



سؤالات آزمون کارشناسی ارشد ۹۴

زبان عمومی و تخصصی

Part A: Vocabulary

Directions: Choose the word or the phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark your answer sheet.

- 1- Your new spokesperson is very and clearly comfortable speaking in front of large audiences.
1) impatient 2) willful 3) voluble 4) modish
- 2- That ring is made from an of minerals; if it were pure gold, it would never hold its shape.
1) occurrence 2) elaboration 3) intervention 4) amalgam
- 3- Fortunately, the parliament the new law that would prohibit companies from discriminating according to race in their hiring practices.
1) abridged 2) ratified 3) magnified 4) persuaded
- 4- The teacher did not appreciate the student's and gave him detention.
1) sarcasm 2) advent 3) blunder 4) reverie
- 5- The police have not yet been able to find the missing child; to all of the searchers, the child's location is still a great
1) fallacy 2) enigma 3) remorse 4) sympathy
- 6- I really feel sad to say that we are now witnessing environmental destruction on an scale.
1) implicit 2) inadvertent 3) articulated 4) unprecedented
- 7- Ted was severelyby his colleagues for his use of offensive language when addressing the guests.
1) deviated 2) castigated 3) resigned 4) hardened
- 8- As shrinking military budgets add to economic woes, arms manufacturers areseeking to expand their markets.
1) nocturnally 2) equivocally 3) indecisively 4) aggressively
- 9- Much to my, I should confess that we don't have a good indication that women are actually taking better care of themselves today.
1) indifference 2) verification 3) chagrin 4) jubilation
- 10- It is to be remembered that living in a country is no guarantee you will necessarily live a long life.
1) prosperous 2) conceptual 3) conceivable 4) long-winded

Part B: Cloze Passage

Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark your answer sheet.

The human question is the big one. (11)..... on humans are very thin. Most human populations that are forced to survive on low-calorie diets are also malnourished and are as likely (12)..... from vitamin and mineral deficiencies. (13)..... is on the Japanese island of Okinawa, Walford notes; "The Okinawans have about (14) the calorie intake of the rest of Japan. They eat mainly fish and vegetables. They have as much as 40 times the incidence of people (15) 100. They have less diabetes, tumors and so forth than the rest of Japan.



- ✎ 11- 1) The data exist
3) Existing data that are
2) The data whose existence
4) The existing data
- ✎ 12- 1) not to die as prematurely
3) so not to prematurely die
2) as not to die prematurely
4) not to die prematurely as
- ✎ 13- 1) Only one exception to know
3) The only known exception
2) The only exception to know
4) One exception is only known
- ✎ 14- 1) 70 percent of 2) a percentage of 70 3) 70 percent 4) 70 of the percentage
- ✎ 15- 1) in 2) for 3) over 4) with

PART C: Reading comprehension

Directions: Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3) or (4) and then mark the correct choice on your answer sheet.

PASSAGE 1:

Reflection is the change in direction of a wave at an interface between two dissimilar media such that the wave returns into the medium from which it originated. The most common example of this is light waves reflecting from a mirror. But sound and water waves can also be reflected. The law of reflection states that the angle of incidence is equal to the angle of reflection. Reflection may occur whenever a wave travels from a medium of a given refractive index to another medium with a different index. A certain fraction of the light is reflected from the interface and the remainder is retracted. However, when the wave is moving from a dense medium into one less dense. That is the refractive index of the first is greater than the second, a critical angle exists which will create a phenomenon known as total internal reflection. In this situation, all of the wave incident at an angle greater than the critical angle is reflected. When a wave reflects off a more dense material (higher refractive index) than that from which it originated, It undergoes a 180° phase change. In contrast, a less dense, lower refractive index material will reflect light in phase. Fiber optics makes use of the phenomenon of total internal reflection. The light traveling through a fiber reflects off the walls at angles greater than the critical angle and thus keeps the wave confined to the narrow fiber

- ✎ 16- Which of the following is the best title for the passage?
1) Fiber Optics 2) Light Reflection
3) Application of Mirrors 4) Sound Waves
- ✎ 17- What does the pronoun "it" in line 2 refer to?
1) Wave 2) Medium 3) Interface 4) Direction
- ✎ 18- Which of the following is true when a wave is moving from a dense medium into a less dense one?
1) The law of reflection will be violated
2) The angle of incidence will be equal to the angle of refraction.
3) No part of the light will be refracted.
4) The refractive index of the first medium is greater than the second one.
- ✎ 19- What does fiber optics utilize?
1) The refractive index 2) The critical angle
3) Total internal reflection 4) A phase change greater than 180°
- ✎ 20- Which of the following is the word "confined" in the last line closest in meaning to?
1) Limited 2) Compiled 3) Linked 4) Contracted

پاسخنامه آزمون کارشناسی ارشد ۹۴

زبان عمومی و تخصصی

- ۱- گزینه «۳» سنگ‌گوی جدید شما بسیار حراف است و به راحتی جلوی تعداد کثیری از حضار سخنرانی می‌کند.
(۱) بی‌طاقت - بی‌تحمل (۲) خودسر - لجوج (۳) حراف - پرحرف (۴) متداول - مرسوم
- ۲- گزینه «۴» آن انگشتر از آمیزه (مخلوط) چندین ماده معدنی تشکیل شده است، اگر طلای خالص بود هرگز شکل و حالتش را حفظ نمی‌کرد.
(۱) رخداد - اتفاق (۲) توضیح - شرح مبسوط (۳) پادرمیانی - مداخله (۴) آمیزه - مخلوط
- ۳- گزینه «۲» خوشبختانه، پارلمان قانون جدیدی را تصویب کرده که شرکت‌ها را از تبعیض نژادی (در) هنگام استخدام نیروی کار منع کند.
(۱) خلاصه کردن - به اختصار کردن (۲) تصویب کردن - به تصویب رساندن (۳) بزرگ کردن - غلو کردن - ستایش کردن (۴) متقاعد کردن - مجاب کردن
- ۴- گزینه «۱» معلم از متلک دانش‌آموز خوشش نیامد و او را تنبیه کرد.
(۱) متلک - کنایه - طعنه (۲) ورود - پیدایش (۳) اشتباه احمقانه - اشتباه لپی (۴) رؤیا - خواب
- ۵- گزینه «۲» پلیس هنوز نتوانسته آن بچه‌ی گم شده را پیدا کند. کماکان جای آن بچه، برای تمام جستجوگرها، یک راز بزرگ محسوب می‌شود.
(۱) سفسطه - استدلال غلط (۲) راز - معما - چیستان (۳) پشیمانی - ندامت (۴) همدردی - ترحم
- ۶- گزینه «۴» واقعاً ناراحتم که بگویم ما هم اکنون شاهد تخریب محیطی زیادی (بی‌سابقه‌ای) هستیم.
(۱) ضمنی - تلویحی - بی‌چون و چرا (۲) غیر عمدی - ناخواسته (۳) واضح - گویا - شیوا (۴) قابل توجه - بی‌سابقه - بی‌نظیر - زیاد
- ۷- گزینه «۲» تد به خاطر استفاده از حرف‌های رنجش آور هنگام صحبت با مهمان‌ها، سخت مورد انتقاد همکارانش قرار گرفت.
(۱) گمراه شدن - کج روی کردن (۲) سخت مورد انتقاد قرار گرفتن (۳) استعفا دادن - کناره‌گیری کردن (۴) سخت شدن - سفت شدن
- ۸- گزینه «۴» از آن جایی که کاهش بودجه نظامی بر معضلات اجتماعی می‌افزاید، تولیدکنندگان (سازنده‌های) اسلحه جسورانه در پی توسعه بازارشان هستند.
(۱) شبانه (۲) به طور دو پهلو (۳) بادودلی - با تردید و شک (۴) جسورانه - با فشار و تحمیل - فعالانه
- ۹- گزینه «۳» با سرافکندگی (تأثر) زیاد، باید اقرار کنم ما دلیل و گواه زیادی نداریم که حاکی از این باشد که واقعاً امروزه خانم‌ها مراقبت بهتری از خود به عمل می‌آورند.
(۱) بی‌علاقه‌گی - بی‌توجهی - بی‌طرفی - بی‌اعتنایی (۲) اثبات - تأیید - تحقیق (۳) سرافکندگی - تأثر (۴) فیروزی - سرمستی
- ۱۰- گزینه «۱» باید به خاطر داشت که زندگی در یک کشور ثروتمند، لزوماً تضمین کننده این نیست که شما عمر درازی خواهید داشت.
(۱) ثروتمند - در رفاه (۲) ذهنی - معنوی - مفهومی (۳) قابل تصور - باور کردنی (۴) پرحرف - روده‌دراز

ترجمه متن

مسئله انسان معمای بزرگی است. اطلاعات موجود در خصوص انسان نامستدل است. اکثر انسان‌هایی که مجبورند برای ادامه زندگی (زنده ماندن) به رژیم‌های غذایی کم کالری روی آورند، دچار سوء تغذیه می‌شوند و احتمالاً قبل از موعد به خاطر کمبود مواد معدنی و ویتامین نخواهند مرد. تنها مورد استثناء شناخته شده (واثق) در جزیره اوکیناوا واقع در ژاپن است. والفورد یادآور می‌شود که ساکنین اوکیناوا حدود ۷۰ درصد از جذب کالری را در کل ژاپن دارا هستند. آن‌ها عمدتاً ماهی و سبزیجات می‌خورند. امکان شیوع بیماری در افراد بالای ۱۰۰ سال ۴۰ برابر بیشتر است. آن‌ها کمتر به مرض قند و تومور مبتلا می‌شوند و نسبت به بقیه مناطق ژاپن بسیار جلو (پیش) هستند.

۱۱- گزینه «۴» طبق الگو داریم:

اسم + حرف اضافه + اسم + صفت + حرف تعریف

The existing data on humans

نکته: گزینه ۲ با مفهوم متن همخوانی ندارد. (اطلاعاتی که موجودیت آن در انسان نامستدل است).

۱۲- گزینه «۲» طبق الگو داریم:

as + قید یا صفت + as + فعل ربطی

۱۳- گزینه «۳» طبق الگو داریم:

اسم + صفت + قید + حرف تعریف

The only known exception

۱۴- گزینه «۱» 70 percent of به معنی (۷۰ درصد) است.

نکته: از آنجا که بعد از نقطه چین، اسم آمده (the calorie)، لذا نیاز به حرف اضافه است. (علت نادرست بودن گزینه ۳)

نکته: گزینه‌های دیگر از لحاظ مفهومی و کاربردی صحیح نیستند.

۱۵- گزینه «۳» با توجه به مفهوم تست، گزینه‌های دیگر صحیح نیستند. (امکان شیوع بیماری در افراد بالای ۱۰۰ سال ۴۰ برابر بیشتر است)

(۱) در (۲) برای (۳) بالای (۴) با

متن ۱:

انعکاس، تغییر مسیر یک موج در یک رابط بین دو رسانه غیرمشابه است، به طوری که موج به میانجی که از آن منشأ شده، برگردد. معمول‌ترین مثال از این انعکاس، امواج نور از یک آینه است، اما صدا و امواج آب نیز منعکس می‌شوند. قانون انعکاس بیان می‌کند که زاویه رویداد برابر است با زاویه انعکاس. هر وقت یک موج از یک میانجی با ضریب شکست مشخص به یک میانجی دیگر با ضریب متفاوت عبور کند انعکاس رخ می‌دهد. بخش خاصی از نور از رابط منعکس می‌شود و مابقی می‌شکند. اگر چه، وقتی که موج از یک میانجی متراکم به کم متراکم دیگری حرکت می‌کند که ضریب شکست اولی بالاتر از دومی باشد، یک زاویه بحرانی وجود دارد که پدیده‌ای به نام مجموع انعکاس داخلی را بوجود می‌آورد. در این موقعیت، تمام رویداد موج در زاویه‌ای بالاتر از زاویه بحرانی منعکس می‌شود. وقتی که موجی از یک ماده متراکم‌تر (ضریب شکست بالاتر) منعکس شود نسبت به جایی که به وجود آمده، یک تغییر فاز ۱۸۰ درجه‌ای را متحمل می‌شود. در مقابل آن، یک ماده با ضریب شکست پایین‌تر و تراکم کمتر در فاز، نور را منعکس خواهد کرد. فیبرهای نوری پدیده مجموع انعکاس داخلی را مورد استفاده قرار می‌دهد. نور در حال سفر از طریق فیبر از دیوارها در زاویه‌ای بالاتر از زاویه بحرانی منعکس می‌شود و لذا موج را در فیبر باریک محدود شده نگه می‌دارد.

۱۶- گزینه «۲» کدام یک از گزینه‌های زیر، بهترین عنوان برای متن است؟

(۱) فیبرهای نوری (۲) انعکاس نور (۳) کاربرد آینه‌ها (۴) امواج صدا

۱۷- گزینه «۱» ضمیر آن در خط ۲ به چه چیزی اشاره می‌کند؟

(۱) موج (۲) میانجی (۳) رابط (۴) جهت

۱۸- گزینه «۴» کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد زمانی که موجی از یک میانجی متراکم به میانجی دیگری با تراکم کم حرکت می‌کند درست می‌باشد؟

(۱) قانون انعکاس نقض خواهد شد. (۲) زاویه رویداد با زاویه شکست برابر خواهد شد. (۳) هیچ قسمتی از نور شکسته نخواهد شد. (۴) ضریب شکست میانجی اول بالاتر از دومی است.

۱۹- گزینه «۳» فیبرهای نوری چه چیزی را مورد استفاده قرار می‌دهد؟

(۱) ضریب شکست (۲) زاویه بحرانی (۳) مجموع انعکاس داخلی (۴) تغییر فاز بالاتر از ۱۸۰ درجه

۲۰- گزینه «۱» کدام از گزینه‌های زیر به کلمه «محدود» در سطر آخر نزدیک‌تر است؟

(۱) محدود (۲) وارد (۳) مرتبط (۴) منقبض

29- The phrase "to no avail" in paragraph 3 is closest in meaning to

- 1) by all means
- 2) without suffering
- 3) without success
- 4) with no interruption

30- The passage is most probably

- 1) the abstract of a scientific paper
- 2) part of an encyclopedic article
- 3) the literature review section of a scientific paper
- 4) part of an article in a science journal

دروس تخصصی ۱: فیزیک پایه (۱ و ۲ و ۳)، فیزیک جدید، ترمودینامیک و مکانیک آماری، ریاضی فیزیک (۱ و ۲)

۳۱- بردار مکان ذره‌ای که در صفحه $x-y$ در حرکت است به شکل $\vec{r} = (3t + 2)\hat{i} + (t + 2)\hat{j}$ است که r بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است.

شتاب شعاعی (مؤلفه شتاب در امتداد بردار مکان) ذره در لحظه $t > 0$ بر حسب $\frac{m}{s^2}$ کدام است؟

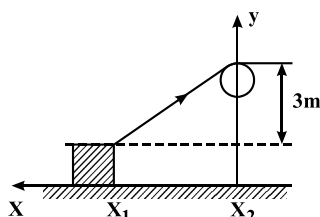
- (۱) صفر
- (۲) $\frac{32}{(10t^2 + 16t + 8)^{3/2}}$
- (۳) $\frac{-32}{(10t^2 + 16t + 8)^{3/2}}$
- (۴) $\frac{2}{(10t^2 + 16t + 8)^{3/2}}$

۳۲- کدام یک از نیروهای زیر پایستار نیست؟ (n عدد ثابتی است.)

- (۱) $x^2(3 \sin(yz)\hat{x} + xz \cos(yz)\hat{y} + xy \cos(yz)\hat{z})$
- (۲) $(x^2 + y^2 + z^2)^n(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})$
- (۳) $e^{xyz}(yz\hat{x} + xz\hat{y} + xy\hat{z})$
- (۴) $\cos(yz)\hat{x} + \cos(zx)\hat{y} + \cos(xy)\hat{z}$

۳۳- مطابق شکل زیر بسته‌ای به جرم 16kg روی سطح افقی بدون اصطکاکی توسط ریسمان سبکی از نقطه $x_1 = 4\text{m}$ تا $x_2 = 0$ جابه‌جا می‌شود.

کشش در ریسمان 20N و بسته ابتدا ساکن است. اگر بسته همواره روی زمین بماند، سرعت بسته در نقطه‌ی x_2 چند متر بر ثانیه است؟



- (۱) $\sqrt{5}$
- (۲) $2\sqrt{2}$
- (۳) ۲
- (۴) $\sqrt{2/5}$

۳۴- قطعه‌های (۱) و (۲) به ترتیب به جرم‌های 1kg و 2kg روی سطح افقی بدون اصطکاکی هر دو در حال سکون قرار دارند. گلوله‌ای به جرم 10g در امتداد افق با تندی V_0 به سمت قطعه (۱) شلیک می‌شود و پس از خروج از آن وارد بلوک (۲) می‌شود و درون آن ساکن می‌شود. اگر تندی نهایی بلوک

شماره (۱) برابر $\frac{2}{5}V_0$ و بلوک شماره (۲) برابر $\frac{3}{5}V_0$ باشد، اندازه‌ی V_0 چند $\frac{m}{s}$ بوده است؟



- (۱) ۲۰۰
- (۲) ۴۰۳
- (۳) ۶۰۳
- (۴) ۸۰۳

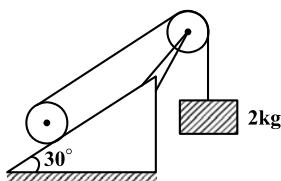
۳۵- ورقه‌ای به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع با توزیع جرمی یکنواخت به جرم M و طول ضلع a حول یکی از اضلاع‌اش دوران می‌کند. لختی دورانی

مثلث حول این ضلع کدام است؟

- (۱) $\frac{Ma^2}{3}$
- (۲) $\frac{Ma^2}{4}$
- (۳) $\frac{Ma^2}{6}$
- (۴) $\frac{Ma^2}{8}$

۳۶- استوانه توپری یکنواختی به جرم 10kg مطابق شکل روی سطح شیب‌داری با زاویه شیب 30° بدون لغزش حرکت می‌کند. نخ از روی قرقره بدون جرمی عبور کرده و به مکعبی به جرم 2kg متصل شده است. مکعب می‌تواند فقط در امتداد قائم حرکت کند. مقدار شتاب مکعب کدام است؟

(g شتاب گرانش در سطح زمین است. لختی دورانی استوانه‌ی توپری به جرم m و شعاع R حول محورش $\frac{1}{2}MR^2$ است.)



- (۱) $\frac{g}{3}$
- (۲) $\frac{2g}{23}$
- (۳) $\frac{g}{23}$
- (۴) $\frac{2g}{3}$



۳۷- چهار ذره یکسان هر یک به جرم $m = 5 \text{ g}$ روی رؤس یک مربع به ضلع $d = 3 \text{ cm}$ قرار دارند. اگر اندازه d به $\frac{d}{3}$ کاهش یابد، تغییر در

$$(G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{N.m}^2}{\text{kg}^2})$$

انرژی پتانسیل گرانشی این مجموعه چند ژول خواهد شد؟

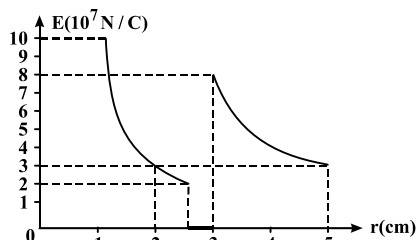
$$+6 \times 10^{-12} \text{ (۴)}$$

$$-6 \times 10^{-12} \text{ (۳)}$$

$$+3 \times 10^{-12} \text{ (۲)}$$

$$-3 \times 10^{-12} \text{ (۱)}$$

۳۸- بار مثبت نقطه‌ای q در مرکز یک پوسته کروی فلزی قرار دارد. نمودار اندازه میدان الکتریکی برحسب فاصله شعاعی r در شکل زیر نشان داده شده است. بار الکتریکی خالص روی پوسته کروی چند میکروکولن است؟



$$2/1 \text{ (۱)}$$

$$6/6 \text{ (۲)}$$

$$8 \text{ (۳)}$$

$$9/3 \text{ (۴)}$$

۳۹- ذره‌ای به جرم 10 g و بار الکتریکی $8 \text{ } \mu\text{C}$ در جلوی یک تیغه بزرگ نارسای نازک بارداری با چگالی بار سطحی $\sigma = 90 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ قرار دارد. در

لحظه‌ای که فاصله ذره با تیغه 3 m است، با تندی $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ به تیغه نزدیک می‌شود. حداقل فاصله‌ای که ذره از تیغه پیدا می‌کند تقریباً چند متر است؟

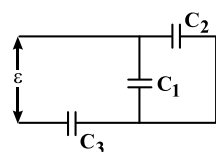
$$3/2 \text{ (۴)}$$

$$2/8 \text{ (۳)}$$

$$1/6 \text{ (۲)}$$

$$1/4 \text{ (۱)}$$

۴۰- در شکل زیر $C_1 = 20 \text{ } \mu\text{F}$ ، $C_2 = 4 \text{ } \mu\text{F}$ ، $C_3 = 8 \text{ } \mu\text{F}$ و $\varepsilon = 150 \text{ V}$ و مدار در حالت تعادل است. اگر خازن C_3 دچار فروریزش الکتریکی شود به‌طوری که معادل یک سیم رسانا گردد، پس از رسیدن به تعادل، بار الکتریکی خازن C_1 چند برابر بار خود قبل از این فروریزش خواهد شد؟



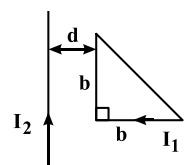
$$1/6 \text{ (۱)}$$

$$3 \text{ (۲)}$$

$$4 \text{ (۳)}$$

$$6 \text{ (۴)}$$

۴۱- حلقه جریان I_1 به شکل مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین به ضلع $b = 2d$ مطابق شکل زیر در کنار یک سیم مستقیم طویل با جریان I_2 قرار دارد. اندازه القای متقابل این مجموعه کدام است؟



$$\frac{\mu_0 d}{\pi} [3 \ln(\frac{3}{2}) - 1] \text{ (۲)}$$

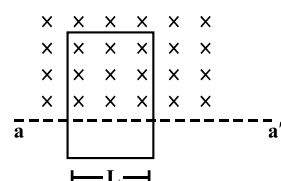
$$\frac{\mu_0 d}{2\pi} [3 \ln 3 - 2] \text{ (۱)}$$

$$\frac{\mu_0 d}{2\pi} [3 \ln 3 - 1] \text{ (۴)}$$

$$\frac{\mu_0 d}{2\pi} [3 \ln(\frac{3}{2}) - 1] \text{ (۳)}$$

۴۲- یک حلقه رسانای بزرگ مستطیلی شکل به عرض $L = 2 \text{ m}$ ، مقاومت $R = 200 \text{ } \Omega$ و جرم $m = 50 \text{ g}$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 7 \text{ T}$ که جهت آن عمود بر صفحه حلقه و به سمت داخل صفحه کاغذ است و فقط در بالای خط aa' وجود دارد، آویزان است. در یک لحظه حلقه رها

می‌شود. حلقه تا رسیدن به تندی حدی v_c شتاب می‌گیرد. با چشم‌پوشی از مقاومت هوا، اندازه v_c چند $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ است؟ $(g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$



$$0/17 \text{ (۱)}$$

$$0/5 \text{ (۲)}$$

$$1/0 \text{ (۳)}$$

$$1/5 \text{ (۴)}$$

۴۳- دو صفحه یک خازن تخت هر یک دایره‌ای به شعاع $R = 6 \text{ cm}$ و فاصله آن دو از هم 4 mm است. یک اختلاف پتانسیل متناوب $V = 300 \sin(50t)$ که در آن t برحسب ثانیه و V برحسب ولت داده شده به دو سر خازن اعمال می‌شود. مقدار بیشینه میدان مغناطیسی القایی در لبه خازن ($r = R$) تقریباً چقدر است؟

$$2/5 \text{ mT (۴)}$$

$$1/25 \text{ pT (۳)}$$

$$2/5 \text{ } \mu\text{T (۲)}$$

$$1/25 \text{ nT (۱)}$$



«اما مسئله هیجان‌انگیز آن است که آن‌ها قادر خواهند بود آن را رد کنند»، یا ممکن است با احتمال کم‌تر آن را تأیید کنند. مشاهدات اخت‌فیزیکی نشان می‌دهند که ماده تاریک غیرمرئی ۸۵٪ کل مواد را تشکیل می‌دهد. تصور بر آن است که کهکشان خودمان در ابری بزرگ از ماده تاریک قرار دارد. اما دانشمندان هنوز نمی‌دانند که ماده تاریک چیست. آزمایشگران برای دهه‌ها به شکار ذراتی از آن که در همین نزدیکی‌ها هستند پرداخته‌اند که اکثراً بی‌نتیجه بوده است. برای جست‌وجوی ماده تاریک، فیزیکدان‌ها سنسورهای فوق حساسی را که از پرتوهای کیهانی و سایر تابش‌های زمینه محافظت شده‌اند در اعماق زمین قرار می‌دهند.

۲۶- گزینه «۱» از آنچه که در ذیل می‌آید کدامیک بهترین توصیف را در مورد موضوع متن می‌کند؟

(۱) آزمایشی جدید ادعای جنجال برانگیز در مورد ماده تاریک را با تردید مواجه می‌کند.

(۲) آزمایشگاه ملی گرن ساسوی ایتالیا ادعاهای اشتباهی کرده است.

(۳) فیزیکدان‌هایی که با آشکارساز ۱۰۰-COSINE کار می‌کنند می‌گویند که ذرات ماده تاریک را شناسایی کرده‌اند.

(۴) کاترین فریز و همکارانش در دانشگاه میشیگان ادعاهای جنجال‌برانگیزی در مورد ماده تاریک کرده‌اند.

۲۷- گزینه «۲» کلمه «its» در پاراگراف ۱ به اشاره دارد.

(۱) گرانش

(۲) اولین آزمایش

(۳) ماده مرموز

(۴) ادعای جنجال‌برانگیز DAMA

۲۸- گزینه «۲» کدامیک از توضیحات ذیل درست است؟

(۱) مشاهدات اخت‌فیزیکی نشان می‌دهند که پرتوهای کیهانی ۸۵٪ از کل مواد را تشکیل می‌دهند.

(۲) برای جست‌وجوی ماده تاریک فیزیکدانان در حال انجام آزمایشات زیرزمینی هستند.

(۳) کاترین فریز تقریباً مطمئن است که فیزیکدانان در کره جنوبی وجود (سیگنال) DAMA را اثبات می‌کنند.

(۴) محققان در دانشگاه میشیگان در آن آربور برای اتمام آزمایش به سال‌های بیشتری احتیاج دارند.

۲۹- گزینه «۳» عبارت «to no avail» در پاراگراف ۳ از لحاظ معنی به نزدیک‌تر است.

(۱) به هر طریق

(۲) بدون رنج

(۳) بدون موفقیت

(۴) بدون وقفه

۳۰- گزینه «۴» این متن به احتمال زیاد می‌باشد.

(۱) چکیده یک مقاله علمی

(۲) بخشی از یک مقاله دایرةالمعارفی

(۳) بخش پیشینه پژوهش (مطالب پذیرفته شده علمی) از یک مقاله علمی

(۴) بخشی از یک مقاله در یک مجله علمی

دروس تخصصی ۱: فیزیک پایه (۱ و ۲)، فیزیک جدید، ترمودینامیک و مکانیک آماری، ریاضی فیزیک (۱ و ۲)

۳۱- گزینه «۱» با دو بار مشتق گرفتن از بردار مکان به راحتی می‌توانیم مؤلفه شتاب در راستای بردار مکان را به دست آوریم.

$$\vec{r} = (r\hat{i} + r\hat{j}) \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\hat{i} + \hat{j} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

۳۲- گزینه «۴» شرط پایستار بودن نیروی $\vec{F}$ این است که کرل آن صفر شود، یعنی:

لازم است این شرط را برای یک‌یک گزینه‌ها بررسی کنیم. می‌دانیم که کرل نیروی F برابر است با:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

$$\vec{F} = x^r (r \sin(yz) \hat{x} + xz \cos(yz) \hat{y} + xy \cos(yz) \hat{z})$$

حال به بررسی جداگانه گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$F_x = x^r \sin yz \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_x}{\partial y} = x^r z \cos yz \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} = x^r y \cos yz \end{cases}$$

$$F_y = x^r z \sin yz \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_y}{\partial x} = x^{r-1} z \sin yz \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = x^r \cos yz - x^r yz \sin yz \end{cases}$$

$$F_z = x^r y \cos yz \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_z}{\partial x} = r x^{r-1} y \cos yz \\ \frac{\partial F_z}{\partial y} = x^r \cos yz - x^r yz \sin yz \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \hat{x}(x^r \cos yz - x^r yz \sin yz - x^r \cos yz + x^r yz \sin yz) + \hat{y}(r x^{r-1} y \cos yz - r x^r y \cos yz)$$

$$+ \hat{z}(r x^{r-1} z \cos yz - r x^r z \cos yz) = 0$$

بنابراین این نیرو یک نیروی پایستار است.

$$(r): \vec{F} = (x^r + y^r + z^r)^n (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})$$

$$F_x = (x^r + y^r + z^r)x \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_x}{\partial y} = r n x y (x^r + y^r + z^r)^{n-1} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} = r n x z (x^r + y^r + z^r)^{n-1} \end{cases}$$

$$F_y = (x^r + y^r + z^r)y \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_y}{\partial x} = r n x y (x^r + y^r + z^r)^{n-1} \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = r n y z (x^r + y^r + z^r)^{n-1} \end{cases}$$

$$F_z = (x^r + y^r + z^r)z \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_z}{\partial x} = r n x z (x^r + y^r + z^r)^{n-1} \\ \frac{\partial F_z}{\partial y} = r n y z (x^r + y^r + z^r)^{n-1} \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \hat{x}(r n y z - r n y z)(x^r + y^r + z^r)^{n-1} + \hat{y}(r n x z - r n x z)(x^r + y^r + z^r)^{n-1} + \hat{z}(r n x y - r n x y)(x^r + y^r + z^r)^{n-1} = 0$$

بنابراین این نیرو نیز یک نیروی پایستار است.

$$(r): \vec{F} = e^{xyz} (yz\hat{x} + zx\hat{y} + xy\hat{z})$$

$$F_x = yze^{xyz} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_x}{\partial y} = ze^{xyz} + xyz^r e^{xyz} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} = ye^{xyz} + xy^r ze^{xyz} \end{cases}$$

$$F_y = zxe^{xyz} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_y}{\partial x} = ze^{xyz} + yz^r xe^{xyz} \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = xe^{xyz} + x^r yze^{xyz} \end{cases}$$

$$F_z = xye^{xyz} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_z}{\partial x} = ye^{xyz} + xy^r ze^{xyz} \\ \frac{\partial F_z}{\partial y} = xe^{xyz} + x^r yze^{xyz} \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \hat{x}(xe^{xyz} + x^r yze^{xyz} - xe^{xyz} - x^r yze^{xyz}) + \hat{y}(ye^{xyz} + xy^r ze^{xyz} - ye^{xyz} - xy^r ze^{xyz})$$

$$+ \hat{z}(ze^{xyz} + yz^r xe^{xyz} - ze^{xyz} - xyz^r e^{xyz}) = 0$$

پس این نیرو نیز یک نیروی پایستار است.

$$(r): \vec{F} = (\cos yz)\hat{x} + (\cos zx)\hat{y} + (\cos xy)\hat{z}$$

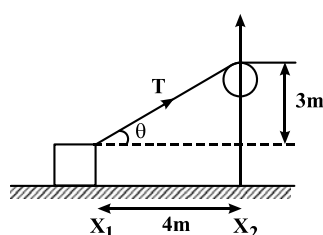
$$F_x = \cos yz \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_x}{\partial y} = -z \sin yz \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} = -y \sin yz \end{cases}$$

$$F_y = \cos zx \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_y}{\partial x} = -z \sin zx \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = -x \sin zx \end{cases}$$

$$F_z = \cos xy \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_z}{\partial x} = -y \sin xy \\ \frac{\partial F_z}{\partial y} = -x \sin xy \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \hat{x}(-x \sin xy + x \sin zx) + \hat{y}(-y \sin zy + y \sin xy) + \hat{z}(-z \sin zx + z \sin yz) \neq 0$$

پس این نیرو در شرط پایستاری صدق نمی‌کند و یک نیروی ناپایستار است.



۳۳- گزینه «۱» نیرویی که باعث حرکت این جسم روی سطح افقی می‌شود نیروی کشش طناب است. اما زاویه این نیرو هر لحظه در حال تغییر است. بنابراین مسیر حرکت جسم را به قطعات کوچکی تقسیم می‌کنیم و برای هر یک از آنها کار انجام شده را محاسبه می‌کنیم و سپس با انتگرال‌گیری از جواب‌ها می‌توانیم کل کار انجام شده را به دست آوریم. در نهایت با استفاده از قضیه کار و انرژی می‌توانیم سرعت حرکت جسم را در انتهای مسیر محاسبه کنیم.

work showed that light and other waves he measured were all a form of electromagnetic radiation that could be defined by Maxwell's equations. He proved through his work that electromagnetic waves can and do move through the air. In addition, Hertz focused on a concept called the photoelectric effect, which occurs when an object with electrical charge loses that charge very quickly when it is exposed to light, in his case, ultraviolet radiation. He observed and described the effect, but never explained why it happened. That was left to Albert Einstein, who published his own work on the effect. He suggested that light (electromagnetic radiation) consists of energy carried by electromagnetic waves in little packets called quanta.

Hertz's studies and Einstein's later work eventually became the basis for an important branch of physics called quantum mechanics. Hertz and his student Phillip Lenard also worked with cathode rays, which are produced inside vacuum tubes by electrodes.

26- Which of the following statements is true?

- 1) Between 1879 and 1889, Maxwell worked on his famous equations.
- 2) Hertz worked in mathematical physics until his death in 1879.
- 3) Hertz constructed a simple dipole antenna with a spark gap between the elements.
- 4) Maxwell fully proved the existence of electromagnetic waves.

27- The word "their" in paragraph 2 refers to

- 1) polarization and reflections
- 2) the characteristics
- 3) the fields
- 4) experiments

28- Which of the following statements is true?

- 1) Einstein observed and described the photoelectric effect, but never explained why it happened.
- 2) Hertz proved that electromagnetic waves can and do move through the air.
- 3) Hertz suggested that light consists of energy carried by electromagnetic waves.
- 4) Maxwell focused on a concept called the photoelectric effect.

29- The word "it" in paragraph 2 refers to

- 1) that charge
- 2) electrical charge
- 3) an object
- 4) ultraviolet radiation

30- Which of the following worked with cathode rays?

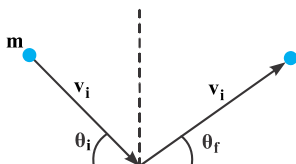
- 1) Maxwell and Phillip Lenard
- 2) Hertz and Maxwell
- 3) Albert Einstein
- 4) Hertz and Phillip Lenard

دروس تخصصی ۱: فیزیک پایه (۱ و ۲ و ۳)، فیزیک جدید، ترمودینامیک و مکانیک آماری، ریاضی فیزیک (۱ و ۲)

۳۱- معادله حرکت یک ذره که در راستای x در حرکت است برابر $x = v_0 t + v_0 (b^{-1} - t) \ln(1 - bt)$ است که در آن v_0 و b ضرایبی ثابت هستند. معادله سرعت این ذره کدام است؟

- ۱) $v_0(2 - \ln(1 - bt))$
- ۲) $-v_0 \ln(1 - bt)$
- ۳) $v_0(1 - bt - \ln(1 - bt))$
- ۴) $v_0(1 + bt - \ln(1 - bt))$

۳۲- گلوله‌ای به جرم m با تندی v_i و زاویه θ_i مطابق شکل زیر به سطح افقی ثابت بدون اصطکاکی برخورد غیرکشسان می‌کند به طوری که مؤلفه عمود بر سطح سرعت گلوله α برابر مقدار این مؤلفه قبل از برخورد است ($0 < \alpha < 1$). پس از برخورد، θ_f زاویه راستای حرکت گلوله نسبت به سطح افقی کدام است؟



- ۱) $\tan^{-1}(\alpha^{-1} \tan \theta_i)$
- ۲) $\sin^{-1}(\alpha^{-1} \sin \theta_i)$
- ۳) $\tan^{-1}(\alpha \tan \theta_i)$
- ۴) $\sin^{-1}(\alpha \sin \theta_i)$

۳۳- یک میله یکنواخت به طول L از یک انتها چنان آویزان شده که می‌تواند در یک صفحه قائم دوران کند. از اصطکاک در نقطه آویز چشم‌پوشی شود. در ابتدا انتهای آزاد میله تقریباً به طور قائم بالای نقطه آویز قرار دارد و سپس رها می‌شود. شتاب زاویه‌ای میله هنگامی که با راستای قائم زاویه θ می‌سازد، کدام است؟ (شتاب گرانش برابر g است).

- ۱) $\frac{6g}{L} \cos \theta$
- ۲) $\frac{6g}{L} \sin \theta$
- ۳) $\frac{3g}{2L} \cos \theta$
- ۴) $\frac{3g}{2L} \sin \theta$

۳۴- یک حلقه یکنواخت واقع در صفحه قائم را با سرعت خطی اولیه v_0 و بدون چرخش روی یک سطح افقی به حرکت درمی‌آوریم. هنگامی که حرکت حلقه غلتشی کامل می‌شود، سرعت خطی آن چقدر است؟

(۱) $\frac{v_0}{2}$ (۲) $\frac{v_0}{4}$ (۳) $\frac{v_0}{3}$ (۴) $\frac{2v_0}{3}$

۳۵- با فرض آنکه چگالی متوسط آب اقیانوس 1020 kg/m^3 و مدول حجمی آن 2000 MPa باشد، در صورت حرکت از سطح آب به عمق 1500 متری، چگالی چند درصد تغییر می‌کند؟ ($g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

(۱) 0.75% (۲) 7.5% (۳) 1.5% (۴) 0.15%

۳۶- یک پمپ آب را از یک مخزن ساکن تخلیه و از طریق یک لوله افقی به خارج هدایت می‌کند. برای آنکه نرخ شارش آب خروجی ϕ باشد لازم است توان پمپ P_0 باشد. اگر بخواهیم در همین سیستم، آب با نرخ شارش 3ϕ خارج شود، توان پمپ جدید باید چند برابر P_0 باشد؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۹ (۴) ۲۷

۳۷- ذرات کروی شکل جامد به شعاع R و چگالی ρ_s از حالت سکون داخل یک سیال با چگالی ρ_F سقوط می‌کنند. اگر نیروی مقاومت سیال $f = 6\pi\eta R v$ باشد که در آن η ضریب چسبندگی سیال و v سرعت لحظه‌ای ذرات کروی شکل است، تندی حدی این ذرات در سیال، کدام است؟ (شتاب گرانش برابر g است.)

(۱) $\frac{2}{3\eta}(\rho_s - \rho_F)Rg$ (۲) $\frac{3}{8\eta}(\rho_s - \rho_F)Rg$ (۳) $\frac{2}{9\eta}(\rho_s - \rho_F)Rg$ (۴) $\frac{1}{8\eta}(\rho_s - \rho_F)Rg$

۳۸- یک متر نواری از جنس استیل، طول یک میله از جنس مس را هنگامی که هردو در دمای 10°C هستند (دمای کالیبراسیون برای متر نواری)، برابر 15 cm اندازه‌گیری می‌کند. این متر نواری در دمای 50°C طول این میله را چه عددی نشان می‌دهد؟ (ضریب انبساط طولی استیل و مس به ترتیب $11.7 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ و $17 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ است.)

(۱) 15.017 (۲) 15.003 (۳) 15.010 (۴) 15.022

۳۹- یک ظرف شیشه‌ای به حجم 400 cm^3 توسط لوله‌ای با حجم ناچیز به یک ظرف شیشه‌ای به حجم 200 cm^3 متصل است. هردو ظرف از هوای خشک با دمای 27°C و فشار 2 atm پر شده‌اند. ظرف بزرگ‌تر درون محیطی با دمای 127°C و ظرف کوچک‌تر درون محیطی با دمای 23°C قرار داده می‌شوند. فشار نهایی مشترک دو ظرف چند اتمسفر است؟

(۱) $2/2$ (۲) $0/3$ (۳) $3/2$ (۴) $1/1$

۴۰- دمای فضای میان کلهکشان تقریباً 2 K است. تندی جذر میانگین مربعی یک پروتون (هسته اتم هیدروژن) در این فضا چند $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ است؟ (جرم پروتون $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ است.)

(۱) ۱۶۲ (۲) ۲۸۰ (۳) ۱۵۵۳ (۴) ۲۶۹۲

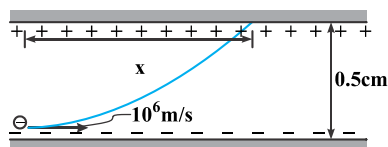
۴۱- در یک ماشین حرارتی در هر چرخه مقدار 1500 kJ گرما از چشمه حرارتی با دمای 527°C گرفته و مقدار 700 kJ گرما به چشمه حرارتی با دمای 27°C داده می‌شود. تغییر آنتروپی این مجموعه در هر چرخه بر حسب J/K کدام است؟

(۱) ۷۶۰۱ (۲) $13/3$ (۳) ۳۸۷۵ (۴) ۱۲۵

۴۲- بر روی یک ریسمان موج سینوسی با بسامد زاویه‌ای ω ، سرعت v و دامنه A انتشار می‌یابد. اگر جرم در واحد طول ریسمان μ باشد، متوسط توانی که توسط این موج انتقال می‌یابد کدام است؟

(۱) $A\omega\mu v^2$ (۲) $\frac{1}{4}A\omega\mu v^2$ (۳) $A^2\omega^2\mu v$ (۴) $\frac{1}{4}A^2\omega^2\mu v$

۴۳- مطابق شکل، الکترونی با تندی اولیه 10^6 m/s به‌طور افقی در فضای میان دو صفحه موازی باردار شلیک می‌شود. فاصله دو صفحه از هم 0.5 cm و اندازه میدان الکتریکی میان آن دو 250 N/C است. اگر فضای میان دو صفحه خلأ باشد، x فاصله افقی که الکترون نسبت به لبه سمت چپ صفحه بالایی با آن برخورد می‌کند، کدام است؟ ($m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$)



(۱) 15 cm
(۲) 15 mm
(۳) $6 \mu\text{m}$
(۴) 6 nm

دروس تخصصی ۱: فیزیک پایه (۱ و ۲ و ۳)، فیزیک جدید، ترمودینامیک و مکانیک آماری، ریاضی فیزیک (۱ و ۲)

۳۱- گزینه «۲» می‌دانیم که معادله سرعت حرکت، از مشتق معادله مکان بر حسب زمان به دست می‌آید:

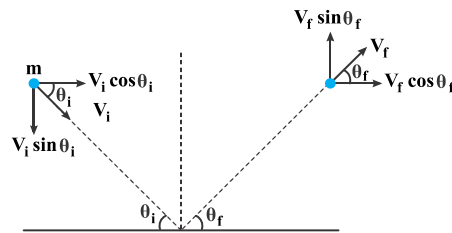
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [v_0 t + v_0 (b^{-1} - t) \ln(1 - bt)] = v_0 + [-v_0 \ln(1 - bt) + v_0 (b^{-1} - t) \frac{-b}{1 - bt}] = v_0 - v_0 \ln(1 - bt) + \frac{v_0 (b^{-1} - t)(-b)}{1 - bt}$$

$$= v_0 - v_0 \ln(1 - bt) - \frac{v_0 (1 - bt)}{1 - bt} = -v_0 \ln(1 - bt)$$

۳۲- گزینه «۳» می‌توانیم با توجه به نوع برخورد و شکل رسم شده با استفاده از قانون پایستگی تکانه خطی در راستای X و Y به راحتی رابطه بین مؤلفه‌های سرعت قبل و بعد از برخورد را تعیین کنیم.

$$\text{X در راستای: } v_i \cos \theta_i = v_f \cos \theta_f \Rightarrow \frac{v_i}{v_f} = \frac{\cos \theta_f}{\cos \theta_i}$$

$$\text{Y در راستای: } v_f \sin \theta_f = \alpha v_i \sin \theta_i \Rightarrow \alpha = \frac{v_f \sin \theta_f}{v_i \sin \theta_i}$$



حال می‌توانیم با جایگزین کردن عبارت معرف $\frac{v_i}{v_f}$ در رابطه α بنویسیم:

$$\alpha = \frac{v_f}{v_i} \times \frac{\sin \theta_f}{\sin \theta_i} = \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_f} \times \frac{\sin \theta_f}{\sin \theta_i} = \frac{\tan \theta_f}{\tan \theta_i} \Rightarrow \tan \theta_f = \alpha \tan \theta_i \Rightarrow \theta_f = \tan^{-1}(\alpha \tan \theta_i)$$

توجه داشته باشید که چون جرم گلوله تغییر نکرده است در نوشتن روابط پایستگی تکانه خطی از ابتدا جرم نادیده گرفته شده است.

۳۳- گزینه «۴» در حالتی که میله به صورت قائم قرار دارد، مرکز جرم آن در فاصله $h_1 = \frac{L}{2}$ از سطح زمین قرار می‌گیرد، بنابراین انرژی

پتانسیل $U_1 = mgh_1 = mg \frac{L}{2}$ در آن ذخیره می‌شود؛ اما چون در حال سکون است انرژی جنبشی آن $K_1 = 0$ خواهد بود.

در حالت دوم وقتی که میله با قائم زاویه θ می‌سازد، مرکز جرم آن $h_2 = \frac{L}{2} \cos \theta$ خواهد بود، بنابراین انرژی

پتانسیل $U_2 = mgh_2 = mg \frac{L}{2} \cos \theta$ در آن ذخیره می‌شود. در این حالت چون میله حرکت دورانی دارد انرژی جنبشی

دورانی $K_2 = \frac{1}{2} I \omega^2$ در آن وجود دارد.

طبق قضیه پایستگی انرژی مکانیکی داریم:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow mg \frac{L}{2} = mg \frac{L}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} mL^2 \omega^2 \Rightarrow g = g \cos \theta + \frac{1}{3} L \omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g(1 - \cos \theta)}{L}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L} (1 - \cos \theta)}$$

می‌دانیم که شتاب زاویه‌ای از مشتق سرعت زاویه‌ای نسبت به زمان به دست می‌آید. پس داریم:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{3g}{L} (1 - \cos \theta)}^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{3g}{L}} \times \frac{1}{2} \sin \theta (1 - \cos \theta)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3g}{L} \times \frac{1}{2} \sin \theta = \frac{3g}{2L} \sin \theta$$

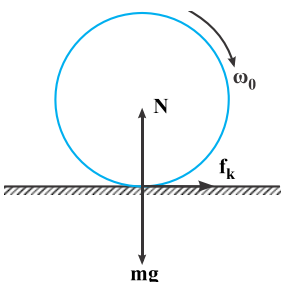
۳۴- گزینه «۱» وقتی حلقه شروع به حرکت دورانی روی سطح افقی می‌کند، سرعت خطی اولیه مرکز جرم آن صفر خواهد شد.

نیروی اصطکاک در این لحظه به مرکز جرم حلقه شتاب خطی می‌دهد اما گشتاور نیروی اصطکاک می‌تواند شتاب زاویه‌ای ایجاد کند. از آنجایی که مطابق شکل نیروی عکس‌العمل سطح N با نیروی وزن حلقه باهم برابر هستند، بنابراین نیروی اصطکاک برابر است با:

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg$$

$$f_k = ma \Rightarrow \mu_k mg = ma \Rightarrow a = \mu_k g \quad (I)$$

برای حرکت خطی حلقه داریم:





و برای حرکت دورانی حلقه داریم:

$$\tau = f_k R = -I\alpha \Rightarrow \mu_k mg R = -I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{-\mu_k mg R}{I} \quad (II)$$

فرض می‌کنیم در لحظه t حرکت غلتشی خالص شروع شود. در این زمان $V = R\omega$ خواهد بود.

$$I: a = \mu_k g \Rightarrow V = V_{cm} + at = 0 + \mu_k gt = \mu_k gt$$

$$II: \alpha = -\frac{\mu_k mg R}{I} = \frac{-\mu_k mg R}{mR^2} = -\frac{\mu_k g}{R} \Rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t = \omega_0 - \frac{\mu_k g}{R} t$$

بنابراین با ترکیب این دو رابطه داریم:

$$V = R\omega \Rightarrow \mu_k gt = R[\omega_0 - \frac{\mu_k g}{R} t] \Rightarrow \mu_k gt + \mu_k gt = R\omega_0 \Rightarrow 2\mu_k gt = R\omega_0 \Rightarrow t = \frac{R\omega_0}{2\mu_k g} = \frac{V_0}{2\mu_k g}$$

حال که زمان شروع حرکت غلتشی خالص تعیین شده است می‌توانیم به راحتی با استفاده از معادله سرعت - زمان، سرعت نهایی حلقه را تعیین کنیم.

$$V = V_{cm} + at = 0 + \mu_k gt = \mu_k g \left(\frac{V_0}{2\mu_k g} \right) = \frac{V_0}{2}$$

۳۵- گزینه «۱» می‌خواهیم درصد تغییرات چگالی یعنی $\frac{\Delta\rho}{\rho} \times 100$ را محاسبه کنیم. بنابراین لازم است ابتدا با استفاده از تعریف مدول حجمی

$$\beta = V \frac{\Delta P}{\Delta V}$$

را تعیین کنیم:

از طرفی با توجه به تعریف چگالی داریم:

$$\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow \Delta\rho = -\frac{M\Delta V}{V^2} \Rightarrow \Delta V = \frac{-V^2 \Delta\rho}{M} \Rightarrow \beta = V \frac{M\Delta P}{-V^2 \Delta\rho} = -\frac{M\Delta P}{V\Delta\rho} = -\frac{M\Delta P}{M \frac{\Delta\rho}{\rho}} \Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\Delta P}{\beta} = \frac{-\rho g \Delta h}{\beta}$$

حال کافی است با استفاده از صورت سؤال مقادیر مشخص شده را جایگزین کنیم.

$$\rho = 1020 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \beta = 2000 \text{ MPa} = 2 \times 10^9 \text{ Pa}; \Delta h = -1500 \text{ m}$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \times 100 = \frac{-\rho g \Delta h}{\beta} \times 100 = \frac{-1020 \times 9.8 \times (-1500)}{2 \times 10^9} \approx 0.75\%$$

۳۶- گزینه «۴» ابتدا رابطه بین توان موتور و سرعت خروج آب از مخزن را تعیین می‌کنیم. فرض می‌کنیم جرم Δm آب در زمان Δt توسط پمپ از مخزن خارج شود. چون آب به صورت افقی از پمپ خارج می‌شود، تغییر انرژی پتانسیل نداریم و فقط به علت اینکه آب با سرعت v از مخزن خارج می‌شود انرژی جنبشی آن به اندازه $\Delta K = \frac{1}{2}(\Delta m)v^2$ تغییر می‌کند. بنابراین کار انجام شده روی آب $\Delta W = \Delta K = \frac{1}{2}(\Delta m)v^2$ است. توان پمپ نیز برابر است با:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$$

اما نرخ خروج جرم عبارت است از $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho_w A v$ که در آن ρ_w چگالی آب است.

$$P = w A v \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{1}{2} \rho_w A v^3$$

به این ترتیب توان پمپ برابر است با:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^3$$

یعنی توان خروجی پمپ با مکعب سرعت متناسب است.

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{\phi_1}{\phi_2} \right)^3 \Rightarrow \frac{P_0}{P} = \left(\frac{\phi_0}{\phi} \right)^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow P = 27 P_0$$

همچنین نرخ شارش آب $\phi = A v$ است و می‌توانیم بنویسیم:

۳۷- گزینه «۳» سرعت حدی ذرات سرعتی است که در آن نیروی خالص وارد بر ذره صفر باشد. یعنی باید نیروی مقاومت سیال و نیروی شناوری وارد بر ذرات با هم برابر باشند. پس داریم:

$$F_B = f \Rightarrow v_g (\rho_s - \rho_F) = 6\pi\eta R v \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 g (\rho_s - \rho_F) = 6\pi\eta R v \Rightarrow v = \frac{2}{9\eta} (\rho_s - \rho_F) R^2 g$$

$$Z = \left(\frac{e^{-\frac{\epsilon\beta}{2}}}{1 - e^{-\epsilon\beta}} \right)^{2N} e^{N\epsilon_0\beta}$$

۵۹- تابع پارش سیستمی متشکل از N ذره در دمای T به شکل مقابل است:

که در آن ϵ و ϵ_0 مقادیر ثابتی هستند و $\beta = \frac{1}{k_B T}$ ، ظرفیت گرمایی این سیستم کدام است؟

$$(1) \quad 3Nk_B\beta\epsilon \frac{1-e^{-\beta\epsilon}}{1+e^{-\beta\epsilon}} \quad (2) \quad 3Nk_B(\beta\epsilon)^2 \frac{e^{-\beta\epsilon}}{1-e^{-\beta\epsilon}} \quad (3) \quad 3Nk_B(\beta\epsilon)^2 \frac{1+e^{-\beta\epsilon}}{1-e^{-\beta\epsilon}} \quad (4) \quad 3Nk_B\beta\epsilon \frac{1-e^{-\beta\epsilon}}{1+e^{-\beta\epsilon}}$$

۶۰- دستگاه آماری A متشکل از دو زیردستگاه A_1 و A_2 به ترتیب شامل N_1 و N_2 مولکول گاز به جرم m_1 و m_2 و حجم کل $V_1 + V_2 = V$ و

$$Z_t(V, T) = \frac{V^N}{N_1 N_2} \left(\frac{2\pi m_1 k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3N_1}{2}} \left(\frac{2\pi m_2 k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3N_2}{2}}$$

دمای T دارای تابع پارش کل Z_t مقابل است.

فشار (P)، دستگاه کدام است؟

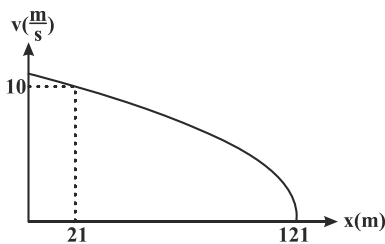
$$(1) \quad k_B T \frac{N}{V} \quad (2) \quad -k_B T \frac{N}{V} \ln Z_t \quad (3) \quad k_B T \frac{N}{V} \left[(N_1 + N_2) - \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2\pi k_B T}{h^2} \right) \right] + \frac{3}{2} k_B T \frac{N}{V} \quad (4) \quad k_B T \frac{N}{V} \left[(N_1 + N_2) - \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2\pi k_B T}{h^2} \right) \right]$$

دروس تخصصی ۲ (مکانیک کلاسیک (۱ و ۲)، الکترومغناطیس (۱ و ۲)، مکانیک کوانتومی (۱ و ۲))

۶۱- ردّ تانسور لختی یک مکعب همگن به جرم M و ضلع a در دستگاه مختصاتی که مبدأ آن در مرکز جرم واقع است و محورهای مختصات عمود بر وجوه مکعب‌اند، کدام است؟

$$(1) \quad \frac{1}{2} Ma^2 \quad (2) \quad \frac{1}{4} Ma^2 \quad (3) \quad \frac{1}{3} Ma^2 \quad (4) \quad \frac{3}{4} Ma^2$$

۶۲- نمودار زیر تندی v ذره‌ای را در یک حرکت یک‌بعدی با شتاب ثابت به صورت تابعی از موقعیت مکانی x آن، در یکاهای SI، نشان می‌دهد. تندی ذره در موقعیت $x = 0$ (بر حسب $\frac{m}{s}$) چقدر است؟

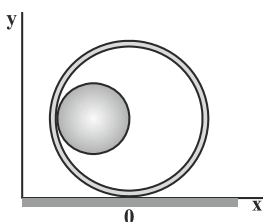


- (۱) $10/2$
(۲) $10/5$
(۳) $10/8$
(۴) $11/0$

۶۳- معادله مسیر ذره‌ای به جرم m در بُعد ۲، به شکل $r = ae^{b\theta}$ می‌باشد. a و b مقادیری ثابت و θ و r مختصات مکان ذره در دستگاه مختصات قطبی‌اند. اگر L تکانه زاویه‌ای این ذره باشد و $\vec{F} = f(r)\hat{r}$ ، در این صورت $f(r)$ کدام است؟

$$(1) \quad \frac{L^2}{mr^3} (1+b)^2 \quad (2) \quad -\frac{L^2}{mr^3} (1-b)^2 \quad (3) \quad -\frac{L^2}{mr^3} (1+b)^2 \quad (4) \quad -\frac{L^2}{mr^3} (1-b)^2$$

۶۴- در شکل زیر، گلوله‌ای به جرم m و شعاع R در داخل کره توخالی دیگری به جرم m و شعاع داخلی $2R$ قرار دارد. سامانه را از حالت سکون رها می‌کنیم. اگر همه حرکت‌ها غلتشی باشند (غزش وجود ندارد)، از کمیت‌های P_x (تکانه خطی سامانه در راستای x)، P_y (تکانه خطی سامانه در راستای y) و E (انرژی مکانیکی کل) کدام پایسته و کدام ناپایسته است؟



- (۱) هر سه کمیت پایسته‌اند.
(۲) E پایسته و P_x و P_y ناپایسته‌اند.
(۳) P_x و E پایسته و P_y ناپایسته است.
(۴) هر سه کمیت ناپایسته‌اند.

۶۵- آونگی به طول ℓ با گلوله‌ای به جرم m در ظرفی پر از روغن آویزان شده است. در لحظه $t = 0$ آونگ را به اندازه زاویه بسیار کوچک $\theta = \alpha$ از حالت قائم منحرف و بدون سرعت اولیه رها می‌کنیم. اگر نیروی مقاوم روغن که به گلوله وارد می‌شود، برابر با $F = \gamma m \sqrt{\frac{g}{\ell}} (\ell \dot{\theta})$ باشد، جابه‌جایی زاویه‌ای، θ بر حسب زمان کدام است؟

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \alpha \left(1 + \sqrt{\frac{g}{\ell}} t \right) e^{-\sqrt{\frac{g}{\ell}} t} \quad (2) \\ \theta(t) &= \alpha \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{g}{\ell}} t} \right) \quad (1) \\ \theta(t) &= \alpha \left(e^{-\sqrt{\frac{g}{\ell}} t} + e^{+\sqrt{\frac{g}{\ell}} t} \right) \quad (4) \\ \theta(t) &= \alpha \left(e^{-\sqrt{\frac{g}{\ell}} t} - e^{+\sqrt{\frac{g}{\ell}} t} \right) \quad (3) \end{aligned}$$

۶۶- دو گلوله با جرم‌های یکسان با سرعت‌های $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ با هم برخورد ناکشسان کامل انجام می‌دهند. اتلاف انرژی در این برخورد کدام است؟

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} m |\vec{V}_1 - \vec{V}_2|^2 \quad (4) \quad \frac{1}{4} m |\vec{V}_1 - \vec{V}_2|^2 \quad (3) \quad \frac{1}{4} m |\vec{V}_1 - \vec{V}_2|^2 \quad (2) \quad \frac{1}{4} m |\vec{V}_1 - \vec{V}_2|^2 \quad (1) \end{aligned}$$

۶۷- جرم جسمی با زمان طبق رابطه $m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$ تغییر می‌کند. جرم جسم در لحظه $t = 0$ است و α مقدار ثابتی است. اگر سرعت جسم در لحظه $t = 0$ برابر با v_0 باشد، و هیچ نیروی خارجی به جسم وارد نشود، سرعت آن در لحظه t چگونه است؟

$$\begin{aligned} v_0 e^{\alpha t} \quad (1) \quad v_0 \frac{1 + e^{-\alpha t}}{2} \quad (2) \quad v_0 e^{-\alpha t} \quad (3) \quad v_0 \frac{1 + e^{\alpha t}}{2} \quad (4) \end{aligned}$$

۶۸- ذره‌ای حرکت نوسانی ساده انجام می‌دهد. اگر در لحظه t_1 مکان آن x_1 و سرعت آن v_1 باشد و در لحظه t_2 مکان آن x_2 و سرعت آن v_2 باشد، دامنه نوسانات این ذره کدام است؟

$$\begin{aligned} \frac{v_2 x_1 - v_1 x_2}{v_2 - v_1} \quad (1) \quad \sqrt{\frac{v_2^2 x_1^2 + v_1^2 x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}} \quad (2) \quad \frac{v_2 x_1 + v_1 x_2}{v_2 + v_1} \quad (3) \quad \sqrt{\frac{v_2^2 x_1^2 - v_1^2 x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}} \quad (4) \end{aligned}$$

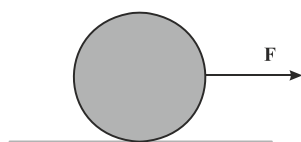
۶۹- سیستمی از نوسانگرها با مختصات تعمیم‌یافته x_1 و x_2 و x_3 دارای انرژی جنبشی و پتانسیل به شکل زیر است. بسامدهای نرمال این سیستم

$$K = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) \quad , \quad U = \frac{1}{2} (4x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3) \quad \text{کدام است؟}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \text{ و } \sqrt{3} \text{ و } \sqrt{6} \quad (1) \quad \sqrt{2} \text{ و } 3 \text{ و } \sqrt{6} \quad (2) \quad 2 \text{ و } \sqrt{3} \text{ و } \sqrt{6} \quad (3) \quad 6 \text{ و } 3 \text{ و } 2 \quad (4) \end{aligned}$$

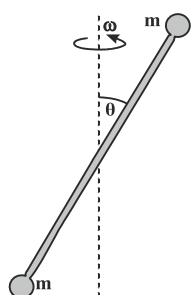
۷۰- مطابق شکل زیر، نیروی افقی و ثابت F بر یک پوسته کروی به جرم m و شعاع R وارد می‌شود. امتداد نیرو از مرکز پوسته می‌گذرد. ضریب اصطکاک ایستایی میان پوسته و سطح افقی‌ای که بر روی آن قرار گرفته μ_s است. بیشینه F (بر حسب $\mu_s mg$) چقدر باشد تا حرکت پوسته، غلتشی

$$\text{بماند؟ } (I_{c.m.} = \frac{2}{3} m R^2)$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \quad (1) \quad \frac{5}{2} \quad (2) \quad 1 \quad (4) \quad \frac{3}{2} \quad (3) \end{aligned}$$

۷۱- دو کره مشابه بسیار کوچک، هر کدام به جرم m و شعاع ناچیز، به دو سر میله بسیار سبکی به طول b جوش داده شده و مطابق شکل، حول محوری که از مرکز میله گذشته و با امتداد میله زاویه θ می‌سازد، با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. انرژی جنبشی سامانه کدام است؟



$$K = \frac{1}{2} m b^2 \cos^2 \theta \omega^2 \quad (1)$$

$$K = \frac{1}{4} m b^2 \cos^2 \theta \omega^2 \quad (2)$$

$$K = \frac{1}{2} m b^2 \sin^2 \theta \omega^2 \quad (3)$$

$$K = \frac{1}{4} m b^2 \sin^2 \theta \omega^2 \quad (4)$$

$$\Rightarrow Z_1^C = \frac{1}{h\beta} \sqrt{\pi m} \times \sqrt{\pi \frac{\gamma}{m\omega}} = \frac{1}{h\omega\beta}$$

با استفاده از انتگرال گاوسی داریم:

$$Z_t^C = (Z_1^C)^N = \left(\frac{1}{\beta\hbar\omega}\right)^N = (\beta\hbar\omega)^{-N}$$

و داریم:

$$\frac{Z_t^q}{Z_t^c} = \left(\frac{\sinh(\frac{\beta\hbar\omega}{2})}{\beta\hbar\omega}\right)^{-N}$$

پس داریم:

$$C = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T}, \quad \langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

۵۹- گزینه «۲» چنانچه $\langle E \rangle$ متوسط انرژی سیستم باشد داریم:

پس کافی است ابتدا انرژی متوسط سیستم و سپس ظرفیت گرمایی ویژه را محاسبه کنیم. داریم:

$$\ln Z = N\epsilon_0\beta + \gamma N \ln \left(\frac{e^{-\frac{\epsilon\beta}{2}}}{1 - e^{-\beta\epsilon}} \right) = N\epsilon_0\beta - \frac{\gamma N\epsilon\beta}{2} - \gamma N \ln(1 - e^{-\beta\epsilon})$$

$$\langle E \rangle = \frac{-\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N\epsilon_0 + \frac{\gamma N\epsilon}{2} + \frac{\gamma N\epsilon e^{-\beta\epsilon}}{1 - e^{-\beta\epsilon}}$$

پس داریم:

$$C = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial T} = -\frac{1}{k_B T^2} \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} = -\frac{\gamma N\epsilon}{k_B T^2} \frac{-\epsilon e^{-\beta\epsilon}(1 - e^{-\beta\epsilon}) - \epsilon e^{-2\beta\epsilon}}{(1 - e^{-\beta\epsilon})^2} = \gamma N k_B \beta^2 \epsilon^2 \frac{e^{-\beta\epsilon}}{(1 - e^{-\beta\epsilon})^2}$$

پس داریم:

به نظر می‌رسد در گزینه (۲) توان دو جا افتاده است اما نزدیک‌ترین گزینه (۲) است.

$$F = -k_B T \ln Z, \quad P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}$$

۶۰- گزینه «۱» چنانچه F تابع انرژی آزاد هلمهولتز باشد داریم:

$$F = -k_B T (N_1 + N_2) \ln V + f(T, N)$$

پس داریم:

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = k_B T \frac{(N_1 + N_2)}{V} = k_B \frac{TN}{V}$$

که $f(T, N)$ مابقی جملات هستند که صرفاً تابعی از T و N هستند. داریم:

دروس تخصصی ۲ (مکانیک کلاسیک (۱ و ۲)، الکترومغناطیس (۱ و ۲)، مکانیک کوانتومی (۱ و ۲))

$$trI = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}$$

۶۱- گزینه «۱» چنانچه I تانسور لختی باشد، رد آن به صورت مقابل خواهد بود:

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm$$

که داریم:

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$$

$$trI = 3I_{xx}$$

بنا بر تقارن و نحوه انتخاب مبدأ انتظار داریم که

پس کافی است I_{xx} را محاسبه کنیم و آنگاه داریم:

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm = \rho \int (y^2 + z^2) dV = \rho \int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_{-a}^a (y^2 + z^2) dx dy dz$$

داریم:

که در رابطه بالا از $dm = \rho dV$ و ثابت بودن ρ استفاده کرده‌ایم. حال با انتگرال‌گیری داریم:

$$I_{xx} = \rho a^2 \left(\frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-a}^a + \rho a^2 \left(\frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-a}^a = \rho a^2 \frac{a^3}{3} \times 2 = \frac{\rho a^5}{6}$$

$$I_{xx} = \frac{Ma^2}{6} \Rightarrow trI = \frac{Ma^2}{2}$$

از طرفی: $\rho = \frac{M}{V}$ که $V = a^3$ و داریم:

۶۲- گزینه «۴» از رابطه سرعت بر حسب مکان در حرکت شتاب ثابت می‌دانیم که:

که V_0 سرعت متناظر با متحرک در مکان x_0 است. از شکل مشخص است که در $x_0 = 0$, $V_0 = 0$ و بنابراین داریم:

$$V_1^2 = 2a(x_1 - 121) \Rightarrow 100 = 2a(21 - 121) = -200a \Rightarrow a = -\frac{1}{2}\left(\frac{m}{s^2}\right) \quad \text{و آنگاه:} \quad V_1 = 10 \frac{m}{s} \quad x_1 = 21(m)$$

$$V^2 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (0 - 121) = 121 \frac{m^2}{s^2} \Rightarrow V = 11 \left(\frac{m}{s}\right) \quad \text{بنابراین در } x = 0 \text{ داریم:}$$

۶۳- گزینه «۳» چون نیرو مرکزی است کافی است از رابطه مقابل استفاده کنیم:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a} e^{-b\theta} \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{b^2}{a} e^{-b\theta}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{b^2}{a} e^{-b\theta} + \frac{1}{a} e^{-b\theta} = \frac{-ma^2 e^{rb\theta}}{L^2} f(r) \quad \text{بنابراین داریم:}$$

$$f(r) = \frac{-L^2}{mr^3} (1 + b^2) \quad \text{با حل } f(r) \text{ از رابطه بالا و جایگذاری } e^{b\theta} = \frac{r}{a} \text{ داریم:}$$

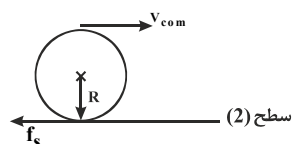
روش تستی: با توجه به $\frac{d^2u}{d\theta^2}$ در $f(r)$ تنها توان‌های زوج b در $f(r)$ ظاهر خواهد شد که این ویژگی تنها در گزینه (۳) دیده می‌شود.

۶۴- گزینه «۲» روش تستی: در حرکت غلتش کامل انرژی کل پایسته می‌ماند. از طرفی با توجه به حضور نیروی اصطکاک خارجی که به کره توخالی وارد

می‌شود انتظار داریم P_x پایسته نباشد و همچنین نیروی گرانش نیز در راستای y به کره کوچک‌تر وارد می‌شود و انتظار داریم P_y نیز پایسته نباشد.

روش تشریحی: فرض کنید سطح (۱) از یک کره نسبت به سطح (۲) حرکت غلتشی انجام می‌دهد. بنابراین چنانچه سرعت مرکز جرم کره نسبت به سطح

(۲) V_{com} باشد و نیروی اصطکاک مطابق شکل زیر به کره وارد شود، توان نیروی اصطکاک به صورت زیر خواهد بود:



$$w_{f_s} = -f_s \times V_{com}$$

همچنین نیروی f_s باعث ایجاد یک گشتاور می‌شود که توان آن به صورت مقابل داده می‌شود:

$$w'_{f_s} = \tau_{f_s} \frac{d\theta}{dt} = f_s R \dot{\theta} \quad \text{که } \dot{\theta} \text{ سرعت زاویه‌ای کره حول مرکز جرم آن می‌باشد. چون حرکت غلتشی است، پس } V_{com} = R\dot{\theta} \text{ و داریم:}$$

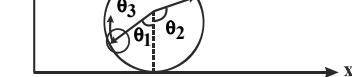
پس f_s کاری انجام نمی‌دهد. سایر نیروی موجود در مسئله نیروی وزن و یا نیروی عمود بر سطح هستند که با توجه به عمود بودن نیروی عمود بر سطح بر

جهت حرکت و پایستار بودن نیروی وزن آن‌ها نیز باعث تغییر انرژی مکانیکی نمی‌شوند و انرژی کل پایسته است. حال به P_x و P_y می‌پردازیم، بدین منظور

راحت‌تر است که لاگرانژی سیستم را با توجه به عدم وجود نیروهای اتلافی بنویسیم چنانچه $\vec{V}_{1g}$ سرعت کره بزرگ‌تر نسبت به زمین و $\vec{V}_{2s}$ سرعت کره

کوچک‌تر نسبت به کره باشد داریم:

که $\vec{V}_{2g}$ سرعت کره کوچک‌تر نسبت به زمین است. به مختصات مقابل توجه کنید:



$$R\dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1 = \vec{V}_{2s} \quad \text{طبق تعریف داریم:}$$

$$\hat{\theta}_1 = \cos \theta_1 \hat{i} - \sin \theta_1 \hat{j}$$

$$R\dot{\theta}_1 = R\dot{\theta}_r$$

$$\vec{V}_{1g} = rR\dot{\theta}_r \hat{i}$$

$$\vec{V}_{2g} = (R\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + rR\dot{\theta}_r) \hat{i} - R\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \hat{j}$$

و چون حرکت کره کوچک نسبت به کره بزرگ غلتشی است داریم:

از طرفی با توجه به غلتشی بودن حرکت کره بزرگ داریم:

بنابراین داریم: