فصل اول

« سیستم‌ها و مبناهای عددی »

نمایش اعداد

الف) رقم: یک رقم مانند a در مبنای r را بصورت $(a)_r$ نشان می‌دهیم که باید دارای شرط $۰ \le a \le r-۱$ یا $۰ \le a < r$ باشد. بنابراین محدودهٔ هر رقم ارتباط مستقیم با مبنای آن رقم دارد که در ادامه مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

ب) عدد: نمایش یک عدد با n رقم صحیح و m رقم اعشار در مبنای r بصورت زیر است:

$$A_r = (a_{n-۱}\, a_{n-۲} \dots a_۱\, a_۰ . a_{-۱}\, a_{-۲} \dots a_{-m})$$

در نمایش فوق هر رقم a_i باید دارای خاصیت $۰ \le a_i \le r-۱$ باشد. همچنین ارزش مکانی هر رقم a_i برابر با r^i است.

اگر عددی مانند A_r را داشته باشیم و بخواهیم معادل آن عدد در مبنای ۱۰ را بدست آوریم از بسط زیر استفاده می‌شود:

$$A_r = (a_{n-۱}a_{n-۲}\dots a_۰ . a_{-۱}a_{-۲}\dots a_{-m}) = \sum_{i=-m}^{n-۱} a_i r^i = a_{n-۱}r^{n-۱} + a_{n-۲}r^{n-۲} + \dots + a_۰ + \dots + a_{-m}r^{-m}$$

در واقع در این بسط باید هر رقم را در ارزش مکانی آن ضرب کرده و سپس حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کرد.

مثال۱: اگر $A = (۲۸۴/۵۴)_{۱۰}$ باشد $(r = ۱۰)$ در اینصورت جدول مقابل در مورد ارقام و ارزش مکانی هر رقم برقرار خواهد بود.

☑ **پاسخ:**

رقم	$a_۲$	$a_۱$	$a_۰ . a_{-۱}$	$a_{-۲}$
ارزش مکانی	$۱۰^۲$	$۱۰^۱$	$۱۰^۰ . ۱۰^{-۱}$	$۱۰^{-۲}$
عدد	۲	۸	۴ / ۵	۴

در این عدد باتوجه به اندیس‌گذاری ذکر شده $a_۰ = ۴$ ، $a_۲ = ۲, a_۱ = ۸$ است. همچنین $a_{-۱} = ۵$ و $a_{-۲} = ۴$ است. ارزش مکانی $a_۰$ برابر $۱۰^۰$ یا ۱، $a_۱$ برابر $۱۰^۱$ یا ۱۰، $a_۲$ برابر $۱۰^۲$ یا ۱۰۰ است. ارزش مکانی $a_{-۱}$ برابر $۱۰^{-۱}$ یا ۰/۱ و ارزش مکانی $a_{-۲}$ برابر $۱۰^{-۲}$ یا ۰/۰۱ است.

مثال۲: معادل اعداد داده شده در مبنای ۱۰ را بدست آورید.

الف) $x = (۷۴۲/۳۱)_۸$　　**ب) $x = (۱۰۱۱۰۱/۰۱)_۲$**

☑ **پاسخ:** الف) در این مثال $a_۲ = ۷$ و ارزش مکانی آن $۸^۲ = ۶۴$ است. $a_۱ = ۴$ و ارزش مکانی آن $۸^۱ = ۸$ ، $a_۰ = ۲$ و ارزش مکانی آن $۸^۰ = ۱$ ، $a_{-۱} = ۳$ و ارزش مکانی آن $۸^{-۱} = \frac{۱}{۸}$ و $a_{-۲} = ۱$ و ارزش مکانی آن $۸^{-۲} = \frac{۱}{۶۴}$ خواهد شد. حال باید هر رقم را در ارزش مکانی آن ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم.

ارزش مکانی	$۸^۲$	$۸^۱$	$۸^۰ . ۸^{-۱}$	$۸^{-۲}$
رقم	۷	۴	۲ / ۳	۱

$$\Rightarrow x = ۷ \times ۸^۲ + ۴ \times ۸^۱ + ۲ \times ۸^۰ + ۳ \times ۸^{-۱} + ۱ \times ۸^{-۲} = ۴۸۲/۳۹۰$$

ب) در این مثال $a_5 = 1$ با ارزش مکانی $2^5 = 32$، $a_4 = 0$ با ارزش مکانی $2^4 = 16$، $a_3 = 1$ با ارزش مکانی $2^3 = 8$، $a_2 = 1$ با ارزش مکانی $2^2 = 4$، $a_1 = 0$ با ارزش مکانی $2^1 = 2$، $a_0 = 1$ با ارزش مکانی $2^0 = 1$، $a_{-1} = 0$ با ارزش مکانی $2^{-1} = \frac{1}{2}$ و $a_{-2} = 1$ با ارزش مکانی $2^{-2} = \frac{1}{4}$ است. حال باید هر رقم را در ارزش مکانی آن ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کرد.

ارزش مکانی	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	$2^0 . 2^{-1}$	2^{-2}
رقم	۱	۰	۱	۱	۰	۱/۰	۱

$$\Rightarrow x = 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 + 0\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} = 45/25$$

مبناهای عددی

مبناهای عددی متداول عبارتند از مبنای ۲ یا باینری (Binary)، مبنای ۸ یا اکتال (Octal)، مبنای ۱۰ یا دسیمال (Decimal) و مبنای ۱۶ یا هگزا دسیمال (Hexadecimal). مبنای ۱۰ همان مبنای متعارف مورد استفادهٔ روزمرهٔ ماست. در ادامه سایر مبناها مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

الف) مبنای دو (Binary): ارقام هر عدد در مبنای ۲، یا صفر است یا یک $(0 \le a_i \le 1)$. بنابراین اعداد زیر اعداد معتبری در مبنای ۲ هستند:

$(1101/011)_2$, $(1111)_2$, $(101101)_2$

ب) مبنای هشت (Octal): ارقام هر عدد در مبنای ۸ بین ۰ تا ۷ هستند $(0 \le a_i \le 7)$.

اعداد روبه‌رو اعداد معتبری در مبنای ۸ هستند:

$(235/46)_8$, $(211/001)_8$, $(110101)_8$

ج) مبنای شانزده (Hexadecimal): همهٔ ارقام هر عدد در مبنای ۱۶ بین ۰ تا ۱۵ هستند $(0 \le a_i \le 15)$. برای اینکه برای نمایش و ذخیره‌سازی هر رقم از یک نماد استفاده شود، برای نمایش ارقام ۱۰ تا ۱۵ به ترتیب از نمادهای A تا F استفاده می‌شود. جدول زیر نشان دهندهٔ این مسأله است:

نمایش	رقم مبنای ۱۶	نمایش	رقم مبنای ۱۶
۸	۸	۰	۰
۹	۹	۱	۱
A	۱۰	۲	۲
B	۱۱	۳	۳
C	۱۲	۴	۴
D	۱۳	۵	۵
E	۱۴	۶	۶
F	۱۵	۷	۷

مثال ۳: اعداد زیر اعداد معتبری در مبنای ۱۶ هستند:

$(A3F40A2)_{16}$, $(A5015)_{Hex}$

جدول زیر نشان دهندهٔ مبناهای متعارف و محدودهٔ ارقام هر مبنا می‌باشد.

محدوده رقم	مبنا (r)
$0 \le a \le 1$	۲
$0 \le a \le 7$	۸
$0 \le a \le 9$	۱۰
$0 \le a \le 15$	۱۶

تبدیل مبناها

۱ـ تبدیل از سایر مبناها به مبنای ۱۰

برای تبدیل یک عدد در مبنای r $(r \ne 10)$ به مبنای ۱۰ از بسط ذکر شده در قسمت ۱-۱ استفاده می‌شود. یعنی هر رقم را باید در ارزش مکانی‌اش ضرب کرده و سپس حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کرد.

مثال ۴: اگر $x=(۳F۵/A۲)_H$ آنگاه معادل مبنای ۱۰ عدد x کدام گزینه است؟

۱) ۱۰۲۴ ۲) ۱۰۱۳/۶۳ ۳) ۲۱۰۳/۳ ۴) ۹۰۵۵/۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» در این مثال رقم $a_۲=۳$ با ارزش مکانی $۱۶^۲=۲۵۶$، رقم $a_۱=F=۱۵$ با ارزش مکانی $۱۶=۱۶^۱$، $a_۰=۵$ با ارزش مکانی $۱=۱۶^۰$، رقم $a_{-۱}=A=۱۰$ با ارزش مکانی $\frac{۱}{۱۶}=۱۶^{-۱}$، رقم $a_{-۲}=۲$ با ارزش مکانی $\frac{۱}{۲۵۶}=۱۶^{-۲}$ است. حال باید هر رقم در ارزش مکانی‌اش ضرب شده و حاصل این ضرب‌ها با هم جمع گردد. بنابراین:

$$x=۳\times۱۶^۲+۱۵\times۱۶+۵\times۱۶^۰+۱۰\times۱۶^{-۱}+۲\times۱۶^{-۲}=۱۰۱۳/۶۳$$

مثال ۵: اگر $A=(۳۶۷۲)_۸$ آنگاه $A=(?)_{۱۰}$.

۱) ۱۹۰۰ ۲) ۱۹۸۴ ۳) ۱۹۷۸ ۴) ۲۰۰۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» در این مثال رقم $a_۳=۳$ با ارزش مکانی $۸^۳$، رقم $a_۲=۶$ با ارزش مکانی $۶۴=۸^۲$، رقم $a_۱=۷$ با ارزش مکانی $۸=۸^۱$ و رقم $a_۰=۲$ با ارزش مکانی $۱=۸^۰$ است. در نهایت باید هر رقم در ارزش مکانی‌اش ضرب شده و حاصل این ضرب‌ها با هم جمع شود.

$$A=(۳۶۷۲)_۸=۳\times۸^۳+۶\times۸^۲+۷\times۸^۱+۲\times۸^۰=۱۹۷۸$$

مثال ۶: اگر $A=(۱۰۱/۰۱۱)_۲$ آنگاه معادل مبنای ۱۰ این عدد کدام گزینه است؟

۱) ۵/۳۷۵ ۲) ۴۳ ۳) ۶/۲۵ ۴) ۲۱/۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» در این مثال رقم $a_۲=۱$ با ارزش مکانی $۴=۲^۲$، رقم $a_۱=۰$ با ارزش مکانی $۲=۲^۱$، رقم $a_۰=۱$ با ارزش مکانی $۱=۲^۰$، رقم $a_{-۱}=۰$ با ارزش مکانی $\frac{۱}{۲}=۲^{-۱}$، رقم $a_{-۲}=۱$ با ارزش مکانی $\frac{۱}{۴}=۲^{-۲}$ و رقم $a_{-۳}=۱$ با ارزش مکانی $\frac{۱}{۸}=۲^{-۳}$ است. در نهایت باید هر رقم در ارزش مکانی‌اش ضرب شده و حاصل این ضرب‌ها با هم جمع شود.

$$A=(۱۰۱/۰۱۱)_۲=۱\times۲^۲+۰\times۲^۱+۱\times۲^۰+۰\times۲^{-۱}+۱\times۲^{-۲}+۱\times۲^{-۳}=۵/۳۷۵$$

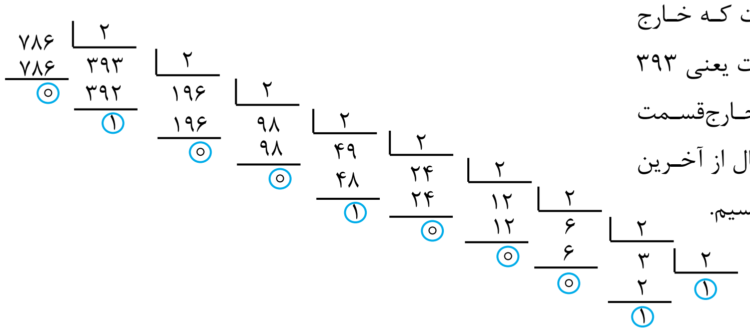
۲ـ تبدیل از مبنای ۱۰ به مبنای ۲

روش اول: با تقسیمات متوالی عدد موردنظر به ۲، آنقدر خارج قسمت‌ها را به ۲ تقسیم می‌کنیم تا آخرین خارج قسمت بدست آمده از ۲ کوچکتر شود. سپس از آخرین مرحله به اولین مرحله، آخرین خارج قسمت و باقی‌مانده‌های بدست آمده را از آخر به اول می‌نویسیم.

مثال ۷: معادل عدد ۷۸۶ در مبنای ۲ کدام گزینه است؟

۱) ۱۰۰۰۰۱۰۱۱۰ ۲) ۱۱۰۱۱۱۰۱۰۱ ۳) ۱۰۰۰۱۱۱۰۱۰ ۴) ۱۱۰۰۰۱۰۰۱۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» در زیر، مقدار اولیهٔ به دو تقسیم شده است که خارج قسمت آن برابر ۳۹۳ و باقیماندهٔ آن صفر شده است. مجدداً خارج قسمت یعنی ۳۹۳ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم و این عمل تقسیم آن قدر تکرار می‌شود تا خارج‌قسمت بدست آمده دیگر به دو قابل تقسیم نباشد (از دو کوچکتر شود). حال از آخرین تقسیم شروع کرده و آخرین خارج‌قسمت و تمامی باقی‌مانده‌ها را می‌نویسیم.



$$(۷۸۶)_{۱۰}=(۱۱۰۰۰۱۰۰۱۰)_۲$$

روش دوم: با در نظر گرفتن توان‌های متوالی عدد ۲ بزرگترین توانی از ۲ را که کوچکتر یا مساوی با عدد موردنظر می‌باشد پیدا می‌کنیم. زیر آن رقم عدد یک گذاشته و به اندازه‌ی آن ارزش مکانی از عدد اولیه کم می‌کنیم. از آن توان ۲ به سمت راست حرکت کرده و هر ارزش مکانی که از باقی‌مانده‌ی تفریق کوچکتر بود در آن محل، یک گذاشته و به همان مقدار از عدد کم می‌کنیم. این روند را تا رسیدن به مقدار صفر ادامه می‌دهیم.

توان‌های متوالی ۲ بصورت زیر است.

معادل دهدهی	توان ۲	معادل دهدهی	توان ۲
۱	$۲^{۰}$	۵۱۲	$۲^{۹}$
۲	$۲^{۱}$	۱۰۲۴	$۲^{۱۰}$
۴	$۲^{۲}$	۲۰۴۸	$۲^{۱۱}$
۸	$۲^{۳}$	۴۰۹۶	$۲^{۱۲}$
۱۶	$۲^{۴}$	۸۱۹۲	$۲^{۱۳}$
۳۲	$۲^{۵}$	۱۶۳۸۴	$۲^{۱۴}$
۶۴	$۲^{۶}$	۳۲۷۶۸	$۲^{۱۵}$
۱۲۸	$۲^{۷}$	۶۵۵۳۶	$۲^{۱۶}$
۲۵۶	$۲^{۸}$		

مثال ۸: معادل عدد ۷۸۶ در مبنای ۲ کدام گزینه است؟

۱) ۱۰۰۰۰۱۰۱۱۰ ۲) ۱۱۰۱۱۱۰۱۰۱ ۳) ۱۰۰۰۱۱۱۰۱۰ ۴) ۱۱۰۰۰۱۰۰۱۰

پاسخ : گزینه «۴» در این روش ابتدا بزرگترین توانی از ۲ را پیدا می‌کنیم که کوچکتر از ۸۷۶ باشد که برابر $۲^{۹}$ یا ۵۱۲ خواهد شد. سپس تمامی توان‌ها را به ترتیب از $۲^{۹}$ تا $۲^{۰}$ می‌نویسیم. در مرحلهٔ بعد از همان $۲^{۹}$ شروع کرده و می‌گوییم $۲^{۹}$ از ۸۷۶ کوچکتر است، پس زیر آن یک گذاشته و به اندازه ۵۱۲ از ۸۷۶ کم می‌کنیم. باقی‌مانده تفریق ۲۷۴ خواهد شد. حال نوبت رقم بعدی یعنی $۲^{۸} = ۲۵۶$ است که چون از ۲۷۴ کوچکتر است زیر آن یک گذاشته و تفریق $۲۷۴ - ۲۵۶$ را انجام می‌دهیم. باقی‌مانده برابر ۱۸ است. چون $۲^{۷}$، $۲^{۶}$، $۲^{۵}$ همگی از ۱۸ بزرگتر هستند زیر آنها صفر می‌گذاریم. اما $۲^{۴}$ برابر ۱۶ و کوچکتر از ۱۸ است پس زیر آن یک گذاشته و تفریق $۲ = ۱۶ - ۱۸$ را انجام می‌دهیم. چون $۲^{۳}$، $۲^{۲}$ از ۲ بزرگتر است زیر آنها صفر می‌گذاریم. در نهایت با یک گذاشتن زیر $۲^{۱}$ و انجام تفریق $۰ = ۲ - ۲$ مقدار باقی‌مانده برابر صفر می‌شود. در این حالت تمامی رقم‌های باقی‌مانده در سمت راست برابر صفر خواهد شد.

$۲^{۹}$	$۲^{۸}$	$۲^{۷}$	$۲^{۶}$	$۲^{۵}$	$۲^{۴}$	$۲^{۳}$	$۲^{۲}$	$۲^{۱}$	$۲^{۰}$
۵۱۲	۲۵۶	۱۲۸	۶۴	۳۲	۱۶	۸	۴	۲	۱
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰

در زیر هر توانی از ۲ که عدد ۱ قرار دادیم به اندازه ارزش مکانی همان رتبه از باقی‌مانده عدد کم می‌کنیم.

۳ــ تبدیل از مبنای ۱۰ به مبنای ۸

روش اول: با تقسیمات متوالی عدد مورد‌نظر به ۸، آنقدر خارج قسمت‌ها را به ۸ تقسیم می‌کنیم تا آخرین خارج قسمت بدست آمده از ۸ کوچکتر شود. سپس از آخرین مرحله به اولین مرحله، آخرین خارج قسمت و باقیمانده‌های بدست آمده را از آخر به اول می‌نویسیم.

مثال ۹: معادل عدد $(۱۳۴۵)_{۱۰}$ در مبنای ۸ کدام گزینه است؟

۱) ۵۱۰۰۱ ۲) ۲۲۵۰ ۳) ۲۵۰۱ ۴) ۱۳۴۵

پاسخ : گزینه «۳»

روش اول: در این مثال، مقدار اولیه یعنی ۱۳۴۵ بر هشت تقسیم شده است که خارج قسمت آن برابر ۱۶۸ و باقی‌ماندهٔ آن برابر یک شده است. مجدداً خارج‌قسمت یعنی ۱۶۸ را بر ۸ تقسیم می‌کنیم و این عمل تقسیم آن قدر تکرار می‌شود تا خارج‌قسمت بدست آمده دیگر به هشت قابل تقسیم نباشد (از هشت کوچکتر شود). در نهایت آخرین خارج‌قسمت و تمامی باقی‌مانده‌ها را از آخر به اول می‌نویسیم.

```
۱۳۴۵ | ۸
۱۳۴۴   ۱۶۸ | ۸
  ۱    ۱۶۸   ۲۱ | ۸
         ۰   ۱۶   ۲
              ۵
```

$$\Rightarrow (۱۳۴۵)_{۱۰} = (۲۵۰۱)_{۸}$$

روش دوم: برای تبدیل عدد از مبنای ۱۰ به مبنای ۸ از همان روش گفته شده برای تبدیل از مبنای ۱۰ به مبنای ۲ استفاده می‌کنیم، ولی این بار توان‌های متوالی ۸ را در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال معادل عدد ۱۳۴۵ در مبنای ۸ بصورت زیر بدست می‌آید:

توان‌های متوالی ۸	$۸^۳$	$۸^۲$	$۸^۱$	$۸^۰$
رقم انتخاب شده	۲	۵	۰	۱

$$(۱۳۴۵)_{۱۰} = ۲\times ۸^۳ + ۵\times ۸^۲ + ۰\times ۸^۱ + ۱\times ۸^۰$$

در اینجا بزرگترین توانی از ۸ را انتخاب می‌کنیم که کوچکتر از ۱۳۴۵ باشد. $۸^۳$ برابر ۵۱۲ بزرگترین توانی از ۸ است که از ۱۳۴۵ کوچکتر است. چون دو تا ۵۱۲ تا می‌توان درون ۱۳۴۵ یافت، زیر $۸^۳$ رقم ۲ گذاشته و سپس به اندازه ۲×۵۱۲ یا ۱۰۲۴ از ۱۳۴۵ کم می‌کنیم. حاصل برابر ۳۲۱ خواهد شد. چون ۵ تا ۶۴ تا می‌توان در ۳۲۱ یافت پس زیر $۸^۲$ رقم ۵ می‌گذاریم و به اندازهٔ ۶۴×۵ یا ۳۲۰ از آن کم می‌کنیم. باقی‌مانده ۱ است که چون $۸^۱$ از آن بزرگتر است زیر آن صفر می‌گذاریم و در نهایت با گذاشتن یک زیر $۸^۰$ تبدیل کامل می‌شود.روش سوم: ابتدا عدد را از مبنای ۱۰ به مبنای ۲ تبدیل کرده و سپس از مبنای ۲ به مبنای ۸ تبدیل می‌کنیم.

۴ــ تبدیل از مبنای ۱۰ به مبنای ۱۶

روش اول: با تقسیمات متوالی عدد موردنظر به ۱۶، آنقدر خارج قسمت‌ها را به ۱۶ تقسیم می‌کنیم تا آخرین خارج قسمت بدست آمده از ۱۶ کوچکتر شود. سپس از آخرین مرحله به اولین مرحله، آخرین خارج قسمت و باقی‌مانده‌های بدست آمده را از آخر به اول می‌نویسیم.

مثال ۱۰: معادل عدد $(۴۷۶۸)_{۱۰}$ در مبنای ۱۶ کدام گزینه است؟

۱) ۴۷۶۸   ۲) ۱۲A۰   ۳) A۲A۰   ۴) ۱۲A۵

پاسخ : گزینه «۲»

روش اول: در این مثال مقدار ۴۷۶۸ را بر ۱۶ تقسیم می‌کنیم تا خارج‌قسمت ۲۹۸ و باقی‌مانده صفر بدست آید. مجدداً خارج‌قسمت یعنی ۲۹۸ را بر ۱۶ تقسیم می‌کنیم تا خارج‌قسمت برابر ۱۸ و باقی‌مانده برابر ده به دست آید. در مرحله سوم ۱۸ را بر ۱۶ تقسیم می‌کنیم تا خارج‌قسمت برابر یک و باقی‌مانده برابر ۲ بدست آید. حال چون آخرین خارج‌قسمت برابر ۱ است که قابل تقسیم بر ۱۶ نمی‌باشد آخرین خارج‌قسمت و باقی‌مانده‌ها را از آخر به اول می‌نویسیم. توجه نمایید که به جای عدد ۱۰ از حرف A استفاده می‌شود.

$$\begin{array}{r|l} ۴۷۶۸ & ۱۶ \\ \hline ۴۷۶۸ & ۲۹۸ \\ ۰ & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} ۲۹۸ & ۱۶ \\ \hline ۲۸۸ & ۱۸ \\ A=۱۰ & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} ۱۸ & ۱۶ \\ \hline ۱۶ & ۱ \\ ۲ & \end{array}$$

$$\Rightarrow (۴۷۶۸)_{۱۰} = (۱۲A۰)_{۱۶}$$

روش دوم: برای تبدیل عدد از مبنای ۱۰ به مبنای ۱۶ از همان روش گفته شده برای تبدیل از مبنای ۱۰ به مبنای ۲ استفاده می‌کنیم، ولی این بار توان‌های متوالی ۱۶ را در نظر می گیریم. به عنوان مثال معادل عدد $(۴۷۶۸)_{۱۰}$ در مبنای ۱۶ بصورت زیر بدست می‌آید:

توان‌های متوالی ۱۶	$۱۶^۳$	$۱۶^۲$	$۱۶^۱$	$۱۶^۰$
رقم انتخاب شده	۱	۲	A	۰

$$\Rightarrow (۴۷۶۸) = ۱\times ۱۶^۳ + ۲\times ۱۶^۲ + ۱۰\times ۱۶^۱ + ۰\times ۱۶^۰$$

در اینجا بزرگترین توانی از ۱۶ را انتخاب می‌کنیم که کوچکتر از ۴۷۶۸ باشد. $۱۶^۳$ برابر ۴۰۹۶ بزرگترین توانی از ۱۶ است که از۴۷۶۸ کوچکتر است. چون یک عدد ۴۰۹۶ می‌توان در ۴۷۶۸ یافت، زیر $۱۶^۳$ رقم یک می‌گذاریم و سپس به اندازهٔ ۴۰۹۶×۱ از ۴۷۶۸ کم می‌کنیم تا حاصل ۶۷۲ بدست آید. در ۶۷۲ می‌توان ۲تا ۲۵۶ یافت، پس زیر $۱۶^۲$ رقم ۲ گذاشته و به اندازه ۵۱۲ از ۶۷۲ کم می‌کنیم تا حاصل ۱۶۰ حاصل شود. در مرحلهٔ آخر زیر $۱۶^۱$ عدد ۱۰ یا A می‌گذاریم چون ۱۶۰ برابر ۱۰تا ۱۶تا خواهد شد.

روش سوم: ابتدا عدد را از مبنای ۱۰ به مبنای ۲ تبدیل کرده و سپس از مبنای ۲ به مبنای ۱۶ تبدیل می‌کنیم.

۵ــ تبدیل از مبنای ۲ به ۸

ارقام قسمت صحیح را از راست به چپ و ارقام قسمت اعشار را چپ به راست، سه رقم سه رقم جدا کرده و سپس معادل مبنای ۱۰ هر ۳ رقم را با وزن ۴ـ۲ـ۱ می‌نویسیم. در صورت کمبود ارقام می‌توان در طرفین عدد صفر اضافه کرد.

$$\begin{array}{ccccc} (\underbrace{۰۰\times} & \underbrace{\times\times\times} & \overleftarrow{\underbrace{\times\times\times}} \;/ & \overrightarrow{\underbrace{\times\times\times}} & \underbrace{\times ۰۰})_۲ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (\times & \times & \times & \times & \times)_۸ \end{array}$$

معادل مبنای ۱۰

مثال۱۱: معادل عدد ۰۱۰۱۱۰/۰۱۱۱۰۰ در مبنای ۸ را بدست آورید.

پاسخ : در این مثال قسمت صحیح را از راست به چپ سه‌بیت سه‌بیت جدا می‌کنیم. سه‌بیتی اول برابر $(110)_2$ یا ۶ و سه‌بیتی دوم برابر $(010)_2$ یا دو است. قسمت اعشار را از چپ به راست سه‌بیت، سه‌بیت جدا می‌کنیم. سه‌بیتی اول برابر $(011)_2$ یا سه و سه‌بیتی دوم برابر $(100)_2$ یا چهار خواهد شد. حال این ارقام را به همان ترتیب در کنار هم می‌گذاریم. بنابراین داریم: $(26/34)_8$

$$\begin{array}{cccc} 421 & 421 & 421 & 421 \\ (010 & 110 / & 011 & 100)_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 6 & 3 & 4 \end{array} \Rightarrow (010110/011100)_2 = (26/34)_8$$

۶ــ تبدیل از مبنای ۲ به مبنای ۱۶

ارقام قسمت صحیح را از راست به چپ و ارقام قسمت اعشار را از چپ به راست، چهار رقم چهار رقم جدا کرده و سپس معادل مبنای ۱۶ هر ۴ رقم را با وزن ۱ـ۲ـ۴ـ۸ می‌نویسیم. در صورت کمبود ارقام می‌توان در طرفین عدد صفر اضافه کرد.

$$\begin{array}{ccc} (00\times\times & \times\times\times\times / & \times\times\times 0)_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (\times & \times & \times)_{16} \end{array}$$

معادل مبنای ۱۶

مثال۱۲: معادل عدد $(101110/01)_2$ در مبنای ۱۶ را بدست آورید.

پاسخ : در این مثال قسمت صحیح را از راست به چپ چهاربیت چهاربیت جدا می‌کنیم. چهاربیتی اول برابر $(1110)_2$ یا چهارده خواهد شد که از حرف E استفاده می‌کنیم. بعد از آن دو بیت ۱۰ وجود دارد که دو تا صفر در سمت چپ آن می‌گذاریم پس مقدار $(0010)_2$ یا رقم ۲ بدست می‌آید. در قسمت اعشار چون دوبیت ۰۱ وجود دارد در سمت راست آن دو تا صفر می‌گذاریم تا ۴ بیتی بصورت $(0100)_2$ شود که برابر مقدار چهار خواهد شد. حال این ارقام را کنار هم می‌گذاریم.

$$\begin{array}{ccc} 8421 & 8421 & 8421 \\ 0010 & 1110 / & 0100 \end{array} \rightarrow (2E/4)_{Hex}$$

۷ــ تبدیل از مبنای ۸ به مبنای ۲

معادل هر رقم مبنای ۸ را به صورت یک عدد سه بیتی با در نظر گرفتن وزن ۱ـ۲ـ۴ در مبنای دو می‌نویسیم.
دقت نمایید که باید حتماً معادل رقم را در سه‌بیت بنویسیم. بنابراین اگر مثلاً رقم ۳ را از مبنای ۸ به مبنای دو تبدیل کنیم حاصل برابر ۱۱ خواهد شد یعنی باید درسمت چپ ۱۱ یک صفر بگذاریم تا حاصل به صورت سه‌بیتی شود.

مثال۱۳: در این مثال رقم ۴ در مبنای ۸ معادل ۱۰۰ در مبنای دو، رقم ۲ در مبنای ۸ معادل ۰۱۰ در مبنای دو، رقم یک در مبنای ۸ معادل ۰۰۱ در مبنای دو است. در قسمت اعشار هم، همین ارقام مجدداً تکرار شده‌اند. در نهایت این معادل‌های بدست آمده را کنار هم می‌گذاریم تا معادل مبنای دو بدست آید.

$$(421/14)_8 \rightarrow (100\ 010\ 001/001\ 100)_2$$

۸ــ تبدیل از مبنای ۱۶ به ۲

معادل هر رقم مبنای ۱۶ را به صورت یک عدد دو دویی چهار بیتی با در نظر گرفتن وزن ۱ـ۲ـ۴ـ۸ می‌نویسیم. دقت نمایید که باید حتماً معادل هر رقم را در چهاربیت بنویسیم. بنابراین اگر مثلاً رقم ۵ را از مبنای ۱۶ به مبنای دو تبدیل کنیم حاصل برابر ۰۱۰۱ خواهد شد.یا معادل رقم ۳ در مبنای ۱۶ برابر ۰۰۱۱ درمبنای دو خواهد شد. یعنی باید در سمت چپ به تعدادی صفر بگذاریم که تبدیل شدهٔ هر رقم ۴بیتی شود.

مثال۱۴: در این مثال رقم ۳ در مبنای ۱۶ معادل ۰۰۱۱ در مبنای دو، رقم F در مبنای ۱۶ معادل ۱۱۱۱ در مبنای دو، رقم ۵ در مبنای ۱۶ معادل ۰۱۰۱ در مبنای دو، رقم دو در مبنای ۱۶ معادل ۰۰۱۰ در مبنای دو، رقم یک در مبنای ۱۶ معادل ۰۰۰۱ در مبنای دو خواهد شد. حال این مقادیر را به همین ترتیب کنار هم می‌گذاریم.

$$(3F5/21)_{16} \rightarrow (0011\ 1111\ 0101/0010\ 0001)_2$$

۹ـ تبدیل از مبنای ۸ به ۱۶ و ۱۶ به ۸

از مبنای ۲ به عنوان یک مبنای واسط استفاده می‌شود. برای تبدیل عدد از مبنای ۱۶ باید ابتدا عدد را از مبنای ۸ به مبنای دو تبدیل کرد. سپس مقدار را از مبنای دو به مبنای ۱۶ تبدیل کرد. برای تبدیل عدد از مبنای ۱۶ به مبنای ۸ باید ابتدا عدد را از مبنای ۱۶ به مبنای دو تبدیل کرد، سپس مقدار را از مبنای دو به مبنای هشت تبدیل کرد.

مثال ۱۵: تبدیل از مبنای ۱۶ به مبنای ۸ $(ACB/۲D)_H = (۵۳۱۳/۱۳۲)_{Oct}$:

پاسخ : در این مثال رقم A در مبنای ۱۶ معادل ۱۰۱۰ در مبنای دو، رقم C در مبنای ۱۶ معادل ۱۱۰۰ در مبنای دو، رقم B در مبنای ۱۶ معادل ۱۰۱۱ در مبنای دو، رقم ۲ در مبنای ۱۶ معادل ۰۰۱۰ در مبنای دو و رقم D برابر ۱۱۰۱ در مبنای دو خواهد شد. حال همین مقادیر را به همین ترتیب کنار هم می‌گذاریم. سپس این مقدار را سه‌بیت سه‌بیت جدا کرده و به مبنای هشت تبدیل می‌کنیم.

$$(A\ \ C\ \ B\ /\ ۲\ \ D)_{۱۶}$$
$$(۱۰۱۰\ \ ۱۱۰۰\ \ ۱۰۱۱\ /\ ۰۰۱۰\ \ ۱۱۰۱۰)_۲$$
$$(۵\ \ ۳\ \ ۱\ \ ۳\ /\ ۱\ \ ۳\ \ ۲)_۸$$

نکته ۱: جداسازی ارقام قبل از اعشار، از سمت راست به چپ ولی جداسازی ارقام بعد از اعشار، از سمت چپ به راست می‌باشد.

مثال ۱۶: تبدیل از مبنای ۸ به مبنای ۱۶ $(۷۶۳/۲۴۵)_۸ = (۱F۳/۵۲۸)_{۱۶}$:

پاسخ : در این مثال ابتدا هر رقم مبنای هشت را در سه‌بیت نوشته و مقدار را به مبنای دو تبدیل می‌کنیم. در مرحلهٔ بعد این مقدار را چهاربیت، چهاربیت جدا کرده و مقدار را از مبنای دو به مبنای ۱۶ تبدیل می‌کنیم.

$$(۷\ \ ۶\ \ ۳\ /\ ۲\ \ ۴\ \ ۵)_۸$$
$$(۰۰۰۱۱۱\ \ ۱۱۰\ \ ۰۱۱\ /\ ۰۱۰\ \ ۱۰۰\ \ ۱۰۱۰۰۰)_۲$$
$$(۱\ \ F\ \ ۳\ /\ ۵\ \ ۲\ \ ۸)_{۱۶}$$

جمع در مبناهای مختلف عددی

برای جمع دو عدد چند رقمی در هر مبنای دلخواه، نظیر به نظیر ارقام دو عدد را با هم جمع می‌کنیم و طبق قاعده زیر، رقم حاصل جمع و رقم نقلی تولید می‌شود. اگر A و B دو عدد فرض شوند داریم:

$$\begin{array}{lcccccc} & C_{n-۱} & C_{n-۲} & C_{n-۳} & \cdots & C_۱ & \\ A= & a_n & a_{n-۱} & a_{n-۲} & \cdots & a_۲ & a_۱ \\ B= & b_n & b_{n-۱} & b_{n-۲} & \cdots & b_۲ & b_۱ \\ \hline C_n & S_n & S_{n-۱} & S_{n-۲} & \cdots & S_۲ & S_۱ \end{array}$$

$$S_i = (a_i + b_i + c_{i-۱}) \bmod r$$
$$C_i = (a_i + b_i + c_{i-۱}) \operatorname{div} r$$

در هر مرحله از عمل جمع، یک رقم از عدد A یعنی a_i، یک رقم از عدد B یعنی b_i و یک رقم نقلی که از جمع رتبهٔ پایین‌تر بدست آمده یعنی $c_{i-۱}$ با هم جمع می‌شوند. در نتیجهٔ این عمل جمع یک رقم حاصل‌جمع یعنی S_i و یک رقم نقلی به نام c_i تولید می‌شود. این رقم نقلی برای رتبهٔ بعدی به عنوان نقلی ورودی محسوب می‌شود. برای بدست آوردن رقم حاصل‌جمع باید سه رقم a_i، b_i، $c_{i-۱}$ را با هم جمع کرده و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر r را بدست آورد. در مورد رقم نقلی باید خارج‌قسمت تقسیم $(a_i + b_i + c_{i-۱})$ بر r را بدست آورد.

مثال ۱۷: اگر $A = (۱۱۰۱۱۰)_۲$ و $B = (۱۱۱۰۱)_۲$ آنگاه A+B کدام گزینه است؟

۱) ۱۰۱۰۰۱۱　　۲) ۱۰۰۱۰۰۱　　۳) ۱۱۰۰۰۱۱　　۴) ۱۰۱۰۱۰۱

پاسخ : گزینه «۱» در این مثال اعداد مبنای دو هستند یعنی $r = ۲$ است. بنابراین در اولین طبقه از سمت راست ۰ با یک جمع می‌شود که باقی‌ماندهٔ تقسیم $(۰+۱)$ بر ۲ برابر یک و خارج‌قسمت آن برابر صفر است. پس رقم حاصل‌جمع برابر یک و رقم نقلی برابر صفر خواهد شد. مثلاً در طبقه سوم باقی‌مانده تقسیم $(۰+۱+۱)$ بر دو برابر صفر و خارج‌قسمت آن برابر صفر خواهد شد پس رقم حاصل‌جمع برابر صفر و رقم نقلی برابر یک خواهد شد و همین عمل در طبقه‌های بعدی هم تکرار خواهد شد.

$$\begin{array}{ccccccc} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & \\ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ & & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ \hline ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{array}$$

مثال ۱۸: اگر $A=(1753)_8$ و $B=(632)_8$ آنگاه A+B کدام گزینه است؟

۱) ۲۶۰۰ ۲) ۲۶۰۵ ۳) ۱۴۰۵ ۴) ۲۸۰۴

پاسخ: گزینه «۲» در این مثال مبنا برابر $r=8$ است. بنابراین در اولین طبقهٔ جمع ۳ با ۲ جمع می‌شود که باقی‌ماندهٔ تقسیم $(2+3)$ بر ۸ برابر ۵ و خارج‌قسمت آن برابر صفرخواهد شد. پس رقم حاصل‌جمع برابر ۵ و رقم نقلی برابر صفر خواهد شد. در طبقهٔ دوم سه رقم ۵ و۳و ۰ با هم جمع می‌شوند که باقی‌ماندهٔ تقسیم $(5+3+0)$ بر ۸ برابر صفر و خارج‌قسمت آن برابر یک خواهد شد. پس رقم حاصل جمع برابر صفر و رقم نقلی برابر یک می‌شود و همین عمل در طبقه‌های بعدی تکرار می‌شود.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 7 & 5 & 3 \\ & 6 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 6 & 0 & 5 \end{array}$$

مثال ۱۹: اگر $X=(A1B)_{Hex}$ و $Y=(FA2)_{Hex}$ آنگاه X+Y کدام گزینه است؟

۱) 19BD ۲) ۱۹۱۱۱۳ ۳) 9BD ۴) 20CE

پاسخ: گزینه «۱» در این مثال مبنا برابر $r=16$ است. در اولین طبقهٔ جمع۲ با B یعنی ۱۱ جمع می‌شود که باقی‌ماندهٔ تقسیم $(2+11)$ بر ۱۶ برابر ۱۳ و خارج‌قسمت آن برابر صفر خواهد شد. پس رقم حاصل‌جمع برابر $D=13$ و رقم نقلی برابر صفر خواهد شد. در طبقهٔ سوم سه رقم F, A, 0 با هم جمع می‌شوند که باقی‌ماندهٔ تقسیم $(15+10+0)$ بر ۱۶ برابر ۹ و خارج‌قسمت آن برابر یک خواهد شد. پس رقم حاصل‌جمع برابر ۹ و رقم نقلی برابر یک خواهد شد و همین عمل دائماً تکرار خواهد شد.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \\ & F & A & 2 \\ & A & 1 & B \\ \hline 1 & 9 & B & D \end{array}$$

مثال ۲۰: اگر $A=(742/25)_8$ و $B=(364/73)_8$ آنگاه $(A+B)_8$ کدام گزینه است؟

۱) ۱۳۲۷۲۰ ۲) ۱۳۲۷/۲۰ ۳) ۲۳۱۰۷۲ ۴) ۱۰۷۰۲۳۲

پاسخ: گزینه «۲» روش انجام عمل جمع دقیقاً همانند مثال ۱۸ است. توجه نمایید که وجود یا عدم وجود ممیز هیچ تأثیری در روش عمل جمع ندارد.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & & 1 & \\ & 7 & 4 & 2 & / & 2 & 5 \\ & 3 & 6 & 4 & / & 7 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 2 & 7 & / & 2 & 0 \end{array}$$

مثال ۲۱: اگر $A=(101011/10)_2$ و $B=(1101/11)_2$ آنگاه ۹۰۵۵/۱ کدام گزینه است؟

۱) ۱۱۱۰۰۱/۰۱ ۲) ۱۰۰۱۱۰/۰۱ ۳) ۱۱۰۱۰۱/۰۱ ۴) ۱۱۰۰۰۱/۱۰

پاسخ: گزینه «۱» روش انجام عمل جمع دقیقاً همانند مثال ۱۷ است. توجه نمایید که وجود یا عدم وجود ممیز هیچ تأثیری در روش عمل جمع ندارد.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & / & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & / & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & / & 0 & 1 \end{array}$$

مکمل‌گیری از اعداد

الف) مکمل r: برای اینکه از یک عدد مانند A در مبنای r، مکمل r بگیریم $(A^{r's\,com})$ باید اولین رقم سمت راست غیرصفر را از r و مابقی را از $(r-1)$ کم کنیم. صفرهای سمت راست عدد، در صورت وجود، بدون تغییر نوشته می‌شوند.

مثال ۲۲: در این مثال در اولین عدد یعنی $(1011)_2$ چون مبنای ۲ = r است اولین رقم غیرصفر از سمت راست از ۲ و بقیهٔ ارقام بعدی از یک کم می‌شود. در دومین عدد یعنی $(571)_8$ چون مبنای ۸ = r است، اولین رقم غیرصفر از سمت راست از ۸ و بقیهٔ ارقام بعدی از هفت کم می‌شود. در سومین عدد یعنی $(BE2)_{Hex}$ چون مبنای ۱۶ = r است، اولین رقم غیرصفر از سمت راست از ۱۶ و بقیه ارقام بعدی از ۱۵ کم می‌شوند. پس در یک جمله می‌توان گفت برای گرفتن مکمل r باید اولین رقم غیرصفر از سمت راست از r و بقیه ارقام از $r-1$ کم شود. یادآوری می‌نماییم که اگر در سمت راست عدد صفر وجود داشته باشد، این صفرها بدون تغییر باید نوشته شوند.

$$A=(1011)_2 \quad , \quad r=2 \qquad \Rightarrow A^{2's\,com}=\left(\begin{array}{cccc} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)=(0101)_2$$

$$A=(571)_8 \quad , \quad r=8 \qquad \Rightarrow A^{8's\,com}=\left(\begin{array}{ccc} -7 & -7 & -8 \\ 5 & 7 & 1 \end{array}\right)=(207)_8$$

$$A=(BE2)_{Hex} \quad , \quad r=16 \quad \Rightarrow A^{16's\,com}=\left(\begin{array}{ccc} -15 & -15 & -16 \\ B & E & 2 \end{array}\right)=(41E)_{Hex}$$

ب) مکمل $(r-1)$: برای اینکه از یک عدد مانند A در مبنای r، مکمل $r-1$ بگیریم $(A^{(r-1)'s\,com})$ باید تک‌تک ارقام را از $r-1$ کم کنیم.

مثال ۲۳:

$$A=(1011)_2\ ,\ r=2 \Rightarrow A^{1's\,com}=\left(\begin{matrix}-1&-1&-1&-1\\1&0&1&1\end{matrix}\right)=(0100)_2$$

$$A=(571)_8\ ,\ r=8 \Rightarrow A^{7's\,com}=\left(\begin{matrix}-7&-7&-7\\5&7&1\end{matrix}\right)=(206)_8$$

$$A=(BE2)_{Hex}\ ,\ r=16 \Rightarrow A^{15's\,com}=\left(\begin{matrix}-15&-15&-15\\B&E&2\end{matrix}\right)=(41D)_{16}$$

در این مثال در اولین عدد یعنی $(1011)_2$ چون مبنای $r=2$ است باید تک‌تک ارقام بصورت جداگانه از یک کم شوند. در دومین عدد یعنی $(571)_8$ چون مبنای $r=8$ است باید تک‌تک ارقام بصورت جداگانه از هفت کم شوند. در سومین عدد یعنی $(BE2)_{Hex}$ چون مبنای $r=16$ است باید تک‌تک ارقام بصورت جداگانه از پانزده کم شوند. پس در یک جمله می‌توان گفت برای گرفتن مکمل $(r-1)$ باید تک‌تک ارقام را از $r-1$ کم کرد.

نکته ۲: روش تستی بدست آوردن مکمل ۱: همه ۱ها را به صفر و همه صفرها را به یک تبدیل کنید.

نکته ۳: جهت تعیین مکمل ۲ یک عدد از سمت راست به چپ عدد تا رسیدن به اولین ۱ همه بیت‌ها را عیناً بنویسید. اولین ۱ را هم نوشته و بیت‌های بعد از آن را Not کنید.

نکته ۴: همواره اگر مکمل $r-1$ یک عدد را با یک جمع نماییم، مکمل r آن عدد به دست می‌آید. یعنی: $A^{r's\,com}=A^{(r-1)'s\,com}+1$

نمایش اعداد علامت‌دار

برای نمایش اعداد علامت‌دار (مثبت یا منفی) سه روش متداول وجود دارد که عبارتند از:

الف) روش علامت ـ مقدار		ب) روش مکمل r		ج) روش مکمل $(r-1)$

الف ـ روش علامت ـ مقدار: در این روش سمت چپ‌ترین رقم به عنوان رقم علامت است. طبق قرارداد اگر این رقم برابر صفر باشد علامت مثبت و اگر این رقم برابر $r-1$ باشد علامت منفی است. بنابراین عدد $A_r=\pm(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0.a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m})$ بصورت $A_r=(Sa_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0.a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m})$ نمایش داده می‌شود که اگر $s=0$ باشد عدد مثبت است و اگر $S=r-1$ باشد عدد منفی است. در این روش به عنوان مثال:

$r=2 \Rightarrow N=-(13)_{10}=-(1101)_2=(1{,}1101)_{2sm}$

$r=10 \Rightarrow N=-(13)_{10}=(9{,}13)_{10sm}$

در مثال‌های بالا در مبنای دو بیت علامت یک به معنای منفی بودن عدد ۱۱۰۱ است. همچنین در مبنای ده $(r=10)$ چون رقم علامت برابر $r-1=9$ است به معنای منفی بودن ۱۳ است. نکات زیر در خصوص این روش قابل ذکر است:

نکته ۵: عدد صفر در این روش دارای دو نمایش خواهد بود به‌عنوان مثال در مبنای دو ۰۰۰۰۰ به معنای $+0$ و ۱۰۰۰۰ به معنای -0 خواهد بود.

نکته ۶: اگر A یک عدد n رقمی صحیح در مبنای r باشد که سمت چپ‌ترین رقم آن به‌عنوان رقم علامت در نظر گرفته شود آنگاه حداکثر مقدار A برابر $r^{n-1}-1$ و حداقل آن برابر $-(r^{n-1}-1)$ خواهد شد. مثلاً اگر عدد ۵بیتی در مبنای دو فرض کنیم که سمت چپ‌ترین بیت، بیت علامت باشد بزرگترین عدد قابل نمایش با آن برابر ۰۱۱۱۱ یا ۱۵+ و حداقل آن برابر ۱۱۱۱۱ یا ۱۵- یا $15=1-2^{5-1}$ و $-15=-(2^{5-1}-1)$ خواهد شد. به عنوان مثال دیگر در مبنای ده اگر عددی را ۵ رقمی فرض کنیم که سمت چپ‌ترین رقم، رقم علامت باشد بزرگترین عدد قابل نمایش با آن برابر $09999=10^{5-1}-1$ و حداقل آن برابر $-9999=-(10^{5-1}-1)$ خواهد شد.

ب ـ روش مکمل r: در این روش اعداد مثبت به همان صورت علامت‌ـ مقدار نشان داده می‌شوند ولی اعداد منفی بصورت مکمل r اعداد مثبت نشان داده می‌شوند. در روش مکمل مبنای r که به آن روش متمم مبنا هم گفته می‌شود برای منفی کردن عدد $(N)_r$ مکمل r آن یعنی $[N]_r$ محاسبه می‌شود که هم می‌توان از روش گفته شده در قسمت مکمل‌گیری استفاده کرد و هم از رابطهٔ $[N]_r=r^n-(N)_r$ استفاده کرد که در این رابطه n تعداد ارقام عدد N است. در این روش بزرگترین عدد مثبت n رقمی قابل نمایش در مبنای r برابر $r^{n-1}-1$ و کوچکترین عدد منفی برابر $-r^{n-1}$ می‌باشد. یعنی $-r^{n-1}\le(N)_r\le r^{n-1}-1$. به عنوان مثال در مبنای دو بزرگترین عدد ۴رقمی قابل نمایش برابر $2^{4-1}-1$ یا ۷ و کوچکترین عدد ۴رقمی قابل نمایش برابر -2^{4-1} یا -8 خواهد شد.

نکته ۷: در حالت مبنای دو اگر عدد مبنای دو را با $(N)_۲$ نشان دهیم داریم: $[N]_۲ = ۲^n - (N)_۲$

نکته ۸: در این روش همواره رابطه $(N)_r + [N]_r = ۰$ برقرار است.

نکته ۹: از این پس نمایش مکمل ۲ را با نماد ۲cns نشان می‌دهیم.

جـ ـ روش مکمل $(r-۱)$: در این روش اعداد مثبت به همان صورت علامت مقدار نشان داده می‌شوند ولی اعداد منفی بصورت مکمل $(r-۱)$ اعداد مثبت نشان داده می‌شوند. در روش مکمل مبنای $(r-۱)$ که به آن روش متمم مبنای منهای یک هم گفته می‌شود برای منفی کردن عدد $(N)_r$ مکمل $(r-۱)$ آن یعنی $[N]_{r-۱}$ محاسبه می‌شود که هم می‌توان از روش گفته شده در قسمت قبل استفاده کرد و هم از رابطهٔ $[N]_{r-۱} = r^n - (N)_r - ۱$ استفاده کرد که در این رابطه n تعداد ارقام عدد N است. در این روش بزرگترین عدد مثبت n رقمی قابل نمایش در مبنای r برابر $r^{n-۱} - ۱$ و کوچکترین عدد منفی برابر $-(r^{n-۱} - ۱)$ می‌باشد.

نکته ۱۰: همواره رابطهٔ $[N]_r = [N]_{r-۱} + ۱$ برقرار است که در این رابطه عدد N عددی صحیح است.

نکته ۱۱: در حالت کلی در هر سه روش علامت‌ـ مقدار، مکمل r و مکمل $(r-۱)$ اگر سمت چپ‌ترین رقم برابر صفر باشد عدد مثبت و در غیر اینصورت عدد منفی است.

نکته ۱۲: به ویژه در مبنای دو برای عدد nبیتی A، در سیستم علامت‌ـ مقدار و مکمل ۱ دامنهٔ عدد بصورت $-(۲^{n-۱} - ۱) \le A \le ۲^{n-۱} - ۱$ و در سیستم مکمل ۲ دامنه عدد بصورت $-۲^{n-۱} \le A \le ۲^{n-۱} - ۱$ می‌باشد.

نکته ۱۳: مکمل $r-۱$ عدد A با n رقم صحیح و m رقم اعشاری در مبنای r بصورت $[A]_{r-۱} = r^n - r^{-m} - N$ بدست می‌آید.

نکته ۱۴: اگر N عددی اعشاری با n رقم صحیح و m رقم اعشاری باشد داریم: $[N]_r = [N]_{r-۱} + r^{-m}$

مثال ۲۴: **اگر $(۱۰۱۰۰)_۲ = (۲۰)_{۱۰}$ آنگاه ۲۰- به روش مکمل ۱ و مکمل ۲ بصورت زیر خواهد شد.**

به روش مکمل ۱: $(-۲۰)_{۱۰} \xrightarrow{۱'S\ com} (۰۱۰۱۱)_۲ \qquad -۲۰ = (۰۱۰۱۱)_۲^{۱'com}$

به روش مکمل ۲: $(-۲۰)_{۱۰} \xrightarrow{۲'S\ com} (۰۱۱۰۰)_۲ \qquad -۲۰ = (۰۱۱۰۰)_۲^{۲'com}$

محاسبات در سیستم مکمل دو

طبق بحث ارائه شده در قسمت قبل دامنهٔ عدد nبیتی A که عددی علامت‌دار است بصورت $-۲^{n-۱} \le A \le ۲^{n-۱} - ۱$ است. به عنوان مثال اگر A یک عدد ۵بیتی باشد بزرگترین عدد مثبت برابر $۲^{۵-۱} - ۱ = ۱۵$ یا $(۰۱۱۱۱)_۲$ و کوچکترین عدد منفی برابر $-۱۶ = -۲^{۵-۱}$ یا $(۱۰۰۰۰)_۲$ می‌باشد. بنابراین کامپیوترهایی که از سیستم محاسبات مکمل ۲ استفاده می‌کنند اعداد صحیح در دامنهٔ فوق را می‌پذیرند. حال اگر حاصل عملی خارج از دامنهٔ فوق باشد یعنی $A > ۲^{n-۱} - ۱$ یا $A < -۲^{n-۱}$ شود می‌گوییم سرریز رخ داده است. در چنین حالتی عدد n بیتی حاصل حاوی نتیجهٔ صحیح نمی‌باشد.

برای نشان دادن محاسبات در سیستم مکمل ۲ سه حالت را در نظر می‌گیریم: $x = y + z$، $x = y - z$ و $x = -y - z$. هر مورد را بصورت جداگانه مورد بحث قرار می‌دهیم. در تمام موارد فرض می‌شود که $y \ge ۰$ و $z \ge ۰$.

الف‌ـ محاسبهٔ $x = y + z$: چون هر دو مقدار y و z منفی نیستند، حاصل نیز منفی نخواهد بود و داریم:
$(x)_۲ = (y)_۲ + (z)_۲$. در این حالت تنها مشکلی که می‌تواند پیش آید وقوع سرریز یعنی خروج حاصل از دامنه مجاز است.

مثال ۲۵: **اگر اعداد ۵بیتی فرض شوند حاصل $(۶)_{۱۰} + (۸)_{۱۰}$ و $(۶)_{۱۰} + (۱۳)_{۱۰}$ را بدست می‌آوریم:**

☑ **پاسخ:** توجه نمایید که چون هر دو عدد مثبت هستند بیت علامت هر دو عدد ۰ است. بنابراین:

$$\begin{aligned} +(۸)_{۱۰} &= +(۱۰۰۰)_۲ = (۰۱۰۰۰)_{۲cns} \\ +(۶)_{۱۰} &= +(۰۱۱۰)_۲ = (۰۰۱۱۰)_{۲ns} \end{aligned} \Rightarrow \begin{array}{r} ۰۱۰۰۰ \\ +\quad ۰۰۱۱۰ \\ \hline ۰۱۱۱۰ \end{array}$$