g_n(x)=\begin{cases}0 & x<\frac{1}{n+1}\\ \cos^2\frac{\pi}{x} & \frac{1}{n+1}\le x\le\frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{n}<x\end{cases}$ **داده شده اند. در اینصورت:**

۱) هر دو دنباله‌ی (f_n) و (g_n) به طور یکنواخت به صفر میل می‌کنند. سری‌های $\sum f_n$ و $\sum g_n$ بـه طـور مطلـق همگراسـت امّـا همگـرای یکنواخت نیست.

۲) هر دو دنباله‌ی (f_n) و (g_n) به طور یکنواخت به صفر میل می‌کنند. سری $\sum f_n$ به‌طور مطلق همگراست ولـی همگرایـی یکنواخـت نیسـت. سری $\sum g_n$ همگرای مطلق و یکنواخت است.

۳) دنباله‌ی (f_n) صرفاً نقطه‌وار به تابعی چون f میل می‌کند، در حالیکه همگرایی (g_n) یکنواخت است. سری $\sum f_n$ مطلقاً همگـرا و همگرایـی یکنواخت است. سری $\sum g_n$ مطلقاً همگراست ولی همگرای یکنواخت نیست.

۴) هر دو دنباله‌ی (f_n) و (g_n) صرفاً نقطه‌وار به حدهایشان میل می‌کنند. ضمناً سری‌های $\sum f_n$ و $\sum g_n$ به طور مطلـق همگـرا هسـتند امّـا همگرای یکنواخت نیستند.

۱۵ـ $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ روی $[0,\infty)$؛ و $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ روی $\mathbb{R}$ با ضوابط: $f_n(x)=(1+x^n)^{\frac{1}{n}}$; $g_n(x)=\frac{1}{n}e^{-n^2x^2}$ داده شده‌اند. در اینصورت:

۱) (f'_n) به طور یکنواخت همگرا بوده و $\lim f'_n=(\lim f_n)'$؛ (g'_n) نیز به طور یکنواخت همگرا بوده و $\lim g'_n=(\lim g_n)'$؛

۲) هر f_n مشتق‌پذیر بوده و به تابعی که در یک نقطه مشتق‌ناپذیر است همگرایی یکنواخت می‌باشد. همگرایی (g'_n) نیز صرفاً نقطه‌ای است.

۳) همگرایی (f_n) صرفاً نقطه به نقطه است و تابع حدی آن مشتق‌پذیر است. همگرای (g'_n) یکنواخت است.

۴) همگرایی (f_n) صرفاً نقطه به نقطه بوده و $\lim f'_n=(\lim f_n)'$، و نیز $\lim g'_n=(\lim g_n)'$.

۱۶ـ کدام گزینه غلط است؟

۱) سری $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{Ln(n)}{n}\right)^x$ روی $(1,+\infty)$ همگراست.

۲) سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{Ln(n)}$ روی $(0,\frac{1}{e})$ همگراست.

۳) سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin^2(2\pi\sqrt{n^2+x^2})$ برای هر x واگراست.

۴) سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$ روی $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$ همگراست.

۱۷ـ کدام گزینه غلط است؟

۱) سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$ روی $(0,\infty)$ همگرای یکنواخت است.

۲) سری $\sum\limits_{n=2}^{\infty}Ln\left(1+\frac{x^2}{nLn^2(n)}\right)$ روی $(-a,a)$ ، $a>0$، همگرای یکنواخت است.

۳) سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^2e^{-n^2|x|}$ روی $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت است.

۴) سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{Ln(1+nx)}{nx^n}$ روی $[2,+\infty)$ همگرای یکنواخت است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۸ـ دنباله‌های (f_n) و (g_n) روی $[0,1]$ با ضوابط $f_n(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le \frac{1}{2n+1} \ \text{یا}\ \frac{1}{2n-1}\le x\le 1\\ \frac{1}{n} & x=\frac{1}{2n}\\ \text{خطی} & x\in[\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}]\ \text{یا}\ x\in[\frac{1}{2n},\frac{1}{2n-1}]\end{cases}$ **که منظور از «خطی» طوری است که نمودار f_n بر آن بازه‌ها پاره خط بوده و نمودار f_n پیوسته شود. نیز** $g_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n} & \frac{1}{2^{n+1}}<x\le\frac{1}{2^n}\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$**. در این صورت برای همگرایی $\sum f_n$ و $\sum g_n$ چه می‌توان گفت؟**

۱) بنابر آزمون M ـ ویراشتراس $\sum f_n$ و $\sum g_n$ به طور یکنواخت همگرا هستند.

۲) بنابر آزمون M ـ ویراشتراس $\sum f_n$ پیوسته است. ضمناً برای $\sum g_n$ آزمون M ـ ویراشتراس را نمی‌توان بکار برد.

۳) آزمون M ـ ویراشتراس را نمی‌توان برای هیچکدام به کار برد ولی همگرایی هر دوی $\sum f_n$ و $\sum g_n$ یکنواخت است. و نیز $\sum f_n$ پیوسته است.

۴) آزمون M ـ ویراشتراس را نمی‌توان به کار برد و $\sum f_n$ و $\sum g_n$ هر دو پیوسته خواهند شد.

۱۹ـ کدام گزینه غلط است؟

۱) مجموع $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\sin(nx)}{n!}$ روی هر بازه‌ی کراندار پیوسته است.

۲) مجموع $\sum_{n=0}^{\infty}|x|^{n^2}$ روی $[-1,1]$ پیوسته است.

۳) مجموع $\sum_{n=1}^{\infty}|x|^{\sqrt{n}}$ روی $(-1,1)$ پیوسته است.

۴) مجموع $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2x)}{n^2}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۲۰ـ کدام گزینه درست است؟

۱) اگر هر f_n روی A پیوسته بوده و $\sum f_n$ روی A به طور یکنواخت همگرا باشد آنگاه $\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x_0)$

۲) اگر $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum a_n$.

۳) اگر هر f_n روی $[0,1]$ پیوسته بوده و $\sum f_n$ روی $(0,1)$ به طور یکنواخت همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(1)$ همگرا است.

۴) هر سه گزینه درست اند.

۲۱ـ فرض کنید $f\in C^{\infty}([0,1])$ و $f\not\equiv 0$ ؛ $f^{(n)}(0)=0$ $\forall n\in N\cup\{0\}$ ؛ و دنباله‌ی (a_n) طوری است که $\sum_{n=1}^{\infty}a_nf^{(n)}(x)$ روی $[0,1]$ به طور یکنواخت پیوسته است در اینصورت مقدار $\lim_{n\to\infty}n!a_n$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) 0 ۳) $-\infty$ ۴) معلوم نیست.

۲۲ـ دنباله‌ی $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ روی $\mathbb{R}$ چنین تعریف شده است که $f_n(x)$ بیانگر فاصله‌ی x تا نزدیکترین عدد گویا با مخرج n است. در اینصورت:

۱) $\sum f_n$ روی $\mathbb{Z}$ همگراست. ۲) $\sum f_n$ روی $\mathbb{N}$ همگراست. ۳) $\sum f_n$ روی $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ واگراست. ۴) $\sum f_n$ روی $\mathbb{Q}$ واگراست.

(تذکر: مسأله بالا سنگین است و فقط برای اطلاع دانشجو آمده است.)

۲۳ـ تابع پیوسته $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ داده شده است، قرار دهید $f_n(x)=f(nx)$ و فرض کنید خانواده‌ی $\{f_n\}$ روی $[0,1]$ همپیوسته باشد. در اینصورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) f چند جمله‌ای غیرثابت است.

۲) f تابع ثابتی است.

۳) دنباله‌ی (f_n) به طور یکنواخت همگرا است.

۴) دنباله‌ی (f_n) دارای زیر دنباله‌ی همگرا است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۴ـ کدام گزینه درست است؟

۱) سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ روی $\mathbb{R}$ همگرای نقطه‌وار است، امّا مجموع آن پیوسته است.

۲) همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}x\frac{\sin(n^2x)}{n^2}$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت است.

۳) همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}x\frac{(-1)^{[\sqrt{x}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$ روی $[0,\infty)$ صرفاً به طور نقطه‌وار است.

۴) $\lim_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}=\frac{\pi^2}{16}$

۲۵ـ تابع پیوسته‌ی $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ طوری است که برای آن دنباله‌ی $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ با ضابطه $f_n(x)=f(x^n)$ روی مجموعه‌ی $[0,2]$ هم‌پیوسته است در اینصورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) (f_n) دنباله‌ای از توابع پیوسته است.

۲) (f_n) دنباله‌ای ثابت است.

۳) (f_n) می‌تواند دنباله‌ای ثابت نباشد.

۴) (f_n) بر $[0,\infty)$ به طور یکنواخت همگراست.

۲۶ـ تابع پیوسته‌ی $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ داده شده است در اینصورت:

۱) f حد یکنواخت چند جمله‌ای‌ها روی $(0,1)$ است.

۲) f حد یکنواخت چند جمله‌ای‌ها روی $(0,1)$ است اگر و تنها اگر تابع پیوسته F روی $[0,1]$ چنان موجود باشد که $\forall x\in(0,1)\quad F(x)=f(x)$

۳) f حد یکنواخت چند جمله‌ای‌ها روی $(0,1)$ است اگر و تنها اگر تابع کرانداری مانند F روی $[0,1]$ باشد که $F(x)=f(x)\quad \forall x\in(0,1)$

۴) f حد یکنواخت توابعی به صورت $x\to a_0+a_1\sin x+a_2\sin 2x+\dots$ است.

۲۷ـ کدام گزینه درست است؟

۱) اگر f روی $[0,1]$ پیوسته باشد و $\int_0^1 f(\sqrt[2n+1]{x})dx=0$ آنگاه $\forall x\in[0,1]\ \ f(x)=0$

۲) اگر f روی $[-1,1]$ پیوسته باشد و $\int_0^1 f(\sqrt[2n+1]{x})dx=0$ آنگاه $\forall x\in[0,1]\ \ f(x)=0$

۳) اگر f روی $[1,\infty)$ پیوسته باشد و $\int_1^{\infty}x^nf(x)dx=0$ آنگاه $\forall x\in[1,+\infty)\ \ f(x)=0$

۴) هر سه گزینه صحیح‌اند.

۲۸ـ کدام گزینه درست است؟

۱) اگر f و g توابعی پیوسته روی $[0,1]$ باشند به طوری که برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\int_0^1 x^nf(x)dx=\int_0^1 x^ng(x)dx$ آنگاه برای هر $x\in[0,1]$ ، $f(x)=g(x)$

۲) اگر $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ پیوسته و کراندار باشد و برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\int_0^{\infty}f(x)e^{-nx}dx=0$ آنگاه f روی دامنه‌اش صفر است.

۳) اگر $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ پیوسته و کراندار باشد و برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\int_1^{\infty}x^{-n}f(x)dx=0$ آنگاه f روی دامنه‌اش صفر است.

۴) هر سه گزینه صحیح‌اند.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۹ـ X فضای متریک (یا توپولوژیک) هم‌بند و A یک زیر مجموعه‌ی همپیوسته از $C(X,\mathbb{R})$ است. در اینصورت:

۱) برای یک عضو $x_\circ \in X$ ، $\{f(x_\circ): f \in A\}$ کراندار است.

۲) برای هر $x \in X$ ، $\{f(x): f \in A\}$ کراندار است.

۳) اگر برای عضوی چون $x_\circ \in X$ ، $\{f(x_\circ): f \in A\}$ کراندار باشد آنگاه برای هر $x \in X$ ، $\{f(x): f \in A\}$ کراندار است.

۴) اگر برای عضوی چون $x_\circ \in X$ ، $\{f(x_\circ): f \in A\}$ کراندار باشد آنگاه ممکن است A شامل زیر دنباله‌ای به طور یکنواخت همگرا نباشد.

۳۰ـ کدام گزینه درست است؟

۱) فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یکنواست اگر زیر مجموعه‌ی چگالِ A از $\mathbb{R}$ چنان موجود باشد که $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ برای هر $x \in A$ موجود باشد آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ روی $\mathbb{R}\setminus B$ موجود است که در آن B یک زیر مجموعه‌ی شمارای $\mathbb{R}$ است.

۲) اگر f_n دنباله‌ای نزولی از توابع نامنفی روی مجموعه‌ی E بوده و $f_n \xrightarrow{p.w} \circ$ آنگاه $\sum f_n$ همگرای یکنواخت است اگر و تنها اگر $\sum n(f_n - f_{n+1})$ همگرای یکنواخت باشد.

۳) مجموع سری $\sum \frac{\lfloor nx \rfloor}{n^3}$ را با $S(x)$ نشان دهید. اگر عدد گویای $\frac{p}{q}$ به فرمی باشد که $p \in \mathbb{Z}$ ، $q \in \mathbb{N}$ ، $(p,q)=1$ آنگاه

$$S(\frac{p}{q}^+) - S(\frac{p}{q}^-) = \frac{1}{q^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$$

۴) هر سه گزینه صحیح‌اند.

۳۱ـ فرض کنید f پیوسته باشد در اینصورت $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_\circ^1 x^{n-1} f(x)dx$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $f(1)$ ۳) $\circ$ ۴) موجود نیست.

۳۲ـ فرض کنید f پیوسته باشد، در اینصورت مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\circ^1 x^n f(x)dx$ کدام است؟

۱) $f(1)$ ۲) $\circ$ ۳) $f(\circ)$ ۴) هیچکدام

۳۳ـ مقدار $A_1 = \lim\limits_{n\to\infty}\int_\circ^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x}dx$ و $A_2 = \lim\limits_{n\to\infty}\int_\circ^1 x^n f(x)dx$ کدامند؟ (f پیوسته است.)

۱) $A_2 = A_1 = \circ$ ۲) $A_2 = f(\circ)$ ، $A_1 = 1$ ۳) $A_2 = f(\circ)$ ، $A_1 = \frac{1}{4}$ ۴) $A_2 = f(1)$ ، $A_1 = \frac{1}{2}$

۳۴ـ فرض کنید $f_n \in C^2[-1,1]$ و $f'_n(\circ) = 1$ و $\|f''_n\|_{sup} < \infty$. در اینصورت در مورد سری $\sum a_n$ که $a_n = \frac{1}{n}\int_{-1}^{1} f_n(t)\cos(nt)dt$ چه می‌توان گفت؟

۱) سری همگراست.   ۲) سری واگراست.   ۳) سری مطلقاً همگراست.   ۴) هیچکدام

۳۵ـ عملگر $T : C[a,b] \to C[a,b]$ با ضابطه‌ی $f \to Tf$ داده شده است که $(Tf)(t) = \int_a^t f(s)ds$ در اینصورت:

۱) اگر $f_n \xrightarrow{f.w} f$ آنگاه $Tf_n \rightrightarrows Tf$.

۲) اگر $f_n \xrightarrow{f.w} f$ و دنباله‌ی (f_n) همپیوسته باشد آنگاه برای هر زیر دنباله‌ی (f_{n_k}) از (f_n) داریم که $Tf_{n_k} \not\rightrightarrows Tf$

۳) اگر روی فضای برداری $C([a,b])$ نرم $\|.\|_{sup}$ را در نظر بگیریم آنگاه T پیوسته است.

۴) هیچکدام

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

فصل هشتم

«چند تابع خاص»

تست‌های تألیفی فصل هشتم

مثال۱: فرض کنید: $b_{ij} \in \mathbb{R}$, $a_{ij} = \begin{cases} \circ & , \; i<j \\ -۱ & , \; i=j \\ ۲^{j-i} & , \; i>j \end{cases}$ $\forall (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ کدام گزینه **غلط** است؟

۱) $\sum_j \sum_i a_{ij} = \circ$

۲) $\sum_i \sum_j a_{ij} = -۲$

۳) اگر برای هر j و i $b_{ij} \geq \circ$ آنگاه $\sum_i \sum_j b_{ij} = \sum_j \sum_i b_{ij}$

۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۴» برهان گزینه‌ی ۱: $j \in N$ را ثابت گرفته و مجموع‌های جزئی $\sum_{i=۱}^{\infty} a_{ij}$ را حساب می‌کنیم، یعنی $\sum_{i=۱}^{M} a_{ij}$ را درنظر می‌گیریم.

$$S_j(M) = \sum_{i=۱}^{M} a_{ij} = (\sum_{i=۱}^{j-۱} a_{ij}) + a_{jj} + (\sum_{i=j+۱}^{M} a_{ij}) = (\circ) + (-۱) + (\sum_{i=j+۱}^{M} ۲^{j-i}) = -۱ + (۱ - \frac{۱}{۲^{M-j}})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=۱}^{\infty} a_{ij} = \lim_{M\to\infty} \sum_{i=۱}^{M} a_{ij} = \lim_{M\to\infty} -\frac{۱}{۲^{M-j}} = \circ \Rightarrow \sum_{j=۱}^{\infty}(\sum_{i=۱}^{\infty} a_{ij}) = \sum_{j=۱}^{\infty}(\circ) = \circ$$

اکنون $i \in \mathbb{N}$ را ثابت گرفته و مجموع‌های جزئی سری $\sum_{j=۱}^{\infty} a_{ij}$ را حساب می‌کنیم. یعنی $\sum_{j=۱}^{N} a_{ij}$ را در نظر می‌گیریم.

$$S_i(N) = \sum_{j=۱}^{N} a_{ij} = (\sum_{j=۱}^{i-۱} a_{ij}) + (a_{ii}) + (\sum_{j=i+۱}^{N} a_{ij}) = (\sum_{j=۱}^{i-۱} ۲^{j-i}) + (-۱) + (\circ) = (۱ - ۲^{-i+۱}) - ۱ = -۲ \times ۲^{-i}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=۱}^{\infty} a_{ij} = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=۱}^{N} a_{ij} = \lim_{N\to\infty} -۲\times۲^{-i} = -۲\times۲^{-i} \Rightarrow \sum_{i=۱}^{\infty}(\sum_{j=۱}^{\infty} a_{ij}) = -۲\sum_{i=۱}^{\infty} ۲^{-i} = -۲\times۱ = -۲$$

برای گزینه‌ی (۳) کافی است قضیه‌ی تعویض را چندین دفعه به‌کار ببریم. اولاً اگر $\sum_{j=۱}^{\infty} b_{ij}$ همگرا باشد چون جملات سری نامنفی است پس $b_{ij} = |b_{ij}|$ و لذا در این حالت تساوی از قضیه‌ی تعویض بدست می‌آید. ثانیاً اگر $\sum_{j=۱}^{\infty} b_{ij}$ واگرا باشد پس باید $\sum_{j=۱}^{\infty} b_{ij} = \infty$ و لذا $\sum_i \sum_j b_{ij} = \infty$ امّا اگر $\sum_i b_{ij}$ بخواهد همگرا باشد و $\sum_i \sum_j b_{ij}$ نیز متناهی شود آنگاه بنابر قضیه‌ی تعویض (چون $b_{ij} = |b_{ij}|$) بایستی $\infty = \sum_i \sum_j b_{ij} = \sum_j \sum_i b_{ij} < \infty$ که تناقض است لذا در این حالت هم باید $\sum_i \sum_j b_{ij} = \sum_j \sum_i b_{ij} = \infty$.

پس می‌بینید که در قضیه‌ی تعویض همگرایی $C_i = \sum_{j=۱}^{\infty} |a_{ij}|$ واقعاً موردنیاز است و نامنفی بودن جملات برای تساوی سری دوگانه کافی است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

آزمون فصل هشتم

۱ـ شعاع همگرایی سری $\sum \frac{1}{n^{Ln(n)}} x^n$ را R_1 و شعاع سری $\sum \frac{n^n}{n!} x^n$ را R_2 بنامید. در اینصورت:

۱) $R_2 = e \ , \ R_1 = 1$
۲) $R_2 = \frac{1}{e} \ , \ R_1 = 1$
۳) $R_2 = 1 \ , \ R_1 = \frac{1}{e}$
۴) $R_2 = 1 \ , \ R_1 = e$

۲ـ کدام گزینه غلط است؟

۱) اگر $f \in C^3([-1,1])$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}[n(f(\frac{1}{n}) - f(-\frac{1}{n})) - 2f'(0)]$ واگراست.

۲) سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!(3n)!}{n!(4n)!}$ همگراست.

۳) سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ واگراست.

۴) اگر $a_1, a_2, \ldots$ دنباله‌ای از اعداد مثبت بوده و $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ همگراست.

۳ـ برای حداقل کدام xها و a ها سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^x}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n})^a$ همگرا می‌شوند؟

۱) $a < \frac{1}{3} \ , \ x > \frac{1}{2}$
۲) $a \geq \frac{1}{3} \ , \ x \geq \frac{1}{2}$
۳) $a > \frac{1}{3} \ , \ x > \frac{1}{2}$
۴) $a > 2 \ , \ x > 2$

۴ـ تعریف کنید $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ و $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n^2 t)}{e^n}$. در این صورت تساوی‌های $f(x) = \sum \frac{f^n(0)}{n!} x^n$ و $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n$ برای کدام x ها و t ها اتفاق می‌افتد.

۱) $x = 0$ ، هر t
۲) $t = x = 0$
۳) همه‌ی xها و همه‌ی tها
۴) هر x؛ $t = 0$

۵ـ فرض کنید b_n و a_n دنباله‌هایی مثبت هستند و سری‌های توانی $g(x) = \sum b_n x^n$ و $f(x) = \sum a_n x^n$ هر دو دارای شعاع همگرایی برابر ۱ هستند و نیز $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$. در این صورت اگر $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$ ، $A \in [0, \infty]$ آنگاه $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

۱) $2A$
۲) برای $A \neq 0$ ، $\frac{1}{A}$ و برای $A = 0$ برابر صفر می‌شود.
۳) A^2
۴) A

۶ـ فرض کنید $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ در اینصورت:

۱) $g''(x) + 2g'(x) + g(x) = e^x \ , \ f'(x) = 1 + xf(x)$
۲) $g''(x) + 2g'(x) + g(x) = e^x \ , \ f(x) = 1 + xf'(x)$
۳) $g''(x) + g'(x) + g(x) = e^x \ , \ f'(x) = 1 + xf(x)$
۴) $g''(x) + xg'(x) + x^2 g(x) = e^x \ , \ f'(x) = 1 + xf(x)$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۷ـ در مورد سری‌های مثلثاتی داده شده چه می‌توان گفت؟

i- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\ ,\ 0<\alpha\le\frac{1}{2}$ ، ii- $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{Lnn}$

۱) هر دو سری مثلثاتی همگرا هستند امّا سری فوریه نیستند.

۲) (i) سری مثلثاتی همگراست امّا سری فوریه نیست. در حالیکه (ii) سری مثلثاتی همگرا و سری فوریه است.

۳) (i) سری مثلثاتی همگرا و سری فوریه است. در حالیکه (ii) سری مثلثاتی همگراست امّا فوریه نیست.

۴) هر دو سری مثلثاتی همگرا و سری فوریه‌اند.

۸ـ سری فوریه‌ی تابع $f(x)=a^2-x^2$ روی $[-a,a]$ کدام است؟

۱) $4a^2\{\frac{1}{6}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{a}\}$

۲) $4a^2\{\frac{1}{3}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{a}\}$

۳) $4a^2\{\frac{1}{12}-\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{a}\}$

۴) $4a^2\{\frac{1}{6}-\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{a}\}$

۹ـ سری فوریه‌ی $\sin x$ روی $[0,\pi]$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{4n^2-1}$

۲) $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$

۳) $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{16(n+1)^2-1}$

۴) $-\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{16(n+1)^2-1}$

۱۰ـ برای $0<x<\pi$، بسط فوریه‌ی $\cos x$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{2n^2-1}$

۲) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos(2nx)}{4n^2-1}$

۳) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin(2nx)}{4n^2-1}$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{2n^2-1}$

۱۱ـ فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}$ برای $0<x<\pi$، اکنون قرار دهید $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$ و $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}$، کدام گزینه درست است؟

۱) $g(x)=\frac{x^3}{12}-\frac{\pi x^2}{6}+\frac{\pi^2 x}{4}\ ;\ f(x)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi x}{2}+\frac{x^2}{4}$

۲) $g(x)=\frac{x^3}{12}+\frac{\pi x^2}{6}+\frac{\pi^2 x}{4}\ ;\ f(x)=\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi x}{2}+\frac{x^2}{4}$

۳) $g(x)=\frac{x^3}{12}-\frac{\pi x^2}{4}+\frac{\pi^2 x}{6}\ ;\ f(x)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi x}{2}+\frac{x^2}{4}$

۴) $g(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{\pi x^2}{4}+\frac{\pi^2 x}{12}\ ;\ f(x)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi x}{4}+\frac{x^2}{2}$

۱۲ـ فرض کنید $a\ne 0$ در اینصورت بسط فوریه‌ی e^{ax} کدام است؟

۱) $\frac{e^{2a\pi}-1}{\pi}(\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nx-n\sin nx}{a^2+n^2})\quad ,\quad 0<x<2\pi$

۲) $\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}+(\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n e^{a\pi}-1)\frac{a\cos nx}{a^2+n^2})\quad ,\quad 0<x<\pi$

۳) $(\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(1-(-1)^n e^{a\pi})\frac{n\sin(nx)}{a^2+n^2})\quad ,\quad 0<x<\pi$

۴) هر سه مورد صحیح است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۳ـ فرض کنید $f \in R([-\pi,\pi])$ ، a_n و b_n ضرایب فوریه‌ی f باشند در اینصورت:

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)f(x)dx$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|+|b_n|}{n}$ همگرا است.

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)f(x)dx$ ، $\sum\frac{|a_n|+|b_n|}{n}$ واگرا است.

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)^2f(x)dx$ ، $\sum\frac{|a_n|+|b_n|}{n}$ همگرا است.

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)f(x)dx$ ، $\sum\frac{|a_n|+|b_n|}{n}$ همگرا است.

۱۴ـ کدام گزینه در مورد p و q درست است؟

p) سری فوریه‌ی یک تابع پیوسته از دوره‌ی تناوب 2π که برای آن ضرایب فوریه نامنفی است به طور یکنواخت همگراست.

q) اگر $f \in R([-\pi,\pi])$ ، f پیوسته و $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{a_k^2+b_k^2}=0$ آنگاه سری فوریه‌ی f به طور یکنواخت به f میل می‌کند.

۱) p درست است ولی q غلط است.　　۲) p و q هر دو درست اند.

۳) p نادرست است و q درست است.　　۴) p و q هر دو نادرست‌اند.

۱۵ـ کدام گزینه در مورد گزاره‌های p و q صحیح است؟

p) (b_n) یک دنباله‌ی نزولی از اعداد مثبت و همگرا به صفر است. در اینصورت: $\sum b_n \sin(nx)$ به طور یکنواخت روی $[0,2\pi]$ همگراست اگر و تنها اگر $\lim_{n\to\infty} nb_n=0$.

q) (b_n) مثل گزاره‌ی قبل در اینصورت: $\sum b_n \sin(nx)$ سری فوریه‌ی یک تابع پیوسته است اگر و تنها اگر $\lim_{n\to\infty} nb_n=0$.

۱) p درست است و q غلط است.　　۲) p غلط است و q درست است.　　۳) p و q هر دو درست اند.　　۴) p و q هر دو غلط‌اند.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه آزمون‌ها

فصل اول: دستگاه اعداد حقیقی و مختلط

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۳»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۳»	۱۸ـ گزینه «۲»	۱۹ـ گزینه «۳»	۲۰ـ گزینه «۱»

فصل دوم: فضاهای متریک و توپولوژیک

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۳»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۴»
۱۶ـ گزینه «۳»	۱۷ـ گزینه «۳»	۱۸ـ گزینه «۲»	۱۹ـ گزینه «۴»	۲۰ـ گزینه «۳»

فصل سوم: دنباله و سری

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۴»	۱۲ـ گزینه «۲»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۳»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۲»	۱۸ـ گزینه «۳»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۴»

فصل چهارم: حد و پیوستگی

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۴»	۱۲ـ گزینه «۲»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۴»
۱۶ـ گزینه «۱»	۱۷ـ گزینه «۲»	۱۸ـ گزینه «۱»	۱۹ـ گزینه «۳»	۲۰ـ گزینه «۳»

فصل پنجم: مشتق‌گیری

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۲»	۱۳ـ گزینه «۴»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۳»
۱۶ـ گزینه «۱»	۱۷ـ گزینه «۲»	۱۸ـ گزینه «۲»	۱۹ـ گزینه «۳»	۲۰ـ گزینه «۱»
۲۱ـ گزینه «۳»	۲۲ـ گزینه «۱»	۲۳ـ گزینه «۴»	۲۴ـ گزینه «۲»	۲۵ـ گزینه «۲»
۲۶ـ گزینه «۱»	۲۷ـ گزینه «۳»	۲۸ـ گزینه «۴»	۲۹ـ گزینه «۱»	۳۰ـ گزینه «۳»

فصل ششم: انتگرال ریمان ـ اشتیل‌یس

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۴»	۱۲ـ گزینه «۳»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۱»
۱۶ـ گزینه «۳»	۱۷ـ گزینه «۲»	۱۸ـ گزینه «۳»	۱۹ـ گزینه «۴»	۲۰ـ گزینه «۲»
۲۱ـ گزینه «۳»	۲۲ـ گزینه «۳»	۲۳ـ گزینه «۴»	۲۴ـ گزینه «۲»	۲۵ـ گزینه «۴»
۲۶ـ گزینه «۲»	۲۷ـ گزینه «۱»	۲۸ـ گزینه «۲»	۲۹ـ گزینه «۴»	۳۰ـ گزینه «۲»
۳۱ـ گزینه «۲»	۳۲ـ گزینه «۴»	۳۳ـ گزینه «۱»	۳۴ـ گزینه «۱»	۳۵ـ گزینه «۲»

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

فصل هفتم: دنباله‌ها و سری‌های توابع

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۳»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۲»
۱۶ـ گزینه «۳»	۱۷ـ گزینه «۱»	۱۸ـ گزینه «۳»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۴»
۲۱ـ گزینه «۲»	۲۲ـ گزینه «۳»	۲۳ـ گزینه «۱»	۲۴ـ گزینه «۱»	۲۵ـ گزینه «۳»
۲۶ـ گزینه «۲»	۲۷ـ گزینه «۱»	۲۸ـ گزینه «۴»	۲۹ـ گزینه «۳»	۳۰ـ گزینه «۴»
۳۱ـ گزینه «۲»	۳۲ـ گزینه «۳»	۳۳ـ گزینه «۴»	۳۴ـ گزینه «۳»	۳۵ـ گزینه «۳»

فصل هشتم: سری‌های توانی و فوریه

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۳»

www.modaresanesharif.ac.ir