فصل اول

«نظریه نسبیت خاص»

مقدمه

اگر به سال‌های قبل از ۱۸۸۰ میلادی بازگردیم و باور مردم آن زمان را از فیزیک بنگریم، یک نکته از دید همگان کاملاً حل شده بود و آن پیش‌بینی آیندهٔ یک رویداد فیزیکی (طبیعی) با استفاده از قوانین نیوتونی بود، بطوری که مردم این باور را داشتند که با دانستن معادلات حرکت یک جسم می‌توان از گذشته و آیندهٔ آن به طور دقیق با خبر شد.

امّا در همین سال‌ها بود که ایدهٔ نیوتونی راجع به جداپذیری فضا و زمان و مفهوم مطلق بودن زمان مورد تردید قرار گرفت. هرچند قبل از این هم گاهی موضوعات اساسی نیوتونی مورد انتقاد قرار می‌گرفتند (ارنست ماخ فیزیکدان آلمانی، اولین کسی بود که تفکر نیوتنی را به چالش گرفت ۱۸۸۳م.) ولی به دلیل عدم شناخت کافی از پیرامون و اعتقاد به سنت افلاطونی، بشر قادر به تغییر دیدگاه خود نبود تا اینکه برخی آزمایش‌ها توانستند به صورت کاملاً تجربی پایه‌های فیزیک نیوتونی را بر هم زنند.

طبیعتاً مرموزترین و حتی شگفت‌انگیزترین موضوع طبیعت که همان نور است، قادر به ایجاد چنین انقلابی شد، به طوری که شکست نهایی سیستم نیوتونی (به عنوان توصیف‌کنندهٔ نهایی حرکت جسم) بعد از چند آزمایش قاطع روز به روز بر همگان پدیدار می‌شد. شاید اولین آزمایش قاطع را بتوان به نام مایکلسون و مورلی ثبت کرد که در سال‌های ۱۸۸۱ تا ۱۸۸۷ به اوج خود رسید. نتیجه این آزمایش‌ها حاکی از آن بود که سرعت نور از هرگونه حرکت یکنواخت نسبی بین منبع و ناظر مستقل است. به طوری که این واقعیت به همراه متناهی بودن سرعت نور، تجدید نظر بنیادی را در ساختار دینامیک طلب می‌کرد.

این تجدید نظر بنیادی در سال‌های ۱۹۰۴ تا ۱۹۰۵ توسط هانری پوآنکاره، هندریک آنتون لورنتس، و آلبرت اینشتین بیان شدند؛ که در نهایت موفق به ارائه سازگاری واقعیت‌های تجربی با آنچه در مبحث تئوری بود، شدند. براین اساس نظریه نسبیت را فرمول‌بندی کردند و مبنای این فرمول‌بندی را بر دو اصل اساسی یا اصول موضوع نسبیت خاص قرار دادند.

سینماتیک نسبیتی

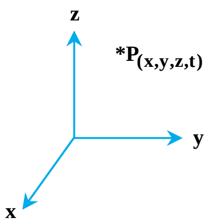
اصول موضوع نظریه نسبیت خاص

گفتیم که اینشتین به عنوان اصلی‌ترین نظریه پرداز نسبیت، دو اصل اساسی را شالودهٔ تمام کارهای خود قرارداد که در اینجا با بیان این دو اصل موضوع و با پذیرفتن آن‌ها، پله به پله دینامیک و سینماتیک نسبیتی را استخراج می‌کنیم که تمام نظریه نسبیت خاص با درک این دو اصل کاملاً جنبهٔ شهودی به خود می‌گیرند و به راحتی خواهیم دید که دیدگاه سنّتی چقدر با واقعیت مغایر بوده که متأسفانه بیش از هزاران سال بشر از بیان آن عاجز بوده است:

اصل اوّل: تمام قوانین رویدادهای فیزیکی در تمام چارچوب‌های مرجع لخت یکسان‌اند یا اصل بقای اندازه حرکت در تمام دستگاه‌های مختصات برقرار است.

اصل دوم: سرعت نور در فضای آزاد مستقل از هر نوع حرکت نسبی منبع و ناظر بوده و یک ثابت جهانی است یعنی سرعت نور برای تمام دستگاه‌های مختصات یکسان است.

تعریف رویداد فیزیکی: بعد از اینکه پذیرفتیم زمان، مطلق نیست، مفهوم **رویداد** را علاوه بر مختصات مکانی باید با مختصه زمانی نیز سنجید به طوری که هر رویدادی در فیزیک با چهار مؤلفهٔ طول، عرض، ارتفاع و زمان بیان می‌شود. پس از این به بعد هر رویداد فیزیکی با چهار پارامتر (x,y,z,t) بیان و توصیف خواهد شد به بیان ساده‌تر حادثه‌ای که در یک زمان و در یک مکان مشخص اتفاق افتاده است **رویداد** نامیده می‌شود.



به همین دلیل (اضافه‌شدن بعد چهارم به رویدادها) است که نظریه نسبیت، پدیده‌های بسیار متنوعی را توصیف می‌کند که در سرعت‌های زیاد (در حد سرعت نور) تحقق پیدا می‌کنند که تعبیر و تفسیر آن‌ها در طرح نیوتنی ناممکن است. به عنوان نمونه، رویداد P در شکل روبه‌رو با چهار مختصهٔ x و y و z و t بیان شده است که سه مختصهٔ اول، بیانگر مکان رویداد و مختصهٔ چهارم، زمان آن را نشان می‌دهد. در این شکل هر چند فقط سه مؤلفهٔ مکان مشخص شده است ولی در ادامه بحث و معرفی مفهوم فضا ـ زمان، بُعد چهارم هم نمایش داده می‌شود.

اصل موضوع ۱ که اینشتین آن را **اصل نسبیت** نامید، اصل اساسی نظریه نسبیت به شمار می‌رود. اگر به پیروی از اینشتین بپذیریم که معادلات ماکسول قوانین بنیادی فیزیک را تشکیل می‌دهند، آنگاه اصل موضوع ۲ یعنی قانون انتشار نور با سرعت محدود c، از اصل موضوع ۱ نتیجه می‌شود.

حال که ۲ اصل موضوع را پذیرفتیم (هرچند از نظر شهودی برای اولین بار مشکل به نظر آیند) به بررسی پیامدهای ناشی از آن در حوزهٔ مکانیک می‌پردازیم و اصولاً تمام بحثمان حول چارچوب‌هایی می‌چرخد که حرکتشان یکنواخت است یعنی چارچوب‌های مرجع لخت.

بررسی چارچوب‌های مرجع نالخت یعنی چارچوب‌هایی که نسبت به یک مرجع دارای شتاب هستند در حوزهٔ نظریه نسبیت عام بوده و مربوط به بحث نسبیت خاص نمی‌شود.

در ادامه به تفاوت دیدگاه‌های نیوتنی و نسبیتی از نظر حرکت نسبی ۲ جسم تحت عنوان ناوردایی گالیله و تبدیلات لورنتس می‌پردازیم.

ناوردایی گالیله یا تغییر ناپذیری تبدیلات گالیله

در مکانیک نیوتنی، مفاهیم فضا و زمان به طور کامل از یکدیگر قابل تفکیک‌اند، علاوه بر آن، زمان نیز کمیتی مطلق در نظر گرفته می‌شود که تحت هیچ شرایطی تغییر نمی‌کند یعنی زمان به جلو پیش می‌رود و نمی‌توانیم در پیشرفت آن تداخلی ایجاد کنیم. به عبارتی زمان کمیتی کاملاً مطلق است که می‌توان آن را مستقل از چارچوب مرجع به دقت تعریف کرد.

با این فرض‌ها به بیان ناوردایی قوانین مکانیک تحت تبدیل مختصات مکانی به شکل زیر می‌پردازیم:

دو چارچوب مرجع لخت S و S' را در نظر بگیرید که در امتداد محورهای x_1 و x'_1 با سرعت نسبی و یکنواخت v حرکت می‌کنند (شکل ۱) این موضوع از روی شکل کاملاً قابل درک است که در لحظه $t_0=0$ دو دستگاه ناظر O و O' برهم منطبق بودند. در همان لحظه دستگاه S' نسبت به S با سرعت ثابت v در امتداد محور xx' شروع به حرکت کرد یعنی اگر از S' درباره S بپرسیم می‌گوید من ایستاده‌ام و S با سرعت $-v$ دور می‌شود و اگر از S درباره S' بپرسیم می‌گوید من ایستاده‌ام و S' با سرعت v دور می‌شود. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = x_1 - vt \\ x'_2 = x_2 \quad \text{یا} \quad y = y' \\ x'_3 = x_3 \quad \text{یا} \quad z = z' \end{array}\right\} \text{(مختصات مکان)}$$

و همانطور که از زمان و مطلق بودن آن گفتیم خواهیم داشت:

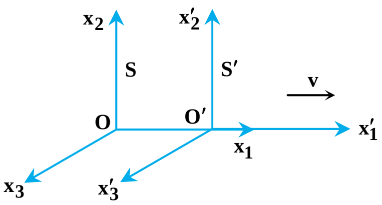
$$t' = t$$

این معادلات بیانگر تبدیلات گالیله هستند که در دستگاه ساکن O و متحرک O' بیان شده‌اند.

پارامتر جزئی طول نیز در هر دو دستگاه یکسان و به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود.

$$ds^2 = \sum_j dx_j^2 = \sum_j dx'^2_j = ds'^2$$

که پارامتری ناوردا است.



شکل ۱

این واقعیت که قوانین نیوتن نسبت به تبدیلات گالیله ناوردایند به اصل نسبیت نیوتنی یا ناوردایی گالیله مشهور است به طوری که معادلات حرکت در هر دو دستگاه یکسان است.

رابطه نیرو از دید ناظرهای S و S' به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود: $F_j = m\ddot{x}_j = m\ddot{x}'_j = F'_j$

حال با توجه به تبدیلات گالیله داریم: $x' = x - vt$

چون $t = t'$ است $\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} \dfrac{dx'}{dt} = \dfrac{dx}{dt} - v \xrightarrow{\text{یعنی}} v_{x'} = v_x - v$

با گرفتن مشتق دوباره از طرفین رابطه داریم:

$$\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} \frac{dv_{x'}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} - 0 \rightarrow a_{x'} = a_x$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را در مقدار ثابت m ضرب می‌کنیم}} ma_{x'} = ma_x \rightarrow F_{x'} = F_x$$

همچنین برای مؤلفه دوم داریم:

$$X'_2 = X_2 \quad \text{یا} \quad ; \; Y' = Y \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم } t' = t \text{ می‌دانیم}} \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} \;\text{یا}\; v'_y = v_y \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} \frac{dv'_y}{dt} = \frac{dv_y}{dt}$$

$$a_{y'} = a_y \xrightarrow{\text{با ضرب m در طرفین داریم}} ma_{y'} = ma_y \;\text{یا}\; F'_{y'} = F_y$$

برای مختصات سوم یعنی $x_3 = z$; $x'_3 = z'$ روابط صادق هستند یعنی $F'_z = F_z$ و بطور کلی می‌توانیم رابطه نیرو را بنویسیم.

در این صورت شکل قانون حرکت نسبت به تبدیل گالیله، ناوردا باقی می‌ماند.

به روشنی قابل درک است که تبدیلات گالیله با اصل موضوع دوّم نسبیت ناسازگار است.

به عنوان مثال اگر در دستگاه O' یک تپ نوری انتشار یابد، چون سرعت دستگاه v می‌باشد بنابراین ناظری که در دستگاه O قرار دارد طبق تبدیلات گالیله سرعت آنرا $\dot{x}'_1 = \dot{x}_1 - v$ اندازه می‌گیرد که اگر قرار دهیم $\dot{x}'_1 = c$ خواهیم داشت: $\dot{x}_1 = (c+v) > c$

که آشکارا با اصل موضوع ۲ (یعنی سرعت نور، حداکثر سرعت ممکن) در تناقض است. پس برای رهایی از چنین تناقضی باید تبدیلات دیگری استفاده شود.

تبدیلات لورنتس

هنگامی که دستگاه‌های S و S' منطبق باشند اگر یک تپ نوری از یک چراغ چشمک زن از مبدأ مشترک آن‌ها گسیل شود، در آن صورت بر طبق اصل موضوع ۲ جبهه‌های موج مشاهده شده در دو دستگاه را باید با معادلات مقابل توصیف کرد:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3} x_j^2 - c^2t^2 = 0 \\ \sum_{j=1}^{3} x_j'^2 - c^2t'^2 = 0 \end{cases}$$

مشاهده می‌کنیم که معادلات بالا با دو اصل موضوع نظریه نسبیت سازگارند ولی با تبدیلات گالیله قابل استنتاج نیستند. هرچند که در سرعت‌های کم، تبدیلات لورنتس مؤید تبدیلات گالیله‌اند ولی این نبوغ انیشتن بود که توانست مفهوم زمان را به تبدیلات گالیله اضافه کند و از آن یک تبدیل دقیق بیان کند. در اینجا دیگر مفهوم $t = t'$ کاملاً بی‌معناست و برای دو رویداد متفاوت می‌تواند $t \neq t'$ باشد یعنی چیزی که تبدیلات گالیله و قوانین نیوتونی از بیان آن عاجز بود. اینشتین فرض کرد در تبدیلات گالیله با اضافه کردن یک ضریب با نماد γ می‌توان نقص آنرا رفع کرد و بنای فرض خود را از اینجا استخراج نمود که γ برای سرعت‌های کم باید برابر یک شود یعنی دیدگاه نیوتنی را برای سرعت‌های کم کاملاً درست در نظر گرفت و فقط در سرعت‌های بالا بود که ضریب γ نقش بسزایی را ایفا می‌کرد.

بنابر فرض اینشتین ساده‌ترین تبدیلی که برای اصلاح تبدیل گالیله $x'_1 = (x_1 - vt)$ می‌توان به کار برد به صورت مقابل است: $x'_1 = \gamma(x_1 - vt)$

حال اگر نقطهٔ نظرمان را از دستگاه ثابت S به دستگاه متحرک S' تغییر دهیم یعنی ناظر را روی دستگاه S' سوار کنیم باید تبدیل زیر را در نظر بگیریم:

$$x_1 = \gamma'(x'_1 + vt')$$

بر طبق اصل موضوع ۱ باید قوانین فیزیک در هر دو دستگاه مختصات یکسان باشد، به طوری که $\gamma = \gamma'$.

در این صورت با ترکیب معادلات بالا و با حذف x' از این دو رابطه و حل آن برحسب t' خواهیم داشت:

$$t' = \gamma t + \frac{x_1}{\gamma v}(1-\gamma^2) \;\text{یا}\; t' = \frac{x_1 - \gamma^2(x_1 - vt)}{\gamma v} \qquad (\text{زیرا } t = \frac{x_1}{v})$$

از طرفی اصل موضوع ۲ ایجاب می‌کند که سرعت نور اندازه‌گیری شده در هر دو دستگاه یکسان باشد بنابراین در هر دو دستگاه S و S' معادلات مشابهی برای مکان تپ نوری خواهیم داشت به طوری که:

$$\begin{cases} x_1 = ct & \text{(الف)} \\ x'_1 = ct' \Rightarrow \gamma(x_1 - vt) = c\left(\dfrac{x_1 - \gamma^2(x_1 - vt)}{\gamma v}\right) & \text{(ب)} \end{cases}$$

با مقایسه روابط قبل می‌بینیم:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

حال که پارامتر γ که واسط بین تبدیلات گالیله و تبدیلات لورنتس است تعیین شـد، معـادلات تبـدیل لورنتس را به صورت مقابل بیان می‌کنیم.

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x_1 - vt) \\ x_2' = x_2 \;;\; y' = y \\ x_3' = x_3 \;;\; z' = z \\ t' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(t - \dfrac{vx_1}{c^2}) \end{cases}$$

که باید در نظر داشته باشیم در سرعت‌های کم $(v << c)$ برای γ داریم:

$$\gamma \to 1 \quad \text{for} \;\; v << c$$

در اینصورت معادلات لورنتس به معادلات گالیله تبدیل می‌شوند که بیانگر همان جملهٔ مشهور است:

«تبدیلات لورنتس در سرعت‌های کم به تبدیلات گالیله تبدیل می‌شوند»

مثال۱: اگر بازه فضایی میان دو رویداد در یک دستگاه مختصات خاص، برابر ۲ و بازه زمانی میان آن دو برابر ۴- باشد؛ آنگاه بازه فضایی میان این دو رویداد از دید ناظری که نسبت به دستگاه اول با سرعت $\frac{3}{5}c$ در حال حرکت است چقدر خواهد بود؟

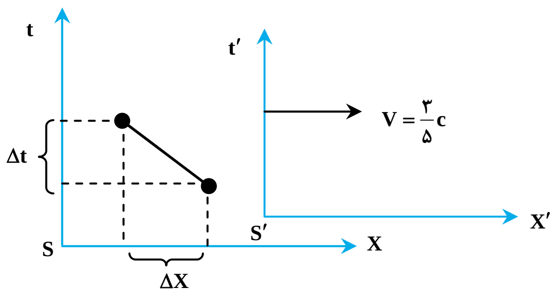
۱) $\frac{5}{2} + 3c$ ۲) $\frac{3}{5} + \frac{5}{2}c$ ۳) $\frac{3}{5} - \frac{5}{2}c$ ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به روابط تبدیلات لورنتس برای $\Delta x'$ داریم:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t)$$

Δx و Δt بازه زمانی و مکانی از دید ناظر ساکن و مستقر در S است.

$$\begin{cases} \Delta x = 2 \\ \Delta t = -4 \end{cases}$$



بنابراین داریم:

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}}(2 - \frac{3}{5}c(-4)) = \frac{5}{2} + 3c$$

تبدیلات لورنتس را گاهی «لورنتس ـ اینشتین» هم می‌گویند هرچند لورنتس برای اولین بار نشان داد که قوانین الکترومغنـاطیس در تمـام چـارچوب‌هـای مرجع لخت یکسان‌اند ولی اینشتین نشان داد که این معادلات برای تمام قوانین فیزیک صدق می‌کنند.

دانستن این نکته بسیار حائز اهمیت است که قوانین الکترومغناطیس ماکسول که سال‌ها قبل از پیدایش نسبیت خاص فرمول‌بندی شدند، تماماً بـه صـورت نسبیتی بیان شده بودند و این یکی از شگفتی‌های موفقیت‌آمیز قوانین ماکسول است که توانسته خیلی زودتر از مطرح شدن نظریه نسبیت خاص و از طریق تجربی استنتاج شوند.

اگر برای سادگی فرض کنیم:

$$(\beta = \frac{v}{c})$$

در این صورت می‌توان تبدیل وارونه را از طریق نشاندن $-v$ به جای v و تعـویض تمـام کمیـت‌هـای پریم‌دار به جای بدون پریم مانند مقابل استخراج کرد.

این تبدیلات از دید ناظر روی دستگاه S نوشته شده (برعکس روابط روبه‌رو)

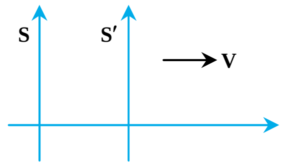
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x_1' + vt') \\ x_2 = x_2' \;;\; y = y' \\ x_3 = x_3' \;;\; z = z' \\ t = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(t' + \dfrac{vx_1'}{c^2}) \end{cases}$$

مثال ۲: در سطح زمین چراغ‌های دو شهر به فاصله $100\,km$ همزمان روشن می‌شوند. فاصله زمانی این دو رویداد از دید ناظری که با سرعت $0/8c$ نسبت به زمین حرکت می‌کند تقریباً چقدر است؟

۱) صفر　۲) $2/6\,ms$　۳) $4/4\,\mu s$　۴) $4/4\,ms$

پاسخ: گزینه «۴» مطابق تبدیلات لورنتس داریم:

ΔT برای ناظر ساکن برابر صفر است لذا برای تعیین اندازه $\Delta T'$ داریم:



$$\Delta T' = \frac{\Delta T - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow |\Delta T'| = \left|\frac{0 - \frac{0/8c}{c^2}\times 10^6}{\sqrt{1-\frac{(0/8c)^2}{c^2}}}\right| = 4/4\,ms$$

مثال ۳: حوادث A و B در دو چارچوب مرجع S و S' که S' با سرعت V نسبت به S حرکت می‌کند، اتفاق می‌افتد. اگر $\Delta T = T_B - T_A = 1\mu s$ و $\Delta x = x_B - x_A = 600\,m$ باشد به ازای چه مقداری از β ($\beta = \frac{V}{c}$) مقدار $\Delta x' = x'_B - x'_A$ کمینه است؟

x_B, x_A مکان رویدادهای A و B در دستگاه S و x'_A و x'_B مکان رویدادها در دستگاه S' اند.

۱) $0/2$　۲) $0/4$　۳) $0/5$　۴) $0/9$

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم:

$$1\mu s = 10^{-6}\,s\ ,\ V = \beta c\ ,\ c = 3\times 10^{+8}\,\frac{m}{s}$$

مطابق تبدیلات لورنتس:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \Delta x' = \frac{600 - V\times 10^{-6}}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \Delta x' = \frac{600 - 300\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = 300\frac{2-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

این رابطه به ازای βای کمینه است که مشتق آن صفر باشد. پس:

$$\frac{d(\Delta x')}{d\beta} = 0 \Rightarrow 300\left(\frac{-\sqrt{1-\beta^2} + \frac{\beta(2-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}}{1-\beta^2}\right) = 0 \Rightarrow -(1-\beta^2) + 2\beta - \beta^2 = 0 \Rightarrow \beta = 0/5$$

روابط سرعت در تبدیلات لورنتس

اگر سرعت‌های اندازه‌گیری شده را در هریک از دستگاه‌ها با u نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$u_i = \frac{dx_i}{dt} \qquad i = 1,2,3 \quad \text{(سرعت جسم نسبت به دستگاه ثابت)}$$

$$u'_i = \frac{dx'_i}{dt'} \qquad i = 1,2,3 \quad \text{(سرعت جسم نسبت به دستگاه متحرک)}$$

با استفاده از تبدیلات لورنتس داریم:

$$u'_1 = \frac{dx'_1}{dt'} = \frac{dx_1 - vdt}{dt - \frac{v}{c^2}dx_1} \Rightarrow \boxed{u'_1 = \frac{u_1 - v}{1 - \frac{u_1 v}{c^2}}}$$

که در آن V سرعت دو دستگاه نسبت به هم است. و به آن تبدیل سرعت نسبیتی در راستای حرکت گویند. و به همین ترتیب برای سایر مؤلفه‌ها: که این رابطه برای مختصهٔ عمود بر راستای حرکت نوشته شده است.

$$\boxed{u'_2 = \frac{u_2}{\gamma(1 - \frac{u_1 v}{c^2})}}$$

در این رابطه هم مختصهٔ سوم در جهت عمود بر راستای حرکت می‌باشد.

$$\boxed{u'_3 = \frac{u_3}{\gamma(1 - \frac{u_1 v}{c^2})}}$$

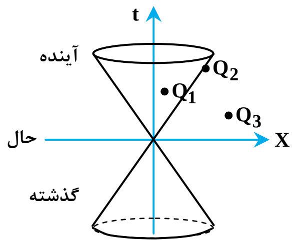
*** حد شیب مسیر فضا ــ زمانی:**

طبق اصل موضوع دوم اینشتین، سرعت نور بیشینه سرعتی است که جسم می‌تواند به آن دست یابد و این از نظر تمام ناظرها نیز یکسان است و لذا سرعت جسم در هیچ دستگاه لختی نمی‌تواند از c بیشتر شود.

اگر یکاهای مکانی و زمانی را به انتخاب خود طوری تعیین کرده باشیم که $c=۱$ گردد در این صورت، شیب بیشینه در مسیر فضا ـ زمانی برابر ۱ خواهد شد و در حدّ ۱ مسیر فضا ـ زمانی معرف مسیر حرکت یک تپ نوری است که در خلأ در حال انتشار می‌باشد. (زیرا می‌دانیم اجسام مادی هرگز به سرعت c دست نمی‌یابند پس از عبارت تپ نوری به جای جسم مادی در سرعت نور باید استفاده کنیم.)

بنابراین برای θ_{max} داریم:

$$u_{max}=\tan\theta_{max}=c=۱\Rightarrow\theta_{max}=۴۵^\circ$$



*** مخروط نوری:** اگر خطی که مسیر حرکت یک تپ نوری را (با $\theta=۴۵^\circ$) در نمودار فضا زمانی نشان می‌دهد، حول محور زمان دوران دهیم یک مخروط با زاویه رأس ۹۰° حاصل خواهد شد که اگر اطلاعات زمان گذشته تپ را نیز لحاظ کنیم دو مخروط خواهیم داشت که از رأس به هم چسبیده‌اند، به شکل حاصل مخروط نوری می‌گوئیم که با توجه به اصول موضوع نسبیت خاص، می‌توان نکات زیر را از آن استخراج کرد:

توانایی هر رویدادی مانند $Q_۱$ که داخل مخروط نوری قرار گرفته محدود به تأثیرپذیری از گذشته رویداد و یا تأثیرگذاری برآینده آن است و ما فقط حال حاضر آنرا مشاهده کرده‌ایم (رأس مخروط نوری).

رویدادهایی که در نیمه پایینی زمان واقع می‌شوند رویدادهای زمان گذشته نام داشته و می‌توانند بر حال حاضر یعنی بر مبدأ مختصات تأثیر بگذارند. ولی رویدادهایی که در حال حاضر واقع‌اند فقط می‌توانند بر آینده تأثیرگذار باشند.

رویداد $Q_۲$ مربوط به یک تپ نوری است که با حداکثر سرعت ممکن $u=c$ از روی مرز مخروط نوری در حال گذر است و نهایت مسیر رویدادها را بیان می‌کند.

رویدادی که در خارج مخروط نوری واقع باشد مانند $Q_۳$ نمی‌تواند بر رویدادی واقع در رأس مخروط مؤثر باشد، زیرا در غیر اینصورت اطلاعات باید با سرعتی بیش از سرعت نور $(\theta>۴۵^\circ)$ از رأس به $Q_۳$ برسد که با اصل موضوع ۲ در تناقض است.

از نکات بالا نتیجه بسیار مهم زیر بدست می‌آید:

«تمام رویدادهای داخل مخروط نوری می‌توانند به طور علّی به یک رویداد در رأس آن مربوط شوند ولی هیچ یک از رویدادهای خارج از مخروط نمی‌توانند به رویداد در رأس مخروط مربوط شوند.»

*** کمیت $\Delta S^۲$:** کمیت $\Delta S^۲$ یک بازهٔ فضا ـ زمانی نامیده می‌شود که به صورت مقابل بیان می‌شود:

$$\Delta S^۲=(\Delta x)^۲+(\Delta y)^۲+(\Delta z)^۲-(c\Delta t)^۲$$

که در آن:

$$\Delta x=x_۲-x_۱ \qquad \Delta y=y_۲-y_۱ \qquad \Delta z=z_۲-z_۱ \qquad \Delta t=t_۲-t_۱$$

بازه‌های فضا و زمانی دو رویداد $Q_۱$ و $Q_۲$ که دارای مختصات $(x_۱,y_۱,z_۱,t_۱)$ و $(x_۲,y_۲,z_۲,t_۲)$ می‌باشند، هر دو از نظر ناظر S (در دستگاه ناظر S) رخ داده‌اند.

تذکر: کمیت $\Delta S^۲$ که بازهٔ فضا ـ زمانی نام دارد، یک کمیت ناوردا است. یعنی در همه دستگاه‌های مرجع لخت و از نظر تمامی ناظرها یکسان می‌باشد. پس براساس آنچه گفته شد اگر ناظر S بازهٔ فضا زمانی $\Delta S^۲$ را اندازه بگیرد نباید با آنچه ناظر S' اندازه گرفته فرقی کند بنابراین:

$$\Delta S^۲=\Delta S'^۲$$

و یا:

$$(\Delta x)^۲+(\Delta y)^۲+(\Delta z)^۲-c^۲(\Delta t)^۲=(\Delta x')^۲+(\Delta y')^۲+(\Delta z')^۲-c^۲(\Delta t')^۲$$

مثال ۱۰: دو ناظر در چارچوب‌های O و O' دو رویداد A و B را ثبت می‌کنند. سرعت نسبی این چارچوب $۰/۷\,c$ است. ناظر O مختصات زیر را برای این دو رویداد ثبت می‌کند:

$$\begin{cases}(x_A=۳\ ,\ y_A=۱\ ,\ z_A=۲\ ,\ t_A=۲)\\(x_B=۵\ ,\ y_B=۳\ ,\ z_B=۲\ ,\ t_B=۴)\end{cases}$$

فاصلهٔ مکان‌ــ زمان این دو رویداد چقدر است؟ $(c=۱)$

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» کافی است که $(\Delta S)^۲$ را از دید هرکدام از ناظرها حساب کنیم منتها چون $(\Delta S)^۲$ یک کمیت ناورد است لذا فرقی نمی‌کند از دید کدام ناظر به‌دست آید، پس:

$$(\Delta S)^۲=(\Delta S')^۲=(\Delta x)^۲+(\Delta y)^۲+(\Delta z)^۲-c^۲(\Delta t)^۲$$

$$\Delta x=x_A-x_B=-۲\ ,\ \Delta y=y_A-y_B=-۲\ ,\ \Delta z=z_A-z_B=۰\ ,\ \Delta t=t_A-t_B=-۲$$

پس:

$$(\Delta S)^۲=(\Delta S')^۲=۲^۲+۲^۲-۲^۲=۴\quad\Rightarrow|\Delta S|=|\Delta S'|=۲$$

نواحی مختلف فضا زمانی برحسب بازهٔ فضا زمانی $\Delta S^۲$:

به طور کل نواحی ۳ گانه‌ای را برحسب علامت $\Delta S^۲$ می‌توان برای نمودار فضا زمانی لحاظ کرد:

ناحیه اوّل: $\Delta S^۲<۰$: معروف به ناحیه زمان گونه می‌باشد که با توجه به نکات بیان شده در قسمت قبل ویژگی‌های زیر را دارا می‌باشد:

ویژگی‌اول: تمام نقاطی که داخل ناحیه اول قرار دارند. $\Delta S^۲<۰$ بیانگر رویدادهایی هستند که به طور علّی به رویداد واقع در رأس مخروط $(x,y,z,t)=(۰,۰,۰,۰)$ مربوط می‌شوند یعنی همهٔ این رویدادها داخل مخروط نوری واقع شده‌اند. پس: مخروط نوری ناحیه‌ای از فضا ـ زمان است که در آن $\Delta S^۲<۰$ می‌باشد.

ویژگی دوم: هرگاه $Q_۱$ و $Q_۲$ دو رویداد در این ناحیه باشند و اگر از نظر یک ناظر مانند S رویداد $Q_۱$ زودتر از رویداد $Q_۲$ رخ دهد در این صورت (به علّت ناوردایی $\Delta S^۲$) باید همهٔ ناظرین دیگر نیز $Q_۱$ را زودتر از $Q_۲$ مشاهده کنند. به عبارتی: ترتیب رخ دادن دو رویداد از نظر تمام ناظرین یکسان خواهد بود.

با توجه به آنچه گفته شد: **در ناحیه زمان گونه علیت پایسته می‌ماند.**

به عبارتی:

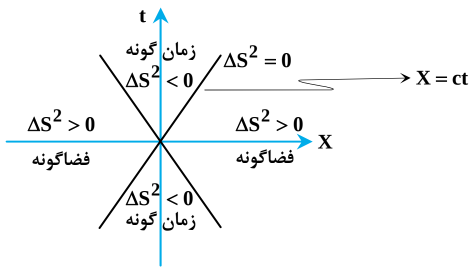
$$\text{ناحیه زمان گونه داخل مخروط نوری}\begin{cases}x<ct\\ \Delta S^۲=X^۲-c^۲t^۲\ \Rightarrow \Delta S^۲<۰\\ \theta<۴۵^\circ\ ,\ u<c\end{cases}$$

ناحیه دوم: $\Delta S^۲>۰$: معروف به ناحیه فضاگونه می‌باشد که دارای ویژگی‌های زیر است.

ویژگی اول: رویدادهای واقع در این ناحیه به طور علّی به رویداد واقع در رأس مخروط $(۰,۰,۰,۰)$ مربوط نمی‌شوند زیرا باید اطلاعات با سرعتی بیش از سرعت نور حرکت کنند که محال است.

ویژگی دوم: ترتیب روی دادن برای رویدادهای مختلف (مانند آنچه در ناحیه داخل مخروط نوری بود) وجود ندارد.

ویژگی سوم: ناحیهٔ $\Delta S^۲>۰$ خارج از مخروط نوری قرار دارد.



ناحیه سوم: $\Delta S^۲=۰$: این ناحیه فقط مرز مخروط نوری را شامل می‌شود و تنها مخصوص رویدادهایی است که با سرعت نور حرکت می‌کنند پس تنها مربوط به تپ‌های نوری و نه اجسام مادی می‌شود. همهٔ آنچه که تا به حال در مورد مخروط نوری، کمیت $\Delta S^۲$ و نواحی سه گانه بیان کردیم در شکل روبه‌رو خلاصه می‌شود:

مثال ۱۱: مختصات فضاـ زمانی دو رویداد به ترتیب برابر است با:

$$(x_۱,\ y_۱,\ z_۱,\ t_۱)=(۱,\ ۲,\ -۱,\ \frac{۴}{c})\ ,(x_۲,\ y_۲,\ z_۲,\ t_۲)=(-۱,\ ۳,\ ۱,\ \frac{۱}{c})$$

کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

۱) ارتباط علّی میان دو رویداد امکان‌پذیر است.
۲) در مورد ارتباط علّی میان دو رویداد نمی‌توان هیچ نتیجه‌ای گرفت.
۳) رویداد دوم نمی‌تواند از رویداد اول اثر بپذیرد.
۴) رویداد اول نمی‌تواند از رویداد دوم اثر بپذیرد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» همانطور که گفتیم باید برای تعیین روابط علّی بین رویدادها، علامت $(\Delta S)^۲$ را تعیین کنیم، لذا:

$$(\Delta S)^۲=(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲+(z_۲-z_۱)^۲-c^۲(t_۲-t_۱)\Rightarrow(\Delta S)^۲=۴+۱+۴-۹=۰\quad\Rightarrow(\Delta S)^۲=۰$$

لذا چون $(\Delta S)^۲=۰$ شد، پس رویدادها روی خط مخروط نوری مختصات فضازمان قرار دارند و ارتباط علّی و معلولی بین دو رویداد امکان‌پذیر خواهد بود.

تبدیل نسبیتی یکاهای جرم و انرژی به یکدیگر:

از آنجایی که معادلات نسبیتی انرژی نشان می‌دهند، جرم و انرژی از یک مقوله‌اند و لذا گاهی در فیزیک هسته‌ای، جرم ذرات را بر حسب «یکای واحد جرم اتمی» یا به طور اختصار $(a.m.u)$ نمایش می‌دهند که به صورت زیر تعیین می‌شود.

«یک یکای جرم اتمی به صورت یک دوازدهم جرم اتم کربن خنثی تعریف می‌شود»

البته مقیاس $\frac{۱}{۱۲}$ به دلیل انتخاب ایزوتوپ ۱۲ اتم کربن می‌باشد.

$$\text{یک اتم کربن خنثی} = ۱۲\frac{gr}{۶/۰۲۲\times ۱۰^{۲۳}} \;(\text{مول / ذره}) \Rightarrow ۱(a.m.u) = \frac{۱}{۱۲}\left(\frac{۱۲}{۶/۰۲۲\times۱۰^{۲۳}}\right) = ۱/۶۶\times ۱۰^{-۲۷}\,kg$$

و از اینرو رابطه بین $(a.m.u)$ یا یکای جرم اتمی با انرژی برحسب Mev به صورت زیر تعیین می‌شود:

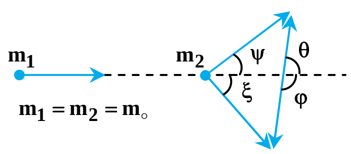
$$۱(a.m.u) = ۹۳۱/۵\times ۱۰^{۶}\,\frac{ev}{c^{۲}}$$

به عنوان مثال برای انرژی سکون الکترون داریم:

$$E_e = ۰/۵۱Mev = (۰/۵۱\times ۱۰^{۶}\,ev) = ۵\times ۱۰^{-۴}\,(a.m.u).c^{۲}$$

نظریه برخورد و پراکندگی در نسبیت خاص:

به طور کلی پرداختن به موضوع پراکندگی نسبیتی و برخوردهای دو جسم در حدّ سرعت‌های نزدیک نور، خود یک مقوله‌ی کاملاً مفصل می‌باشد که پرداختن به جزئیات آن در اینجا هدف ما نیست و فقط به منظور آشنایی با برخوردهای نسبیتی، تنها حالتی که جرم سکون دو ذره برابر $m_{\circ}$ باشد، را بررسی می‌کنیم. زوایای پراکندگی در یک برخورد الاستیک چنین تعیین می‌شوند:



$$\left.\begin{aligned} \tan\psi &= +\sqrt{\frac{۲}{۱+\gamma}}\times\frac{\sin\theta}{۱+\cos\theta} \\ \tan\xi &= -\sqrt{\frac{۲}{۱+\gamma}}\times\frac{\sin\theta}{۱-\cos\theta}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\psi\tan\xi = \frac{۲}{۱+\gamma}\;,\; \gamma = \frac{۱}{\sqrt{۱-\beta^{۲}}}, \beta = \frac{u}{c}$$

که در آن θ و φ زوایای پراکندگی در سیستم مرکز جرم و ψ و ξ زوایای پراکندگی در سیستم آزمایشگاه است.

البته توجه به این نکته نیز ضروری است که در حالتی که دو ذره با جرم‌های یکسان برخورد نسبیتی کنند، دیگر مجموع ψ و ξ ، $\frac{\pi}{۲}$ نخواهد شد بلکه به این دلیل که پارامتر γ بزرگتر از یک است $(\gamma > ۱)$ در برخوردهای نسبیتی:

$$\Psi + \xi < \frac{\pi}{۲}$$

خواهد شد و این در حالی است که در مکانیک کلاسیک می‌دانیم هرگاه دو ذره با جرم‌های مساوی $(m_۱ = m_۲ = m)$ به هم برخورد کنند زاویهٔ پراکندگی آن دو ذره مجموعاً ۹۰° یا $\frac{\pi}{۲}$ خواهد بود. پس در مقایسه دو برخورد کلاسیکی با نسبیتی خواهیم داشت.

$$\text{کلاسیک}\;\psi + \xi = \frac{\pi}{۲} \qquad m_۱ = m_۲ = m \qquad\qquad \text{نسبیت}\;\psi + \xi < \frac{\pi}{۲} \qquad m_۱\Big|_{\text{سکون}} = m_۲\Big|_{\text{سکون}} = m_{\circ}$$

اثبات این موضوع بسیار ساده است کافی است تانژانت‌های پراکندگی را در هم ضرب کنیم.

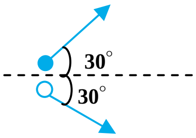
$$\tan\psi\tan\xi = \frac{۲}{۱+\gamma} \xrightarrow{\gamma > ۱} \tan\psi\tan\xi < ۱ \Rightarrow \sin\psi\sin\xi - \cos\psi\cos\xi < ۰ \Rightarrow \cos(\psi+\xi) > ۰ \Rightarrow (\psi+\xi) < \frac{\pi}{۲}$$

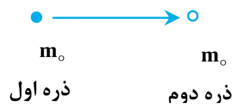
مثال ۱۲: ذره‌ای به جرم سکون $m_{\circ}$ با ذرهٔ دیگری به جرم سکون $m_{\circ}$ که در حال سکون است، برخورد کشسان می‌کند. اگر زاویهٔ پراکندگی هریک از دو ذره نسبت به امتداد حرکت ذره اول، برابر ۳۰° باشد، سرعت نسبی دو ذره قبل از برخورد چقدر بوده است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}c$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}c$ ۳) $۲\frac{\sqrt{۳}}{۳}c$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به آنچه در برخوردهای نسبیتی گفتیم خواهیم داشت:

$$\tan\psi\tan\xi=\frac{2}{1+\gamma}$$





با توجه به شکل می‌دانیم که $\psi=\xi=30^\circ$ پس:

$$\tan^2(30)=\frac{2}{1+\gamma}\quad\Rightarrow\quad\tan^2(30)=\frac{2}{1+\gamma}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{3}=\frac{2}{1+\gamma}$$

پس بنابراین: $\gamma=5$ و این یعنی:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=5\quad\Rightarrow 1-\beta^2=\frac{1}{25}\quad\Rightarrow\beta^2=1-\frac{1}{25}=\frac{24}{25}\quad\Rightarrow\beta=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

بنابراین:

$$V=\frac{2\sqrt{6}}{5}c$$

روابط نسبیتی اندازه حرکت ــ انرژی

محاسبات نشان می‌دهد که با دانستن مقادیر اندازه حرکت و انرژی در یک چارچوب "S"، می‌توان مقادیر متناظر با همین کمیت‌ها را در چارچوب دیگر "S'"که نسبت به "S" با سرعت V در امتداد محورهای مشترک $V-V'$ حرکت می‌کند، بدست آورد:

$$P'_x=\gamma(P_x-\frac{V}{c^2}E)$$

$$P'_y=P_y\quad و \quad P'_z=P_z\quad و \quad E'=\gamma(E-VP_x)$$

با استفاده از این روابط می‌توان ثابت کرد که اگر انرژی و اندازه حرکت در یک برهم کنش نسبت به ناظر لخت پایسته باشند، لزوماً انرژی و اندازه حرکت در یک برهم کنش نسبت به تمامی ناظرهای لخت دیگر پایسته خواهند بود.

تبدیلات لورنتس برای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی

نیروی لورنتس وارد بر یک ذره با بار الکتریکی q که با سرعت V در حرکت است، بصورت مقابل می‌باشد: $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{V}\times\vec{B})$

در این رابطه $\vec{E}$ و $\vec{B}$ به ترتیب میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی‌اند که ذره در یک زمان و مکان مشخص احساس می‌کند. حال با نوشتن نیروی لورنتس وارد بر ذره در هر یک از چارچوب‌های "S" (چارچوب آزمایشگاه) و "S'" (چارچوبی که نسبت به ذره ساکن است) و استفاده از تبدیلات نیرو در قسمت‌های قبلی معادلات، مؤلفه‌های میدان الکتریکی و مغناطیسی در چارچوب "S'" بصورت‌های زیر تعیین می‌شوند.

با این فرض که حرکت در راستای x باشد داریم:

$$\begin{cases}E'_x=E_x\\ E'_y=\gamma(E_y-VB_z)\\ E'_z=\gamma(E_z+VB_y)\end{cases}\xrightarrow{\text{در حالت عمومی}}\begin{cases}E'_{\|}=E_{\|}\\ E'_{\perp}=\gamma[E_{\perp}+(\vec{V}\times\vec{B})_{\perp}]\end{cases}$$

و همچنین برای میدان مغناطیسی نیز خواهیم داشت:

$$\begin{cases}B'_x=B_x\\ B'_y=\gamma(B_y+\frac{V}{c^2}E_z)\\ B'_z=\gamma(B_z-\frac{V}{c^2}E_y)\end{cases}\xrightarrow{\text{در حالت کلی}}\begin{cases}B'_{\|}=B_{\|}\\ B'_{\perp}=\gamma[B_{\perp}-\frac{1}{c^2}(\vec{V}\times\vec{E})_{\perp}]\end{cases}$$

روابط فوق نشان دهنده آن است که مؤلفه میدان الکتریکی و مغناطیسی در امتداد حرکت همواره بدون تغییر (ناوردا) است در حالی که مؤلفه‌ی عمود بر جهت حرکت همواره تغییر می‌کند.

مدرسان شریف

فصل پنجم

« الگوهای اتمی (تامسون، رادرفورد، بور) »

مقدمه

در این بخش به برخی از جزئیات ساختار اتمی بر مبنای بررسی‌های تجربی و آزمایشی اتم‌ها می‌پردازیم.

اصول اساسی در مورد دیدگاه اتمی:

۱ـ اتم‌ها ریزاند. (اجزاء تشکیل دهنده مولکول‌ها و عناصر)

۲ـ اتم‌ها پایدارند، خود به خود به تکه‌های کوچک‌تر تقسیم نمی‌شوند.

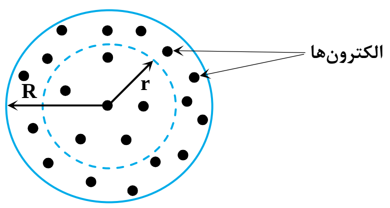
۳ـ اتم‌ها از نظر بارالکتریکی خنثی هستند.

۴ـ تابش الکترومغناطیس را جذب و گسیل می‌کنند که این تابش می‌تواند به شکل‌های مختلف چون نورمرئی، پرتوهای X و ... باشد.

الگوی اتمی تامسون

با وجودی که دانشمندان قرن نوزدهم معتقد بودند که عناصر شیمیایی از اتم‌ها ترکیب یافته‌اند، ماهیت ساختاری اتم‌ها بر آن‌ها دقیقاً معلوم نبود. تا سال ۱۹۱۰ شواهد زیادی دال بر وجود الکترون (با بار منفی) در اتم بدست آمده بود. در واقع کشف الکترون توسط تامسون قدم مهمی در شناخت ساختار اتمی بود.

در این الگو، اتم حاوی z الکترون است که در کره‌ای همگن با بار مثبت نشسته است. کل بار مثبت این کره Ze و جرم آن اساساً همان جرم اتم است و شعاع این کره R برابر شعاع اتم است. بر اساس این الگو بارهای مثبت و منفی به صورت یک در میان طوری در اتم قرارگرفته‌اند که در حالت کلی، بار کلی آن صفر است. این الگو به کیک کشمشی مشهور است که الکترون‌ها مانند کشمش‌های داخل یک کیک کشمشی پراکنده‌اند.



شکل ۱: الگوی اتمی تامسون که در آن کره‌ی r حاوی نسبت $\frac{r^3}{R^3}$ از کل بار اتم است.

نیروی الکتریکی وارد بر یک الکترون در فاصله‌ی r از مرکز یک کره با توزیع بار یکنواخت Ze و شعاع R را می‌توان از قانون گوس محاسبه نمود.

$$F = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r = kr \Rightarrow k = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

الکترون‌ها به علت رانش متقابلشان در سراسر کره‌ای با بار مثبت به طور یکنواخت توزیع می‌شوند و در اتمی که در پائین‌ترین حالت ممکن انرژی خود قرار دارد، الکترون‌ها در مکان‌های تعادلشان ثابت می‌مانند و در اتم‌های برانگیخته، الکترون‌ها به خاطر نیروی بازگرداننده حول مکان‌های تعادلشان با بسامد $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ارتعاش می‌کنند که $k = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ و m به ترتیب ثابت نوسان و جرم الکترون مورد نظر می‌باشد.

مثال۱: کدام‌یک از موارد زیر بیانگر الگوی اتمی تامسون است؟

۱) این الگو معروف به الگوی سیاره‌ای است که الکترون‌ها را مانند سیارات نقطه‌ای حول مرکز اتم (هسته) در حال چرخش مدل می‌کند. به طوری که الکترون‌ها دائم در حال تابش‌اند.

۲) این الگو به الگوی کیک کشمشی معروف است که اتم را توزیعی از بارهای مثبت می‌داند که الکترون‌ها با بارهای منفی همچون کشمش‌های پراکنده در یک کیک کشمشی در سراسر اتم جایگزیده‌اند.

۳) در این الگو اتم از یک هسته بسیار سنگین تشکیل شده است که الکترون‌ها در اطراف هسته در مدارهای مانا دائم در حال چرخش‌اند و فقط وقتی تابش می‌کنند که از یک مدار مانا به مدار پائین‌تر گذار کنند.

۴) در این الگو هسته در مرکز اتم قرار دارد و الکترون‌ها در اطراف آن بر روی مسیرهای بیضوی در حال چرخش‌اند و فقط وقتی تابش می‌کنند که بر روی محیط بیضی از قطر بزرگ به سمت قطر کوچک در حرکت‌اند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» همان‌طور که در ادامه بیان خواهد شد گزینه ۱ الگوی اتمی رادرفورد، گزینه ۲ الگوی اتمی تامسون و گزینه ۳ الگوی اتمی بور می‌باشد و گزینه ۴ الگوی اتمی خاصی را بیان نمی‌کند هرچند ممکن است به خاطر مدارهای بیضی آن را با اصل کوانتش زامرفیلد اشتباه بگیریم. در این فصل قصد داریم تمام الگوهای اتمی را به تفضیل بحث و بررسی کنیم.

نارسایی الگوی اتمی تامسون

از آنجایی که نظریه الکترومغناطیس پیش‌گویی می‌کند که یک جسم بارداری که دارای شتاب است باید تابش کند، لذا تنها می‌توان یک درک کیفی از تابش گسیل یافته توسط اتم‌های برانگیخته را بر اساس الگوی اتمی تامسون بدست آورد.

جدی‌ترین نارسایی الگوی اتمی تامسون در پراکندگی ذرات باردار از اتم‌ها نمایان می‌شود. هنگامی‌که عبور تک ذره ای با بار مثبت از یک اتم را در نظر بگیریم، این ذره تحت تأثیر نیروهای الکتریکی اتم تا حدودی از مسیر اولیه خود منحرف می‌شود که این نیروها یکی نیروی دافعه‌ی ناشی از بار مثبت اتم و دیگری نیروی جاذبه ناشی از الکترون‌های دارای بار منفی می‌باشد.

بررسی ریاضی نارسایی الگوی اتمی تامسون در پراکندگی:

اگر باریکه‌ای از الکترون با بار ze به طرف اتم با عدد اتمی Z پرتاب شود نیرویی که به آن وارد می‌شود برابراست با:

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{zZe^2}{R^3}r=zkr$$

این باریکه الکترون با پارامتر برخورد b (نزدیک‌ترین فاصله تا مرکز پراکندگی) می‌تواند منحرف شود به طوری که این زاویه انحراف θ با توجه به تغییرتکانه‌ای که الکترون در جهت y به خود می‌گیرد برابراست با:

$$\cos\theta=\frac{b}{r}\Rightarrow \Delta p_y=\int zkr\frac{b}{r}.dt=zkb\int dt=zkbT$$

که در آن T زمان عبور الکترون از محدوده‌ی تحت تأثیر اتم است و برابر است با کل مسافت طی شده در اتم تقسیم بر سرعت متوسط الکترون:

همچنین r شعاع پراکندگی و θ زاویهٔ پراکندگی می‌باشد.

$$T=\frac{2\sqrt{R^2-b^2}}{\bar{V}}\Rightarrow \Delta p_y=\frac{2zkb}{\bar{V}}\sqrt{R^2-b^2}$$

اگر تغییرات تکانه در جهت x ناچیز باشد:

$$\tan\theta=\frac{P_y}{P_x}\simeq\frac{\Delta P_y}{P}$$

با تقریب اول θ داریم:

$$\tan\theta\simeq\theta\Rightarrow\theta=\frac{2zkb}{m\bar{v}^2}\sqrt{R^2-b^2}$$

با توجه به این رابطه زاویه پراکندگی θ به پارامتر برخورد b وابسته می‌شود طوری که:

$\text{if}\quad b=0\Rightarrow\theta=0$ به دلیل صفر بودن نیروی خالص

$\text{if}\quad b=R\Rightarrow\theta=0$ به دلیل قرار نداشتن داخل اتم

با یافتن میانگین زاویه پراکندگی θ به ازای مقدار میانگین b داریم:
$$\bar{b}=\frac{R}{2}\Rightarrow<\theta>=\sqrt{\frac{3}{4}}\frac{2zkR^2}{m\bar{v}^2}$$

از طرفی با توجه به نیروی وارد بر الکترون داریم:
$$k=\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

در نهایت با ادغام این رابطه با رابطه زاویه پراکندگی به دست می‌آید:
$$<\theta>=\sqrt{\frac{3}{4}}zZ\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

با دانستن:
$$m\bar{v}^2=2E_k \quad \text{و} \quad \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}=1/44 ev.nm$$

اگر تعداد پراکندگی‌ها N تا شود (N الکترون پراکنده گردد). خواهیم داشت:
$$\theta\sim\sqrt{N}\theta_{avg}$$

حال با روابطی که از الگوی تامسون بدست آمد، نارسایی این الگو را وقتی آشکارا می‌بینیم که احتمال پراکندگی را در زاویه‌های بزرگ مورد بررسی قرار دهیم. نتیجه‌ای که به صورت تجربی برای θهای بزرگ بدست می‌آمد با آنچه الگوی تامسون پیش بینی می‌کرد، بسیار متفاوت بود به طوری که تعداد ذرات آلفایی که به ورقه نازک طلا می‌تابید در کلیه‌ی زوایای بزرگ‌تر از چند درجه مشاهده شد، بسیار بیش از آن چیزی بود که الگوی تامسون می‌گفت.

به طور مثال، احتمال پراکندگی ذرات آلفا در زوایای بزرگ‌تر از 90° حدوداً 10^{-4} در آزمایش گزارش شده که الگوی تامسون آنرا حدوداً 10^{-3000} پیش‌بینی می‌کند. از این رو این نارسایی باعث شد تا الگوی جدید را جایگزین کنند که رادرفورد آن را ارائه نمود.

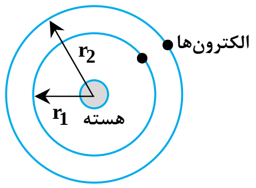
الگوی اتمی رادرفورد

رادرفورد ضمن پراکندگی ذرات آلفا نتیجه گرفت که اتم نمی‌تواند توزیعی یکنواخت از بار الکتریکی داشته باشد چرا که الگوی پراکندگی در آزمایش شرح می‌داد که باید یک جرم بسیار سنگین که تقریباً با جرم همه‌ی اتم برابراست، در مرکز اتم گنجانده شده باشد همچنین این جرم تنها بخش کوچکی از حجم اتم را اشغال کرده است که مانند نقطه‌ای با جرم بسیار زیاد در مرکز اتم نشسته و الکترون‌ها مانند ابری اطراف آن را پوشانده‌اند که بیش‌ترین حجم اتم را نیز همین الکترون‌ها تشکیل می‌دهند.

از اینرو الگوی معروف مدل سیاره‌ای رادرفورد جایگزین الگوی ناکارآمد تامسون شد که دیگر آن نارسایی پراکندگی در زوایای بزرگ‌تر را نداشت.

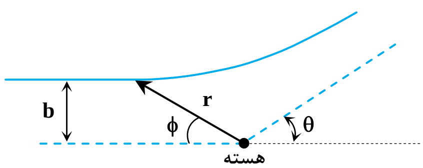
بررسی پراکندگی در مدل اتمی رادرفورد

همان طوری که گفته شد در این مدل الکترون‌ها مانند سیاره‌ای دور هسته مرکزی دائم در حال چرخش هستند و به علت سرعت زیادی که دارند یک ابر الکترونی اطراف هسته را فراگرفته است.



شکل ۲: مدل سیاره‌ای رادرفورد

از این رو می‌توان برخورد یک ذره با بار ze را طوری در نظر گرفت که بیش‌ترین انحراف به علّت وجود هسته بوده و ذراتی که مستقیماً به سمت هسته پرتاب می‌شوند بیش‌ترین احتمال پراکندگی را دارند (مانند شکل مقابل):
$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ze(Ze)}{r^2}$$



شکل ۳: الگوی پراکندگی از مدل رادرفورد

بر طبق این الگو به ازای ϕهای مختلف داریم:
$$\text{if}\quad \phi=0\Rightarrow r\to\infty \quad ; \quad \text{if}\quad \phi=\pi-\theta\Rightarrow r\to\infty$$

از این رو پارامتر برخورد برابراست با:
$$b=\frac{zZe^2}{8\pi\varepsilon_0 E_k}\cot\frac{\theta}{2}=\frac{zZ}{2E_k}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cot\frac{\theta}{2}$$

که بیان می‌دارد ذره‌ای که با پارامتر برخورد b به هسته سنگین نزدیک شود با زاویه‌ی پراکندگی θ منحرف خواهند شد.

بررسی پراکندگی‌ها در زاویه بزرگ‌تر از θ بر اساس الگوی اتمی رادرفورد:

هر ذره‌ای که با پارامتر برخورد کوچک‌تر از b (یعنی در محدوده‌ی زیر سطح πb^2) به هسته نزدیک شود، در زاویه‌های بزرگ‌تر از θای که متناظر با پارامتر b است پراکنده خواهد شد (طبق رابطه بالا).

حال فرض کنیم مساحت هر اتم πb^2 باشد پس برای N اتم مساحت کل برابر $N\pi b^2$ خواهد شد اگر ضخامت ورقه‌ی طلا که قرار است ذره‌ی α را به آن بتابانیم برابر t و مساحت آن برابر A باشد در این صورت داریم:

۱ـ کسری از ذرات α تابیده شده که داخل سطح اتم قرار می‌گیرد برابراست با:

$$\frac{\pi b^2}{\pi R^2}$$

که در آن R شعاع اتم است.

۲ـ تعداد اتم‌ها یا هسته‌ها در واحد حجم برابراست با:

$$n = N_A \frac{\rho A t}{M_a}\frac{1}{At} = \frac{N_A \rho}{M_a}$$

که در آن ρ چگالی جرمی و M_a جرم اتمی و N_A عدد آووگادرو است حال اگر تعداد هسته‌ها در واحد سطح را در نظر بگیریم داریم:

$$nt = \frac{N_A \rho t}{M_a}$$

که به طور میانگین هر هسته یک سطح $\left(\frac{N_A \rho t}{M_a}\right)^{-1}$ را مقابل ذرات α قرار داده است.

حال برای پراکندگی در زاویه‌های بزرگ‌تر از θ باید مجدداً ذرات α در محدوده‌ی سطح πb^2 از مرکز اتم قرار بگیرد که در این صورت کسری از ذرات پراکنده شده در زاویه‌های بزرگتر از θ درست همان کسری است که به یک اتم در محدوده‌ی πb^2 نزدیک می‌شود و برابراست با:

کسری از ذرات پراکنده شده $f_{<b} = f_{>b} = nt\pi b^2$

که در رابطه فوق با فرض اینکه ذرات فرودی به طور یکنواخت در سطح برگه پخش می‌شوند به دست آمده است و پارامتر برخورد نیز بی‌تغییر می‌ماند.

$$b = \frac{zZ}{2E_k}\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cot\frac{\theta}{2}$$

توجه کنید که z تعداد الکترون‌ها و Ze کل بار مثبت اتم است.

مثال ۲: ذرات α با انرژی ۵ Mev توسط یک هستهٔ طلا پراکنده می‌شوند. در صورتی که ضخامت برگ طلا برابر $2/5\times10^{-7}$ باشد، چه کسری از ذرات α فرودی، با انرژی ۵ Mev، تحت زاویه‌ای بیش از 60° پراکنده می‌شوند؟

۱) $7/2\times10^{-5}$		۲) $0/67$		۳) $6/78\times10^{-5}$		۴) $0/72$

☑ **پاسخ**: گزینه «۳» ابتدا باید پارامتر برخورد b را بیابیم:

$$b = \frac{zZ}{2E_K}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cot\frac{\theta}{2}$$

در این مثال:

$$Z_{(Au)} = 79\ ,\ z_\alpha = 2\ ,\ E_K = 5\ \text{Mev}\ ,\ \theta = 60^\circ\ ,\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9\ ,\ e = 1/6\times10^{-19}\ \text{C}$$

$$\Rightarrow b = \frac{9\times10^9\times2\times79\times(1/6\times10^{-19})^2}{2\times5\times10^6\times1/6\times10^{-19}}\cot\left(\frac{60}{2}\right) = 3/86\times10^{-14}\ \text{m}$$

حال با توجه به رابطهٔ چگالیِ تعداد اتم‌ها n، با استفاده از عدد آووگادرو N_A داریم:

$$n = \rho\frac{N_A}{M_a}$$

در این رابطه n تعداد اتم ها در واحد حجم، ρ چگالی طلا و M_a جرم اتمی آن است، بنابراین:

$$n = 1/93\times10^4\times\frac{6/022\times10^{23}}{197/3.} \simeq 5/8\times10^{28}$$

از طرفی هم سطح مقطع برخورد برابر است با:

$$\sigma = \pi b^2 = 3/14\times(3/86\times10^{-14})^2 = 46/8\times10^{-28}\ \text{m}^2$$

در نهایت از رابطهٔ $\frac{N_s}{N_i}=\sigma nt$ کسری از ذرات پراکنده شده N_s(Scattered) را نسبت به ذرات فرودی N_i در زاویهٔ بیش از ۶۰° تعیین می‌کنیم:

$$\frac{N_s}{N_i}=۴۶/۸\times ۱۰^{-۲۸}\times ۵/۸\times ۱۰^{۲۸}\times ۲/۵\times ۱۰^{-۷}\simeq ۶۷۸\times ۱۰^{-۷}=۶/۷۸\times ۱۰^{-۵}$$

توجه کنید که در حل چنین سؤالاتی باید برخی ثابت های مهم، مانند عدد آووگادرو $(N_A=۶/۰۲۲\times ۱۰^{۲۳})$ و $(K=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}=۹\times ۱۰^{۹})$ و... را بدانیم.

رابطه‌ی پراکندگی الگوی رادرفورد

برای یافتن احتمال پراکندگی ذرات α در گستره‌ی زاویه کوچک θ، باید پارامتر برخورد در گستره‌ی کوچک db در محدوده‌ی b قرار گیرد این کسر از اتم‌های پراکنده شده یعنی df عبارت است از:

$$df=nt(۲\pi bdb)$$

از رابطه $b(\theta)$ نسبت به θ مشتق می‌گیریم.

$$\frac{db}{d\theta}=\frac{zZ}{۲E_k}\frac{e^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{۱}{۲}(-\text{cosec}^۲(\frac{\theta}{۲}))$$

که علامت منفی نشان دهنده افزایش θ در اثر کاهش b است. با جایگذاری در رابطه df داریم:

$$\Rightarrow |df|=۲n\pi t(\frac{zZ}{۲E_k})(\frac{e^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ})\text{cosec}^۲(\frac{\theta}{۲})\cot\frac{\theta}{۲}d\theta$$

فرض کنید فاصله‌ی آشکار ساز که در زاویه θ قرار دارد از مرکز پراکندگی r باشد.

احتمال آنکه پرتابه‌ای به داخل این آشکارساز پراکنده شود به df وابسته است که برابر احتمال گذار ذره‌ای از یک حلقه به شعاع $r\sin\theta$ و پهنای $rd\theta$ می‌باشد.

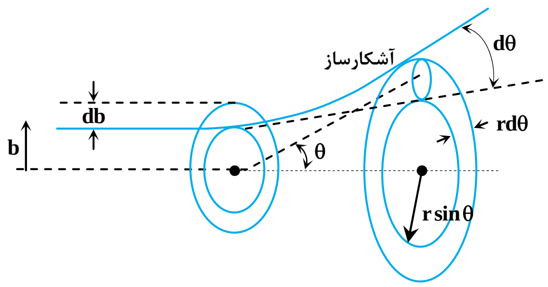
مساحت حلقه برابراست با:

$$dA=(۲\pi r\sin\theta)rd\theta$$

با تعریف احتمال پراکندگی در واحد سطح یعنی $N(\theta)$ داریم:

$$N(\theta)=\frac{|df|}{dA}=\frac{nt}{۴r^۲}(\frac{zZ}{۲E_k})^۲(\frac{e^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ})^۲\frac{۱}{\sin^۴\frac{\theta}{۲}}$$

که به رابطه‌ی پراکندگی رادرفورد مشهور است و در مبحث دینامیک برخورد دو جسم به جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ در مکانیک کلاسیک به راحتی قابل تأیید است.



شکل۴: الگوی پراکندگی و حلقه‌ای به قطر $r\sin\theta$ و ضخامت $rd\theta$ که آشکارساز درون آن واقع شده و ذراتی که از حلقه‌ی کوچک به شعاع b و ضخامت db عبور کرده و پراکنده می‌شوند را آشکار می‌کند.

یکی از شگفتی‌های رابطه‌ی رادرفورد در موفقیت‌آمیز بودن آن بعد از نظریه کوانتومی است که بدون تغییر باقی ماند، از این رو همین رابطه‌ی رادرفورد که از دیدگاه کلاسیک هم بدست می‌آید در بررسی‌های اتمی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

نکته: در مدل رادرفورد حداقل فاصله ذره‌ای که به سمت هسته پرتاب شده با پارامتر برخورد b متفاوت است که از اصل پایستگی انرژی و یافتن نقاط اکسترموم انرژی پتانسیل $U(r)$، می‌توان r_{min} را تعیین کرد.

$$\frac{dU}{dr}|_{r_{min}}=\circ \text{ و } U=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{zZe^۲}{r}$$

همچنین انرژی جنبشی برابراست با:

$$E_k=\frac{۱}{۲}mv^۲$$