پاسخنامه آزمون خودسنجی فصل سوم

پاسخنامه آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۲» حداکثر تنش در تکیه‌گاه ایجاد شده و مقدار آن برابر است با:

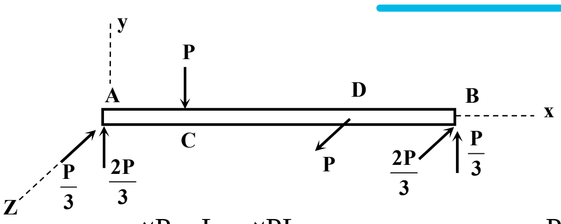
$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}C}{I}=\frac{۶M_{max}}{Ah}=\frac{۶(۱۲۰۰\times ۱۰\times ۰/۵)\times ۱۰^{۳}}{۴۰\times ۶۰\times ۶۰}$$

$$\Rightarrow \sigma_{max}=\frac{۳۶\times ۱۰^{۵}}{۱۴۴\times ۱۰^{۳}}=۲۵\,\text{MPa}$$

۲ـ گزینه «۳» انحنای یک تیر در محدوده‌ی ارتجاعی برابر است با:

$$\frac{۱}{\rho_{min}}=\frac{M_{max}}{EI}\Rightarrow \rho_{min}=\frac{EI}{\frac{PL}{۴}}=\frac{۴EI}{PL}$$

۳ـ گزینه «۳» در تیرهای تحت بار متمرکز لنگر خمشی ماکزیمم در زیر یکی از بارهای متمرکز اتفاق می‌افتد، در این تست مقدار لنگر خمشی ماکزیمم در زیر هر دو بار به وجود آمده و با یکدیگر تفاوتی نمی‌کند.

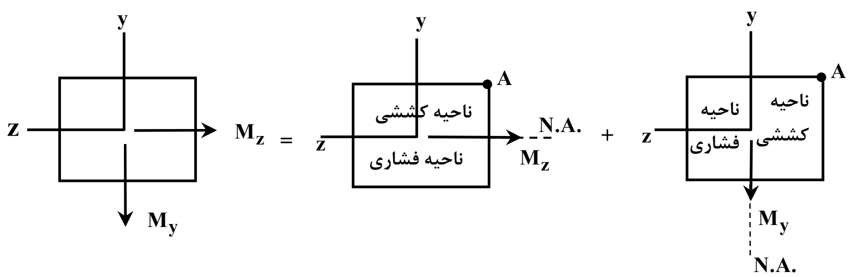


$$M_z=M_{۱}=\frac{۲P}{۳}\times\frac{L}{۳}=\frac{۲PL}{۹}\quad,\quad M_y=M_{۲}=\frac{P}{۳}\times\frac{L}{۳}=\frac{PL}{۹}$$

$$S_{۱}=S_{۲}=\frac{I}{C}=\frac{\frac{a^{۴}}{۱۲}}{\frac{a}{۲}}=\frac{a^{۳}}{۶}$$

$$\Rightarrow \sigma_{max}=\frac{M_{۱}}{S_{۱}}+\frac{M_{۲}}{S_{۲}}=\frac{\frac{۲PL}{۹}}{\frac{a^{۳}}{۶}}+\frac{\frac{PL}{۹}}{\frac{a^{۳}}{۶}}=\frac{۲PL}{a^{۳}}$$

در مقطع C دو لنگر خمشی در راستای y و z به ترتیب ناشی از نیروی $\frac{P}{۳}$ و $\frac{۲P}{۳}$ وجود دارد که این لنگرها تولید تنش خمشی در راستای x می‌کنند. همان‌طور که از شکل زیر قابل مشاهده است ماکزیمم تنش در نقطه A به وقوع پیوسته که ناشی از لنگرهای M_y و M_z تنش کششی در آن تولید می‌شود.



۴ـ گزینه «۳» بار به صورت غیر محوری بر ستون وارد شده، بنابراین ابتدا باید نیروی P را به مرکز سطح مقطع انتقال داده و سپس تنش ناشی از بار محوری و تنش ناشی از لنگر خمشی را در این دو نقطه محاسبه نمود.

$$\sigma_A=-\frac{P}{A}-\frac{MC}{I}=-\frac{P}{۲a^{۲}}-\frac{(Pa)a}{\frac{۱}{۱۲}a(۲a)^{۳}}=-\frac{P}{۲a^{۲}}-\frac{۳P}{۲a^{۲}}=-\frac{۴P}{۲a^{۲}}\Rightarrow \sigma_A=-۲\frac{P}{a^{۲}}\qquad(۱)$$

$$\sigma_B=-\frac{P}{A}+\frac{MC}{I}=-\frac{P}{۲a^{۲}}+\frac{۳}{۲}\frac{P}{a^{۲}}=\frac{P}{a^{۲}}\qquad(۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\left|\frac{\sigma_A}{\sigma_B}\right|=۲$$

۵ـ گزینه «۳» با توجه به توضیحات متن درس‌نامه (۲) ابعاد هسته مرکزی لوزی، $\frac{b}{۶}$ و $\frac{h}{۶}$ می‌باشد.

۶ـ گزینه «۱»

$$\sigma_{max}=\frac{MC}{I}=\frac{(۲\times ۳۰\times ۱۰۰)۵}{\frac{۱}{۱۲}[۱۰^۴-۷^۴]}=۴۷\,MPa$$

۷ـ گزینه «۱» طول تسمه بعد از خمش مساوی محیط دایره است. $(L=۲\pi R)$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$L=۲\pi\rho \quad ; \quad \varepsilon_{max}=\frac{c}{\rho}=\frac{\frac{a}{۲}}{\frac{L}{۲\pi}}=\frac{\pi a}{L}\Rightarrow \sigma_{max}=\sigma_y=E\varepsilon_{max}=E\frac{\pi a}{L}\Rightarrow \frac{L}{a}=\frac{\pi E}{\sigma_y}$$

۸ـ گزینه «۴» کرنش پیوسته، ولی تنش ناپیوسته است. چرا که کرنش در هر نقطه تابعی از موقعیت هندسی آن نقطه نسبت به تار خنثی است ولی تنش در هر نقطه علاوه بر موقعیت نقطه نسبت به تار خنثی به جنس قطعه در آن نقطه نیز بستگی دارد.

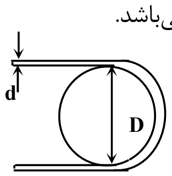
۹ـ گزینه «۳» تار خنثی همواره بین محور کوپل خمشی و محور ممان اینرسی حداقل قرار دارد.

۱۰ـ گزینه «۲» میله‌ای که تحت لنگر پیچشی قرار دارد در آن تنش برشی ایجاد می‌شود، اما در صفحاتی که با صفحه تنش برشی ماکزیمم زاویه ۴۵° تشکیل می‌دهند، تنش قائم ماکزیمم شده که مقدار این تنش با تنش برشی ماکزیمم برابر است. از طرفی رابطه بین I و J برای مقطع دایروی به قرار زیر است:

$$I=\frac{\pi}{۴}R^۴ \quad , \quad J=\frac{\pi}{۲}R^۴\Rightarrow J=۲I$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{در خمش}: \sigma_{max}=\sigma=\dfrac{MC}{I}\\ \text{در پیچش}: \sigma_{max}=\tau_{max}=\dfrac{TC}{J}=\dfrac{MC}{۲I}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\tau_{max\ \text{پیچش}}}{\sigma_{\text{خمش}}}=\frac{\tau_{max}}{\sigma}=\frac{\frac{MC}{۲I}}{\frac{MC}{I}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \tau_{max}=\frac{\sigma}{۲}$$

۱۱ـ گزینه «۴» شعاع انحنای سیم مساوی شعاع استوانه بوده و ماکزیمم فاصله مقطع سیم از تار خنثی مساوی شعاع سیم $\frac{d}{۲}$ می‌باشد.



$$\sigma_{max}=E\varepsilon_{max}=E\frac{c}{\rho}=E\times\frac{\frac{d}{۲}}{\frac{D}{۲}}=E\frac{d}{D}$$

۱۲ـ گزینه «۳» تنش ناشی از خمش در نقطه A کششی بوده که باید تنش فشاری ناشی از بار غیرمحوری را خنثی کند.

$$\sigma_A=-\frac{P}{A}+\frac{MC}{I}=-\frac{P}{A}+\frac{۶M}{Ah}=-\frac{۹۰۰۰}{۱۰۰\times ۶۰}+\frac{۶\times(۹۰۰۰x)}{(۱۰۰\times ۶۰)\times ۱۰۰}=۰\Rightarrow x=\frac{۱۰۰}{۶}=\frac{۵۰}{۳}mm$$

۱۳ـ گزینه «۲» با استفاده از رابطه‌ی $M'=M\times\frac{I'}{I}$ می‌توان مقدار لنگر تحمل شده توسط بخش هاشورخورده را به دست آورد.

$$I'=\frac{b'h'^۳}{۱۲}+A'd'^۲=\frac{b(\frac{b}{۳})^۳}{۱۲}+(b\times\frac{b}{۳})(\frac{۲b}{۳}+\frac{b}{۶})^۲=b^۴[\frac{۱}{۲۷\times ۱۲}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۲۵}{۳۶}]\Rightarrow I'=۰/۲۳۴۵b^۴ \qquad (۱)$$

$$I=\frac{b(۲b)^۳}{۱۲}=\frac{۲}{۳}b^۴=۰/۶۶۶b^۴ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\frac{M'}{M}=\frac{I'}{I}=\frac{۰/۲۳۴۵b^۴}{۰/۶۶۶b^۴}=۰/۳۵\Rightarrow \frac{M'}{M}\times ۱۰۰\simeq ۳۵\%$$

۱۴ـ گزینه «۲» گشتاور خمشی ماکزیمم در تیر ساده تحت بار گسترده یکنواخت مساوی $\frac{WL^2}{8}$ است.

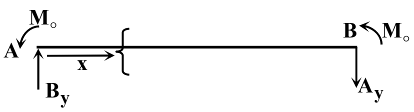
$$\sigma_{max} = \frac{MC}{I} = \frac{6M}{Ah} \Rightarrow 80 = \frac{6\times(\frac{650}{100}kg/cm \times \frac{(600)^2}{8})}{(b\times 1/2b)\times 1/2b} \Rightarrow b^3 = 15234/375 \Rightarrow b \simeq 24/79\ cm \Rightarrow h \simeq 29/75$$

$$\Rightarrow A = bh \simeq 737\ cm^2$$

۱۵ـ گزینه «۲» بارگذاری خارج از مرکز بوده، بنابراین تنش محوری در آن ناشی از بار P و لنگر خمشی است.

$$\sigma_{max} = -\frac{P}{A} - \frac{MC}{I} = -\frac{P}{a\times\frac{a}{2}} - \frac{(\frac{Pa}{4})\times\frac{a}{4}}{\frac{1}{12}\times a\times(\frac{a}{2})^3} = -\frac{2P}{a^2} - \frac{6P}{a^2} = -\frac{8P}{a^2}$$

۱۶ـ گزینه «۱» نیمه راست تیر نیمه بالایی تحت فشار و نیمه سمت چپ تحت کشش می‌باشد، در نتیجه مجموعاً هیچ گونه تغییر طولی در تار بالایی به وجود نمی‌آید. این مسئله را به روش تحلیلی نیز می‌توان حل نمود.



لنگر خمشی در یک مقطع دلخواه به فاصله x از ابتدای تیر مساوی است با:

$$M = B_y x - M_\circ = \frac{2M_\circ}{L}x - M_\circ \Rightarrow \sigma_x = \frac{MC}{I} \quad , \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{MC}{EI} = \frac{C}{EI}(\frac{2M_\circ}{L}x - M_\circ)$$

$$\Rightarrow \Delta L = \int_0^L \varepsilon_x dx \Rightarrow \Delta L = \frac{C}{EI}\int_0^L (\frac{2M_\circ}{L}x - M_\circ)dx = \frac{2M_\circ}{L}(\frac{x^2}{2}) - M_\circ x\Big|_0^L = M_\circ L - M_\circ L = 0$$

۱۷ـ گزینه «۱» حداکثر تنش خمشی در موقعیت تکیه‌گاهها رخ داده و مقدار آن برابر است با:

$$\sigma_{max} = \frac{MC}{I} = \frac{(15700\times150)100}{\frac{\pi}{64}(200)^4} \simeq 3\,MPa$$

۱۸ـ گزینه «۳» در تیر ساده تحت بار گسترده یکنواخت لنگر خمشی در وسط تیر ماکزیمم بوده که مقدار آن مساوی $\frac{qL^2}{8}$ می‌باشد.

$$\sigma_{max} = \frac{MC}{I} = \frac{6M}{Ah} = \frac{6\times\frac{8000\times4^2}{8}}{6\times10\times10\times10^{-6}} = 160\times10^6\ Pa = 160Mpa$$

۱۹ـ گزینه «۲» تغییر طول الیاف‌های طولی تیر با استفاده از انتگرال‌گیری از کرنش طولی تیر امکان‌پذیر است.

$$\delta = \int \varepsilon dx \Rightarrow \delta = \int \frac{\sigma}{E}dx = \int \frac{My}{EI}dx \Rightarrow \delta EI = \int M\times(5cm)dx \Rightarrow 0/5\times2\times10^6\times\frac{15\times20^3}{12} = 5\int_{100}^{300} Mdx \qquad (1)$$

y در رابطه فوق فاصله الیاف AB از تار خنثی می‌باشد.

مقدار لنگر خمشی در فاصله AB را می‌توان با برش زدن تیر در این فاصله و محاسبه لنگر خمشی داخلی به دست آورد.

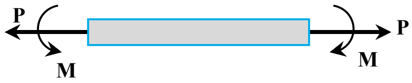
$$M = \frac{P}{2}x \overset{(1)}{\Rightarrow} 15\times8\times10^9 = 3\times5[Px^2]_{100}^{300} = P(90000-10000)\times15$$

$$P = \frac{8\times10^9}{80000} = 10^5\ kg.N \simeq 10^6\ N = 10^3\ kN$$

۲۰ـ گزینه «۲»

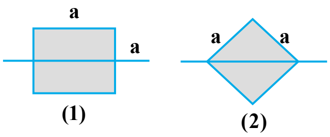
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \Rightarrow M = \frac{EI}{\rho} = \frac{200\times10^3\times\frac{1}{12}\times60\times6^3}{\frac{3000}{8}} = 576000\ N.mm = 576N.m$$

۲۱ـ گزینه «۲» نیروی P را به مرکز مقطع انتقال داده سپس از روش جمع آثار تنش‌ها را با هم جمع می‌کنیم. نقطه A تحت اثر نیروی P تحت کشش قرار گرفته اما لنگر خمشی آن را تحت فشار قرار می‌دهد.



$$\sigma_A=\frac{P}{A}-\frac{MC}{I}=\frac{40000}{\frac{\pi}{4}\times 50^2}-\frac{(40000\times 80)\times 25}{\frac{\pi}{64}\times 50^4}=-240/38\ \text{MPa}$$

۲۲ـ گزینه «۴» مقاومت خمشی مقطعی بیشتر است که دارای مدول مقطع بزرگ‌تری باشد. (ممان اینرسی دو مقطع نسبت به محور افقی یکسان است $I_2=I_1$)



$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{I_1}{C_1}}{\frac{I_2}{C_2}}=\frac{I_1}{I_2}\times\frac{C_2}{C_1}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow S_1>S_2$$

(همان طور که قبلاً نیز گفته شده، ممان اینرسی مقطع مربعی حول تمامی محورهای گذرنده از مرکز سطح برابر است.)

۲۳ـ گزینه «۳»

$$C=\frac{t}{2}\quad ;\quad \rho=R$$

$$\sigma_{max}=E\varepsilon_{max}=E\frac{C}{\rho}=2\times 10^6\times\frac{\frac{2}{2}}{10\times 100}=2\times 10^3\ \frac{kg}{cm^2}$$

۲۴ـ گزینه «۳» به توضیحات متن درس فصل سوم درسنامه (۴) تذکر ۲۲ رجوع شود.

۲۵ـ گزینه «۲» ارتفاع تمامی مقاطع یکسان است، مقطعی در برابر خمش مقاوم‌تر است که بیشترین توزیع جرم آن در حداکثر فاصله از تار خنثی باشد. در چنین حالتی اساس مقطع حداکثر خواهد بود، این حالت در گزینه ۲ اتفاق می‌افتد.

پاسخنامه آزمون (۲)

۱ــ گزینه «۲» حداکثر تنش خمشی در تیر ساده تحت بار گسترده‌ی یکنواخت برابر $\frac{qL^۲}{۸}$ می‌باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$M_{max}=\frac{qL^۲}{۸}=\frac{۱۰۰qb^۲}{۸}=۱۲/۵qb^۲$$

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}C}{I}=\frac{(۱۲/۵qb^۲)b}{\frac{b(۲b)^۳}{۱۲}}=\frac{۱۲\times ۱۲/۵}{۸}\frac{q}{b^۲}=\frac{۱۵۰q}{۸b^۲}\Rightarrow \sigma_{max}=۱۸/۷۵\frac{q}{b^۲}$$

۲ــ گزینه «۲»

$$A_۱=A_۲\Rightarrow ۲a^۲=\frac{\pi}{۴}D^۲\Rightarrow \frac{a^۲}{D^۲}=\frac{\pi}{۸}\Rightarrow \frac{a}{D}=\frac{\sqrt{\pi}}{۲\sqrt{۲}}$$

$$\left.\begin{aligned}S_۱&=\frac{۱}{۶}Ah=\frac{۱}{۶}Aa\\ S_۲&=\frac{۱}{۸}AD\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{S_۱}{S_۲}=\frac{\frac{۱}{۶}Aa}{\frac{۱}{۸}AD}=\frac{۴}{۳}\frac{a}{D}=\frac{۴}{۳}\frac{\sqrt{\pi}}{۲\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲\pi}}{۳}$$

۳ــ گزینه «۲» مقدار تنش ناشی از بار محوری و لنگر خمشی در نقطه‌ی A عبارت است از:

$$\sigma_A=-\frac{P}{A}-\frac{M_۱C_۱}{I_۱}+\frac{M_۲C_۲}{I_۱}$$

اما $M_۱=M_۲=P\frac{a}{۱۲}$ و $I_۱=I_۲$ و $C_۱=C_۲$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\sigma_A=-\frac{P}{a^۲}$$

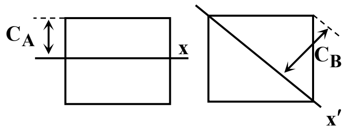
۴ــ گزینه «۲» چون میله تحت اثر لنگر خالص می‌باشد، تنش از رابطه مقابل محاسبه می‌شود:

$$\sigma=\frac{MC}{I}\Rightarrow M=\frac{\sigma I}{C}$$

مقطع (۲) مربعی است که نسبت به مقطع (۱)، ۴۵° دوران داشته است در چنین حالت خاصی از دوران، ممان اینرسی هر دو مقطع نسبت بـه تـار خنثی مساوی است. بنابراین: $I_۱=I_۲$.

$$\frac{M_۱}{M_۲}=\frac{C_۲}{C_۱}\times\frac{I_۱}{I_۲}=\frac{C_۲}{C_۱}=\frac{a\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{a}{۲}}\times ۱=\sqrt{۲}$$

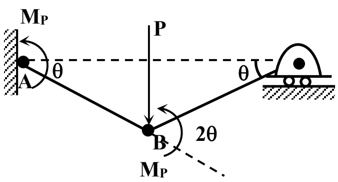
۵ــ گزینه «۲» با توجه به ثابت بودن مقدار خمش و ممان اینرسی مقدار تنش فقط به فاصله نقطه تا محور خنثی بستگی دارد.



$$\frac{\sigma_A}{\sigma_B}=\frac{M_A}{M_B}\times\frac{C_A}{C_B}\times\frac{I_B}{I_A}\Rightarrow \frac{\sigma_A}{\sigma_B}=\frac{C_A}{C_B}=\frac{\frac{a}{۲}}{\frac{a\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

ممان اینرسی مربع حول محور افقی x و حول قطرش یکسان است.

۶ــ گزینه «۲» چون تیر نامعین از درجه یک است برای ناپایداری تیر کافی است دو مفصل پلاسـتیک در طـول تیر در نقاط A و B ایجاد شود. (نقاط A, B نقاطی هستند که لنگر خمشی در آنها ماکزیمم است.)



رابطهٔ کار مجازی: $M_P\times ۲\theta+M_P\times\theta-P_u\frac{L}{۲}\times\theta=۰\Rightarrow P_u=\frac{۶M_P}{L}$

۷ـ گزینه «۳» طبق رابطه $\sigma_{max}=\frac{M}{S}$، حداکثر مقاومت خمشی مربوط به زمانی است که مدول مقطع ماکزیمم شود. $S=\frac{I}{C}=\frac{\frac{1}{12}uv^3}{\frac{v}{2}}=\frac{uv^2}{6}$

و اما طبق رابطه فیثاغورث $u^2+v^2=d^2$، در نتیجه $v^2=d^2-u^2$.

$$S=\frac{u(d^2-u^2)}{6}=\frac{ud^2}{6}-\frac{u^3}{6}\xrightarrow[\text{مشتق آن نسبت به u مساوی صفر شود}]{\text{برای آنکه S برحسب متغیر u ماکزیمم شود کافی است}}\frac{ds}{du}=0\Rightarrow\frac{d^2}{6}-\frac{u^2}{2}=0\Rightarrow u^2=\frac{d^2}{3}$$

$$\Rightarrow v^2=d^2-(\frac{d^2}{3})=\frac{2d^2}{3}\Rightarrow\frac{u^2}{v^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{u}{v}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۸ـ گزینه «۱» طبق فرض صورت مسئله تنش خمشی حداکثر در دو تیر برابر می‌باشد در نتیجه داریم:

$$\sigma_{max_1}=\sigma_{max_2}\Rightarrow\frac{M_{max_1}}{S_1}=\frac{M_{max_2}}{S_2}\xrightarrow{S_1=S_2}M_{max_1}=M_{max_2}\Rightarrow\frac{FL_1}{4}=FL_2\Rightarrow\frac{L_1}{L_2}=4$$

۹ـ گزینه «۳» بارگذاری خارج از مرکز بوده، بنابراین تنش ایجاد شده در ستون‌ها ناشی از بار محوری و لنگر خمشی است.

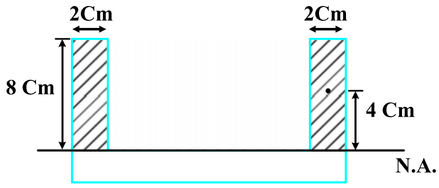
$$(\sigma_{max})_s=-\frac{P}{A}-\frac{MC}{I}=-\frac{P}{a^2}-\frac{6M}{bh^2}=-\frac{P}{a^2}-\frac{6P\times\frac{a}{2}}{a\times a^2}=-\frac{4P}{a^2}$$

$$(\sigma_{max})_C=-\frac{P}{A}-\frac{MC}{I}=-\frac{P}{\pi r^2}-\frac{Pr\times r}{\frac{1}{4}\pi r^4}=-\frac{P}{\pi r^2}-\frac{4P}{\pi r^2}=-\frac{5P}{\pi r^2}$$

از طرفی طبق فرض مسئله مساحت مقطع دو ستون با یکدیگر برابرند، در نتیجه: $a^2=\pi r^2$

$$\frac{(\sigma_{max})_s}{(\sigma_{max})_c}=\frac{-\frac{4P}{a^2}}{-\frac{5P}{\pi r^2}}=\frac{4}{5}\times\frac{\pi r^2}{a^2}=\frac{4}{5}$$

۱۰ـ گزینه «۱» در حالت پلاستیک کامل، تار خنثی سطح مقطع را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، در نتیجه مدول پلاستیک برابر است با:



$$Z=\sum Q_i=A_1\bar{y}_1+A_2\bar{y}_2$$

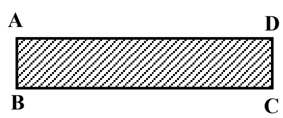
$$Z=(20\times80)(40)\times2+160\times20\times10\Rightarrow Z=160\times10^3\ mm^3$$

$$M_P=\sigma_y Z=400\times160\times10^3=64\times10^5\ N.mm$$

$$M_P=6400\,N.m$$

۱۱ـ گزینه «۴» ρ فاصله مرکز انحناء (مرکز پولی) تا تار خنثی می‌باشد. $\sigma_{max}=E\varepsilon_{max}=E\frac{c}{\rho}=E\times\frac{\frac{d}{2}}{r+\frac{d}{2}}=\frac{Ed}{2r+d}$

۱۲ـ گزینه «۲» تنش ماکزیمم مساوی تنش ناشی از خمش و تنش ناشی از نیروی محوری است. این تنش در روی لبه CD ناشی از هر دو عامل ذکر شده کششی است.



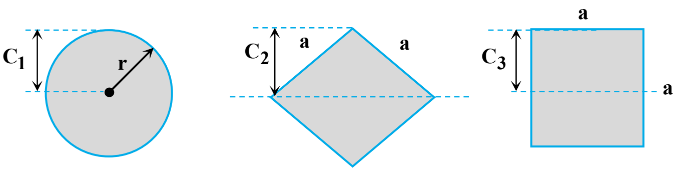
$$\sigma_{CD}=\sigma_{max}=\frac{F}{A}+\frac{MC}{I}\Rightarrow\sigma_{max}=\frac{500}{A}+\frac{(500\times12)\times\frac{a}{2}}{\frac{1}{12}\times b\times a^3}=$$

$$\frac{500}{A}+\frac{72\times500}{A\times a}=\frac{500}{A}+\frac{6\times500}{A}=\frac{7(500)}{A}$$

۱۳ـ گزینه «۲» برای تعیین شعاع انحنای تیر از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود:

$$\frac{۱}{\rho}=\frac{M}{EI}\Rightarrow \rho=\frac{E\times\frac{۱}{۱۲}a(۲a)^{۳}}{F\frac{a}{۲}}=\frac{۴}{۳}\frac{Ea^{۳}}{F}$$

۱۴ـ گزینه «۱» هر تیری که دارای مدول مقطع بزرگ‌تری است دیرتر به تسلیم می‌رسد. از طرفی چون وزن دو تیر یکسان است بنابراین مساحت سطح مقطع آن‌ها با هم برابر است در نتیجه: چون وزن تیرها برای دو مقطع یکسان است: $A_{۱}=A_{۲}=A_{۳}\Rightarrow \pi r^{۲}=a^{۲}\Rightarrow \frac{r}{a}=\frac{۱}{\sqrt{\pi}}$



(1) (2) (3)

$$\frac{S_{۱}}{S_{۲}}=\frac{I_{۱}}{I_{۲}}\times\frac{C_{۲}}{C_{۱}}=\frac{\frac{\pi}{۴}r^{۴}}{\frac{a^{۴}}{۱۲}}\times\frac{\frac{a\sqrt{۲}}{۲}}{r}$$

$$\frac{S_{۱}}{S_{۲}}=\frac{۳\pi\sqrt{۲}}{۲}\frac{r^{۳}}{a^{۳}}=\frac{۳\pi\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{۱}{\sqrt{\pi}}\right)^{۳}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲\sqrt{\pi}}=۱/۱۹۶>۱ \qquad (۱)$$

$$\frac{S_{۳}}{S_{۲}}=\frac{I_{۳}}{I_{۲}}\times\frac{C_{۲}}{C_{۳}}\xrightarrow[\text{افقی گذرنده از مرکز سطح یکسان است}]{\text{ممان اینرسی مربع حول قطر و حول ضلع}}\frac{S_{۳}}{S_{۲}}=\frac{C_{۲}}{C_{۳}}\Rightarrow\frac{S_{۳}}{S_{۲}}=\frac{a\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{a}{۲}}=\sqrt{۲}>۱ \qquad (۲)$$

از ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که مدول مقطع برای حالت ۲ از همه کمتر است، پس تیر با این مقطع زودتر تسلیم می‌شود.

۱۵ـ گزینه «۳» در این حالت بردار لنگر خمشی در راستای محور اصلی نبوده، در نتیجه تغییر مکان در هر دو راستای y و z دارای مؤلفه است.

۱۶ـ گزینه «۱» به پاسخ تشریحی مثال ۱۳ مراجعه شود.

طبق رابطه $\sigma_{max}=\frac{M}{S}$، حداکثر مقاومت خمشی مربوط به زمانی است که مدول مقطع ماکزیمم شود.

$$S=\frac{I}{C}=\frac{\frac{۱}{۱۲}uv^{۳}}{\frac{v}{۲}}=\frac{uv^{۲}}{۶}$$

و اما طبق رابطه فیثاغورث $u^{۲}+v^{۲}=d^{۲}$، در نتیجه $v^{۲}=d^{۲}-u^{۲}$.

$$S=\frac{u(d^{۲}-u^{۲})}{۶}=\frac{ud^{۲}}{۶}-\frac{u^{۳}}{۶}\xrightarrow[\text{مشتق آن نسبت به u مساوی صفر شود}]{\text{برای آنکه S برحسب متغیر u ماکزیمم شود کافی است}}\frac{ds}{du}=۰\Rightarrow\frac{d^{۲}}{۶}-\frac{u^{۲}}{۲}=۰\Rightarrow u^{۲}=\frac{d^{۲}}{۳}$$

$$\Rightarrow v^{۲}=d^{۲}-\left(\frac{d^{۲}}{۳}\right)=\frac{۲d^{۲}}{۳}\Rightarrow\frac{v^{۲}}{u^{۲}}=۲\Rightarrow\frac{v}{u}=\sqrt{۲}$$

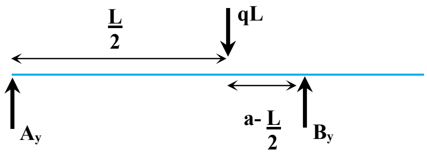
۱۷ـ گزینه «۴» در نقطه‌ای تنش برشی حداکثر وجود دارد که تنش قائم آن بزرگ‌تر باشد و در نقطه B تنش قائم فشاری ناشی از نیروی محوری و لنگر خمشی حداکثر است. (این مسئله را می‌توان با توجه به دایره مور نیز استنباط کرد.)

۱۸ـ گزینه «۴» ممان اینرسی مقطع مرکب را با استفاده از قضیه انتقال محورها می‌توان محاسبه نمود.

$$S=\frac{I}{C}=\frac{۱}{\frac{۵h}{۴}}\times\left\{۲\times\frac{۱}{۱۲}\times۲/۲۵h\times\left(\frac{h}{۴}\right)^{۳}+۲\times\left(۲/۲۵h\times\frac{h}{۴}\right)\times\left(h+\frac{h}{۸}\right)^{۲}+\frac{۱}{۱۲}\times\frac{h}{۴}\times(۲h)^{۳}\right\}$$

$$S=\frac{۴}{۵}\left\{\frac{۴/۵\,h^{۳}}{۷۶۸}+\frac{۳۶۴/۵h^{۳}}{۲۵۶}+\frac{h^{۳}}{۶}\right\}=۱/۲۷۷h^{۳}\Rightarrow h^{۳}=\frac{۲۷۰}{۱/۲۷۷}\Rightarrow h^{۳}=۲۱۱/۴۳۳\Rightarrow h=۵/۹۵۷\,cm$$

۱۹ـ گزینه «۱»



$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow -aA_y + qL(a-\frac{L}{۲}) = ۰$$

$A_y = \dfrac{qL(a-\frac{L}{۲})}{a}$; تنش خمشی در فاصله x از تکیه‌گاه A: $M = A_y x - \dfrac{qx^۲}{۲}$ (۱)

برای حل مسئله، باید ممان‌های خمشی ماکزیمم در تیر با هم برابر باشند.

در دو موقعیت ممان در تیر اکسترمم خواهد شد. اولین موقعیت آن به طریق زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{dM}{dx} = ۰ \Rightarrow A_y - qx = ۰ \xrightarrow{(۱)} x = \frac{A_y}{q} \Rightarrow M_{max۱} = \frac{A_y^۲}{q} - \frac{A_y^۲}{۲q} = \frac{A_y^۲}{۲q}$$

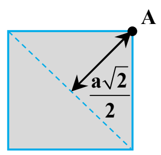
و دومین موقعیت در تکیه‌گاه B می‌باشد.

$$M_{max۲} = \frac{qb^۲}{۲} \;;\; M_{max۱} = M_{max۲} \Rightarrow \frac{A_y^۲}{۲q} = \frac{qb^۲}{۲} \Rightarrow b^۲ = \frac{A_y^۲}{q^۲} \Rightarrow b = \frac{A_y}{q} = \frac{L}{a}(a-\frac{L}{۲}) \qquad (۲)$$

$$a = L-b \xrightarrow{(۲)} b = \frac{L}{L-b}(\frac{L}{۲}-b) \Rightarrow Lb - b^۲ = \frac{L^۲}{۲} - Lb \Rightarrow b^۲ - ۲Lb + \frac{L^۲}{۲} = ۰ \Rightarrow b = L - L\frac{\sqrt{۲}}{۲} \simeq ۰/۳L$$

۲۰ـ گزینه «۳» تنش خمشی در یک تیر با مدول مقطع تیر نسبت عکس دارد اگر ابعاد مقطع α برابر شود مدول مقطع $\alpha^۳$ برابر شده بنابراین تنش خمشی ماکزیمم $\dfrac{۱}{\alpha^۳}$ برابر می‌شود.

۲۱ـ گزینه «۳» در اثر انتقال نیروی P از رأس مقطع به مرکز، لنگری مساوی $Pa\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ ایجاد می‌شود. در نتیجه تنشی ناشی از این لنگر برابر است با:

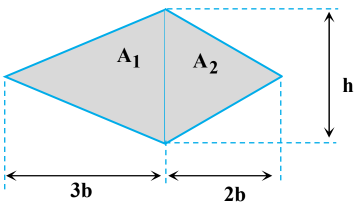


$$\left.\begin{array}{l} \text{(سهم تنش خمشی)}\,\sigma_A = \dfrac{MC}{I} \Rightarrow \sigma_A = \dfrac{M \times \frac{a\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{a^۴}{۱۲}} = \dfrac{۶\sqrt{۲}\,M}{a^۳} = \dfrac{۶\sqrt{۲}}{a^۳} \times \dfrac{Pa\sqrt{۲}}{۲} = \dfrac{۶P}{a^۲} \\ \sigma_{max} = \dfrac{MC}{I} + \dfrac{P}{A} = \dfrac{۶P}{a^۲} + \dfrac{P}{a^۲} = \dfrac{۷P}{a^۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sigma_A}{\sigma_{max}} = \frac{۶}{۷}$$

۲۲ـ گزینه «۳»

$$\left.\begin{array}{l} (\sigma_{max})_۱ = \dfrac{MC}{I} = \dfrac{Mr}{\frac{\pi}{۴}r^۴} = \dfrac{۴M}{Ar} \\ \left.\begin{array}{l} L \to ۹L \xrightarrow{\text{با نه برابر شدن طول بازو، مقدار گشتاور نیز نه برابر می‌شود}} M \to ۹M \\ A \to ۹A \;\Rightarrow r \to ۳r \end{array}\right\} \Rightarrow (\sigma_{max})_۲ = \dfrac{۴ \times ۹M}{۹A \times ۳r} = \dfrac{۴M}{۳Ar} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(\sigma_{max})_۲}{(\sigma_{max})_۱} = \frac{۱}{۳}$$

۲۳ـ گزینه «۲»

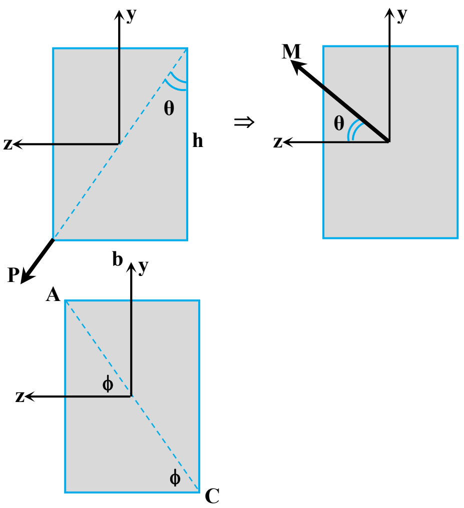


$$n=\frac{E_{۱}}{E_{۲}}=۳$$

در نتیجه ارتفاع مثلث (۱) موازی تار خنثی، یعنی در راستای افقی سه برابر می‌شـود. از طرفـی میـزان لنگـر تحمل شده توسط مقطع، ارتباط مستقیم با مدول مقطع (S) دارد. مدول مقطع نیز وابسته به مساحت سطح مقطع و ارتفاع سطح در راستای عمود بر M است چون ارتفاع تغییر نکرده در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{M_{۱}}{M_{۲}}=\frac{S_{۱}}{S_{۲}}=\frac{A_{۱}}{A_{۲}}=\frac{۳b\frac{h}{۲}}{۲b\frac{h}{۲}}=\frac{۳}{۲}$$

۲۴ـ گزینه «۲» لنگر M ناشی از نیروی P بر بردار P عمود بوده و در سطح yz واقع است.



اگر زاویه ϕ تار خنثی با محور z باشد، آنگاه می‌توان مقدار ϕ را توسط رابطه زیر به دست آورد:

$$\tan\phi=\frac{I_z}{I_y}\tan\theta\Rightarrow\tan\phi=\frac{\frac{bh^{۳}}{۱۲}}{\frac{hb^{۳}}{۱۲}}\times\frac{b}{h}\Rightarrow\tan\phi=\frac{h}{b}$$

چون $\tan\phi$ مساوی $\frac{h}{b}$ شده است، در نتیجه تار خنثی بر قطر AC منطبق است.

۲۵ـ گزینه «۳» ماکزیمم تنش خمشی تیر در وسط آن ایجاد می‌شود. در این موقعیت لنگر خمشی حداکثر شده که مقدار آن برابر است با:

$$M_{max}=۱۰۰۰\times۲-۱۰۰۰\times۱\times\frac{۱}{۲}=۱۵۰۰\,N.m=۱۵\times۱۰^{۵}\ N.mm$$

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}C}{I}=\frac{۶M_{max}}{Ah}=\frac{۶\times۱۵\times۱۰^{۵}}{(۲۵\times۵۰)۵۰}=۱۴۴\,MPa$$

پاسخنامه آزمون (۳)

۱ـ گزینه «۳» در یک فاصله x از انتهای آزاد تیر لنگر خمشی برابر است با:

$$M=Fx$$

از طرفی تنش خمشی حداکثر برابر است با:

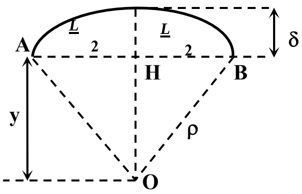
$$\sigma_{max}=\frac{M}{S}=\frac{۶M}{Ah}=\frac{۶Fx}{bh^{۲}}\Rightarrow h=\sqrt{\frac{۶Fx}{b\sigma_{۰}}} \qquad (۱)$$

اما در تکیه‌گاه ارتفاع مقطع برابر h_B می‌باشد در نتیجه رابطه بالا به صورت مقابل تبدیل می‌شود:

$$h_B=\sqrt{\frac{۶FL}{b\sigma_{۰}}} \qquad (۲)$$

از تقسیم روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{h}{h_B}=\sqrt{\frac{x}{L}}\Rightarrow h=h_B\sqrt{\frac{x}{L}}$$



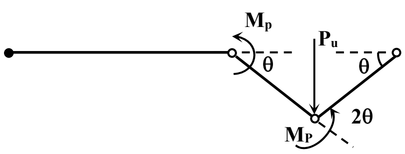
۲ـ گزینه «۳» لنگر خمشی در فاصله بین دو تکیه‌گاه ثابت بوده بنابراین شعاع انحناء در این محدوده ثابت است.

$$\delta=\rho-OH=\rho-y\Rightarrow\delta=\rho-\sqrt{\rho^{۲}-\frac{L^{۲}}{۴}}\Rightarrow\delta=\rho-\frac{۱}{۲}\sqrt{۴\rho^{۲}-L^{۲}}$$

۳ـ گزینه «۲» حداکثر تنش در میلگردهای فولادی و بتن تقویت شده به ترتیب برابر است با:

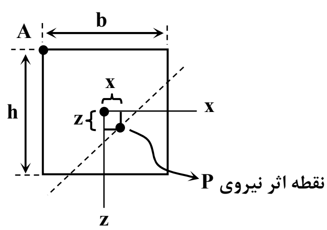
$$\sigma_s=n\frac{M(d-x)}{I}\quad;\quad\sigma_c=\frac{Mx}{I}$$

$$\Rightarrow\frac{\sigma_s}{\sigma_c}=\frac{n(d-x)}{x}=n\frac{d}{x}-۱=\frac{E_s}{E_c}\frac{d}{x}-۱\Rightarrow\frac{d}{x}=۱+\frac{E_c}{E_s}\frac{\sigma_s}{\sigma_c}\Rightarrow x=\frac{d}{۱+\frac{E_c}{E_s}\frac{\sigma_s}{\sigma_c}}$$



۴ـ گزینه «۲» تیر نامعین از درجه یک می‌باشد و برای ناپایداریش ایجاد دو مفصل پلاستیک لازم است،
دو مفصل در نقاط B و D که دارای ماکزیمم لنگر خمشی می‌باشند اتفاق می‌افتد.

$$P_u\times\frac{L}{۲}\theta=M_P\times۲\theta+M_P\times\theta\Rightarrow P_u=\frac{۶M_P}{L}$$

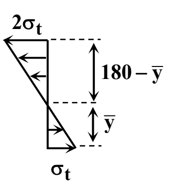


۵ـ گزینه «۳» در صورتی که نقطه اثر نیروی P با مبداء مختصات فواصل x, y داشته باشد آنگاه تنش در نقطه A مساوی است با:

$$\sigma_A=-\frac{P}{A}+\frac{(Px)\frac{b}{۲}}{\frac{۱}{۱۲}b^{۳}h}+\frac{(Pz)\frac{h}{۲}}{\frac{۱}{۱۲}h^{۳}b}=۰$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{bh}=\frac{۶x}{hb^{۲}}+\frac{۶z}{bh^{۲}}\Rightarrow\frac{۱}{۶}=\frac{x}{b}+\frac{z}{h}\xrightarrow{b=h}x+z=\frac{b}{۶}$$

توجه شود که تنش ناشی از لنگر خمشی در نقطه A از طریق قاعدهٔ دست راست تعیین علامت شده است.



۶ـ گزینه «۱» از توزیع تنش‌ها و با استفاده از قانون تشابه مثلث‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{۱۸۰-\bar{y}}{\bar{y}}=\frac{۲\sigma_t}{\sigma_t}\Rightarrow۱۸۰-\bar{y}=۲\bar{y}\Rightarrow۳\bar{y}=۱۸۰\Rightarrow\bar{y}=۶۰\ \text{cm}$$

$$\bar{y}=\frac{\sum A_iy_i}{\sum A_i}\Rightarrow\bar{y}=۶۰=\frac{۱۸۰\times b\times۹۰-۱۶۲\times۱۸(۱۶+\frac{۱۶۲}{۲})}{۱۸۰b-۱۶۲\times۱۸}\Rightarrow b\simeq۲۰\ \text{cm}$$

۷ـ گزینه «۱» لنگر خمشی در تکیه‌گاه سمت چپ ماکزیمم می‌شود و مقدار آن مساوی است با:

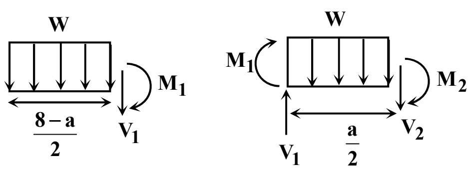
$$M_{max} = F\times ۱۰۰ = ۱۰۰F \quad kg.cm$$

$$\sigma_{max} = \frac{MC}{I} = \frac{۶M}{Ah} = \frac{۶\times ۱۰۰F}{(۲۰\times ۱۲)\times ۲۰} = ۰/۱۲۵F$$

چون ماکزیمم تنش کششی کوچکتر است، بنابراین برای محاسبه نیروی مجاز F از مقدار آن استفاده می‌شود.

$$۰/۱۲۵F = ۴۰ \Rightarrow F = ۳۲۰\,kg$$

۸ـ گزینه «۴» در صورتی لنگر خمشی ماکزیمم در تیر در حد ممکن کوچک خواهد بود که لنگر خمشی منفی در تکیه‌گاه مساوی لنگر خمشی مثبت در وسط تیر باشد. با برش زدن در روی تکیه‌گاه A و در وسط تیر و نوشتن معادله گشتاور، لنگر داخلی در تکیه‌گاه و وسط تیر بدست می‌آید، توجه شود که لنگر ناشی از بار گسترده w در تیر یکسر گیردار به طول L برابر $\frac{wL^۲}{۲}$ می‌باشد:



$$M_۱ = \frac{w(\frac{۸-a}{۲})^۲}{۲} = \frac{w(۸-a)^۲}{۸} \quad \text{در تکیه‌گاه A}$$

در بارگذاری متقارن نیروی برشی در وسط تیر مساوی صفر است بنابراین: $V_۲ = ۰$

$$M_۲ = \frac{w(\frac{a}{۲})^۲}{۲} - M_۱ = \frac{wa^۲}{۸} - \frac{w(۸-a)^۲}{۸} \quad \text{در وسط تیر}$$

$$M_۱ = M_۲ \Rightarrow \frac{w(۸-a)^۲}{۸} = \frac{wa^۲}{۸} - \frac{w(۸-a)^۲}{۸} \Rightarrow \frac{w(۸-a)^۲}{۴} = \frac{wa^۲}{۸}$$

$$\Rightarrow (۸-a)^۲ = \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow ۸-a = \frac{a}{\sqrt{۲}} \Rightarrow a(۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}) = ۸ \Rightarrow a = ۴/۷\ m$$

۹ـ گزینه «۱» برای تهیه تیری با بالاترین مقاومت خمشی کافی است مدول مقطع تیر ماکزیمم باشد.

$$S = \frac{I}{C} = \frac{\frac{bh^۳}{۱۲}}{\frac{h}{۲}} = \frac{bh^۲}{۶} = \frac{b}{۶}(d^۲-b^۲) = \frac{bd^۲}{۶} - \frac{b^۳}{۶} \Rightarrow \frac{ds}{db} = ۰ \Rightarrow \frac{d^۲}{۶} - \frac{b^۲}{۶} = ۰ \Rightarrow b = \frac{d}{\sqrt{۳}}$$

۱۰ـ گزینه «۲» رابطه‌ی بین M_y و ρ_y در آغاز تسلیم به صورت مقابل می‌باشد: $\frac{۱}{\rho_y} = \frac{M_y}{EI}$

در محدوده‌ی الاستیک پلاستیک رابطه‌ی بین M و M_y به صورت زیر می‌باشد:

$$M = \frac{۳}{۲}M_y(۱-\frac{۱}{۳}\frac{\rho^۲}{\rho_y^۲}) \Rightarrow ۱/۲۵M_y = \frac{۳}{۲}M_y(۱-\frac{۱}{۳}\frac{\rho^۲}{\rho_y^۲}) \Rightarrow \frac{۵\times ۲}{۴\times ۳} = ۱-\frac{۱}{۳}(\frac{\rho}{\rho_y})^۲ \Rightarrow (\frac{\rho}{\rho_y})^۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_y} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۱ـ گزینه «۲» گشتاور پلاستیک M_P برابر حاصلضرب مدول پلاستیک در تنش تسلیم است.

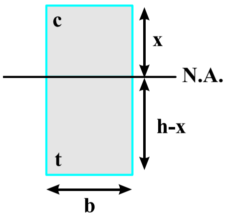
$$M_P = \sigma_y Z = \sigma_y \sum A_i \bar{y}_i = ۲۴۰۰(۰/۳\times ۰/۱\times ۰/۰۵ + ۰/۳\times ۰/۱\times ۰/۱۵) \Rightarrow M_P = ۱۴/۴\,kg.m$$

۱۲ـ گزینه «۱» اگر E_t را به عنوان مدول مبنا در نظر گرفته و n را برابر $\frac{E_c}{E_t}$ تعریف نماییم خواهیم داشت:

$$(\sum Q_i)_{N.A.}=0 \Rightarrow (nbx)\frac{x}{2}-b(h-x)\frac{h-x}{2}=0 \Rightarrow nx^2=(h-x)^2 \Rightarrow x=\frac{h}{\sqrt{n}+1} \Rightarrow h-x=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}h$$

و اما ممان اینرسی مقطع تبدیل یافته حول تار خنثی برابر است با:

$$I_t=n(\frac{bx^3}{3})+\frac{b(h-x)^3}{3}=[\frac{n}{3}(\frac{1}{\sqrt{n}+1})^3+(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1})^3]bh^3 \Rightarrow I_t=\frac{1}{3}\frac{n}{(\sqrt{n}+1)^2}bh^3$$



از طرفی شعاع انحنای تیر برابر است با:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{E_tI_t}=\frac{M}{E_rI} \Rightarrow E_r=\frac{E_tI_t}{I}$$

در رابطه‌ی بالا $I=\frac{bh^3}{12}$ می‌باشد.

$$E_r=\frac{12}{bh^3}E_t\frac{n}{3(\sqrt{n}+1)^2}bh^3=\frac{4E_tE_c}{E_t(\sqrt{\frac{E_c}{E_t}}+1)^2}=\frac{4E_tE_c}{(\sqrt{E_c}+\sqrt{E_t})^2}$$

در نهایت شعاع انحنای تیر برابر است با:

$$\rho=\frac{4E_tE_c}{(\sqrt{E_t}+\sqrt{E_c})^2}\frac{I}{M}$$

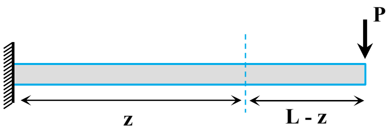
۱۳ـ گزینه «۲» در ابتدا حداکثر لنگر خمشی در تیر محاسبه می‌شود. M_{max} در وسط تیر برابر است با:

$$M_{max}=\frac{q_0L}{2}\times L-\frac{q_0L}{2}\times\frac{2L}{3}=\frac{q_0L^2}{6}$$

اکنون مقدار تنش خمشی ماکزیمم برابر است با:

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}C}{I}=\frac{6M_{max}}{Ah}=\frac{6\frac{q_0L^2}{6}}{a^3}=\frac{q_0L^2}{a^3}=\frac{100q_0}{a}$$

۱۴ـ گزینه «۳»



$$\left.\begin{array}{l} \text{از طرفی } \sigma=\frac{My}{I} \\ M=P(L-z)\end{array}\right\} \Rightarrow \sigma=\frac{P(L-z)y}{\frac{\pi}{4}R^4} \qquad (1)$$

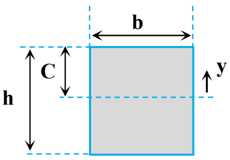
$$\text{طبق فرض مسئله } \sigma=k(L-z)y \qquad (2)\xrightarrow{(2),(1)} k=\frac{4}{\pi}\frac{P}{R^4}$$

۱۵ـ گزینه «۴»

$$\left\{\begin{array}{l} S_I=\frac{I_1}{C_1}=\frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{a}{2}}=\frac{a^3}{6} \\ S_{II}=\frac{I_2}{C_2}=\frac{2[\frac{1}{12}a\times a^3]}{a}=\frac{a^3}{6}\end{array}\right. \Rightarrow S_I=S_{II}$$

۱۶ـ گزینه «۳» k برای لوله جدار نازک برابر $\frac{4}{\pi}$ می‌باشد.

۱۷ـ گزینه «۱»



$$\varepsilon=\frac{y}{\rho}\quad ;\quad \varepsilon=k\sigma^{n}\Rightarrow \sigma=\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{\frac{۱}{n}}=\left(\frac{y}{\rho k}\right)^{\frac{۱}{n}}$$

$$M=\int ydF=\int y\sigma dA=۲\int_{۰}^{C}y\left(\frac{y}{\rho k}\right)^{\frac{۱}{n}}(bdy)\Rightarrow M=\frac{۲nb}{۲n+۱}\frac{C^{۲+\frac{۱}{n}}}{(\rho k)^{\frac{۱}{n}}}=\frac{۲nb}{۲n+۱}\times C^{۲}\times\left(\frac{C}{\rho k}\right)^{\frac{۱}{n}}=\frac{۲nbC^{۲}}{۲n+۱}\sigma_{max}$$

$$\Rightarrow \sigma_{max}=\frac{۲n+۱}{۲n}\frac{M}{bC^{۲}}\ (۱)\ ;\quad I=\frac{bh^{۳}}{۱۲}=\frac{b}{۱۲}\times(۲C)^{۳}=\frac{۲}{۳}bC^{۳}\Rightarrow bC^{۲}=\frac{۳}{۲}\frac{I}{C}\xrightarrow{(۱)}\sigma_{max}=\frac{۲n+۱}{۲n}\times\frac{M}{\frac{۳}{۲}\frac{I}{C}}$$

$$\Rightarrow \sigma_{max}=\frac{۲n+۱}{۳n}\frac{MC}{I}$$

۱۸ـ گزینه «۳» حتی اگر رابطه تنش و کرنش غیرخطی باشد، اما باز هم رابطه کرنش و شعاع انحناء همواره مساوی $\varepsilon=\frac{C}{\rho}$ است.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{۱}&=E\varepsilon_{۱}^{۲}=E\frac{C^{۲}}{\rho_{۱}^{۲}}\\ \sigma_{۲}&=E\varepsilon_{۲}^{۲}=E\frac{C^{۲}}{\rho_{۲}^{۲}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \sigma=\sigma_{۱}+\sigma_{۲}\Rightarrow E\frac{C^{۲}}{\rho^{۲}}=E\frac{C^{۲}}{\rho_{۱}^{۲}}+E\frac{C^{۲}}{\rho_{۲}^{۲}}\Rightarrow\frac{۱}{\rho^{۲}}=\frac{۱}{۶^{۲}}+\frac{۱}{۸^{۲}}\Rightarrow\rho=۴/۸\ m$$

۱۹ـ گزینه «۲» در صورتی که ω وزن در واحد طول باشد، آنگاه لنگر خمشی در تیر متناسب با $\omega L^{۲}$ است، از طرفی وزن واحد طول متناسب با سطح مقطع تیر بوده، اگر تمامی ابعاد سطح مقطع α برابر شود، آنگاه تغییرات ω متناسب با $\alpha^{۲}$ خواهد بود، بنابراین:

$$\frac{\sigma_{۲}}{\sigma_{۱}}=\frac{M_{۲}}{M_{۱}}\times\frac{C_{۲}}{C_{۱}}\times\frac{I_{۱}}{I_{۲}}=\frac{\omega_{۲}}{\omega_{۱}}\times\frac{L_{۲}^{۲}}{L_{۱}^{۲}}\times\frac{C_{۲}}{C_{۱}}\times\frac{I_{۱}}{I_{۲}}=\alpha^{۲}\times\alpha^{۲}\times\alpha\times\frac{۱}{\alpha^{۴}}=\alpha$$

۲۰ـ گزینه «۲» اگر وزن کل تیر مساوی W در نظر گرفته شود، آنگاه:

$$M_{a-a}=W\times\frac{L}{۳}$$

$$h_{۱}=\frac{h}{۲}\ ,\ w=\gamma V\ ,\ V=\frac{۱}{۲}AL\ ,\ W=\frac{۱}{۲}\times ht\times L\ ,\ W_{b-b\ \text{سمت راست}}=\frac{۱}{۲}h_{۱}t\times\frac{L}{۲}=\frac{۱}{۲}\times\left(\frac{h}{۲}\right)t\times\frac{L}{۲}=\frac{W_{\text{کل}}}{۴}$$

وزن سمت راست مقطع b_b مساوی یک چهارم وزن کل میله است به دلیل آن که مساحت مقطع سمت راست b-b یک چهارم مساحت کل مثلث است.

در نتیجه:

$$M_{b-b}=\frac{W}{۴}\times\frac{L/۲}{۳}=\frac{WL}{۲۴}$$

اگر t عرض مقطع در طول تیر باشد، آنگاه:

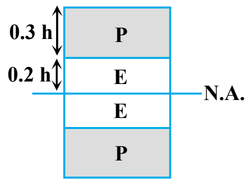
$$S=\frac{I}{C}=\frac{۱}{۶}Ah$$

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_{max})_{a-a}&=\frac{M_{a-a}}{S_{a-a}}=\frac{\frac{WL}{۳}}{\frac{th^{۲}}{۶}}=\frac{۲WL}{th^{۲}}\\ (\sigma_{max})_{b-b}&=\frac{M_{b-b}}{S_{b-b}}=\frac{\frac{WL}{۲۴}}{\frac{t}{۶}\left(\frac{h}{۲}\right)^{۲}}=\frac{WL}{th^{۲}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow(\sigma_{max})_{a-a}=۲(\sigma_{max})_{b-b}$$

۲۱ـ گزینه «۳» تغییر طول تار فوقانی تیر با استفاده از کرنش طولی در طول تار فوقانی به دست می‌آید:

$$\delta=\int\varepsilon_x dx=\int\frac{\sigma_x}{E}dx=\int\frac{MC}{EI}dx=\frac{C}{EI}\int Mdx=\frac{\frac{a}{۲}}{E\frac{a^۴}{۱۲}}\int_۰^L\frac{Wx^۲}{۲}dx=\frac{۶}{Ea^۳}\times\frac{W}{۲}[\frac{x^۳}{۳}]_۰^L=\frac{WL^۳}{Ea^۳}=\frac{۱۰۰۰W}{E}$$

۲۲ـ گزینه «۴» چون ۶۰ درصد مقطع پلاستیک شده است، بنابراین ۴۰ درصد آن هنوز الاستیک می‌باشد به عبارت دیگر به اندازه $۰/۴h$ از ارتفاع همچنان در ناحیه الاستیک قرار دارد. بنابراین:



شعاع هسته الاستیک $y_y=۰/۲h$

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_y=\dfrac{y_y}{\rho}\Rightarrow\rho=\dfrac{y_y}{\varepsilon_y}\\ \text{از طرفی}:\ \varepsilon_y=\dfrac{\sigma_y}{E}\end{array}\right\}\Rightarrow\rho=\frac{۰/۲hE}{\sigma_y}$$

۲۳ـ گزینه «۲»

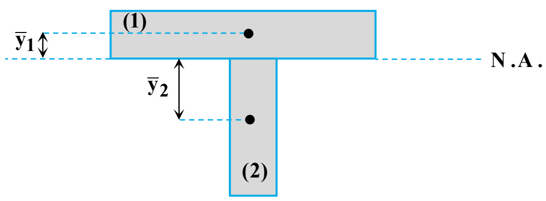
$$\frac{\sigma_{max۲}}{\sigma_{max۱}}=\frac{n\frac{Mh_۲}{I}}{\frac{Mh_۱}{I}}=n\frac{h_۲}{h_۱}\quad(۱)\qquad(n=\frac{E_۲}{E_۱})$$

تار خنثی از مرکز سطح مقطع گسترش یافته می‌گذرد، در نتیجه گشتاور اول سطح حول تار خنثی باید مساوی صفر باشد. چون در صورت مسئله اشاره شده است که محور خنثی بر فصل مشترک منطبق است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$nA_۲\bar{y}_۲=A_۱\bar{y}_۱\Rightarrow n(bh_۲)\frac{h_۲}{۲}=bh_۱\times\frac{h_۱}{۲}\Rightarrow nh_۲^۲=h_۱^۲\Rightarrow\frac{h_۲}{h_۱}=\frac{۱}{\sqrt{n}}\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow\frac{\sigma_{max۲}}{\sigma_{max۱}}=\frac{h_۱^۲}{h_۲^۲}\times\frac{h_۲}{h_۱}=\frac{h_۱}{h_۲}=\sqrt{n}=\sqrt{\frac{E_۲}{E_۱}}$$

۲۴ـ گزینه «۲» تار خنثی در حالت پلاستیک کامل از موقعیتی عبور می‌کند که سطح مقطع کل را به دو مساحت مساوی تفکیک نماید. در این مسئله محل اتصال دو مقطع مستطیل محل عبور تار خنثی است. از طرفی:



$$M_P=\sigma_y\sum Q_i\Rightarrow M_P=\sigma_y(A_۱\bar{y}_۱+A_۲\bar{y}_۲)$$

$$\Rightarrow M_P=\sigma_y bh(\frac{b}{۲}+\frac{h}{۲})=\frac{bh}{۲}\sigma_y(b+h)$$

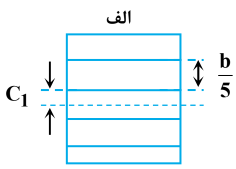
۲۵ـ گزینه «۳» اگر تیغه‌ها به هم چسبانیده شوند آنگاه در هر دو حالت تیری واحد تشکیل می‌دهند. از طرفی مقاومت خمشی در آن مقطعی بالاتر است که مدول مقطع بزرگ‌تری داشته باشد.

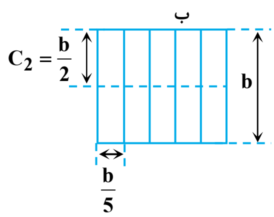
$$\frac{S_۲}{S_۱}=\frac{I_۲}{I_۱}\times\frac{C_۱}{C_۲}=\frac{I_۲}{I_۱}\times۱=\frac{I_۲}{I_۱}\quad;\quad I_۲=[\frac{۱}{۱۲}\times\frac{b}{۵}\times b^۳]\times۵=\frac{b^۴}{۱۲}$$

برای محاسبه ممان اینرسی مقطع (۱) حول تار خنثی باید ابتدا ممان اینرسی هر یک از تیغه‌های فولادی حول محور مرکزیش محاسبه شده سپس با استفاده از قضیه انتقال به تار خنثی انتقال داده شود.

$$I_۱=\frac{۱}{۱۲}\times b\times(\frac{b}{۵})^۳+۲[\frac{۱}{۱۲}\times b(\frac{b}{۵})^۳+\frac{b^۲}{۵}\times(\frac{b}{۵})^۲]+۲[\frac{۱}{۱۲}\times b(\frac{b}{۵})^۳+\frac{b^۲}{۵}\times(\frac{۲b}{۵})^۲]\Rightarrow I_۱=\frac{b^۴}{۱۲}\quad,\quad\frac{S_۲}{S_۱}=۱$$

اما اگر تیغه‌ها به هم چسبیده نباشند، هر یک از تیغه‌ها به صورت یک تیر جداگانه در نظر گرفته می‌شود و بنابراین کافی است ممان اینرسی مقطع هر تیر حول محور مرکزیش محاسبه شده و نتیجه آن در ضریب ۵ ضرب شود. در نتیجه می‌توان نوشت:





$$\frac{S_۲}{S_۱}=\frac{I_۲}{I_۱}\times\frac{C_۱}{C_۲}=\frac{۵\times\frac{۱}{۱۲}\times\frac{b}{۵}\times b^۳}{۵\times\frac{۱}{۱۲}\times b\times(\frac{b}{۵})^۳}\times\frac{\frac{b}{۱۰}}{\frac{b}{۲}}\Rightarrow\frac{S_۲}{S_۱}=\frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۱}{۵^۳}}\times\frac{۱}{۵}=۵$$