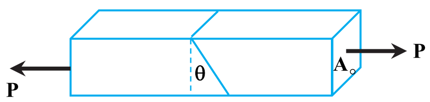
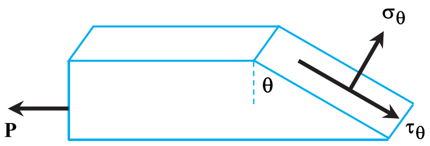
درسنامه: تبدیلات تنش

تبدیلات تنش و کرنش

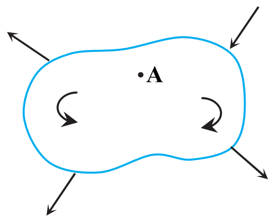
در فصول پیشین تنش در میله‌های تحت کشش یا فشار، محورهای تحت پیچش و تیرهای تحت خمش و برش مورد بررسی قرار گرفتند. این تنش‌ها همگی بر روی مقاطع عرضی عضو اثر می‌کنند، در حالی که ممکن است تنش‌های ایجاد شده در مقاطع مایل بزرگتر باشند. در فصل اول تنش بوجود آمده در صفحات مایل تحت بارگذاری محوری (کششی یا فشاری) تعیین شد، به عنوان مثال اگر جسمی مطابق شکل تحت بار محوری P قرار گیرد تنش قائم و برشی آن در صفحات مایل، به صورت زیر قابل محاسبه است. (اثبات این روابط در فصل اول آورده شده است، این در حالی است که تنش در صفحات قائم (مقاطع عرضی) برابر $\frac{P}{A_0}$ می‌باشد.

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \dfrac{P}{A_0}\cos^2\theta \\ \tau_\theta = \dfrac{P}{A_0}\cos\theta\sin\theta \end{cases}$$

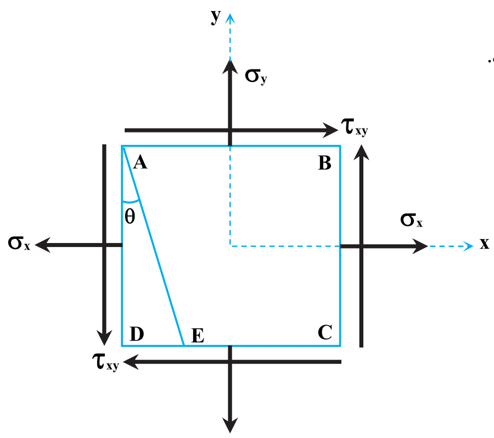




روابط فوق بیانگر آن است که با تغییر امتداد صفحات، مؤلفه‌های تنش قائم و برشی تغییر خواهند نمود. این مسئله در حالت کلی نیز صادق است. یعنی اگر جسمی مطابق شکل روبرو تحت بارگذاری خارجی قرار گیرد، مؤلفه‌های تنش در نقطه A علاوه بر آنکه وابسته به مختصات نقطه A بوده به امتداد صفحه گذرنده از نقطه A نیز وابسته می‌باشند.

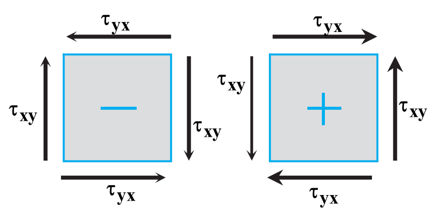


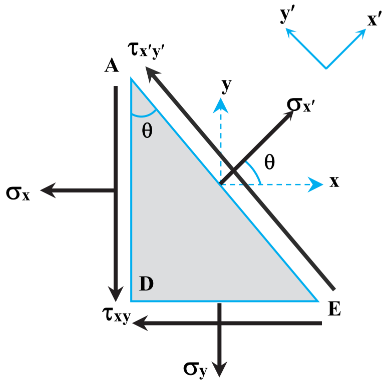
در این فصل نیز هدف بررسی مقادیر تنش و کرنش در هر نقطه از جسم در صفحات مختلف می‌باشد. ابتدا عمومی‌ترین حالت تنش دوبعدی (صفحه‌ای) در یک نقطه دلخواه از جسم در حالت تعادل مورد ارزیابی قرار داده می‌شود. برای نمایش تنش در این حالت می‌توان از یک المان بی‌نهایت کوچک به شکل روبرو استفاده کرد. تنش‌های قائم عامل بر وجوه آن σ_x و σ_y بوده و همچنین تنش برشی اعمالی بر وجوه المان τ_{xy} می‌باشد. به علت کوچکی ابعاد المان و حفظ تعادل المان در جهات x و y تنش قائم بر دو وجه مقابل مساوی بوده و تنش‌های برشی اعمال شده بر چهار وجه المان نیز به دلیل تعادل دورانی یکسان می‌باشند.



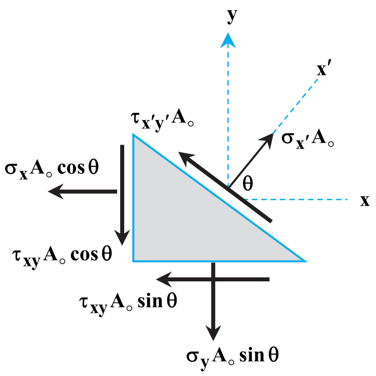
در شکل روبرو تنش‌های قائم و برشی مثبت نمایش داده شده‌اند. طبق قرارداد تنش‌های قائم کششی، مثبت و تنش‌های قائم فشاری، منفی در نظر گرفته شده و علامت تنش‌های برشی نیز مطابق شکل روبرو از قرارداد پیروی می‌کند. اگر τ_{xy} اعمال شده بر وجه سمت راست گشتاوری ایجاد نموده که حول مرکز المان در جهت پادساعتگرد باشد علامت آن را مثبت و اگر در جهت ساعتگرد باشد علامت آن منفی در نظر گرفته می‌شود.

تنها در دو حالت نشان داده شده، المان تحت تنش برشی می‌تواند تعادل داشته باشد لذا هر حالت توزیع تنش برشی دیگری از منظر حفظ تعادل المان نادرست می‌باشد.





اکنون اگر تنش‌های σ_x و σ_y و τ_{xy} عامل بر وجوه المان نشان داده شده در شکل قبلی معین باشند، می‌توان مؤلفه‌های تنش قائم و برشی را در هر راستای دیگر تعیین نمود. به عنوان مثال اگر هدف محاسبه تنش در راستای مایل AE در المان ABCD باشد، می‌توان ابتدا گوه ADE را مطابق شکل روبرو جدا نموده و مؤلفه‌های تنش را بر روی وجوه مختلف آن رسم کرد، سپس با نوشتن معادلات تعادل مقادیر تنش‌های اعمالی بر وجه مایل را محاسبه می‌گردند.



اگر مساحت وجه مایل(صفحه‌ی **AE**) مساوی $A_\circ$ در نظر گرفته شود، از حاصل‌ضرب مؤلفه‌های تنش در مساحت وجهی که تنش بر آن اعمال شده است، نیروی وارد بر وجوه المان گوه‌ای مطابق شکل زیر بدست می‌آید. اکنون با نوشتن معادلات تعادل $\sum F_x = \circ$ و $\sum F_y = \circ$ روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} \sum F_x = \circ \Rightarrow \sigma_{x'}A_\circ\cos\theta - \tau_{x'y'}A_\circ\sin\theta - \tau_{xy}A_\circ\sin\theta - \sigma_x A_\circ\cos\theta = \circ & (۱). \\ \sum F_y = \circ \Rightarrow \sigma_{x'}A_\circ\sin\theta + \tau_{x'y'}A_\circ\cos\theta - \tau_{xy}A_\circ\cos\theta - \sigma_y A_\circ\sin\theta = \circ & (۲) \end{cases}$$

رابطه (۱) را تقسیم بر $A_\circ\cos\theta$ و رابطه (۲) را تقسیم بر $A_\circ\sin\theta$ می‌کنیم تا به نتیجه زیر برسیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{x'} - \tau_{x'y'}\operatorname{tg}\theta = \tau_{xy}\operatorname{tg}\theta + \sigma_x \\ \sigma_{x'} + \tau_{x'y'}\cot g\theta = \tau_{xy}\cot g\theta + \sigma_y \end{cases}$$

از حل دستگاه معادله فوق $\sigma_{x'}$ و $\tau_{x'y'}$ بر حسب مؤلفه‌های تنش σ_x و σ_y و τ_{xy} به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} \sigma_{x'} = \sigma_x\cos^۲\theta + \sigma_y\sin^۲\theta + ۲\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta \\ \tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^۲\theta - \sin^۲\theta) \end{cases}$$

چون زاویه‌ی بین راستای x' و y' مساوی $۹\circ^\circ$ است، برای تعیین مؤلفه تنش قائم $\sigma_{y'}$ می‌توان در رابطه تنش $\sigma_{x'}$ زاویه θ را به زاویه $(\theta + ۹\circ)$ تبدیل نمود. در این صورت $\sigma_{y'}$ به صورت زیر تعیین می‌شود:

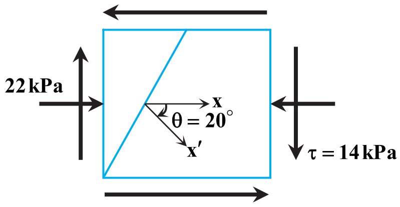
$$\sigma_{y'} = \sigma_x\sin^۲\theta + \sigma_y\cos^۲\theta - ۲\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

اما با توجه به اینکه روابط مثلثاتی زیر برقرار است، می‌توان روابط فوق را به صورت ساده شده زیر بیان نمود:

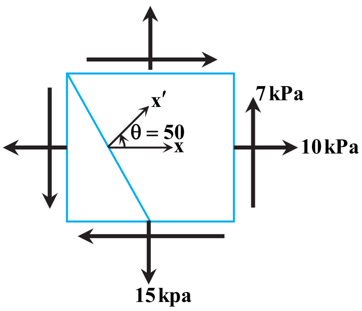
$$\sin^۲\theta = \frac{۱-\cos۲\theta}{۲} \quad ; \quad \cos^۲\theta = \frac{۱+\cos۲\theta}{۲} \quad ; \quad ۲\sin\theta\cos\theta = \sin۲\theta$$

$$\begin{cases} \sigma_{x'} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{۲}\cos۲\theta + \tau_{xy}\sin۲\theta \\ \sigma_{y'} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} - \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{۲}\cos۲\theta - \tau_{xy}\sin۲\theta \\ \tau_{x'y'} = -\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{۲}\sin۲\theta + \tau_{xy}\cos۲\theta \end{cases}$$

در روابط فوق برای تعیین علامت θ از محور x به سمت محور x' حرکت کرده اگر این حرکت پادساعتگرد باشد علامت θ مثبت است در غیر این صورت منفی است. به عنوان مثال در المان‌های شکل زیر مقادیر مؤلفه‌های تنش با در نظر گرفتن قراردادهای ذکر شده به صورت روبرو است:



$\tau_{xy} = -۱۴\,kPa$
$\sigma_x = -۲۲\,kPa$
$\sigma_y = ۰$
$\theta = -۲۰^\circ$



$\tau_{xy} = ۷\,kPa$
$\sigma_x = ۱۰\,kPa$
$\sigma_y = ۱۵\,kPa$
$\theta = ۵۰^\circ$

روابط فوق به معادلات تبدیل تنش صفحه‌ای معروف می‌باشند. با جمع دو رابطه اول می‌توان به نتیجه زیر رسید:

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \left[\frac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲}\cos ۲\theta + \tau_{xy}\sin ۲\theta\right] + \left[\frac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲}\cos ۲\theta - \tau_{xy}\sin ۲\theta\right]$$

$$\Rightarrow \sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

راستای x و y و همچنین راستای x' و y' راستاهای اختیاری بوده، بنابراین می‌توان نتیجه فوق را برای راستایی مانند x'' و y'' نیز بدست آورد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sigma_{x''} + \sigma_{y''} = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y = \ldots$$

تذکر ۱: طبق رابطه فوق در هر نقطه از جسم تحت تنش، مجموع تنش‌های متعامد اعمال شده بر وجوه المان تنش صفحه‌ای، ثابت بوده و مستقل از زاویه‌ی θ می‌باشد.

همانطور که مشاهده می‌شود $\sigma_{x'}$ و $\sigma_{y'}$ تابعی از متغیر θ می‌باشند، به ازای زاویه مشخصی تنش‌های قائم اکسترمم می‌شوند. به زاویه صفحه‌ای که تنش‌های قائم بر روی آن دارای حداکثر و حداقل مقدار می‌شوند، زوایای اصلی و به مقادیر تنش‌های نظیر آن زوایا، تنشهای اصلی و به صفحاتی که تنش‌ها در آن صفحات اکسترمم می‌شوند، صفحات اصلی گفته می‌شود. زوایای اصلی را می‌توان با مشتق‌گیری از مؤلفه تنش σ'_x و مساوی صفر قرار دادن آن بدست آورد.

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = ۰ \Rightarrow -۲ \times \frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲}\sin ۲\theta_P + ۲\tau_{xy}\cos ۲\theta_P = ۰ \Rightarrow \boxed{\tan ۲\theta_P = \frac{۲\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}}$$

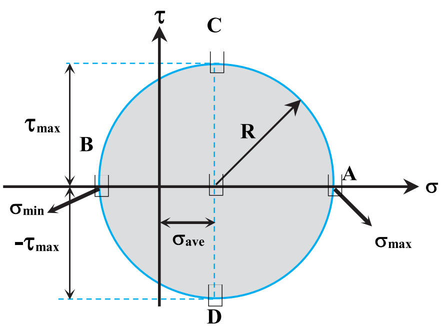
به θ_P زاویه صفحات اصلی گفته می‌شود.

از رابطه‌ی فوق دو مقدار $۲\theta_P$ که ۱۸۰° با هم اختلاف دارند و یا دو مقدار θ_P که ۹۰° با هم اختلاف دارند بدست می‌آید. مقادیر تنش‌های اصلی را می‌توان با قرار دادن زوایای اصلی در رابطه‌ی تنش $\sigma_{x'}$ بدست آورد که نتیجه ساده شده آن توسط روابط زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R \quad , \quad \sigma_{min} = \sigma_{ave} - R$$

σ_{ave} و R به ترتیب مختصات مرکز دایره مور و شعاع دایره مور را نشان می‌دهد که مقدار آن بر حسب مؤلفه‌های تنش از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{\begin{cases} \sigma_{ave} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} \\ R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{۲}\right)^۲ + \tau_{xy}^۲} \end{cases}}$$



دایره مور

از این دایره برای تعیین نمودن تنش در راستاهای مختلف در یک نقطه از جسم استفاده می‌شود. به عنوان مثال اگر مؤلفه‌های تنش σ_x و σ_y و τ_{xy} معین باشند می‌توان به جای استفاده از روابط مربوط به تبدیلات تنش، دایره مور تنش را رسم نموده و از آن برای تعیین مؤلفه‌های تنش در راستاهای دیگر استفاده نمود. اما برای بدست آوردن معادله دایره مور، می‌توان روابط مربوط به $\sigma_{x'}$ و $\tau_{x'y'}$، را به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$(\sigma_{x'}-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{۲})^۲=(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲}\cos۲\theta+\tau_{xy}\sin۲\theta)^۲$$

$$\tau_{x'y'}^۲=(-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲}\sin۲\theta+\tau_{xy}\cos۲\theta)^۲$$

با جمع نمودن دو رابطه فوق به رابطه مقابل خواهیم رسید:

$$(\sigma_{x'}-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{۲})^۲+\tau_{x'y'}^۲=(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲})^۲+\tau_{xy}^۲$$

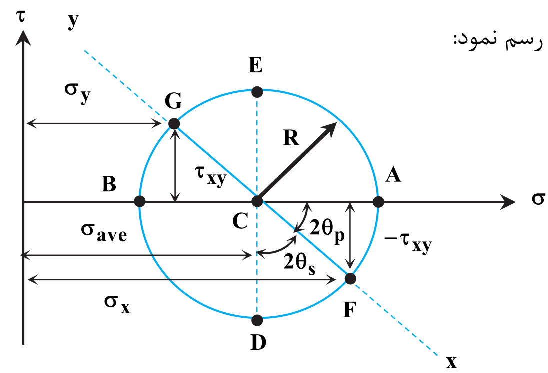
این رابطه، معادله یک دایره به مختصات مرکز $C\left|\begin{matrix}\frac{\sigma_x+\sigma_y}{۲}\\ ۰\end{matrix}\right.$ و شعاع R می‌باشد. بنابراین می‌توان معادله دایره مور به قرار زیر است:

$$(\sigma_{x'}-\sigma_{ave})^۲+\tau_{x'y'}^۲=R^۲$$

که در آن مقادیر σ_{ave} و R به ترتیب عبارتند از:

$$\boxed{\sigma_{ave}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{۲}\quad;\quad R=\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲})^۲+\tau_{xy}^۲}}$$

با مشخص بودن مختصات مرکز دایره مور و همچنین شعاع آن می‌توان دایره را به شکل زیر رسم نمود:



همان‌طور که از شکل مشخص است محور افقی بیانگر محور تنش قائم بوده و محور عمودی نشان‌دهنده تنش برشی می‌باشد. نقاط روی محیط دایره مقادیر تنش را در راستاهای مختلف در یک نقطه از جسم بیان می‌کنند. نقاط A و B به ترتیب معرف ماکزیمم و مینیمم تنش قائم می‌باشند (تنش‌های اصلی) و نقاط E و D نیز معرف ماکزیمم تنش برشی هستند.

تذکر۲: در صفحات اصلی تنش، تنش‌های قائم دارای مقادیر ماکزیمم و مینیمم بوده و در آن صفحات هیچ‌گونه تنش برشی وجود ندارد. این مطلب را می‌توان از شکل دایره مور نیز دریافت نمود. مؤلفه تنش برشی در نقاط A و B مساوی صفر است. $\theta=\theta_P\Rightarrow\sigma_x,\sigma_y=\sigma_{max}$ یا σ_{min} ، $\tau_{xy}=۰$

تذکر۳: مقدار ماکزیمم تنش برشی مساوی شعاع دایره مور است. $(\tau_{max}=R)$ و تنش قائم نظیر تنش برشی ماکزیمم مساوی σ_{ave} می‌باشد. مقدار ماکزیمم تنش برشی را می‌توان با قرار دادن $\theta=\theta_s$ در فرمول τ_{xy} بدست آورد. (θ_S زاویه‌ای است که تنش برشی ماکزیمم در آن صفحه روی می‌دهد.) زاویه‌ی صفحات تنش برشی ماکزیمم به روش زیر بدست می‌آید:

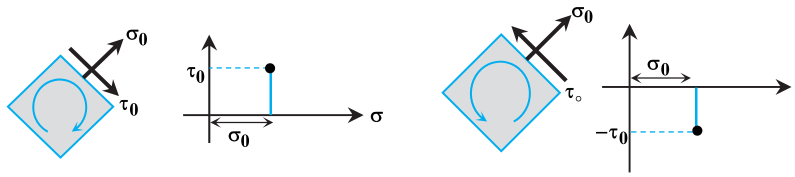
$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta}=۰\Rightarrow-۲\times\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲}\cos۲\theta_s-۲\tau_{xy}\sin۲\theta_s=۰\Rightarrow\tan۲\theta_s=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲\tau_{xy}}$$

$$\theta=\theta_s\Rightarrow\tau_{xy}=\tau_{max}\ ;\ \sigma_x=\sigma_y=\sigma_{ave}$$

رابطه‌ی فوق دو مقدار $۲\theta_s$ را که ۱۸۰° با هم اختلاف دارند و یا دو مقدار θ_s را که با هم ۹۰° اختلاف دارند تعیین می‌کند.

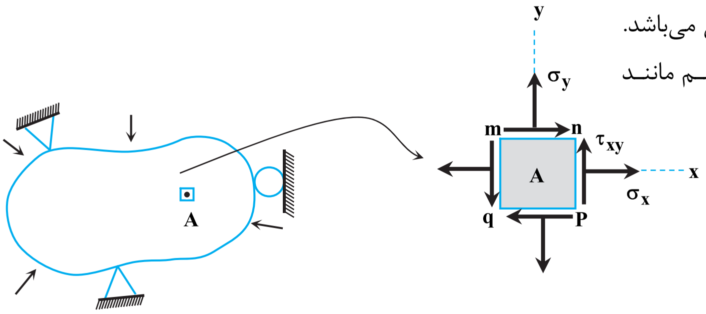
تذکر۴: با مقایسه روابط مربوط به امتداد تنش‌های قائم اصلی و امتداد تنش برشی اصلی می‌توان نتیجه گرفت که صفحات تنش برشی اصلی تحت زاویه‌ی ۴۵° نسبت به صفحات تنش قائم اصلی قرار دارند، همچنین با توجه به دایره مور می‌توان گفت مقدار تنش برشی حداکثر مساوی نصف اختلاف بین تنش‌های اصلی است چون تفاضل تنش‌های اصلی برابر قطر دایره مور می‌باشد. $\tau_{max}=\frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{۲}$

در تعیین علامت مؤلفه مربوط به تنش برشی برای ترسیم دایره مور به این صورت عمل می‌شود که اگر تنش برشی عامل بر یک سطح المان تمایل به دوران المان در جهت موافق حرکت عقربه‌های ساعت دارد نقطه نظیر آن در روی دایره مور دارای تنش برشی با مقدار مثبت بوده و در بالای محور افقی (محور σ) قرار می‌گیرد و برعکس.

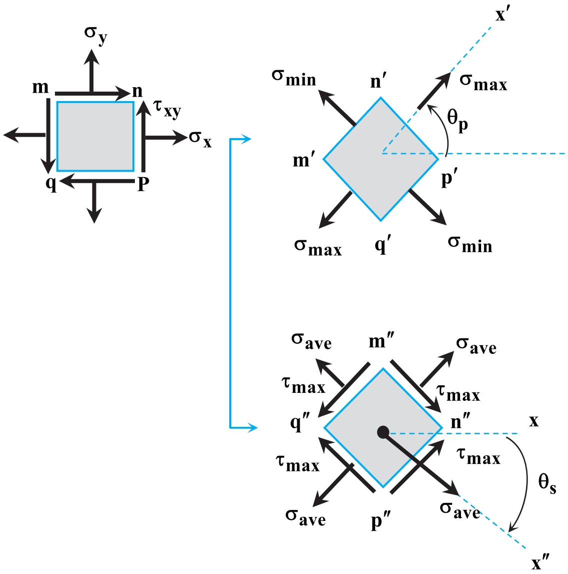


همانطور که قبلاً نیز اشاره شد رسم دایره مور نیازمند آن است که مختصات مرکز دایره $C(\sigma_{ave},\circ)$ و شعاع دایره R معلوم باشند یا آنکه مختصات دو نقطه دایره معلوم بوده از وصل کردن این دو نقطه به یکدیگر خطی بدست می‌آید که قطر دایره می‌باشد. این قطر محور افقی را در نقطه C که مرکز دایره است قطع خواهد نمود. هر نقطه توسط مؤلفه‌های آن تعیین می‌گردد. مؤلفه x، مربوط به تنش قائم بر وجه المان می‌باشد و مؤلفه y، مربوط به تنش برشی در وجه مذکور است. تنش قائم کششی، مثبت و تنش قائم فشاری، منفی می‌باشد.

به عنوان مثال اگر مؤلفه‌های تنش در راستای x و y در یک نقطه از جسم مانند A مشخص باشند، می‌توان دایره مور مربوط به آن را رسم نمود.



ذکر این نکته لازم است که تنش‌های عامل بر یک وجه نشان‌دهنده یک نقطه از محیط دایره است. تنش‌های قائم و برشی اعمال شده بر وجه np معرف نقطه F و تنش‌های قائم و برشی اعمال‌شده بر وجه mn معرف نقطه G از محیط دایره‌ی مور در شکل قبلی است. با وصل کردن این دو نقطه قطر دایره بدست آمده که محور σ را در نقطه C مرکز دایره قطع می‌کند. همان طور که از این شکل مشاهده می‌شود قطر FG بیانگر تنش‌های اعمالی در دو راستای x و y است که در روی دایره مور با یکدیگر 180° اختلاف دارند، این مسئله بیان‌کننده آن است که اگر اختلاف زاویه‌ی بین دو راستا در المان مساوی θ باشد در روی دایره مور این اختلاف زاویه مساوی 2θ خواهد بود. در شکل مذکور زاویه بین قطر FG و قطر AB که معرف تنش‌های قائم اصلی است، مساوی $2\theta_p$ می‌باشد. اگر قطر FG به اندازه‌ی $2\theta_p$ در جهت پادساعتگرد دوران کند به قطر AB رسیده که تنش‌ها در دو انتهای آن، تنش‌های اصلی است.



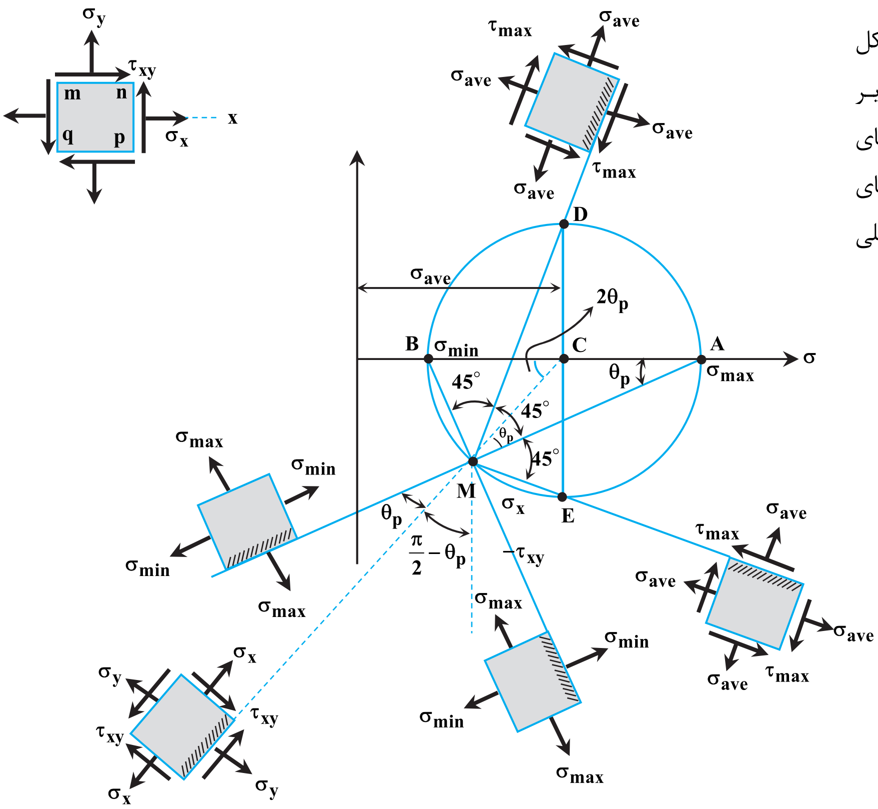
بنابراین برای رسیدن به تنش‌های اصلی در المان کافی است آن را به اندازه‌ی θ_p پادساعتگرد دوران داد. همچنین با گردش ساعتگرد قطر FG به اندازه‌ی $2\theta_s$ به قطر DE رسیده که بیانگر تنش‌های برشی اصلی است. در نتیجه برای رسیدن به تنش برشی ماکزیمم در المان کافی است آن را به اندازه‌ی θ_s در جهت گردش حرکت عقربه‌های ساعت بچرخانید. شکل فوق نشان‌دهنده نحوه چرخش المان برای رسیدن به تنش‌های قائم اصلی و تنش‌های برشی اصلی است. همانطور که از مطالب فوق نیز مشخص است جهت چرخش المان با جهت حرکت روی دایره‌ی مور یکسان است.

همانطور که در شکل فوق مشخص است در حالتی که تنش‌های اصلی روی المان اعمال می‌شود، روی یک وجه تنش قائم ماکزیمم و روی وجه دیگر تنش قائم مینیمم است. همانطور که در دایره مور شکل قبلی ملاحظه می‌شود اگر خط FG به اندازه $2\theta_p$ در جهت پادساعتگرد بچرخد بر خط AB منطبق می‌گردد و نقطه F بر نقطه A که متناظر با تنش قائم ماکزیمم است منطبق می‌شود لذا با چرخش پادساعتگرد، تنش‌ها روی وجه F (همان راستای x) به ماکزیمم مقدار و روی وجه دیگر به مینیمم مقدار می‌رسد.

با جمع کردن دو زاویه θ_p و θ_s اختلاف زاویه بین محورهای x′ و x″ یا زاویه بین تنش‌های قائم اصلی و تنش‌های برشی اصلی بدست می‌آید.

$2\theta_p + 2\theta_s = 90 \Rightarrow \theta_p + \theta_s = 45^\circ$ (با توجه به دایره مور)

تذکر ۵: اگر نقطه‌ای مانند M در دایره مور شکل مقابل معرف تنش‌های اعمالی بر وجه np از المان شکل زیر باشد، آن‌گاه راستای وترهای AM و BM معرف راستای تنش‌های قائم اصلی در المان بوده و به همین ترتیب راستای وترهای MD و ME بیانگر راستای تنش‌های برشی اصلی می‌باشد.



نتایج:

۱ـ تنش‌های اصلی به تنش‌های اکسترمم (تنش‌های حداکثر σ_{max} و حداقل σ_{min}) گفته شده که معمولاً آن‌ها را با $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ نمایش می‌دهند، همچنین هیچ‌گونه تنش برشی به همراه تنش اصلی بر روی المان ظاهر نمی‌شود.

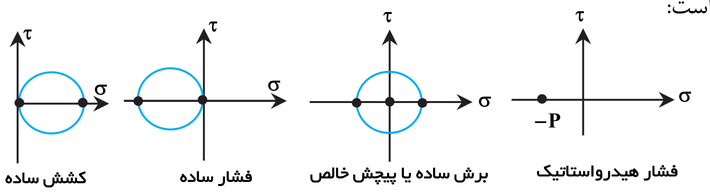
۲ـ تنش برشی اصلی یا تنش برشی ماکزیمم مساوی شعاع دایره مور می‌باشد که از طرفی برابر تفاضل تنش قائم حداکثر و تنش قائم حداقل تقسیم بر دو خواهد بود. $(\tau_{max}=\frac{\sigma_۱-\sigma_۲}{۲})$. همچنین در این حالت تنش قائم مساوی مقدار میانگین تنش قائم σ_{ave} می‌باشد. $(\sigma_x=\sigma_y=\sigma_{ave}=\frac{\sigma_۱+\sigma_۲}{۲})$

۳ـ اگر تنش‌های قائم اصلی با هم برابر باشند $(\sigma_۱=\sigma_۲)$ آن‌گاه دایره مور به یک نقطه تبدیل شده و تنش برشی در این حالت مساوی صفر خواهد بود.

۴ـ مجموع تنش‌های قائم مساوی مجموع تنش‌های اکسترمم بوده و این مقدار برای یک نقطه از جسم همواره کمیتی ثابت است.

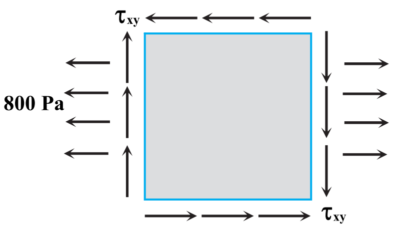
$\sigma_x+\sigma_y=\sigma_۱+\sigma_۲=$ مقدار ثابت

۵ـ برای چند حالت خاص از بارگذاری، دایره مور در اشکال زیر رسم شده است:



مثال ۱: در شکل تنش‌های وارده در یک نقطه از سازه‌ای را ملاحظه می‌کنید. در صورتی که تنش اصلی کششی برابر $۱۲۰۰Pa$ باشد، میزان تنش برشی ماکزیمم برابر است با:

۱) ۱۰۰۰
۲) ۶۰۰
۳) ۸۰۰
۴) ۱۲۰۰



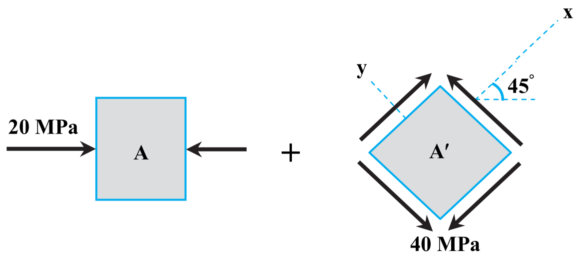
پاسخ: گزینه «۳» **روش اول:** تنش اصلی را می‌توان طبق رابطه زیر نوشت:

$$\sigma_۱=\sigma_{ave}+R\Rightarrow\sigma_۱=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{۲}+\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲})^۲+\tau_{xy}^۲}\Rightarrow ۱۲۰۰=\frac{۸۰۰+۰}{۲}+R\Rightarrow R=۸۰۰Pa=\tau_{max}$$

از طرفی تنش برشی ماکزیمم، مساوی شعاع دایره مور است.

روش دوم:
$$\sigma_۱+\sigma_۲=\sigma_x+\sigma_y\Rightarrow ۱۲۰۰+\sigma_۲=۸۰۰+۰\Rightarrow\sigma_۲=-۴۰۰Pa\Rightarrow\tau_{max}=\frac{\sigma_۱-\sigma_۲}{۲}=\frac{۱۲۰۰-(-۴۰۰)}{۲}=۸۰۰Pa$$

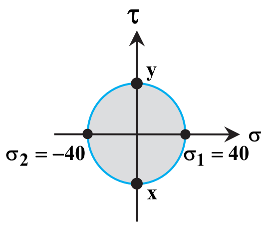
مثال ۲: جسمی تحت بار مرکب قرار گرفته است و در نقطه‌ای از جسم به طور همزمان تنش‌های زیر وارد می‌شود. تنش‌های اصلی در جسم برابرند با:



۱) $\begin{cases} ۰ \\ -۲۰\,MPa \end{cases}$
۲) $\begin{cases} ۴۰ \\ -۶۰\,MPa \end{cases}$
۳) $\begin{cases} ۴۰ \\ -۴۰\,MPa \end{cases}$
۴) $\begin{cases} ۶۰ \\ -۶۰\,MPa \end{cases}$

پاسخ: گزینه «۲»

$\tau_{max} = R = ۴۰\,MPa$

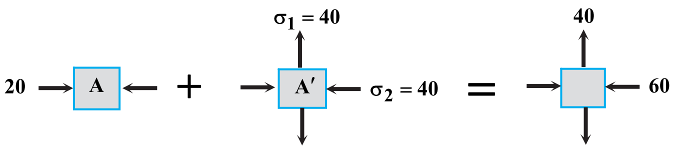


در حالت A' جسم تحت برش خالص قرار گرفته است در نتیجه دایره مور آن به صورت روبرو است:

با توجه به دایره مور رسم شده می‌توان نوشت: $\sigma_۱ = ۴۰ \quad , \quad \sigma_۲ = -۴۰$

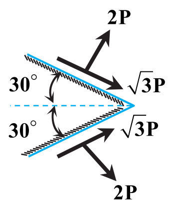
برای رسیدن المان A'، به حالت تنش قائم اصلی، کافی است المان به اندازه ۴۵° پادساعتگرد دوران کند در این حالت در دایره مور نقطه x بر $\sigma_۱$ و نقطه y بر $\sigma_۲$ منطبق می‌شود.

در نتیجه تنش‌های اصلی در جسم مساوی مجموع تنش‌های اصلی حالت A و A' است.

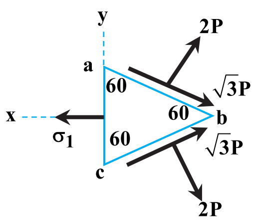


$\sigma_۱ = ۴۰ + ۰ = ۴۰$ $\qquad$ $\sigma_۲ = -۴۰ - ۲۰ = -۶۰$

مثال ۳: مقدار و امتداد نیروهای موثر بر دو صفحه متقاطع در شکل نشان داده شده است، امتداد و مقدار تنش‌های اصلی در نقطه تقاطع دو صفحه چه اندازه است؟

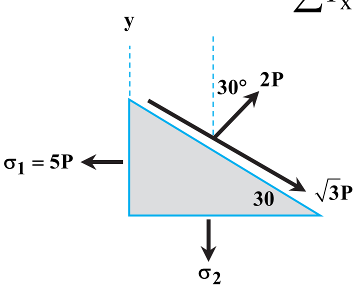


پاسخ: ابتدا، المان مثلثی abc مطابق شکل روبرو رسم می‌شود. اگر تنش‌های قائم اصلی با $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ نمایش داده شوند، آن‌گاه راستای افقی x یک امتداد اصلی است چرا که تنش‌های اعمالی بر وجوه مایل به گونه‌ای می‌باشند که برای حفظ تعادل المان گوه‌ای شکل مقابل، (در راستای y) نیاز به حضور تنش برشی بر روی وجه ac نیست. زیرا مؤلفه y تمامی نیروها، یکدیگر را خنثی کرده و بنابراین نیرویی در راستای وجه ac اعمال نخواهد گردید.



(به علت مساوی بودن زوایا، مساحت وجوه مختلف المان برابر است در نتیجه مساحت تمامی وجوه المان مثلثی برابر A در نظر گرفته می‌شود.)

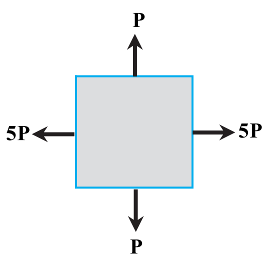
$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow +\sigma_۱ A - ۲(۲PA)\sin ۳۰ - ۲(\sqrt{۳}PA)\cos ۳۰ = ۰ \Rightarrow \sigma_۱ = ۵P$$



چون محور x یک امتداد اصلی است، بنابراین محور y که بر محور x عمود می‌باشد نیز یک امتداد اصلی می‌باشد، لذا کافی است برای تعیین $\sigma_۲$ از تعادل المان گوه‌ای شکل مقابل استفاده کرد.

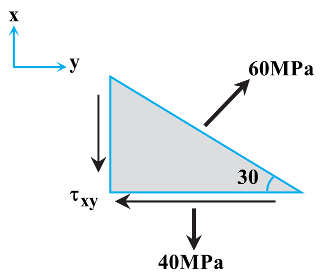
اگر مساحت وجه مایل مساوی A در نظر گرفته شود، آن‌گاه مساحت وجه افقی برابر $A\cos ۳۰$ و مساحت وجه قائم برابر $A\sin ۳۰$ خواهد بود. اکنون با نوشتن معادله تعادل در راستای y رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow -(\sigma_۲ A\cos ۳۰) + (۲PA)\cos ۳۰ - (\sqrt{۳}PA)\sin ۳۰ = ۰ \Rightarrow \sigma_۲ = P$$



بنابراین به طور خلاصه می‌توان المان تنش‌های اصلی را به شکل مقابل رسم نمود:

مثال۴: **تنش برشی اعمال شده بر المان گوه‌ای شکل مقابل چه اندازه است؟**



۱) $20\sqrt{3}$

۲) 20

۳) $10\sqrt{3}$

۴) $\frac{20}{\sqrt{3}}$

پاسخ: گزینه «۱»

روش اول: چون بر وجه مایل المان گوه‌ای شکل تنش برشی اعمال نشده است، بنابراین تنش قائم $60\,\text{MPa}$ یک تنش اصلی است. از طرفی می‌توان نوشت:

$$\sigma_1 = \sigma_{ave} + R \Rightarrow 60 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

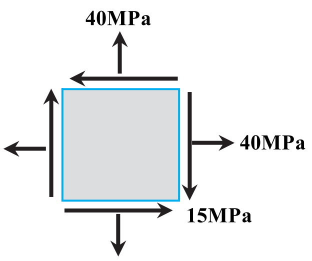
$$\Rightarrow 60 = \frac{0+40}{2} + \sqrt{\left(\frac{0-40}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow 40^2 = 20^2 + \tau_{xy}^2 \Rightarrow \tau_{xy} = 20\sqrt{3}\,\text{MPa}$$

روش دوم: با نوشتن معادله تعادل در راستای x نیز می‌توان همین نتیجه را گرفت. اگر مساحت وجه مایل A باشد مساحت وجه افقی برابر $A\cos 30$ و مساحت وجه قائم برابر $A\sin 30$ می‌باشد. پس داریم:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow (60A)\sin 30 - \tau_{xy}(A\cos 30) = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{60}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}\ \text{MPa}$$

توجه: **راه تشخیص اینکه یک تنش، قائم اصلی بوده آن است که بر وجهی که تنش قائم اعمال شده، تنش برشی برابر صفر باشد.**

مثال۵: **تنش برشی ماکزیمم در المان شکل زیر مساوی کدامیک از گزینه‌ها است؟**



۱) $40\,\text{MPa}$

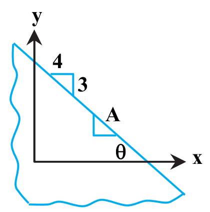
۲) $20\,\text{MPa}$

۳) $15\,\text{MPa}$

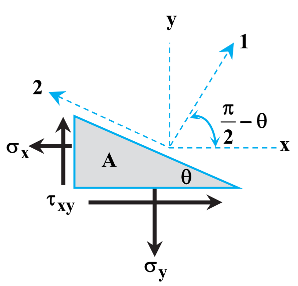
۴) $25\,\text{MPa}$

پاسخ: گزینه «۳» هرگاه تنش‌های قائم اعمالی بر وجوه متعامد المان، یعنی σ_x و σ_y با هم برابر باشند، آن‌گاه تنش برشی وارد بر اضلاع المان مساوی تنش برشی ماکزیمم است.به طور کلی تنها در یک حالت، تنش‌های قائم با هم برابر می‌شوند و آن مربوط به حالتی است که تنش برشی اعمال شده بر المان دارای حداکثر مقدارش باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در شکل فوق به دلیل مساوی بودن تنش‌های قائم σ_x و σ_y، تنش برشی τ_{xy} وارد شده بر وجوه المان مساوی تنش برشی ماکزیمم است.

مثال۶: **در نقطه‌ی A از لبه مورب و بارگذاری نشده یک جسم ارتجاعی حداکثر تنش برشی مساوی $3/5\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ می‌باشد. مقادیر تنش‌های اصلی و همچنین مؤلفه‌های تنش را در راستای x و y بدست آورید.**



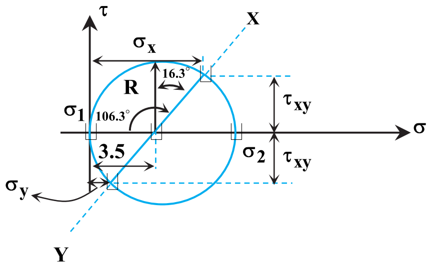
پاسخ: چون بر روی لبه A هیچ‌گونه تنشی وارد نشده است $(\sigma = \tau = 0)$، تنش برشی بر روی این لبه صفر می‌باشد. بنابراین راستای عمود بر وجه مایل المان A یک امتداد اصلی است. از طرفی تنش برشی ماکزیمم که مساوی شعاع دایره مور می‌باشد در صورت مسئله داده شده است. بنابراین دایره مور تنش به صورت زیر ترسیم می‌شود:
(نقطه σ_1 منطبق بر مبدأ مختصات بوده و شعاع دایره نیز برابر ۳/۵ می‌باشد.)



$\sigma_1 = 0$

$R = \tau_{max} = 3.5\,\text{Mpa}$

با توجه به دایره مور می‌توان نوشت:



$$\sigma_۱ = ۰ \quad ; \quad \sigma_۲ = ۲R = ۲\times\tau_{max} = ۲\times ۳/۵ = ۷MPa$$

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} = ۳/۵MPa$$

اما برای تعیین مؤلفه‌های تنش σ_x و σ_y و τ_{xy} ابتدا باید زاویه θ تعیین شود. با استفاده از شکل صورت مسئله می‌توان زاویه θ را تعیین نمود.

$$\theta = tg^{-۱}(\frac{۳}{۴}) \simeq ۳۷^\circ$$

زاویه بین امتداد ۱ و محور x مساوی $\frac{\pi}{۲}-\theta$ می‌باشد. اگر محور ۱ به اندازه این زاویه ساعتگرد دوران کند بر محور x منطبق می‌شود، اما در دایره مور باید دو برابر این زاویه یعنی، $۲(\frac{\pi}{۲}-\theta) = ۱۰۶/۳^\circ$ ساعتگرد دوران کند. در نتیجه داریم:

$$\tau_{xy} = -R\cos ۱۶/۳^\circ = -۳/۵\cos ۱۶/۳^\circ = -۳/۳۶MPa$$

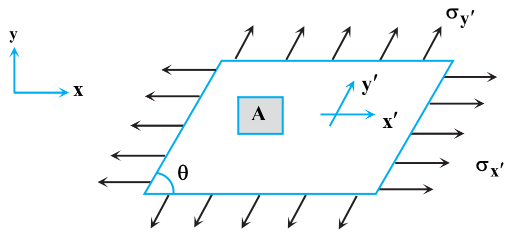
$$\sigma_x = \sigma_{ave} + R\sin(۱۰۶/۳ - ۹۰) = \sigma_{ave} + R\sin ۱۶/۳^\circ = ۳/۵ + ۳/۵\sin ۱۶/۳^\circ = ۴/۴۸MPa$$

و اما برای تعیین مؤلفه تنش σ_y کافی است طبق دایره مور رسم شده رابطه‌ی زیر را نوشت:

$$\sigma_y = \sigma_{ave} - R\sin ۱۶/۳^\circ = ۳/۵ - ۳/۵\sin ۱۶/۳ = ۲/۵۳MPa$$

تذکر ۶: اگر مطابق شکل مؤلفه‌های تنش اعمالی بر یک متوازی‌السطوح معین باشد، برای تعیین مؤلفه‌های تنش اعمال شده بر یک المان با وجوه متعامد، مانند المان **A** باید از تصویر کردن مؤلفه‌های تنش داده شده و همچنین از معادلات تعادل المان استفاده نمود.

به عنوان مثال اگر متوازی السطوح تحت تنش‌های $\sigma_{x'}$ و $\sigma_{y'}$ باشد، برای محاسبه مؤلفه تنش‌های σ_x و σ_y و τ_{xy} به صورت زیر عمل می‌شود:



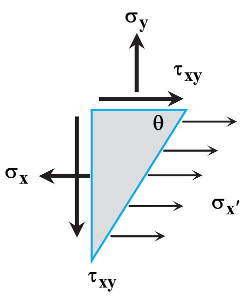
۱ــ برای بدست آوردن تنش σ_y کافی است $\sigma_{y'}$ در $\sin\theta$ ضرب شود.

$$\sigma_y = \sigma_{y'}\sin\theta$$

۲ــ برای بدست آوردن تنش τ_{xy}، مؤلفه تنش $\sigma_{y'}$ در $\cos\theta$ ضرب می‌شود.

$$\tau_{xy} = \sigma_{y'}\cos\theta$$

۳ــ در نهایت برای محاسبه تنش σ_x از نوشتن معادله تعادل برای المان گویای شکل زیر استفاده می‌شود. (اگر وجه مایل المان مساحتی برابر A داشته باشد وجه افقی المان دارای مساحت $A\cos\theta$ و وجه قائم المان دارای مساحت $A\sin\theta$ خواهد بود.)



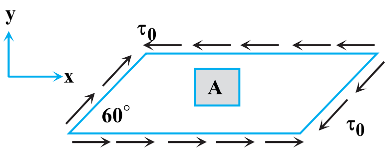
$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow \sigma_{x'}A + \tau_{xy}A\cos\theta - \sigma_x A\sin\theta = ۰$$

$$\Rightarrow \sigma_{x'} + \sigma_{y'}\cos\theta\times\cos\theta - \sigma_x\sin\theta = ۰ \Rightarrow \sigma_x = \frac{\sigma_{x'}}{\sin\theta} + \frac{\sigma_{y'}\cos^۲\theta}{\sin\theta}$$

المان در راستای y دارای تعادل می‌باشد. کافی است برای امتحان کردن، معادله زیر را نوشت:

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow \sigma_y\times A\cos\theta - \tau_{xy}\times A\sin\theta = ۰ \Rightarrow \sigma_{y'}A\sin\theta\cos\theta - \sigma_{y'}A\sin\theta\cos\theta = ۰$$

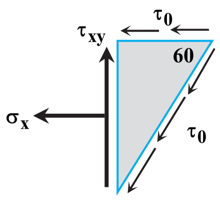
مثال ۷: مؤلفه‌های تنش را بر روی المان A از متوازی‌السطوح بارگذاری شده زیر بیابید.



پاسخ: برای تعیین مؤلفه‌های تنش σ_x و σ_y و τ_{xy} کافی است ابتدا المان گوه‌ای شکل روبرو رسم شده، سپس معادلات تعادل برای آن نوشته شود.

تنش قائم اعمال شده بر وجه افقی المان برابر صفر است.

با توجه به شکل المان می‌توان نوشت: $\sigma_y = ۰$



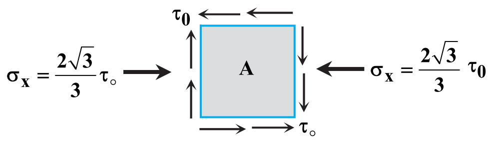
اگر مساحت وجه مایل المان برابر A در نظر گرفته شود می‌توان معادلات تعادل را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \sum F_x = ۰ \Rightarrow -\tau_۰(A\cos۶۰) - (\tau_۰ A)\cos۶۰ - \sigma_x(A\sin۶۰) = ۰ \\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow -(\tau_۰ A)\sin۶۰ + \tau_{xy}(A\sin۶۰) = ۰ \end{cases}$$

پس از ساده‌سازی می‌توان نوشت:

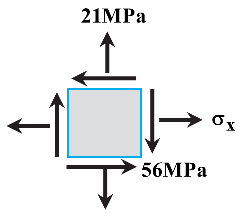
$$\begin{cases} \sigma_x = -۲\tau_۰ \cot g۶۰ = -۲\tau_۰ \times \dfrac{\sqrt{۳}}{۳} \\ \tau_{xy} = \tau_۰ \end{cases}$$

بنابراین تنش‌های اعمالی بر المان A به شکل روبرو می‌باشند:



علامت منفی در مقدار تنش σ_x بیانگر فشاری بودن تنش است.

مثال ۸: اگر حداقل تنش اصلی برای المان نشان داده شده مساوی −۷MPa باشد، مقدار تنش σ_x و زاویه‌ای که محور تنش اصلی با محور x می‌سازد چه اندازه است؟



پاسخ: مقدار حداقل تنش اصلی توسط رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\sigma_۲ = \sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} - \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲}) + \tau_{xy}^۲} \Rightarrow -۷ = \frac{\sigma_x + ۲۱}{۲} - \sqrt{(\frac{\sigma_x - ۲۱}{۲})^۲ + ۵۶^۲}$$

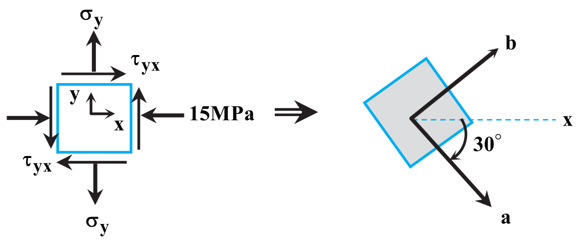
$$\Rightarrow (\frac{-\sigma_x - ۳۵}{۲})^۲ = (\frac{\sigma_x - ۲۱}{۲})^۲ + ۵۶^۲ \Rightarrow ۲\times\sigma_x\times۳۵ + ۳۵^۲ = -۴۲\sigma_x + ۲۱^۲ + ۴\times۵۶^۲ \Rightarrow \sigma_x = ۱۰۵\text{MPa}$$

و اما زوایای تنش اصلی توسط رابطه روبرو تعیین می‌شود:

$$\tan۲\theta_p = \frac{۲\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{۲\times(-۵۶)}{۱۰۵ - ۲۱} = \frac{-۴}{۳} \Rightarrow ۲\theta_p = -۵۳ \Rightarrow \theta_p = -۲۶/۶^\circ$$

در تعیین زاویه تنش اصلی باید به علامت تنش برشی دقت شود. برای تعیین علامت صحیح کافی است به شکل ابتدای فصل مراجعه شود.

مثال ۹: المان تنش صفحه‌ای با حداکثر تنش اصلی ۷۵MPa مطابق شکل مفروض می‌باشد. در صورتی که این المان به اندازه °۳۰ ساعتگرد دوران کند مؤلفه‌های جدید تنش در دستگاه ab را تعیین کنید.(بر روی وجه عمود بر محور x هیچ‌گونه تنش برشی وارد نشده است $\tau_{xy} = ۰$)



پاسخ: چون با توجه به فرض سؤال، تنش برشی τ_{xy} مساوی صفر است، بنابراین تنش فشاری ۱۵MPa و تنش کششی σ_y تنش‌های اصلی می‌باشند. $(\sigma_۲ = -۱۵\text{MPa})$، از طرفی در صورت مسئله تنش اصلی حداکثر نیز داده شده است $(\sigma_۱ = ۷۵\text{MPa})$.

بنابراین:

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_۱ + \sigma_۲}{۲} = \frac{۷۵ + (-۱۵)}{۲} = ۳۰\text{MPa}$$

از طرفی مجموع تنش‌های قائم همواره مقداری ثابت است. بنابراین با توجه به مقادیر بدست آمده برای تنش‌های اصلی و همچنین مقادیر تنش‌های σ_x و σ_y بدست آمده از شکل المان فوق می‌توان نوشت:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_۱ + \sigma_۲ \Rightarrow -۱۵ + \sigma_y = ۷۵ + (-۱۵) \Rightarrow \sigma_y = ۷۵\text{MPa}$$