آزمون (۱)

ریاضیات (معادلات دیفرانسیل، ریاضیات مهندسی، آمار و احتمالات)

۱ـ جواب معادله دیفرانسیل $xdy - ydx = xtg(\frac{y-x}{x})dx$ کدام است؟

۱) $\cos(\frac{y}{x}-۱) = cy$ ۲) $\sin(\frac{y}{x}-۱) = cx$ ۳) $\cos(\frac{y}{x}+۱) = cy$ ۴) $\sin(\frac{y}{x}+۱) = cx$

۲ـ جوابی از معادله $y' - xy = \begin{cases} x & ; x \le ۰ \\ ۰ & ; x > ۰ \end{cases}$ که تابعی پیوسته از x باشد و در شرط $y(۰) = ۱$ صدق کند، از کدام نقطه‌ی زیر عبور می‌کند؟

۱) $(-۱, \sqrt{e})$ ۲) $(-۱, ۲\sqrt{e}-۱)$ ۳) $(\sqrt{۲}, ۲e-۱)$ ۴) $(-\sqrt{۲}, e)$

۳ـ وقتی x به سمت صفر میل می‌کند، جواب معادله‌ی $x^۲y'' - ۲y = ۰$ با شرط $y'(۱) = k$ و $y(۱) = ۱$ کراندار باشد، آن‌گاه مقدار k برابر با کدام گزینه است؟

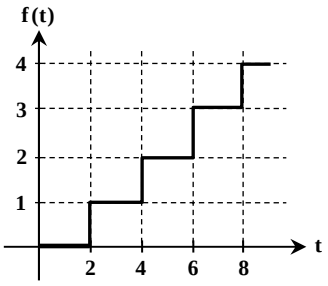
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

۴ـ جواب عمومی معادله‌ی $y'' + y'tgx = (y')^۲$ $(-\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) $y = -Ln|\cos x + c_۱| + c_۲$ ۲) $y = Ln|\sin x + c_۱| + c_۲$

۳) $y = -Ln|\sin x + c_۱| + c_۲$ ۴) $y = Ln|\cos x + c_۱| + c_۲$

۵ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که نمودار آن در شکل زیر نشان داده شده است، کدام است؟



۱) $\frac{e^{-s}}{۲(۱-e^{-s})}$

۲) $\frac{e^{-۲s}}{s(۱-e^{-s})}$

۳) $\frac{e^{-۲s}}{s(۱-e^{-۲s})}$

۴) $\frac{e^{-۲s}}{۲s(۱-e^{-۲s})}$

۶ـ حاصل $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{۱-\cos x}{۴\pi^۲ - x^۲}dx$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۴\pi}$ ۳) $\frac{۱}{۸\pi}$ ۴) انتگرال واگراست.

۷ـ اگر $f(۱) = f'(۱)$، آن‌گاه حاصل انتگرال $I = \oint_{|z-۱|=۲} \frac{f(z)}{z}d\bar{z}$، در صورتی که دایره $|z-۱| = ۲$ در جهت عقربه‌های ساعت پیموده شده باشد، چند برابر $f(۰)$ است؟

۱) $۴\pi i$ ۲) $-۸\pi i$ ۳) $-۴\pi i$ ۴) $۸\pi i$

۸ـ تحت نگاشت $w = z(\frac{۱}{z})$، دایره $z = \cos ۲\theta + i\sin ۲\theta$ به کدام ناحیه در صفحه $u - v$ تبدیل می‌شود؟

۱) دایره‌ای به شعاع یک و مرکز مبدأ مختصات

۲) دایره‌ای به شعاع $\frac{۱}{۲}$ و مرکز مبدأ مختصات

۳) دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز مبدأ مختصات

۴) دایره‌ای به شعاع یک و مرکز $(-۲, ۲)$

۹ـ اگر $\circ \le x \le 2\pi$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}$، آنگاه حاصل سری $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^3}{32}$ ۲) $\frac{\pi^3}{48}$ ۳) $\frac{\pi^2}{16}$ ۴) $\frac{\pi^2}{12}$

۱۰ـ معادله‌ی موج ناهمگن زیر با تغییر متغیر $u(x,t) = w(x,t) + h(x)$ به معادله‌ای همگن با شرایط مرزی همگن برای تابع w تبدیل می‌شود. با توجه به ضابطه‌ی $h(x)$ مقدار $h(1)$ کدام خواهد بود؟

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + x + \cos(\pi x) \ , \ \circ < x < 2 \ , \ t > \circ \\ u(\circ,t) = u(2,t) = \circ \ , \ t > \circ \\ u(x,\circ) = u_t(x,\circ) = \circ \ , \ \circ \le x \le 2 \end{cases}$$

۱) $\frac{\pi^2 - 4}{2\pi^2}$ ۲) $\frac{8 - \pi^2}{2\pi^2}$ ۳) $\frac{\pi^2 - 4}{8\pi^2}$ ۴) $\frac{8 - \pi^2}{4\pi^2}$

۱۱ـ جواب مسأله زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \delta(x)\delta(t) \ , \ -\infty < x < +\infty \ , \ t > \circ \\ u(x,\circ) = \delta(x) \\ \lim\limits_{|x| \to \infty} u(x,t) = \circ \end{cases}$$

۱) $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ ۲) $\frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ ۳) $\frac{1}{2\pi\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ ۴) $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$

۱۲ـ با استفاده از انتگرال فوریه‌ی سینوسی تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & , \circ \le x < \pi \\ \circ & , x > \pi \end{cases}$، حاصل انتگرال $\int_{\circ}^{\infty} \frac{1 - \cos \pi\omega}{\omega} \sin \pi\omega d\omega$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۳ـ یک ۸ وجهی را هفت بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که ماکزیمم وجه ظاهر شده دقیقاً ۵ باشد کدام است؟

۱) $(\frac{6}{7})^7$ ۲) $(\frac{5}{8})^7$ ۳) $\frac{5^7 - 4^7}{8^7}$ ۴) $\frac{6^7 - 5^7}{8^7}$

۱۴ـ تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر مفروض است. مقدار $P(X + Y \le 1)$ کدام است؟

$$f(x,y) = \begin{cases} 3xy \ ; \ \circ < y < 2x^2 \ , \ \circ < x < 1 \\ \circ \end{cases}$$

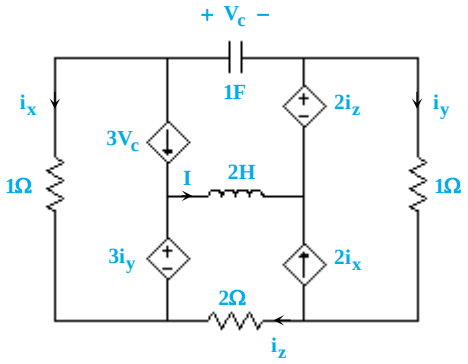
۱) $\frac{3}{128}$ ۲) $\frac{7}{128}$ ۳) $\frac{3}{64}$ ۴) $\frac{5}{64}$

۱۵ـ چراغ قوه‌ای برای کار کردن نیاز به دو باتری دارد که طول عمر آن‌ها متغیر مستقل نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ است. اگر شخصی یک چراغ قوه و n باتری داشته باشد، میانگین مدت زمانی که می‌تواند با این باتری‌ها چراغ قوه را روشن نگه دارد، کدام است؟ (باتری‌ها به صورت سری قرار می‌گیرند)

۱) $\frac{n-1}{\lambda}$ ۲) $\frac{n-1}{2\lambda}$ ۳) $\frac{n}{\lambda^2}$ ۴) $\frac{2(n-1)}{(2\lambda)^2}$

مدارهای الکتریکی ۱ و ۲

۱۶ـ در مدار شکل زیر، معادلات حالت به کدام شکل نوشته می‌شوند؟



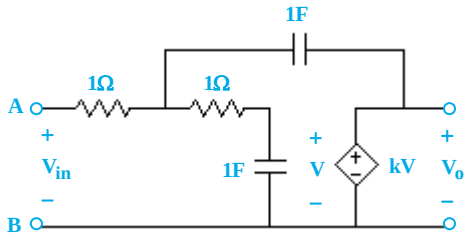
۱) $\begin{cases}\frac{dV_c}{dt}+۳V_c+i_x=۰\\ ۲\frac{di_L}{dt}-۲i_z-i_y+۲i_z-۳i_y=۰\end{cases}$

۲) $\begin{cases}\frac{dV_c}{dt}+۳V_c+i_x=۰\\ ۲\frac{di_L}{dt}-۲i_z+i_y+۲i_z-۳i_y=۰\end{cases}$

۳) $\begin{cases}\frac{dV_c}{dt}+۳V_c-i_x=۰\\ ۲\frac{di_L}{dt}-i_z-i_y+۲i_z-۳i_y=۰\end{cases}$

۴) $\begin{cases}\frac{dV_c}{dt}+۳V_c-i_x=۰\\ ۲\frac{di_L}{dt}-۲i_z-i_y+۲i_z+i_y=۰\end{cases}$

۱۷ـ در مدار شکل مقابل تابع شبکه به صورت $H(S)=\frac{V_o}{V_{in}}$ تعریف می‌شود. حدود k برای پایداری مدار کدام است؟



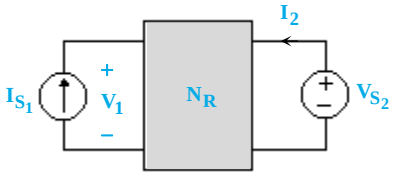
۱) $k<۲$

۲) $k<۳$

۳) $k\le ۳$

۴) $k\le ۲$

۱۸ـ نتایج سه آزمایش در جدول کنار مدار شکل زیر نشان داده شده است. $V_۱$ در آزمایش دوم و $I_۲$ در آزمایش سوم در کدام گزینه به درستی آمده است؟



شماره آزمایش	$I_{S_۱}$	$V_۱$	$I_۲$	$V_{S_۲}$
۱	۶	۱۶	−۴	۰
۲	۰	?	۲	۳۰
۳	−۳	۱۲	?	۱۵

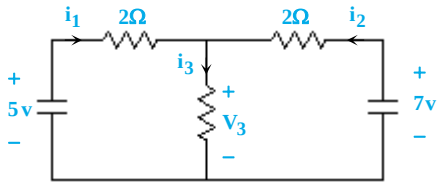
۱) $V_۱=۲۰v\ ,\ I_۲=۳A$

۲) $V_۱=\frac{۲۰}{۳}v\ ,\ I_۲=۳A$

۳) $V_۱=۳۰v\ ,\ I_۲=۵A$

۴) $V_۱=\frac{۲۰}{۳}v\ ,\ I_۲=۵A$

۱۹ـ مقاومت شاخه وسطی شبکه نشان داده شده در شکل زیر غیرخطی است و مشخصه آن به صورت $V_۳=\sqrt{۴۵-۱۲i_۳}$ و $i_۳>۰$ است. مقدار $i_۲$ حدوداً چند آمپر است؟



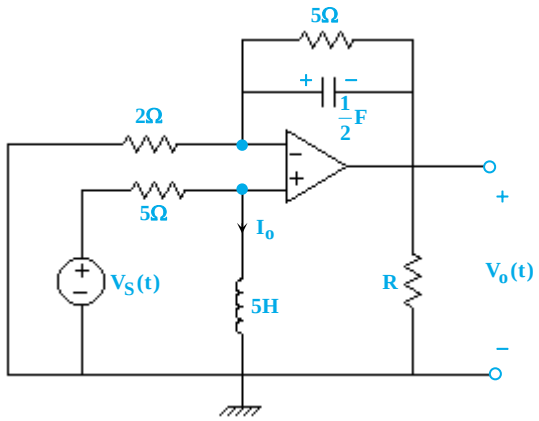
۱) ۳

۲) ۲

۳) ۱/۵

۴) ۱

۲۰ـ در مدار شکل مقابل پاسخ $V_o(t)$ برای ورودی پله واحد کدام است؟



۱) $(\frac{۵}{۳}e^{-t}-\frac{۲}{۳}e^{-\frac{۲}{۵}t})u(t)$

۲) $(-\frac{۲}{۳}e^{-t}+\frac{۵}{۳}e^{-\frac{۲}{۵}t})u(t)$

۳) $(-e^{-t}+\frac{۵}{۳}e^{-\frac{۲}{۵}t})u(t)$

۴) $(-\frac{۵}{۳}e^{-t}+e^{-\frac{۲}{۵}t})u(t)$

۲۱ـ پاسخ ضربه یک مدار LTI به صورت $h(t)=(\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}t}-3e^{-3t})u(t)$ است. پاسخ حالت دائمی سینوسی این مدار به ورودی $i(t)=2+\frac{5}{4}\sin(t+30^\circ)$ کدام است؟

۱) $-\sin(t+30^\circ)$ ۲) $\sin(t+30^\circ)$ ۳) $-\cos(t+60^\circ)$ ۴) $\cos(t+60^\circ)$

۲۲ـ کدام‌یک از موارد زیر صحیح است؟

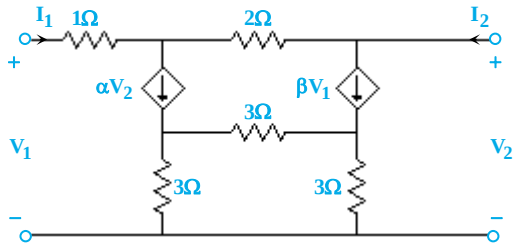
I) در یک شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان، اگر z_1 یک صفر دلخواه تابع شبکه $H(S)$ و ورودی به صورت $e^{z_1 t}u(t)$ باشد، آنگاه حالت اولیه‌ای در مدار می‌توان تعیین کرد به طوری که پاسخ کامل برابر با صفر باشد.

II) پاسخ گذرای یک سیستم مرتبه دوم به یک ورودی پله واحد در حالت میرایی ضعیف با کاهش نسبت میرایی، نوسانی‌تر می‌شود.

III) اگر $H(j\omega)$ تابع شبکه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان باشد، آنگاه یک قطب مجزا در نزدیکی محور حقیقی یک صفر در منحنی اندازه تابع شبکه ایجاد می‌کند.

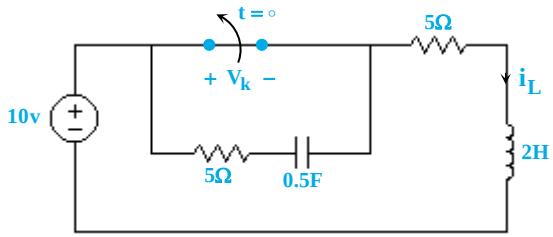
۱) فقط II ۲) فقط I و III ۳) فقط II و I ۴) I، II و III

۲۳ـ شرط متقابل بودن دوقطبی شکل زیر کدام است؟



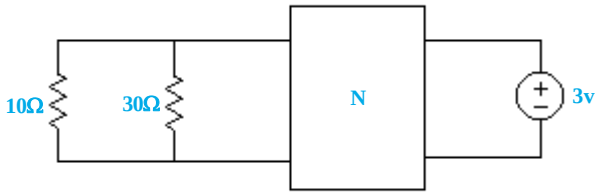
۱) $\alpha=\beta$
۲) $3\alpha=2\beta$
۳) $2\alpha=3\beta$
۴) $\alpha=-\beta$

۲۴ـ در مدار شکل زیر، کلید k مدت زمان زیادی بسته بوده و در $t=0$ باز می‌شود. مقدار ولتاژ دو سر کلید و مقدار $\frac{di_L}{dt}$ در $t=0^+$ در کدام گزینه به درستی آمده است؟



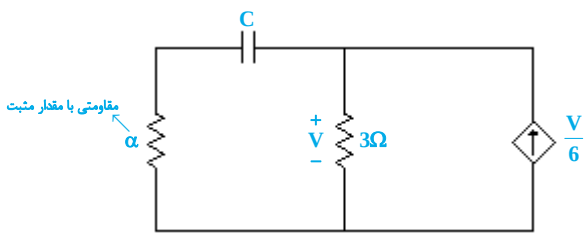
۱) $\frac{di_L}{dt}(0^+)=-5(\frac{A}{sec})$ و $V_k(0^+)=10v$
۲) $\frac{di_L}{dt}(0^+)=-2/5(\frac{A}{sec})$ و $V_k(0^+)=5v$
۳) $\frac{di_L}{dt}(0^+)=-5(\frac{A}{sec})$ و $V_k(0^+)=5v$
۴) $\frac{di_L}{dt}(0^+)=-2/5(\frac{A}{sec})$ و $V_k(0^+)=10v$

۲۵ـ مدار داده‌شده در شکل زیر، مقاومتی و خطی و همچنین تغییرناپذیر با زمان است. ۴۰ درصد توان متوسط منبع، توسط N جذب می‌شود. اندازه منبع را چند برابر کنیم تا ۳۰ درصد توان آن به مقاومت 10Ω برسد؟



۱) ۲ برابر
۲) ۱/۵ برابر
۳) درصد توان جذب شده توسط مقاومت 10Ω، فقط به مقدار خود آن بستگی دارد و مستقل از اندازه منبع است.
۴) درصد توان جذب شده توسط مقاومت 10Ω به شبکه N بستگی دارد و مستقل از اندازه منبع ولتاژ است.

۲۶ـ در مدار زیر، مقدار α را چنان بیابید که اگر به‌جای خازن C، سلفی به مقدار $L=64C$ قرار دهیم، مقادیر جریان شاخه‌ها و ولتاژ گره‌ها سریع‌تر به حالت دائمی خود برسند؟



۱) $\alpha>2$
۲) $\alpha<2$
۳) $\alpha>14$
۴) $\alpha<14$

نقطه‌ی $z=0$ قطب ساده و نقطه‌ی $z=1$ قطب مرتبه دوم تابع $g(z)=\frac{f(z)}{z(z-1)^2}$ هستند، مانده‌ی $g(z)$ در این نقاط را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}\operatorname*{Res}_{z=0} g(z)=\lim_{z\to 0}(z-0)\frac{f(z)}{z(z-1)^2}=\frac{f(0)}{(0-1)^2}=f(0)\\ \operatorname*{Res}_{z=1} g(z)=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}[(z-1)^2\frac{f(z)}{z(z-1)^2}]=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}(\frac{f(z)}{z})=\lim_{z\to 1}[\frac{f'(z)\times z-1\times f(z)}{z^2}]=f'(1)-f(1)\end{cases}$$

از صورت سؤال می‌دانیم، $f'(1)=f(1)$، بنابراین مانده در نقطه‌ی $z=1$ برای تابع $g(z)$ برابر صفر است، و فقط مانده در نقطه‌ی $z=0$ را لذا داریم:

$$I=-4\times 2\pi i\times \operatorname*{Res}_{z=0} g(z)=-8\pi i f(0) \xrightarrow{\text{جهت حرکت در جهت عقربه‌های ساعت}} I'=8\pi i f(0)$$

۸ـ گزینه «۱»

روش اول: ابتدا نگاشت $w=z(\frac{1}{z})$ را با توجه به این که $z=x+iy$ و $\bar{z}=x-iy$، بازنویسی می‌کنیم:

$$w=z(\frac{1}{\bar{z}})\xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در z ضرب می‌کنیم}} w=\frac{z\times z}{\bar{z}\times z}=\frac{z^2}{|z|^2}=\frac{x^2-y^2+i2xy}{x^2+y^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+i\frac{2xy}{x^2+y^2}\Rightarrow u=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ v=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

توجه کنید که با توجه به $z=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$، پس $x=\cos 2\theta$ و $y=\sin 2\theta$، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta}{\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta}=\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta=\cos 4\theta\\ v&=\frac{2(\cos 2\theta)(\sin 2\theta)}{\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta}=2\cos 2\theta\sin 2\theta=\sin 4\theta\end{aligned}\right\}\Rightarrow u^2+v^2=\cos^2 4\theta+\sin^2 4\theta\Rightarrow u^2+v^2=1$$

پس دایره‌ی مزبور به دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع یک در صفحه‌ی $u-v$ نگاشته می‌شود.

روش دوم: از گزینه‌ها چون شبیه هم هستند، داریم:

$$w=\frac{e^{j2\theta}}{e^{-j2\theta}}=e^{j4\theta}$$

$w=e^{4j\theta}$ فقط می‌چرخاند، بنابراین z که دایره است را می‌چرخاند. بنابراین دایره بودن و مرکز آن حفظ می‌شود.

۹ـ گزینه «۱» ابتدا از طرفین تساوی داده شده انتگرال می‌گیریم تا درجه‌ی مخرج یک واحد بیشتر شود. توجه کنید که $\int_0^x \frac{\cos nx}{n^2}dx=\frac{\sin nx}{n^3}$ است.

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}=\int_0^x(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi^2}{6})dx=\frac{x^3}{12}-\frac{\pi x^2}{4}+\frac{\pi^2}{6}x$$

حالا با جایگذاری $x=\frac{\pi}{2}$ در طرفین تساوی داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^3}=\frac{1}{12}(\frac{\pi}{2})^3-\frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{2})^2+\frac{\pi^2}{6}(\frac{\pi}{2})=\pi^3(\frac{1}{96}-\frac{1}{16}+\frac{1}{12})=\frac{\pi^3}{32}$$

با تفکیک جملات زوج و فرد سری داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{2n\pi}{2})}{(2n)^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$$

برای هارمونیک‌های زوج داریم:

$$\sin(\frac{2n\pi}{2})=\sin(n\pi)=0$$

پس این جملات از سری حذف می‌شوند. برای هارمونیک‌های فرد هم داریم:

$$\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}=(-1)^{n+1}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$$

روش رد گزینه: با توجه به آن که در سری S مخرج از درجه ۳ است، پس جواب باید مضربی از π^3 باشد نه π^2 پس گزینه‌های (۳) و (۴) غلط هستند.

مقدار گزینه‌ی (۱) با توجه به تقریب $\pi^3\simeq 31$ عددی است که بسیار به یک نزدیک است. مقدار گزینه (۲) تقریباً $\frac{\pi^3}{48}\simeq\frac{31}{48}\simeq 0/65$ است. اکنون به چندجمله‌ای اول از سری توجه می‌کنیم.

$$S=\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\text{(یک مقدار مثبت و کوچک)}\Rightarrow S\simeq 0/96+\text{(یک مقدار مثبت و کوچک)}$$

واضح است که جواب گزینه (۱) است.

۱۰ـ جواب کران‌دار معادله‌ی لاپلاس داده شده کدام است؟

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad , \quad x>0\ ,\ 0<y<1\\ u(x,0)=0\ ,\ u_y(x,1)=0\ ,\ x\geq 0\\ u(0,y)=2\sin(\frac{\pi}{2}y)\cos(2\pi y)\ ,\ 0\leq y\leq 1\end{cases}$$

۱) $-e^{-\frac{\pi}{2}x}\sin(\frac{\pi}{2}y)+e^{-\frac{3\pi}{2}x}\sin(\frac{3\pi}{2}y)$

۲) $2e^{-\frac{\pi}{2}x}\sin(\frac{\pi}{2}y)\cos(2\pi y)$

۳) $2e^{-\frac{3\pi}{2}x}\cos(\frac{3\pi}{2}y)+2e^{-\frac{5\pi}{2}x}\cos(\frac{5\pi}{2}y)$

۴) $-e^{-\frac{3\pi}{2}x}\sin(\frac{3\pi}{2}y)+e^{-\frac{5\pi}{2}x}\sin(\frac{5\pi}{2}y)$

۱۱ـ اگر n عددی طبیعی باشد و دایره $|z|=\frac{1}{2}$ در جهت مثبت پیموده شده باشد، آنگاه حاصل انتگرال $I=\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{z^n e^{\frac{1}{z}}}{1+z}dz$ چند برابر $2\pi i$ است؟

۱) $-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(n+m)!}$ ۲) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(n+m)!}$ ۳) $\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{m+1}}{(m+n)!}$ ۴) $-\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{(m+n)!}$

۱۲ـ مجموعه نقاط غیرتحلیلی تابع $f(z)=z^2-\bar{z}^2+2Re(z^2)+Ln(z-i)$ کدام است؟

۱) $D=\{z=x+iy\,|\,x\leq 0 \text{ و } y=2\}$

۲) $D=\{z=x+iy\,|\,x\leq 0 \text{ و } y-1=0\}$

۳) $D=\{z=x+iy\,|\,x\geq 0, y-1=0\}$

۴) تابع در کلیه نقاط غیرتحلیلی است.

۱۳ـ تعداد جواب‌های معادله $x_1+x_2+\cdots+x_r=n$ به طوری که k تا از x_iها صفر باشند، کدام است؟ (n و x_iها اعدادی صحیح نامنفی هستند)

۱) $\binom{r}{k}\binom{n-1}{r-1}$ ۲) $\binom{n-1}{r-k-1}$ ۳) $\binom{r}{k}\binom{n-1}{n-r+k}$ ۴) $\binom{r}{k}\binom{n-1}{r+k-1}$

۱۴ـ فرض کنید تابع احتمال توأم x و y به صورت $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{1}{2y}(x-y)^2}$, $x\in\mathbb{R}$, $0<y<1$ تعریف شود، کوواریانس بین x و y کدام است؟

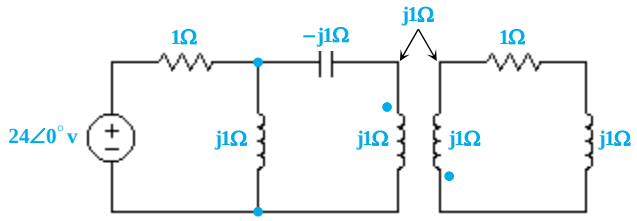
۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{3}{12}$ ۳) $\frac{2}{12}$ ۴) $\frac{1}{12}$

۱۵ـ متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت در بازه $(2,4)$ است. اگر متغیر تصادفی شرطی $Y\,|\,X=x$ دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی $(2x,x^2)$ باشد، در این صورت $E(Y)$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{16}{3}$ ۳) $\frac{19}{3}$ ۴) $\frac{23}{3}$

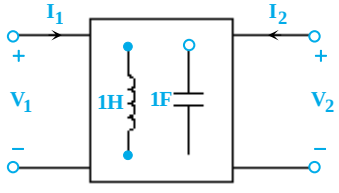
مدارهای الکتریکی ۱ و ۲

۱۶ـ امپدانس دیده شده از دو سر منبع ولتاژ چند اهم است؟



۱) $\frac{3}{2}+j\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}+j\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}-j\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}-j\frac{1}{4}$

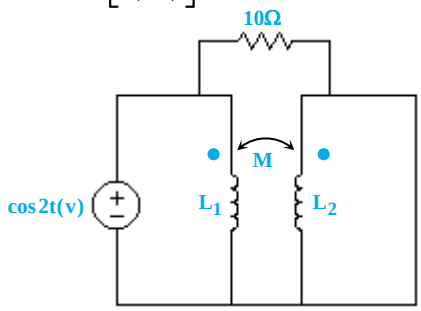
۱۷ـ دوقطبی شکل زیر از مقاومت‌های خطی تغییرناپذیر با زمان و یک سلف ۱ هانری و یک خازن ۱ فارادی تشکیل شده است. می‌دانیم فرکانس مدار $\omega=1$ می‌باشد. اگر $V_2(t)=\cos t$ و $V_1(t)=0$ باشند، جریان‌ها به صورت $i_1(t)=-\sqrt{2}\cos(t+45^\circ)$ و $i_2(t)=\cos t$ خواهند بود و امپدانس دیده شده در قطب ورودی زمانی که قطب دوم اتصال کوتاه می‌شود، برابر با $(0/4-j0/2)\Omega$ می‌باشد. اگر جای سلف و خازن در دوقطبی عوض شود، ماتریس ادمیتانس جدید دوقطبی کدام می‌شود؟



۱) $\begin{bmatrix}2-j & -1+j\\ -1+j & 1\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}2+j & -1-j\\ -1-j & 1\end{bmatrix}$

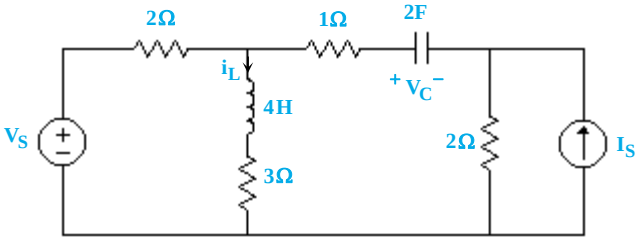
۳) $\begin{bmatrix}-2-j & 1+j\\ 1+j & -1\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-2+j & 1-j\\ 1-j & -1\end{bmatrix}$

۲۱ـ در مدار شکل زیر که در حالت مانا به سر می‌برد، ماتریس اندوکتانس مربوط به سلف‌های توزیع شده برحسب هانری به‌صورت $[L]=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$ اســت. توان مختلط تحویلی توسط منبع چند ولت آمپر است؟



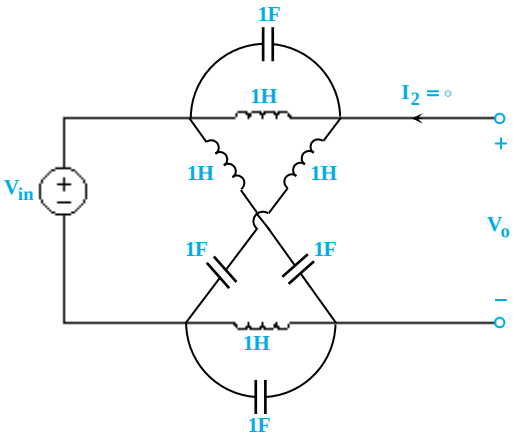
۱) $۰/۰۵+j۰/۱۵$
۲) $۰/۵+j۰/۱۵$
۳) $۰/۵+j۱/۵$
۴) $۰/۰۵+j۰/۰۱۵$

۲۲ـ در مدار زیر، اگر ولتاژ اولیه خازن $V_C(۰^+)=۲v$ و جریان اولیه سلف $i_L(۰^+)=۱A$ باشد، به‌ازای چه رابطه‌ای، خازن و سلف هرگز در $t>۰^+$ شــارژ و دشارژ نمی‌شوند؟



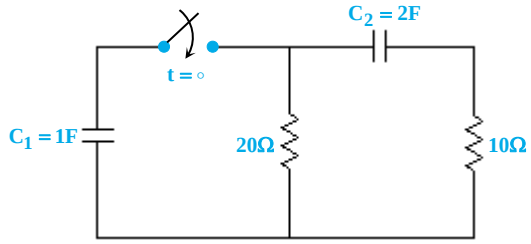
۱) $V_S=۵v$ و $I_S=-۰/۵A$
۲) $V_S=۵v$ و $I_S=۰/۵A$
۳) $V_S=۰/۵v$ و $I_S=۵A$
۴) $V_S=۰/۵v$ و $I_S=-۵A$

۲۳ـ در مدار شکل مقابل، تابع شبکه $H(S)=\frac{V_o(S)}{V_{in}(S)}$ کدام است؟



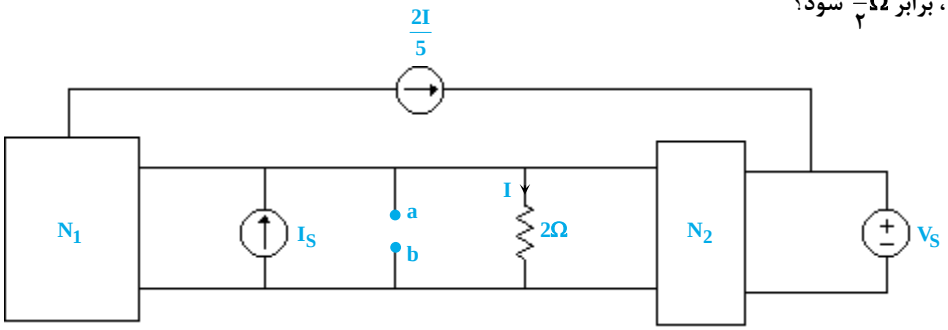
۱) $H(S)=\frac{S^۴+۲S^۲+۲}{S^۴+۴S^۲+۲}$
۲) $H(S)=\frac{S^۴+۲S^۲+۲}{s^۴+۳s^۲+۳}$
۳) $H(S)=\frac{S^۴+S^۲+۱}{S^۴+۲S^۲+۲}$
۴) $H(S)=\frac{S^۴+S^۲+۱}{S^۴+۳S^۲+۲}$

۲۴ـ در مدار شکل زیر، $V_{C_۱}(۰^-)=۱۰v$ و $V_{C_۲}(۰^-)=۰$ است. اگر کلید در $t=۰$ بسته شود، مقدار $\frac{d^۲i_{C_۲}}{dt^۲}(۰^+)$ چند $(\frac{A}{sec^۲})$ است؟



۱) $-\frac{۳}{۴۰}$
۲) $\frac{۳}{۸۰}$
۳) $-\frac{۳}{۸۰}$
۴) $\frac{۳}{۴۰}$

۲۵ـ در مدار زیر (با فرض جواب یکتا)، $N_۱$ و $N_۲$ از مقاومت‌های خطی تشکیل شده‌اند و $I=\frac{۵}{۶}(V_S+\frac{۲}{۵}I_S)$ می‌باشد. به جای مقاومت ۲Ω چه مقاومتی قرار دهیم تا مقاومت کل مدار از دو سر a و b، برابر $\frac{۱}{۲}\Omega$ شود؟



۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۶ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست نیست؟

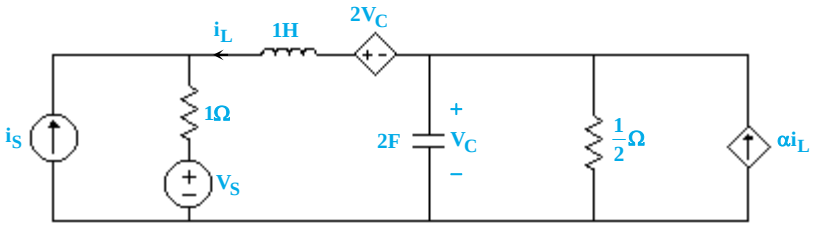
۱) ضریب توان هر شبکه اعم از سینوسی و غیرسینوسی، برابر حاصل تقسیم توان متوسط آن شبکه به حداکثر توان مصرفی آن شبکه است.

۲) ضریب توان هر شبکه اعم از سینوسی و غیرسینوسی، برابر حاصل تقسیم توان متوسط آن شبکه به توان ظاهری آن شبکه است.

۳) اگر ضریب توان یک شبکه کوچک‌تر از یک باشد، حتماً آن شبکه دارای سلف یا خازن است.

۴) در یک مدار تشدید سری، جهت به دست آوردن مشخصه میان‌گذر باید ولتاژ خروجی از دو سر مقاومت انتخاب گردد.

۲۷ـ اگر یکی از فرکانس‌های طبیعی مدار زیر برابر $-\frac{۱}{۲}$ باشد، فرکانس طبیعی دیگر مدار و مقدار α کدام است؟



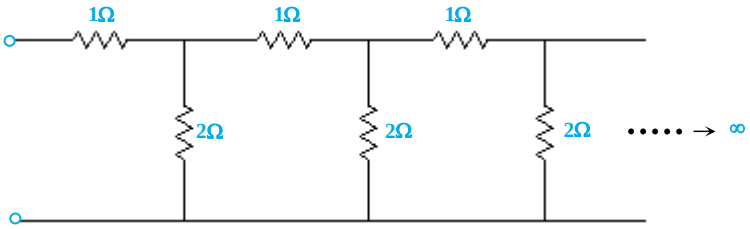
۱) $\alpha=\frac{۵}{۲}$ و $S=-\frac{۵}{۲}$

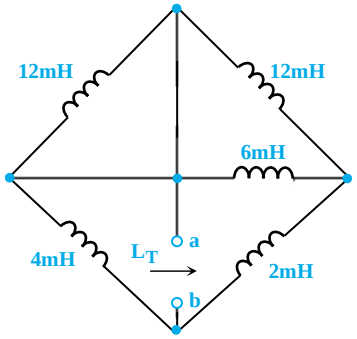
۲) $\alpha=\frac{۵}{۶}$ و $S=-\frac{۵}{۲}$

۳) $\alpha=\frac{۱۳}{۶}$ و $S=-\frac{۳}{۲}$

۴) $\alpha=\frac{۷}{۶}$ و $S=-\frac{۳}{۲}$

۲۸ـ اگر مقاومت نامتناهی نشان داده شده در شکل زیر به دو سر پایانه ab در مدار شکل زیر وصل شود، ثابت زمانی مدار چند میلی ثانیه می‌شود؟





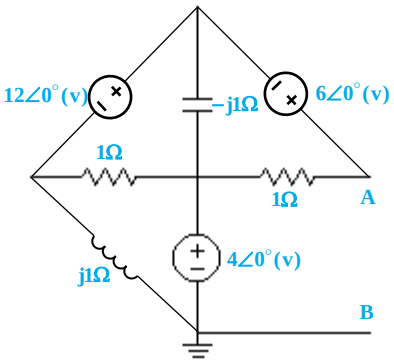
۱) ۱/۲

۲) ۰/۶

۳) $\frac{۵}{۶}$

۴) $\frac{۵}{۳}$

۲۹ـ مدار معادل تونن شبکه شکل زیر، از دید دو نقطه A و B به چه صورتی می‌باشد؟



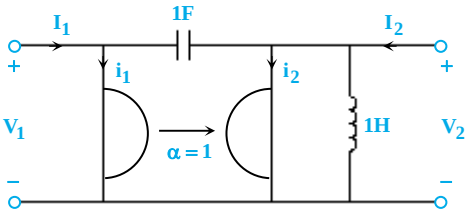
۱) $\begin{cases} V_{th}=۲۶-j۲۸ \\ Z_{th}=۰/۵ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} V_{th}=۲۶+j۲۸ \\ Z_{th}=۱ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} V_{th}=۱۳-j۴ \\ Z_{th}=۰/۵ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} V_{th}=۲۶+j۲۸ \\ Z_{th}=۰/۵ \end{cases}$

۳۰ـ در مدار شکل زیر ژیراتور ایده‌آل می‌باشد. ماتریس هایبرید دوقطبی کدام است؟



{ برای ژیراتور داریم: $V_۱=\alpha i_۲$ ، $V_۲=-\alpha i_۱$ }

۱) $\begin{bmatrix} \frac{۲}{S} & \frac{۱}{S}-۱ \\ \frac{۱}{S}+۱ & \frac{۱}{S} \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} \frac{۲}{S} & \frac{۱}{S}+۱ \\ \frac{۱}{S}-۱ & \frac{۱}{S} \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{S} & \frac{۱}{S}-۱ \\ \frac{۱}{S}+۱ & \frac{۲}{S} \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{S} & \frac{۱}{S}+۱ \\ \frac{۱}{S}-۱ & \frac{۲}{S} \end{bmatrix}$

۱۰ـ گزینه «۴» در این مسأله، $0 < x < \infty$ نامتناهی است و $0 \le y \le 1$ متناهی است. ابتدا باید دید کدام متغیر دارای دو شرط مرزی همگن است و سپس بر اساس همان متغیر تصمیم می‌گیریم سری فوریه بنویسیم یا انتگرال فوریه.

می‌بینیم که y دارای دو شرط مرزی همگن در $y = 0$ و $y = 1$ است، پس به علت متناهی بودن y، جواب به صورت سری فوریه خواهد بود و $F_n(y)$ به صورت مثلثاتی در جواب ظاهر می‌شود. به ازای $y = 0$ داریم $u(x,0) = 0$ پس $F_n(y) = \sin\sqrt{\lambda_n}\,y$ است.

حالا از شرط مرزی $u_y(x,1) = 0$ داریم: $F_n'(1) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_n} = (2n-1)\frac{\pi}{2}$

پس $F_n(y) = \sin(2n-1)\frac{\pi}{2}y$ است. جواب‌های x به صورت $e^{\sqrt{\lambda_n}x}$ و $e^{-\sqrt{\lambda_n}x}$ هستند، اما چون $0 < x < \infty$ است و جواب باید کران‌دار باشد فقط $e^{-\sqrt{\lambda_n}x}$ در جواب می‌ماند.

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\sqrt{\lambda_n}x}\sin\sqrt{\lambda_n}y = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-(2n-1)\frac{\pi}{2}x}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}y$$

اکنون با استفاده از شرط مرزی ناهمگن $u(0,y)$ ضرایب B_n را تعیین می‌کنیم. با جایگذاری $x = 0$ در سری جواب داریم:

$$u(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2n-1)\frac{\pi}{2}y = 2\sin(\frac{\pi}{2}y)\cos(2\pi y)$$

با استفاده از فرمول تبدیل ضرب به جمع داریم: $u(0,y) = \frac{2}{2}[\sin(2\pi+\frac{\pi}{2})y + \sin(\frac{\pi}{2}-2\pi)y] = \sin(5\frac{\pi}{2}y) - \sin(\frac{3\pi}{2}y)$

با مقایسه‌ی این عبارت و جملات سری فوریه می‌بینیم که: $B_1 = 0\,,\ B_2 = -1\,,\ B_3 = 1\,,\ B_4 = B_5 = \cdots = 0$

پس از سری فوریه فقط جملات $n = 2$ و $n = 3$ باقی می‌مانند. با قرار دادن ضرایب B_n در سری جواب داریم:

$$u(x,y) = -e^{-\frac{3\pi}{2}x}\sin(\frac{3\pi}{2}y) + e^{-\frac{5\pi}{2}x}\sin(\frac{5\pi}{2}y)$$

۱۱ـ گزینه «۱» تابع $f(z) = \frac{z^n e^{\frac{1}{z}}}{1+z}$ دارای دو نقطه تکین در $z = -1$ و $z = 0$ است. البته نقطه‌ی $z = -1$ درون مرز قرار ندارد و فقط باید مانده‌ی f را در $z = 0$ حساب کنیم. از آن‌جا که این نقطه قطب اساسی است با نوشتن بسط لوران $f(z)$ ضریب $\frac{1}{z}$ را تعیین می‌کنیم تا مانده‌ی f در $z = 0$ به دست آید:

$$f(z) = z^n(\frac{1}{1+z})(e^{\frac{1}{z}}) = z^n(1-z+z^2-z^3+-\cdots)(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots)$$

با توجه به وجود z^n پشت پرانتزها باید در ضرب پرانتزها به دنبال ایجاد $\frac{1}{z^{n+1}}$ باشیم. با نوشتن بسط‌ها به صورت دو سری و ضرب جملات در یکدیگر خواهیم داشت:

$$f(z) = z^n(\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m z^m)(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!z^k}) \Rightarrow f(z) = z^n\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{k!}\frac{1}{z^{k-m}}$$

برای آن که $\frac{1}{z^{k-m}} = \frac{1}{z^{n+1}}$ باشد، لازم است $k-m = n+1$ باشد. بنابراین از سری دوم فقط جملاتی که $k = n+m+1$ باشد باقی می‌ماند:

$$z^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(n+m+1)!}\frac{1}{z^{n+1}} = (\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(n+m+1)!})\frac{1}{z}$$

بنابراین مانده‌ی $f(z)$ در $z = 0$ برابر با سری مقابل است: $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(n+m+1)!}$

حاصل انتگرال طبق قضیه‌ی مانده‌ها به این صورت به دست می‌آید: $I = 2\pi i\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(n+m+1)!} = -2\pi i\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(n+m)!}$

۱۲ـ گزینه «۲» ابتدا با جایگذاری $\mathrm{Re}(z^۲)=\frac{۱}{۲}(z^۲+\bar{z}^۲)$ ضابطه‌ی $f(z)$ را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(z)=z^۲-\bar{z}^۲+\frac{۲}{۲}(z^۲+\bar{z}^۲)+\mathrm{Ln}(z-i)\ \Rightarrow f(z)=۲z^۲+\mathrm{Ln}(z-i)$$

این تابع در نقاطی که $\mathrm{Im}(z-i)=۰$ و $\mathrm{Re}(z-i)\le ۰$ باشد، تحلیلی نیست. با جایگذاری $z=x+iy$ داریم:

$$\begin{cases}\mathrm{Im}(x+iy-i)=۰ \Rightarrow y-۱=۰\\ \mathrm{Re}(x+iy-i)\le ۰ \Rightarrow x\le ۰\end{cases}$$

پس تابع $f(z)$ در مجموعه‌ی نقاطی به صورت $z=x+iy$ که $x\le ۰$ و $y-۱=۰$ باشد، غیرتحلیلی است.

۱۳ـ گزینه «۳» ابتدا k تا از x_iها را صفر قرار می‌دهیم، اما توجه کنید که بقیه x_iها باید حداقل یک باشند $(x_{r-k}\ge ۱)$ تا شرط مسئله دقیقاً رعایت شود. اکنون $r-k$ ظرف باقیمانده داریم و n توپ که باید در هر ظرف حداقل یک توپ قرار گیرد، بنابراین ابتدا در هر ظرف یک توپ قرار می‌دهیم، بنابراین تعداد توپ‌های باقیمانده برابر است با:

$n-(r-k)$ که باید در $r-k$ جایگاه (ظرف) قرار گیرند:

فرمول اصلی: $\binom{n+k-۱}{n} \xrightarrow{\text{که در اینجا}} \begin{cases}n \to n-r+k\\ k \to r-k\end{cases}$

$$\underbrace{\binom{r}{k}}_{\text{برای صفر بودن}}\binom{n-r+k+r-k-۱}{n-r+k}=\binom{r}{k}\binom{n-۱}{n-r+k}$$

۱۴ـ گزینه «۴» از فرمول کوواریانس خواهیم داشت:

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X).E(Y)$$

$$\begin{cases}E(XY)=E(E(XY\mid Y=y))=E(y\underbrace{E(X\mid Y=y)}_{Y})=E(Y^۲)\\ E(X)=E(\underbrace{E(X\mid Y=y)}_{Y})=E(Y)\end{cases}$$

$$f(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{\frac{۱}{\sqrt{۲\pi y}}e^{-\frac{۱}{۲y}(x-y)^۲}}{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi y}}e^{-\frac{۱}{۲y}(x-y)^۲}dx}=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi y}}e^{-\frac{۱}{۲y}(x-y)^۲}\sim N(y,y)$$

$$\Rightarrow\ E(X\mid Y=y)=y\ \Rightarrow\ \mathrm{cov}(X,Y)=E(Y^۲)-E^۲(Y)$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{Var}(Y)=\frac{۱}{۱۲}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi y}}e^{-\frac{۱}{۲y}(x-y)^۲}dx=۱\ \Rightarrow\ f_Y(y)=۱ \qquad ۰<y<۱$$

$$\mathrm{Var}(Y)=\frac{۱-۰}{۱۲}=\frac{۱}{۱۲}$$

۱۵ـ گزینه «۴»

$$E(Y)=E[E(Y\mid X)=E[\frac{۲X+X^۲}{۲}]=E(X)+\frac{۱}{۲}E(X^۲)$$

$$X\sim u(۲,۴)$$

$$E(X)=\frac{۲+۴}{۲},\ \mathrm{Var}(X)=\frac{(۴-۲)^۲}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

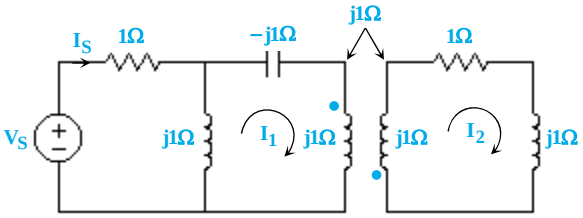
$$E(X^۲)=\mathrm{Var}(X)+E^۲(X)=\frac{۱}{۳}+۹=\frac{۲۸}{۳}$$

$$E(Y)=۳+\frac{۱}{۲}(\frac{۲۸}{۳})=\frac{۲۳}{۳}$$

مدارهای الکتریکی ۱ و ۲

۱۶ـ گزینه «۳»

معادلات مش را می‌نویسیم:



$$(۱)\ V_S = I_S(۱+j۱) - jI_۱$$
$$(۲)\ ۰ = -jI_S + I_۱(j۱) + I_۲(j۱) \Rightarrow I_۱ = -\frac{(۱+j۲)}{j} I_۲ = j(۱+j۲)I_۲$$
$$(۳)\ (j۱)I_۱ + (۱+j۲)I_۲ = ۰$$

عبارت بالا را در معادله ۲ قرار می‌دهیم و رابطه‌ی I_S و $I_۱$ را به‌دست می‌آوریم:

$$jI_S = I_۱(j۱) + I_۲(j۱) = I_۲(j)(۱+j۲)(j۱) + I_۲(j۱) \Rightarrow jI_S = -I_۲(۱+j۲) + I_۲(j۱) = I_۲(-۱-j۱)$$

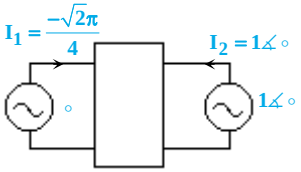
$$\Rightarrow I_S = j(۱+j)I_۲ \Rightarrow I_S = j(۱+j)\frac{I_۱}{j(۱+j۲)} = \frac{۱+j}{۱+j۲} I_۱$$

این عبارت را در معادله ۱ قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{\text{معادله ۱}} V_S = I_S(۱+j۱) - j(\frac{۱+j۲}{۱+j})I_S \Rightarrow V_S = (\frac{۳}{۲} - j\frac{۱}{۲})I_S \Rightarrow Z_S = \frac{V_S}{I_S} = \frac{۳}{۲} - j\frac{۱}{۲}$$

۱۷ـ گزینه «۱»

راه‌حل اول: چون شبکه متقابل است، با در دست داشتن ورودی‌های $V_۱$ و $V_۲$ و خروجی‌های $I_۱$ و $I_۲$ ماتریس ادمیتانس را به دست می‌آوریم:



$$\begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{۱۱} & Y_{۱۲} \\ Y_{۲۱} & Y_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\sqrt{۲}\angle ۴۵^\circ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{۱۱} & Y_{۱۲} \\ Y_{۲۱} & Y_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow Y_{۱۲} = Y_{۲۱} = -\sqrt{۲}\angle ۴۵^\circ \ ,\ Y_{۲۲} = ۱$$

همچنین طبق تعریف $Y_{۱۱}$ را به دست می‌آوریم:

$$Y_{۱۱} = \frac{۱}{۰/۴ - j۰/۲} = ۲ + j$$

در نتیجه ماتریس ادمیتانس به فرم مقابل است:

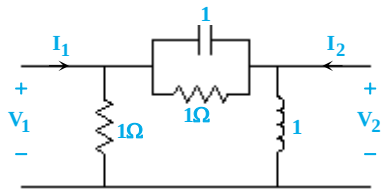
$$Y = \begin{bmatrix} ۲+j & -۱-j \\ -۱-j & ۱ \end{bmatrix}$$

با تعویض سلف و خازن درایه‌های ماتریس جدید ادمیتانس، مزدوج مختلط درایه‌های ماتریس کنونی هستند لذا:

$$Y_{\text{جدید}} = \begin{bmatrix} ۲-j & -۱+j \\ -۱+j & ۱ \end{bmatrix}$$

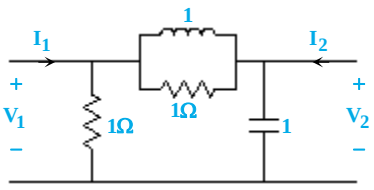
که در گزینه‌ها موجود نیست.

راه‌حل دوم: به وضوح شبکه‌ی زیر تحققی برای شبکه‌ی N مسئله است زیرا:



$$I_۱ = V_۱ + \frac{V_۱ - V_۲}{\frac{۱}{S+۱}} = (S+۲)V_۱ - (S+۱)V_۲$$
$$I_۲ = \frac{V_۲}{S} + \frac{V_۲ - V_۱}{\frac{۱}{S+۱}} = (S+۱+\frac{۱}{S})V_۲ - (S+۱)V_۱$$

که با جایگذاری $S = j$ همان ماتریس ادمیتانس $\begin{bmatrix} ۲+j & -۱-j \\ -۱-j & ۱ \end{bmatrix}$ حاصل می‌شود. اکنون با تعویض سلف و خازن داریم:

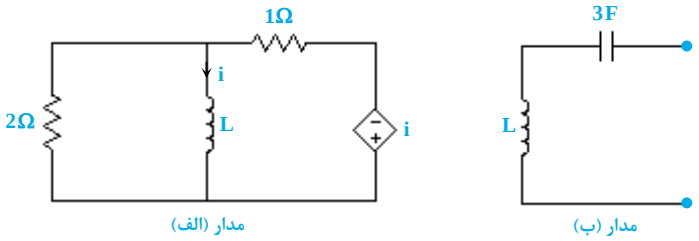


$$I_۱ = V_۱ + \frac{V_۱ - V_۲}{\frac{S}{S+۱}} = \frac{۲S+۱}{S} V_۱ - \frac{S+۱}{S} V_۲$$
$$I_۲ = \frac{V_۲}{\frac{۱}{S}} + \frac{V_۲ - V_۱}{\frac{S}{S+۱}} = -\frac{S+۱}{S} V_۱ + \frac{S^۲ + S + ۱}{S} V_۲$$

با جایگذاری $S = j$ ماتریس $\begin{bmatrix} ۲-j & -۱+j \\ -۱+j & ۱ \end{bmatrix}$ حاصل می‌شود، بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۲۵ـ اگر در مدار الف مقدار انرژی سلف در $t_0 = \text{Ln}(\sqrt{3})$ به $\frac{1}{3}$ مقدار اولیه‌اش برسد، فرکانس تشدید در مدار ب چند رادیان بر ثانیه است؟

$(i(0^-) = 1A)$



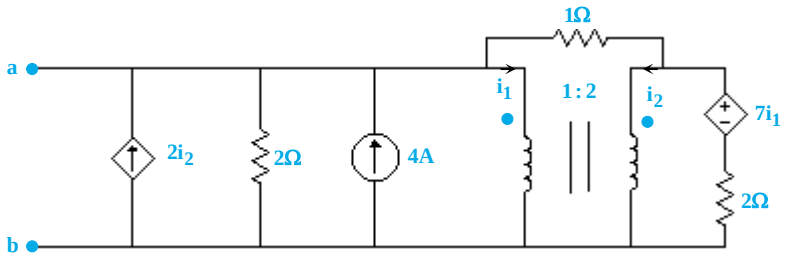
۱) ۲

۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۴

۴) $\frac{1}{4}$

۲۶ـ مقاومت تونن دیده شده از دو سر a و b چند اهم است؟



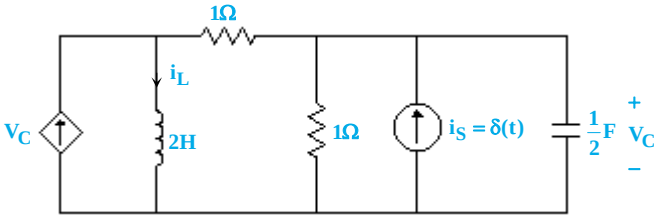
۱) ۱Ω

۲) ۲Ω

۳) ۴Ω

۴) ۸Ω

۲۷ـ کدام گزینه در مورد مدار زیر صحیح است؟



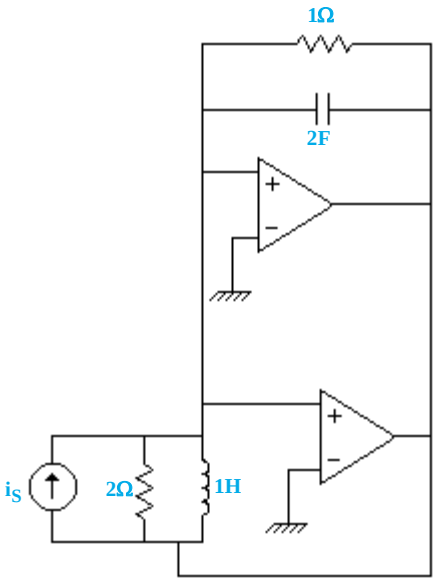
۱) فرکانس‌های طبیعی مدار $\frac{-1 \pm j\sqrt{31}}{2}$ بوده و مقدار جریان سلف در $t = 0^-$ تغییر لحظه‌ای دارد.

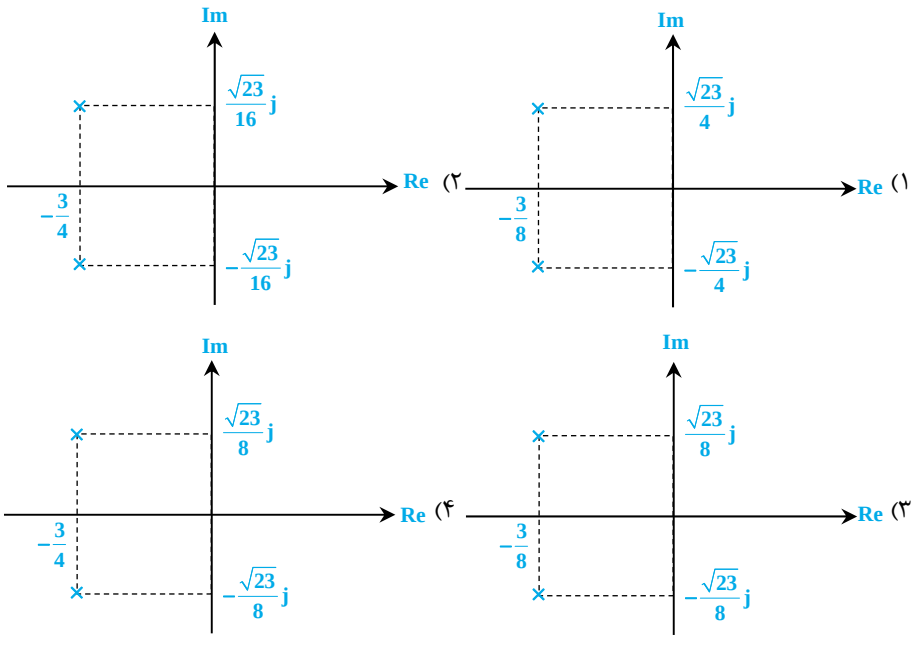
۲) فرکانس‌های طبیعی مدار $\frac{-1 \pm j\sqrt{31}}{2}$ بوده و مقدار جریان سلف در $t = 0^-$ تغییر لحظه‌ای ندارد.

۳) فرکانس‌های طبیعی مدار $\frac{-1 \pm j\sqrt{31}}{4}$ بوده و مقدار جریان سلف در $t = 0^-$ تغییر لحظه‌ای دارد.

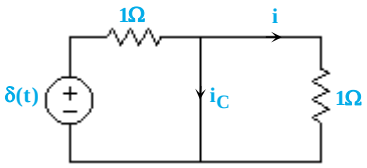
۴) فرکانس‌های طبیعی مدار $\frac{-1 \pm j\sqrt{31}}{4}$ بوده و مقدار جریان سلف در $t = 0^-$ تغییر لحظه‌ای ندارد.

۲۸ـ کدام‌یک از گزینه‌ها محل فرکانس‌های طبیعی مدار زیر را درست نشان داده است؟ (آپ امپ‌ها ایده‌آل در ناحیه خطی کار می‌کنند.)





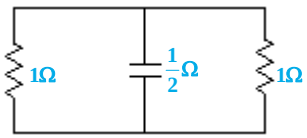
۱۹ـ گزینه «۳» مدار مرتبه اول است، بنابراین دانستن حالت اولیه، حالت دائمی و ثابت زمانی برای داشتن پاسخ کامل مدار کفایت می‌کند. برای محاسبه‌ی حالت اولیه، دقت می‌کنیم که خازن در ضربه اتصال کوتاه شده و جریانی از آن می‌گذرد. این جریان روی خازن، ولتاژ اولیه‌ای قرار می‌دهد. بنابراین داریم:



$$i_C = \delta(t) \Rightarrow V_c(\circ^+) - V_c(\circ^-) = \frac{1}{c}\int_{\circ^-}^{\circ^+} \delta(t)\,dt = 2\int_{\circ^-}^{\circ^+} \delta(t)\,dt = 2$$

$$V_c(\circ^-) = \circ \Rightarrow V_c(\circ^+) = 2 \Rightarrow i(\circ^+) = \frac{V_c(\circ^+)}{1} = 2$$

در بی‌نهایت انرژی مدار تلف می‌شود، بنابراین $i(\infty) = \circ$. برای محاسبه‌ی ثابت زمانی، با خاموش کردن منابع مستقل داریم:

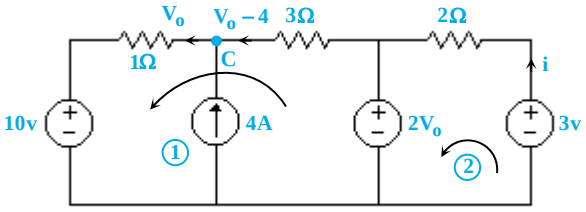


$$\tau = RC = \frac{1}{2} \times (1 \| 1) = \frac{1}{4}$$

بنابراین پاسخ کامل به صورت زیر است:

$$i(t) = (i(\infty) + [i(\circ) - i(\infty)]e^{-\frac{1}{\tau}})u(t) = (\circ + 2e^{-\frac{t}{\frac{1}{4}}})u(t) = 2e^{-4t}u(t)$$

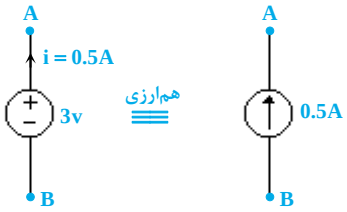
۲۰ـ گزینه «۴» با توجه به خواسته مسأله، به دنبال عنصری هستیم که اگر به جای منبع ولتاژ ۳ ولت قرار گیرد، جریان هیچ‌یک از شاخه‌ها و ولتاژ هیچ‌یک از گره‌ها تغییر نکند. این عنصر می‌تواند یک منبع جریان و یا یک مقاومت باشد که منبع جریان باید مقداری برابر با اندازه جریان منبع ولتاژ و البته با توجه به جهت آن داشته باشد. مقدار مقاومت جایگزین هم برابر حاصل تقسیم منبع ولتاژ بر جریان آن می‌باشد (پلاریته منبع ولتاژ و جهت جریان آن را باید در نظر بگیریم). بنابراین به دنبال جریان منبع ولتاژ هستیم.



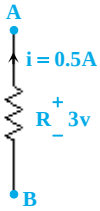
با توجه به اینکه ولتاژ مقاومت ۱ اهمی برابر V_0 است، بنابراین جریان این مقاومت با جهت نشان داده شده برابر V_0 می‌گردد. با در نظر گرفتن رابطه KCL برای گره C، جریان مقاومت ۳ اهمی در جهت نشان داده شده، $V_0 - 4$ می‌شود. حال کافی است که در حلقه‌های ۱ و۲، KVL بنویسیم:

$$\begin{cases} KVL_1 : 10 + V_0 + 3 \times [V_0 - 4] = 2V_0 \\ KVL_2 : 2V_0 + 2 \times i = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_0 = 1v \\ i = 0/5A \end{cases}$$

بنابراین می‌توان به جای منبع ولتاژ ۳v، منبع جریانی به اندازه ۰/۵ آمپر و با جهت نشان داده شده برای i قرار داد.



اگر بخواهیم به جای منبع ولتاژ ۳ ولتی، مقاومت قرار دهیم، خواهیم داشت:

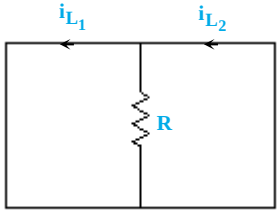


$$\Rightarrow R \times i = -3 \Rightarrow R \times \circ/5 = -3 \Rightarrow R = -6\Omega$$

یعنی می‌توان به جای منبع ولتاژ، مقاومت ۶− اهمی قرار داد. با توجه به توضیحات فوق، گزینه (۴) صحیح است.

۲۱ـ گزینه «۴» با توجه به گزینه‌ها به دنبال انرژی تلف‌شده در مقاومت و حالت نهایی مدار هستیم.

در حالت نهایی، سلف‌ها اتصال کوتاه هستند. بنابراین داریم:



با توجه به اتصال کوتاه شدن دو سر مقاومت R، جریان آن صفر است و در نتیجه داریم:

$$i_{L_1} = i_{L_2} \Rightarrow i_{L_2}(\infty) = i_{L_1}(\infty)$$

با توجه به قانون پایستگی شار داریم:

$$(L_1 i_{L_1} + L_2 i_{L_2})|_{t=\circ} = (L_1 i_{L_1} + L_2 i_{L_2})|_{t=\infty} \Rightarrow 3 \times 4 + 2 \times 2 = 3 \times i_{L_1}(\infty) + 2 \times [i_{L_1}(\infty)] \Rightarrow i_{L_1}(\infty) = \frac{16}{5}A \ , \ i_{L_2}(\infty) = \frac{16}{5}A$$

آزمون (۴)

ریاضیات (معادلات دیفرانسیل، ریاضیات مهندسی، آمار و احتمالات)

۱ـ جواب معادله‌ی $tgy\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)+\sin(x-y)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sin y}+۲\cos x=c$
۲) $\sec y+۲\cos x=c$
۳) $\frac{۱}{\sin y}-۲\cos x=c$
۴) $\sec y-۲\cos x=c$

۲ـ جوابی از معادله‌ی $x^۲y''-xy'+y=۲x$ که در شروط $y(۱)=۰$ و $y'(۱)=۱$ صدق می‌کند، از کدام نقطه‌ی زیر عبور می‌کند؟

۱) $(e,۰)$
۲) (e,e)
۳) $(e,۲e^۲)$
۴) $(e,۲e)$

۳ـ اگر $y_۱=xe^x$ یک جواب معادله دیفرانسیل همگن متناظر با معادله $x^۲y''-x(x+۲)y'+(x+۲)y=x^۳\sin x$ باشد، آن‌گاه جواب عمومی این معادله کدام است؟

۱) $y=c_۱xe^x+c_۲x+\frac{۱}{۲}x(\cos x+x\sin x)$
۲) $y=c_۱xe^x+c_۲x+\frac{۱}{۲}x(\cos x-\sin x)$
۳) $y=c_۱xe^x+c_۲x^۲-\frac{۱}{۲}x(\cos x-\sin x)$
۴) $y=c_۱xe^x+c_۲x^۲-\frac{۱}{۲}x(\cos x-x\sin x)$

۴ـ اگر تبدیل لاپلاس تابع $J_۰(t)$ به صورت $\frac{۱}{\sqrt{s^۲+۱}}$ باشد، آن‌گاه حاصل $I=\int_۰^\infty (te^{-۳t})J_۰(۴t)dt$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸۰}$
۲) $\frac{۳}{۱۲۵}$
۳) $\frac{۳}{۳۳}$
۴) $\frac{۳}{۴۰}$

۵ـ در حل معادله‌ی دیفرانسیل $۸x^۲y''+۱۰xy'+(x-۱)y=۰$ حول نقطه‌ی غیرعادی $x=۰$، معادله‌ی مشخصه‌ی فروبنیوس و روابط بازگشتی دنباله‌ی a_n برای $n\geq ۱$ کدام‌اند؟

۱) $\begin{cases}۸r^۲-۲r-۱=۰\\ a_n=\frac{-a_{n-۱}}{۲n(۴n-۳)}\ ,\ a_n=\frac{-a_{n-۱}}{۲n(۴n+۳)}\end{cases}$
۲) $\begin{cases}۸r^۲+۲r-۱=۰\\ a_n=\frac{-a_{n-۱}}{۲n(۴n-۳)}\ ,\ a_n=\frac{-a_{n-۱}}{۲n(۴n+۳)}\end{cases}$
۳) $\begin{cases}۸r^۲+۲r-۱=۰\\ a_n=\frac{a_{n-۱}}{۲n(۴n-۳)}\ ,\ a_n=\frac{a_{n-۱}}{۲n(۴n+۳)}\end{cases}$
۴) $\begin{cases}۸r^۲-۲r-۱=۰\\ a_n=\frac{a_{n-۱}}{۲n(۴n-۳)}\ ,\ a_n=\frac{a_{n-۱}}{۲n(۴n+۳)}\end{cases}$

۶ـ اگر a و b اعدادی مثبت باشند، آنگاه حاصل انتگرال $I=\int_۰^\infty \frac{\sqrt[۳]{x}}{(x+a)(x+b)}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi}{\sqrt{۳}}(\frac{\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}})$
۲) $\frac{۲\pi}{\sqrt{۳}}(\frac{\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}}{a-b})$
۳) $\frac{\pi}{\sqrt{۳}}(\frac{\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}}{a-b})$
۴) $\frac{\pi}{\sqrt{۳}}(\frac{\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}})$

۷ـ خط $y=۱-x$ توسط نگاشت $w=\frac{۱}{z}=u+iv$ به کدام منحنی نگاشته می‌شود؟

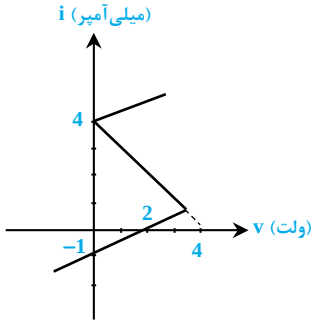
۱) $u^۲+v^۲=u+v$
۲) $u^۲+v^۲=u-v$
۳) $v^۲-u^۲=\frac{۱}{۲}(u+v)$
۴) $v^۲-u^۲=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(u+v)$

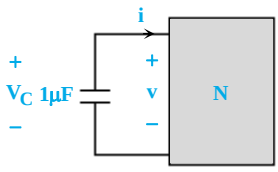
۸ـ معادله‌ی موج یک بعدی زیر برای یک تار نازک به طول ۲ نوشته شده است. جواب $u(x,t)$ کدام است؟

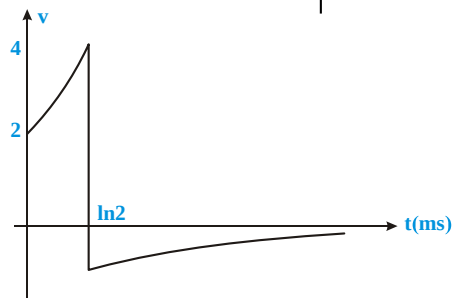
$$\begin{cases}u_{tt}=۴u_{xx}\ ,\ ۰<x<۲\ ,\ t>۰\\ u(۰,t)=u(۲,t)=۰\ ,\ t\geq ۰\\ u(x,۰)=\sin^۳\frac{\pi x}{۲}\ ,\ ۰\leq x\leq ۲\\ u_t(x,۰)=۰\ ,\ ۰\leq x\leq ۲\end{cases}$$

۱) $\frac{۱}{۴}\cos ۲\pi t\sin\frac{\pi x}{۲}-\frac{۳}{۴}\cos ۳\pi t\sin\frac{۳\pi x}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۴}\cos \pi t\sin\frac{\pi x}{۲}-\frac{۱}{۴}\cos ۳\pi t\sin\frac{۳\pi x}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۴}\cos \frac{\pi t}{۲}\sin\frac{\pi x}{۲}-\frac{۳}{۴}\cos \frac{۳\pi t}{۲}\sin\frac{۳\pi x}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۴}\cos \frac{\pi t}{۲}\sin\frac{\pi x}{۲}-\frac{۳}{۴}\cos \frac{۳\pi t}{۲}\sin\frac{۳\pi x}{۲}$

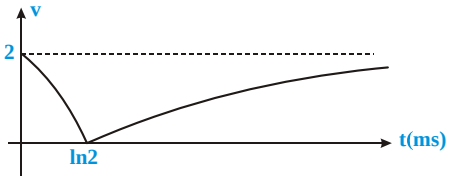
۲۵ـ رابطه‌ی $i-v$ شبکه N در شکل زیر داده شده است. اگر $V_C(0^-)=2v$ و $i(0)=2mA$، آنگاه نمودار ولتاژ خازن در کدام گزینه به درستی ترسیم شده است؟



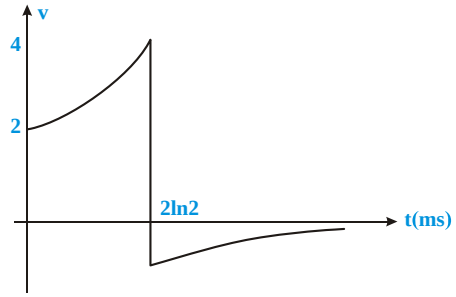




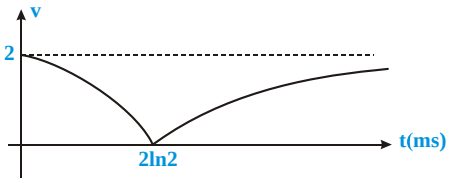
(۲)



(۱)



(۴)

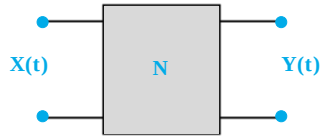


(۳)

۲۶ـ در شبکه N در شکل زیر، $X(t)$ ورودی و $Y(t)$ خروجی است. تابع تبدیل شبکه N که از عناصر L,R و C تغییرناپذیر با زمان تشکیل شده است به قرار زیر است:

$$H(S)=\frac{Y(S)}{X(S)}=\frac{K(S+d)}{S^2+aS+b}$$

همچنین اگر $X(t)=\cos tu(t)$ باشد، آنگاه $Y(t)=[e^{-2t}\cos(t+30^\circ)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t+45^\circ)]u(t)$ است. مقدار $a+b-k+d$ با کدام گزینه برابر است؟

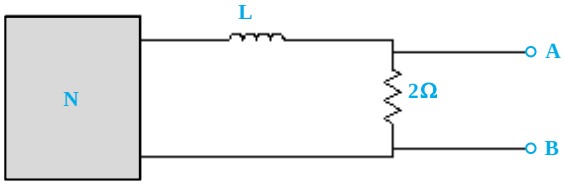


۱) ۰
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۹

۲۷ـ شبکه N دارای فقط ۲ فرکانس تشدید a و b است و قسمت موهومی امپدانس این شبکه، تابعی درجه ۲ می‌باشد. در مورد فرکانس تشدید مدار زیر کدام گزینه درست است؟ (از دو سر A و B)

$X(\omega)$ قسمت موهومی امپدانس شبکه N است و مشتق دوم آن نسبت به ω برابر ۲ است.)

$(L=a=\frac{b}{4})$



۱) اگر $X(\omega)$ دارای ماکزیمم مطلق باشد، مدار، ۲ فرکانس تشدید دارد که هر دو از b بزرگ‌تر هستند.
۲) اگر $X(\omega)$ دارای ماکزیمم مطلق باشد، مدار، ۲ فرکانس تشدید دارد که هر دو از b کوچک‌تر هستند.
۳) اگر $X(\omega)$ دارای مینیمم مطلق باشد، مدار، ۱ فرکانس تشدید مضاعف و برابر $\frac{b}{2}$ دارد.
۴) اگر $X(\omega)$ دارای مینیمم مطلق باشد، مدار ۱ فرکانس تشدید مضاعف و برابر $b\times(\frac{3+\sqrt{5}}{4})$ دارد.

۸ـ پاسخ معادله لاپلاس در نیم صفحه بالا باشرط مرزی $f(x)=\begin{cases}1 & ; \quad x<-1\\ 0 & ; \quad -1<x<1\\ 1 & ; \quad x>1\end{cases}$ (بر روی محور حقیقی) کدام است؟

۱) $1-\frac{1}{\pi}tg^{-1}(\frac{x-1}{y})-\frac{1}{\pi}tg^{-1}(\frac{x+1}{y})$

۲) $1+\frac{1}{\pi}tg^{-1}(\frac{x-1}{y})-\frac{1}{\pi}tg^{-1}(\frac{x+1}{y})$

۳) $1-\frac{1}{\pi}tg^{-1}(\frac{x-1}{y})+\frac{1}{\pi}tg^{-1}(\frac{x+1}{y})$

۴) $1+\frac{1}{\pi}tg^{-1}(\frac{x-1}{y})+\frac{1}{\pi}tg^{-1}(\frac{x+1}{y})$

۹ـ نگاشت $w=Lnz+1$ بخشی از طوق $e<|z|<1$ که داخل زاویه‌ی $0<\arg z<e$ قرار دارد را به ناحیه D' در صفحه‌ی w می‌نگارد. مساحت ناحیه D' چقدر است؟

۱) e

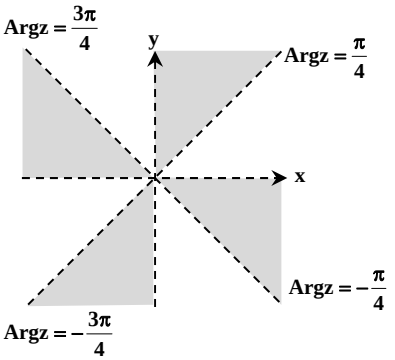
۲) $2e$

۳) $\frac{e}{2}$

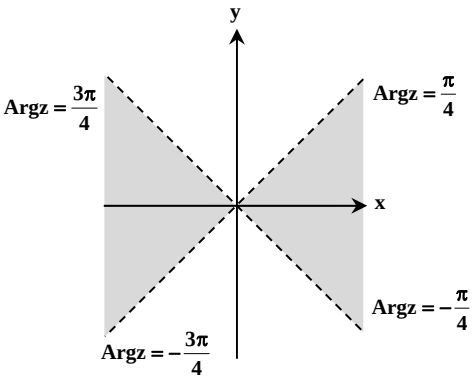
۴) $\frac{e}{4}$

۱۰ـ تابع $f(z)=|x^2-y^2|+2i|xy|$ در کدام ناحیه تحلیلی است؟

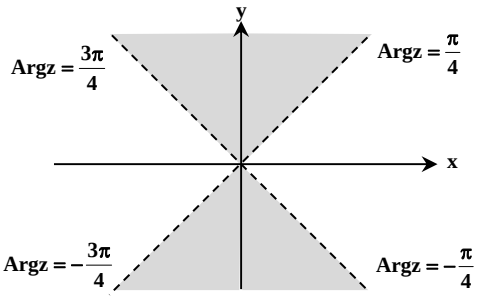
(۱)



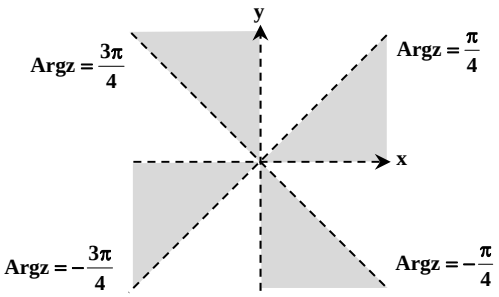
(۲)



(۳)



(۴)



۱۱ـ جواب $u(x,t)$ از معادله‌ی موج زیر با شرایط اولیه و مرزی داده شده کدام است؟

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0<x<1, t>0\\ u(0,t)=0, u(1,t)=e^{-t} & \\ u(x,0)=0, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0 & \end{cases}$$

۱) $u(x,t)=(\frac{\sinh x}{\sinh 1})e^{-t}+\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi x)[\frac{\sin n\pi t+\cos n\pi t}{1+n^2\pi^2}]$

۲) $u(x,t)=(\frac{\sinh x}{\sinh 1})e^{-t}+2\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi x)[\frac{\sin n\pi t+\cos n\pi t}{1+n^2\pi^2}]$

۳) $u(x,t)=(\frac{\sinh x}{\sinh 1})e^{-t}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(n\pi x)[\frac{n\pi\sin n\pi t+n\pi\cos n\pi t}{1+n^2\pi^2}]$

۴) $u(x,t)=(\frac{\sinh x}{\sinh 1})e^{-t}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(n\pi x)[\frac{n\pi\sin n\pi t+n\pi\cos n\pi t}{1+n^2\pi^2}]$

۱۲ـ اگر سری فوریه تابع $f(t)=t\sin t$ در بازه $[-\pi,\pi]$ به صورت $t\sin t = ۱-\frac{۱}{۲}\cos t + ۲\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{(n-۱)(n+۱)}\cos nt$ تعریف شده باشد، آنگاه حاصل سری عددی $S=\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n(n-۱)(n+۱)}\sin(\frac{۳n\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{۳(\pi+۱)}{۲}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۴}-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۴}-\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳(\pi+۱)}{۴}$

۱۳ـ بازیکن A به طور متناوب و برای یک دوره طولانی با دو بازیکن B و C بازی می‌کند. احتمال برد A مقابل B برابر $\frac{۵}{۷}$ و احتمال برد A مقابل C برابر $\frac{۷}{۱۰}$ است. بازیکن A ابتدا با B بازی می‌کند. احتمال آن که C قبل از B بازی را ببرد چقدر است؟

۱) $\frac{۶}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۱۴ـ فرض کنید x و y دارای تابع چگالی توأم به صورت زیر باشند:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{e^{-y}}{y}\quad ,\quad ۰<x<y\quad ,\quad ۰<y<\infty$$

مقدار $E(x^۲|Y=y)$ کدام است؟

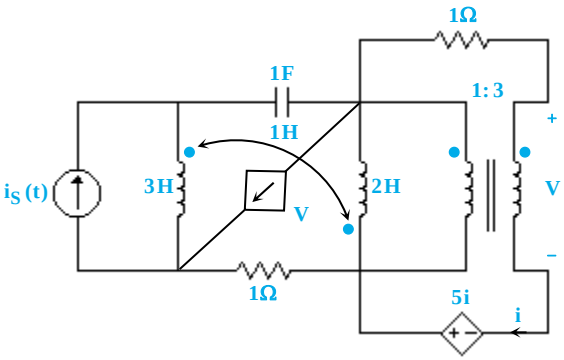
۱) $\frac{Y^۲}{۴}$ ۲) $\frac{Y^۳}{۴}$ ۳) $\frac{Y^۳}{۲}$ ۴) $\frac{Y^۲}{۳}$

۱۵ـ فرض کنید $X\sim U(۰,۱)$ و $Y\,|\,X=x\sim U(x,x+۱)$ باشد مقدار $Var(X+Y)$ برابر با کدام یک از گزینه‌های زیر خواهد بود؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۷}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲}{۱۲}$

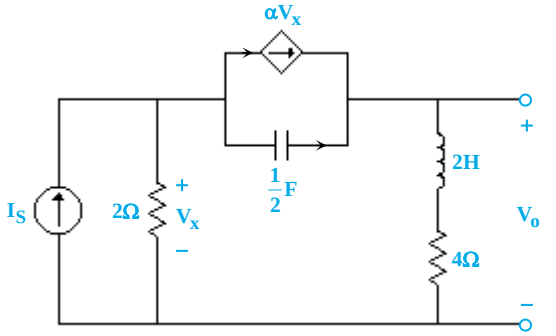
مدارهای الکتریکی ۱ و ۲

۱۶ـ مدار زیر به ازای کدام ورودی پاسخ ماندگار سینوسی ندارد؟



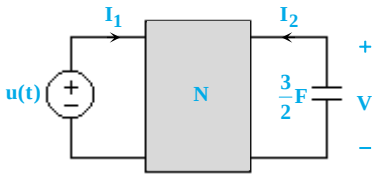
۱) $i_S(t)=\sin(\frac{\sqrt{۲}}{۲}t)$
۲) $i_S(t)=\sin(\frac{۱}{۲}t)$
۳) $i_S(t)=\cos(t)$
۴) $i_S(t)=\cos(\sqrt{۲}t)$

۱۷ـ در مدار شکل زیر می‌خواهم امپدانس انتقالی $\frac{V_o}{I_S}$ مستقل از فرکانس باشد، مقدار α چقدر باید باشد؟



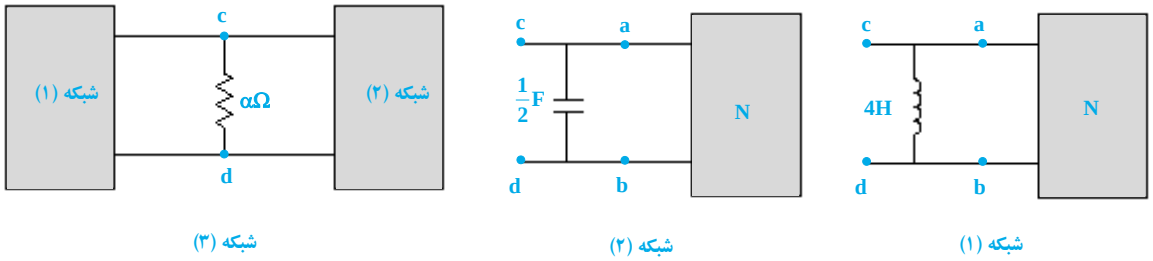
۱) ۴
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۲

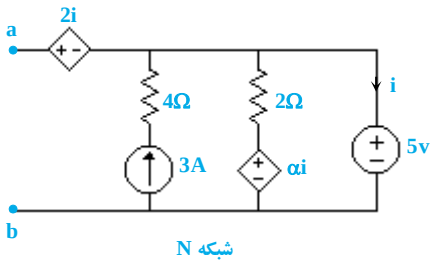
۱۸ـ ماتریس امپدانس دوقطبی N در شکل زیر برابر $Z_N=\begin{bmatrix}۵+۲S & ۲\\ ۲ & ۲\end{bmatrix}$ است. اگر $V_C(۰^-)=۰$، آنگاه معادله‌ی ولتاژ خازن کدام است؟



۱) $(۱/۸e^{-t}-۰/۴-۰/۲e^{-\frac{۵}{۶}t})u(t)$
۲) $(۰/۴+۲e^{-t})u(t)$
۳) $(۰/۴+۲e^{-t}-۱/۲e^{-\frac{۵}{۶}t})u(t)$
۴) $(۱/۲e^{-t}+۱/۲e^{-\frac{۵}{۶}t})u(t)$

۲۹ـ اگر ثابت زمانی شبکه ۱، ۰/۵ برابر ثابت زمانی شبکه ۲ باشد، ضریب کیفیت شبکه ۳ کدام است؟





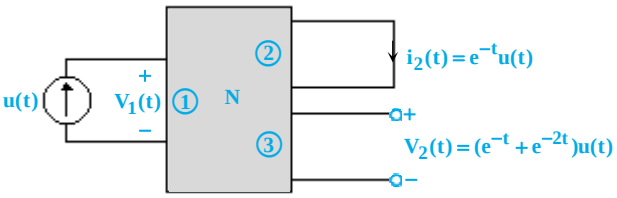
۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$

۲) $۳\sqrt{۲}$

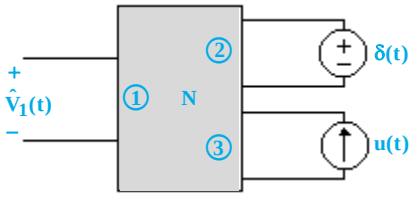
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۴) $۶\sqrt{۲}$

۳۰ـ شبکه N در شکل‌های زیر از اجزای خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است و شبکه‌ای متقابل است. در آزمایش اول نتایج در شکل (الف) آمده است. اگر آزمایش دوم طبق شکل (ب) انجام شود، مقدار $\hat{V}_1(t)$ به غیر از تابع ضربه $\delta(t)$ شامل کدام جمله خواهد بود؟



(شکل الف)



(شکل ب)

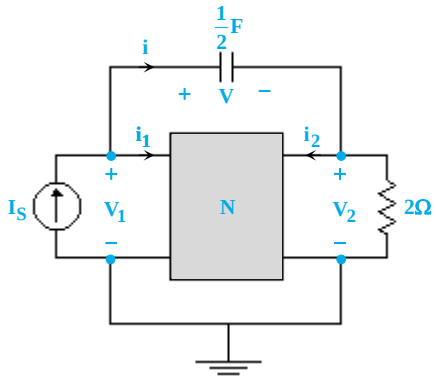
۱) $-e^{-۲t}u(t)$

۲) $e^{-۲t}u(t)$

۳) $e^{-t}u(t)$

۴) $-۲e^{-t}u(t)$

۲۲ـ ماتریس ادمیتانس دوقطبی شکل زیر برابر $Y=\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}$ می‌باشد. معادله‌ی حالت $\frac{dV}{dt}$ کدام است؟



۱) $\frac{dV}{dt}=-\frac{۱۰}{۷}i_S+\frac{۳۴}{۷}V$

۲) $\frac{dV}{dt}=-\frac{۱۰}{۷}i_S-\frac{۳۴}{۷}V$

۳) $\frac{dV}{dt}=\frac{۱۰}{۷}i_S-\frac{۳۸}{۷}V$

۴) $\frac{dV}{dt}=\frac{۱۰}{۷}i_S+\frac{۳۸}{۷}V$

۲۳ـ کدام گزینه صحیح است؟

۱) المانی که رابطه ولتاژ و جریان دو سر آن به صورت $۳i-\frac{dV}{dt}=۰$ است، متغیر با زمان می‌باشد.

۲) روابط $\begin{cases}\psi_۱=۳i_۱-۲i_۲\\ \psi_۲=-۲i_۱+۵i_۲\end{cases}$ روابط یک شبکه ۴ سر را نشان می‌دهند.

۳) روابط $\begin{cases}i=t+\cos t\\ i^۲+\frac{V^۲}{۱۶}=t^۲+۲+۲t\cos t-۲\sin t\\ V>۰\end{cases}$ بیانگر سلف $۰/۲۵H$ می‌باشد.

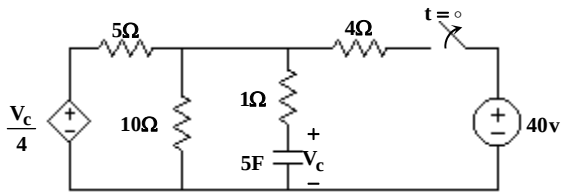
۴) تمام موارد غلط هستند.

۲۴ـ ماتریس کاتست گرافی به صورت زیر است. دو حلقه اساسی متناظر با درخت این ماتریس کاتست کدام است؟

$$Q=\left[\begin{array}{ccc:ccc}-۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰\\ -۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱\end{array}\right]$$

۱) $\{۱,۲,۳\},\{۲,۶\}$ ۲) $\{۳,۵,۶\},\{۲,۶\}$ ۳) $\{۱,۴,۵,۶,۷\},\{۳,۴,۶\}$ ۴) $\{۱,۴,۵,۶,۷\},\{۱,۲,۶\}$

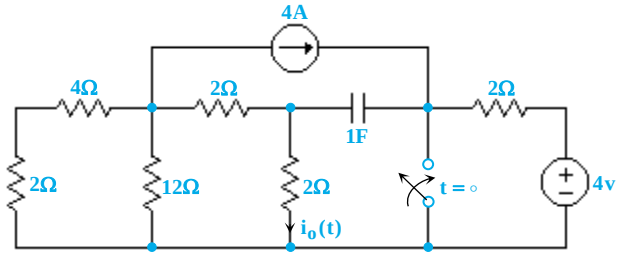
۲۵ـ در شکل زیر، کلید برای مدت زمان زیادی بسته بوده است و در $t=۰$ باز می‌شود. رابطه‌ی $V_c(t)$ برای $t\geq ۰$ کدام است؟



۱) $V_c(t)=۲۰e^{-\frac{t}{۲۶}}$ ۲) $V_c(t)=۲۰e^{-\frac{t}{۱۳}}$

۳) $V_c(t)=۱۰e^{-\frac{t}{۲۶}}$ ۴) $V_c(t)=۱۰e^{-\frac{t}{۱۳}}$

۲۶ـ کلید نشان داده شده در مدار زیر در لحظه $t=۰$ بسته می‌شود، معادله $i_o(t)$ در $t>۰$ به چه صورتی است؟



۱) $-۲-۶e^{-\frac{۳}{۲}t}$

۲) $-۲-۶e^{-\frac{۲}{۳}t}$

۳) $-۸+۱۰e^{-\frac{۳}{۲}t}$

۴) $-۸+۱۰e^{-\frac{۲}{۳}t}$

آزمون (۸)

ریاضیات (معادلات دیفرانسیل، ریاضیات مهندسی، آمار و احتمالات)

۱ـ اگر $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$، جواب معادله دیفرانسیل $y''+x^2y=1+x+x^2$ باشد، کدام مورد درباره ضرایب توان‌های x در جواب معادله دیفرانسیل صحیح نمی‌باشد؟

۱) $a_6=-\frac{1}{60}$ ۲) $a_7=-\frac{1}{252}$ ۳) $a_8=\frac{1-a_0}{672}$ ۴) $a_9=\frac{a_1}{1440}$

۲ـ تابع $y=f(x)$ در معادله $yy'=y''\sqrt{y^2+y'^2}-y'y''$ صدق می‌کند و همچنین y' تابع مشتق‌پذیر برحسب y است. اگر $y=4$ یکی از مجانب‌های افقی آن باشد، مجانب افقی دیگر آن کدام است؟

۱) -4 ۲) $\ln 4$ ۳) صفر ۴) $\ln 2$

۳ـ در دستگاه معادلات $\begin{cases} t\frac{dx}{dt}=3x-4y \\ t\frac{dy}{dt}=2x-3y \end{cases}$ با شرایط $x(1)=1$ و $y(1)=-1$، مقدار $x-y$ چقدر می‌باشد؟

۱) $2t$ ۲) $2t^{-1}$ ۳) $t+t^{-1}$ ۴) t^2+t^{-2}

۴ـ اگر تبدیل لاپلاس تابع $J_0(x)$ برابر $\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ باشد، آن‌گاه حاصل انتگرال $\int_0^{\infty}J_0(x)dx$ و تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=xe^{-x}J_0(2x)$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

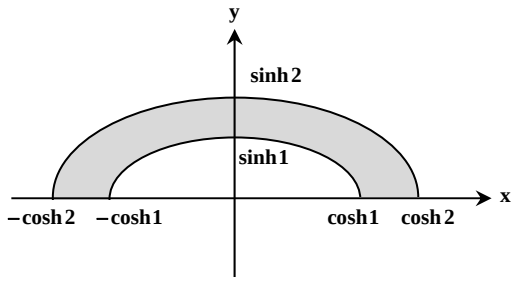
۱) $\frac{s+1}{((s+1)^2+4)^{\frac{3}{2}}}$, -1 ۲) $\frac{-(s+1)}{((s+1)^2+4)^{\frac{3}{2}}}$, -1 ۳) $\frac{s+1}{((s+1)^2+4)^{\frac{3}{2}}}$, $+1$ ۴) $\frac{-(s+1)}{((s+1)^2+4)^{\frac{3}{2}}}$, $+1$

۵ـ اگر منحنی y در معادله دیفرانسیل $y''-\frac{y'}{x}(1+\ln\frac{y'}{x})=0$ صدق کند، آن‌گاه با فرض $y(1)=y'(1)=1$، طول محل تقاطع منحنی y با دایره $x^2+y^2=3$ کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

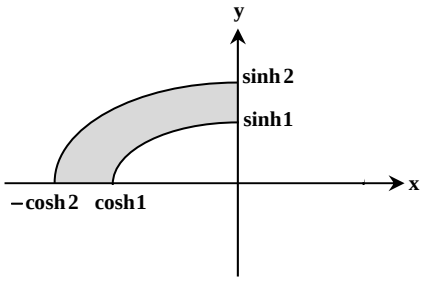
۱) $\sqrt{-3+\sqrt{5}}$ ۲) $\sqrt{-3+2\sqrt{5}}$ ۳) $-\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{6}$

۶ـ تصویر ناحیه $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ و $1<y<2$ تحت نگاشت $w=\sin z$ کدام است؟

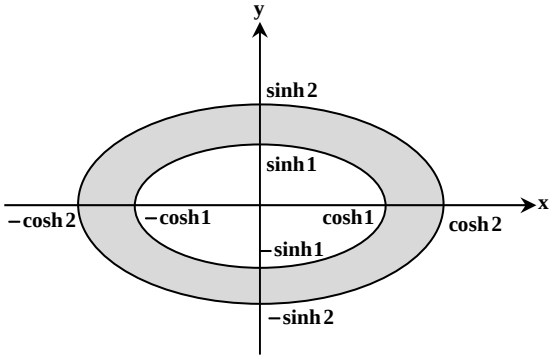
(۱)



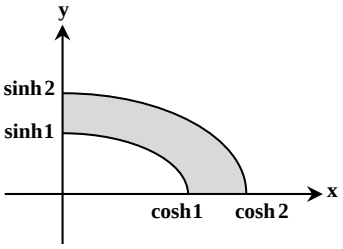
(۲)



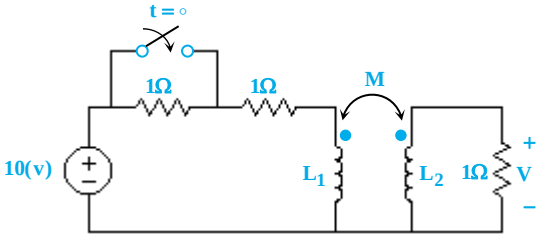
(۳)



(۴)

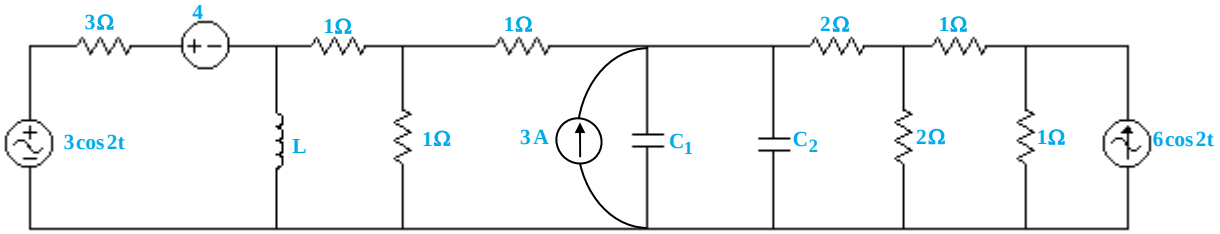


۲۶ـ در مدار شکل زیر اگر $L_1 = L_2 = 3H$ و $M = 2H$، در این صورت مقدار ولتاژ V در لحظه‌ی (ثانیه) $t = 45$ کدام است؟



۱) $2/5(e^{-45} - e^{-9})$
۲) $1/5(e^{-9} - e^{-45})$
۳) $2/5(e^{-9} - e^{-45})$
۴) $1/5(e^{-45} - e^{-9})$

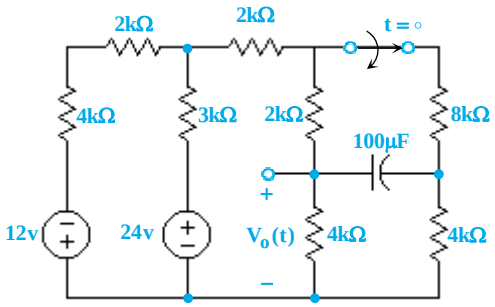
۲۷ـ اگر توان راکتیو مصرفی سلف در مدار شکل زیر برابر ۴۰ VAR باشد، توان راکتیو تولید خازن C_1 چقدر است؟



$L = \frac{1}{4}H \quad , \quad C_1 = \frac{2}{3}F \quad , \quad C_2 = \frac{1}{3}F$

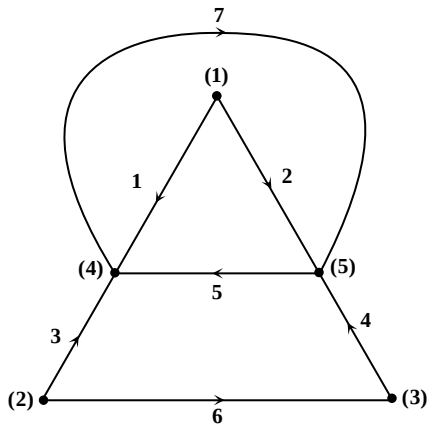
۱) $\frac{40}{3}$
۲) $\frac{160}{3}$
۳) ۴۰
۴) $\frac{80}{3}$

۲۸ـ در مدار شکل زیر در لحظه $t = 0$ کلید باز می‌شود. معادله ولتاژ $V_0(t)$ برای $t > 0$ به چه صورتی است؟



۱) $(\frac{24}{5} - \frac{21}{20}e^{-\frac{25}{16}t})u(t)$
۲) $(\frac{5}{24} - \frac{21}{20}e^{-\frac{16}{25}t})u(t)$
۳) $(\frac{24}{5} + \frac{21}{20}e^{-\frac{16}{25}t})u(t)$
۴) $(\frac{5}{24} + \frac{21}{20}e^{-\frac{25}{16}t})u(t)$

۲۹ـ اگر بدانیم در هر کدام از شاخه‌های گراف مدار زیر تنها و تنها از یک خازن استفاده شده، کدام یک از دسته معادلات زیر برای توصیف وابستگی ولتاژ این خازن‌ها کفایت می‌کند؟ [یادآوری: به ازای هر ترکیب خطی مستقل از ولتاژ خازن‌ها، تعداد متغیرهای مستقل مدار یک عدد کاهش می‌یابد.]



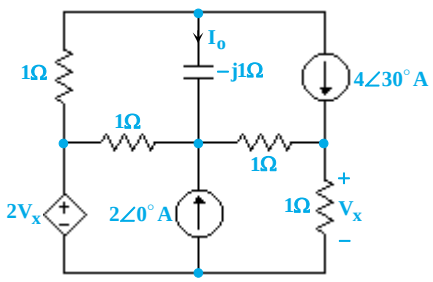
۱) $\begin{cases} j_7 + j_5 = 0 \\ j_1 - j_5 - j_2 = 0 \\ j_1 - j_3 + j_6 + j_4 - j_2 = 0 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} j_3 - j_5 - j_4 - j_6 = 0 \\ j_3 - j_1 + j_2 - j_4 - j_6 = 0 \\ j_1 - j_5 - j_2 = 0 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} j_1 - j_5 - j_2 = 0 \\ j_5 + j_6 = 0 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} j_3 + j_7 - j_4 - j_6 = 0 \\ j_3 - j_5 - j_4 - j_6 = 0 \end{cases}$

۳۰ـ در مدار شکل زیر، جریان I_o چقدر است؟



۱) صفر
۲) $4\angle 30^\circ$
۳) $8\angle 30^\circ$
۴) $4j$

پاسخنامه آزمون (۸)

ریاضیات (معادلات دیفرانسیل، ریاضیات مهندسی، آمار و احتمالات)

۱ـ گزینه «۳» ابتدا مشتق مرتبه دوم y را محاسبه می‌کنیم که برابر است با: $y'' = \sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)a_n x^{n-۲}$

با جایگذاری y و y'' در معادله دیفرانسیل داریم:

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)a_n x^{n-۲} + x^۲\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n = ۱+x+x^۲$$

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)a_n x^{n-۲} + \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n+۲} = ۱+x+x^۲$$

$$۲a_۲ + ۶a_۳x + ۱۲a_۴x^۲ + \sum_{n=۵}^{\infty} n(n-۱)a_n x^{n-۲} + a_۰x^۲ + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n x^{n+۲} = ۱+x+x^۲$$

$$a_۰ + ۱۲a_۴ = ۱ \Rightarrow a_۴ = \frac{۱-a_۰}{۱۲} \quad , \quad ۶a_۳ = ۱ \Rightarrow a_۳ = \frac{۱}{۶} \quad , \quad ۲a_۲ = ۱ \Rightarrow a_۲ = \frac{۱}{۲}$$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n x^{n+۲} = \sum_{n=۵}^{\infty} a_{n-۴} x^{n+۲-۴} = \sum_{n=۵}^{\infty} a_{n-۴} x^{n-۲} \Rightarrow n(n-۱)a_n + a_{n-۴} = ۰ \quad (n = ۵,۶,۷,....)$$

حال به محاسبه ضرایب مختلف توان‌های x می‌پردازیم:

$$۲۰a_۵ + a_۱ = ۰ \Rightarrow a_۵ = \frac{-a_۱}{۲۰} \quad , \quad ۳۰a_۶ + a_۲ = ۰ \Rightarrow a_۶ = \frac{-a_۲}{۳۰} = \frac{-۱}{۶۰} \quad , \quad ۴۲a_۷ + a_۳ = ۰ \Rightarrow a_۷ = \frac{-a_۳}{۴۲} = \frac{-۱}{۲۵۲}$$

$$۵۶a_۸ + a_۴ = ۰ \Rightarrow a_۸ = \frac{-a_۴}{۵۶} = \frac{-(۱-a_۰)}{۶۷۲} = \frac{a_۰ - ۱}{۶۷۲} \quad , \quad ۷۲a_۹ + a_۵ = ۰ \Rightarrow a_۹ = \frac{-a_۵}{۷۲} = \frac{a_۱}{۱۴۴۰}$$

۲ـ گزینه «۱» اگر P را برابر y' در نظر بگیریم، $y'' = P\frac{dP}{dy}$ بدست می‌آید. با اعمال این تغییر متغیر در معادله دیفرانسیل داریم:

$$Py = P\sqrt{y^۲+P^۲}\frac{dP}{dy} - P^۲\frac{dP}{dy} \Rightarrow \begin{cases} P = ۰ \Rightarrow y = k \\ \text{یا} \\ ydy + PdP = \sqrt{y^۲+P^۲}\,dP \end{cases} \Rightarrow \frac{ydy+PdP}{\sqrt{y^۲+P^۲}} = dP$$

لذا جواب معادله بالا عبارت است از:

$$d(\sqrt{y^۲+P^۲}) = dP \Rightarrow \sqrt{y^۲+P^۲} = P + C_۱ \Rightarrow y^۲ + P^۲ = P^۲ + C_۱^۲ + ۲C_۱P$$

$$y^۲ = C_۱^۲ + ۲C_۱P \Rightarrow y^۲ - C_۱^۲ = ۲C_۱\frac{dy}{dx} \Rightarrow dx = \frac{۲C_۱dy}{y^۲-C_۱^۲}$$

با تفکیک کردن عبارت کسری سمت راست می‌توانیم بنویسیم: $dx = \frac{dy}{y-C_۱} - \frac{dy}{y+C_۱}$

لذا جواب عمومی معادله عبارت است از: $x = Ln(y-C_۱) - Ln(y+C_۱) + C_۲ = Ln(\frac{y-C_۱}{y+C_۱}) + C_۲$

برای یافتن مجانب‌های افقی باید $x \to +\infty$ و $x \to -\infty$ را در نظر بگیریم، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} x \to +\infty \Rightarrow Ln(\frac{y-C_۱}{y+C_۱}) \to +\infty \Rightarrow \frac{y-C_۱}{y+C_۱} \to +\infty \Rightarrow y \to -C_۱ \\ x \to -\infty \Rightarrow Ln(\frac{y-C_۱}{y+C_۱}) \to -\infty \Rightarrow \frac{y-C_۱}{y+C_۱} \to ۰ \Rightarrow y \to C_۱ \end{cases}$$

با توجه به عبارت بالا می‌بینیم که مجانب‌های افقی تابع y برابر $C_۱$ و $-C_۱$ می‌باشند. پس اگر یکی از آن‌ها ۴ باشد، دیگری برابر -۴ خواهد بود.

۳ـ گزینه «۱» با تغییر متغیر $t = e^s$ داریم:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}.\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds}.\frac{1}{t} \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}.\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{ds}.\frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow t\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \quad \text{و} \quad t\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}$$

حال دستگاه را بر حسب پارامتر s بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = 3x - 4y \\ \frac{dy}{ds} = 2x - 3y \end{cases}$$

از آنجایی که جواب معادله مشخصه برابر $\lambda = \pm 1$ بدست می‌آید، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x_1 = 2e^s \\ y_1 = e^s \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x_2 = e^{-s} \\ y_2 = e^{-s} \end{cases}$$

پس جواب عمومی برحسب s به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{cases} x = 2c_1e^s + c_2e^{-s} \\ y = c_1e^s + c_2e^{-s} \end{cases}$$

با قرار دادن $t = e^s$ داریم:

$$\begin{cases} x = 2c_1t + c_2t^{-1} \\ y = c_1t + c_2t^{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \rightarrow 2c_1 + c_2 = 1 \\ t=1 \rightarrow c_1 + c_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 2 \ \text{و} \ c_2 = -3 \Rightarrow x - y = 2t$$

۴ـ گزینه «۳»

$$\int_0^\infty J_0(x)dx = \int_0^\infty \frac{xJ_0(x)}{x}dx = \int_0^\infty L[xJ_0(x)]ds = \int_0^\infty -\frac{d}{ds}L[J_0(x)]ds = \frac{-1}{\sqrt{s^2+1}}\Big|_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

$$L\left[xe^{-x}J_0(2x)\right] = -\frac{d}{ds}L\left[e^{-x}J_0(2x)\right] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(\frac{s+1}{2})^2+1}}\right] = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[2((s+1)^2+4)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{s+1}{((s+1)^2+4)^{\frac{3}{2}}}$$

۵ـ گزینه «۳» با انتخاب $y' = P$ و $y'' = P'$ معادله به صورت مقابل درمی‌آید: $\frac{P'}{P} = \frac{1 + \ln P - \ln x}{x}$

با تغییر متغیر $\ln P = u$، داریم $\frac{P'}{P} = u'$، بنابراین:

$$u' - \frac{u}{x} = \frac{1 - \ln x}{x} \quad , \quad \mu(x) = e^{\int \frac{-dx}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$u = x\left[\int \frac{1}{x}.\frac{(1-\ln x)}{x}dx + C\right] \quad u = x\left[-\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C\right] = \ln x + Cx$$

$$\ln P = \ln x + Cx \xrightarrow{x=1, P(1)=y'(1)=1} C = 0 \Rightarrow \ln P = \ln x \Rightarrow P = y' = x \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + C'$$

$$y(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C' \Rightarrow C' = 0$$

برای یافتن تقاطع منحنی $y = \frac{x^2}{2}$ با دایره مورد نظر می‌توان نوشت:

$$x^2 + (\frac{x^2}{2})^2 = 3 \Rightarrow x^2 + \frac{x^4}{4} = 3 \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -6 & \text{غ ق ق} \\ x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

۶ـ گزینه «۴» ناحیه داده شده درون یک مستطیل با مرزهای $x=\circ$، $x=\frac{\pi}{۲}$، $y=۱$ و $y=۲$ قرار دارد. تصویر هر کدام از این مرزها را تحت نگاشت $w=\sin z$ بررسی می‌کنیم. قسمت‌های حقیقی و موهومی w را می‌شناسیم:

$$w=\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y \Rightarrow \begin{cases} u=\sin x\cosh y \\ v=\cos x\sinh y \end{cases}$$

روی خط $y=۱$ داریم:

$$\begin{cases} u=\sin x.\cosh ۱ \\ v=\cos x.\sinh ۱ \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{u}{\cosh ۱}\right)^۲+\left(\frac{v}{\sinh ۱}\right)^۲=۱$$

پس این مرز به بخشی از بیضی با شعاع افقی $\cosh ۱$ و شعاع عمودی $\sinh ۱$ تصویر می‌شود. دقت کنید که چون $\circ\le x\le\frac{\pi}{۲}$ است، پس $u\ge\circ$ و $v\ge\circ$ یعنی ربع اول از بیضی به دست می‌آید. روی خط $y=۲$ داریم:

$$\begin{cases} u=\sin x\cosh ۲ \\ v=\cos x\sinh ۲ \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{u}{\cosh ۲}\right)^۲+\left(\frac{v}{\sinh ۲}\right)^۲=۱$$

بنابراین این مرز به قسمتی از بیضی با شعاع افقی $\cosh ۲$ و شعاع عمودی $\sinh ۲$ تصویر می‌شود. در این جا هم ربع اول از بیضی به دست می‌آید.

روی خط $x=\circ$ داریم:

$$\begin{cases} u=\circ \\ v=\sinh y \end{cases} \Rightarrow u=\circ\ ,\ \sinh ۱\le v\le\sinh ۲$$

پس قسمتی از خط $u=\circ$ به دست می‌آید. روی خط $x=\frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$\begin{cases} u=\cosh y \\ v=\circ \end{cases} \Rightarrow v=\circ\ ,\ \cosh ۱\le u\le\cosh ۲$$

پس بخشی از خط $v=\circ$ به دست آمده است. از طرفی چون نگاشت $w=\sin z$ در ناحیه‌ی داده شده نمی‌تواند مقدار بی‌نهایت داشته باشد، پس اطمینان داریم ناحیه‌ی داده شده را به ناحیه‌ی درون مرزهای به دست آمده می‌نگارد.

۷ـ گزینه «۳» با توجه به آن که معادله از نوع نامتناهی $(-\infty<x<+\infty)$ است، استفاده از تبدیل لاپلاس خیلی مشکل نخواهد بود. فرض می‌کنیم $U(x,s)$ تبدیل لاپلاس $u(x,t)$ باشد. در این صورت با لاپلاس گرفتن از طرفین معادله داریم:

$$L[u_{tt}]=L[u_{xx}]+L[t\sin x] \Rightarrow s^۲U-su(x,\circ)-u_t(x,\circ)=U_{xx}+\frac{\sin x}{s^۲}$$

با جایگذاری شرایط اولیه داریم:

$$s^۲U-U_{xx}=\left(\frac{۱}{s^۲}+۱\right)\sin x$$

یک معادله‌ی درجه ۲ برحسب متغیر x داریم. معادله‌ی مشخصه‌ی همگن $s^۲-r^۲=\circ$ است و ریشه‌های آن $r=\pm s$ هستند. جواب معادله‌ی همگن به صورت $U_h=c_۱e^{sx}+c_۲e^{-sx}$ هستند که با توجه به شرط کران‌داری و این که $-\infty<x<+\infty$ است، خواهیم داشت $c_۱=c_۲=\circ$. پس فقط جواب خصوصی ناهمگن باقی می‌ماند. برای نوشتن U_P با توجه به عبارت سمت راست معادله داریم: $U_P=A(s)\sin x+B(s)\cos x$

البته از فرد بودن عبارت سمت راست معلوم است که $B(s)=\circ$ خواهد بود. با جایگذاری $U_P=A(s)\sin x$ در معادله‌ی ناهمگن داریم:

$$s^۲U_P-U_{P_{xx}}=\left(\frac{۱}{s^۲}+۱\right)\sin x \Rightarrow A(s)(s^۲+۱)\sin x=\left(\frac{۱}{s^۲}+۱\right)\sin x \Rightarrow A(s)=\frac{\frac{s^۲+۱}{s^۲}}{s^۲+۱}=\frac{۱}{s^۲}$$

در نتیجه تبدیل لاپلاس جواب به این صورت است:

$$U=U_h+U_p=\frac{۱}{s^۲}\sin x$$

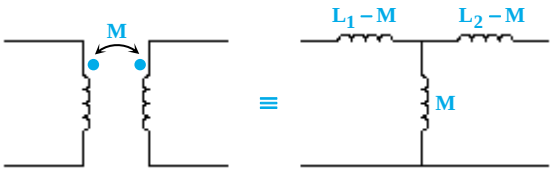
با محاسبه‌ی تبدیل معکوس داریم:

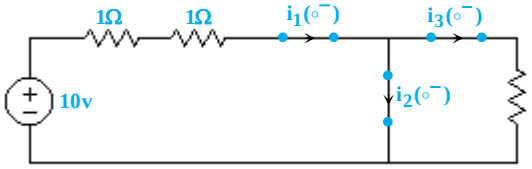
$$u(x,t)=L^{-۱}\left[\frac{۱}{s^۲}\sin x\right]=t\sin x$$

حالا مقدار $u_x(\frac{\pi}{۳},۴)$ را حساب می‌کنیم:

$$u_x(x,t)=t\cos x \Rightarrow u_x\left(\frac{\pi}{۳},۴\right)=۴\cos\frac{\pi}{۳}=۴\left(\frac{۱}{۲}\right)=۲$$

۲۶ـ گزینه «۳» مدار معادل سلف تزویج را در مدار جایگذاری می‌کنیم. سپس مدار را در $t<0$ تحلیل می‌کنیم:



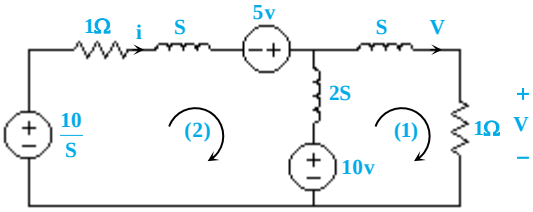


$$i_1(0^-)=i_2(0^-)=\frac{10}{2}=5A$$

$$i_3(0^-)=0A$$

سپس مدار را به حوزه لاپلاس می‌بریم:

در حلقه‌های (۱) و (۲) KVL می‌نویسیم:



$$KVL(1):10-2Si+2SV+SV=0$$

$$\Rightarrow i=\frac{5}{S}+\frac{3S+1}{2S}V \quad (I)$$

$$KVL(2):-\frac{10}{S}+(S+1)i-5+2Si-2SV-10=0 \Rightarrow (3S+1)i-2SV=15+\frac{10}{S}$$

از رابطه (I)، i را جایگذاری می‌کنیم:

$$(3S+1)\times\frac{5}{S}+\frac{(3S+1)^2}{2S}V-2SV=15+\frac{10}{S} \Rightarrow \frac{(3S+1)^2-4S^2}{2S}V=\frac{5}{S} \Rightarrow V=\frac{10}{(5S+1)(S+1)}$$

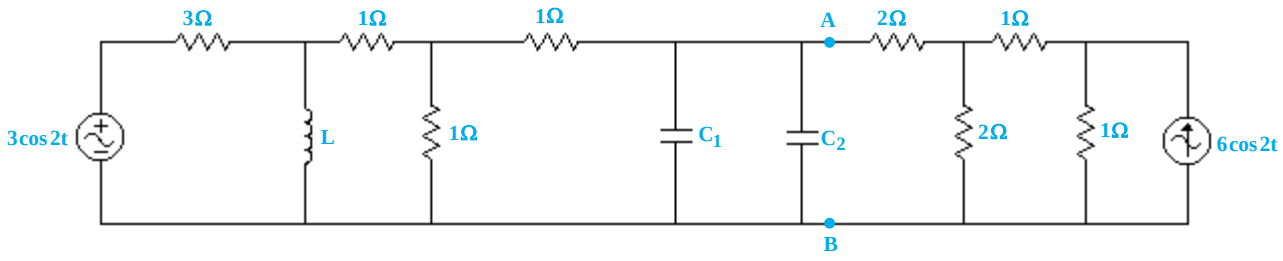
از V، لاپلاس معکوس می‌گیریم:

$$V(t)=\frac{5}{2}e^{-\frac{t}{5}}-\frac{5}{2}e^{-t}$$

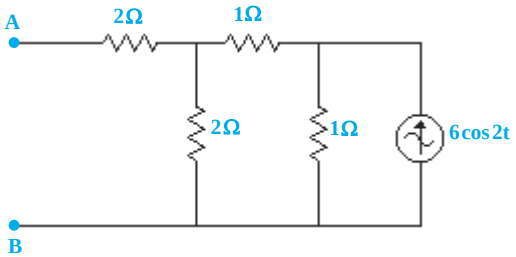
حال به جای t، ۴۵ قرار می‌دهیم:

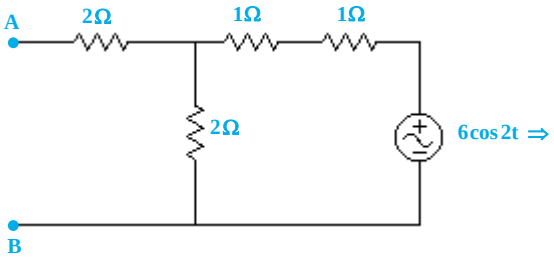
$$V(45)=\frac{5}{2}e^{-9}-\frac{5}{2}e^{-45}=2/5(e^{-9}-e^{-45})$$

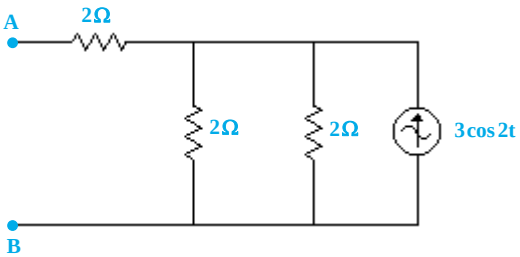
۲۷ـ گزینه «۴» با توجه به این‌که منابع DC، تأثیری در توان راکتیو ندارند، می‌توان آن‌ها را درنظر نگرفت. پس منبع ولتاژ ۴ ولت را اتصال کوتاه و منبع جریان ۳A را مدار باز می‌کنیم. اگر کمی دقت کنیم، مدار شکل زیر در صورت استفاده از تونن و نورتن در قسمت سمت راست مدار، دارای تقارن خواهد بود.

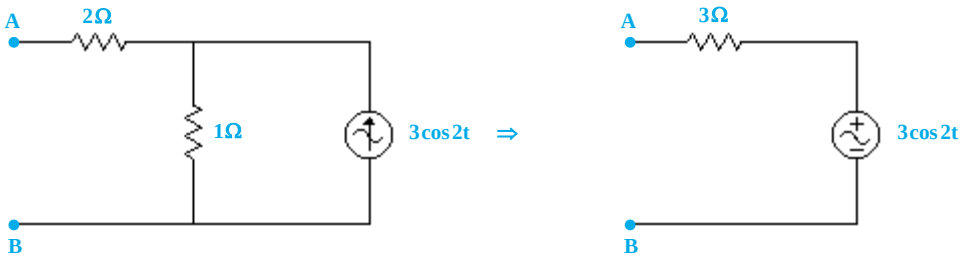


مدار را از دید A و B به‌دست می‌آوریم.

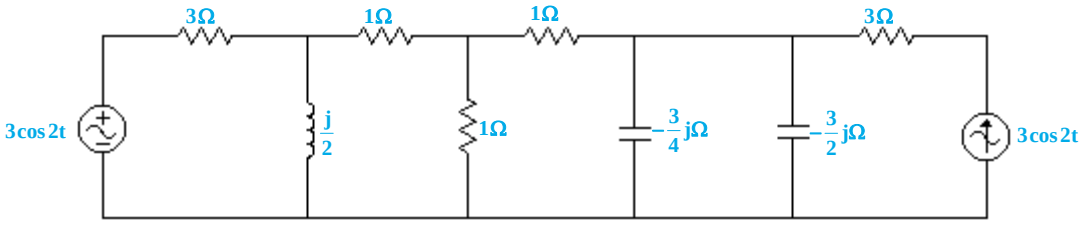




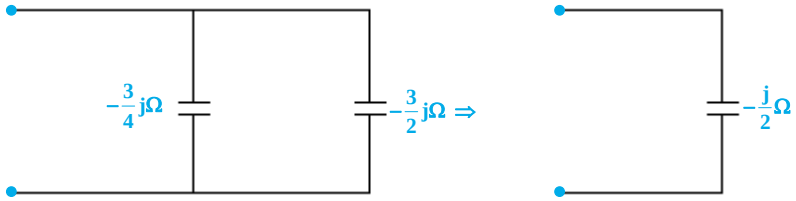




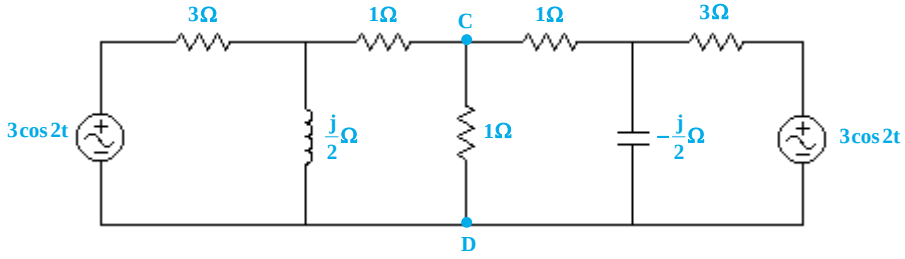
در حالت دائمی در فرکانس $\omega = ۲$ و با توجه به ساده‌سازی مدار از دید A و B داریم:



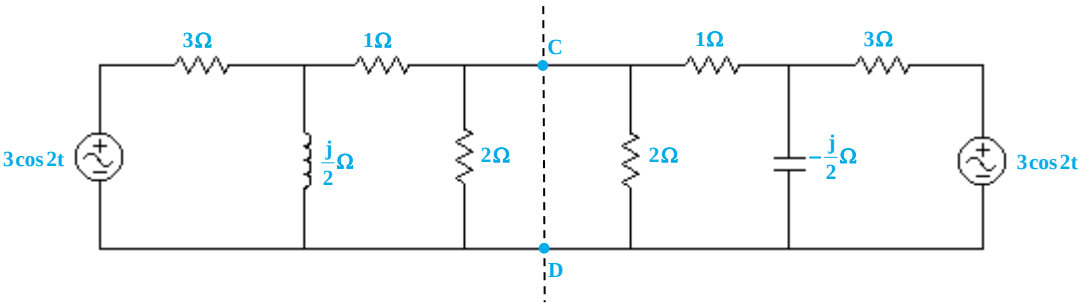
اگر دو خازن موازی را با هم ساده کنیم و یک خازن در نظر بگیریم، داریم:



بنابراین مدار به صورت شکل زیر خواهد بود:



همان‌طور که قابل مشاهده است، مدار از دید C و D دارای تقارن خواهد بود. اگر مقاومت ۱Ω را به صورت ۲ مقاومت موازی یکسان ۲ اهمی درنظر بگیریم، پس داریم:



خط‌چین کشیده شده روی شکل، مدار را به دو مدار یکسان تبدیل می‌کند، با این تفاوت که در یکی از آن سلف و در دیگری خازن ولی با اندازه‌ی امپدانس یکسان داریم. در روی سؤال، توان راکتیو مصرفی سلف را ۴۰VAR داده است. پس منبع ولتاژ $۳\cos ۲t$ مدار سمت چپ خط‌چین، می‌تواند ۴۰VAR توان راکتیو تولید کند که این مقدار را سلف مصرف کند. با توجه به تقارن شکل، منبع ولتاژ $۳\cos ۲t$ مدار سمت راست خط‌چین هم می‌تواند ۴۰VAR- توان راکتیو تولید کند (با توجه به این‌که امپدانس $\frac{j}{۲}$ در مدار سمت چپ و امپدانس $-\frac{j}{۲}$ در مدار سمت راست خط‌چین وجود دارد). پس منبع ولتاژ مدار سمت راست خط‌چین، ۴۰VAR- توان راکتیو تولید می‌کند که این مقدار را امپدانس $-\frac{j}{۲}$ مصرف می‌کند.

(**تذکر:** مقاومت، توان راکتیو نه تولید می‌کند و نه مصرف.)

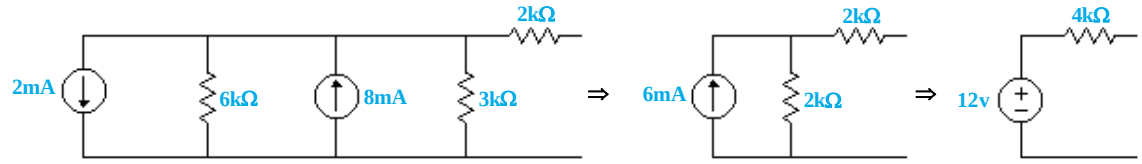
بنابراین معادل خازن‌های $C_۱$ و $C_۲$، ۴۰- ولت آمپر راکتیو، توان مصرف می‌کنند یا به عبارتی ۴۰VAR توان راکتیو تولید می‌کنند.

با توجه به این‌که توان راکتیو تولیدی خازن از رابطه‌ی $Q_C = C\omega |V_{o_{rms}}|^2$ به‌دست می‌آید و ضمناً C_1 و C_2 با هم موازی بوده و بنابراین ولتاژ یکسانی دارند، خواهیم داشت:

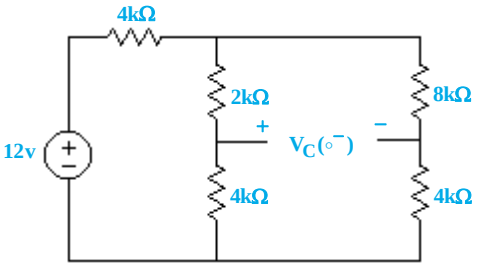
$$\begin{cases} Q_{C_1} + Q_{C_2} = 40 \\ Q_{C_1} = C_1\omega |V|^2 \\ Q_{C_2} = C_2\omega |V|^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_{C_1} + Q_{C_2} = 40 \\ \frac{Q_{C_1}}{Q_{C_2}} = \frac{C_1}{C_2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_{C_1} = \frac{80}{3}\text{VAR} \\ Q_{C_2} = \frac{40}{3}\text{VAR} \end{cases} \Rightarrow \text{توان تولیدی هر یک از خازن‌های } C_1 \text{ و } C_2$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۲۸ـ گزینه «۱» ابتدا شرایط اولیه (ولتاژ اولیه خازن) را به‌دست می‌آوریم: $t = 0^-$

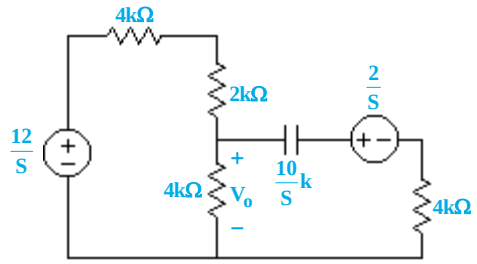


مدار معادل کل شبکه را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow V_C(0^-) = 2\text{v}$$

حال مدار را با شرایط اولیه به‌دست آمده به حوزه لاپلاس می‌بریم و معادله گره را می‌نویسیم:



$$\frac{V_o - \frac{12}{S}}{6000} + \frac{V_o}{4000} + \frac{V_o - \frac{2}{S}}{4000 + \frac{10000}{S}} = 0 \Rightarrow \frac{V_o}{6} + \frac{V_o}{4} + \frac{V_o S}{4S+10} = \frac{2}{5} + \frac{2}{4S+10}$$

$$\Rightarrow V_o = \frac{\frac{15}{4}(S+2)}{S(S+\frac{25}{16})} = \frac{\frac{24}{5}}{S} - \frac{\frac{21}{20}}{S+\frac{25}{16}} \Rightarrow V_o(t) = [\frac{24}{5} - \frac{21}{20}e^{-(\frac{25}{16})t}]u(t)$$

۲۹ـ گزینه «۱» برای بدست آوردن دسته معادلاتی که برای وابستگی بین ولتاژ خازن‌ها کفایت کنند، باید تعداد حلقه‌های مستقل مدار را بدست آوریم:

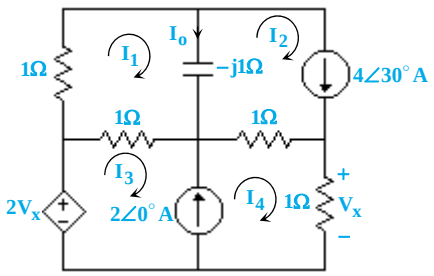
تعداد حلقه‌های مستقل = تعداد شاخه‌ها − تعداد گره‌ها + ۱ = ۷ − ۵ + ۱ = ۳

بنابراین ۳ معادله نیاز داریم و گزینه‌های «۳» و «۴» غلط می‌شوند اگر دقت کنیم گزینه‌ی «۲» نیز نادرست است. چون معادله دوم از ترکیب خطی معادلات اول و سوم بدست می‌آید و مستقل نیست:

$$\begin{array}{l} j_3 - j_5 - j_4 - j_6 \\ -(j_1 - j_5 - j_2) \\ \hline j_3 - j_1 + j_2 - j_4 - j_6 \end{array}$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۳۰ـ گزینه «۱»



$$I_o = I_1 - I_2 \quad , \quad I_2 = 4\angle 30^\circ \quad , \quad I_4 - I_3 = 2\angle 0^\circ \text{ A}$$

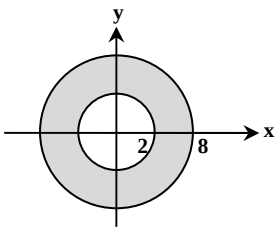
دو معادله حلقه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} I_1(2-j1) + jI_2 - I_3 = 0 \quad (1) \\ 2V_x = -I_1 - I_2 + I_3 + 2I_4 \Rightarrow V_x = I_4 \end{cases} \Rightarrow -I_1 - I_2 + I_3 = 0 \quad (2)$$

در نتیجه در معادلات (۱) و (۲) به جای I_2 مقدار آن را جایگزین می‌کنیم و I_1 را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} I_3 - I_1 = 4\angle 30^\circ \\ I_3 - (2-j)I_1 = 4\angle 120^\circ \end{cases} \Rightarrow I_1(1-j) = 4\angle 30^\circ - 4\angle 120^\circ = 4\angle 30^\circ (1-j) \Rightarrow I_1 = 4\angle 30^\circ \Rightarrow I_o = I_1 - I_2 = 0\text{A}$$

۱۰ـ طوقی مسطح بین دو دایره با شعاع‌های ۲ و ۸ قرار دارد. سطح این طوق عایق‌پوش شده است و دما در مرزهای آن با معادلات $u(2,\theta)=Ln2+8\cos\theta+10\sin\theta$ و $u(8,\theta)=17\cos\theta+10\sin\theta$ برای $0\le\theta\le 2\pi$ مشخص شده است. دمای حالت پایدار روی این سطح در نقطه‌ی $(r,\theta)=(4,\frac{\pi}{2})$ کدام است؟



۱) $8+\frac{1}{2}Ln2$

۲) $8-\frac{1}{2}Ln2$

۳) $4-Ln2$

۴) $4+Ln2$

۱۱ـ حاصل انتگرال $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{3}$

۱۲ـ با استفاده از سری فوریه‌ی کسینوسی تابع $f(x)=\sin x$ در بازه‌ی $0<x<\pi$، مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ با کدام گزینه برابر می‌شود؟

۱) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}$

۱۳ـ ظرفی محتوی ۲ مهره قرمز و ۶ مهره سیاه است. A و B به ترتیب مهره‌ای انتخاب می‌کنند تا یک مهره قرمز به دست آید (بدون جایگزینی). احتمال این‌که B زودتر از A مهره قرمز به دست آورد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{14}$

۱۴ـ فرض کنید x و y دارای تابع چگالی احتمال توأم $f(x,y)=1$ ، $0<x<1$ ، $0<y<1$ باشد. اگر $0<a<1$ باشد، مقدار $P(xy>a)$ کدام است؟

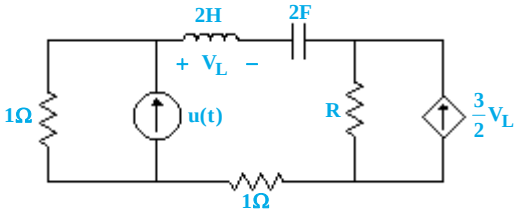
۱) $1+a-aLna$ ۲) $1-a+aLna$ ۳) $1-a-aLna$ ۴) $1-a+\frac{1}{2}aLna$

۱۵ـ اگر $X\sim E(1)$ ، برای هر $x>0$ مقدار $P([X]=n\ ,\ X-[X]>x)$ کدام است؟

۱) $e^{-x}-1$ ۲) $e^{-x}-e^{-1}$ ۳) $e^{-n}(e^{-x}-e^{-1})$ ۴) $e^{-n}(e^{-x}-1)$

مدارهای الکتریکی ۱ و ۲

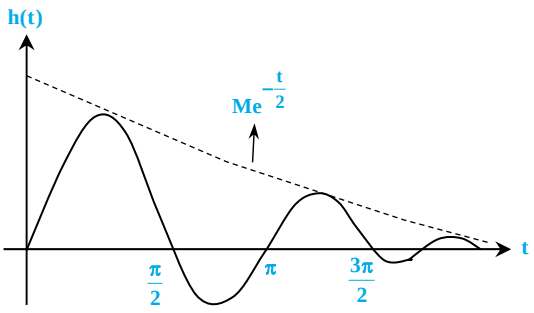
۱۶ـ در مدار زیر مقدار R چقدر باشد تا پاسخ $V_L(t)$ به شکل $(a+bt)e^{-ct}$ باشد؟ $(R>0)$

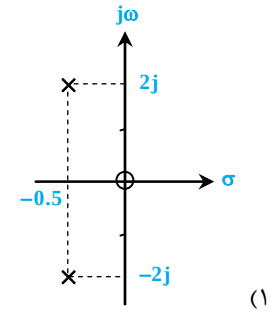


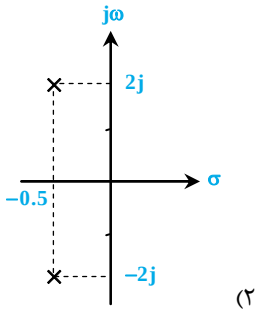
۱) $\frac{1}{2}$ اهم ۲) ۱ اهم

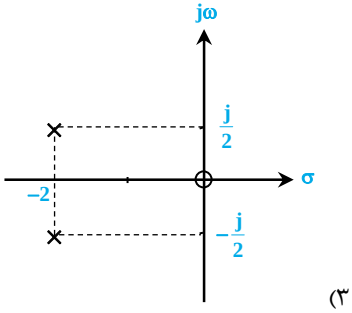
۳) $\frac{3}{2}$ اهم ۴) ۲ اهم

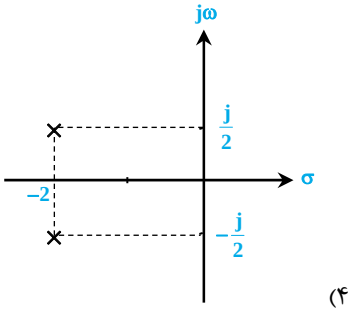
۱۷ـ اگر پاسخ ضربه یک مدار RLC سری به شکل نشان داده شده باشد، دیاگرام صفر و قطب مربوط به تابع انتقال این مدار کدام است؟



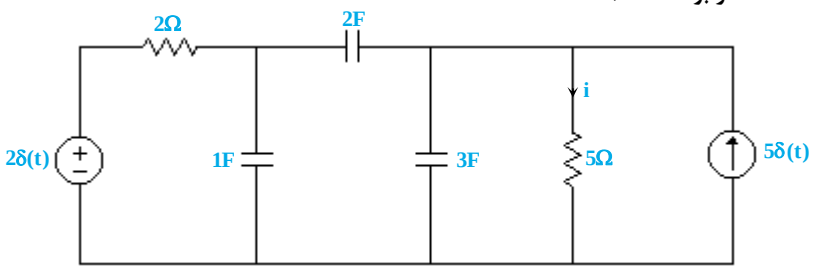
۱)


۲)


۳)


۴)


۲۲ـ در مدار زیر، مقدار i در $t=0^+$ چقدر است؟ (شرایط در $t=0^-$ صفر بوده است.)



۱) $\frac{۱۶}{۵۵}$
۲) $\frac{۴۸}{۱۱}$
۳) $\frac{۱۶}{۱۱}$
۴) $\frac{۴۸}{۵۵}$

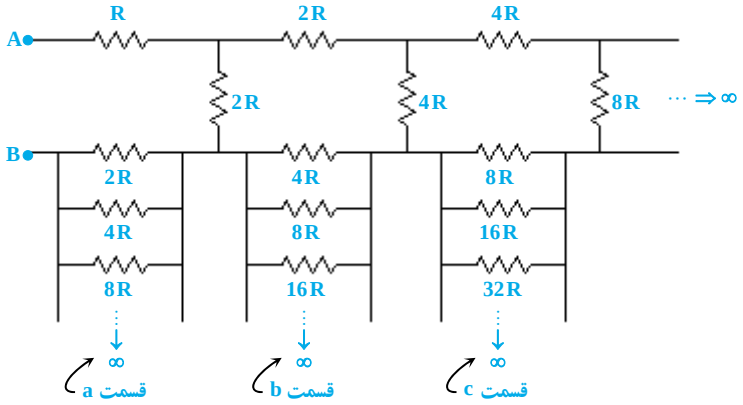
۲۳ـ پاسخ کامل یک مدار الکتریکی خطی و نامتغیر با زمان به ورودی پله واحد به‌ازای دو دسته شرایط اولیه مختلف x_1 و x_2 به قرار زیر است. پاسخ ضربه کدام است؟

$$x_1(0)=\begin{bmatrix}۳\\-۲\end{bmatrix}\Rightarrow y_1(t)=(۵e^{-۳t}-۲+۳e^{-t})u(t)$$

$$x_2(0)=\begin{bmatrix}۱\\-۲\\۳\end{bmatrix}\Rightarrow y_2(t)=(e^{-۳t}+e^{-t})u(t)$$

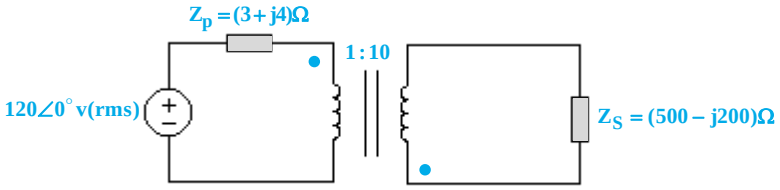
۱) $e^{-t}u(t)$
۲) $۳e^{-۳t}u(t)$
۳) $۳e^{-t}u(t)$
۴) $e^{-۳t}u(t)$

۲۴ـ مقاومت دیده شده از دو سر A و B چند اهم است؟ $(R=(\sqrt{۱۷}-۳)\Omega)$



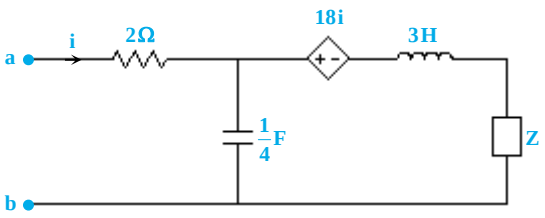
۱) ۸Ω
۲) ۴Ω
۳) ۲Ω
۴) ۱Ω

۲۵ـ در مدار شکل زیر توان متوسط تحویلی به Z_S چند وات است؟



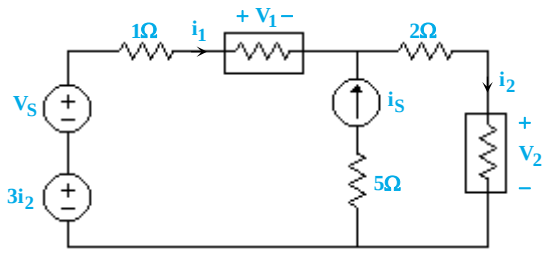
۱) ۵۲۷
۲) ۱۰۲۴
۳) ۱۰۵۴
۴) ۵۱۲

۲۶ـ در مدار شکل زیر، در صورتی که منبع ولتاژ سینوسی با فرکانس $۲\frac{rad}{s}$ به دو سر b و a بسته شود، بار با امپدانس Z حداکثر توان متوسط را مصرف می‌کند. منبع سینوسی با کدام فرکانس را به دو سر a و b ببندیم، برای اینکه منبع فقط توان اکتیو تولید کند و در این صورت رابطه ولتاژ و جریان منبع چه خواهد شد؟



۱) منبع با فرکانس $۰/۴\sqrt{۳}$ رادیان بر ثانیه ـ ولتاژ منبع ۱۲ برابر جریان آن خواهد بود.
۲) منبع با فرکانس $۰/۴\sqrt{۳}$ رادیان بر ثانیه ـ ولتاژ منبع ۳۰ برابر جریان آن خواهد بود.
۳) منبع با فرکانس ۰ رادیان بر ثانیه ـ ولتاژ منبع ۳۰ برابر جریان آن خواهد بود.
۴) منبع با فرکانس ۰ رادیان بر ثانیه ـ ولتاژ منبع $\frac{۱}{۱۲}$ برابر جریان آن خواهد بود.

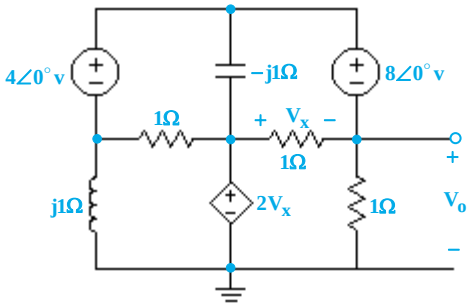
۲۷ـ مقدار i_2 در مدار مقابل چند آمپر است؟



$V_S = Ln(\frac{2}{e})$ ، $i_S = 1A$ ، $V_1 = Lni_1$ ، $V_2 = Lni_2$

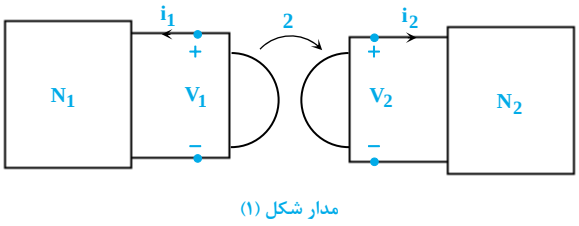
۱) ۱− یا ۲
۲) ۲− یا ۱
۳) ۲
۴) ۱

۲۸ـ در مدار شکل مقابل V_o برابر کدام است؟

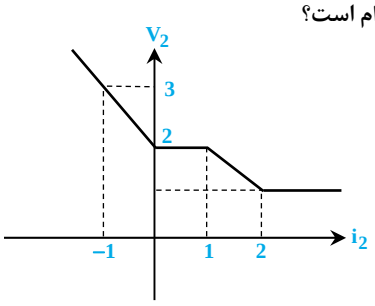


۱) ۴j
۲) −۴j
۳) ۲/۴+۰/۸j
۴) ۲/۴−۰/۸j

۲۹ـ اگر مشخصه ولتاژ ـ جریان شبکه N_1 به صورت $V_1 + 4i_1 = 2$ بوده و مشخصه ولتاژ ـ جریان شبکه N_2 به شکل نشان داده شده باشد، مقدار V_1 در مدار شکل (۱) کدام است؟



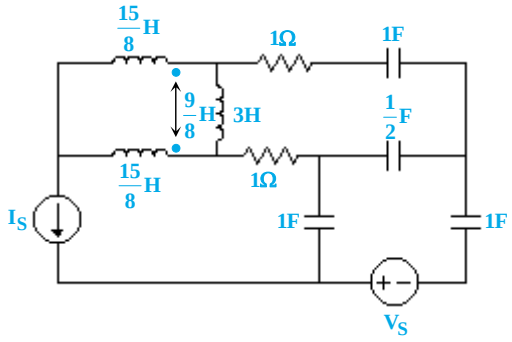
مدار شکل (۱)



شکل (۲)

۱) ۲− ولت
۲) ۳− ولت
۳) ۴ ولت
۴) ۲ ولت

۳۰ـ معادله مشخصه مدار زیر کدام است؟



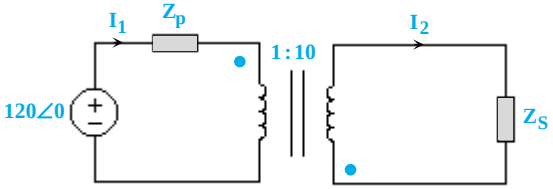
۱) $S^3(S^2+S+1)=0$
۲) $S^4(S^2+S+1)=0$
۳) $S^3(S^2+2S+2)=0$
۴) $S^4(S^2+2S+2)=0$

$$\Rightarrow R_{eq}=R+(2R\,||\,2R_{eq})+R \Rightarrow R_{eq}=2R+\frac{2R\times 2R_{eq}}{2R+2R_{eq}} \Rightarrow R_{eq}=2R+\frac{2RR_{eq}}{R+R_{eq}} \Rightarrow R_{eq}^{2}-3RR_{eq}-2R^{2}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{eq}=(\frac{3+\sqrt{17}}{2})\times R>0 \Rightarrow \text{ق} \\ R_{eq}=(\frac{3-\sqrt{17}}{2})\times R<0 \Rightarrow \text{غ ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_{eq}=(\frac{3+\sqrt{17}}{2})\times R=(\frac{3+\sqrt{17}}{2})\times(\sqrt{17}-3)=\frac{17-9}{2}=4 \Rightarrow R_{eq}=4\Omega$$

۲۵ـ گزینه «۳» ابتدا برای محاسبه‌ی جریان I_1، Z_S را به طرف اولیه ترانسفورماتور انتقال می‌دهیم:



$$Z'_S=Z_S(\frac{N_1}{N_2})^2=(\frac{1}{10})^2\times(500-j200) \Rightarrow \boxed{Z'_S=5-j2}$$

لذا جریان I_1 به صورت زیر می‌شود:

$$I_{1rms}=\frac{120\angle 0}{Z_p+Z'_S} \Rightarrow I_{1rms}=\frac{120\angle 0}{8+j2}=\frac{240}{17}-j\frac{60}{17}=14/55\angle -14/03^{\circ}$$

با توجه به نسبت تبدیل ترانسفورماتور، جریان I_2 به‌صورت زیر می‌شود:

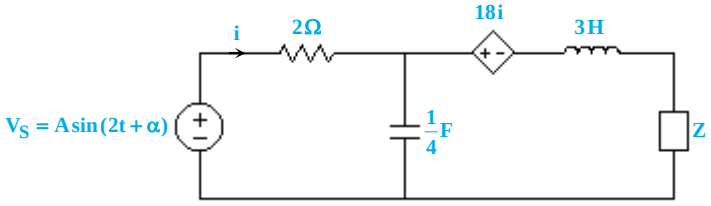
$$\frac{I_2}{I_1}=-\frac{N_1}{N_2} \Rightarrow I_2=-\frac{N_1}{N_2}\times I_1=-\frac{1}{10}\times(\frac{240}{17}-j\frac{60}{17})=\frac{-24}{17}+j\frac{6}{17}$$

با توجه به رابطه‌ی توان اکتیو $P=R\,|I|^2$ می‌توان توان اکتیو موردنیاز مسأله را حساب کرد.

$$P=500\times(\frac{24^2}{17}+\frac{6^2}{17})=1058(w)$$

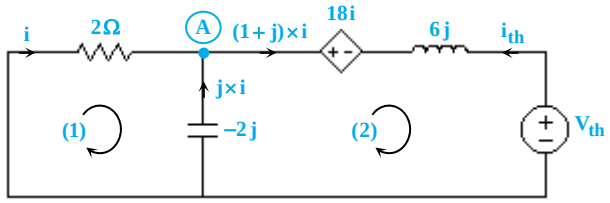
در نتیجه گزینه (۳) نزدیکترین گزینه به جواب است.

۲۶ـ گزینه «۳» برای حل سؤال، ابتدا باید امپدانس Z را پیدا کنیم.



برای این منظور، منبع ولتاژ سینوسی با فرکانس $2\frac{rad}{s}$ را به دو سر a و b بسته و مقدار Z را برای اینکه توان متوسط مصرفی آن حداکثر شود، می‌یابیم.

برای اینکه بار Z حداکثر توان متوسط را مصرف کند، بایستی امپدانسی که از دو سر آن دیده می‌شود، مزدوج امپدانس Z باشد. بنابراین به دنبال امپدانس دو سر بار Z هستیم. برای این کار، منبع V_S را صفر (اتصال کوتاه) کرده و مدار را در حالت دائمی حل می‌کنیم.

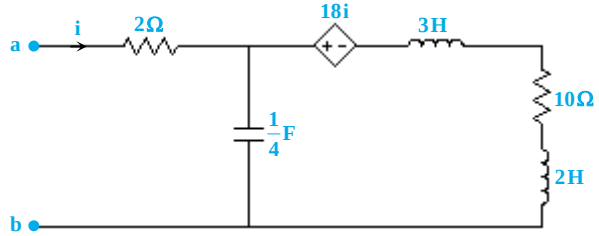


با درنظر گرفتن رابطه KVL در حلقه ۱، جریان خازن $-2j$ اهمی در جهت نشان داده شده برابر $j\times i$ می‌شود و با توجه به رابطه KCL در گره A، جریان شاخه سمت راست برابر $(1+j)\times i$ خواهد شد. حال با درنظر گرفتن اینکه $(1+j)\times i=-i_{th}$ است، رابطه KVL در حلقه ۲ را می‌نویسیم.

$$KVL_2: 2i+18i+V_{th}=6ji_{th} \Rightarrow V_{th}=6ji_{th}-20i \quad (1) \quad \text{و} \quad (1+j)\times i=-i_{th} \quad (2)$$

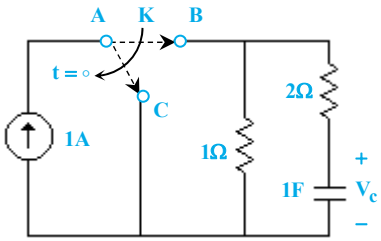
$$\xrightarrow{(1)\text{ و }(2)} V_{th}=6ji_{th}+\frac{20i_{th}}{1+j}=(10-4j)i_{th} \Rightarrow V_{th}=(10-4j)i_{th} \Rightarrow Z=(10-4j)^* \Rightarrow Z=(10+4j)\Omega$$

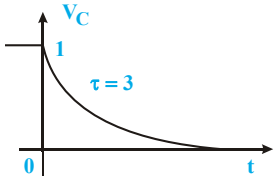
با توجه به اینکه $\omega=2\frac{rad}{s}$ است، پس می‌توان گفت Z از یک مقاومت 10Ω سری با یک سلف $2H$ تشکیل شده است. پس داریم:

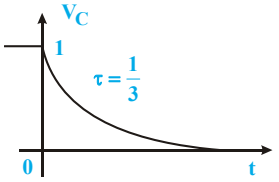


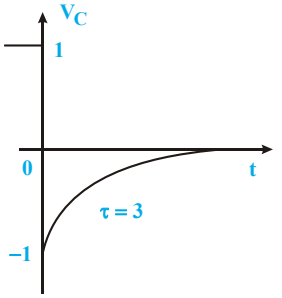
حال می‌خواهیم فرکانس منبع سینوسی را طوری تعیین کنیم که اگر این منبع را به دو سر a و b وصل کنیم، فقط توان اکتیو تولید کند. پس باید امپدانس دو سر a و b اهمی خالص باشد.

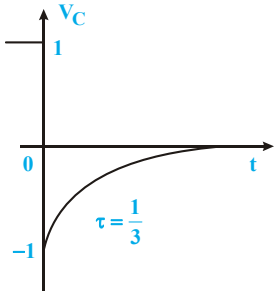
۲۱ـ در مدار زیر کلید در مدتی طولانی در وضعیت AB بوده و در لحظه $t=0$ به وضعیت AC می‌رود. شکل موج ولتاژ دو سر خازن کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۲ـ معادلات حالات مداری به صورت مقابل است:

$$\begin{cases}\dot{X}=\begin{bmatrix}-۴ & ۴\\ -۲ & ۰\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}۰\\ ۲\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}۱ & ۰\end{bmatrix}X\end{cases}$$

معادله‌ی $y(t)$ در کدام گزینه به درستی آمده است؟

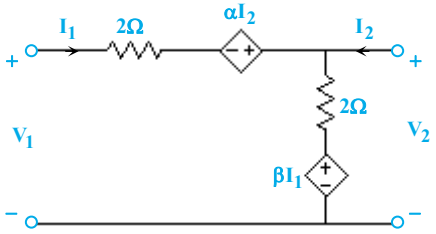
۱) $[۲-۲e^{-t}(\cos t+\sin t)]u(t)$

۲) $[۲-۲e^{-۲t}(\cos ۲t+\sin ۲t)]u(t)$

۳) $[۱-e^{-۲t}(\cos ۲t+\sin ۲t)]u(t)$

۴) $[۱-e^{-t}(\cos t+\sin t)]u(t)$

۲۳ـ در مورد دوقطبی شکل زیر کدام گزینه درست نیست؟



۱) ماتریس امپدانس دوقطبی به ازای تمام مقادیر α و β وجود دارد.

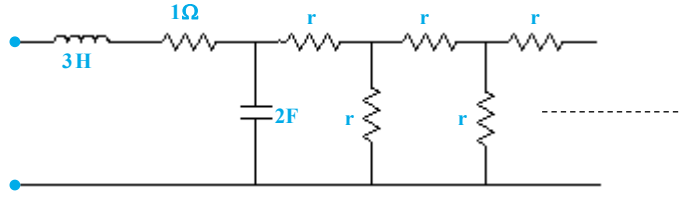
۲) ماتریس ادمیتانس دوقطبی به ازای $\alpha=-\frac{۲}{۲+\beta}$ وجود ندارد.

۳) ماتریس انتقال دوقطبی به ازای $\beta=-۲$ وجود ندارد و به ازای $\beta=-\alpha$ دوقطبی متقارن است.

۴) ماتریس امپدانس و هایبرید دوقطبی به ازای تمام مقادیر α و β وجود دارند و به ازای $\alpha+\beta=۰$ دوقطبی متقارن است.

۲۴ـ ضریب کیفیت مدار زیر کدام است؟ ضریب کیفیت برای مدار در حال رزونانس از تعریف زیر به‌دست می‌آید.

$$Q=۲\pi\times\frac{\text{متوسط انرژی‌های ذخیره‌شده در مدار}}{\text{انرژی تلف‌شده در یک دوره}}\qquad (r=\sqrt{۵}-۱)$$



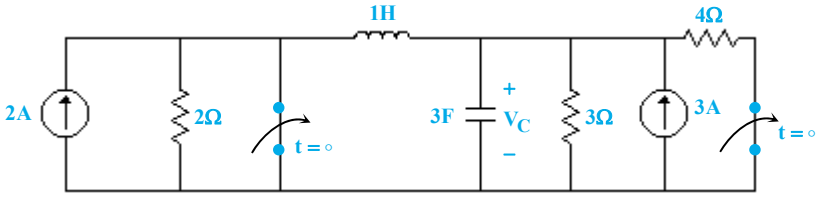
۱) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۷}$

۲) $\frac{۷}{\sqrt{۱۵}}$

۳) $\frac{۱۵}{\sqrt{۷}}$

۴) $\frac{\sqrt{۷}}{۱۵}$

۲۵ـ مدار زیر در $t<0$ مدت زیادی کار کرده است. کلیدها در $t=0$ باز می‌شوند. مقدار $i_L(0^+)$ و $V_C'(0^+)$ در کدام گزینه به درستی آورده شده است؟



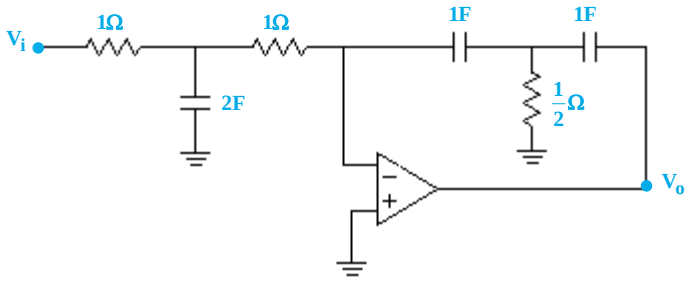
۱) ۳ و ۰

۲) ۳− و ۰

۳) ۰ و ۳

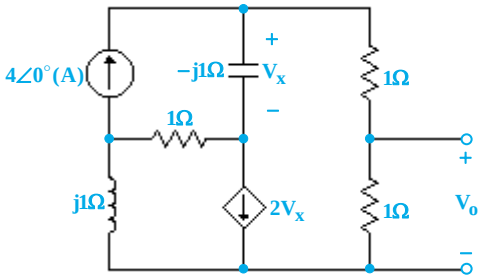
۴) ۰ و ۳−

۲۶ـ فرکانس‌های طبیعی V_o در مدار زیر کدام‌اند؟



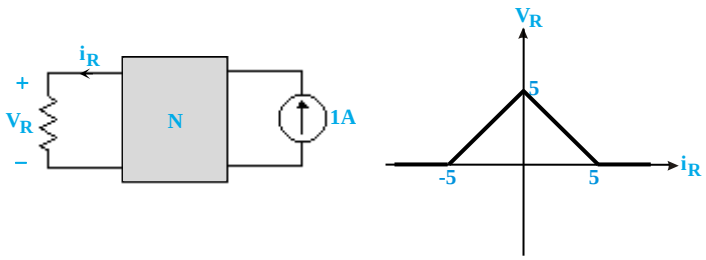
۱) $S=0$ و $S=0$
۲) $S=0$ و $S=0$ و $S=0$
۳) $S=1$ و $S=-1$
۴) $S=0$ و $S=-1$ و $S=1$

۲۷ـ در مدار شکل زیر مقدار V_o برابر کدام است؟



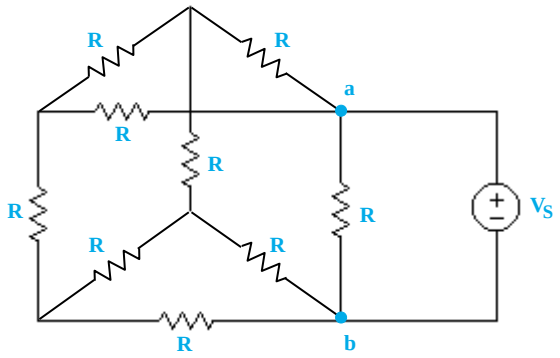
۱) $0/8+j2/4$
۲) $0/8-j2/4$
۳) $2/4+j0/8$
۴) $2/4-j0/8$

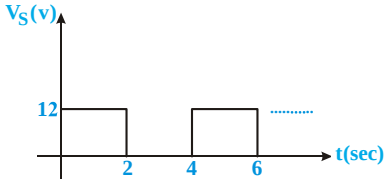
۲۸ـ در شکل زیر، R یک مقاومت غیرخطی با مشخصه $V_R - i_R$ داده شده مطابق نمودار سمت راست می‌باشد. اگر امپدانس دوقطبی N برابر $\begin{bmatrix} ۲۵ & ۲۵ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد، ولتاژ V_R دو سر مقاومت غیرخطی برحسب ولت کدام است؟



۱) $\frac{۲۵}{۶}$
۲) $\frac{۲۵}{۳}$
۳) $\frac{۳۵}{۶}$
۴) $\frac{۳۵}{۳}$

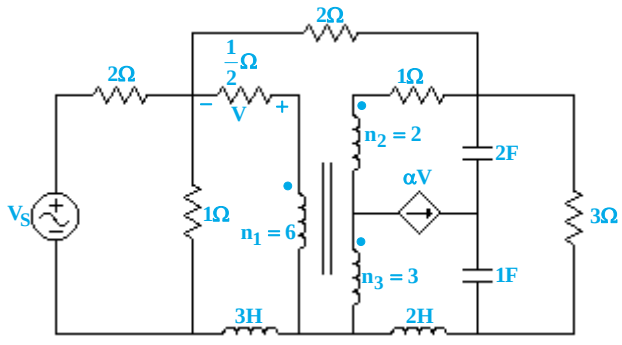
۲۹ـ مطابق با شکل زیر، اضلاع یک منشور از مقاومت‌های 2Ω تشکیل شده است. دو گره a و b به منبع ولتاژ متناوبی متصل است که در نمودار کنار مشخص است. توان هدررفته در این مدار چند وات است؟





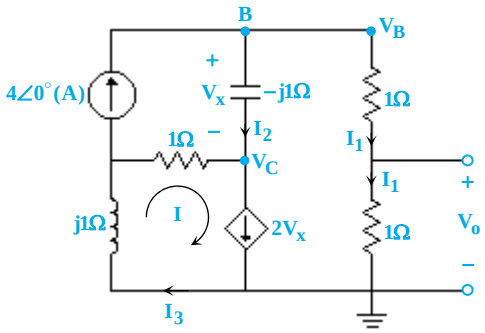
۱) ۶/۲۵
۲) ۶۲/۵
۳) ۶۰
۴) ۶

۳۰ـ مدار زیر در حالت کلی دارای معادله مشخصه‌ای به شکل $a_4S^4+a_3S^3+a_2S^2+a_1S+a_0=0$ است. به‌ازای کدام مقدار α، مقدار a_4 برابر صفر می‌باشد؟



۱) صفر
۲) -11
۳) -1
۴) ۱

۲۷ـ گزینه «۱» جریان‌ها و ولتاژهای مهم برای حل این مدار در شکل زیر نشان داده شده‌اند. با استفاده از روش گام‌به‌گام، پارامترهای مدار را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.



$$I_1 = \frac{V_o}{1} = V_o \Rightarrow V_B = 2V_o \quad , \quad I_2 = \frac{V_x}{-j1} = jV_x$$

$$V_C = V_B - V_x = 2V_o - V_x \quad , \quad I_3 = I_1 + 2V_x = V_o + 2V_x$$

معادله گره را در گره B می‌نویسیم:

$$V_o + jV_x = 4\angle 0^\circ \Rightarrow V_x = j(V_o - 4)$$

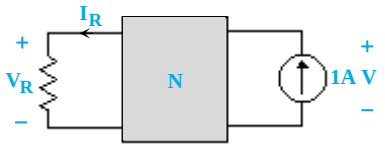
معادله مش را در مش I می‌نویسیم:

$$(V_o + 2V_x)j + (V_o + 2V_x - 4) - V_x + 2V_o = 0$$

حال معادله بالا را ساده می‌کنیم و به معادله زیر می‌رسیم:

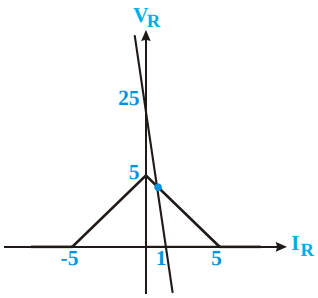
$$\Rightarrow (3+j)V_o + (1+j2)V_x = 4 \xrightarrow{V_x = j(V_o-4)} (3+j)V_o + (1+j2)j(V_o-4) = 4 \Rightarrow V_o + j2V_o = -4 + j4 \Rightarrow V_o = \frac{-4+j4}{1+j2} = 0/8 + j2/4$$

۲۸ـ گزینه «۱» در این مسئله یک المان غیرخطی داده شده که به پایانه‌ی یک دوقطبی با پارامترهای Z متصل است. در شکل مقابل با توجه به قانون اهم و پارامتر Z داده شده داریم: $\begin{bmatrix} 25 & 25 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$



$$\begin{bmatrix} V_R \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 25 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_R \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow V_R = 25(1 - I_R)$$

از روش ترسیمی باید تلاقی معادله خطی فوق را با مشخصه‌ی غیرخطی داده شده برای مقاومت پیدا کنیم، داریم:

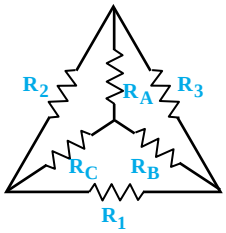


$$\left.\begin{aligned} V_R &= 25(1 - I_R) \\ V_R &= 5 - I_R \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} I_R = \frac{5}{6} \\ V_R = \frac{25}{6} \end{cases} \checkmark$$

۲۹ـ گزینه «۳» در این سؤال هدف پیدا کردن توان هدررفته می‌باشد. چون مقاومت‌ها توان را مصرف و بیشتر تبدیل به گرما می‌کنند، بنابراین هدف یافتن توانی است که توسط آنها اتلاف می‌شود.

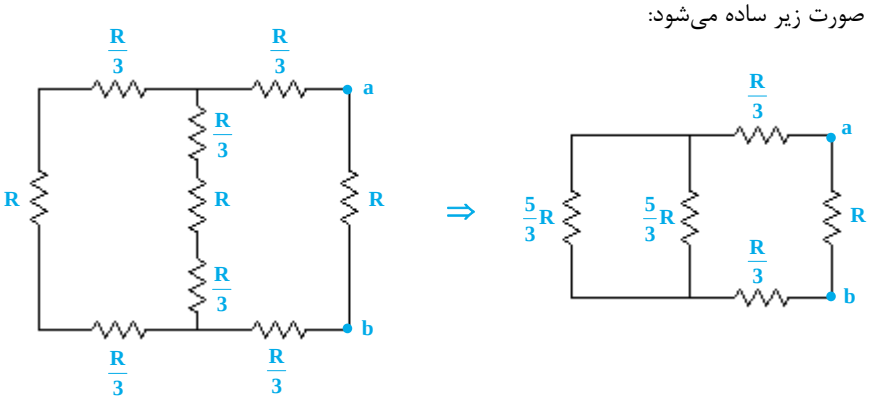
اولین گام این است که رابطه مناسب را برای آن پیدا کنیم و چون ولتاژ را به ما داده‌اند، بنابراین رابطه $P = \frac{V^2}{R}$ بهترین گزینه ممکن است. گام بعدی در یافتن جواب، ساده کردن مدار و به دست آوردن مقاومت معادل دیده شده از دو سر a و b می‌باشد. به وضوح معلوم است که باید از حل مثلث به ستاره استفاده کنیم.

یادآوری:



$$R_A = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R}{3}$$

با توجه به نکته فوق مدار به صورت زیر ساده می‌شود:



مقاومت معادل از دید دو سر a و b برابر است با:

$$(\frac{۵}{۳}\|\frac{۵}{۳})+\frac{R}{۳}+\frac{R}{۳}=\frac{۹R}{۶}$$

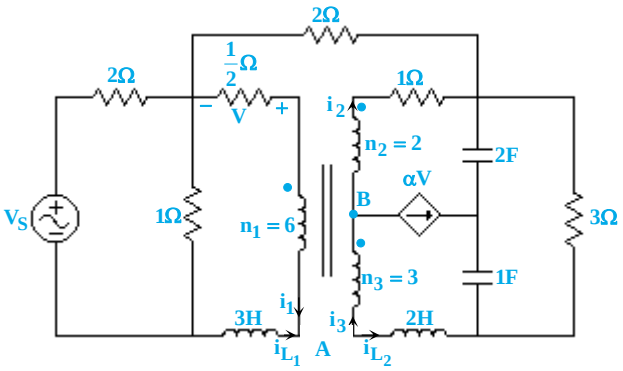
مقاومت معادل برابر $(\frac{۹R}{۶}\|R)$ خواهد بود که این مقدار مساوی $\frac{۶}{۵}R$ می‌شود. توان اتلافی برای این مدار بدین صورت است:

$$P=\frac{V_{rms}^{۲}}{R_{eq}}$$

$$V_{rms}=\sqrt{\frac{۱}{T}\int_{۰}^{T}V_S^{۲}(t)dt}=\sqrt{\frac{۱}{۴}\int_{۰}^{۲}(۱۲)^{۲}dt}=\sqrt{\frac{۱}{۴}\times۱۴۴\times۲}=\sqrt{۷۲}\ \text{ولت}$$

$$P=\frac{(\sqrt{۷۲})^{۲}}{\frac{۶}{۵}}=\frac{۷۲\times۵}{۶}=۶۰w$$

۳۰ـ گزینه «۴» ابتدا مطابق شکل، جریان سلف‌ها و جریان سیم‌پیچ‌های ترانسفورماتور را نام‌گذاری می‌کنیم:



با نوشتن رابطه KCL در گره A داریم:

$$i_{L_۱}+i_۱=i_{L_۲}+i_۳\ \Rightarrow i_{L_۱}-i_{L_۲}=i_۳-i_۱$$

مطابق با رابطه فوق اگر جریان $i_۱$ برابر جریان $i_۳$ باشد، جریان سلف‌های مدار یکی شده و نتیجه این خواهد بود که مرتبه سیستم یک واحد کاهش یافته و نتیجتاً چندجمله‌ای مشخصه از درجه سه خواهد بود که این به معنای صفر شدن $a_۴$ می‌باشد. لذا با فرض $i_۱=i_۳$ مقدار α را پیدا می‌کنیم.

مطابق با روابط ترانسفورماتور داریم:

$$n_۱i_۱=n_۲i_۲+n_۳i_۳\ \Rightarrow ۶i_۱=۲i_۲+۳i_۳\xrightarrow{i_۱=i_۳}۶i_۳=۲i_۲+۳i_۳\ \Rightarrow i_۲=۱/۵i_۳\quad(۱)$$

$$V=-\frac{۱}{۲}i_۱=-\frac{۱}{۲}i_۳\quad(۲)$$

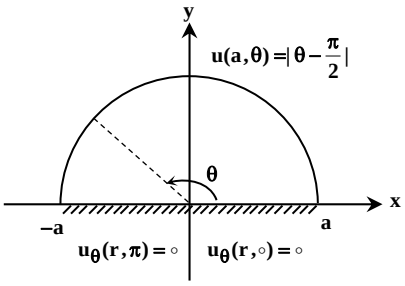
از طرفی داریم:

حال در گره B، KCL می‌زنیم:

$$i_۳=\alpha V+i_۲\xrightarrow{(۱),(۲)}i_۳=-\frac{۱}{۲}\alpha i_۳+\frac{۳}{۲}i_۳\ \Rightarrow-\frac{۱}{۲}i_۳=-\frac{۱}{۲}\alpha i_۳\ \Rightarrow\alpha=۱$$

دقت کنید که به‌ازای $\alpha=۰$، یک کاتست خازنی خواهیم داشت که به معنای وجود یک فرکانس طبیعی صفر در مدار بوده که در این حالت مقدار $a_۰$ برابر صفر می‌باشد نه مقدار $a_۴$.

۹ـ مسأله مقدار کرانه‌ای $\nabla^2 u = 0$ در داخل نیم‌دایره شکل زیر، با شرط اینکه شرایط کرانه‌ای $0 \le \theta \le \pi$; $u(a,\theta) = |\theta - \frac{\pi}{2}|$ باشد و قطر با عایق پوشانده شده باشد، کدام است؟



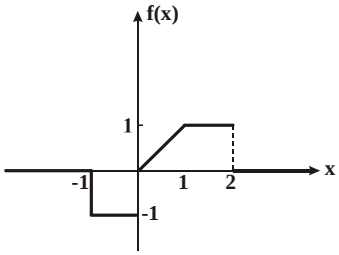
۱) $u(r,\theta) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi a^{2n} n^2} r^{2n} \cos(2n\theta)$

۲) $u(r,\theta) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi a^{2n} n^2} r^{2n} \cos(2n\theta) - \frac{2}{\pi a^{2n-1}(2n-1)^2} r^{2n-1} \cos(2n-1)\theta$

۳) $u(r,\theta) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi a^{2n} n^2} r^{2n} \cos(2n\theta) - \frac{4}{\pi a^{2n-1}(2n-1)^2} r^{2n-1} \cos(2n-1)\theta$

۴) $u(r,\theta) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi a^{2n} n^2} r^{2n} \cos(2n\theta)$

۱۰ـ نمودار تابع $f(x)$ داده شده است. اگر نمایش انتگرال فوریه‌ی $f(x)$ به صورت $\int_0^{\infty} [A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]\, d\omega$ باشد، حاصل $f(x) = \frac{1}{\pi}$ انتگرال $\int_0^{\infty} [B(\omega)]^2 d\omega$ کدام است؟



۱) $\frac{5}{3}$

۲) $\frac{5}{3\pi}$

۳) $\frac{17\pi}{12}$

۴) $\frac{17}{12}$

۱۱ـ سری لوران تابع $f(z) = z^2 \sinh\frac{1}{z}$ حول نقطه‌ی $z = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+1}(2n+1)!}$

۲) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+1}(2n+1)!}$

۳) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n-1}(2n+1)!}$

۴) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n-1}(2n+1)!}$

۱۲ـ حاصل انتگرال $I = \int_C \frac{z^2 + \bar{z}^2}{(\bar{z}-1)(4-\bar{z})} dz$ روی دایره‌ی $C: |z| = r$ که درون طوق $1 < |z| < 4$ قرار دارد، چه مضربی از $\frac{\pi i}{3}$ است؟

۱) $\frac{r^2(r^4+256)}{128}$

۲) $\frac{r^2(r^8+256)}{128}$

۳) $\frac{r^2(r^6+256)}{256}$

۴) $\frac{r^2(r^4+256)}{256}$

۱۳ـ فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل با تابع چگالی احتمال‌های زیر باشند، اگر $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2\}$ باشد، مقدار $P(X_{(1)} = x_1)$ کدام است؟ $f_{X_1}(x) = e^{-x}, x > 0$ و $f_{X_2}(x) = 2e^{-2x}, x > 0$

۱) $\frac{1}{3}$

۲) 0

۳) $\frac{1}{2}$

۴) $\frac{2}{3}$

۱۴ـ فرض کنید تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به‌صورت $f_{X,Y}(x,y) = 4y(x-y)e^{-(x+y)}; 0 < y < x$ باشد، مقدار $P(X < 3 \mid Y = 1)$ کدام است؟

۱) نامعین است.

۲) $1 - 4e^{-2}$

۳) $1 - 3e^{-2}$

۴) چون متغیر تصادفی Y، پیوسته است این احتمال برابر صفر است.

۱۵ـ فرض کنید x یک متغیر تصادفی گاما با مشخصات $f(x) = xe^{-x}$, $x > 0$ باشد، مقدار $E(\frac{1}{e^x})$ کدام است؟ $x \sim \Gamma(2,1)$

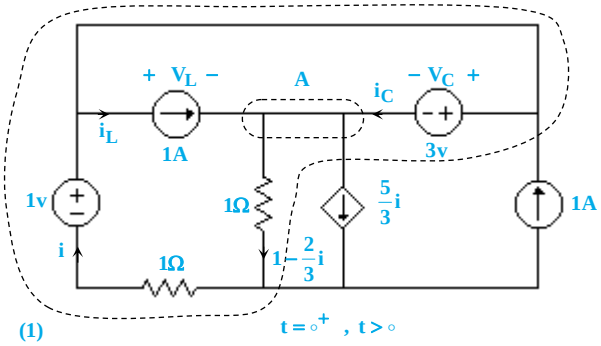
۱) $\frac{3}{4}$

۲) 1

۳) $\frac{1}{2}$

۴) $\frac{1}{4}$

اکنون مدار را در $t=0^+$ تحلیل نموده و مقادیر $i(0^+)$ و $\frac{di(0^+)}{dt}$ را محاسبه می‌کنیم:



$$KVL(1): i(0^+)\times 1-1+3+1\times(1-\frac{2}{3}i(0^+))=0 \Rightarrow i(0^+)=-9A$$

$$KCL\,A: 1+i_C(0^+)=\frac{5}{3}i(0^+)+1-\frac{2}{3}i(0^+)=1+i(0^+)=-8 \Rightarrow i_C(0^+)=-9A$$

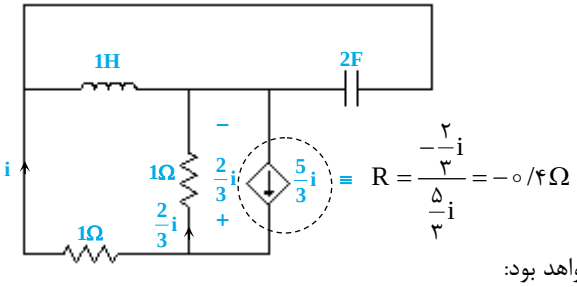
برای زمان‌های $t>0$ داریم:

$$KVL(1): i-1+V_C+1-\frac{2}{3}i=0 \Rightarrow i=-3V_C$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt}=-3\times\frac{dV_C}{dt}=-3\times\frac{i_C}{2}=-\frac{3}{2}i_C \Rightarrow \frac{di(0^+)}{dt}=-\frac{3}{2}i_C(0^+)$$

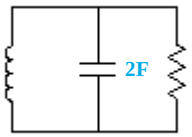
$$=-\frac{3}{2}\times(-9)=+\frac{27}{2}\frac{A}{sec}$$

دقت کنید که با داشتن مقدار $\frac{di(0^+)}{dt}$ همین‌جا می‌توان با چک کردن گزینه‌ها و رد کردن گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) به گزینه صحیح یعنی گزینه (۴) رسید. با این حال ما برای مشخص شدن روش عمومی حل چنین تست‌هایی، حل کامل تشریحی را ارائه می‌کنیم. در نهایت با غیرفعال نمودن منابع مستقل مدار سعی می‌کنیم معادله مشخصه مدار و ریشه‌های آن را پیدا کنیم:



$$\equiv R=\frac{-\frac{2}{3}i}{\frac{5}{3}i}=-0/4\Omega$$

ساده‌سازی →

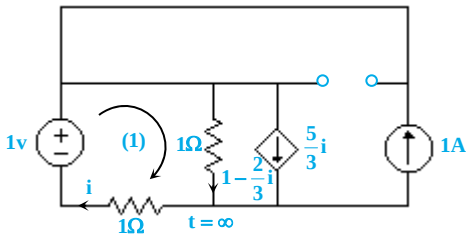


$$R=1+(1\,||\,-0.4)=\frac{1}{3}\Omega$$

می‌بینیم که این مدار، یک مدار RLC موازی است؛ لذا معادله مشخصه به شکل زیر خواهد بود:

$$S^2+\frac{1}{RC}S+\frac{1}{LC}=0 \Rightarrow S^2+\frac{3}{2}S+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \begin{cases}S_1=-1\\ S_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

لذا پاسخ مدار به شکل زیر خواهد بود:



$$i(t)=ae^{-t}+be^{-\frac{t}{2}}+c$$

پارامتر c، همان مقدار $i(\infty)$ می‌باشد که به راحتی می‌توان آن را محاسبه نمود:

$$KVL(1): 1-\frac{2}{3}i+i-1=0 \Rightarrow i(\infty)=0$$

لذا مقدار c صفر است. مقادیر a و b به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$i(0^+)=a+b=-9 \qquad (1)$$

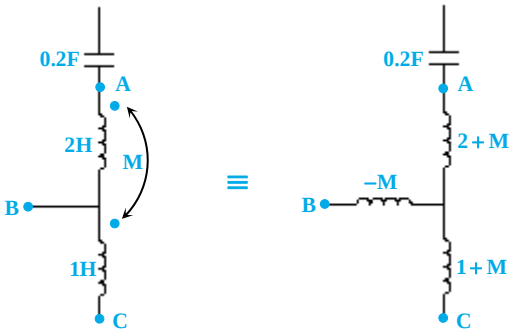
$$\frac{di(0^+)}{dt}=-a-\frac{b}{2}=+\frac{27}{2} \qquad (2)$$

$$(1)\,و\,(2) \Rightarrow \begin{cases}a+b=-9\\ a+\frac{b}{2}=-\frac{27}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-18\\ b=9\end{cases}$$

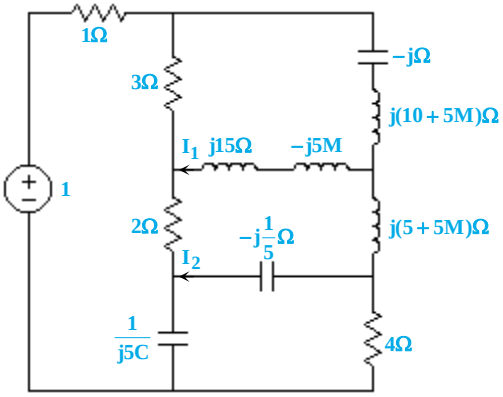
$$i(t)=-18e^{-t}+9e^{-\frac{t}{2}}$$

در نهایت پاسخ $i(t)$ به شکل مقابل خواهد بود:

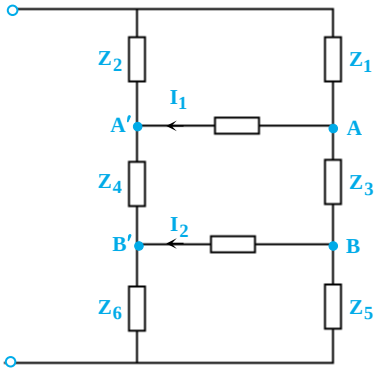
۱۸ـ گزینه «۳» ابتدا مدار را در حالت فازوری مدل می‌کنیم. قبل از آن جای سلف ۲ هانری و خازن سری با آن را عوض می‌کنیم تا بتوانیم سلف‌های تزویج شده را با مدار معادل T آنها جایگزین کنیم. با این کار می‌توان سلف‌های تزویج شده را به شکل مقابل مدل کرد:



اکنون مدار را به حالت فازوری می‌بریم:



در سمت راست مدار نسخه‌ی توسعه‌یافته‌ای از پل وتستون داریم. مطابق شکل مقابل اگر ولتاژ نقاط A و B، به ترتیب با ولتاژ نقاط A' و B' یکی باشد، مشخصاً جریان‌های I_1 و I_2 صفر خواهد بود. برای این منظور باید داشته باشیم:



$$\frac{Z_۱}{Z_۲}=\frac{Z_۳}{Z_۴}=\frac{Z_۵}{Z_۶} \qquad (۱)$$

بدین صورت اگر این مدار را به دو پل وتستون مجزا تقسیم کنیم، تعادل در هر دو پل برقرار خواهد بود. بنابراین براساس رابطه‌ی (۱)، در مدار اصلی داریم:

$$\frac{j۱۰+j۵M-j}{۳}=\frac{j۵+j۵M}{۲}=\frac{۴}{\frac{۱}{j۵C}}$$

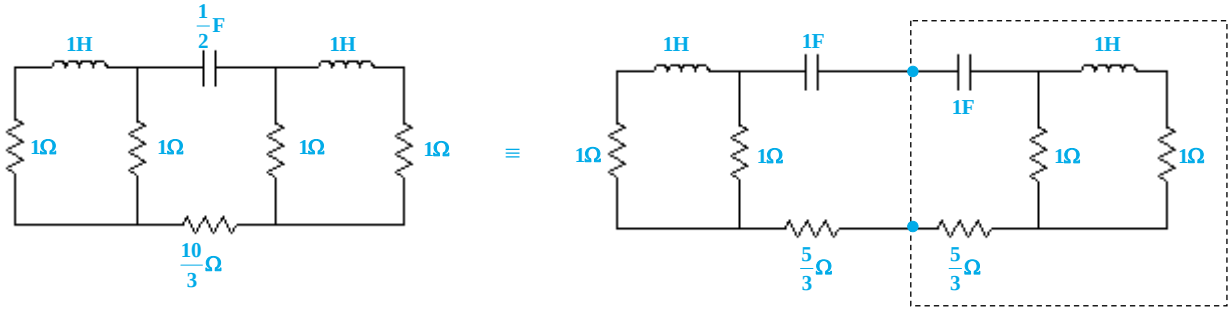
ابتدا از قسمت سمت چپ تساوی فوق، مقدار M را محاسبه می‌کنیم:

$$j\frac{۹+۵M}{۳}=j\frac{۵+۵M}{۲} \Rightarrow ۱۸+۱۰M=۱۵+۱۵M \Rightarrow M=۰/۶H$$

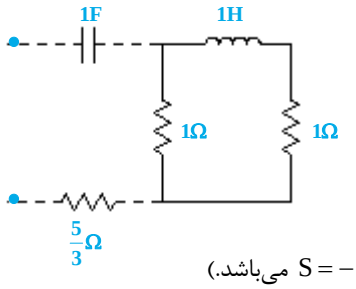
حال از قسمت سمت راست تساوی، مقدار C را به دست می‌آوریم:

$$j\frac{۵+۵\times ۰/۶}{۲}=j۲۰C \Rightarrow ۲۰C=۴ \Rightarrow C=۰/۲F$$

۱۹ـ گزینه «۲» برای حل این تست باید از تقارن مدار استفاده کرد. مطابق با مثال نمونه‌ای که در درسنامه فصل ۹ ارائه شده است، فرکانس‌های طبیعی مدار، فرکانس‌های طبیعی مدار باز و اتصال کوتاه نیم‌مداری است که به همراه مدار متقارنش، مدار اصلی را تشکیل می‌دهد. حال باید با یافتن این نیم‌مدار، فرکانس‌های طبیعی اتصال کوتاه و مدار باز آن را محاسبه کرد:



در حالت مدار باز، یک فرکانس طبیعی داریم که توسط یک مدار RL سری به وجود می‌آید:



$$L=۱H \ , \ R=۱+۱=۲\Omega$$
$$\Rightarrow S_۱=-\frac{R}{L}=-۲$$

(دقت کنید که معادله مشخصه مدار RL سری به شکل $LS+R=۰$ است و لذا فرکانس طبیعی آن برابر $S=-\frac{R}{L}$ می‌باشد.)

آزمون (۱۳)

ریاضیات (معادلات دیفرانسیل، ریاضیات مهندسی، آمار و احتمالات)

۱ـ در جواب معادله دیفرانسیل $y'' + xy' + y = 0$ به صورت سری توانی حول نقطه $x = 0$، اگر $y(0) = -1$ باشد، آن‌گاه مجموع جملات شامل توان‌های زوج x به ازای $x = 2$ چقدر می‌باشد؟

۱) e^2 ۲) $-e^2$ ۳) $\frac{1}{e^2}$ ۴) $\frac{-1}{e^2}$

۲ـ جواب معادله‌ی $(x+1)\frac{dy}{dx} + 1 = 2e^{-y}$ کدام است؟

۱) $e^y(x+1) = 2x + c$ ۲) $e^y(x+1) = x + c$ ۳) $e^{-y}(x-1) = x + c$ ۴) $e^{-y}(x-1) = 2x + c$

۳ـ اگر در معادله‌ی $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ شرایط $y''(0) = 0$ و $y'(0) = y(0) = 2$ برقرار باشد، آن‌گاه $y(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}(8e^{\frac{\pi}{2}} + 2)$ ۲) $\frac{1}{5}(8e^{\frac{\pi}{2}} - 2)$ ۳) $\frac{1}{5}(6e^{\frac{\pi}{2}} - 4)$ ۴) $\frac{1}{5}(4e^{\frac{\pi}{2}} - 6)$

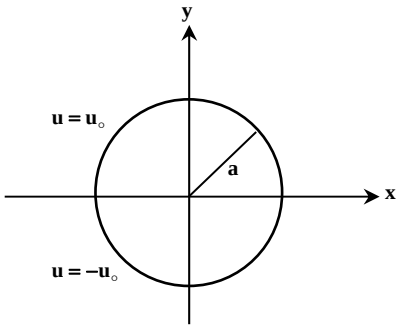
۴ـ اگر $x(t)$ و $y(t)$ جواب دستگاه $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = x + 3y \\ \frac{d^2y}{dt^2} = 4x - 4e^t \end{cases}$ با شرایط $x(0) = y'(0) = 2$، $x'(0) = 3$ و $y(0) = 1$ باشد، آن‌گاه مقدار عبارت $y(t) - x(t)$ به ازای $t = \text{Ln}3$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۵ـ تابع پتانسیل در ناحیه‌ی بین دو دیسک هم‌مرکز که شعاع‌های آن‌ها $r = 1$ و $r = 2$ است، در معادله‌ی $\nabla^2 u = 0$ با شرایط مرزی $u(1,\theta) = \text{Ln}2$ و $u(2,\theta) = \text{Ln}8$ صدق می‌کند. تابع پتانسیل در این ناحیه چگونه است؟

۱) $u = \text{Ln}r + \text{Ln}2$ ۲) $u = r\text{Ln}4 - \text{Ln}2$ ۳) $u = r\text{Ln}4 + \text{Ln}2$ ۴) $u = \text{Ln}(2r^2)$

۶ـ مطابق شکل، یک استوانه‌ی مدور هادی بی‌نهایت طویل، به شعاع a به دو قسمت تقسیم شده است. نیمه بالایی در پتانسیل u_0 و نیمه پایینی در پتانسیل $-u_0$ قرار دارد. معادله پتانسیل در فضای درون استوانه کدام است؟



۱) $u(r,\theta) = \frac{2u_0}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n}(\frac{r}{a})^n \sin n\theta$

۲) $u(r,\theta) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n}(\frac{r}{a})^n \sin n\theta$

۳) $u(r,\theta) = \frac{2u_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n}(\frac{r}{a})^n \sin n\theta$

۴) $u(r,\theta) = \frac{4u_0}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n}(\frac{r}{a})^n \sin n\theta$

۷ـ حل معادله‌ی $xu_x - yu_y + y^2 u = y^2$ $(x,y \neq 0)$ با تغییر متغیرهای $\zeta = x$ و $\eta = xy$ به چه صورت خواهد بود؟

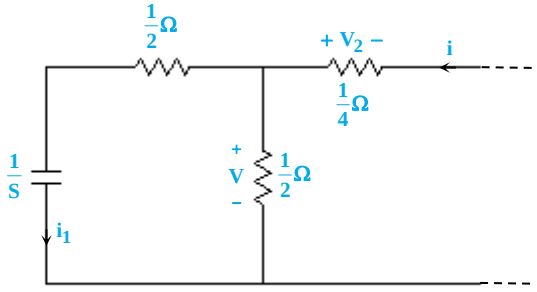
۱) $u = f(x)e^{y^2} + 1$ ۲) $u = f(xy)e^{y^2} + 1$ ۳) $u = f(x)e^{\frac{y^2}{2}} + 1$ ۴) $u = f(xy)e^{\frac{y^2}{2}} + 1$

۸ـ اگر سری فوریه دوگانه تابع $f(x,y) = x^3 y$ برای $-\pi \leq x \leq \pi$ و $-\pi \leq y \leq \pi$ به صورت $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} \sin mx \sin ny$ باشد، آنگاه ضریب d_{mn} کدام است؟

۱) $(-1)^{m+n+1}\frac{4}{m^3 n}(m^2\pi^2 - 3)$ ۲) $(-1)^{m+1}\frac{4}{m^3 n}(m^2\pi^2 - 6)$

۳) $(-1)^{m+1}\frac{2}{m^3 n}(m^2\pi^2 - 3)$ ۴) $(-1)^{m+n+1}\frac{4}{m^3 n}(6 - \pi^2 m^2)$

حال در آزمایش دوم با تحلیل مدار در حوزه‌ی فرکانس داریم:



$$V(S)=L\{-(2+t)e^{-t}u(t)+\delta(t)\}=-\frac{2}{S+1}-\frac{1}{(S+1)^2}+1$$

$$i=\frac{V}{\frac{1}{2}\|(\frac{1}{2}+\frac{1}{S})}=\frac{4(S+1)}{S+2}\times V=\frac{4(S+1)}{S+2}\times(-\frac{2}{S+1}-\frac{1}{(S+1)^2}+1)$$

$$=-\frac{8}{S+2}-\frac{4}{(S+1)(S+2)}+\frac{4(S+1)}{S+2}=-\frac{8}{S+2}-\frac{4}{S+1}+\frac{4}{S+2}-\frac{4}{S+2}+4$$

$$=-\frac{8}{S+2}-\frac{4}{S+1}+4\Rightarrow i(t)=(-8e^{-2t}-4e^{-t})u(t)+4\delta(t)$$

درنهایت داریم:

$$V_2(t)=-\frac{1}{4}i(t)=+(2e^{-2t}+e^{-t})u(t)-\delta(t)$$

۱۷ـ گزینه «۳» ابتدا بیایید بررسی مختصری بر گراف مدار و داده‌های مسأله داشته باشیم. مدار شش شاخه و چهار گره دارد و در نتیجه دارای سه شاخه درخت و سه لینک است. با توجه به روابط داده شده، شاخه‌های (۱)، (۳) و (۶)، شاخه‌های درخت بوده که هر یک، یک کاتست اساسی را ساخته و شاخه‌های (۲)، (۴) و (۵)، لینک‌ها هستند که هر یک، یک حلقه اساسی تشکیل می‌دهند. با توجه به روابط ارائه شده، می‌توان معادلات کاتست‌ها و حلقه‌های اساسی و ماتریس‌های B و Q را به صورت زیر تشکیل داد:

$$\begin{cases}b_1V_1+V_2+V_3=0\\ b_2V_1-V_3+V_4-V_6=0\\ V_5+V_6=0\end{cases}\qquad\begin{cases}j_1+j_2+a_1j_5=0\\ -j_2+j_3+j_4+a_2j_5=0\\ j_4+a_3j_5+j_6=0\end{cases}$$

b_1 و b_2: پارامترهای مجهول

a_1 و a_2 و a_3: پارامترهای مجهول

$$B=\begin{bmatrix}b_1&1&1&0&0&0\\ b_2&0&-1&1&0&-1\\ 0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}\quad\text{و}\quad Q=\begin{bmatrix}1&1&0&0&a_1&0\\ 0&-1&1&1&a_2&0\\ 0&0&0&1&a_3&1\end{bmatrix}$$

می‌دانیم که $QB^T=0$. حال با چک کردن این رابطه، مقدار پارامترهای نامعلوم را محاسبه می‌کنیم:

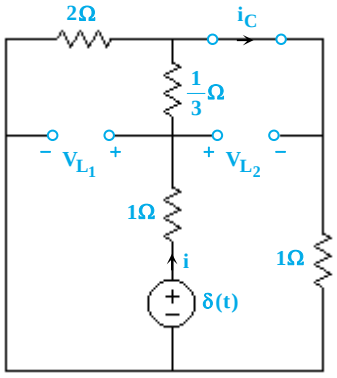
$$QB^T=\begin{bmatrix}1&1&0&0&a_1&0\\ 0&-1&1&1&a_2&0\\ 0&0&0&1&a_3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1&b_2&0\\ 1&0&0\\ 1&-1&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\\ 0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+b_1&b_2&a_1\\ 0&0&a_2\\ 0&0&1+a_3\end{bmatrix}$$

$$QB^T=0\Rightarrow\begin{bmatrix}1+b_1&b_2&a_1\\ 0&0&a_2\\ 0&0&1+a_3\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}a_1=a_2=0\ \text{و}\ a_3=-1\\ b_1=-1\ \text{و}\ b_2=0\end{cases}$$

بنابراین ماتریس Q به شکل مقابل است:

$$Q=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0\\ 0&-1&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&-1&1\end{bmatrix}$$

۱۸ـ گزینه «۳» همان‌طور که می‌دانیم برای تحلیل مدارهای مرتبه‌دار در زمان $t=0^+$ و هنگامی که منابع ضربه‌ای در مدار موجود است، می‌توانیم خازن‌ها را با اتصال کوتاه و سلف‌ها را با مدار باز مدل کنیم. پس از آن با محاسبه جریان خازن و ولتاژ سلف و انتگرال‌گیری از آن‌ها در بازه‌ی $[0^-,0^+]$ ولتاژ خازن و جریان سلف را در زمان $t=0^+$ محاسبه می‌کنیم. حال با این تفاسیر مدار را در لحظه $t=0^+$ به شکل مقابل مدل می‌کنیم:



حال می‌توان نوشت:

$$i=\frac{\delta(t)}{1+\frac{1}{3}+2\|1}=\frac{\delta(t)}{2}$$

$$i_C=\frac{2}{2+1}\times i=\frac{\delta(t)}{3}\Rightarrow V_C(0^+)=\frac{1}{2}\times\int_{0^-}^{0^+}i_C\,dt=\frac{1}{6}v$$

همچنین داریم:

$$V_{L_1} = \delta(t) - 1\times i = \delta(t) - \frac{\delta(t)}{2} = \frac{\delta(t)}{2}$$

$$V_{L_2} = \delta(t) - 1\times i - 1\times i_C = \delta(t) - \frac{\delta(t)}{2} - \frac{\delta(t)}{3} = \frac{\delta(t)}{6}$$

از طرفی مطابق روابط سلف‌های تزویج شده داریم:

$$V_{L_1} = 3\frac{di_{L_1}}{dt} + \frac{di_{L_2}}{dt} \quad , \quad V_{L_2} = \frac{di_{L_1}}{dt} + 2\frac{di_{L_2}}{dt}$$

حال برای لحظه $t = 0^+$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 3\frac{di_{L_1}}{dt} + \frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{\delta(t)}{2} \\ \frac{di_{L_1}}{dt} + 2\frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{\delta(t)}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{di_{L_1}}{dt} \\ \frac{di_{L_2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} \delta(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t)$$

درنهایت داریم:

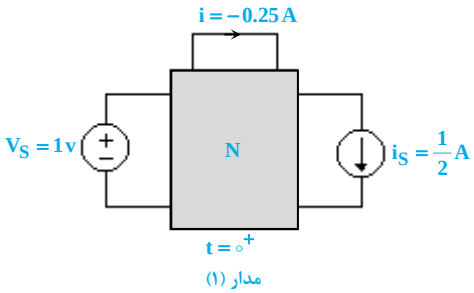
$$i_{L_1}(0^+) = \int_{0^-}^{0^+} \left(\frac{di_{L_1}}{dt}\right) dt = \frac{1}{6}A \quad , \quad i_{L_2}(0^+) = \int_{0^-}^{0^+} \left(\frac{di_{L_2}}{dt}\right) dt = 0A$$

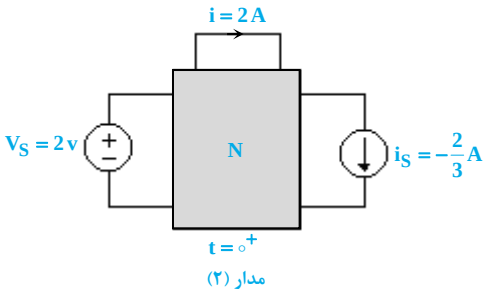
با توجه به نتایج به‌دست آمده، گزینه (۳) پاسخ صحیح است.

۱۹ـ گزینه «۲» می‌دانیم که در یک مدار مرتبه اول، برای یافتن پاسخ یک متغیر باید ثابت زمانی مدار، مقدار اولیه آن متغیر و مقدار نهایی آن متغیر را داشته باشیم. از آنجایی که مدار شکل (۳) به لحاظ ساختاری مشابه مدار شکل (۱) است، ثابت زمانی آن نیز همان ثابت زمانی مدار (۱) بوده و در پاسخ تک‌تک متغیرهای خروجی مدار جمله e^{-t} ظاهر خواهد شد. برای پیدا کردن مقدار $i(0^+)$ در مدار (۳)، مدارهای (۱) و (۲) را در لحظه $t = 0^+$ مدل کرده و سپس از جمع آثار استفاده می‌کنیم. با توجه به پاسخ $i(t)$ در مدارهای (۱) و (۲) داریم:

مدار (۱) $\rightarrow i(t = 0^+) = -0/25A$

مدار (۲) $\rightarrow i(t = 0^+) = 2A$





حال مطابق قضیه جمع آثار داریم:

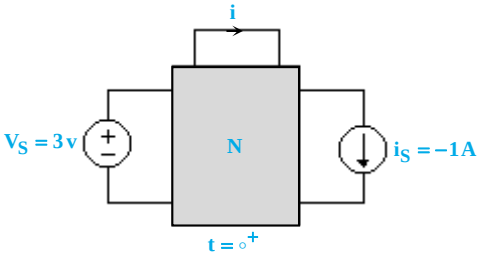
$$i = \alpha V_S + \beta i_S$$

$$\begin{cases} \text{(۱) مدار} \rightarrow -0/25 = \alpha + \frac{\beta}{2} \\ \text{(۲) مدار} \rightarrow 2 = 2\alpha - \frac{2}{3}\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0/5 \text{ و } \beta = -1/5$$

اکنون برای مدار شکل (۳) می‌توان نوشت:

$$i = 0/5V_S - 1/5i_S = 0/5\times 3 - 1/5\times(-1) = 3A$$

$$\Rightarrow i(0^+) = 3A$$

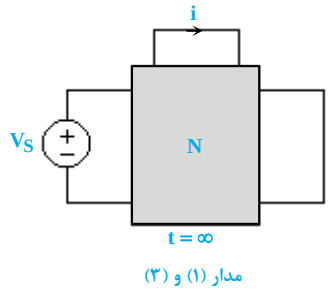


از طرفی می‌دانیم شرایط اولیه مدار، در مقدار حالت ماندگار متغیرها (در یک مدار مرتبه اول با ثابت زمانی محدود) تأثیرگذار نیست و مقادیر حالت ماندگار صرفاً متأثر از منابع تغذیه ورودی هستند. لذا برای مدارهای شکل (۱) و (۳) می‌توان نوشت:

$$\text{(۱) مدار} \rightarrow \begin{cases} i(\infty) = 2A \\ V_S = 1v \end{cases} \text{ و } i(\infty) = kV_S \Rightarrow k = \frac{i(\infty)}{V_S} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{(۳) مدار} \rightarrow i(\infty) = kV_S = 2V_S = 2\times 3 = 6A$$

درنهایت می‌توان نوشت: $i(t) = [i(\infty) + (i(0^+) - i(\infty))e^{-t}]u(t) = [6 + (3-6)e^{-t}]u(t) = 3(2 - e^{-t})u(t)$



۵ـ گزینه «۲» با تغییر متغیر $u = e^{-y}v$ خواهیم داشت:

$$u_x = e^{-y}v_x \quad , \quad u_y = -e^{-y}v + e^{-y}v_y$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$u_x^2 + u_y + u = 0$$

$$\Rightarrow e^{-2y}v_x^2 - e^{-y}v + e^{-y}v_y + e^{-y}v = 0 \Rightarrow e^{-2y}v_x^2 + e^{-y}v_y = 0$$

با ضرب طرفین در e^{2y} به معادله‌ی $v_x^2 + e^{y}v_y = 0$ می‌رسیم. با توجه به آن که مشتق‌های جزئی نسبت به x و y با هم جمع شده‌اند؛ فرض می‌کنیم معادله جوابی به فرم $v(x,y) = F(x) + G(y)$ دارد. بنابراین $v_x = F'(x)$ و $v_y = G'(y)$ خواهد بود. با جایگذاری در معادله داریم:

$$F'^2(x) + e^{y}G'(y) = 0 \Rightarrow F'^2(x) = -e^{y}G'(y)$$

اما در تساوی اخیر یک سمت تساوی برحسب x و دیگری بر حسب y است. بنابراین هر کدام از آن‌ها باید ثابت باشند، عدد ثابت k وجود دارد چنان که:

$$F'^2(x) = k = -e^{y}G'(y)$$

اکنون دو معادله‌ی دیفرانسیل مقابل را داریم:

$$\begin{cases} F'^2(x) = k \Rightarrow F'(x) = \sqrt{k} \Rightarrow F(x) = \sqrt{k}x + b \\ -e^{y}G'(y) = k \Rightarrow G'(y) = -ke^{-y} \Rightarrow G(y) = ke^{-y} + a \end{cases}$$

بنابراین با جمع‌بندی نتایج به دست آمده خواهیم داشت:

$$u(x,y) = e^{-y}v(x,y) = e^{-y}[F(x) + G(y)] = e^{-y}[\sqrt{k}x + b + ke^{-y} + a] = (\sqrt{k}x + c)e^{-y} + ke^{-2y}$$

که در معادله‌ی اخیر $c = a + b$ است. در پایان شرط مرزی $u(x,0) = x$ را به کار می‌گیریم:

$$u(x,0) = \sqrt{k}x + c + k = x \Rightarrow k = 1 \ , \ c = -1$$

بنابراین داریم:

$$\mathbf{u(x,y) = (x-1)e^{-y} + e^{-2y}}$$

توجه: معادلات دیفرانسیل PDE به شرطی با روش جداسازی متغیرها به صورت $u(x,y) = F(x)G(y)$ حل می‌شوند که همگن و خطی باشند. همچنین ضرایب معادله اعداد ثابت باشند.

هر کدام از این شرط‌ها را که نداشته باشیم، ممکن است جداسازی متغیرها به صورت $u(x,y) = F(x)G(y)$ موفقیت‌آمیز باشد یا نه. در واقع اگر پس از جایگذاریِ $u = FG$ توانستید همه‌ی متغیرهای x و y را از هم جدا کنید و به دو سوی تساوی بیاورید، روش جداسازی موفقیت‌آمیز بوده است.

در این مثال ابتدا تغییر متغیر $u = e^{-y}v$ را انجام دادیم تا به معادله‌ی ساده‌تر $v_x^2 + e^{-y}v_y = 0$ برسیم. در این مثال متغیرهای x و y را به صورت $v = F(x) + G(y)$ جدا کردیم.

۶ـ گزینه «۳» مطابق متن درس می‌دانیم که جواب معادله پتانسیل در ناحیه‌ی بین دو کره به صورت $u = c_1 + \frac{c_2}{r}$ خواهد بود. طبق شرایط مرزی داده شده، روی کره‌ی $r = 1$ داریم $u = 0$. در نتیجه داریم:

$$r = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1$$

پس $u = c_1(1 - \frac{1}{r})$ است. روی کره‌ی $r = 2$ داریم $u_r = 0$:

$$u_r = c_1(0 + \frac{1}{r^2}) \xrightarrow{r=2} u_r = \frac{c_1}{4} = 1 \Rightarrow c_1 = 4$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$u = 4(1 - \frac{1}{r}) = \frac{4(r-1)}{r}$$

۷ـ گزینه «۱» هر دو شرط مرزی در $x = 0$ و $x = 2$ روی u_x هستند، پس توابع $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$ و $g(x) = x$ را در هر دو نقطه به صورت زوج گسترش می‌دهیم. دوره‌ی تناوب هم $T = 2 \times 2 = 4$ است، در ضمن $c = 1$ است.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f^*(x+ct) + f^*(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g^*(x)dx$$

با جایگذاری $(x,t) = (1,\frac{3}{2})$ در این فرمول داریم:

$$u(1,\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}[f^*(1+\frac{3}{2}) + f^*(1-\frac{3}{2})] + \frac{1}{2}\int_{1-\frac{3}{2}}^{1+\frac{3}{2}} g^*(x)dx$$

در داخل کروشه‌ی اول با استفاده از گسترش زوج f نسبت به $x = 2$ و $x = 0$ داریم:

$$\begin{cases} f^*(1+\frac{3}{2}) = f^*(2+\frac{1}{2}) = f^*(2-\frac{1}{2}) = f(\frac{3}{2}) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ f^*(1-\frac{3}{2}) = f^*(-\frac{1}{2}) = f^*(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

آزمون (۱۵)

ریاضیات (معادلات دیفرانسیل، ریاضیات مهندسی، آمار و احتمالات)

۱ـ فرض کنید جواب معادله $tgxdy = -y(tgx + Lny)dx$، از نقطه‌ی $(\frac{\pi}{۲}, e)$ عبور می‌کند. این جواب به ازای $x = \frac{\pi}{۳}$، چقدر می‌شود؟

۱) $-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $e^{-\sqrt{۳}}$ ۴) $e^{\sqrt{۳}}$

۲ـ جواب معادله‌ی $y'(x) + ۳y(x) + ۲\int_{۰}^{x} y(t)dt = x$، $y(۰) = ۱$ کدام است؟

۱) $y(x) = \frac{۱}{۲} - ۲e^{-x} + \frac{۵}{۲}e^{-۲x}$ ۲) $y(x) = -\frac{۱}{۲} + ۲e^{-x} - \frac{۱}{۲}e^{-۲x}$ ۳) $y(x) = -\frac{۱}{۲} + ۲e^{-x} + \frac{۱}{۲}e^{-۲x}$ ۴) $y(x) = -۱ + ۳e^{-x} - e^{-۲x}$

۳ـ اگر $y = \frac{\sin x}{x^m}$ یک جواب همگن نظیر معادله $x^۲y'' + xy' + (x^۲ - \frac{۱}{۴})y = x\sqrt{x}$ باشد، آن‌گاه مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۱

۴ـ جواب معادله‌ی $y''' + ۴y' = x$ از مبدأ عبور می‌کند. اگر مقادیر y، y' و y'' در نقطه $x = ۰$ برابر با صفر باشد، آن‌گاه مقدار جواب در نقطه‌ی $x = \pi$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi^۲}{۴}$ ۲) $\frac{\pi^۲}{۸}$ ۳) $\frac{\pi^۲}{۱۶}$ ۴) $\frac{\pi^۲}{۲۴}$

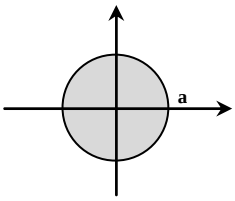
۵ـ فرض کنید $y_۱(x)$ و $y_۲(x)$ دو جواب مستقل خطی معادله‌ی لژاندر $(۱-x^۲)y'' - ۲xy' + n(n+۱)y = ۰$ در بازه‌ی $(-۱,۱)$ با شرط‌های $y_۱(۰) = y_۲'(۰) = ۱$ و $y_۱(۰) = y_۲(۰) = ۰$ باشند، آن‌گاه $w(y_۱, y_۲)$ (رنسکین $y_۱$ و $y_۲$) برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۱-x^۲})$ ۲) $\frac{۱}{۱-x^۲}$ ۳) $\frac{۲}{۱-x^۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{x^۲-۱})$

۶ـ هرگاه سری فوریه x به صورت $x = \frac{۲}{\pi}\sum \frac{(-۱)^{n+۱}\sin(n\pi x)}{n}$ برای $-۱ < x < ۰$ و $T = ۲$ نوشته شود، آنگاه ضریب $b_۳$ در بسط فوریه تابع $g(x) = x + ۲\sin(۳\pi x)$ برای $-۱ < x < ۱$ و $T = ۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳\pi} + ۱$ ۲) $\frac{۲}{۳\pi} + ۱$ ۳) $\frac{۲}{۳\pi} + ۲$ ۴) $\frac{۱}{۳\pi} + ۲$

۷ـ در معادله‌ی پتانسیل روی قرص کامل به صورت زیر، پایه متعامد بسط فوریه تابع h کدام است؟



$$\begin{cases} \nabla^۲u = ۰ \ , \ ۰ \le r < a \ , \ -\pi < \theta \le \pi \\ u(r,-\pi) = u(r,\pi) \ , \ |u(۰,\theta)| < M \\ u_\theta(r,-\pi) = u_\theta(r,\pi) \\ u(a,\theta) = h(\theta) \text{ (تابع دلخواه و تکه‌ای هموار } h) \end{cases}$$

۱) $۱, \sin\theta, \cos\theta, \sin ۲\theta, \cos ۲\theta, \ldots \sin n\theta, \cos n\theta, \ldots$

۲) $\sin\theta, \cos\theta, \sin ۲\theta, \cos ۲\theta, \ldots \sin n\theta, \cos n\theta, \ldots$

۳) $۱, \sin\theta, \cos\theta, \sin ۳\theta, \cos ۳\theta, \ldots \sin(۲n-۱)\theta, \cos(۲n-۱)\theta, \ldots$

۴) $\sin\theta, \cos\theta, \sin ۳\theta, \cos ۳\theta, \ldots \sin(۲n-۱)\theta, \cos(۲n-۱)\theta, \ldots$

۸ـ جواب مسأله‌ی حرارت زیر به کدام صورت است؟

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} \ , \ ۰ < x < \pi \ , \ ۰ < y < \pi \ , \ t > ۰ \\ u(x,y,۰) = x \quad , \ ۰ \le x \le \pi \ , \ ۰ \le y \le \pi \\ u(۰,y,t) = u(\pi,y,t) = ۰ \ , \ ۰ \le y \le \pi \ , \ t > ۰ \\ u(x,۰,t) = u(x,\pi,t) = ۰ \ , \ ۰ \le x \le \pi \ , \ t > ۰ \end{cases}$$

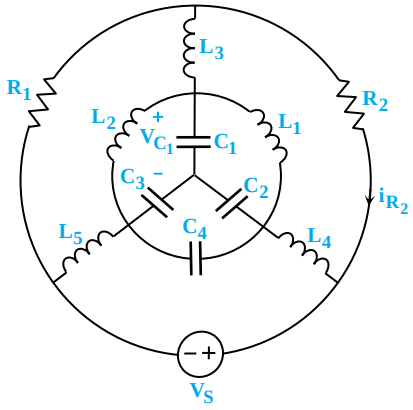
۱) $\frac{۴}{\pi}\sum_{m=۱}^{\infty}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^m(-۱)^n}{mn}e^{-(m^۲+n^۲)t}\sin mx \sin ny$

۲) $\frac{۴}{\pi}\sum_{m=۱}^{\infty}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{m+۱}[۱+(-۱)^{n+۱}]}{mn}e^{-(m^۲+n^۲)t}\sin mx \sin ny$

۳) $\frac{۴}{\pi}\sum_{m=۱}^{\infty}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^m(-۱)^n}{mn}\cos mx \sin ny$

۴) $\frac{۴}{\pi}\sum_{m=۱}^{\infty}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{m+۱}[۱+(-۱)^{n+۱}]}{mn}\sin mx \cos ny$

۱۸ـ در رابطه با مدار RLC زیر، کدام بیان صحیح است؟



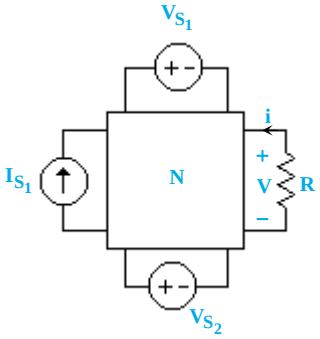
۱) این مدار از مرتبه ۸ است.

۲) تابع انتقال $H(S)=\frac{I_{R_2}}{V_S}$ دارای حداکثر ۵ صفر است.

۳) متغیر V_{C_1} دارای حداکثر ۵ فرکانس طبیعی است.

۴) تابع ادمیتانس ورودی مدار از دید V_S نمی‌تواند بیش از ۵ قطب داشته باشد.

۱۹ـ در مدار شکل زیر شبکه N یک شبکه مقاومتی خطی و پسیو است. اگر به ازای $V_{S_1}=2$ ، $I_{S_1}=3\sin t$ و $V_{S_2}=1-\cos t$ داشته باشیم $2V-i-2\sin t+4\cos t+4=0$، به ازای $V_{S_1}=-1$ و $I_{S_1}=-9$ و $V_{S_2}=\sin 2t$ حداکثر توان تلفاتی در مقاومت R چقدر خواهد بود؟



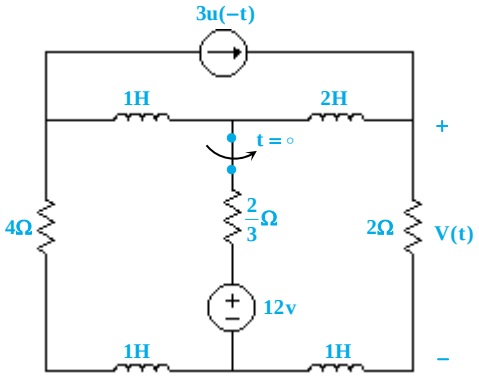
۱) $\frac{3}{4}$ وات

۲) $\frac{3}{2}$ وات

۳) $\frac{5}{4}$ وات

۴) $\frac{5}{2}$ وات

۲۰ـ در مدار زیر کلید در لحظه $t=0$ باز می‌شود، $V(t)$ برای $t>0$ کدام است؟



۱) $2/8e^{-\frac{5}{6}t}$

۲) $2e^{-\frac{5}{6}t}$

۳) $2/8e^{-1/2t}$

۴) $2e^{-1/2t}$

۲۱ـ پاسخ ضربه در یک مدار LTI به صورت $h(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-k)$ می‌باشد. پاسخ حالت صفر این مدار به ورودی $x(t)=r(2-t)u(t)$ در $t=3/5$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۲ـ پاسخ ضربه مداری به‌صورت $h(t)=2(\cos t-\cos 2t)u(t)$ است. پاسخ حالت دائمی این مدار به ورودی $\cos 3tu(t)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}\sin t-\frac{4}{5}\sin 2t-\frac{9}{20}\sin 3t$

۲) $\frac{1}{4}\sin t+\frac{4}{5}\sin 2t+\frac{9}{20}\sin 3t$

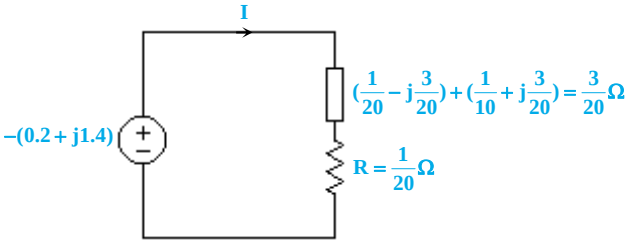
۳) $-\frac{1}{4}\sin t+\frac{4}{5}\sin 2t-\frac{9}{20}\sin 3t$

۴) $-\frac{1}{4}\sin t-\frac{4}{5}\sin 2t+\frac{9}{20}\sin 3t$

حال می‌توان Z_L را محاسبه نمود:

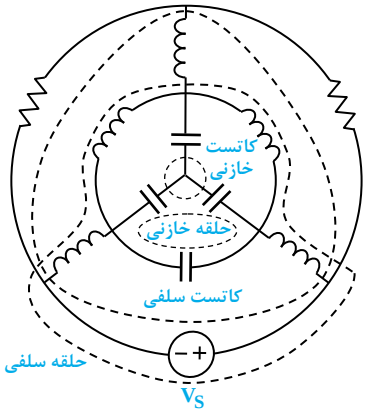
$$Z_L=[\frac{۱}{۲۰}-j\frac{۳}{۲۰}+\frac{۱}{۲۰}]^*=\frac{۱}{۱۰}+j\frac{۳}{۲۰}$$

بنابراین از نگاه مقاومت $\frac{۱}{۲۰}$ اهم مدار به شکل زیر است:



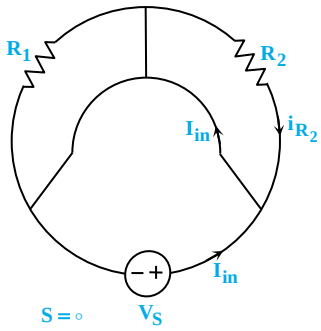
$$P_R=\frac{۱}{۲}R|I|^۲=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲۰}\times\frac{|V|^۲}{(\frac{۱}{۲۰}+\frac{۳}{۲۰})^۲}=\frac{۱}{۴۰}\times\frac{|۰/۲+j۱/۴|^۲}{\frac{۱}{۲۵}}=۱/۲۵\,w$$

۱۸ـ گزینه «۲» در وهله اول سعی می‌کنیم مرتبه مدار و تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر و غیرصفر را پیدا کنیم. مدار دارای ۵ سلف و ۴ خازن بوده و مطابق شکل دارای یک کاتست سلفی، یک حلقه خازنی، یک حلقه سلفی و یک کاتست خازنی است:



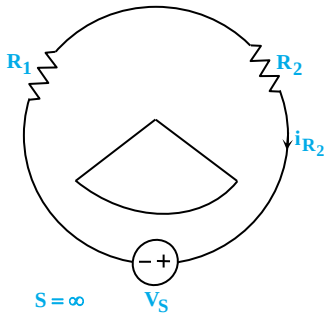
لذا مرتبه مدار برابر $۷=۲-۵+۴$ بوده و مدار ۷ فرکانس طبیعی دارد. از این تعداد ۲ تای آن به علت وجود یک کاتست خازنی و یک حلقه سلفی صفر است. بنابراین مدار ۵ فرکانس طبیعی غیرصفر و ۲ فرکانس طبیعی صفر دارد.

لذا هر تابع انتقال مربوط به مدار حداکثر می‌تواند ۷ قطب داشته باشد. حال تابع ادمیتانس مدار یا $Y(S)=\frac{I_{in}(S)}{V_S(S)}$ را درنظر بگیرید. در فرکانس $S=۰$ مدار به شکل روبه‌رو بوده و مقدار I_{in} نامحدود است.



لذا تابع انتقال $Y(S)=\frac{I_{in}(S)}{V_S(S)}$ لزوماً باید دارای قطب صفر باشد. پس تعداد قطب‌های این تابع انتقال می‌تواند بیشتر از ۵ عدد باشد. (۵ قطب غیرصفر و یک قطب صفر)

از طرفی مطابق شکل فوق مقدار $i_{R_۲}$ در فرکانس صفر برابر صفر است. لذا $i_{R_۲}$ دارای یک صفر در $S=۰$ بوده و نمی‌تواند همزمان دارای قطب $S=۰$ نیز باشد. پس تابع انتقال $H_۲(S)=\frac{I_{R_۲}}{V_S}$ حداکثر ۵ قطب دارد که همگی مخالف صفر هستند. از طرف دیگر در فرکانس $S=\infty$ مطابق شکل روبه‌رو، مقدار $i_{R_۲}$ محدود و مخالف صفر است؛ این نشان می‌دهد که تعداد قطب‌ها و صفرهای تابع انتقال $H(S)=\frac{I_{R_۲}}{V_S}$ یکی بوده و لذا این تابع انتقال دارای حداکثر ۵ صفر نیز می‌باشد.



درنهایت راجع به متغیر $V_{C_۱}$ می‌توان گفت که این متغیر می‌تواند ۵ فرکانس طبیعی غیرصفر داشته باشد و از آنجایی که خازن مربوطه در کاتست خازنی ظاهر شده، ولتاژ آن دارای فرکانس طبیعی صفر خواهد بود. (به یاد داشته باشید که فرکانس طبیعی صفر در ولتاژ خازن‌های درون کاتست خازنی و جریان سلف‌های درون حلقه سلفی ظاهر می‌شود)، لذا متغیر $V_{C_۱}$ می‌تواند بیش از ۵ فرکانس طبیعی داشته باشد. با توجه به توضیحات ارائه شده گزینه (۲) صحیح است.

۱۹ـ گزینه «۲» رابطه $V-i$ داده شده برای شبکه را می‌توان به شکل زیر نوشت و از آن مقاومت و ولتاژ تونن را استخراج نمود:

$$V=\frac{i}{۲}+\sin t-۲\cos t-۲$$

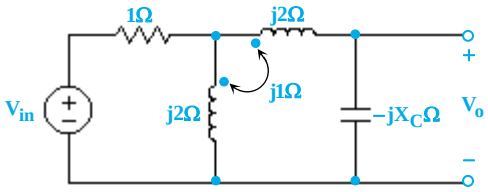
$$R_{th}=\frac{۱}{۲}\Omega, V_{th}=\sin t-۲\cos t-۲$$

۱۵ـ اگر $X \sim bin(n,p)$ باشد مقدار $E(\frac{۱}{۱+X})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱-q^{n+۱}}{(n+۱)p}$
۲) $\frac{۱-q^{n}}{np}$
۳) $\frac{۱-q^{n-۱}}{(n-۱)p}$
۴) $\frac{۱+q^{n}}{np}$

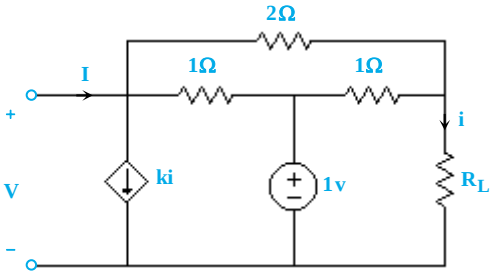
مدارهای الکتریکی ۱ و ۲

۱۶ـ برای اینکه بهره مدار شکل زیر برابر ۲ باشد $(\frac{V_o}{V_{in}} = ۲)$، X_C چقدر باید باشد؟



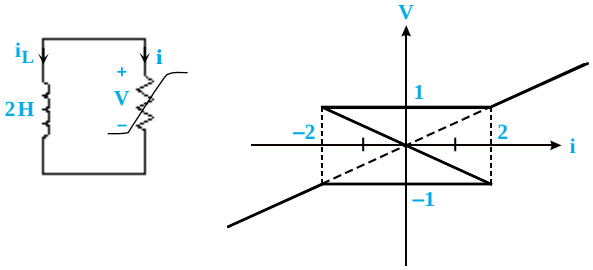
۱) ۲
۲) ۰/۵
۳) ۵
۴) به ازای هیچ مقدار X_C، بهره ۲ نخواهد شد.

۱۷ـ در مدار زیر امپدانس R_L و پارامتر k متغیر هستند. کدام بیان در مورد این مدار نادرست است؟



۱) به ازای $R_L = \infty$، فارغ از مقدار k، جریان نورتن برابر $-\frac{۴}{۳}$ آمپر است.
۲) به ازای $R_L = ۰$ و $k = -۳$، مدار همچون یک منبع جریان عمل می‌کند.
۳) به ازای $k = \infty$، فارغ از مقدار R_L، مدار همچون یک منبع ولتاژ به اندازه ۲− ولت عمل می‌کند.
۴) به ازای $R_L = ۰$ و $k = ۱$، مدار همچون یک مقاومت به اندازه $\frac{۲}{۳}$ اهم عمل می‌کند.

۱۸ـ مشخصه ولتاژ ـ جریان مقاومت غیرخطی موجود در مدار زیر به شکل نشان داده شده می‌باشد. اگر $i_L(۰)$ برابر ۳ آمپر باشد، مقدار جریان سلف بعد از گذشت ۱۰ ثانیه چند آمپر است؟ $(e^{۰/۲} \cong ۱/۲$ و $e^{۰/۴} \cong ۱/۵)$

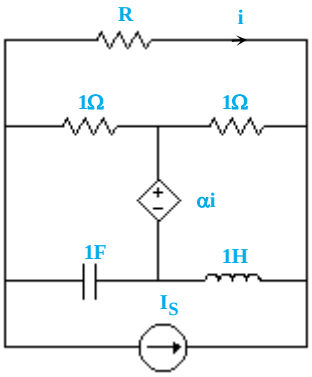


۱) −۱/۶
۲) −۱/۸
۳) −۲
۴) −۲/۲

۱۹ـ کدام عبارت می‌تواند امپدانس ورودی یک مدار پایدار و متشکل از عناصر پسیو باشد؟

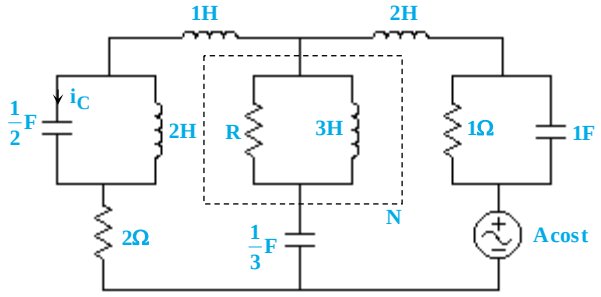
۱) $\frac{(S+۱)^۲}{S^۳+۲S^۲+۲S+۵}$
۲) $\frac{S-۲}{S^۲+۳S+۲}$
۳) $\frac{۲(S+۳)}{S(S+۲)}$
۴) $\frac{S^۲+۳S+۲}{S^۲+S+۱}$

۲۰ـ در ارتباط با مدار روبه‌رو کدام گزاره نادرست است؟



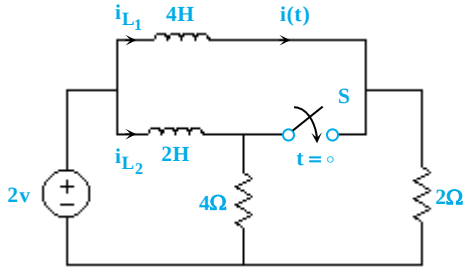
۱) اگر R برابر ۱ اهم باشد، برای $-۲ < \alpha < ۲$ فرکانس‌های طبیعی مدار سمت چپ محور $j\omega$ قرار می‌گیرند.
۲) اگر α برابر ۲− باشد، برای تمام Rهای مثبت، فرکانس‌های طبیعی مدار سمت چپ محور $j\omega$ هستند.
۳) به ازای $R = ۲$ و $\alpha = ۳$، مدار فرکانس طبیعی بر روی محور $j\omega$ دارد.
۴) اگر مدار تنها یک فرکانس طبیعی داشته باشد، آن فرکانس برابر ۱− خواهد بود.

۲۱ـ در مدار زیر شبکه N حداکثر توان ممکن را جذب نموده و این توان در حالت دائمی برابر ۱۲ وات است. در این شرایط جریان i_C در حالت دائمی سینوسی کدام است؟



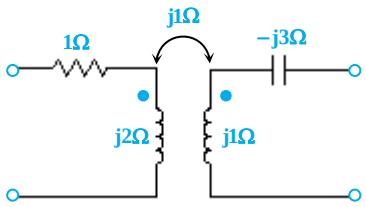
۱) $۱۲\cos t - ۱۲\sin t$
۲) $۱۲\cos t + ۱۲\sin t$
۳) $۳\cos t - ۳\sin t$
۴) $۳\cos t + ۳\sin t$

۲۲ـ در مدار شکل مقابل کلید S برای مدت طولانی باز بوده و در لحظه‌ی $t = ۰$ بسته می‌شود. جریان $i(t)$ برای زمان‌های $t > ۰$ کدام است؟



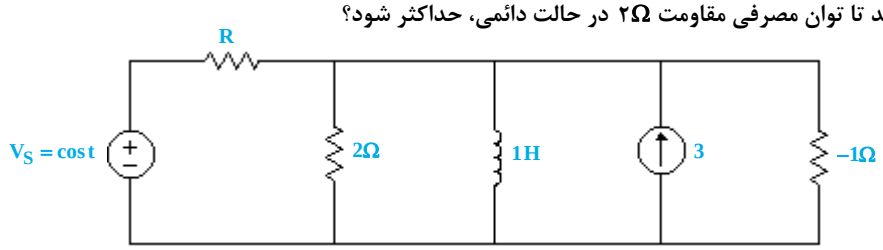
۱) ۱
۲) ۲
۳) e^{-t}
۴) $۲e^{-t}$

۲۳ـ ماتریس انتقال مدار شکل زیر کدام است؟



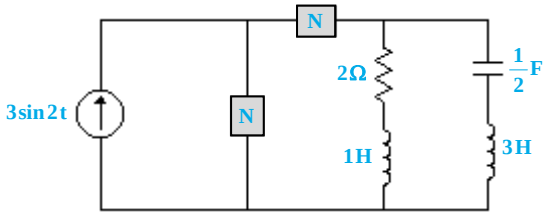
۱) $\begin{bmatrix} ۲-j & -۲-j۵ \\ -j & -۲ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} ۲-j & -۲+j۵ \\ -j & ۲ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۲-j & ۲+j۵ \\ -j & ۲ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۲+j & -۲-j۵ \\ j & -۲ \end{bmatrix}$

۲۴ـ در مدار شکل زیر، مقدار مقاومت R چند اهم باشد تا توان مصرفی مقاومت ۲Ω در حالت دائمی، حداکثر شود؟



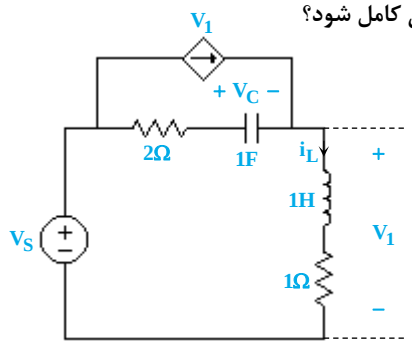
۱) ۲/۵
۲) ۰/۴
۳) −۰/۴
۴) −۲/۵

۲۵ـ در مدار زیر، توان راکتیو تولیدی خازن چه کسری از توان راکتیو تولیدی منبع است؟ (شبکه N در فرکانس $\omega = ۲\frac{rad}{s}$ در حال تشدید است.)



۱) $\frac{۴}{۴۵}$
۲) $\frac{۴۵}{۴}$
۳) $-\frac{۴}{۴۵}$
۴) $-\frac{۴۵}{۴}$

۲۶ـ در مدار زیر مقدار $V_C(۰^-)$ و $i_L(۰^-)$ چقدر باشد تا پاسخ کامل $V_۱$ به ورودی $V_S = \sin t\,u(t)$ سینوسی کامل شود؟



۱) $i_L(۰^-) = -۱A$ و $V_C(۰^-) = -۱v$
۲) $i_L(۰^-) = ۱A$ و $V_C(۰^-) = -۱v$
۳) $i_L(۰^-) = -۱A$ و $V_C(۰^-) = ۱v$
۴) $i_L(۰^-) = ۱A$ و $V_C(۰^-) = ۱v$

۱۷ـ در یک مدار با ۷ شاخه و ۴ گره ماتریس حلقه‌های اساسی به‌صورت زیر است. ماتریس کاتست‌های اساسی کدام است؟

$$B=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0\\0&1&-1&1&0&0&0\\0&-1&1&0&1&-1&0\\0&0&1&0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

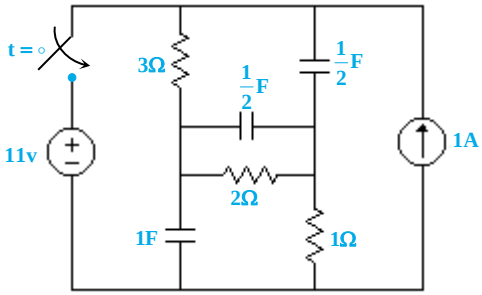
۱) $Q=\begin{bmatrix}-1&1&0&-1&1&0&0\\0&0&0&1&1&-1&1\\0&0&1&0&-1&0&-1\end{bmatrix}$

۲) $Q=\begin{bmatrix}1&-1&0&1&-1&0&0\\1&0&0&0&0&1&-1\\0&0&-1&-1&1&0&1\end{bmatrix}$

۳) $Q=\begin{bmatrix}-1&1&0&-1&1&0&0\\-1&1&1&0&0&0&-1\\0&0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}$

۴) $Q=\begin{bmatrix}-1&1&0&-1&1&0&0\\0&0&1&1&-1&0&-1\\0&0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}$

۱۸ـ در مدار زیر کلید در لحظه $t=0$ بسته می‌شود. در بازه زمانی $[0^+, 0^-]$ منبع ولتاژ چه مقدار انرژی به مدار تحویل می‌دهد؟



۱) ۲/۲ ژول

۲) ۱۱ ژول

۳) ۴/۴ ژول

۴) ۲۲ ژول

۱۹ـ تابع شبکه یک مدار به صورت $H(S)=\frac{S+2}{S^2+4S+3}$ می‌باشد. پاسخ این مدار به ورودی پله واحد کدام است؟

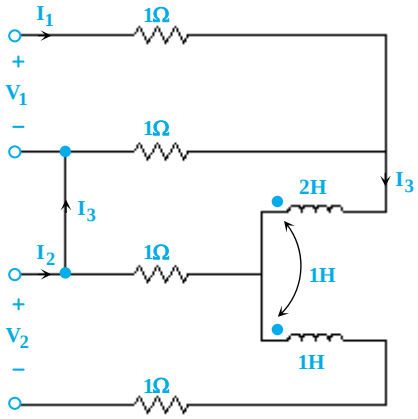
۱) $(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-3t})u(t)$

۲) $(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-3t})u(t)$

۳) $(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-3t})u(t)$

۴) $(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-3t})u(t)$

۲۰ـ در دوقطبی شکل زیر، درایه Z_{11} از ماتریس امپدانس دوقطبی کدام است؟



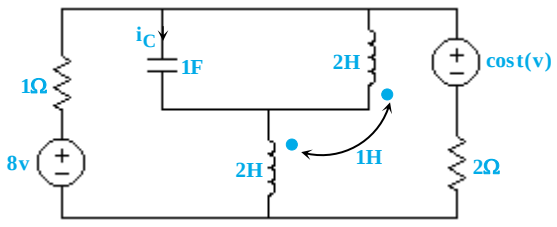
۱) $\frac{2S+3}{S+1}$

۲) $\frac{4S+3}{2S+2}$

۳) $-\frac{4S+3}{2S+2}$

۴) $-\frac{2S+3}{S+1}$

۲۱ـ در مدار شکل زیر معادله دیفرانسیل حاکم بر جریان خازن (i_C) کدام است؟



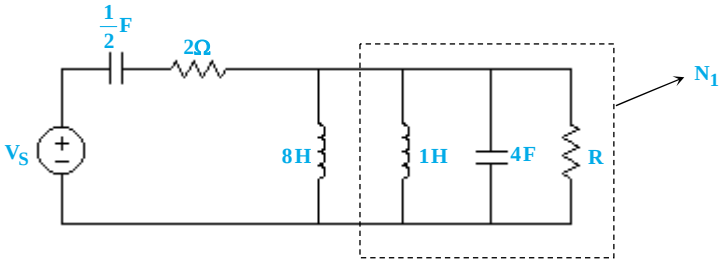
۱) $9\frac{d^3i_C}{dt}+4\frac{d^2i_C}{dt}+6\frac{di_C}{dt}+2i_C=-\cos t$

۲) $4\frac{d^3i_C}{dt}+9\frac{d^2i_C}{dt}+6\frac{di_C}{dt}+2i_C=\cos t$

۳) $4\frac{d^3i_C}{dt}+9\frac{d^2i_C}{dt}+6\frac{di_C}{dt}+2i_C=-\cos t$

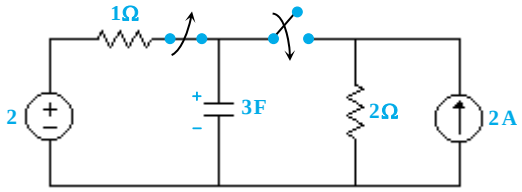
۴) $9\frac{d^3i_C}{dt}+4\frac{d^2i_C}{dt}+6\frac{di_C}{dt}+2i_C=\cos t$

۲۲ـ مدار زیر در وضعیت دائمی سینوسی است. N_1 در حالت تشدید بوده و بیشترین توان مصرفی آن $\sqrt{80}$ وات است. توان راکتیو تولیدی منبع چند VAR است؟



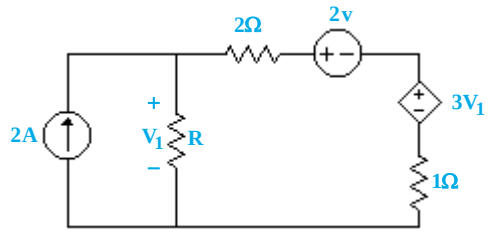
۱) ۴-
۲) ۴
۳) ۲۴
۴) ۲۰

۲۳ـ در مدار زیر هر دو کلید، هم‌زمان باز و بسته می‌شوند. (یکی باز می‌شود و دیگری بسته). کلیدها در چه زمانی تغییر وضعیت پیدا کنند تا ولتاژ خازن در صورت گذر زمان به همان اندازه به $\frac{11}{4}$ ولت برسد؟ $(V_C(0^-)=0)$



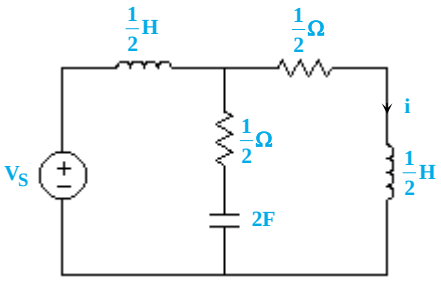
۱) $\frac{1}{6}\text{Ln}2$
۲) $6\text{Ln}2$
۳) $2\text{Ln}6$
۴) $\frac{1}{2}\text{Ln}6$

۲۴ـ در مدار زیر، اندازه‌ی منبع جریان را چند برابر کنیم تا توان مصرفی مقاومت R، ۳۹ وات کم شود؟ $(R=1\Omega)$



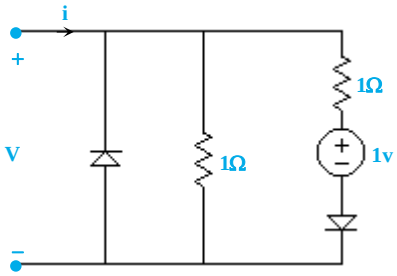
۱) ۴
۲) ۰/۲۵
۳) ۰/۵
۴) ۲

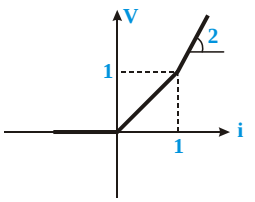
۲۵ـ پاسخ ضربه i در $t=1s$ چند آمپر است؟

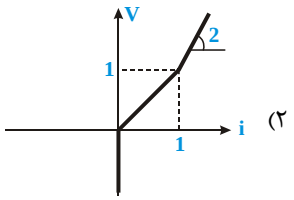


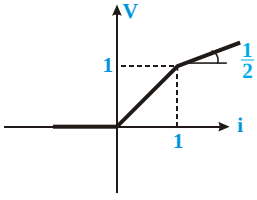
۱) e^{-1}
۲) $2e^{-1}$
۳) e^{-2}
۴) $2e^{-2}$

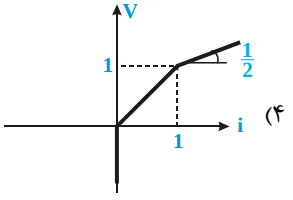
۲۶ـ مشخصه $V-i$ مدار زیر کدام است؟



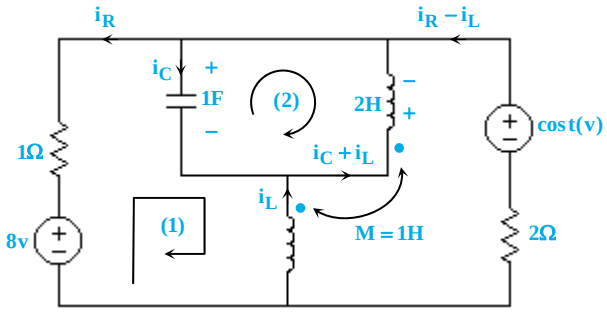
۱)


۲)


۳)


۴)


۲۱ـ گزینه «۱» برای به دست آوردن معادلات دیفرانسیلی جریان خازن می‌توان از ۲ راه حل استفاده کرد. راه اول این است که براساس خود معادلات دیفرانسیل بنویسیم و راه دوم این است که به حل در فضای لاپلاس با فرض شرایط اولیه صفر برده شود و پس از آن با عکس لاپلاس، رابطه دیفرانسیلی آن بازسازی شود. چون راه اول ساده‌تر است آن را انتخاب می‌کنیم. گام بعدی مشخص کردن جریان‌ها است (روی شکل).



گام بعدی این است که با توجه به سربندی سلف‌ها، علامت M را مشخص کنیم. چون جریان‌ها در یکی به سر نقطه‌دار وارد می‌شود و در دیگری از آن خارج می‌گردد، پس $M = -1H$. همچنین باید این نکته را یادآوری کنیم که در این حالت، منبع ۸ ولتی را خاموش می‌کنیم و این بدان معناست که اتصال کوتاه می‌گردد. حال روابط را می‌نویسیم:

$$KVL(1): -i_R + \int i_C dt - 2i'_L + i'_C + i'_L = 0 \Rightarrow i_R = \int i_C dt + i'_C - i'_L \quad (I)$$

$$KVL(2): \int i_C dt + 2i'_C + 2i'_L - i'_L = 0 \Rightarrow i'_L = -\int i_C dt - 2i'_C \quad (II)$$

اگر KVL در حلقه بزرگ (حلقه بیرونی) بزنیم، به صورت مقابل داریم:

$$3i_R - 2i_L - \cos t = 0 \quad (III)$$

با جایگذاری روابط (I) و (II) خواهیم داشت:

$$(III) \Rightarrow 6\int i_C + 9i'_C + 2\iint i_C + 4i_C - \cos t = 0$$

اگر ۲ بار مشتق بگیریم خواهیم داشت:

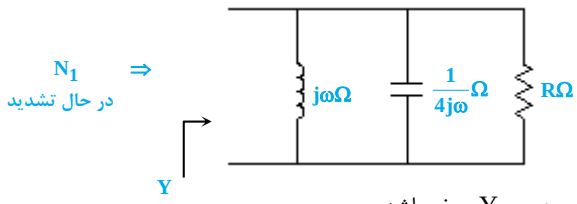
$$6\frac{di_C}{dt} + 9\frac{d^3 i_C}{dt} + 2i_C + 4i''_C + \cos t = 0$$

۲۲ـ گزینه «۱» به منظور پیدا کردن توان راکتیو تولیدی منبع، باید اندازه جریان سلف‌ها و خازن‌ها را پیدا کرده و توان راکتیو هر کدام را از رابطه‌ی $Q = Z|I|^2$ محاسبه کنیم. دقت کنید که توان راکتیو تولیدی منبع، برابر مجموع کل توان راکتیو مصرفی سلف‌ها و کل توان راکتیو مصرفی خازن‌ها است.

برای پیدا کردن اندازه جریان سلف‌ها و خازن، باید از حداکثر توان مصرفی مقاومت R، جریان آن را پیدا کنیم که برای این منظور باید امپدانس دیده‌شده از دو سر مقاومت R را پیدا کرده و مقدار مقاومت R را طوری تعیین کنیم که حداکثر توان را مصرف کرده و این مقدار برابر $\sqrt{80}$ وات باشد.

مجهول دیگری که برای حل مسأله نیاز است، فرکانس حالت دائمی شبکه است که برای به‌دست آوردن آن باید از در حالت تشدید بودن N_1 استفاده کنیم.

امپدانس‌های المان‌ها روی شبکه نوشته شده است.

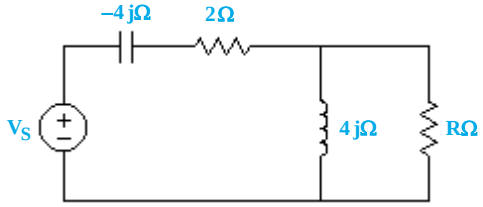


برای این‌که N_1 در حالت تشدید باشد، باید Y مقاومتی خالص باشد، یعنی باید قسمت موهومی Y صفر باشد.

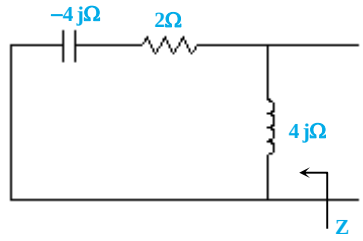
$$Y = \frac{1}{j\omega} + 4j\omega + \frac{1}{R} = j[4\omega - \frac{1}{\omega}] + \frac{1}{R}$$

$$4\omega - \frac{1}{\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{2}\frac{rad}{s} \Rightarrow Y = \frac{1}{R}$$

⇒ شبکه ⇒

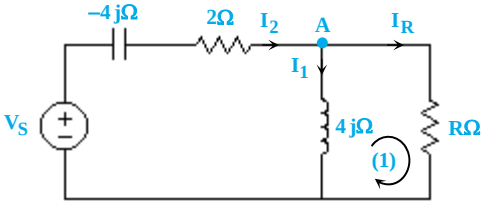


حال به دنبال پیدا کردن مقاومت R هستیم. به این منظور مقدار R را برای دریافت حداکثر توان مصرفی، مشخص می‌کنیم. بنابراین امپدانس دیده‌شده از دو سر مقاومت R را پیدا می‌کنیم.



$$Z = \frac{(2-4j)\times 4j}{2-4j+4j} = 8+4j \Rightarrow Z = (8+4j)\Omega$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{80} \Rightarrow R = \sqrt{80}\,\Omega$$



$$P_R^{max} = R\times|I_R|^2 \Rightarrow \sqrt{80} = \sqrt{80}\times|I_R|^2 \Rightarrow |I_R| = 1A$$

آزمون (۱۸)

ریاضیات (معادلات دیفرانسیل، ریاضیات مهندسی، آمار و احتمالات)

۱ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $yy'' + (y')^۲ = x$ کدام است؟

۱) $y = \frac{-۱}{۶}x^۳ + c_۱x^۲ + c_۲$
۲) $y = \frac{۱}{۶}x^۲ + c_۱x + c_۲$
۳) $y^۲ = \frac{۱}{۳}x^۳ + c_۱x + c_۲$
۴) $y^۲ = -\frac{۱}{۳}x^۳ + c_۱x + c_۲$

۲ـ جواب استثنایی معادله‌ی $y = xy' + y^۲(y')^۲$ کدام است؟

۱) $۳x^۲ + ۲y^۳ = ۰$
۲) $۹x^۲ - ۴y^۳ = ۰$
۳) $۹x^۲ + ۴y^۳ = ۰$
۴) $۳x^۲ - ۲y^۳ = ۰$

۳ـ اگر $y(t)$ جواب معادله‌ی $y''(t) + y(t) = \delta(t-\pi) - \delta(t-۲\pi)$ با شروط $y(۰) = ۰$ و $y'(۰) = ۱$ باشد، آنگاه مقدار $y(\frac{\pi}{۳})$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \frac{e^{-۲t}\sin ۲t \cosh t}{t}$ کدام است؟

۱) $[\cot g^{-۱}(\frac{s+۱}{۲}) - \cot g^{-۱}(\frac{s+۳}{۲})]$
۲) $\frac{۱}{۲}[\cot g^{-۱}(\frac{s+۱}{۲}) - \cot g^{-۱}(\frac{s+۳}{۲})]$
۳) $\frac{۱}{۲}[\cot g^{-۱}(\frac{s+۱}{۲}) + \cot g^{-۱}(\frac{s+۳}{۲})]$
۴) $[\cot g^{-۱}(\frac{s+۱}{۲}) + \cot g^{-۱}(\frac{s+۳}{۲})]$

۵ـ تصویر ناحیه $D = \{۰ \le y \le ۱ \; ; \; ۰ \le x \le \frac{\pi}{۲}\}$ تحت نگاشت $w = \cos z$ کدام ناحیه است؟

۱) بخشی از بیضی در ربع اول
۲) بخشی از بیضی در ربع چهارم
۳) نیمه بالایی یک بیضی
۴) بخشی از بیضی در ربع دوم

۶ـ جواب مسأله زیر کدام است؟

$$\begin{cases} x\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = x & ; \; x > ۰ \, , \, t > ۰ \\ u(x,۰) = ۰ & ; \; x \ge ۰ \\ u(۰,t) = ۰ & ; \; t \ge ۰ \end{cases}$$

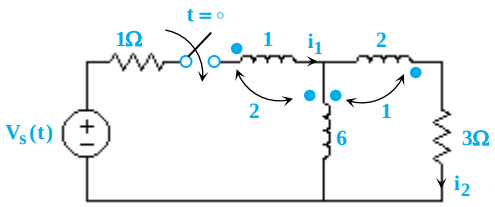
۱) $u(x,t) = \begin{cases} t^۲ & ; \; t < \frac{x^۲}{۲} \\ \frac{x^۲}{۲} & ; \; t \ge x^۲ \end{cases}$
۲) $u(x,t) = \begin{cases} t & ; \; t < \frac{x^۲}{۲} \\ \frac{x^۲}{۲} & ; \; t \ge \frac{x^۲}{۲} \end{cases}$
۳) $u(x,t) = \begin{cases} \frac{t}{۲} & ; \; t < \frac{x^۲}{۲} \\ \frac{x^۲}{۲} & ; \; t \ge \frac{x^۲}{۲} \end{cases}$
۴) $u(x,t) = \begin{cases} t & ; \; t < x^۲ \\ x^۲ & ; \; t \ge x^۲ \end{cases}$

۷ـ جواب مسأله انتقال حرارت زیر به صورت $u(x,t) = \int_۰^\infty [A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)]e^{-\omega^۲ ct}d\omega$ است. $A(\omega)$ و $B(\omega)$ کدام است؟

$$\begin{cases} \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = \frac{۱}{c}(\frac{\partial u}{\partial t}) & ; \; -\infty < x < \infty \, , \, t > ۰ \\ u(x,۰) = T_۰ e^{-|\frac{x}{a}|} & ; \; -\infty < x < \infty \\ |u(x,t)| < M & \text{جواب کراندار است.} \end{cases}$$

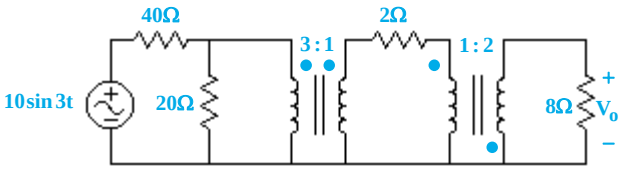
۱) $A(\omega) = ۰ \, , \, B(\omega) = \frac{T_۰ a}{۲\pi(۱ + \omega^۲ a^۲)}$
۲) $B(\omega) = ۰ \, , \, A(\omega) = \frac{۲T_۰ a}{\pi(۱ + \omega^۲ a^۲)}$
۳) $A(\omega) = ۰ \, , \, B(\omega) = \frac{T_۰ a^۲}{۲\pi(۱ + \omega^۲ a^۲)}$
۴) $B(\omega) = ۰ \, , \, A(\omega) = \frac{۲T_۰ a^۲}{\pi(۱ + \omega^۲ a^۲)}$

۲۱ـ در مدار شکل زیر، کلید در $t = 0$ بسته می‌شود. مقدار $\frac{di_2}{dt}(0^+)$ کدام است؟



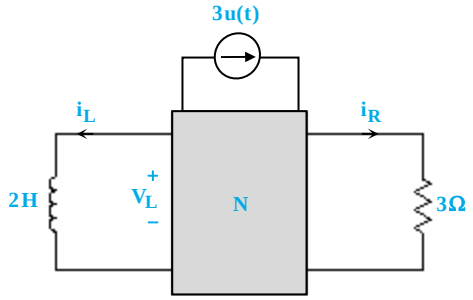
۱) $\frac{5}{29}V_S(0^+)$
۲) $\frac{9}{29}V_S(0^+)$
۳) $\frac{10}{29}V_S(0^+)$
۴) $\frac{3}{29}V_S(0^+)$

۲۲ـ در مدار شکل زیر، معادله‌ی ولتاژ خروجی V_o کدام است؟



۱) $\frac{10}{37}\sin 3t$
۲) $\frac{30}{37}\sin 3t$
۳) $-\frac{10}{37}\sin 3t$
۴) $-\frac{30}{37}\sin 3t$

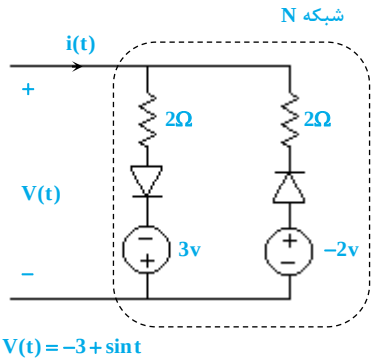
۲۳ـ معادله جریان سلف و جریان مقاومت تا $t = Ln64$ از رابطه‌های زیر پیروی می‌کنند. در $t = Ln64$ جای منبع جریان و سلف را عوض می‌کنیم. توان مصرفی شبکه N را در این زمان $t = (Ln64)^+$ پیدا کنید.



$$\begin{cases} i_L = 2 - 7e^{-\frac{t}{6}} \\ i_R = 14e^{-\frac{t}{6}} \\ 0 < t < Ln64 \end{cases}$$

۱) ۱۴۳/۵
۲) −۱۴۳/۵
۳) ۱۴۷
۴) −۱۴۷

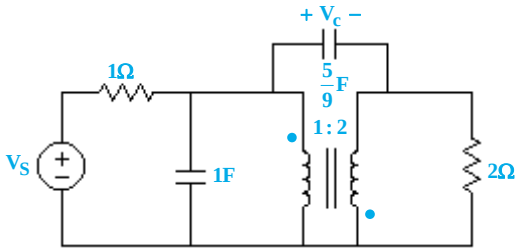
۲۴ـ ضریب توان شبکه N را حساب کنید. $(\pi \simeq 3)$



$V(t) = -3 + \sin t$

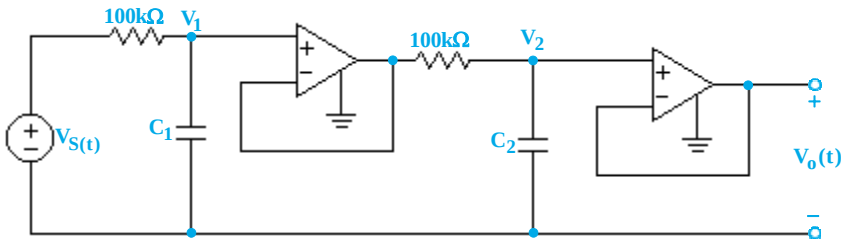
۱) $\frac{11}{38}$
۲) $\frac{11\sqrt{6}}{38}$
۳) $\frac{11\sqrt{6}}{19}$
۴) $\frac{11}{19}$

۲۵ـ پاسخ ضربه مدار روبه‌رو کدام است؟



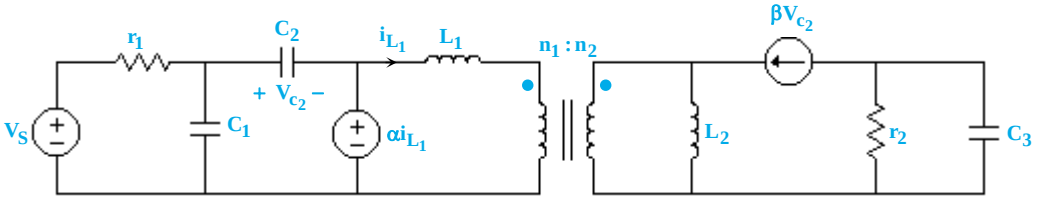
۱) $\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}u(t)$
۲) $e^{-\frac{t}{2}}u(t)$
۳) $2e^{-\frac{t}{2}}u(t)$
۴) $\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2}}u(t)$

۲۶ـ در مدار شکل زیر، برای این‌که قطب‌های تابع تبدیل $\frac{V_o}{V_S}$ برابر ۲− و ۵− باشد، حاصل $C_1 + C_2$ باید چند میکروفاراد باشد؟



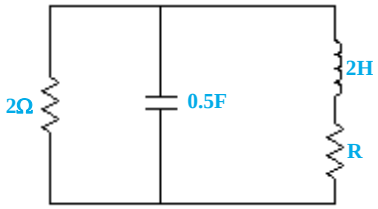
۱) ۳
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۹

۲۷ـ تعداد متغیرهای حالت برای مدار زیر کدام است؟



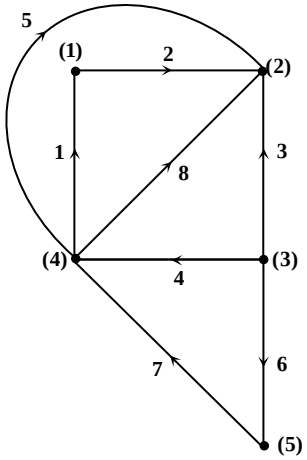
۱) ۴
۲) ۵
۳) ۳
۴) ۲

۲۸ـ در مدار مقابل به ازای کدام مقادیر R، فرکانس‌های طبیعی مدار در سمت چپ خواهد بود؟



۱) $R > -2$
۲) $R > -1$
۳) $R < -2$
۴) $R < -1$

۲۹ـ کدام دسته از معادلات زیر با شرط دارا بودن حداقل تعداد معادلات، برای توصیف جریان‌های گراف زیر کافی هستند؟



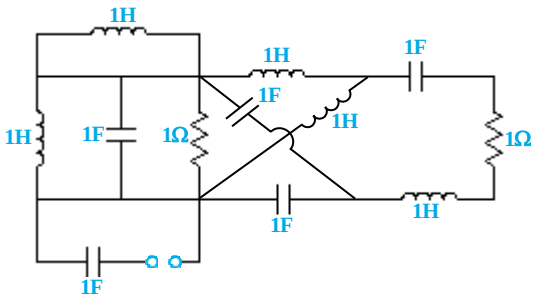
۱) $\begin{cases} i_6 - i_7 = 0 \\ i_6 + i_4 - i_8 - i_2 - i_5 = 0 \\ -i_7 - i_4 + i_8 + i_1 = 0 \\ i_2 - i_1 = 0 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} i_6 - i_2 - i_5 + i_1 - i_7 = 0 \\ i_6 + i_4 - i_8 - i_2 - i_5 = 0 \\ -i_7 - i_4 + i_8 + i_1 = 0 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} i_6 - i_7 = 0 \\ -i_5 - i_2 - i_8 - i_3 = 0 \\ i_2 - i_1 = 0 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} i_6 - i_7 = 0 \\ -i_5 - i_2 - i_8 - i_3 = 0 \\ i_6 - i_7 + i_3 + i_8 + i_1 + i_5 = 0 \\ -i_3 - i_8 - i_1 = 0 \end{cases}$

۳۰ـ در مدار زیر، مرتبه مدار و تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر به‌ترتیب کدام است؟



۱) ۷ و ۴
۲) ۸ و ۴
۳) ۸ و ۵
۴) ۹ و ۵