فصل اول

«کلیات»

❖ **تعریف سیال:** سیال ماده‌ای است که حتی یک تنش برشی کوچک نیز باعث تغییر شکل پیوسته آن شود.

سیال می‌تواند به صورت مایع یا گاز باشد.

برعکس، ماده جامد وقتی تحت تأثیر تنش برشی قرار بگیرد، دچار تغییر شکل محدود و مشخصی می‌شود (یا به طور کلی می‌شکنند).

تاثیر تنش برشی روی جامد و سیال

مقایسه جامدات و سیالات:

۱ـ جامدات دارای شکل مشخص و معینی هستند ولی سیالات شکل معینی ندارند.

۲ـ سیالات به شرط ساکن نبودن، (سیال، ماده‌ای است که در حالت سکون نمی‌تواند در برابر تنش برشی مقاومت کند) قادر به تحمل هر میزانی از تنش برشی هستند، در حالی که جامدات تنها تا تنش تسلیم می‌توانند تنش برشی را تحمل کنند.

۳ـ سیالات تحت تأثیر تنش برشی هر چند ناچیز به طور پیوسته تغییر شکل و حرکت خواهند داشت، در حالی که جسم جامد می‌تواند در برابر تنش برشی مقاومت کند و تغییر شکل محدود و مشخصی دارد.

تقسیم‌بندی مکانیک سیالات:

- ۱) استاتیک سیالات:
  - ۱ـ هیدرواستاتیک: استاتیک **سیالات** تراکم‌ناپذیر (مایعات)
  - ۲ـ آئرواستاتیک: استاتیک **سیالات** تراکم‌پذیر (گازها)
- ۲) دینامیک سیالات:
  - ۱ـ هیدرودینامیک: دینامیک **جریان** تراکم‌ناپذیر
  - ۲ـ آئرودینامیک: دینامیک **جریان** تراکم‌پذیر

نکته ۱: جریان گازها با عدد ماخ کوچک‌تر از ۰/۳ را می‌توان با روابط هیدرودینامیک تحلیل نمود (تراکم‌ناپذیر فرض می‌شود).

سیالات و محیط پیوسته: هر چند سیال متشکل از تعداد بی‌شماری مولکول است و در نتیجه یک خاصیت سیال (مانند دما) در واقع برآیند خواص مولکول‌ها می‌باشد، ولی در کاربردهای مهندسی سیال یک محیط پیوسته (و نه محیطی متشکل از مولکول‌های جدا از هم) در نظر گرفته می‌شود. این فرض در اکثر مسائل سیالات معتبر است به جز مواردی که فاصله مولکول‌های سیال قابل مقایسه با ابعاد مسأله باشد، مثلاً بررسی پرواز یک جسم بسیار کوچک در لایه‌های بالای اتمسفر (جایی که فاصله مولکول‌های هوا از هم زیاد است). در چنین مواردی قوانین مکانیک سیالات پیوسته صادق نیست و باید از تحلیل‌های مولکولی استفاده شود.

خواص سیال و جریان:

خواص مورد مطالعه در مکانیک سیالات به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱ـ خواصی که مشخصه ذاتی یک سیال بوده و به نحوه جریان آن مربوط نیستند، **خواص سیال** نامیده می‌شوند، مانند لزجت و کشش سطحی.

۲ـ خواصی که مشخصه ذاتی یک سیال نبوده و به نحوه جریان آن مربوط هستند، **خواص جریان** نامیده می‌شوند، مانند فشار و جرم مخصوص.

درسنامه (۱): قانون لزجت (ویسکوزیته) نیوتن

در یک جریان منظم که ذرات سیال خطوط مستقیم و موازی را می‌پیمایند (جریان موازی یک بعدی)، برای سیالات بخصوصی به نام سیالات نیوتنی، تنش برشی روی سطحی مماس بر امتداد جریان متناسب است با میزان تغییر سرعت در راستای عمود بر آن سطح.

(n امتداد عمود بر راستای جریان است.)

$$\boxed{\tau=\mu\frac{\partial V}{\partial n}}$$

در رابطه قانون لزجت (ویسکوزیته) نیوتن، μ لزجت دینامیکی بوده و واحد آن در سیستم واحدهای مختلف عبارت است از:

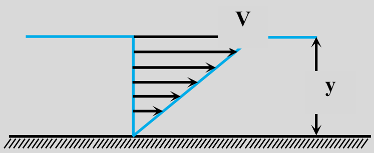
$$\frac{kg}{m.s}=\frac{N.s}{m^{2}}=pa.s \quad , \quad \frac{slug}{ft.s} \quad , \quad (\text{پواز})\ Poise=\frac{g}{cm.s} \quad , \quad cp=0/001\,pa.s$$

بعد لزجت دینامیکی، $ML^{-1}T^{-1}$ یا $FL^{-2}T$ است.

نکته ۲: اگر ضخامت سیال نازک باشد، نمودار سرعت به صورت خطی خواهد بود:

$$\tau=\mu\frac{dV}{dy}=\mu\frac{V-0}{y}$$

$$\boxed{\tau=\mu\frac{V}{y}}$$



پروفیل سرعت در سیال با ضخامت نازک

توجه شود که روی صفحه پایینی سرعت ذرات سیال صفر است (شرط مرزی عدم لغزش)، اما اگر سطح پایینی حرکت داشته باشد به جای سرعت V، سرعت نسبی بین دو صفحه قرار داده می‌شود.

شرط مرزی عدم لغزش (no slip): سیال در مرز تماس با جامد به آن می‌چسبد و در نتیجه سرعت آن با سرعت مرز جامد یکسان است.

لزجت دینامیکی بیانگر مقاومت سیال در مقابل تنش برشی بوده و اساس مکانیزم انتقال ممنتوم در سیال است. لزجت دینامیکی زمانی ظاهر می‌شود که بین لایه‌های سیال، حرکت نسبی وجود داشته باشد.

نکته ۳: قانون لزجت نیوتن فقط برای جریان آرام صادق است.

از قانون لزجت نیوتن استنباط می‌شود که سیال ساکن دارای هیچ گونه تنش برشی نیست. همچنین تنش برشی در صورتی ایجاد می‌شود که بین لایه‌های سیال اختلاف سرعت وجود داشته باشد.

بنا به تعریف، لزجت سینماتیکی (ν) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\nu=\frac{\mu}{\rho}}$$

واحدهای مختلف ν عبارتند از:

$$\frac{m^{2}}{s} \quad , \quad \frac{ft^{2}}{s} \quad , \quad \frac{cm^{2}}{s}=stoke\ (\text{استوک})$$

بعد لزجت سینماتیکی $L^{2}T^{-1}$ است.

اثر فشار بر روی لزجت: لزجت سینماتیکی مایعات مستقل از فشار است، ولی در گازها به فشار بستگی دارد و با افزایش فشار، لزجت سینماتیکی گازها کاهش می‌یابد. باید توجه داشت که فشار تأثیر کمی روی لزجت دینامیکی دارد که معمولاً صرف‌نظر می‌شود، زیرا با افزایش فشار سرعت برخورد مولکولی افزایش یافته و در عین حال فاصله بین مولکول‌ها کاهش می‌یابد و این دو، اثر مخالف روی لزجت دارند و در نتیجه لزجت دینامیکی مستقل از فشار است.

اثر دما بر روی لزجت: لزجت در مایعات ناشی از نیروهای جاذبه بین مولکولی است. با افزایش دما این نیروها و در نتیجه لزجت کاهش می‌یابند. از طرف دیگر لزجت در گازها ناشی از حرکت تصادفی مولکول‌ها است. این حرکات نامنظم با افزایش دما، افزایش می‌یابند و در نتیجه لزجت با افزایش دما بیشتر می‌شود.

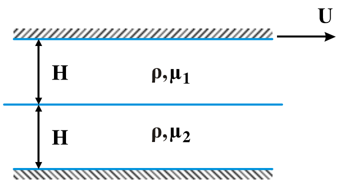
نکته ۴: با توجه به کاهش قابل ملاحظه جرم حجمی گازها با افزایش دما، تغییرات لزجت سینماتیکی با دما بیشتر از تغییرات لزجت دینامیکی است.

مثال۱: جریان غیرلزج جریانی است که در آن ....

۱) گرادیان فشار ناچیز باشد.　۲) گرادیان سرعت ناچیز باشد.　۳) لزجت سیال صفر باشد.　۴) ورتیسیته نداشته باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در سیال غیرلزج، لزجت سیال صفر است. ولی در جریان غیرلزج، با توجه به رابطه $\tau = \mu \dfrac{\partial V}{\partial n}$ باید گرادیان سرعت در امتداد عمود بر جریان سیال صفر باشد (μ خاصیت سیال است و به چگونگی جریان بستگی ندارد).

مثال۲: دو مایع غیرقابل اختلاط با چگالی‌های یکسان و لزجت‌های متفاوت μ_1 و μ_2 فضای بین دو صفحه افقی به فاصله $2H$ را پر کرده‌اند. صفحه پایینی ثابت و صفحه بالایی با سرعت U کشیده می‌شود. تنش برشی که به صفحه پایینی وارد می‌شود، کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۷)



۱) $\tau = \dfrac{\mu_1 U}{H(1+\dfrac{\mu_2}{\mu_1})}$　۲) $\tau = \dfrac{\mu_2 U(1+\dfrac{\mu_2}{\mu_1})}{H}$

۳) $\tau = \dfrac{\mu_2 U}{H(1+\dfrac{\mu_2}{\mu_1})}$　۴) $\tau = \dfrac{H(1+\dfrac{\mu_2}{\mu_1})}{\mu_2 U}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به قانون سوم نیوتن، تنش برشی در بالا و پایین صفحه وسط باید با هم برابر باشند.

(V سرعت صفحه وسط و ثابت است)

$$\tau = \tau' \Rightarrow \mu_1 \frac{U-V}{H} = \mu_2 \frac{V-0}{H} \Rightarrow \mu_1 U - \mu_1 V = \mu_2 V \Rightarrow V = \frac{\mu_1 U}{\mu_1+\mu_2} = \frac{U}{1+\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}$$

با توجه به توزیع خطی سرعت، تنش برشی در تمام نقاط بین دو صفحه یکسان است.

تنش برشی روی صفحه پایینی : $\tau' = \mu_2 \dfrac{V-0}{H} \Rightarrow \tau' = \mu_2 \dfrac{\dfrac{U}{1+\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}}{H} \Rightarrow \tau' = \dfrac{\mu_2 U}{H(1+\dfrac{\mu_2}{\mu_1})}$

مثال۳: در بررسی مشخصات یک مایع، وزن مخصوص آن برابر $\dfrac{7kN}{m^3}$ و ویسکوزیته سینماتیکی آن برابر $\dfrac{6m^2}{s}$ می‌باشد. ویسکوزیته مطلق این مایع چند پواز است؟ $(g = 10\dfrac{m}{s^2})$ (مهندسی پلیمر ـ سراسری ۹۷)

۱) ۰/۰۰۴۲　۲) ۰/۰۴۲　۳) ۰/۴۲　۴) ۴/۲

☑ **پاسخ:** هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. رابطه بین ویسکوزیته سینماتیکی، ویسکوزیته دینامیکی و جرم حجمی عبارت است از:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \ , \ \rho = \frac{\gamma}{g} \Rightarrow \nu = \frac{\mu g}{\gamma} \Rightarrow \mu = \frac{\nu\gamma}{g}$$

$$\mu = \frac{7\times 10^3 (\frac{N}{m^3}) \times 6(\frac{m^2}{s})}{10(\frac{m}{s^2})} = 4200(\frac{N.s}{m^2}) \times \frac{1(\frac{kg.m}{s^2})}{1(N)} = 4200(\frac{kg}{m.s})$$

$$\mu = 4200(\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m}.s}) \times \frac{1000(g)}{1\,(\cancel{kg})} \times \frac{1\,(\cancel{m})}{100(cm)} = 42000(\frac{g}{cm.s}) = 42000\,(Poise)$$

در صورت سؤال به اشتباه واحد ویسکوزیته سینماتیک به‌جای $\dfrac{mm^2}{s}$، $\dfrac{m^2}{s}$ بیان شده است. این اشتباه باعث شده است که هیچ‌یک از گزینه‌ها صحیح نباشد. در صورتی‌که مقدار ویسکوزیته سینماتیک برابر $6\dfrac{mm^2}{s}$ در نظر گرفته شود، داریم: $\mu = \dfrac{7\times 10^3 \times 6 \times 10^{-6}}{10} = 4/2 \times 10^{-3}\,\dfrac{kg}{m.s} = 4/2\times 10^{-2}$ Poise

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

مثال ۴: در مطالعات لزجت سیالات، کدام مورد از واحدهای مقیاس اندازه‌گیری لزجت مطلق <u>نیست</u>؟ (نانو فناوری- نانو مواد- سراسری ۹۷)

۱) استوک ۲) پواز ۳) پاسکال. ثانیه ۴) کیلوگرم بر متر. ثانیه

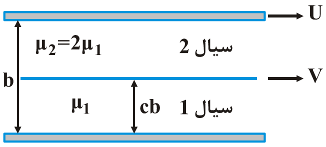
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» پواز، پاسکال × ثانیه و کیلوگرم برمتر × ثانیه واحدهای لزجت دینامیکی (مطلق) و استوک واحد لزجت سینماتیکی هستند.

مثال ۵: صفحه‌ای به فاصله بسیار کم (در حد صدم میلی‌متر) از یک صفحه ثابت قرار گرفته و ما بین دو صفحه با یک سیال نیوتنی پر شده است. اگر نیروی لازم در واحد سطح برای حرکت صفحه متحرک با سرعت $10\frac{m}{s}$ برابر ۴ پاسکال باشد، در این صورت سرعت سیال در مجاورت صفحه متحرک و صفحه ثابت به‌ترتیب (از راست به چپ) چند $\frac{m}{s}$ تخمین زده می‌شود؟ (نانو فناوری- نانو مواد- سراسری ۹۷)

۱) $0/4$, 0 ۲) $0/4$, $2/5$ ۳) 10 , 0 ۴) 10 , $2/5$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق شرط مرزی عدم لغزش (no slip) سرعت سیال نیوتنی در مجاورت مرز جامد (ثابت یا متحرک) با سرعت مرز جامد برابر است. لذا سرعت سیال در مجاورت صفحه متحرک $10\frac{m}{s}$ و در مجاورت صفحه ثابت صفر است.

مثال ۶: مطابق شکل در بین دو صفحه سیال‌های ۱ و ۲ غیرقابل امتزاج قرار دارند. صفحه پایینی ساکن و صفحه بالایی با سرعت U حرکت می‌کند. اگر فصل مشترک دو سیال با سرعت V حرکت کند، سرعت V چند برابر سرعت U است؟ $(0 < c < 1)$ (مهندسی شیمی- بیوتکنولوژی- سراسری ۹۷)



۱) $\frac{2c}{1+c}$ ۲) $\frac{2c}{1-c}$

۳) $\frac{c}{1-c}$ ۴) $\frac{c}{1+c}$

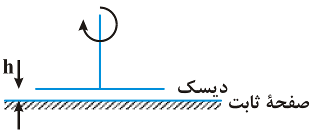
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در فصل مشترک دو سیال، تنش‌های برشی با هم برابرند و داریم:

$$\tau_1=\tau_2 \Rightarrow \mu_1\frac{V-0}{Cb}=2\mu_1\frac{U-V}{b-Cb} \Rightarrow \frac{V}{C}=2\frac{U-V}{1-C} \Rightarrow V-CV=2CU-2CV$$

$$V(1+C)=2CU \Rightarrow \frac{V}{U}=\frac{2C}{1+C}$$

مثال ۷: گشتاور مورد نیاز برای چرخاندن دیسک با شعاع R با سرعت زاویه‌ای Ω بر روی صفحه‌ای ثابت در شرایط پایا، از کدام رابطه به‌دست می‌آید؟ فاصله بین دیسک و صفحه ثابت (h) توسط لایه نازکی از روغن نیوتنی پوشیده شده است. $h \ll R$

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون- مهندسی شیمی، بهداشت، ایمنی و محیط زیست- مهندسی ایمنی و بازرسی فنی- سراسری ۹۷)



۱) $\frac{2\pi\Omega R^4}{h}$ ۲) $\frac{\pi\Omega R^4}{2h}$

۳) $\frac{2\pi\Omega R^3}{3h}$ ۴) $\frac{3\pi\Omega R^3}{2h}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از قانون ویسکوزیته نیوتن و فرض تغییرات خطی برای پروفیل سرعت داریم:

$$\tau=\mu\frac{\Delta V}{\Delta n} \quad \tau=\mu\frac{r\Omega}{h} \quad df=\tau.dA=(\frac{\mu r\Omega}{h})(2\pi rdr)=\frac{2\pi\mu\Omega r^2dr}{h}$$

$$dT=df.r=\frac{2\pi\mu\Omega r^3dr}{h}$$

$$T=\int_0^R dT=\frac{2\pi\mu\Omega}{h}\int_0^R r^3dr \Rightarrow T=\frac{\pi\mu\Omega R^4}{2h}$$

در همه گزینه‌ها، ضریب μ جا افتاده است.

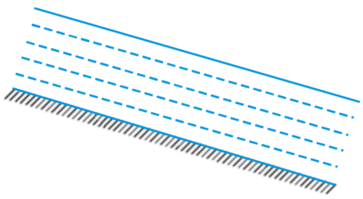
مثال۸: لزجت دینامیکی در مایعات و گازها، با افزایش دما به ترتیب: (مهندسی معدن- سراسری ۹۷)

۱) افزایش و افزایش می‌یابد.
۲) افزایش و کاهش می‌یابد.
۳) کاهش و افزایش می‌یابد.
۴) کاهش و کاهش می‌یابد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» لزجت در مایعات ناشی از نیروهای جاذبه بین مولکولی است. با افزایش دما این نیروها و در نتیجه لزجت کاهش می‌یابد. از طرف دیگر لزجت در گازها ناشی از حرکت تصادفی مولکول‌ها است. این حرکت نامنظم با افزایش دما، افزایش می‌یابد و در نتیجه لزجت با افزایش دما بیشتر می‌شود.

مثال۹: مایعی مطابق شکل زیر روی سطح صفحه شیب‌داری جریان دارد. جریان، آرام و یکنواخت است. در این جریان تنش برشی τ:

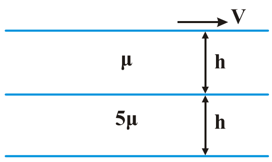
(مهندسی معدن- سراسری ۹۷)



۱) در تمام نقاط، صفر است.
۲) روی سطح مایع، صفر است.
۳) روی سطح صفحه، صفر است.
۴) در تمام نقاط، مخالف صفر است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون بر روی سطح مایع تغییرات سرعت صفر است، بنابراین طبق قانون ویسکوزیته نیوتن $(\tau=\mu\frac{\partial u}{\partial n})$ تنش برشی روی سطح مایع، صفر است.

مثال۱۰: دو لایه سیال غیرقابل امتزاج بین دو صفحه موازی قرار گرفته‌اند که ویسکوزیته سیال سنگین‌تر ۵ برابر سیال سبک‌تر است. اگر صفحه بالایی با سرعت V حرکت کند، صفحه پایینی با چه سرعتی کشیده شود تا فصل مشترک دو سیال بدون حرکت باقی بماند؟ (مهندسی شیمی- سراسری ۹۷)



۱) $-V$
۲) $-5V$
۳) $-\frac{1}{5}V$
۴) $-\frac{2}{5}V$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در فصل مشترک دو سیال، تنش برشی یکسان است.

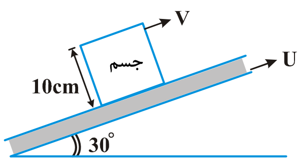
اگر سرعت صفحه پایینی را U در نظر بگیریم، داریم:

$$\tau=\tau'$$

$$\mu\frac{V-0}{h}=5\mu\frac{0-U}{h}\Rightarrow U=-\frac{V}{5}$$

(جواب سنجش گزینه (۱) است که اشتباه است)

مثال۱۱: بالابری با سرعت U به طرف بالا در حال حرکت است. جسمی با دانسیته $500\frac{kg}{m^3}$ روی آن قرار داشته و یک لایه نازک از مایعی با ویسکوزیته $0/5$ Pa.S و ضخامت خیلی کم برابر ۱ mm بین جسم و بالابر قرار گرفته است. اگر جسم با سرعت ثابت V در حال حرکت به سمت بالا باشد، اختلاف سرعت بالابر و جسم چند متر بر ثانیه $(\frac{m}{s})$ است؟ (نانو مواد و مهندسی شیمی- بیوتکنولوژی- سراسری ۹۶)



۱) $0/05$
۲) $0/1$
۳) $0/5$
۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در حالت تعادل داریم:

$$mg\sin\alpha=f=\tau A$$

$$\rho\cancel{A}hg\sin\alpha=\mu\frac{U-V}{t}\cancel{A}\Rightarrow 500\times0/1\times10\times0/5=0/5\times\frac{U-V}{1\times10^{-3}}\Rightarrow U-V=0/5\,(\frac{m}{s})$$

فصل دوم

«استاتیک سیالات»

اگر تمام ذرات یک سیال ساکن باشند و یا سرعت مساوی و ثابت داشته باشند، سیال را ایستا در نظر می‌گیرند. در استاتیک سیالات هیچ تنش برشی وجود ندارد و با توزیع اسکالر فشار سر و کار خواهیم داشت. استاتیک سیالات در تحلیل سدها، مخازن تحت فشار و دریچه کانال‌ها کاربرد دارد.

درسنامه (۱): فشار در سیالات

فشار

فشار در یک نقطه از یک سیال به صورت نیروی وارد شده از طرف سیال بر واحد سطح آن نقطه تعریف می‌شود. در مایعات چون فاصله مولکول‌ها از یک‌دیگر کم است، مولکول‌های سیال قادر به انتقال نیروها هستند. بنابراین فشار در هر نقطه ناشی از وزن سیال قرار گرفته در بالای آن نقطه می‌باشد.

در گازها فشار از برخوردهای مولکولی به سطح ناشی می‌شود و اثر وزن مهم نیست. بنابراین با افزایش برخوردهای مولکولی به سطح، فشار نیز افزایش می‌یابد.

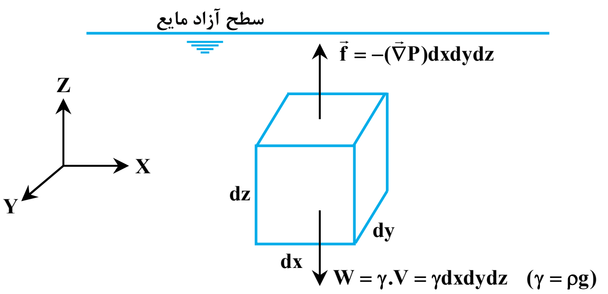
قانون پاسکال: برای سیال ساکن فشار در هر نقطه در جهات مختلف یکسان است، یعنی: $P_x = P_y = P_z = P$

برای تعیین میدان توزیع فشار در سیالات ساکن، تعادل نیروهای وارد بر یک جزء بی‌نهایت کوچک سیال را در نظر می‌گیریم. نیروهای وارد بر این جزء از دو عامل زیر ناشی می‌شوند:

۱ـ فشار محیط اطراف، ۲ـ نیروی وزن

اگر میدان فشار سیال با P نمایش داده شود، بنابر آن‌چه که در فصل ۱ در بخش تعریف گرادیان ذکر شد، نیروی وارد بر واحد حجم سیال مورد نظر از طرف محیط اطراف برابر است با: $\vec{f} = -(\vec{\nabla} P)$

دیاگرام آزاد نیروهای وارد بر المان سیال ساکن در زیر نشان داده شده است:



نمودار آزاد جزء داخل یک سیال ایستا

در نتیجه معادله برداری تعادل نیروها برابر است با:

$$-(\vec{\nabla}P)dxdydz - \gamma dxdydz\,\vec{k} = 0$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz\,\vec{i} - \frac{\partial P}{\partial y}dxdydz\,\vec{j} - (\frac{\partial P}{\partial z} + \gamma)dxdydz\,\vec{k} = 0$$

از معادله بالا چنین نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\gamma$$

اگر لایه‌های سیال نسبت به یک‌دیگر حرکت داشته باشند، فشار در هر نقطه برابر میانگین فشار در آن نقطه و در جهات مختلف است، یعنی:

$$P = \frac{1}{3}(P_x + P_y + P_z)$$

پس برای تمام سیالات در شرایط استاتیک، فشار در تمام نقاط هم‌عمق یکسان است و فقط در امتداد محور z که جهت آن خلاف جهت جاذبه فرض شده است، تغییر می‌کند. لذا داریم:

$$\boxed{\frac{dP}{dz} = -\gamma}$$

نکته ۱: این رابطه هم برای γ ثابت و هم برای γ متغیر برقرار است.

نکته ۲: رابطه مذکور تنها زمانی برقرار است که سیال ساکن باشد و نیروی گرانش تنها نیروی حجمی باشد.

تغییرات فشار در سیال ساکن تراکم‌ناپذیر $(\rho = \text{const.})$

چون چگالی در سیالات تراکم‌ناپذیر ثابت است، بنابراین با انتگرال‌گیری از رابطه فوق برای تغییرات فشار داریم:

$$\underbrace{P_{abs}}_{\text{(فشار مطلق)}} - P_{atm} = \underbrace{P_g}_{\text{(فشار نسبی)}} = \gamma h = \rho g h$$

h : فاصله از سطح آزاد مایع (عمق مایع)

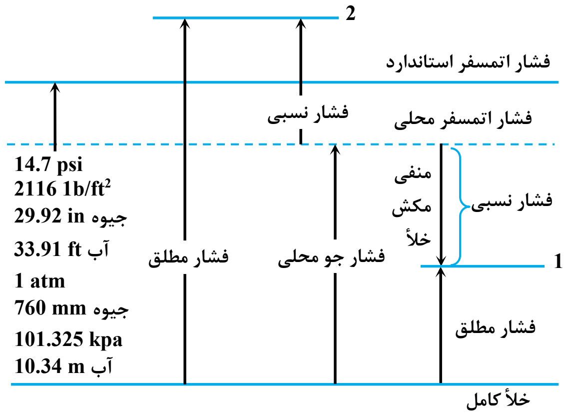
در رابطه فوق جهت مثبت به سمت پایین در نظر گرفته شده است.

فشار مطلق نسبت به خلأ کامل و فشار نسبی نسبت به جو محلی سنجیده می‌شود.

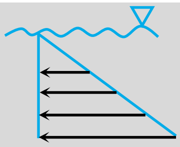
فشار جو + فشار نسبی = فشار مطلق

$$P_{abs} = P_{gauge} + P_{atm}$$

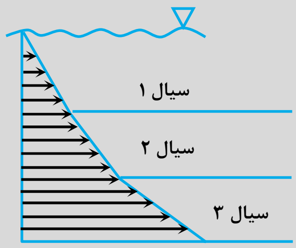
فشار اتمسفری محلی با شرایط تغییر می‌کند ولی فشار اتمسفری استاندارد ثابت است و برابر فشار در سطح آزاد دریاها است. در شکل مقابل مقدار فشار اتمسفری استاندارد بر حسب واحدهای مختلف نشان داده شده است.



نکته ۳: با توجه به رابطه فوق، در سیال ساکن در جهت افقی تغییرات فشار وجود ندارد و در جهت قائم نیز تغییرات فشار به صورت خطی است:



نکته ۴: اگر به جای یک سیال، چند سیال داشته باشیم، شیب توزیع فشار در لایه‌های مختلف متفاوت است. چون سیال با چگالی بیشتر پایین‌تر قرار می‌گیرد، در نتیجه چگالی سیال از بالا به پایین افزایش می‌یابد و از آن‌جایی که سیال با چگالی بیشتر دارای شیب توزیع فشار بیشتری نسبت به محور قائم است، بنابراین شیب توزیع فشار از بالا به پایین تندتر می‌شود.



برای اندازه‌گیری فشار مایعات از بارومتر (اندازه‌گیری فشار مطلق) و مانومتر (اندازه‌گیری فشار نسبی) استفاده می‌شود.

نکته ۵: برای اندازه‌گیری فشار از کاربرد معادلات استاتیک سیال برای مانومترهای U شکل و با توجه به موارد زیر استفاده می‌شود:

۱) دو نقطه دلخواه در تراز یکسان در حجمی پیوسته از یک نوع سیال، دارای فشار یکسان هستند.

۲) با حرکت به سمت پایین یک ستون مایع، فشار افزایش و با حرکت به سمت بالا، فشار کاهش می‌یابد.

مثال ۱: در آزمایشگاه‌ها وسایل اندازه‌گیری فشار، معمولاً کدام نوع فشار را نشان می‌دهند؟ (مهندسی پلیمر ـ سراسری ۹۷)

۱) استاندارد　　۲) محلی　　۳) مطلق　　۴) نسبی

پاسخ : گزینه «۴» در آزمایشگاه‌ها وسایل اندازه‌گیری فشار، معمولاً فشار نسبی را نشان می دهند.

مثال ۲: در آزمایش‌های سیالات، مواقعی که نتوان فشار را در نقطه‌ای از سیستم تعیین کرد، با کدام وسیله می‌توان اختلاف فشار بین دو نقطه را مشخص نمود؟ (نانو فناوری- نانو مواد- سراسری ۹۷)

۱) مانومتر مایل ۲) مانومتر دیفرانسیلی ۳) پیزومتر جیوه ۴) پیزومتر گرادیان

پاسخ : گزینه «۲» با کمک مانومتر دیفرانسیلی می‌توان اختلاف فشار بین دو نقطه را مشخص نمود.

مثال ۳: فشار مطلق مایعی با چگالی نسبی ۲ در نقطه‌ای به عمق یک متر از سطح آزاد آن، چند kPa برآورد می‌شود؟ (فشار اتمسفر محلی ۶۰۰mm جیوه، $\gamma_w = ۱۰\frac{kN}{m^۳}$ و $g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$) (مهندسی پلیمر ـ سراسری ۹۷)

۱) ۲۰۳/۲ ۲) ۱۵۲/۴ ۳) ۱۰۱/۶ ۴) ۵۰/۸

پاسخ : گزینه «۳» فشار مطلق مایع در عمق، از جمع فشار نسبی و فشار اتمسفر محلی به‌دست می‌آید و عبارت است از:

$$P = S\gamma_w h + P_\circ \Rightarrow P = ۲\times ۱۰\times ۱ + ۱۳/۶\times ۱۰\times ۰/۶ \Rightarrow P = ۱۰۱/۶(kPa)$$

مثال ۴: معمولاً از پیزومتر برای اندازه‌گیری کدام نوع فشار در مایعات استفاده می‌شود؟ (مهندسی پلیمر ـ سراسری ۹۷)

۱) استاندارد ۲) محلی ۳) مطلق ۴) نسبی

پاسخ : گزینه «۴» معمولاً از پیزومتر برای اندازه‌گیری فشار نسبی در مایعات استفاده می‌شود.

مثال ۵: اگر برای مانومتری که جهت اندازه‌گیری اختلاف فشار اطراف اوریفیس نصب شده درون یک خط لوله، از آب به‌عنوان سیال مانومتر استفاده شود، اختلال ارتفاع ۲ اینچ و اگر از سیالی دیگر استفاده نماییم، اختلاف ارتفاع ۱ اینچ در درون ساق‌های مانومتر مشاهده می‌شود. وزن مخصوص سیال دوم چند $\frac{lb_f}{ft^۳}$ است؟ $\rho_{H_۲O} = ۶۲/۴\frac{lb_m}{ft^۳}$ $g = ۳۲/۲\frac{ft}{s^۲}$

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون- مهندسی شیمی، بهداشت، ایمنی و محیط زیست- مهندسی ایمنی و بازرسی فنی- سراسری ۹۷)

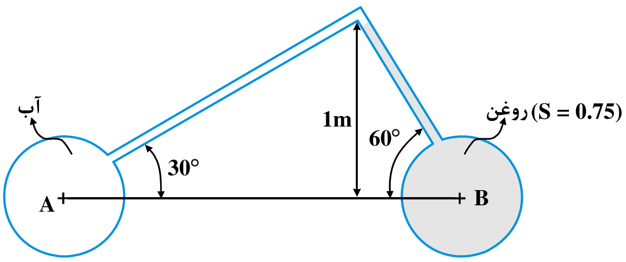
۱) ۱۲۴/۸ ۲) ۱۲۴۸/۴ ۳) ۲۵۶۳/۲ ۴) ۴۰۱۸/۶

پاسخ : گزینه «۱» اختلاف فشار اطراف اوریفیس برحسب اختلاف ارتفاع درون ساق‌های مانومتر عبارت است از:

$$\Delta P = \rho g h \Rightarrow \rho_۱ h_۱ = \rho_۲ h_۲ \qquad ۶۲/۴\times ۲ = \rho_۲ \times ۱ \Rightarrow \rho_۲ = ۱۲۴/۸(\frac{lb_m}{ft^۳})$$

$$\gamma = \rho_۲ \frac{g}{g_\circ} \qquad \gamma = ۱۲۴/۸\times\frac{۳۲/۲}{۳۲/۲} \Rightarrow \gamma = ۱۲۴/۸\,(\frac{lb_f}{ft^۳})$$

مثال ۶: اختلاف فشار $(p_A - p_B)$ مخازن زیر چند متر آب $(mH_۲O)$ است؟ (مهندسی معدن- سراسری ۹۷)



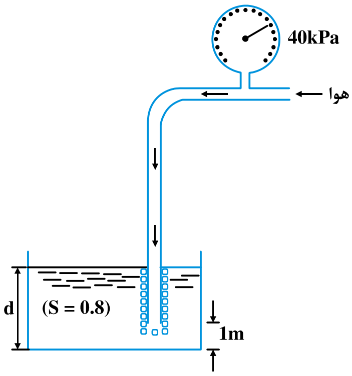
۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۵
۳) ۰/۷۵
۴) ۱

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به رابطه مانومتری داریم:

$$p_A - \gamma_w(۱) + s\gamma_w(۱) = p_B \quad \Rightarrow \quad \frac{p_A - p_B}{\gamma_w} = ۱ - ۰/۷۵ = ۰/۲۵\,(mH_۲O)$$

مثال ۷: برای اندازه‌گیری عمق تقریبی مخازن، هوا از طریق لوله کوچکی همانند شکل زیر به عمق سیال تزریق می‌شود. در صورتی که فشارسنج $۴۰\,kPa$ را نشان دهد، ارتفاع مایع در مخزن (d) چندمتر است؟

(مهندسی شیمی- سراسری ۹۷)



$$(g=۱۰\frac{m}{s^۲}\ ,\ \rho_{\text{سیال}}=۸۰۰\frac{kg}{m^۳})$$

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۸

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به فشار درون سیال، عمق لوله در داخل مخزن عبارت است از:

$$P=\rho gh \quad \Rightarrow ۴۰\times۱۰^{۳}=۸۰۰\times۱۰h \ \Rightarrow h=۵(m)$$

ارتفاع مایع در مخزن: $d=۵+۱=۶(m)$

مثال ۸: در مطالعه مکانیک سیالات در حال سکون، آیا سیال حقیقی و سیال ایده‌آل از یک‌دیگر تفکیک‌پذیرند و دلیل آن کدام است؟

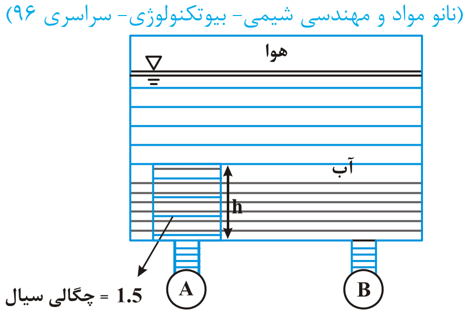
(مهندسی پلیمر- سراسری ۹۶)

۱) خیر ـ چون خاصیت لزجی وجود دارد.
۲) خیر ـ چون خاصیت لزجی وجود ندارد.
۳) بله ـ زیرا گرادیان فشار وجود دارد.
۴) بله ـ زیرا گرادیان فشار وجود ندارد.

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» در مطالعه مکانیک سیالات در حال سکون، چون حرکت وجود ندارد و لایه‌های سیال نسبت به هم لغزش ندارند، خاصیت لزجی وجود ندارد و سیال حقیقی و ایده‌آل از یک‌دیگر تفکیک‌پذیر نیستند.

مثال ۹: مطابق شکل فشارسنج‌های A و B به ترتیب فشارهای نسبی $۳۵۰\,kPa$ و $۳۴۴\,kPa$ را نشان می‌دهند. ارتفاع h چند متر است؟

(نانو مواد و مهندسی شیمی- بیوتکنولوژی- سراسری ۹۶)



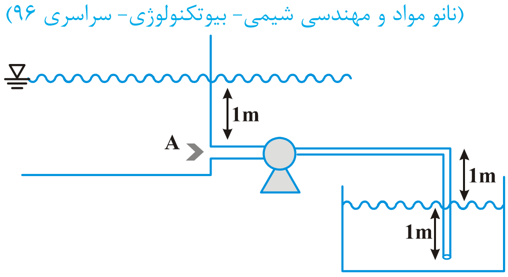
۱) ۱/۲
۲) ۱/۵
۳) ۵
۴) ۶

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ارتفاع آب را H در نظر گرفته و داریم:

$$P_B=\rho gH+P_\circ$$
$$P_A=s\rho gh+\rho g(H-h)+P_\circ \Rightarrow P_A-P_B=s\rho gh-\rho gh=(s-۱)\rho gh$$
$$(۳۵۰-۳۴۴)\times۱۰^{۳}=(۱/۵-۱)\times۱۰۰۰\times۱۰h \Rightarrow h=۱/۲\,(m)$$

مثال ۱۰: آب از یک مخزن پایین‌دست، توسط پمپی به یک استخر در بالادست مطابق شکل پمپ می‌شود. فشار نسبی سیال در نقطه A تقریباً کدام است؟

(نانو مواد و مهندسی شیمی- بیوتکنولوژی- سراسری ۹۶)



۱) ۱ متر آب
۲) ۲ متر آب
۳) ۳ متر آب
۴) بین ۲ تا ۳ متر آب

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با توجه به این که سرعت خروجی آب به داخل استخر تقریباً صفر است، بنابراین فشار نسبی سیال در نقطه A تقریباً ۱ متر آب می‌باشد.

مثال ۱۱: ۱۰ لیتر از یک سیال تراکم‌ناپذیر، نیرویی برابر با ۲۰ نیوتن در سطح زمین اعمال می‌کند. ۲/۳ لیتر از این سیال چه نیرویی در واحد نیوتن را در سطح ماه اعمال می‌کند؟ شتاب جاذبه در سطح ماه $1/67[\frac{m}{s^2}]$ می‌باشد.

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون- مهندسی شیمی، بهداشت، ایمنی و محیط زیست- مهندسی ایمنی و بازرسی فنی- سراسری ۹۶)

۱) ۰/۳۹ ۲) ۰/۷۸ ۳) ۳/۴ ۴) ۴/۶

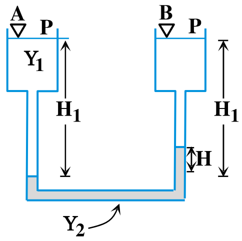
☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به رابطه وزن و جرم داریم:

$$W = mg = \rho V g \Rightarrow 20 = \rho \times 10 \times 10^{-3} \times 9/81 \Rightarrow \rho = 203/9\ (\frac{kg}{m^3})$$

$$W' = \rho V' g' \Rightarrow W' = 203/9 \times 2/3 \times 10^{-3} \times 1/67 \Rightarrow W' = 0/78\ (N)$$

مثال ۱۲: مانومتر دو سیاله شکل زیر را در نظر بگیرید. به نظر شما، دو سیال در این مانومتر باید دارای چه شرایطی باشند تا اختلاف فشارهای بسیار کم بین نقـاط A و B قابل اندازه‌گیری باشد؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون- مهندسی شیمی، بهداشت، ایمنی و محیط زیست- مهندسی ایمنی و بازرسی فنی- سراسری ۹۶)



۱) $\rho_2 >> \rho_1$

۲) $\rho_2 - \rho_1 >> 1$

۳) $\rho_2 - \rho_1 << 1$

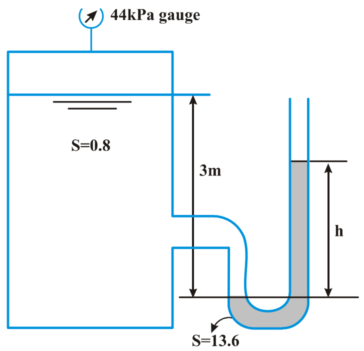
۴) $\rho_1 >> \rho_2$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با استفاده از رابطه مانومتری داریم:

$$P_A + \rho_1 g H_1 - \rho_2 g H - \rho_1 g (H_1 - H) = P_B \Rightarrow P_A - P_B = (\rho_2 - \rho_1) g H \Rightarrow \rho_2 - \rho_1 \ll 1$$

برای این که اختلاف فشارهای کم در این مانومتر (H) قابل اندازه‌گیری باشد، باید $\rho_2 - \rho_1 \ll 1$ باشد.

مثال ۱۳: در سیستم زیر، ارتفاع h مانومتر، چند m است؟ (مهندسی معدن- سراسری ۹۶)



$$(g = 10\frac{m}{s^2}, \gamma_{\text{آب}} = 10\frac{kN}{m^3})$$

۱) ۰/۲۵

۲) ۰/۵

۳) ۰/۷۵

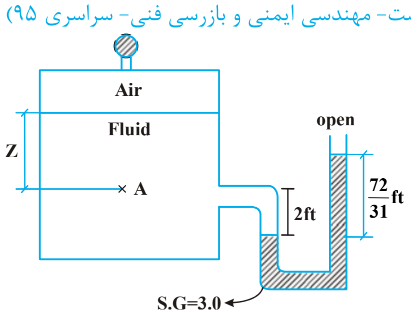
۴) ۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با استفاده از معادله مانومتری داریم:

$$P_g + S_o \gamma_w H - S_{Hg} \gamma_w h = 0 \Rightarrow 44 \times 10^3 + 0/8 \times 10 \times 10^3 \times 3 - 13/6 \times 10 \times 10^3\ h = 0 \Rightarrow h = 0/5 (m)$$

مثال ۱۴: اگر فشار هوای درون مخزن $0/5psi$ و وزن مخصوص سیال داخل آن $72\frac{lb}{ft^3}$ باشد و بخـواهیم فشـار نقطـه A برابـر بـا ۲psi شـود، مقدار Z چقدر باید باشد؟ $(\gamma_{water} \approx 62\frac{lb}{ft^3})$

(مهندسی فرآوری و انتقال گاز- مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون- مهندسی شیمی، بهداشت، ایمنی و محیط زیست- مهندسی ایمنی و بازرسی فنی- سراسری ۹۵)



۱) ۱/۲in

۲) ۳in

۳) ۱/۲ft

۴) ۳ft

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با استفاده از معادله مانومتری داریم:

$$P_g + \gamma Z = P_A \Rightarrow 0/5\frac{lb_f}{\cancel{in^2}} \times \frac{144\cancel{in^2}}{1ft^2} + 72Z = 2 \times 144 \Rightarrow Z = 3(ft)$$

مدرسان شریف

فصل سوم

« مفاهیم جریان سیال و معادلات بنیادی »

درسنامه (۱): تعاریف اولیه

جریان دائمی و غیردائمی (پایدار و ناپایدار)

برای توصیف ریاضی حرکت یک سیال، سرعت تمام ذره‌های یک جریان به صورت تابعی از مختصات مکان و زمان تعریف می‌شوند: $V_z = h(x,y,z,t)$ و $V_y = g(x,y,z,t)$ و $V_x = f(x,y,z,t)$. یعنی مؤلفه‌های سرعت یک ذره سیال در مکان خاص و زمان معین مشخص می‌شوند. این روش را **روش میدان** و مجموع سه معادلهٔ ریاضی فوق را **میدان سرعت جریان** می‌نامند.

اگر خواص سیال و مشخصه‌های جریان در هر نقطه از فضا در طی زمان تغییر نکنند، جریان را **جریان دائمی** (پایدار) می‌گویند.

هرگاه N یک خاصیت از سیال باشد، برای جریان دائمی (پایدار) در هر نقطه از آن داریم:

$$\boxed{\frac{\partial N}{\partial t} = 0}$$

از طرف دیگر جریان وابسته به زمان، **جریان غیردائمی** (ناپایدار) نامیده می‌شود.

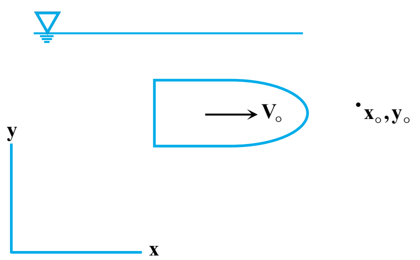
در جریان دائمی، خاصیت سیال (N) می‌تواند از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر کند ولی در هر نقطه از سیال نمی‌تواند با زمان تغییرات داشته باشد. ولی در جریان غیردائمی، خاصیت سیال می‌تواند در هر نقطه نسبت به زمان تغییر کند.

بنابراین میدان سرعت جریان دائمی مستقل از زمان t بوده و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$V_x = f(x,y,z) \qquad V_y = g(x,y,z) \qquad V_z = h(x,y,z)$$

در برخی مواقع می‌توان از یک میدان سرعت غیردائمی، فقط با تغییر دستگاه مختصات، یک جریان دائمی به دست آورد.

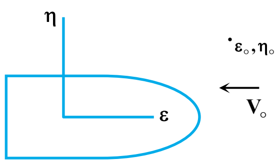
به عنوان مثال جسمی را در نظر می‌گیریم که با سرعت ثابت V_0 درون یک سیال ساکن حرکت می‌کند:



از دید ناظری که از مختصات ثابت (x,y) به جریان نگاه می‌کند، سرعت نقطه‌ای مانند (x_0,y_0) به صورت زیر خواهد بود:

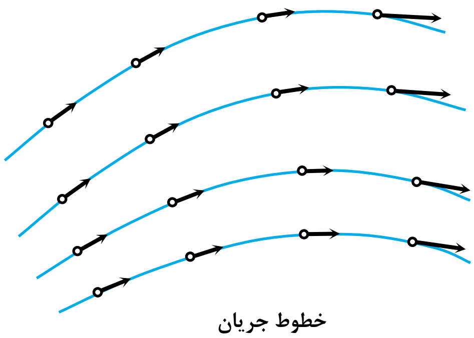
$$V(x_0,y_0)\begin{cases} = 0 & , \quad t < t_0 \\ > 0 & , \quad t \geq t_0 \end{cases}$$

t_0 زمان رسیدن جسم به نقطه (x_0,y_0) است. این میدان سرعت تابع t بوده و ناپایدار است. حال با توجه به مفهوم نسبی بودن حرکت، اگر مختصات جدید η و ε را متصل به جسم متحرک تعریف کرده و فرض کنیم، ناظر از این مختصات جریان را می‌بینند، از دید ناظر، جسم ساکن بوده و جریان با سرعت $-V_0$ نسبت به جسم در حال حرکت است.



از دید این ناظر سرعت نقطه (ε_0,η_0) همواره ثابت و برابر با V_0 خواهد بود. لذا با تغییر دستگاه مختصات توانستیم یک میدان غیردائمی را به یک میدان دائمی تبدیل کنیم. تبدیل یک میدان غیردائمی به دائمی، پیچیدگی معادلات حاکم بر جریان را تا حد قابل توجهی کاهش می‌دهد.

خط جریان



خطوط جریان

جریان‌ها را معمولاً به وسیله خطوط جریان ترسیم می‌کنند. **این خطوط طوری رسم می‌شوند که همواره بر بردارهای سرعت ذرات سیال مماس باشند**، بنابراین در راستای عمود بر خط جریان هیچ جریانی عبور نمی‌کند.

در جریان‌های دائمی شکل خطوط جریان ثابت می‌ماند و مسیرهایی که ذرات سیال طی می‌کنند بر خطوط جریان منطبق هستند. اما در جریان غیردائمی خطوط جریان فقط به طور لحظه‌ای معرف جریان بوده و خطوط مسیر و خطوط جریان بر هم منطبق نیستند.

با توجه به مماس بودن خطوط جریان بر بردارهای سرعت ذرات سیال، معادلات دیفرانسیلی خط جریان عبارتند از:

$$\boxed{\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}}$$

هر خط پیوسته‌ای که این معادلات را ارضاء کند، یک خط جریان است. هر چه خطوط جریان به هم نزدیک‌تر باشند، سرعت بیشتر و در نتیجه دبی جریان نیز بیشتر خواهد بود و برعکس.

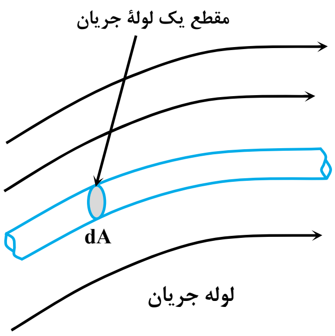
خط رگه (اثر): مکان هندسی ذراتی است که از یک نقطه خاص داخل جریان عبور کرده‌اند.

خط زمان: مجموعه ذراتی از سیال است که در هر لحظه، یک خط را تشکیل می‌دهند.

مسیر جریان (خط مسیر)

مسیر یک ذره معین از جریان را مشخص می‌کند. (مسیر جریان مربوط به یک لحظه نیست، بلکه مربوط به مسیر حرکت یک ذره سیال در زمان‌های مختلف است.) مسیر جریان متناظر با «مسیر» در مکانیک ذره است.

لازم به تأکید است که در جریان پایدار یا دائمی، خطوط مسیر، رگه‌ها و خطوط جریان در میدان جریان بر هم منطبق هستند.



لوله جریان

لوله جریان

خطوط جریانی که از پیرامون یک المان سطح بسیار کوچک در لحظه t رسم می‌شوند، لوله‌ای به نام لوله جریان را تشکیل می‌دهند که در بررسی پدیده‌های سیالات مفید است.

در جریان‌های دائمی، شکل لوله جریان در فضا ثابت است.

با توجه به تعریف خط جریان، واضح است که هیچ جریانی از سطوح جانبی لوله جریان عبور نمی‌کند.

مثال ۱: میدان سرعت سیال توسط بردار $\vec{v} = (x^2 - y^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}$ ارائه شده است. معادله خط جریان گذرنده از نقطه (۱,۱)، کدام است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۷)

۱) $3x^2y - y^2 = 1$ ۲) $3x^3y - y^2 = 1$ ۳) $3x^3y - y^2 = 2$ ۴) $3x^2y - y^3 = 2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» معادله دیفرانسیل خط جریان با استفاده از بردار سرعت داده شده به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Rightarrow \frac{dx}{x^2 - y^2} = \frac{dy}{-2xy} \quad , \quad 2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$$

با حل معادله دیفرانسیل فوق معادله خط جریان به‌دست می‌آید. معادله دیفرانسیل فوق، یک معادله کامل است زیرا:

$$\begin{cases} M = 2xy \\ N = x^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

طبق روش حل معادلات دیفرانسیل کامل داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xy \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^2 y + c_1(y) \\ u(x,y) = x^2 y - \dfrac{y^3}{3} + c_2(x) \end{cases}$$

پس جواب معادله فوق به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^{۲}y - \dfrac{y^{۳}}{۳} \\ du = ۰ \to u(x,y) = c \end{array}\right\} \Rightarrow x^{۲}y - \dfrac{y^{۳}}{۳} = c$$

خط جریان از نقطه (۱ و ۱) می‌گذرد، بنابراین:

$$u(۱,۱) = ۱ - \frac{۱}{۳} = c \;\Rightarrow\; c = \frac{۲}{۳}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$x^{۲}y - \frac{y^{۳}}{۳} = \frac{۲}{۳} \;\Rightarrow\; ۳x^{۲}y - y^{۳} = ۲$$

مثال ۲: در چه نوع جریانی، خط مسیر، خط جریان و خط پخش (خط اثر) بر هم منطبق هستند؟ (مهندسی معدن- سراسری ۹۵)

۱) آرام ۲) تراکم‌ناپذیر ۳) دائمی ۴) یکنواخت

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در جریان دائمی (عدم تغییرات نسبت به زمان)، خط مسیر، خط جریان و خط پخش (خط اثر) بر هم منطبق هستند.

مثال ۳: توزیع سرعت جریان دوبعدی با روابط $v_x = ax$ و $v_y = -ay$ داده شده که در آن a مقداری ثابت است. معادله خط جریان گذرنده از نقطه (۳,۱) کدام است؟ (مهندسی معدن- سراسری ۹۵)

۱) $xy = ۳$ ۲) $x = ۳y$ ۳) $x^{۲} + y^{۲} = ۱۰$ ۴) $x^{۲} - y^{۲} = ۸$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» معادله دیفرانسیل خطوط کلی جریان عبارت است از:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_y}{V_x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-ay}{ax} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\text{انتگرال گیری} \Rightarrow \operatorname{Ln} y = -\operatorname{Ln} x + \operatorname{Ln} c \Rightarrow \operatorname{Ln} x + \operatorname{Ln} y = \operatorname{Ln}(xy) = \operatorname{Ln} c \Rightarrow xy = c \Rightarrow (۳)(۱) = c \Rightarrow xy = ۳$$

مثال ۴: برای میدان جریان سیال $\vec{V} = ۲xy\vec{i} + x\vec{j}$ خط جریانی را که از نقطه (۱,۲) می‌گذرد کدام است؟ (مهندسی بیوتکنولوژی و داروسازی- نانومواد- سراسری ۹۴)

۱) $y = ۲x$ ۲) $y = x + ۱$ ۳) $y^{۲} = x + ۳$ ۴) $y = x^{۲} + ۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» معادله خط جریان دوبعدی عبارت است از:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_y}{V_x}$$

$$\vec{V} = ۲x\overrightarrow{yi} + x\vec{j} \Rightarrow V_x = ۲xy \;,\; V_y = x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{۲xy} = \frac{۱}{۲y} \Rightarrow ۲ydy = dx \Rightarrow y^{۲} = x + C$$

$$A(۱,۲) \Rightarrow ۴ = ۱ + C \Rightarrow C = ۳ \Rightarrow y^{۲} = x + ۳$$

مثال ۵: معادله خطوط جریان دو قطبی دو بعدی به صورت مقابل داده می‌شود: $x^{۲} + y^{۲} - \dfrac{\chi}{c}y = ۰$

x و y بر حسب متر بوده، χ مقداری است ثابت و c روی خط جریان ثابت است. امتداد سرعت ذره در محل $x = ۵m$ و $y = ۱۰m$ را بـه دسـت آوریـد. اگر $V_x = ۵\dfrac{m}{s}$ باشد، V_y در نقطه مورد نظر چقدر است؟

☑ **پاسخ:** ابتدا با توجه به داده‌های مسأله مقدار ثابت و مجهول $\dfrac{\chi}{c}$ را تعیین می‌کنیم:

$$\left|\begin{array}{l} x = ۵m \\ y = ۱۰m \end{array}\right. \Rightarrow ۲۵ + ۱۰۰ - \frac{\chi}{c}(۱۰) = ۰ \Rightarrow \frac{\chi}{c} = ۱۲/۵$$

با مشتق‌گیری از معادله خطوط جریان داریم:

$$۲xdx + ۲ydy - \frac{\chi}{c}dy = ۰$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{خط جریان}} = \frac{۲x}{\dfrac{\chi}{c} - ۲y} \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{خط جریان}} = \frac{۲(۵)}{۱۲/۵ - ۲(۱۰)} = -\frac{۴}{۳} \Rightarrow \alpha = -۵۳/۱^{\circ}$$

معادله دیفرانسیلی خط جریان در حالت دو بعدی عبارت است از:

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{خط جریان}} = \frac{V_y}{V_x} = -\frac{۴}{۳} \qquad V_y = -\frac{۴}{۳}(۵) \Rightarrow V_y = -\frac{۲۰}{۳}\left(\frac{m}{s}\right)$$

مثال ۶: **با توجه به میدان سرعت $\vec{V}=x\vec{i}+2t\vec{j}+z\vec{k}$، خط مسیر ذره‌ای واقع در نقطه $(e,1,e)$ و در لحظه $t=1s$ را به دست آورید.**

☑ **پاسخ:** میدان داده شده مربوط به یک جریان غیردائمی است. برای تعیین خط مسیر یک ذره در یک زمان مشخص با استفاده از یک میدان غیردائمی انجام مراحل زیر پیشنهاد می‌شود:

۱ـ $\frac{dx}{dt}$ ، $\frac{dy}{dt}$ ، $\frac{dz}{dt}$ را تشکیل دهید.

۲ـ از معادلات به دست آمده انتگرال گرفته و ثابت‌های انتگرال‌گیری را تعیین کنید.

۳ـ زمان را حذف کرده و x, y, z را در یک تک معادله به هم ارتباط دهید (معادله خط مسیر).

$$\frac{dx}{dt}=V_x=x \Rightarrow \frac{dx}{x}=dt \Rightarrow \ln(x)=t+C_1$$
$$\frac{dy}{dt}=V_y=2t \Rightarrow dy=2tdt \Rightarrow y=t^2+C_2$$
$$\frac{dz}{dt}=V_z=z \Rightarrow \frac{dz}{z}=dt \Rightarrow \ln(z)=t+C_3$$

برای تعیین ثابت‌های انتگرال‌گیری C_1، C_2 و C_3 از اطلاعات داده شده استفاده می‌کنیم:

$$x=e\ ,\ y=1\ ,\ z=e\ ,\ t=1$$
$$\ln(x)=t+C_1 \Rightarrow 1=1+C_1 \Rightarrow C_1=0$$
$$y=t^2+C_2 \Rightarrow 1=1+C_2 \Rightarrow C_2=0$$
$$\ln(z)=t+C_3 \Rightarrow 1=1+C_3 \Rightarrow C_3=0$$

در نتیجه معادلات به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\begin{cases}\ln(x)=t\\ y=t^2\\ \ln(z)=t\end{cases}$$

حال باید t را بین این سه معادله حذف کنیم. برای این کار دو معادله اول و سوم را با هم جمع نموده، t را برحسب x و z محاسبه کرده و در معادله دوم قرار می‌دهیم:

$$\ln(x)+\ln(z)=2t \Rightarrow \ln(xz)=2t \Rightarrow t=\frac{\ln(xz)}{2}$$

$$y=t^2 \Rightarrow y=[\frac{\ln(xz)}{2}]^2$$

که عبارت از معادله خط مسیر ذره $(e,1,e)$ در لحظه $t=1s$ خواهد بود.

مثال ۷: **بردار یکهٔ عمود بر خط جریان در نقطهٔ $(2,1)m$ در زمان $t=2s$ برای میدان سرعت $\vec{v}=2xy\hat{i}+y^2t\hat{j}(\frac{m}{s})$، برابر کدام است؟**

(مهندسی فرآوری و انتقال گاز- مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون- مهندسی شیمی، بهداشت، ایمنی و محیط زیست- مهندسی ایمنی و بازرسی فنی- سراسری ۹۴)

۱) $(\hat{i}+2\hat{j})\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۲) $(\hat{i}-2\hat{j})\frac{1}{\sqrt{5}}$ ۳) $(4\hat{i}+2\hat{j})\frac{1}{2\sqrt{5}}$ ۴) $(2\hat{i}+\hat{j})\frac{1}{\sqrt{3}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» **معادله** دیفرانسیل خطوط جریان یک میدان دو بعدی عبارت است از:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{V_y}{V_x}$$

$$\vec{V}=2xy\vec{i}+y^2t\vec{j}\ ,\ t=2(s) \Rightarrow \vec{V}=2xy\vec{i}+2y^2\vec{j} \Rightarrow V_x=2xy\ ,\ V_y=2y^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y^2}{2xy}=\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y=\ln x+\ln c=\ln(cx)$$

$$y=cx \qquad A(2,1) \qquad 1=2c \Rightarrow c=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}x \Rightarrow 2y-x=0$$

بنابراین بردار یکه عمود بر خط جریان عبارت است از:

$$\vec{\lambda}=(\vec{i}-2\vec{j})\frac{1}{\sqrt{5}}$$

مثال۸: یک میدان جریان به صورت رابطه مقابل داده شده است: $\vec{V} = ax\vec{i} + by\vec{j} + ct\vec{k}$. معادلهٔ خطوط جریان در لحظه $t=0$ کدام است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $y = c_1 x^{-a/b}$
۲) $y = c_1 x^{a/b}$
۳) $y = c_1 x^{-b/a}$
۴) $y = c_1 x^{b/a}$

پاسخ: گزینه «۴» میدان جریان در لحظه $t=0$ عبارت است از:

$$\vec{V} = ax\vec{i} + by\vec{j} + ct\vec{k} \qquad t=0:\ \vec{V} = ax\vec{i} + by\vec{j}$$

با توجه به معادلات دیفرانسیل خط جریان داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_y}{V_x} \Rightarrow \frac{dy}{V_y} = \frac{dx}{V_x} \Rightarrow \frac{dy}{by} = \frac{dx}{ax} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{b}{a}\frac{dx}{x}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه فوق داریم:

$$\ln y = \frac{b}{a}\ln x + \ln c_1 \Rightarrow \ln y = \ln x^{\frac{b}{a}} + \ln c_1 = \ln(c_1 x^{\frac{b}{a}}) \Rightarrow y = c_1 x^{\frac{b}{a}}$$

مثال۹: در یک جریان بردار سرعت به صورت $\vec{V} = \frac{y}{2}\vec{i} + xy^2\vec{j}$ می‌باشد. معادله کلی خط جریان (Stream line) به صورت کدام یک از روابط زیر می‌باشد؟

(مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۲)

۱) $y = C\ln x$
۲) $y = C\exp x$
۳) $y = C\ln x^2$
۴) $y = C\exp x^2$

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از معادله دیفرانسیل خط جریان داریم:

$$\vec{V} = \frac{y}{2}\vec{i} + xy^2\vec{j} \quad , \quad \vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} \Rightarrow V_x = \frac{y}{2},\ V_y = xy^2$$

معادله دیفرانسیل خط جریان: $\frac{dy}{dx} = \frac{V_y}{V_x}$ (سرعت همواره مماس بر خط جریان است) $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{xy^2}{\frac{y}{2}} = 2xy$

$$\frac{dy}{y} = 2xdx \Rightarrow \ln y = x^2 + C_1 \qquad y = e^{(c_1 + x^2)} = e^{c_1}.e^{x^2} \Rightarrow y = c.e^{x^2} = C\exp x^2$$

مثال۱۰: میدان جریان دو بعدی در سیالی با رابطهٔ $\vec{V} = Ax^2\vec{i} + Bxy\vec{j}$ نشان داده می‌شود. معادلهٔ خطوط جریان را به دست آورید.

(مهندسی عمران ـ سراسری ۸۶)

۱) $x^B = ky^A$
۲) $x^A y^B = k$
۳) $y^B = kx^A$
۴) $x^B y^A = k$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از معادله دیفرانسیل خط جریان داریم:

$$\vec{V} = Ax^2\vec{i} + Bxy\vec{j} \qquad V_x = Ax^2\ ,\ V_y = Bxy$$

معادله دیفرانسیل خط جریان عبارت از:

$$\frac{d_x}{V_x} = \frac{d_y}{V_y}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{خط جریان}} = \frac{V_y}{V_x} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{Bxy}{Ax^2} = \frac{By}{Ax} \qquad A\frac{dy}{y} = B\frac{dx}{x} \Rightarrow A\ln y = B\ln x + \ln C$$

$$\ln y^A = \ln x^B + \ln C = \ln(Cx^B) \Rightarrow y^A = Cx^B \Rightarrow x^B = ky^A$$

مثال۱۱: اگر برای یک جریان داشته باشیم $v = 2 - t,\ u = 5\frac{m}{s}$ آن‌گاه:

(مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۷)

۱) جریان دائم است و معادله خط جریان $y = \frac{2}{5}x - t$ است.
۲) جریان دائم است و معادله خط جریان $y = \frac{2-t}{5}x$ است.
۳) جریان غیردائم است و معادله خط جریان $y = \frac{2}{5}x - t$ است.
۴) جریان غیردائم است و معادله خط جریان $y = \frac{2-t}{5}x$ است.

پاسخ: گزینه «۴» چون سرعت به زمان بستگی دارد، پس جریان غیردائم است. برای محاسبه معادله خط جریان، با استفاده از معادله دیفرانسیل خط جریان داریم:

$$\frac{dy}{v} = \frac{dx}{u} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2-t}{5} \qquad dy = \frac{2-t}{5}dx \qquad y = \frac{2-t}{5}x$$

مثال ۱۲: میدان سرعت به صورت $v = 3y$ و $u = 2xt$ مفروض است. کدام گزینه معادله خط مسیر عبوری از نقطه $(1,1)$ در لحظه صفر را نشان می‌دهد؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۸)

۱) $x = y^{\frac{1}{3}\ln y}$ ۲) $x = y^{\frac{1}{9}\ln y}$ ۳) $x = e^{\frac{1}{9}\ln y}$ ۴) $x = e^{\frac{1}{3}\ln y}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به تعریف سرعت، برای هر یک از مؤلفه‌های سرعت u و v داریم:

$$u = \frac{dx}{dt} = 2xt \qquad \frac{dx}{x} = 2tdt \qquad Lnx = t^2 + c_1 \qquad \left|\begin{matrix} x = 1 \\ t = 0 \end{matrix}\right. \Rightarrow c_1 = 0$$

$$v = \frac{dy}{dt} = 3y \qquad \frac{dy}{y} = 3dt \qquad Ln y = 3t + c_2 \qquad \left|\begin{matrix} y = 1 \\ t = 0 \end{matrix}\right. \Rightarrow c_2 = 0$$

با استخراج پارامتر زمان (t) از رابطه دوم و قرار دادن در رابطه اول، معادله مسیر به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$t = \frac{1}{3}Lny \qquad Lnx = \frac{1}{9}(Lny)^2 = \frac{1}{9}(Ln y)(Lny) \qquad Lnx = Ln(y)^{\frac{1}{9}Lny} \qquad x = y^{\frac{1}{9}Lny}$$

مثال ۱۳: معادله جریان دو بعدی غیرماندگاری به صورت $u = x(1+2t), v = y$ داده شده است. معادله خط مسیر ذره‌ای که در زمان شروع $(t = 0)$ در مکان $(x = 1, y = 1)$ قرار دارد، کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۸)

۱) $x = e^{Lny(1+Lny)}$ ۲) $y = x^{(\frac{1}{1+2t})}$ ۳) $y = e^{Lnx(1+Lnx)}$ ۴) $x = y^{(\frac{1}{1+2t})}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به تعریف سرعت، برای هر یک از مؤلفه‌های سرعت u و v داریم:

$$u = \frac{dx}{dt} = x(1+2t) \qquad \frac{dx}{x} = (1+2t)dt \qquad Lnx = t + t^2 + c_1$$

$$\left|\begin{matrix} x = 1 \\ t = 0 \end{matrix}\right. \Rightarrow c_1 = 0 \qquad v = \frac{dy}{dt} = y \qquad \frac{dy}{y} = dt \qquad Lny = t + c_2$$

$$\left|\begin{matrix} y = 1 \\ t = 0 \end{matrix}\right. \Rightarrow c_2 = 0$$

با استخراج پارامتر زمان (t) از رابطه دوم و قرار دادن در رابطه اول، معادله مسیر به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$t = Lny \qquad Lnx = t(1+t) \qquad Lnx = Lny(1+Lny) \qquad x = e^{Lny(1+Lny)}$$

جریان یکنواخت و غیریکنواخت

اگر خواص سیال و مشخصه‌های جریان در طول مسیر جریان ثابت باشند، جریان را **یکنواخت** می‌نامند. اگر خواص سیال و مشخصه‌های جریان در طول مسیر جریان تغییر کنند، جریان را **غیریکنواخت** می‌نامند. (در جریان یکنواخت $\frac{\partial v}{\partial s} = 0$ و در جریان غیریکنواخت $\frac{\partial v}{\partial s} \neq 0$، v یک خاصیت سیال یا یک مشخصه جریان است.)

اگر مشخصه‌های سیال در مقاطع مختلف در یک مجرای جریان یکسان باشند، با توجه به یکسان بودن مقدار سرعت متوسط، جریان یکنواخت خواهد بود.

از نمونه‌های جریان غیریکنواخت می‌توان به جریان داخل یک لوله با مقطع متغیر و یا یک لوله خمیده اشاره کرد.

جریان تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر

جریان‌های دارای جرم مخصوص ثابت را «تراکم‌ناپذیر» و دارای جرم مخصوص متغیر را «تراکم‌پذیر» می‌نامند.

در حالت کلی جریان‌های مایعات را می‌توان جریان‌های تراکم‌ناپذیر و جریان‌های گازی را می‌توان تراکم‌پذیر در نظر گرفت.

نکته ۱: جریان‌های گازی با عدد ماخ کوچک‌تر از ۰/۳ را می‌توان تراکم‌ناپذیر در نظر گرفت. (عدد ماخ عبارت از نسبت سرعت جریان سیال به سرعت صوت در سیال است.)

جریان ایده‌آل: جریان سیالی بدون اصطکاک (دارای لزجت صفر) و تراکم‌ناپذیر (دارای جرم مخصوص و وزن مخصوص ثابت) است.

جریان حقیقی: جریان سیال دارای اصطکاک است. (کلیه سیالات واقعی دارای لزجت هستند)

کاربرد روش میدان

برای محاسبات حرکت ذرات سیال تشکیل‌دهنده یک جریان با استفاده از میدان داده شده، دو روش یا دو دیدگاه مختلف وجود دارد.

دیدگاه اولری: اگر نقطه ثابتی در فضا به مختصات x_1 و y_1 و z_1 در نظر گرفته شود، می‌توان مختصات آن را در توابع میدان سرعت قرار داده و با گذشت زمان، سرعت ذرات گذرنده از این نقطه را در هر لحظه بیان نمود که به صورت ریاضی با عبارت $\vec{v}(x_1, y_1, z_1, t)$ نشان داده می‌شود. پس در یک نقطه ثابت از فضا، سرعت‌های دسته‌ای از ذرات سیال که از آن نقطه می‌گذرند بیان می‌شوند.

دیدگاه لاگرانژی: اگر بخواهیم حرکت هر یک از ذرات جریان را بررسی کنیم باید آن ذره تعقیب شود. یعنی در عبارت $\vec{v}(x, y, z, t)$ مختصات x و y و z نباید ثابت باشند، بلکه باید به طور پیوسته چنان تغییر کنند که همواره بر ذره منطبق باشند. در این صورت برای هر یک از ذرات سیال سه تابع زمانی $x(t)$ و $y(t)$ و $z(t)$ وجود دارد که در حالت کلی با توابع زمانی سایر ذرات متفاوت هستند.

نکته ۲: دیدگاه‌های فوق به دائمی و یا غیردائمی بودن میدان جریان بستگی ندارند.

نکته ۳: هر دو تکنیک در دینامیک سیالات کاربرد دارند.

شتاب یک ذره جریان

برای تعیین شتاب یک ذره جریان باید از دیدگاه لاگرانژی که به «تعقیب ذره‌ها» می‌پردازد استفاده نمود. با استفاده از قاعده مشتق زنجیری می‌توان به نتیجه زیر رسید:

$$\vec{a} = \underbrace{(V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z})}_{\text{شتاب انتقالی (جابه‌جایی)}} + \underbrace{(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t})}_{\text{شتاب محلی}}$$

مؤلفه‌های بردار شتاب عبارتند از:

$$a_x = (V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z}) + (\frac{\partial V_x}{\partial t}) \quad ; \quad a_y = (V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z}) + (\frac{\partial V_y}{\partial t})$$

$$a_z = (V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}) + (\frac{\partial V_z}{\partial t})$$

شتاب هر ذره بر حسب میدان سرعت و مشتقات جزئی مکانی و زمانی آن بیان شده است.

شتاب ذرات سیال در میدان جریان را می‌توان به صورت حاصل‌جمع دو اثر در نظر گرفت:

۱) در جملات داخل پرانتز اول متغیر صریح زمان ثابت در نظر گرفته شده است. بنابراین در این جملات فرض شده که در لحظه معین t، میدان جریان دائمی شده و دائمی می‌ماند. در چنین شرایطی، ذره در حال تغییر محل خود در این میدان دائمی است و چون در هر لحظه t عموماً سرعت در نقاط مختلف میدان با هم متفاوت است، سرعت ذره تغییر می‌کند. این تغییر زمانی سرعت را که ناشی از تغییر مکان در میدان سرعت است، به همین مناسبت **شتاب انتقالی** یا **شتاب جابه‌جایی** می‌نامند.

۲) جمله داخل پرانتز دوم معادلات شتاب ناشی از تغییر محل ذره نبوده، بلکه در اثر تغییر خود میدان سرعت در محلی که در لحظه t توسط ذره اشغال شده است به وجود می‌آید. این جمله را گاهی **شتاب محلی** یا **شتاب موضعی** می‌نامند.

اگر شتاب موضعی صفر باشد، جریان را **دائمی** و اگر شتاب انتقالی صفر باشد، جریان را **یکنواخت** و اگر شتاب موضعی و شتاب انتقالی صفر باشند، جریان را **دائمی یکنواخت** می‌نامند.

با معرفی اپراتور مشتق مادی، شتاب را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} \qquad \frac{D}{Dt} \equiv V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \ : \text{اپراتور مشتق مادی}$$

اگر از خط جریان به عنوان سیستم مختصات استفاده شود (s معرف محل ذره روی یک خط جریان خاص است):

$$\vec{V} = \vec{V}(s, t) \qquad \vec{a} = V \frac{\partial \vec{V}}{\partial s} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

در حالت دائمی جریان، خطوط مسیر همان خطوط جریان هستند و لذا بردار شتاب جابه‌جایی به دو مؤلفه اسکالر تجزیه می‌شود:

$$a_T = V \frac{dV}{ds} = \frac{1}{2} \frac{dV^2}{ds} \ : \text{مؤلفه مماس بر مسیر}$$

$$a_N = \frac{V^2}{R} \ : \text{مؤلفه قائم بر مسیر}$$

R : شعاع انحنا

مدرسان شریف

فصل چهارم

« فرم دیفرانسیلی قوانین اصلی »

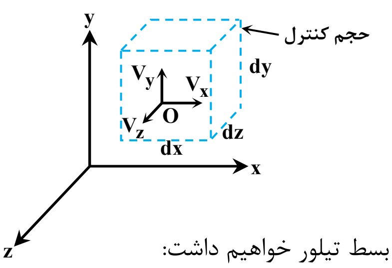
در فصل قبل قوانین اصلی به صورت انتگرالی برای یک حجم کنترل مطرح شده‌اند. ضعف معادلات انتگرالی در این است که با استفاده از آن‌ها فقط مقادیر متوسط کمیات و یا فقط مؤلفه‌های نیروی برآیند را می‌توان محاسبه نمود و نمی‌توان اطلاعات جزئی‌تری از میدان جریان به دست آورد. مثلاً با روش انتگرال می‌توان نیروی لیفت وارده بر یک بال را محاسبه کرد، ولی توزیع فشار وارد بر آن تعیین نمی‌شود. برای دسترسی به این اطلاعات، معادلات دیفرانسیل مناسبی که در یک نقطه معتبر باشند، مورد استفاده قرار می‌گیرند.

درسنامه (۱): اصل بقای جرم

معادله دیفرانسیلی پیوستگی

برای به دست آوردن معادله دیفرانسیلی پیوستگی، یک حجم کنترل بی‌نهایت کوچک را به ابعاد dx، dy و dz در نظر می‌گیریم:

در مرکز این حجم کنترل (نقطه O)، ρ جرم حجمی و سرعت برابر با $\vec{V}=V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k}$ فرض می‌شود.



برای محاسبه خواص در وجوه شش‌گانه حجم کنترل، از بسط سری تیلور حول نقطه O استفاده می‌شود.

مثلاً در وجه سمت راست برای ρ داریم:

$$\rho)_{x+\frac{dx}{۲}}=\rho+(\frac{\partial\rho}{\partial x})\frac{dx}{۲}+(\frac{\partial^۲\rho}{\partial x^۲})\frac{۱}{۲!}(\frac{dx}{۲})^۲+\cdots$$

(مختصات نقطه O برابر با (x,y,z) فرض شده است). با صرف‌نظر کردن از جمله‌های مرتبه بالاتر از یک در بسط تیلور خواهیم داشت:

$$\rho)_{x+\frac{dx}{۲}}=\rho+(\frac{\partial\rho}{\partial x})\frac{dx}{۲} \quad ; \quad u)_{x+\frac{dx}{۲}}=u+(\frac{\partial u}{\partial x})\frac{dx}{۲}$$

هر چهار جمله ρ، u، $\frac{\partial\rho}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial x}$ مربوط به مرکز O هستند. به همین ترتیب برای وجه سمت چپ خواهیم داشت:

$$\rho)_{x-\frac{dx}{۲}}=\rho-(\frac{\partial\rho}{\partial x})\frac{dx}{۲} \quad ; \quad u)_{x-\frac{dx}{۲}}=u-(\frac{\partial u}{\partial x})\frac{dx}{۲}$$

اکنون معادله بقای جرم را برای حجم کنترل در نظر می‌گیریم:

$$\iint_{CS}(\rho\vec{V}.\vec{dA})+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV}(\rho dv)=۰$$

با استفاده از مقادیر به دست آمده برای ρ و u در وجوه حجم کنترل، جمله اول در رابطه فوق محاسبه می‌شود. از آن‌جا که این محاسبات، طولانی هستند، در این‌جا فقط به یک مورد آن به عنوان مثال اشاره می‌شود:

در وجه سمت راست $(+x)$:
$$\int_{x+\frac{dx}{۲}}\rho\vec{V}.\vec{dA}=\rho)_{x+\frac{dx}{۲}}\,u)_{x+\frac{dx}{۲}}\,dy\,dz=\rho u\,dy\,dz+\frac{۱}{۲}[u(\frac{\partial\rho}{\partial x})+\rho(\frac{\partial u}{\partial x})]dx\,dy\,dz$$

لازم به تأکید است که با توجه به بی‌نهایت کوچک بودن ابعاد حجم کنترل، توزیع سرعت و جرم حجمی روی وجوه آن یکسان فرض شده است. با ادامه این محاسبات برای تمام وجوه نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\iint_{CS}(\rho\vec{V}.d\vec{A})=[\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z}]dx\,dy\,dz$$

با توجه به عدم تغییر ابعاد حجم کنترل نسبت به زمان، جمله دوم رابطه بقای جرم برای حجم کنترل برابر خواهد بود با: $\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV}(\rho dv)=\frac{\partial \rho}{\partial t}dx\,dy\,dz$

لذا معادله دیفرانسیلی پیوستگی عبارت است از: $\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z}=-\frac{\partial \rho}{\partial t}$

با استفاده از اپراتور دیورژانس می‌توان آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$\boxed{\mathrm{div}(\rho\vec{V})=\vec{\nabla}.(\rho\vec{V})=-\frac{\partial\rho}{\partial t}}$$

مزیت نمایش معادله با اپراتور دیورژانس این است که به سهولت و با استفاده از تعریف عملگر دیورژانس در دستگاه‌های مختصات مختلف مانند استوانه‌ای و کروی، می‌توان از این معادله استفاده نمود.

دو حالت ساده شده این معادله برای جریان‌های دائمی و جریان‌های تراکم‌ناپذیر، کاربردهای زیادی دارند.

این معادله برای جریان دائمی به صورت مقابل در می‌آید: $\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z}=0$

برای جریان تراکم‌ناپذیر حتی اگر غیردائمی باشد، داریم: $\vec{\nabla}.(\rho\vec{V})=0 \Rightarrow \rho(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z})+V_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+V_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+V_z\frac{\partial\rho}{\partial z}=0$

لذا با توجه به ثابت بودن ρ داریم: $\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0$

در نتیجه فرم اپراتوری معادله دیفرانسیلی پیوستگی برای جریان تراکم‌ناپذیر عبارت است از: $\vec{\nabla}.\vec{V}=0$

برای جریان دو بعدی $V_z=0$ و $\frac{\partial V_z}{\partial z}=0$ و لذا معادله پیوستگی به صورت مقابل نوشته می‌شود: $\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0$

برای جریان یک بعدی $V_y=V_z=0$ و $\frac{\partial V_y}{\partial y}=\frac{\partial V_z}{\partial z}=0$ و لذا معادله پیوستگی را به این صورت می‌نویسیم: $\frac{\partial V_x}{\partial x}=0$

معادله دیفرانسیلی پیوستگی در مختصات استوانه‌ای به صورت مقابل است: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho V_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$

در جریان دو بعدی تراکم‌ناپذیر داریم: $\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}=0$

توضیح: اپراتور دیورژانس روی میدان برداری A در دستگاه مختصات دکارتی و استوانه‌ای عبارت است از:

$$\vec{\nabla}.\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \text{(دکارتی)}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \text{(استوانه‌ای)}$$

مثال ۱: در بررسی سینماتیک سیالات درصورتی‌که سرعت یک ذره سیال از رابطه $\vec{V}=xt\hat{i}$ تبعیت کند و این ذره در لحظه $t=0$ در نقطه $x_0=1$ قرار داشته باشد، کدام مورد مقدار Lnx را نشان می‌دهد؟
(نانو فناوری- نانو مواد- سراسری ۹۷)

۱) t ۲) $\frac{t}{2}$ ۳) t^2 ۴) $\frac{t^2}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به معادله سرعت داده شده داریم:

$$u=\frac{dx}{dt}=xt \Rightarrow \frac{dx}{x}=tdt \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \ln x=\frac{t^2}{2}+c$$

$$\Big|_{x_0=1}^{t=0} \Rightarrow \ln 1=0+c \Rightarrow c=0 \Rightarrow \ln x=\frac{t^2}{2}$$

مثال ۲: کدام بردار سرعت می‌تواند بیانگر جریان آب باشد؟
(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون- مهندسی شیمی، بهداشت، ایمنی و محیط زیست- مهندسی ایمنی و بازرسی فنی- سراسری ۹۷)

۱) $\vec{v}=(4x+y)\hat{i}+(5y+6x)\hat{j}+(6x-9z)\hat{k}$
۲) $\vec{v}=(2x+2)\hat{i}+(3y+1)\hat{j}+(-4z+5)\hat{k}$
۳) $\vec{v}=(2x+2)\hat{i}+(-4z+5)\hat{j}+(3y+1)\hat{k}$
۴) $\vec{v}=(5y+6x)\hat{i}+(4x+y)\hat{j}+(6x-9z)\hat{k}$

پاسخ: گزینه «۱» بردار سرعت باید در معادله پیوستگی به‌صورت دیفرانسیلی صدق کند و داریم:

$$\vec{\nabla}.\vec{V}=0 \Rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0$$

گزینه (۱): $4+5-9=0$ گزینه (۲): $2+3-4=1\neq 0$ گزینه (۳): $2+0+0=2\neq 0$ گزینه (۴): $6+1-9=-2\neq 0$

مثال۳: میدان جریان تراکم‌ناپذیری به صورت مقابل تعریف شده است: $w = ۰$ $\quad v = Cx + Dy$ $\quad u = Ax + By$

براساس اصل بقای جرم کدام رابطه درست است؟ (مهندسی معماری کشتی- سراسری ۹۷)

۱) $D = -B$ ۲) $A = -D$ ۳) $B = -C$ ۴) $C = -A$

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از فرم دیفرانسیلی قانون بقای جرم برای جریان تراکم‌ناپذیر داریم:

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = ۰ \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = ۰ \Rightarrow A + D + ۰ = ۰ \Rightarrow A = -D$$

مثال۴: مؤلفه‌های سرعت در یک جریان تراکم‌ناپذیر به‌صورت $u = ny^۲ + ۴x$ و $v = \frac{۱}{۲}x + my$ هستند. مقدار پارامتر m کدام است؟

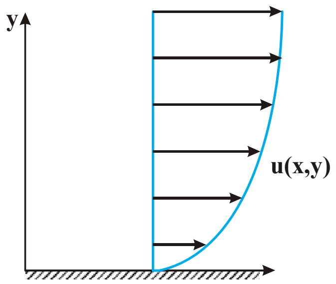
(مهندسی معماری کشتی- سراسری ۹۷)

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) -۲

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از فرم دیفرانسیلی قانون بقای جرم برای جریان تراکم‌ناپذیر داریم (جریان دو بعدی):

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = ۰ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = ۰ \Rightarrow ۴ + m = ۰ \Rightarrow m = -۴$$

مثال۵: اگر مؤلفهٔ افقی سرعت یک جریان دوبعدی غیرقابل تراکم بر روی یک صفحه $u = U(\frac{۳y}{ax} - \frac{y^۲}{a^۲x^۲})$ باشد، مؤلفهٔ عمودی سرعت جریان، کدام است؟ (مهندسی مکانیک- سراسری ۹۵)



۱) $U(\frac{۳y^۲}{۲ax^۲} - \frac{۲y^۳}{۳a^۲x^۳})$ ۲) $U(\frac{۳y}{ax} - \frac{۲y^۲}{a^۲x^۲})$

۳) $U(-\frac{۳y^۲}{ax^۲} + \frac{۲y^۳}{a^۲x^۳})$ ۴) $U(\frac{۳Ln(\frac{y}{x})}{a} + \frac{۲y}{a^۲x})$

پاسخ: گزینه «۱» معادله پیوستگی به فرم دیفرانسیلی برای جریان تراکم‌ناپذیر عبارت است از: $\vec{\nabla}.\vec{V} = ۰$

در حالت دوبُعدی داریم: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = ۰$

$$u = U(\frac{۳y}{ax} - \frac{y^۲}{a^۲x^۲}) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = U(-\frac{۳ay}{a^۲x^۲} + \frac{۲a^۲xy^۲}{a^۴x^۴}) = U(-\frac{۳y}{ax^۲} + \frac{۲y^۲}{a^۲x^۳})$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = U(\frac{۳y}{ax^۲} - \frac{۲y^۲}{a^۲x^۳}) \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری نسبت به } y} v = U(\frac{۳y^۲}{۲ax^۲} - \frac{۲y^۳}{۳a^۲x^۳})$$

مثال۶: اگر $u(x,y) = ۴ + \frac{۲x}{x^۲ + y^۲}$ در یک جریان تراکم‌ناپذیر باشد، مقدار $v(x,y)$ چقدر خواهد بود؟ اگر $v(x,۰) = ۰$ باشد.

(مهندسی فرآوری و انتقال گاز- مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون- مهندسی شیمی، بهداشت، ایمنی و محیط زیست- مهندسی ایمنی و بازرسی فنی- سراسری ۹۴)

۱) $\frac{۲x}{x^۲ + y^۲}$ ۲) $\frac{-۲x}{x^۲ + y^۲}$ ۳) $\frac{۲y}{x^۲ + y^۲}$ ۴) $\frac{-۲y}{x^۲ + y^۲}$

پاسخ: گزینه «۳» فرم دیفرانسیلی معادله پیوستگی در جریان تراکم‌ناپذیر عبارت است از:

$\vec{\nabla}.\vec{V} = ۰$ در جریان دو بعدی: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = ۰$

$$u(x,y) = ۴ + \frac{۲x}{x^۲ + y^۲} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{۲(x^۲ + y^۲) - ۴x^۲}{(x^۲ + y^۲)^۲} = \frac{۲(y^۲ - x^۲)}{(x^۲ + y^۲)^۲}$$

شرط مرزی $v(x,۰) = ۰$ فقط در گزینه‌های ۳ و ۴ صدق می‌کند.

$$v(x,y) = \frac{۲y}{x^۲ + y^۲} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{۲(x^۲ + y^۲) - ۴y^۲}{(x^۲ + y^۲)^۲} = \frac{۲(x^۲ - y^۲)}{(x^۲ + y^۲)^۲} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

مثال ۷: میدان سرعت $\vec{V}=x^2\vec{i}+yx\vec{j}+t^2\vec{k}\,(\frac{m}{s})$ و توزیع جرم مخصوص $\rho=\rho_\circ(1+10^{-2}x)\frac{kg}{m^3}$ داده شده است ($\rho_\circ$ ثابت). نرخ زمانی تغییر ρ در نقطه $(2,2,0)\,m$ در لحظه $t=2s$ چقدر است؟

پاسخ: از فرم دیفرانسیلی معادله پیوستگی داریم:

$$\rho\vec{V}=\rho_\circ(1+0/01x)(x^2\vec{i}+yx\vec{j}+t^2\vec{k})\qquad \vec{\nabla}.(\rho\vec{V})=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$(x,y,z)=(2,2,0)m\quad,\quad t=2s$$

$$\vec{\nabla}.(\rho\vec{V})=\rho_\circ\left\{\frac{\partial[(1+0/01x)x^2]}{\partial x}+\frac{\partial[(1+0/01x)xy]}{\partial y}+\frac{\partial[(1+0/01x)t^2]}{\partial z}\right\}=\rho_\circ(2x+0/03x^2)+\rho_\circ(x+0/01x^2)$$

$$\vec{\nabla}.(\rho\vec{V})=\rho_\circ(4+0/12)+\rho_\circ(2+0/04)=6/16\rho_\circ\Rightarrow\frac{\partial\rho}{\partial t}=-6/16\rho_\circ$$

مثال ۸: میدان سرعت در یک جریان تراکم‌ناپذیر عبارت است از: $V_x=V_y=xy^2$ و $V_z=\frac{-1}{4}xz^K$، در نقطه $A(-2,3,3)$ مقدار K را به دست آورید.

پاسخ: از فرم دیفرانسیلی معادله پیوستگی برای جریان تراکم‌ناپذیر داریم:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0\qquad y^2+2xy-\frac{K}{4}xz^{K-1}=0\ ,\ (x,y,z)=(-2,3,3)$$

$$(3)^2+2(-2)(3)-\frac{K}{4}(-2)(3)^{K-1}=0\Rightarrow -3+\frac{K}{2}(3)^{K-1}=0\Rightarrow K=2$$

مثال ۹: کدام معادلهٔ دیفرانسیل، بیانگر قانون بقای جرم برای جریان دوبعدی سیال تراکم‌پذیر با حجم مخصوص v و میدان سرعت $\vec{V}$ می‌باشد؟

(مهندسی مکانیک - سراسری ۹۵)

۱) $\frac{D\ln v}{Dt}=\vec{\nabla}.\vec{V}$ ۲) $\frac{Dv}{Dt}=\vec{\nabla}.\vec{V}$ ۳) $\frac{D\ln v}{Dt}=-\vec{\nabla}.\vec{V}$ ۴) $\frac{Dv}{Dt}=-\vec{\nabla}.\vec{V}$

پاسخ: گزینه «۱» قانون بقای جرم (معادله پیوستگی) به فرم دیفرانسیلی در حالت کلی عبارت است از:

$$\vec{\nabla}.\rho\vec{V}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

در حالت دو بعدی داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\Rightarrow\rho\vec{\nabla}.\vec{V}=-u\frac{\partial\rho}{\partial x}-v\frac{\partial\rho}{\partial y}-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{V}=-u\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}-v\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}\Rightarrow\vec{\nabla}.\vec{V}=u\frac{\partial\,\mathrm{Ln}v}{\partial x}+v\frac{\partial\,\mathrm{Ln}v}{\partial y}+\frac{\partial\,\mathrm{Ln}v}{\partial t}\Rightarrow\vec{\nabla}.\vec{V}=\frac{D\,\mathrm{Ln}v}{Dt}$$

مثال ۱۰: اجزای سرعت برای یک جریان تراکم‌ناپذیر به صورت $w=b$ ، مجهول $v=?$ ، $u=a(x^2+y^2)$ داده شده است که a و b ثابت‌ها هستند. کدام گزینه شکل صحیح جزء سرعت v را نشان می‌دهد؟

(مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۱)

۱) $v=-2axy$ ۲) $v=-4ay+C$ ۳) $v=-2ayb+C$ ۴) $v=-2axy+f(x,z,t)$

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از فرم دیفرانسیلی معادله پیوستگی داریم: $\vec{\nabla}.\vec{V}=0$: معادله پیوستگی برای جریان تراکم‌ناپذیر

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$ قرار دادن سرعت در معادله پیوستگی: $\frac{\partial}{\partial x}[a(x^2+y^2)]+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}(b)=0$

$$2ax+\frac{\partial v}{\partial y}=0\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial y}=-2ax\Rightarrow v=-2axy+f(x,z,t)$$

مثال ۱۱: برای یک جریان سه بعدی مؤلفه‌های سرعت به صورت زیر داده شده‌اند. میزان تغییر حجم جرم معین سیال به ازای واحد حجم در واحد زمان چقدر است؟ $(\vec{V}=u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k}\ ,\ u=2x+y\ ,\ v=2x-y\ ,\ w=-z)$

(مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۳)

۱) $-1s^{-1}$ ۲) $1/2s^{-1}$ ۳) $3s^{-1}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۴» $\vec{\nabla}.(\rho\vec{V})=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$: معادله پیوستگی به صورت دیفرانسیلی

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\Rightarrow$$ قرار دادن مؤلفه‌های سرعت در معادله پیوستگی $$\Rightarrow\frac{\partial(2x+y)}{\partial x}+\frac{\partial(2x-y)}{\partial y}+\frac{\partial(-z)}{\partial z}=2-1-1=0\Rightarrow\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

بنابراین تغییرات جرم حجمی نسبت به زمان صفر است.

مدرسان شریف

فصل پنجم

« آنالیز ابعادی و تشابه »

درسنامه (۱): آنالیز ابعادی

به علت پیچیدگی بسیار زیاد معادلات حاکم بر جریان سیالات (معادلات ناویر ـ استوکس)، روش‌های تجربی و آزمایشگاهی هنوز نقش قابل توجهی در علم سیالات ایفا می‌کنند. آنالیز ابعادی روشی است که سبب کاهش تعداد آزمایش‌های لازم می‌شود، تحلیل داده‌های آزمایشگاهی را آسان‌تر می‌کند و حتی روش انجام آزمایش‌ها را تغییر داده و باعث کاهش زمان و هزینه می‌شود. مثلاً فرض می‌شود که هدف تحلیل نیروی وارد از طرف سیال بر یک کره باشد. مهندس آزمایش‌کننده با تکیه بر علم و تجربه خود می‌تواند حدس بزند که عواملی مانند قطر کره، سرعت سیال، جرم حجمی و لزجت سیال مهم‌ترین عوامل تأثیرگذار بر مقدار نیروی مورد نظر هستند:

$$F = f(\rho, \mu, V, D)$$

برای تعیین تابع f لازم است آزمایش‌های زیادی انجام شود. ابتدا تعداد زیادی آزمایش برای تعیین رابطه $F-\rho$، سپس تعیین $F-\mu$ و ... انجام می‌شوند. سپس نتایج این آزمایش‌ها به صورت نمودارهایی رسم شده که برای تحلیل مورد استفاده قرار می‌گیرند. این روش به دلیل معایب زیر تقریباً غیرممکن است:

۱ـ تعداد آزمایش‌های لازم بسیار زیاد است.

۲ـ انجام برخی آزمایش‌ها عملی نیست، مثلاً تغییر متوالی جرم حجمی و لزجت سیال.

۳ـ داده‌های به دست آمده به آسانی قابل درک و استفاده نیستند.

برای حل این مشکل، با استفاده از روش آنالیز ابعادی می‌توان به این نتیجه رسید که پارامترهای F، ρ، μ، V و D را می‌توان در قالب دو گروه بی‌بعد و به صورت زیر به هم ارتباط داد:

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = g\left(\frac{\rho VD}{\mu}\right)$$

به این ترتیب با انجام تعداد کمی آزمایش می‌توان تابع g را تعیین نمود. علاوه بر کاهش تعداد آزمایش‌ها، سایر مزایای این روش عبارتند از:

۱ـ فقط با تغییر متغیر مناسب می‌توان مقدار گروه بی‌بعد را تغییر داد. مثلاً برای تغییر مقدار گروه بی‌بعد $\frac{\rho VD}{\mu}$، تغییر سرعت V سهل‌تر از پارامترهای دیگر خواهد بود.

۲ـ ارتباط بین داده‌های به دست آمده به صورت یک نمودار خواهد بود که به راحتی قابل استفاده است.

در این قسمت، جریان سیال از نظر ابعادی مطالعه می‌شود و به کمک این مطالعات، مبانی بررسی تجربی پدیده‌های سیالات نیز ارائه خواهند شد.

گروه بی‌بعد: اگر ساده‌ترین نمایش ابعادی گروهی از کمیت‌ها که در یکدیگر ضرب می‌شوند برابر واحد باشد، آن را «گروه بی‌بعد» می‌نامند.

قانون همگنی ابعادی: معادلات حاصل از عملیات تحلیلی در تمام سیستم‌های آحاد صادق هستند و در نتیجه نمایش ابعادی تمام جملات آن‌ها باید یکسان باشند.

ابعاد: چهار بعد اصلی که در مکانیک سیالات مورد استفاده قرار می‌گیرند عبارتند از:

طول (L)، جرم (M)، زمان (T) و درجه حرارت (θ) (دستگاه $MLT\theta$). گاهی اوقات به جای بعد جرم (M) از بعد نیرو (F) استفاده می‌شود (دستگاه $FLT\theta$). در جدول زیر فهرست کمیت‌هایی که معمولاً در مکانیک سیالات به کار می‌روند، همراه با نمایش ابعادی آن‌ها در دستگاه‌های $MLT\theta$ و $FLT\theta$ نشان داده شده است.

کمیت	علامت اختصاری	بعد در دستگاه $MLT\theta$	بعد در دستگاه $FLT\theta$
طول	L	L	L
مساحت	A	L^2	L^2
حجم	$\forall$	L^3	L^3
سرعت	V	L/T	L/T
شتاب	$a=\frac{V}{t}$	L/T^2	L/T^2
سرعت زاویه‌ای	ω	$1/T$	$1/T$
شتاب زاویه‌ای	$\alpha=\frac{\omega}{t}$	$1/T^2$	$1/T^2$
جرم حجمی	$\rho=\frac{m}{\forall}$	M/L^3	FT^2/L^4
وزن مخصوص	$\gamma=\rho g$	M/L^2T^2	F/L^3
دبی حجمی	$Q=\frac{\forall}{t}$	L^3/T	L^3/T
دبی جرمی	$\dot{m}=\frac{m}{t}$	M/T	FT/L
لزجت دینامیکی	μ	M/LT	FT/L^2
لزجت سینماتیکی	$\nu=\frac{\mu}{\rho}$	L^2/T	L^2/T
کشش سطحی	σ	M/T^2	F/L
نیرو	F	ML/T^2	F
گشتاور	M	ML^2/T^2	FL
کار و انرژی	W,E	ML^2/T^2	FL
توان	$P=\frac{W}{t}$	ML^2/T^3	FL/T
فشار و تنش	$P,\sigma=\frac{F}{A}$	M/LT^2	F/L^2
گرما	Q	ML^2/T^2	FL

تئوری (قضیه) π باکینگهام: مطابق این تئوری، تعداد گروه‌های بی‌بعد مستقلی که می‌توانند برای توصیف یک پدیده به کار روند، برابر با $(n-r)$ بوده که n تعداد متغیرهای مؤثر در پدیده و r معمولاً تعداد ابعاد اصلی لازم برای نمایش ابعادی متغیرها است. در حالت کلی، r معرف رتبه ماتریس ابعادی فرآیند خواهد بود.

تعیین اعداد بی‌بعد:

در آنالیز ابعادی، پس از تعیین تعداد گروه‌های بی‌بعد، اکنون روش تعیین گروه‌های بی‌بعد بررسی می‌شود. برای تعیین رابطه یک کمیت مانند A بر حسب سایر کمیت‌ها مانند B_i می‌توان از آنالیز ابعادی استفاده کرد. بنابراین ابتدا هر یک از کمیت‌های موجود (A,B_i) را بر حسب ابعاد اصلی در دستگاه $MLT\theta$ یا $FLT\theta$ نوشته و سپس با استفاده از معادلات موجود، هر یک از بعدهای اصلی کمیت A را بر حسب کمیت‌های B_i و بعدهای اصلی باقیمانده به دست آورده و به این ترتیب رابطه بین کمیت‌های A و B_i تعیین می‌شود. برای فهم بهتر مطالب فوق به روش حل مثال زیر توجه شود.

مثال۱: مقدار سرعت خروج سیال از مخازن زیرزمینی، V، به جرم حجمی سیال، ρ، و اختلاف فشار، ΔP، بستگی دارد. با استفاده از آنالیز ابعادی نشان دهید که معادله سرعت با کدام گزینه برابر است؟ (K ضریب بدون بعد است).

۱) $V = K\sqrt{\Delta P.\rho}$ ۲) $V = K\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$ ۳) $V = K\Delta P.\rho$ ۴) $V = K\sqrt{\frac{\rho}{\Delta P}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» **روش اول:** با توجه به روش توضیح داده شده، ابتدا هر یک از کمیت‌های A و B_i را بر حسب ابعاد اصلی در دستگاه $MLT\theta$ به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$B_i \text{ کمیت‌های}: \rho, \Delta P \Rightarrow [\Delta P] \equiv \frac{M}{LT^{۲}} \quad , \quad [\rho] \equiv \frac{M}{L^{۳}} \qquad\qquad A \text{ کمیت}: V \Rightarrow [V] \equiv \frac{L}{T}$$

حال برای تعیین رابطه بین V با ΔP و ρ لازم است که بعدهای اصلی L و T مربوط به سرعت V را بر حسب کمیت‌های ΔP و ρ به دست آوریم. لذا داریم:

$$\rho = \frac{M}{L^{۳}} \Rightarrow L^{۳} = \frac{M}{\rho} \Rightarrow L = (\frac{M}{\rho})^{\frac{۱}{۳}}$$

$$\Delta P = \frac{M}{LT^{۲}} \Rightarrow \Delta P = \frac{M}{(\frac{M}{\rho})^{\frac{۱}{۳}} T^{۲}} = \frac{\rho^{\frac{۱}{۳}} M^{\frac{۲}{۳}}}{T^{۲}} \Rightarrow T^{۲} = \frac{\rho^{\frac{۱}{۳}} M^{\frac{۲}{۳}}}{\Delta P} \Rightarrow T = \frac{\rho^{\frac{۱}{۶}} M^{\frac{۱}{۳}}}{\Delta P^{\frac{۱}{۲}}} \quad ; \quad V = \frac{L}{T} = \frac{\frac{M^{\frac{۱}{۳}}}{\rho^{\frac{۱}{۳}}}}{\frac{\rho^{\frac{۱}{۶}} M^{\frac{۱}{۳}}}{\Delta P^{\frac{۱}{۲}}}} = \frac{\Delta P^{\frac{۱}{۲}}}{\rho^{\frac{۱}{۲}}} \Rightarrow V = K\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$$

روش دوم: با توجه به متغیرهای صورت مسأله داریم:

$$V = f(\Delta P, \rho)$$

رابطه تابعی فوق را به صورت تساوی روبه‌رو می‌نویسیم:

$$V = K(\Delta P)^{a}(\rho)^{b}$$

برای تعیین مجهول‌های a و b، لازم است که کمیت‌های فوق را بر حسب ابعاد اصلی در دستگاه $MLT\theta$ بیان کنیم. لذا داریم:

$$[V] \equiv \frac{L}{T} \quad , \quad [\Delta P] \equiv \frac{M}{LT^{۲}} \quad , \quad [\rho] \equiv \frac{M}{L^{۳}}$$

$$(\frac{L}{T}) = (\frac{M}{LT^{۲}})^{a}(\frac{M}{L^{۳}})^{b} \Rightarrow (LT^{-۱}) = (ML^{-۱}T^{-۲})^{a}(ML^{-۳})^{b} \Rightarrow (LT^{-۱}) = (M)^{a+b}(L)^{-a-۳b}(T)^{-۲a}$$

از برابری توان‌ها در معادله فوق داریم:

$$\begin{cases} a+b=۰ \Rightarrow a=-b \\ -a-۳b=۱ \\ -۲a=-۱ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{۱}{۲} \ , \ b=-\frac{۱}{۲} \quad ; \quad V = K(\Delta P)^{\frac{۱}{۲}}(\rho)^{-\frac{۱}{۲}} = K\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$$

روش سوم: با تعیین واحد کلیه گزینه‌ها، موردی را انتخاب می‌کنیم که دارای واحد سرعت $(\frac{m}{s})$ باشد:

$$\text{گزینه ۱}: V = K\sqrt{\Delta P.\rho}$$

$$\Delta P \text{ واحد} = \frac{N}{m^{۲}} = \frac{kg.m}{s^{۲}.m^{۲}} = \frac{kg}{m.s^{۲}} \quad ; \quad \rho \text{ واحد} = \frac{kg}{m^{۳}} \quad ; \quad \sqrt{\Delta P.\rho} = \sqrt{\frac{kg}{m.s^{۲}} \times \frac{kg}{m^{۳}}} = \frac{kg}{m^{۲}.s}$$

$$\text{گزینه ۲}: V = K\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}} \Rightarrow \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\frac{kg}{m.s^{۲}}}{\frac{kg}{m^{۳}}}} = \frac{m}{s}$$

$$\text{گزینه ۳}: V = K\Delta P.\rho \Rightarrow \Delta P.\rho = \frac{kg}{m.s^{۲}} \times \frac{kg}{m^{۳}} = \frac{kg^{۲}}{m^{۴}.s^{۲}} \qquad \text{گزینه ۴}: V = K\sqrt{\frac{\rho}{\Delta P}} \Rightarrow \sqrt{\frac{\rho}{\Delta P}} = \sqrt{\frac{\frac{kg}{m^{۳}}}{\frac{kg}{m.s^{۲}}}} = \frac{s}{m}$$

از بین این سه روش، روش سوم عمومی‌تر است و همواره می‌توان از آن استفاده نمود.

متغیرهای مهم در مکانیک سیالات: در اکثر پدیده‌های سیالات که انتقال حرارت قابل صرف‌نظر باشد، متغیرهای زیر حائز اهمیت هستند:

۱) تغییرات فشار (ΔP) ۲) طول (L) ۳) لزجت (μ) ۴) کشش سطحی (σ) ۵) سرعت صوت (C)
۶) شتاب جاذبه (g) ۷) جرم مخصوص (ρ) ۸) سرعت (V)

نیروهای مهم در مکانیک سیالات: در زیر برخی از نیروهای مهم در مکانیک سیالات بیان می‌شوند. نسبت هر زوج دلخواه از این نیروها بی‌بعد است.

نیروی تراکم‌پذیری : $E_V A \sim \rho C^2 L^2$

نیروی اصطکاکی (لزجی) : $\tau A = \mu \frac{du}{dy} A \sim \mu \frac{V}{L} L^2 \sim \mu V L$

نیروی کشش سطحی : σL

نیروی اینرسی : $mv \frac{dv}{ds} \sim \rho L^3 V \frac{V}{L} = \rho V^2 L^2$

نیروی فشاری : $\Delta PA \sim \Delta P L^2$

نیروی جاذبه (وزن) : $mg \sim \rho L^3 g$

گروه‌های بی‌بعد مهم در مکانیک سیالات و مفهوم فیزیکی آن‌ها

در اکثر پدیده‌های مکانیک سیالات نیروی اینرسی تأثیرگذار است. نسبت نیروی اینرسی با پنج نیروی معرفی شده دیگر، منجر به معرفی پنج گروه بی‌بعد زیر می‌شود:

۱) عدد رینولدز: نسبت نیروی اینرسی به نیروی اصطکاک (لزجی). این عدد در جریان‌های لزج و معمولاً بر حسب پارامترهای مناسبی از جریان و هندسه آن بیان می‌شود. از کاربردهای عدد رینولدز می‌توان به جریان داخل لوله‌ها، جریان لزج دارای سرعت پایین و بدون سطح آزاد، حرکت با سرعت معمولی در اطراف اتومبیل‌ها، جریان در توربوماشین‌ها، حرکت زیردریایی در زیر آب و حرکت اجسام غوطه‌ور داخل سیال اشاره نمود.

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho V^2 L^2}{\mu V L} = \frac{\rho V L}{\mu} \quad \text{یا} \quad \frac{VL}{\nu}$$

۲) عدد فرود: نسبت نیروی اینرسی به نیروی جاذبه (وزن) است. اگر در جریان یک سطح آزاد وجود داشته باشد مانند جریان در یک رودخانه، شکل این سطح و امواج آن مستقیماً متأثر از نیروی جاذبه است. همچنین در مواردی نظیر جریان در کانال‌های باز، جریان جت‌های مایع از اوریفیس‌ها، جریان روی سرریز سد و حرکت کشتی در دریاهای متلاطم، عدد فرود حائز اهمیت است. در هنگام مطالعه جزر و مد نیز چون نیروی ثقل تعیین‌کننده است، از عدد فرود استفاده می‌شود. این عدد نوع جریان را از نظر بحرانی $(Fr = 1)$، فوق‌بحرانی $(Fr > 1)$ و زیربحرانی $(Fr < 1)$ نشان می‌دهد.

$$\mathbf{Fr} = \frac{\rho V^2 L^2}{\rho L^3 g} = \frac{V^2}{Lg}$$

در بعضی از موارد، از جذر عبارت فوق به عنوان عدد فرود استفاده می‌شود.

۳) عدد ماخ: نسبت جذر نیروی اینرسی به جذر نیروی ناشی از تراکم‌پذیری سیال. این عدد در جریان‌های با سرعت زیاد که تغییرات جرم مخصوص در اثر فشار قابل توجه است، اهمیت فوق‌العاده‌ای می‌یابد. مثلاً در آزمایش‌های آئرودینامیکی، مسائل چکش آبی و جریان‌های گازی با سرعت‌های مافوق صوت، عدد ماخ قابل استفاده است.

$$\mathbf{M} = \sqrt{\frac{\rho V^2 L^2}{\rho C^2 L^2}} = \sqrt{\frac{V}{C}}$$

۴) عدد وبر: نسبت نیروی اینرسی به نیروی کشش سطحی. در این حالت نیز باید سطح آزاد وجود داشته باشد، ولی وقتی ابعاد جسم بزرگ باشند مانند قایقی که در آب شناور است، این اثر خیلی کوچک است. عدد وبر فقط وقتی اهمیت دارد که مساوی یا کوچک‌تر از واحد باشد و در مقادیر بزرگ قابل صرف‌نظر است. مثلاً در قطرات، جریان‌های مویینگی، جریان خون در رگ‌ها، موج‌های ناهموار و مدل‌های هیدرولیکی خیلی کوچک از عدد وبر استفاده می‌شود.

$$\mathbf{W} = \frac{\rho V^2 L^2}{\sigma L} = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$$

۵) عدد اولر: نسبت نیروی فشاری به نیروی اینرسی. این عدد در جریان‌های دارای افت فشار و یا نیروی درگ مورد استفاده قرار می‌گیرد. هرگاه افت فشار به گونه‌ای باشد که سبب تبخیر و کاویتاسیون شود، عدد اولر اهمیت پیدا می‌کند.

$$\mathbf{Eul} = \frac{\Delta P L^2}{\rho V^2 L^2} = \frac{\Delta P}{\rho V^2} \quad \text{یا} \quad \mathbf{Eul} = \frac{F}{\rho V^2 L^2}$$

در آزمایش‌های عملی، معمولاً از ضریب فشار استفاده می‌شود که دو برابر عدد اولر است:

$$\mathbf{C_p} = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2} = 2\mathbf{Eul}$$

ضریب فشار را در پدیده کاویتاسیون، C_α **(عدد کاویتاسیون)** می‌نامند که عبارت است از:

$$C_\alpha = \frac{P - P_v}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

در رابطه بالا P، ρ و V مربوط به جریان مایع و P_v فشار بخار مایع در دمای مورد نظر است.

گروه‌های بی‌بعد زیر کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرند:

$$\frac{\text{نیروی گریز از مرکز}}{\text{نیروی اینرسی}} = \frac{L\omega}{V} = S_t : \text{عدد استروهال (اشتروهال)}$$

در جریان‌های چرخشی اهمیت دارد.

$$\text{عدد مویینگی} : C_\sigma = \frac{\mu V}{\sigma}$$

در صورت مهم بودن اثر مویینگی مطرح می‌شود.

ضرایب زیر در تحلیل جریان سیال و آئرودینامیک، بسیار کاربردی است.

ضریب لیفت : $C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 L^2}$	ضریب درگ : $C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 L^2}$	ضریب اصطکاک پوسته‌ای : $C_f = \frac{\tau_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}$

مثال ۲: **برای جریان با عدد رینولدز کوچک، نیرو یا نیروهای عمده حاکم بر سیال کدام است؟**

۱) نیروی اینرسی		۲) نیروی لزجت		۳) نیروی وزن		۴) هر دو نیروی اینرسی و لزجت

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»		نیروی اینرسی >> نیروی لزجت ⇐ عدد رینولدز کوچک		$\frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی لزجت}}$ = عدد رینولدز

لذا نیروی لزجت حاکم بر جریان است.

مثال ۳: **افت فشار درون یک خط لوله به مشخصات خط لوله (طول، قطر و زبری)، خواص سیال (چگالی و ویسکوزیته) و نیز سرعت سیال وابسته است. کدام دسته متغیرها می‌توانند به‌عنوان متغیرهای تکراری در تعیین گروه‌های بدون بعد حاکم بر مسئله به‌کار برده شوند؟**

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون- مهندسی شیمی، بهداشت، ایمنی و محیط زیست- مهندسی ایمنی و بازرسی فنی- سراسری ۹۷)

۱) سرعت سیال، ویسکوزیته سیال و افت فشار		۲) سرعت سیال، چگالی سیال و قطر خط لوله

۳) قطر و زبری لوله به همراه سرعت سیال		۴) قطر خط لوله، ویسکوزیته سیال و افت فشار

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» متغیرهای تکراری در تعیین گروه‌های بدون بعد حاکم بر مسئله عبارتند از: سرعت سیال، چگالی سیال و قطر خط لوله.

مثال ۴: **مدل تخلیه سیال از مخزن به فرم $V = K(\Delta P)^a(\rho)^b$ پیشنهاد می‌شود که در آن V سرعت، ΔP افت فشار، ρ دانسیته سیال، K ضریب و نماهای a و b ثابت‌های مدل می‌باشند. سرعت تابعی از کدام موارد زیر است؟**

(مهندسی شیمی- سراسری ۹۷)

۱) $(\frac{\Delta P}{\rho})$		۲) $(\frac{\Delta P}{\rho})^{0/5}$		۳) $(\Delta P)^{0/5}\rho^2$		۴) $(\frac{\Delta P}{\rho})^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای تعیین فرم صحیح تابع سرعت، گزینه‌های داده شده را از نظر ابعادی بررسی می‌کنیم:

$$\frac{\Delta P}{\rho} : \frac{\frac{N}{m^2}}{\frac{kg}{m^3}} = \frac{N.m}{kg} = \frac{kg.\frac{m}{s^2}.m}{kg} = \frac{m^2}{s^2}$$

$$(\frac{\Delta P}{\rho})^2 : (\frac{m^2}{s^2})^2 = \frac{m^4}{s^4} \quad , \quad (\Delta P)^{0/5}\rho^2 : \sqrt{\frac{N}{m^2}}\cdot\frac{kg^2}{m^6} \neq \frac{m}{s} \quad , \quad (\frac{\Delta P}{\rho})^{0/5} : \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{m}{s}$$

بنابراین با توجه به واحدهای به دست آمده گزینه (۲) صحیح است.

مدرسان شریف

فصل ششم

« جریان تراکم‌ناپذیر لزج در لوله‌ها »

برای بررسی برخی موارد اثرات لزجت از اهمیت بالایی برخوردارند، به طوری که باید جریان دارای اصطکاک در نظر گرفته شود، به همین منظور دو طبقه وسیع از جریان‌ها معرفی می‌شوند:

الف) جریان حول اجسامی نظیر ایرفویل‌ها، موشک‌ها و مخازن زمینی هنگامی که سایر مرزهای جریان مثل سطح زمین در فاصلهٔ نسبتاً دوری قرار گرفته باشند **جریان‌های خارجی** نامیده می‌شوند.

ب) جریان‌هایی که توسط مرزهایشان احاطه شده باشند مانند جریان در داخل لوله‌ها، کانال‌ها و شیپوره‌ها **جریان‌های داخلی** نامیده می‌شوند.

عموماً جریان خارجی گازها (مانند جریان‌هایی که در مهندسی هوانوردی مطرح است) و جریان خارجی هیدرودینامیک (مانند جریان‌هایی که در مهندسی زیردریایی مطرح می‌شود)، را می‌توان به جز در ناحیه لایه مرزی، بدون اصطکاک در نظر گرفت.

در بررسی جریان‌های داخلی در ورودی یک کانال یا لوله عموماً لایه مرزی بسیار نازک است، ولی این لایه در طول لوله مرتباً ضخیم‌تر می‌شود تا این که سریعاً کل مقطع جریان را احاطه می‌کند و در مواردی که این امر در اوایل لوله رخ می‌دهد، **جریان در سراسر لوله لزج محسوب می‌شود.**

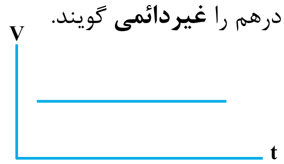
جریان در لوله‌های نسبتاً طویل انتقال نفت و آب را می‌توان لزج محسوب نمود، ولی جریان هوا در مجاری نسبتاً کوتاه مثل کانال‌های تهویه و تونل‌های باد را در نواحی به غیر از ناحیه لایه مرزی، می‌توان بدون اصطکاک در نظر گرفت.

درسنامه (۱): جریان آرام

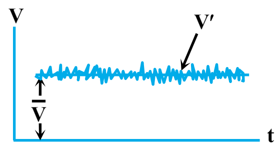
جریان‌های آرام و درهم

در جریان آرام هر ذره در امتداد مسیری منظم که در آن لایه‌های سیال بدون ایجاد حرکت کاتوره‌ای به آرامی بر روی هم می‌لغزند، حرکت می‌کند و بین لایه‌ها فقط تبادل ممنتوم مولکولی وجود دارد. ولی در جریان درهم حرکت ذرات سیال بسیار نامنظم و با حرکت‌های کاتوره‌ای و سه بعدی همراه است و تبادل ممنتوم شدیدی بین ذرات وجود دارد.

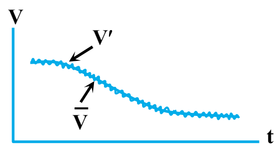
آزمایش کلاسیک رینولدز در مورد جریان لزج، تفاوت اساسی جریان‌های آرام و درهم را نشان می‌دهد. در جریان آرام با این که حرکات مولکولی نامنظم است ولی جریان به طور ماکروسکوپیک منظم می‌باشد. اما در جریان درهم یک سرعت نوسانی کوچک ولی ماکروسکوپیک V' به جریان منظم $\overline{V}$ (سرعت متوسط جریان درهم) اضافه می‌شود. اگر سرعت متوسط نسبت به زمان ثابت باشد، جریان درهم را **دائمی** و اگر سرعت متوسط با زمان تغییر کند، جریان درهم را **غیردائمی** گویند.



جریان دائمی آرام



جریان دائمی درهم، V' نسبت به $\overline{V}$ اندازه‌گیری می‌شود



جریان غیردائمی درهم، V' نسبت به $\overline{V}$ اندازه‌گیری می‌شود

معیار انتقال جریان آرام به درهم در یک لوله عدد رینولدز است که پارامتر طول آن، قطر لوله خواهد بود. عدد رینولدز بحرانی **۲۳۰۰** معرف انتقال از جریان آرام به جریان درهم است و داریم:

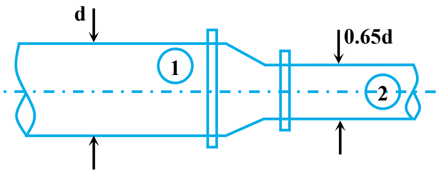
$$\boxed{Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{V d}{\nu}}$$

V : سرعت متوسط سیال، μ: لزجت دینامیکی سیال، ν : لزجت سینماتیکی سیال، d: قطر لوله

جریان درهم : $Re > Re_{crit.}$

جریان آرام : $Re < Re_{crit.}$

مثال۱: در شکل مقابل $(Re)_۱ = ۱۹۵۰$، $(Re)_۲$ را به دست آورید؟



پاسخ: با نوشتن رابطه پیوستگی می‌توان نسبت سرعت در دو لوله را محاسبه کرد:

$$Q_۱ = Q_۲ \Rightarrow \frac{V_۲}{V_۱} = (\frac{D_۱}{D_۲})^۲ \qquad (Re)_۱ = \frac{V_۱ D_۱}{\nu} \quad , \quad (Re)_۲ = \frac{V_۲ D_۲}{\nu}$$

حال با داشتن نسبت سرعت و قطر دو لوله خواهیم داشت:

$$(Re)_۲ = (Re)_۱ \times \frac{D_۲}{D_۱} \times \frac{V_۲}{V_۱} = (Re)_۱ \times \frac{D_۲}{D_۱} \times (\frac{D_۱}{D_۲})^۲ = (Re)_۱ \times \frac{D_۱}{D_۲}$$

$$(Re)_۲ = ۱۹۵۰ \times \frac{d}{۰/۶۵ d} \Rightarrow (Re)_۲ = ۳۰۰۰$$

بررسی معادله پیوستگی در جریان دائمی، آرام و تراکم‌ناپذیر داخل لوله افقی با مقطع ثابت

پروفیل سرعت در جهت جریان بدون تغییر باقی می‌ماند.

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = ۰ : \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial \cancel{V_y}^{\,۰}}{\partial y} + \frac{\partial \cancel{V_z}^{\,۰}}{\partial z} = ۰ \Rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial x} = ۰$$

بررسی قانون اول ترمودینامیک

$$h_l = \frac{P_۱ - P_۲}{\rho} = \frac{\Delta P}{\rho} = [-\frac{dQ}{dm} + (u_۲ - u_۱)] \qquad (\frac{j}{kg})$$

اتلاف انرژی مکانیکی بر واحد جرم سیال عبوری (افت فشار ناشی از اصطکاک بر واحد جرم)

اتلاف انرژی مکانیکی بر واحد وزن سیال عبوری (افت فشار ناشی از اصطکاک بر واحد وزن) نیز عبارت است از:

$$H_l = \frac{h_l}{g} = \frac{\Delta P}{\gamma} \qquad (\frac{j}{N} = m)$$

که دیمانسیون آن «طول» خواهد بود.

به طور کلی، قانون اول ترمودینامیک برای جریان دائمی و تراکم‌ناپذیر داخل مجاری بسته عبارت است از:

$$\frac{P_۱}{\rho} + \frac{V_۱^۲}{۲} + gy_۱ = \frac{P_۲}{\rho} + \frac{V_۲^۲}{۲} + gy_۲ + h_l \qquad (\frac{j}{kg})$$

یا:

$$\frac{P_۱}{\gamma} + \frac{V_۱^۲}{۲g} + y_۱ = \frac{P_۲}{\gamma} + \frac{V_۲^۲}{۲g} + y_۲ + H_l \qquad (\frac{j}{N} = m)$$

رابطه فوق، **معادله اصلاح شده برنولی** نامیده می‌شود که در آن $\frac{P}{\gamma}$ هد فشاری، $\frac{V^۲}{۲g}$ هد انرژی جنبشی و y هد انرژی پتانسیل یا هد ارتفاع خواهند بود.

لازم به ذکر است که به طور کلی، جریان‌های تراکم‌ناپذیر دارای افت هد فشاری قابل‌توجهی هستند (مانند لوله‌های طویل انتقال مایعات).

جریان پوازی (جریان تراکم‌ناپذیر آرام داخل لوله)

با تحلیل جریان دائمی، تراکم‌ناپذیر و آرام داخل لوله، نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\boxed{V(r) = -\frac{R^۲}{۴\mu}(\frac{dp}{dx})[۱ - (\frac{r}{R})^۲]}$$

یا (سهمی‌گون) $V = \frac{P_۱ - P_۲}{۴\mu L}(\frac{D^۲}{۴} - r^۲)$: پروفیل سرعت جریان داخل لوله

در رابطه فوق r (فاصلهٔ شعاعی از محور لوله)، R (شعاع لوله) و گرادیان فشار در جهت جریان منفی است $(\frac{dp}{dx} < ۰)$.

در رابطهٔ فوق اگر لوله افقی نباشد باید از $\frac{\partial(p + \gamma z)}{\partial x}$ به جای $\frac{\partial p}{\partial x}$ استفاده کرد.

با توجه به رابطهٔ فوق توزیع سرعت به صورت سهمی است.

پروفیل سرعت بی‌بعد بر حسب سرعت ماکزیمم عبارت است از:

$$\boxed{\frac{V(r)}{V_{max}}=۱-(\frac{r}{R})^۲}$$

در شرایط فوق، رابطه تنش در شعاع‌های مختلف بر حسب اختلاف فشار دو انتهای لوله به صورت زیر است:

$$\tau=-\mu\frac{dV}{dr}=-\mu\times(-\frac{R^۲}{۴\mu}\times\frac{dp}{dx}\times\frac{-۲r}{R^۲})\Rightarrow\tau=-\frac{r}{۲}\frac{dp}{dx}$$

برای حالتی که $\frac{dp}{dx}$ ثابت باشد می‌توان نوشت:

$$\tau=\frac{-r}{۲}\frac{dp}{dx}=\frac{r}{۲}\frac{\Delta P}{L}$$

برای محاسبه تنش برشی روی جداره لوله داریم:

$$\boxed{\tau_w=\frac{R}{۲}\frac{\Delta P}{L}}$$

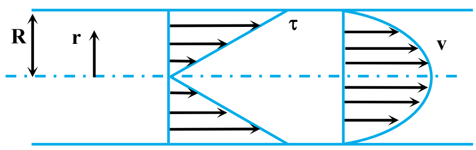
با توجه به توزیع سهموی سرعت، سرعت در $r=۰$ ماکزیمم مقدار خود را دارد. لذا می‌توان با قرار دادن $r=۰$ در رابطهٔ سرعت بر حسب شعاع، سرعت ماکزیمم را محاسبه کرد:

$$V_{max}=-\frac{R^۲}{۴\mu}\frac{dp}{dx}$$

با توجه به رابطه فوق، رابطهٔ تنش برشی بر حسب سرعت ماکزیمم عبارت است از:

$$\tau=\frac{۲\mu V_{max}r}{R^۲}$$

لذا تنش با شعاع نقطه مورد نظر متناسب بوده و تغییرات τ با r خطی است که در شکل مقابل نشان داده شده است.



(این وضعیت برای جریان‌های آرام و درهم صادق است)

$$q=\int VdA=\int_۰^R V_{max}[۱-(\frac{r}{R})^۲]۲\pi rdr\Rightarrow q=\frac{۱}{۲}V_{max}\pi R^۲$$ دبی حجمی جریان:

از طرفی اگر رابطهٔ دبی بر حسب سرعت متوسط بیان شود، عبارت است از:

$$q=\bar{V}A\rightarrow q=\bar{V}\times\pi R^۲$$

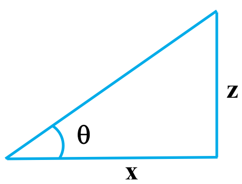
دبی حجمی جریان : $q=\int VdA=\frac{\pi(P_۱-P_۲)D^۴}{۱۲۸\mu L}$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta P=\dfrac{۱۲۸\mu Lq}{\pi D^۴}\\ \text{یا}\\ \Delta P=\dfrac{۳۲\mu LV}{D^۲}\end{array}\right\}\Rightarrow h_l=\frac{۱۲۸\mu Lq}{\rho\pi D^۴}=\frac{۱۲۸\nu Lq}{\pi D^۴}\ (\frac{j}{kg})\quad;\quad H_l=\frac{۱۲۸\mu Lq}{\gamma\pi D^۴}=\frac{۱۲۸\nu Lq}{g\pi D^۴}\ (\frac{j}{N}=m)$$

رابطه فوق (هیگن ـ پوازی) برای لوله‌های با مقطع ثابت بوده و برای هر شیب و جهتی از لوله معتبر است. از معادلهٔ بالا نتیجه می‌شود که:

برای دبی ثابت: $\boxed{\Delta p\ \alpha\ \frac{۱}{D^۴}}$; **برای سرعت ثابت:** $\boxed{\Delta p\ \alpha\ \frac{۱}{D^۲}}$

با توجه مطالب گفته شده اگر لوله افقی نباشد، به جای $\frac{\partial p}{\partial x}$ از $\frac{\partial(P+\gamma z)}{\partial x}$ استفاده می‌شود، اگر فشار دو طرف لوله که با زاویه θ نسبت بـه افـق قـرار گرفته با هم برابر باشند، روابط زیر برای سرعت و تنش برشی حاکم است:



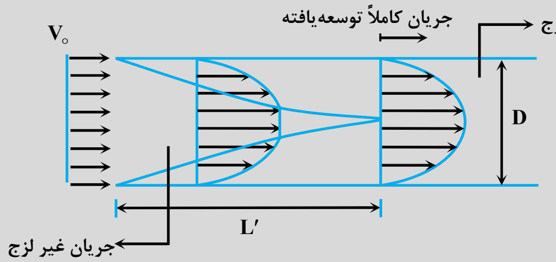
$$\frac{\partial(P+\gamma z)}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial(\gamma z)}{\partial x}=\frac{\partial(\gamma z)}{\partial x}=\gamma\frac{\partial(z)}{\partial x}=-\gamma\sin\theta$$

$$u=-\frac{R^۲}{۴\mu}[۱-(\frac{r}{R})^۲]\frac{\partial(P+\gamma z)}{\partial x}=\frac{R^۲-r^۲}{۴\mu}\gamma\sin\theta$$

$$\tau=\frac{-r}{۲}\frac{\partial(P+\gamma z)}{\partial x}=\frac{r}{۲}\gamma\sin\theta$$

شرایط ورودی لوله: جریان دائمی، آرام و تراکم‌ناپذیر داخل لولهٔ افقی با مقطع ثابت همانند شکل زیر در نظر گرفته می‌شود که سیالی با سرعت یکنواخت وارد آن می‌شود. با توجه به اصل عدم لغزش، سرعت سیال در جدارهٔ لوله با سرعت جداره یکسان و برابر صفر است. در نتیجهٔ اعمال نیروی برشی سرعت جریان در نزدیک جداره کاهش می‌یابد. با افزایش فاصله از ناحیهٔ ورودی، پروفیل سرعت به حالت سهمی نزدیک می‌شود تا این که از یک مقطع به بعد کاملاً سهمی شکل است. این قسمت که ناحیه لزج جریان است، ناحیهٔ توسعه یافته نامیده می‌شود. فاصله L' از دهانه لوله تا محلی که جریان آرام کاملاً توسعه‌یافته برقرار می‌شود عبارت است از: $L' = ۰/۰۵۸\,\mathrm{Re}\,D$ که با داده‌های تجربی مطابقت دارد.

در جریان آرام، ناحیه توسعه‌یافته جایی است که تغییرات سرعت در جهت جریان صفر باشد. یعنی:



$$\frac{\partial V}{\partial x} = ۰$$

در این ناحیه توزیع سرعت یک بعدی بوده و مؤلفه شعاعی ندارد و نیز $\frac{dp}{dx}$ برای این ناحیه ثابت است،یعنی می‌توان نوشت: $\frac{dp}{dx} = \frac{P_۲ - P_۱}{L} = -\frac{\Delta P}{L}$

بنابراین در جریان آرام، بیشترین طول ناحیه ورودی در $\mathrm{Re}_{cr.} = ۲۳۰۰$ و برابر $L' = ۱۳۳D$ است. در جریان درهم، لایه‌های مرزی سریع‌تر رشد کرده و کل مقطع لوله را در بر می‌گیرند و لذا داریم:

$$L' = ۴/۴\,\mathrm{Re}^{\frac{۱}{۶}}\,D$$

در اغلب موارد، طول ناحیه ورودی در مقایسه با طولی از لوله که در آن جریان کاملاً توسعه‌یافته برقرار است، کوتاه خواهد بود. لذا کمیاتی مانند افت ارتفاع را بر این اساس محاسبه می‌کنند که در سراسر لوله، جریان کاملاً توسعه‌یافته آرام یا درهم برقرار است.

مثال۲: سیالی در فضای بین دو لوله افقی قرار دارد. در یک لحظه هر دو لوله با سرعت V به سمت راست کشیده می‌شوند، در حالت پایا توزیع سرعت سیال در فضای بین دو استوانه کدام است؟ (مهندسی شیمی- بیوتکنولوژی- سراسری ۹۷)

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به شرط مرزی عدم لغزش (no slip) سرعت فیلم سیال در مجاورت مرز جامد با سرعت مرز جامد برابر است. بنابراین سرعت سیال روی هر دو لوله برابر V بوده و در حالت پایدار توزیع سرعت سیال در فضای بین دو استوانه یکنواخت است.

مثال ۳: در جریان آرام کامل توسعه‌یافته‌ای در لوله، سرعت در $\frac{R}{۲}$ برابر $۱۲\frac{m}{s}$ است. سرعت متوسط جریان گذرنده از لوله چند $\frac{m}{s}$ است؟ (مهندسی شیمی- بیوتکنولوژی- سراسری ۹۷)

۱) ۶۴ ۲) ۴۸ ۳) ۱۶ ۴) ۸

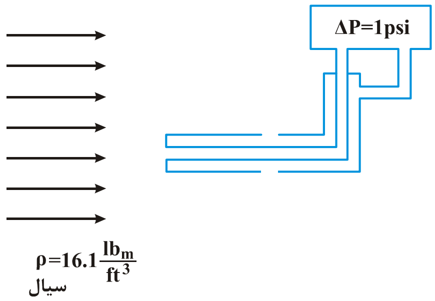
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» پروفیل سرعت در جریان آرام کاملاً توسعه یافته در لوله عبارت است از:

$$V = V_{max}(1 - \frac{r^۲}{R^۲}) \Rightarrow ۱۲ = V_{max}(1 - \frac{\frac{R^۲}{۴}}{R^۲}) \Rightarrow V_{max} = ۱۶\,(\frac{m}{s})$$

$$V_{av} = \frac{V_{max}}{۲} \Rightarrow V_{av} = \frac{۱۶}{۲} = ۸\,(\frac{m}{s})$$

مثال ۴: با توجه به شکل زیر، سرعت سیال چند فوت بر ثانیه است؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون- مهندسی شیمی، بهداشت، ایمنی و محیط زیست- مهندسی ایمنی و بازرسی فنی- سراسری ۹۷)



۱) ۲
۲) ۴
۳) ۱۲
۴) ۲۴

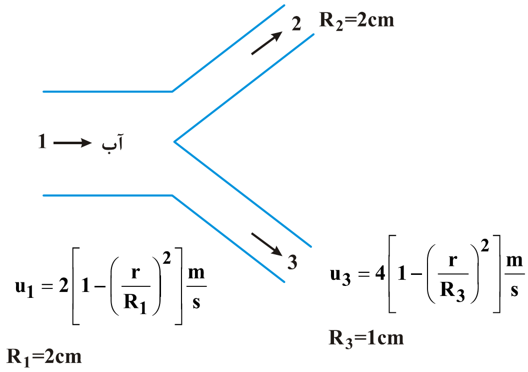
پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از رابطه فشار دینامیکی داریم:

$$\Delta P=\frac{۱}{۲}\rho V^{۲}\Rightarrow V=\sqrt{\frac{۲(\Delta P)}{\rho}}$$

$$V=\left(\frac{۲\times ۱\frac{lb_f}{in^{۲}}\times\frac{۱۴۴in^{۲}}{۱ft^{۲}}}{۱۶/۱\frac{lb_m}{ft^{۳}}\times\frac{۱slug}{۳۲/۲lb_m}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow V=۲۴(\frac{ft}{s})$$

مثال ۵: مقدار سرعت ماکزیمم آب، در مقطع ۲ شکل زیر با فرض جریان آرام، چند متر بر ثانیه است؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون- مهندسی شیمی، بهداشت، ایمنی و محیط زیست- مهندسی ایمنی و بازرسی فنی- سراسری ۹۷)



۱) ۰/۵
۲) ۱
۳) ۱/۵
۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به معادله پیوستگی داریم:

$$Q_۱=Q_۲+Q_۳\ \Rightarrow \bar{U}_۱A_۱=\bar{U}_۲A_۲+\bar{U}_۳A_۳$$

در جریان آرام داریم:

$$U=U_{max}[۱-(\frac{r}{R})^{۲}]\qquad,\qquad \bar{U}=\frac{۱}{۲}U_{max}$$

$$۱\times\frac{\pi}{۴}(۲)^{۲}=۲\times\frac{\pi}{۴}(۱)^{۲}+\bar{U}_۲\times\frac{\pi}{۴}(۲)^{۲}\ \Rightarrow\ \bar{U}_۲=۰/۵(\frac{m}{s})\Rightarrow(U_{max})_۲=۲\times۰/۵=۱(\frac{m}{s})$$

مثال ۶: انتهای یک شیلنگ را فشار می‌دهیم به‌طوری‌که آب از سطح مقطع کوچک‌تری خارج شود. در این مورد، گزینه نادرست کدام است؟

(مهندسی معدن- سراسری ۹۷)

۱) سرعت جت خروجی از شیلنگ، زیاد می‌شود.
۲) فشار آب داخل شیلنگ، زیاد می‌شود.
۳) سرعت آب داخل شیلنگ، کم می‌شود.
۴) دبی جریان در شیلنگ، زیاد می‌شود.

پاسخ: گزینه «۴» با فشار دادن انتهای یک شیلنگ به طوری‌که آب از سطح مقطع کوچک‌تری خارج شود، سرعت جت خروجی و فشار آب داخل شیلنگ زیاد می‌شود و سرعت آب داخل شیلنگ کم می‌شود و در نتیجه دبی جریان در شیلنگ کم می‌شود.

فصل هفتم

« توربو ماشین‌ها »

توربو ماشین وسیله‌ای است که در آن حرکت سیال به گونه‌ای تغییر می‌کند که توان را به محور می‌دهد و یا از آن می‌گیرد، یا چنان تغییر می‌کند که نیروی جلو برنده (پیش‌رانش) را به وجود می‌آورد.

با توجه به تعریف فوق، توربو ماشین‌ها به سه دسته کلی زیر تقسیم‌بندی می‌شوند:

۱ـ ماشین‌هایی که توان را از محور به سیال انتقال می‌دهند. این ماشین‌ها خود به صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند:

الف ــ پمپ (تلمبه): توربو ماشینی است که سیال آن مایع است.

ب ــ کمپرسور: توربو ماشینی است که توان را به گاز منتقل می‌کند تا فشار زیاد ولی سرعت کمی کسب کند.

ج ــ پنکه (فن): توربو ماشینی است که سبب حرکت گاز می‌شود و فشار آن را کمی تغییر می‌دهد.

د ــ دمنده: توربو ماشینی است که سبب ایجاد سرعت و فشار بالایی در جریان سیال می‌شود.

این قدرت توسط عضوی به نام روتور، چرخ یا پروانه که تعدادی پره دارد و بر روی محور سوار است به سیال منتقل می‌شود.

۲ـ ماشین‌هایی که توان را از سیال به محور منتقل می‌کنند. این ماشین‌ها توربین نامیده شده و خود به دو دسته زیر تقسیم می‌شوند:

الف ــ توربین ضربه‌ای: در این نوع توربین، سیال از روی تیغه‌ها یا پیاله‌های گردان می‌گذرد، در حالی که فشار استاتیکی آن همواره ثابت باقی می‌ماند. به عبارت دیگر هیچ انبساطی در جریان به هنگام عبور از گردانه رخ نمی‌دهد. چرخ آبی پلتون نمونه‌ای از این نوع توربین‌ها است.

ب ــ توربین عکس‌العملی (واکنشی): در این نوع توربین، زمانی که سیال بین یک جفت از تیغه‌ها جریان دارد، کاهشی در فشار استاتیکی ایجاد می‌شود. به عبارت دیگر در این ناحیه انبساط رخ می‌دهد. توربین‌های فرانسیس و کاپلان نمونه‌ای از این توربین‌ها هستند.

۳ـ ماشین‌هایی که با استفاده از مصرف سوخت باعث ایجاد نیروی جلو برنده (پیش‌رانش) می‌شوند، مانند موتور جت و موشک.

توربو ماشین‌ها معمولاً از لحاظ جهت حرکت نهایی سیال نسبت به محور نیز به صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند:

۱ــ توربو ماشین جریان محوری: در این دسته از توربوماشین‌ها، جریان در پره‌ها یا تیغه‌های متحرک الزاماً با محور موازی است، مانند چرخ آبی پلتون.

۲ــ توربو ماشین جریان شعاعی: در این دسته از توربو ماشین‌ها، حرکت سیال در قسمت چرخان نسبت به محور، شعاعی است، مانند پمپ‌های گریز از مرکز و توربین فرانسیس.

۳ ــ توربو ماشین جریان مختلط: اگر در یک توربوماشین، مخلوطی از دو جریان شعاعی و محوری سیال وجود داشته باشد، توربو ماشین را «جریان مختلط» می‌نامند.

درسنامه (۱): تئوری توربو ماشین ها

رابطه‌های تشابه و آنالیز ابعادی در توربو ماشین‌ها

معمولاً بهتر است که مدلی از توربو ماشین مدنظر، مورد مطالعه قرار گیرد تا کارایی نمونه اصلی متشابه بزرگ‌تر (و یا کوچک‌تر) پیش‌بینی شود. لذا در این قسمت، تحلیل ابعادی آن دسته از توربو ماشین‌هایی که در آن‌ها واکنش شیمیایی رخ نمی‌دهد مورد بررسی قرار می‌گیرد. متغیرهایی که در تحلیل این توربو ماشین‌ها حائز اهمیت هستند، عبارتند از:

ابعاد ماشین ← قطر D

سرعت چرخش ← N

جریان حجمی در ماشین ← Q

جرم مخصوص سیال داخل ماشین ← ρ

لزجت سیال داخل ماشین ← μ

توان ماشین ← P

ارتفاع هیدرولیکی کل در ماشین ← H

از بین این متغیرها، ارتفاع هیدرولیکی H، به صورت مقابل بیان می‌شود:

$$H=\frac{P}{\gamma}+\frac{V^{2}}{2g}+Z$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(N,D,Q,\rho,\mu,P,H)=0$$

ابعاد اصلی کمیت‌های مذکور در دستگاه $MLT\theta$، بعد طول (L)، بعد زمان (T) و بعد جرم (M) می‌باشد، یعنی: $r=3$.

لذا با استفاده از قضیه π باکینگهام داریم: تعداد گروه‌های بی‌بعد = تعداد متغیرها ـ تعداد بعدهای اصلی $=n-r=7-3=4$

چهار گروه بدون بعد مورد نظر عبارتند از:

۱ـ عدد رینولدز:

$$R_e=\frac{\rho ND^{2}}{\mu}$$

در رابطه فوق ND با سرعت نوک پروانه ماشین، u_t، متناسب است. لذا مقدار فوق در واقع **عدد رینولدز چرخشی** نامیده می‌شود. اگر عدد رینولدز چرخشی به اندازه کافی بزرگ باشد، می‌توان از تأثیر اصطکاک برکارایی توربو ماشین چشم‌پوشی نمود.

۲ ـ ضریب جریان:

$$C_Q=\frac{Q}{ND^{3}}$$

این ضریب با نسبت سرعت خروجی سیال به سرعت نوک پروانه ماشین متناسب است.

۳ـ ضریب ارتفاع هیدرولیکی (هد):

$$C_H=\frac{gH}{N^{2}D^{2}}$$

این ضریب با نسبت انرژی در واحد جرم به مجذور سرعت نوک پروانه ماشین متناسب است.

۴ـ ضریب توان:

$$C_P=\frac{P}{\rho N^{3}D^{5}}$$

از اعداد بدون بعد فوق می‌توان برای به‌دست آوردن اطلاعات مورد نیاز مربوط به دو توربو ماشین (پمپ یا توربین) متشابه استفاده کرد. هم‌چنین با استفاده از این اعداد بدون بعد می‌توان اطلاعات مجهول توربو ماشین‌ها (پمپ یا توربین) در دو وضعیت کارکردی مختلف را به‌دست آورد.

نکته ۱: هر گاه دو توربو ماشین ۱ و ۲ دارای تشابه هندسی باشند، شرط لازم برای تشابه دینامیکی آن‌ها این است که گروه‌های بی‌بعد فوق در مدل و نمونه اصلی با هم برابر باشند. لذا با استفاده از گروه‌های بدون بعد به‌دست آمده می‌توان نوشت:

نسبت دبی‌های حجمی:

$$\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{N_2}{N_1}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{3}$$

نسبت ارتفاع‌های هیدرولیکی (هد):

$$\frac{H_2}{H_1}=\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{2}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{2}$$

نسبت توان‌ها:

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{3}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{5}$$

مثال۱: در صورتی که پره یک پمپ سانتریفوژ با پره‌ای که قطر آن سه برابر قطره پره اولیه باشد، تعویض شود، هد ایجاد شده توسط پمپ چه تغییری می‌کند؟ (فرض کنید شرایط کاری دارای تشابه دینامیکی باشند.)

☑ **پاسخ:** نسبت ارتفاع‌های هیدرولیکی (هد) به صورت مقابل است:

$$\frac{H_2}{H_1}=\cancelto{1}{(\frac{N_2}{N_1})^2}(\frac{D_2}{D_1})^2=(\frac{D_2}{D_1})^2=3^2=9$$

بنابراین هد ایجاد شده توسط پمپ ۹ برابر خواهد شد.

مثال۲: اگر سرعت دورانی یک پمپ گریز از مرکز دو برابر شود، هد (ارتفاع آب‌دهی = H) و دبی (Q) آن چگونه تغییر می‌کنند؟ (فرض کنید شرایط کاری دارای تشابه دینامیکی باشند.)

☑ **پاسخ:** با توجه به مطالب بیان شده، برای ارتفاع هیدرولیکی (هد) و دبی داریم:

$$\frac{H_2}{H_1}=(\frac{N_2}{N_1})^2\cancelto{1}{(\frac{D_2}{D_1})^2}=(\frac{N_2}{N_1})^2=2^2=4\Rightarrow H_2=4H_1$$

بنابراین ارتفاع آب‌دهی پمپ چهار برابر می‌شود.

$$\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{N_2}{N_1}\cancelto{1}{(\frac{D_2}{D_1})^3}=\frac{N_2}{N_1}=2\Rightarrow Q_2=2Q_1$$

در نتیجه دبی پمپ دو برابر خواهد شد.

با ترکیب گروه‌های بدون بعد ذکر شده، می‌توان به گروه بدون بعد دیگری به نام راندمان دست یافت:

$$\text{برای پمپ‌ها}:\frac{C_H C_Q}{C_p}=\frac{\gamma QH}{P}=\eta_p\qquad;\qquad \text{برای توربین‌ها}:\frac{C_p}{C_H C_Q}=\frac{P}{\gamma QH}=\eta_T$$

نکته ۲: در مورد پمپ، ارتفاع هیدرولیکی واقعی کل در رانش، کمتر از ارتفاع هیدرولیکی تئوری است $(H_{\text{واقعی}}=H_{\text{تئوری}}-H_{\text{تلفات}})$ و این امر به علت اتلاف‌های ناشی از اصطکاک و تلاطم در جریان و همچنین نشت و اتلاف‌های مکانیکی ناشی از اصطکاک در یاتاقان و غیره است. بازده هیدرولیکی پمپ به صورت مقابل تعریف می‌شود:

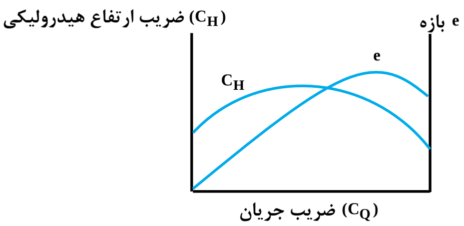
$$e_{\text{پمپ}}=\frac{(H)_{\text{واقعی}}}{(H)_{\text{تئوری}}}\times 100$$

نکته ۳: در مورد توربین، ارتفاع هیدرولیکی واقعی در رانش، بیشتر از ارتفاع هیدرولیکی تئوری است، $(H_{\text{واقعی}}=H_{\text{تئوری}}-H_{\text{تلفات}})$ بنابراین توان کمتری به توربین منتقل می‌شود. دلایل مربوط به این اختلاف در ارتفاع هیدرولیکی کل با دلایل مطرح شده برای پمپ‌ها یکسان هستند. برای توربین بازده هیدرولیکی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_{\text{توربین}}=\frac{(H)_{\text{تئوری}}}{(H)_{\text{واقعی}}}\times 100\qquad \text{یا}\qquad e_{\text{توربین}}=\frac{\text{توان خروجی}}{\text{توان ورودی}}\times 100$$

اگر ماشین به اندازه کافی بزرگ باشد، بازده e تابعی از ضریب جریان $\frac{Q}{ND^3}$ است. لذا می‌توان برای یک ماشین مفروض، بازده و ضریب ارتفاع هیدرولیکی را بر حسب ضریب جریان بر روی یک محور مشترک طولی رسم نمود:

برای به‌دست آوردن اطلاعات مربوط به هر ماشین متشابه با ماشین مورد آزمون، می‌توان از این منحنی استفاده کرد.



مثال۳: یک پمپ سانتریفوژ با سرعت ۳۰۰۰ دور در دقیقه ۵۰۰ لیتر دردقیقه آب را به ارتفاع ۷۰ متر تخلیه می‌نماید. اگر سرعت دورانی به ۱۵۰۰ دور در دقیقه کاهش یابد، با فرض ثابت ماندن راندمان، دبی جدید برابر است با:

۱) ۲۵۰ لیتر در دقیقه		۲) ۵۰۰ لیتر در دقیقه		۳) ۱۲۵ لیتر در دقیقه		۴) ۳۵۰ لیتر در دقیقه

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به متن درس، بازده توربو ماشین‌ها تابعی از ضریب جریان $(C_Q=\frac{Q}{ND^3})$ است، لذا با توجه به ثابت بودن راندمان و یکسان بودن اندازه توربو ماشین داریم:

$$\eta_1=\eta_2\Rightarrow\frac{Q_1}{N_1D_1^3}=\frac{Q_2}{N_2D_2^3}\xrightarrow{D_1=D_2}\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{N_2}{N_1}\Rightarrow Q_2=Q_1\frac{N_2}{N_1}=500\times\frac{1500}{3000}=250(\frac{lit}{min})$$

مثال۴: سرعت دورانی پمپی را به دو برابر افزایش می‌دهیم. در صورت ثابت ماندن راندمان، ارتفاع پمپ (head):

۱) ثابت می‌ماند. ۲) نصف می‌شود. ۳) دو برابر می‌شود. ۴) چهار برابر می‌شود.

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به متن درس، برای یک پمپ در دو وضعیت کارکردی مختلف با استفاده از اعداد بی‌بعد توربو ماشین‌ها داریم:

$$\frac{H_۲}{H_۱}=(\frac{N_۲}{N_۱})^۲(\frac{D_۲}{D_۱})^۲$$

با توجه به این که فقط سرعت پمپ تغییر کرده است داریم: $D_۲=D_۱$.

$$\frac{H_۲}{H_۱}=(\frac{N_۲}{N_۱})^۲=۲^۲=۴$$

مثال۵: انرژی جذب شده توسط یک توربین آبی وقتی دبی ۵۰ متر مکعب بر ثانیه با سرعت متوسط ۸ متر بر ثانیه از آن می‌گذرد، برابر ۴۰ متر است. در صورتی‌که راندمان کل توربین برابر ۸۰ درصد بوده و شتاب ثقل برابر ۱۰ متر بر مجذور ثانیه فرض شود، توان خروجی توربین برابر است با:

۱) ۲۰/۴۸ مگاوات ۲) ۱۶ مگاوات ۳) ۲۵ مگاوات ۴) ۱۲/۸ مگاوات

پاسخ: گزینه «۲» برای راندمان کل توربین داریم:

$$\eta=\frac{P}{Q\gamma H}\Rightarrow P_{\text{خروجی}}=\eta Q\gamma H\Rightarrow P_{\text{خروجی}}=۰/۸\times۵۰\times۱۰^۴\times۴۰=۱۶\ (Mw)$$

توجه: سرعت آب افشانک توربین بستگی به هد آب و قطر دهانه داشته و در توان خروجی توربین تأثیری ندارد.

مثال۶: یک توربین با قدرت (hp)۶۰۰ می‌چرخد و آب با شدت حجمی $۲۱/۵(\frac{ft^۳}{sec})$ از آن عبور می‌کند. اگر راندمان توربین ۸۷% باشد، چه ارتفاعی از آب (Head) بر حسب فوت بر روی توربین قرار دارد؟

۱) ۲۸۳ ۲) ۲۳۸ ۳) ۳۲۸ ۴) ۸۳۲

پاسخ: گزینه «۱» برای محاسبه هد در توربین داریم:

$$\text{بازده توربین}:\ \eta=\frac{P_{\text{خروجی}}}{Q\gamma H_t}\Rightarrow P_{\text{خروجی}}=\eta Q\gamma H_t$$

ابتدا واحد توان توربین را به واحد انگلیسی $lb_f\times\frac{ft}{s}$ تبدیل می‌کنیم:

$$P_{\text{خروجی}}=۶۰۰(hp)\times\frac{۵۵۰\,lb_f\times\frac{ft}{s}}{۱(hp)}=۳۳۰۰۰۰\quad(lb_f\times\frac{ft}{s})$$

در سیستم واحد انگلیسی وزن مخصوص آب برابر $\gamma=۶۲/۴\frac{lb_f}{ft^۳}$ است، لذا با قرار دادن در رابطه بالا داریم:

$$۳۳۰۰۰۰=۰/۸۷\times۲۱/۵\times۶۲/۴\times H_t\Rightarrow H_t=۲۸۲/۷۳\ (ft)$$

مثال۷: راندمان پمپ η، دبی حجمی آن Q، دانسیته سیال ρ و مصرف انرژی الکتریکی آن w_p است. اگر کمیات در سیستم انگلیسی باشند، مقدار توان بر حسب اسب بخار (hp) از کدام یک از گزینه‌ها تعبیت می‌نماید؟

۱) $hp=\frac{w_pQ}{۵۵۰\eta}$ ۲) $hp=\frac{w_p\eta}{۵۵۰}$ ۳) $hp=\frac{\eta w_p}{۷۷۳Q}$ ۴) $hp=\frac{w_p\eta\rho Q}{۵۵۰}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به تعریف راندمان پمپ داریم:

$$\text{راندمان}=\frac{\text{توان مفید (پمپ)}}{\text{توان مصرفی}}\Rightarrow \text{توان مفید}=\text{راندمان}\times\text{توان مصرفی}=w_p\eta\ (\frac{lb_f.ft}{s})$$

$$\text{تبدیل hp به سیستم واحد انگلیسی}:\ ۱hp=۵۵۰\frac{lb_f.ft}{s}\Rightarrow\frac{lb_f.ft}{s}=\frac{۱hp}{۵۵۰}\Rightarrow \text{توان مفید}=\frac{w_p\eta}{۵۵۰}(hp)$$

سرعت ویژه

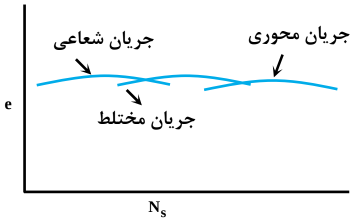
با استفاده از ضرایب بی‌بعد دبی (C_Q) و ارتفاع هیدرولیکی (C_H) می‌توان یک گروه بی‌بعد سوم به نام «سرعت ویژه» (N_s) را تشکیل داد که به کمک آن جنبه‌های معینی از گروه‌های مختلف توربو ماشین‌ها مقایسه می‌شوند.

بنا به تعریف، سرعت ویژه عبارت است از:

$$N_s=\frac{(\text{ضریب جریان})^{\frac{۱}{۲}}}{(\text{ضریب ارتفاع})^{\frac{۳}{۴}}}=\frac{(\frac{Q}{ND^۳})^{\frac{۱}{۲}}}{(\frac{gH}{N^۲D^۲})^{\frac{۳}{۴}}}=\frac{N\sqrt{Q}}{(gH)^{\frac{۳}{۴}}}$$

از این کمیت بی‌بعد برای مقایسه انواع پمپ‌ها و توربین‌ها استفاده می‌شود تا بتوان به کمک آن پمپ یا توربینی را که برای یک وظیفه معین از همه مناسب‌تر است انتخاب کرد.

برای هر یک از توربو ماشین‌ها می‌توان بازده حداکثر را بر حسب سرعت ویژه برای رده‌های مختلف توربو ماشین به صورت مقابل رسم کرد:



نکته ۴: سرعت ویژه (N_S) در نقطه راندمان حداکثر تعریف می‌شود، یعنی H, Q, N برای محاسبه N_S مربوط به راندمان حداکثر هستند. همچنین برای توربو ماشین‌های متشابه مقدار سرعت ویژه (N_S) یکسان است.

نکته ۵: با توجه به نمودار رسم شده می‌توان دریافت که برای سرعت‌های ویژه کم، توربو ماشین‌های جریان شعاعی بیشترین بازده را دارند. در سرعت‌های ویژه بالا، توربو ماشین‌های جریان محوری کارآمدترین نوع به شمار می‌آیند و ماشین‌های جریان مختلط کارآمدترین نوع در گستره میانی سرعت ویژه هستند.

نکته ۶: در ماشین‌های جریان شعاعی، ناحیه ورودی لزوماً باید کوچک باشد تا برای عملکرد کارآمد، مقادیر Q کوچک باشند. از طرف دیگر در ماشین‌های جریان محوری مساحت ورودی می‌تواند بزرگ باشد تا جریان زیادی از سیال را فراهم نماید. در نتیجه برای عملکرد کارآمد Q زیاد بوده ولی مقادیر H نسبتاً محدود هستند.

در عمل سرعت ویژه برای پمپ‌ها غالباً به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N'_S = \frac{NQ^{\frac{۱}{۲}}}{(H)^{\frac{۳}{۴}}}$$

یعنی N'_S یک دسته پمپ، سرعت دورانی پمپی است که دبی واحد را به ارتفاع واحد پمپ می‌کند.

لازم به ذکر است که در این رابطه دیگر g وجود ندارد و در نتیجه بی‌بعد نیست.

در توربین‌ها نیز عملاً از رابطه دیگری برای سرعت ویژه N_S استفاده می‌شود:

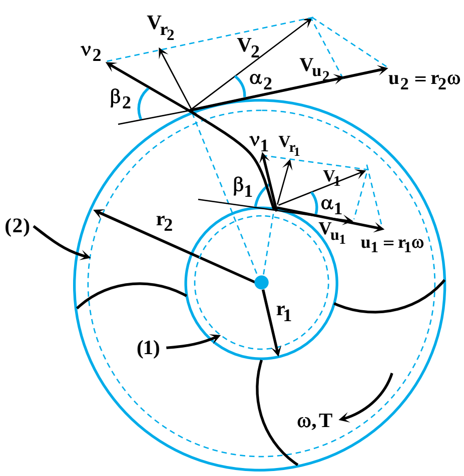
$$N''_S = \frac{N\sqrt{P}}{(H)^{\frac{۳}{۴}}}$$

در این رابطه P توان خروجی توربین است.

یعنی N''_S یک دسته توربین، سرعت دورانی توربینی است که با ارتفاع واحد توان واحد را تولید می‌کند. باید توجه داشت که N'_S و N''_S بی‌بعد نبوده و بنابراین برای هر توربو ماشین به واحدهای موجود بستگی دارند.

نکته ۷: اگر هد زیاد و دبی کم لازم باشد، از پمپی با سرعت ویژه پایین استفاده می‌شود و اگر هد کم و دبی زیاد لازم باشد از پمپی با سرعت ویژه بالا استفاده می‌شود.

تئوری توربو ماشین‌ها (معادله اولر برای توربو ماشین‌ها)



حجم کنترلی مطابق شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

همان‌طور که در شکل دیده می‌شود سیال با سرعت مطلق یکنواخت $V_۱$ وارد روتور می‌شود و در شعاع $r_۲$ با سرعت مطلق یکنواخت $V_۲$ از آن خارج می‌شود. همچنین در شکل داریم:

V : سرعت مطلق سیال

u : سرعت محیطی پره $(u = r\omega)$

V_u : مؤلفه‌های مماسی سرعت مطلق سیال (در امتداد سرعت u)

V_r : مؤلفه‌های شعاعی سرعت مطلق سیال (در امتداد عمود بر V_u)

v : سرعت نسبی سیال نسبت به پره

α: زاویه سرعت مطلق سیال و سرعت محیطی پره (زاویه V با u)

β: زاویه سرعت محیطی پره با قرینه سرعت نسبی سیال نسبت به پره (زاویه u با $-v$)

(اگر فرض شود که سیال به طور کامل از درون تیغه نازک هدایت می‌شود، سرعت نسبی همیشه مماس بر تیغه است و β با زاویه پره برابر است)

b : عرض پره

برای یافتن گشتاور اعمال شده بر سیال داخل حجم کنترل با استفاده از معادله لنگر ممنتوم داریم:

$$T_{محور} = \dot{m}\left[(rV_u)_{out} - (rV_u)_{in}\right] \quad , \quad \dot{m} = \rho A V_r$$
$$T_{محور} = \dot{m}\left[r_۲ V_۲ \cos\alpha_۲ - r_۱ V_۱ \cos\alpha_۱\right]$$

جهت مثبت مؤلفه مماسی سرعت مطلق سیال (V_u) در جهت سرعت محیطی پره (u) در نظر گرفته می‌شود، بنابراین:

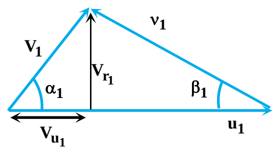
الف) برای پمپ، فن، دمنده و کمپرسور: $T_{محور} > ۰$

ب) برای توربین: $T_{محور} < ۰$

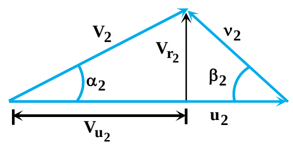
ج) اگر $T = ۰$ باشد در واقع هیچ تیغه‌ای در مسیر وجود ندارد و مقدار rV_u ثابت است. (مانند گرداب طبیعی).

مثلث‌های سرعت اولر

برای تعیین روابط مربوط به توربو ماشین‌ها از مثلث‌های سرعت در ورودی سیال به حجم کنترل و خروجی سیال از حجم کنترل استفاده می‌شود. مثلث‌های سرعت اولر در حالت ایده‌آل در شکل مقابل نشان داده شده است.



ورودی



خروجی

با استفاده از مثلث‌های سرعت و روابط مثلثاتی می‌توان روابط زیر را بیان نمود:

$$V_{u_۱} = V_۱\cos\alpha_۱ = u_۱ - V_{r_۱}\cot(\beta_۱) \quad , \quad V_{u_۲} = V_۲\cos\alpha_۲ = u_۲ - V_{r_۲}\cot(\beta_۲)$$

$$Q = ۲\pi r_۱ b_۱ V_{r_۱} = ۲\pi r_۲ b_۲ V_{r_۲} \qquad tg(\alpha_۱) = \frac{V_{r_۱}}{V_{u_۱}} \quad , \quad tg(\alpha_۲) = \frac{V_{r_۲}}{V_{u_۲}}$$

نکته ۸: در شرایط پایا و یکنواخت، هد توربو ماشین (هد تئوری) را می‌توان از معادله‌های زیر به‌دست آورد:

$$\text{برای پمپ}: H = \frac{u_۲V_{u_۲} - u_۱V_{u_۱}}{g} = \frac{u_۲V_۲\cos\alpha_۲ - u_۱V_۱\cos\alpha_۱}{g}$$

$$\text{برای توربین}: H = \frac{u_۱V_{u_۱} - u_۲V_{u_۲}}{g} = \frac{u_۱V_۱\cos\alpha_۱ - u_۲V_۲\cos\alpha_۲}{g}$$

نکته ۹: معمولاً پمپ‌ها به گونه‌ای طراحی می‌شوند که گشتاور زاویه‌ای سیال به هنگام ورود به پروانه صفر باشد، یعنی:

$$\alpha_۱ = ۹۰ \Rightarrow V_{u_۱} = ۰ \quad , \quad V_{r_۱} = V_۱$$

بنابراین هد (تئوری) پمپ برابر است با:

$$H = \frac{u_۲V_{u_۲}}{g} = \frac{u_۲[u_۲ - V_{r_۲}\cot(\beta_۲)]}{g} \Rightarrow \frac{gH}{u_۲^۲} = ۱ - \frac{V_{r_۲}}{u_۲}\cot(\beta_۲)$$

نکته ۱۰: به طور مشابه، توربین‌ها نیز طوری طراحی می‌شوند که گشتاور زاویه‌ای سیال در خروج از آن صفر شود، یعنی:

$$\alpha_۲ = ۹۰ \Rightarrow V_{u_۲} = ۰ \;,\; V_{r_۲} = V_۲$$

بنابراین هد (تئوری) توربین برابر است با:

$$H = \frac{u_۱V_{u_۱}}{g} = \frac{u_۱[u_۱ - V_{r_۱}\cot(\beta_۱)]}{g} \Rightarrow \frac{gH}{u_۱^۲} = ۱ - \frac{V_{r_۱}}{u_۱}\cot(\beta_۱)$$

تذکر ۱: در روابط نکته‌های ۹ و ۱۰ اگر از اتلاف در توربو ماشین‌ها صرف‌نظر شود، هد تئوری توربو ماشین با هد واقعی برابر خواهد بود.

مثال ۸: پمپ سانتریفوژی که قطر آن ۷۰۰mm است در سرعت ۱۸۰۰rpm دوران می‌کند. آب بدون چرخش وارد پمپ می‌شود، اگر $\alpha_۲ = ۶۰^\circ$ باشد، هد واقعی ایجاد شده توسط پمپ ۱۷m خواهد بود. برای هنگامی که $V_۲ = ۶\frac{m}{s}$ باشد، راندمان هیدرولیکی چقدر است؟

پاسخ: برای راندمان هیدرولیکی داریم:

$$e_p = \frac{H_{واقعی}}{H_{تئوری}} \times ۱۰۰ \quad , \quad H_{تئوری} = \frac{u_۲V_۲\cos\alpha_۲ - u_۱V_۱\cos\alpha_۱}{g}$$

چون سیال بدون چرخش وارد می‌شود، لذا $\alpha_۱ = ۹۰$ است. برای محاسبه سرعت محیطی پره $(u_۲)$ داریم:

$$u_۲ = r_۲\omega = \frac{۰/۷}{۲} \times (۱۸۰۰ \times \frac{۲\pi}{۶۰}) = ۶۵/۹۷\ (\frac{m}{s})$$

$$H_{تئوری} = \frac{u_۲V_۲\cos\alpha_۲}{g} = \frac{۶۵/۹۷ \times ۶ \times \cos ۶۰}{۹/۸۰۶} = ۲۰/۱۸\ (m)$$

$$e_p = \frac{H_{واقعی}}{H_{تئوری}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۷}{۲۰/۱۸} \times ۱۰۰ = \%۸۴/۲$$

فصل هشتم

«جریان در کانال‌های روباز»

درسنامه (۱): تعاریف

بر حسب تعریف، کانال روباز مجرایی است که در آن جریان دارای سطح آزاد باشد و در کانال‌های روباز سطح آزاد حد فاصل بین آب و هوا است. در این جریان‌ها فرض بر این است که جرم مخصوص هوا نسبت به آب ناچیز بوده و فشار در سطح آزاد ثابت و معادل فشار اتمسفر باشد.

نکته ۱: عامل حرکت در جریان‌های با سطح آزاد، نیروی ثقل است. بنابراین در جریان داخل کانال باز، نیروهای وزن و اصطکاک مهم هستند.

دسته‌بندی کانال‌های روباز:

کانال‌های روباز را می‌توان به دو دسته تقسیم نمود:

۱ـ کانال روباز طبیعی: مانند چشمه‌ها، رودخانه‌ها، تنگه‌ها و ...

۲ ـ کانال روباز مصنوعی: مانند ناودان‌ها، چاله‌های آبگیر و .....

کانال‌ها با مقاطع عرضی مختلف ساخته می‌شوند که در این مبحث عمدتاً راجع به مقاطع مستطیلی بحث می‌شود. کانال‌هایی که دارای شیب و مقطع عرضی ثابتی باشند **کانال منشوری** نامیده می‌شوند.

طبقه‌بندی انواع جریان

جریان در کانال‌های روباز را می‌توان بر اساس معیارهای مختلف طبقه‌بندی نمود. تعدادی از این معیارها و طبقه‌بندی‌ها که در هیدرولیک کانال‌ها دارای اهمیت است و به مطالعه و تشخیص انواع جریان کمک می‌کند، به ترتیب مورد بررسی قرار می‌گیرند.

جریان دائم و غیردائم

معیار طبقه‌بندی، ثابت یا متغیر بودن پارامترهای جریان، نظیر عمق، سرعت و دبی نسبت به زمان است. در صورتی که عمق یا سرعت نسبت به زمان تغییر نکنند، جریان را **دائم** و در غیر این صورت جریان را **غیردائم** می‌نامند. در صورتی که عمق جریان با y، سرعت جریان با V، دبی با Q و زمان با t نشان داده شوند، در جریان‌های دائم داریم:

$$\frac{\partial y}{\partial t}=0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial t}=0 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial t}=0$$

در جریان‌های غیردائم داریم:

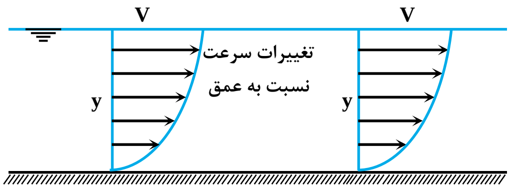
$$\frac{\partial y}{\partial t}\neq 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial t}\neq 0 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial t}\neq 0$$

جریان یکنواخت و غیریکنواخت

معیار طبقه‌بندی، تغییر پارامترهای جریان، مانند عمق و سرعت نسبت به مکان است. در صورتی که اندازه این پارامترها در یک لحظه در تمام نقاط واقع در میدان حرکت ثابت باشد، «جریان یکنواخت» و در غیر این صورت «جریان غیریکنواخت» نامیده می‌شود. در صورتی که در امتداد S تغییرات عمق یا سرعت مورد بررسی قرار گیرد، در جریان یکنواخت داریم:

$$\frac{\partial y}{\partial S}=0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial S}=0$$

و در جریان غیریکنواخت داریم:



$$\frac{\partial y}{\partial S} \neq 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial S} \neq 0$$

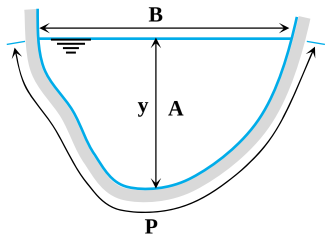
نکته ۲: اگر عمق کانال در طول آن تغییر نکند جریان یکنواخت است در غیر این‌صورت غیریکنواخت می‌باشد.

نکته ۳: جریان یکنواخت را می‌توان در یک کانال مستقیم با طول زیاد و شیب و سطح مقطع ثابت برقرار نمود.

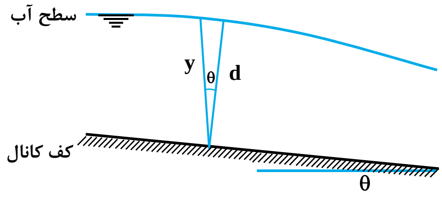
نکته ۴: اگر شیب یا سطح مقطع کانال تغییر کند یا مانعی بر سر راه آن وجود داشته باشد، جریان غیریکنواخت خواهد بود.

رابطه مانینگ

در کانال‌های روباز سطح آزاد مجاور اتمسفر و بقیه سطوح محدود به جداره یا بستر کانال هستند. در شکل زیر مقطع طولی و عرضی جریان در یک کانال روباز نشان داده شده است. اجزای هندسی مقطع جریان در شکل زیر نشان داده شده‌اند:



مقطع عرضی کانال



مقطع طولی کانال

این اجزای هندسی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

۱ـ عمق جریان (y): عبارت از فاصله قائم پایین‌ترین نقطه کف کانال تا سطح آزاد است. علاوه بر عمق y، گاهی عمق d، فاصله پایین‌ترین نقطه کف کانال تا سطح آزاد ولی در امتداد عمود بر کف کانال تعریف می‌شود. رابطه بین این دو عمق به صورت:

$$y = \frac{d}{\cos\theta}$$

خواهد بود که θ زاویه امتداد طولی کف کانال با افق است. در اغلب مجاری طبیعی و ساخته شده θ کوچک است و $y \approx d$ انتخاب می‌شود. فقط در کانال‌های با شیب تند بین این دو عمق تمایز قائل می‌شوند.

۲ـ سطح مقطع جریان (A): این سطح برابر با مساحت مقطع عمود بر امتداد جریان است.

۳ـ محیط تر شده (P): برابر با طول مشترک بین جداره و سیال است.

۴ـ شعاع هیدرولیکی (R_h): برابر با نسبت سطح مقطع جریان به محیط تر شده است.

$$R_h = \frac{A}{P}$$

۵ـ عرض فوقانی (B): برابر با طول مشترک بین سیال و اتمسفر است. در کانال‌های مستقیم، این طول افقی (سطح آب در مقطع عرضی افقی است) و در پیچ کانال‌ها، مورب است.

۶ـ عمق هیدرولیکی (D): برابر با نسبت سطح مقطع جریان به عرض فوقانی است.

$$D = \frac{A}{B}$$

عمق هیدرولیکی برای کانال‌های غیر مستطیلی تعریف می‌شود. این پارامتر که نشان‌دهنده عمق متوسط کانال در یک مقطع عرضی دلخواه است، عمق کانال مستطیلی معادل را بیان می‌کند.

جریان زیربحرانی، بحرانی و فوق‌بحرانی

در جریان‌های با سطح آزاد، نیروی ثقل عامل حرکت است. لذا جریان با توجه به اهمیت نسبی نیروی ثقل نسبت به نیروی اینرسی، طبقه‌بندی می‌شود. همان‌طور که در فصل پنجم نیز بیان شد، در این حالت معیار طبقه‌بندی، عامل بدون بعدی به نام عدد فرود است. عدد فرود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\mathbf{Fr} = \frac{\mathbf{V}}{\sqrt{\mathbf{gL}}}}$$

فصل نهم

«لایه مرزی»

درسنامه (۱): مقدمه

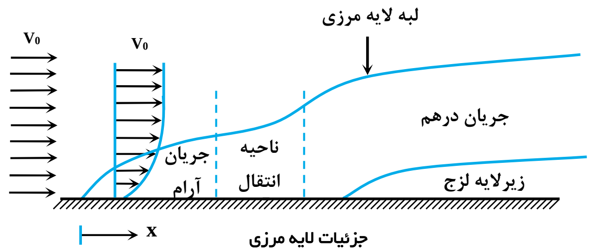
در بحث جریان‌های تراکم‌ناپذیر غیرچرخشی (که در آن‌ها از اثرات لزجی صرف نظر می‌شود) گفتیم که برای سیالات با لزجت کم مانند آب، می‌توان با دقت بسیار زیادی جریان را به جز در ناحیه باریکی از پیرامون جسم بدون اصطکاک در نظر گرفت.

در این ناحیه به علت وجود گرادیان سرعت زیاد، نمی‌توان از اثرات اصطکاک صرف نظر نمود. این ناحیه از جریان اصلی جدا شده و **لایه مرزی** نامیده می‌شود.

یادآوری می‌شود که در جریان‌های غیر چرخشی از اصطکاک صرف نظر شده و تنها اثرات اینرسی منظور شده‌اند. در جریان داخل لوله‌ها اثرات اصطکاک منظور شده، ولی در جریان‌های موازی به علت ثابت بودن پروفیل سرعت اثرات اینرسی اهمیت نداشت. در جریان لایه مرزی به عنوان نمونه‌ای از جریان‌های عمومی لزج، اثرات اصطکاک و اینرسی هر دو توأماً حائز اهمیت هستند. لذا جریان در لایه مرزی ممکن است آرام یا درهم باشد و نیز ضخامت لایه و پروفیل سرعت آن در امتداد جریان تغییر می‌کنند.

در شکل زیر، جریان لایه مرزی روی صفحه مسطح به صورت کیفی نشان داده شده است. مطابق شکل، یک ناحیه آرام از لبه صفحه شروع شده و ضخامت آن مرتباً زیاد می‌شود. سپس به ناحیه انتقال می‌رسیم که در آن جریان از آرام به درهم تبدیل شده و همراه با آن، ضخامت لایه افزایش می‌یابد. **محل انتقال تا حدودی به عدد رینولدز** $\mathbf{Re = \frac{V_\circ x}{\nu}}$ **بستگی دارد** که در آن، x فاصله از لبه صفحه است. انتقال در اعداد رینولدز بین ۳×۱۰^{۵} تا $۱۰^{۶}$ رخ می‌دهد. در ناحیه درهم، مانند جریان درهم داخل لوله‌ها، با نزدیک شدن به دیواره، اثرات درهمی به اندازه‌ای کم می‌شوند که اثرات لزجی غالب شده و مفهوم **زیرلایه لزج** مطرح می‌شود.

به عبارت دیگر در ناحیه درهم جریان، یک لایه نازک در پایین لایه مرزی وجود دارد که جریان در داخل آن نیز آرام بوده و **زیرلایه آرام** نامیده می‌شود.



جزئیات لایه مرزی

ناحیهٔ خارج از لایه مرزی که ناحیهٔ غیرلزج است و در آن گرادیان سرعت تقریباً صفر است را ناحیهٔ **جریان ایده‌آل** می‌نامند.

اگرچه لایه مرزی نازک است، ولی در دینامیک سیالات نقش اساسی دارد. نیروی مقاوم وارده بر کشتی و موشک، راندمان کمپرسور و توربین موتور جت، کارآیی بخش ورودی هوا در رم جت و توربو جت، همه این پارامترهای اساسی به رفتار لایه مرزی و اثرات آن روی جریان اصلی بستگی دارند.

نکته ۱: در لبه لایه مرزی خط جریان وجود ندارد و لذا جریان سیال می‌تواند از لبه لایه مرزی نیز وارد لایه مرزی شود.

عدد رینولدز بحرانی در جریان روی صفحه (مرز تبدیل جریان آرام به درهم) عبارت است از:

$$(Re)_{critical} = ۵\times ۱۰^{۵}$$

$$(Re)_x = \frac{\rho V_\circ x}{\mu} = \frac{V_\circ x}{\nu}$$

مثال ۱: کدام یک از تعاریف زیر در مورد لایه مرزی بر روی یک جسم صادق است؟

۱) ناحیه‌ای است که در آن جریان آرام باشد.

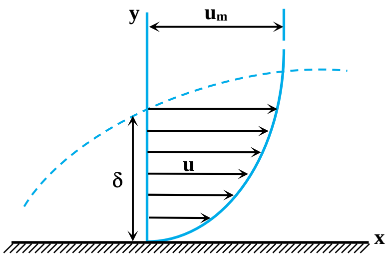
۲) ناحیه‌ای است که در آن سرعت یکنواخت باشد و تغییر نکند.

۳) ناحیه‌ای است که در آن نیروی ناشی از ویسکوزیته مهم نباشد.

۴) ناحیه‌ای است که به خاطر وجود آن در جسم، سرعت در آن تحت تأثیر قرار می‌گیرد.

پاسخ: گزینه «۴» در لایه مرزی روی جسم به علت وجود اثرات اصطکاکی، گرادیان سرعت وجود دارد و در بیرون از لایه مرزی سرعت یکنواخت بوده و گرادیان سرعت صفر و در نتیجه جریان غیرلزج است.

ضخامت لایه مرزی

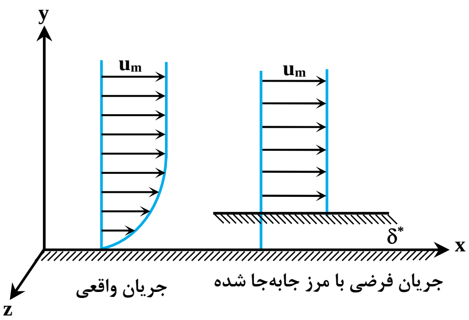


ضخامت لایه مرزی به صورت کیفی عبارت از فاصله‌ای از مرز جسم است که ناحیه با گرادیان سرعت زیاد و در نتیجه حاوی اثرات لزجی غیرقابل صرف نظر را در بر می‌گیرد. از شکل ملاحظه می‌شود که پروفیل سرعت به صورت بسیار ملایم در جریان اصلی ادغام می‌شود، به طوری که مرز مشخصی وجود ندارد که بتوان با اندازه‌گیری ساده‌ای ضخامت لایه را معلوم کرد.

لذا ضخامت لایه مرزی را می‌توان برابر فاصله‌ای از مرز (δ) دانست که در آن سرعت به ۹۹٪ سرعت جریان اصلی می‌رسد.

ضخامت جابه‌جایی

معیار دیگر، ضخامت جابه‌جایی است که با δ^* نشان داده می‌شود. با فرض این که کل جریان بدون اصطکاک باشد، ضخامت جابه‌جایی عبارت از ارتفاعی است که مرز باید جابه‌جا شود تا از هر مقطع دبی جرمی برابر با حالت واقعی عبور کند.



$$q=\int_{0}^{\infty} u\,dy=\int_{\delta^*}^{\infty} u_m dy \Rightarrow \int_{0}^{\infty} u_m dy=\int_{0}^{\delta^*} u_m dy+\int_{\delta^*}^{\infty} u_m dy \Rightarrow \int_{\delta^*}^{\infty} u_m dy=\int_{0}^{\infty} u_m dy-u_m\delta^*$$

$$\boxed{\delta^*=\int_{0}^{\infty}(1-\frac{u}{u_m})dy\simeq\int_{0}^{\delta}(1-\frac{u}{u_m})dy}$$

از ضخامت جابه‌جایی در طراحی تونل باد، بخش ورودی هوای موتور جت هواپیما و غیره استفاده می‌شود.

نکته ۲: در انتقال جریان از آرام به درهم، ضخامت لایه مرزی به طور قابل ملاحظه‌ای زیاد می‌شود، در نتیجه δ و δ^* در جریان درهم از آرام بیشتر است.

ضخامت ممنتوم

برای جریان بدون اصطکاک، ضخامت ممنتوم عبارت از ارتفاعی است که مرز باید جابجا شود تا از هر مقطع ممنتوم برابر با حالت واقعی عبور کند.

ضخامت ممنتوم، مقیاسی برای اندازه‌گیری درگ کل صفحه است.

$$\theta=\int_{0}^{\infty}(1-\frac{u}{u_m})\frac{u}{u_m}dy\simeq\int_{0}^{\delta}(1-\frac{u}{u_m})\frac{u}{u_m}dy$$

مثال ۲: توزیع سرعت در یک لایه مرزی به صورت زیر است: $\mathbf{u(x,y)=5x(1-e^{-6y})}$

مقدار ضخامت جابه‌جایی یعنی δ^* برای این پروفیل سرعت، کدام یک از مقادیر زیر است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به پروفیل سرعت داخل لایه مرزی، برای محاسبهٔ سرعت در خارج از لایه مرزی باید y که معیار فاصله از سطح است به سمت بی‌نهایت میل داده شود تا سرعت برابر سرعت یکنواخت خارج از لایه مرزی به دست آید.

$$\delta^*=\int_{0}^{\infty}(1-\frac{u}{u_m})dy \qquad u(x,y)=5x(1-e^{-6y})\Rightarrow \underset{y\to\infty}{u_m=5x}$$

$$\delta^*=\int_{0}^{\infty}[1-(1-e^{-6y})]dy=\int_{0}^{\infty}e^{-6y}dy=\left.\frac{e^{-6y}}{-6}\right|_{0}^{\infty}=(0-\frac{1}{-6})\Rightarrow \delta^*=\frac{1}{6}$$

مثال ۳: پروفیل سرعت در داخل یک لایه مرزی به صورت رابطهٔ $u(x,y)=x(1-10^{-y})$ (بر حسب $\frac{mm}{s}$) داده شده است. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد ضخامت لایه مرزی (δ) در این جریان درست است؟
(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $\delta=0/1\,mm$ ۲) $\delta=10^{-12}\,mm$ ۳) $\delta=2\,mm$ ۴) $\delta=\ln 2\,mm$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با داشتن توزیع سرعت و میل دادن y به سمت بی‌نهایت، می‌توان سرعت در دوردست (سرعت یکنواخت) را محاسبه کرد:

$$u(x,y)=x(1-10^{-y}) \qquad y\to\infty \Rightarrow\ u=u_\infty=x$$

$$u=u_\infty(1-10^{-y}) \qquad (1)$$

با توجه به تعریف ضخامت لایه مرزی، ضخامتی که سرعت در داخل لایه مرزی به ۰/۹۹ سرعت یکنواخت (U_∞) برسد، ضخامت لایه مرزی است. لذا:

$$y\to\delta\Rightarrow u=0/99u_\infty \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{با مقایسه روابط (۱) و (۲)}}\begin{cases}\dfrac{u}{u_\infty}=0/99\\[2mm] \dfrac{u}{u_\infty}=1-10^{-\delta}\end{cases}\Rightarrow 1-10^{-\delta}=0/99\Rightarrow 10^{-\delta}=0/01=10^{-2}\Rightarrow\ \delta=2\ (mm)$$

مثال ۴: پروفیل سرعت لایه مرزی آرام روی صفحه تخت با رابطه: $U=U_\infty(1-\exp(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu_x}}y))$ داده شده است. ضخامت لایه مرزی (δ) چقدر است؟
(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۱)

۱) $\sqrt{\frac{\nu_x}{U_\infty}}\ln 10$ ۲) $\sqrt{\frac{\nu_x}{U_\infty}}\ln 100$ ۳) $\sqrt{\frac{\nu_x}{U_\infty}}\ln 10000$ ۴) $\sqrt{\frac{\nu_x}{U_\infty}}\ln 1000$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به پروفیل سرعت لایه مرزی داده شده داریم:

$$\frac{U}{U_\infty}=1-\exp(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}y)$$

هم‌چنین با استفاده از تعریف ضخامت لایه مرزی داریم:

$$\begin{cases}y=\delta\\[1mm] \dfrac{U}{U_\infty}=0/99\end{cases}$$

با مقایسه طرفین دو رابطه فوق داریم:

$$1-e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\delta}=0/99\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\delta}=0/01=10^{-2}$$

طرفین تساوی فوق را به توان ۲ رسانده و نتیجه می‌شود:

$$e^{-\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\delta}=10^{-4}\ \Rightarrow\ e^{\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\delta}=10^{4}$$

از طرفین رابطه فوق لگاریتم گرفته و داریم:

$$\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\delta=\ln 10000\Rightarrow \boxed{\delta=\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\ln 10000} \qquad (3)$$

مدرسان شریف

فصل دهم

«جریان تراکم پذیر یک بعدی»

درسنامه (۱): کلیات

در جریان تراکم‌پذیر، تغییرات قابل توجهی در جرم حجمی در سراسر میدان جریان وجود دارد. در جریان‌های با سرعت زیاد و یا در تغییرات دمایی شدید، تراکم‌پذیری دارای اهمیت بوده و تغییر شدید سرعت باعث تغییرات زیاد در فشار می‌شود.

عدد ماخ: عدد ماخ به صورت نسبت سرعت واقعی یک سیال در محیط معین یا سرعت یک جسم در سیال ساکن به سرعت صوت در همان محیط تعریف می‌شود، یعنی $M = \frac{V}{C}$.

چون عدد ماخ نسبت نیروهای اینرسی به نیروهای تراکم‌پذیری است، لذا می‌توان نتیجه گرفت که عدد ماخ میزان اهمیت تراکم‌پذیری را نشان می‌دهد. اگر عدد ماخ کمتر از ۰/۳ باشد طبق تعریف عدد ماخ، نیروی لازم برای تراکم‌پذیری که در مخرج است خیلی زیاد است. بنابراین جریان با عدد ماخ کمتر از ۰/۳ تراکم‌ناپذیر است.

در این مبحث اثرات تراکم‌پذیری در مسائل دینامیک سیالات منظور می‌شوند.

طبقه‌بندی متداول جریان‌های تراکم‌پذیر

جریان‌های تراکم‌پذیر به چهار دسته زیر تقسیم می‌شوند:

۱ـ جریان تراکم‌پذیر مادون صوت (Subsonic compressible flow): $0/4 < M < 1$

۲ـ جریان تراصوتی (Transonic flow): $M \approx 1$

۳ـ جریان مافوق صوت (Supersonic flow): $1 < M < 3$

۴ـ جریان ماوراء صوت (Hypersonic flow): $M > 3$

هنگامی که عدد ماخ بیشتر از یک شود، تغییر ناگهانی در رفتار سیال در مقایسه با جریان مادون صوت رخ می‌دهد.

انتشار امواج الاستیک: یکی از اولین نتایج تغییر جرم مخصوص این است که یک مجموعه از المان‌های سیال می‌توانند حجم‌های متغیری از فضا را اشغال کنند. این امر به این معنی است که گروهی از المان‌های سیال می‌توانند در ناحیه بزرگ‌تری از فضا پخش شوند، بدون این که لزوماً تمام المان‌های سیال به طور هم‌زمان تغییر مکان دهند. از فیزیک می‌دانیم که تغییر مکان کوچک المان‌های سیال در یک محیط تراکم‌پذیر به نوبه خود باعث حرکات کوچک مشابه المان‌های مجاور می‌شود و به این ترتیب اغتشاشی به نام **موج صوتی** به وجود می‌آید که با سرعتی نسبتاً زیاد در محیط منتشر می‌شود. در جریان‌های تراکم‌ناپذیر سرعت انتشار این اغتشاشات نامحدود بود، یعنی حرکاتی نظیر فوق به طور آنی در سراسر جریان روی می‌دهند و لذا معمولاً موج صوتی یا الاستیک در نظر گرفته نمی‌شوند. اما در جریان‌های تراکم‌پذیر امکان وجود امواج الاستیک با سرعت محدود وجود دارد. لذا مقدار این سرعت دارای اهمیت زیادی است.

محاسبه سرعت صوت در حالت کلی

موج صوتی بسیار کوچک، بسیار نزدیک به فرآیند آیزنتروپیکی است که همین تغییرات را در حالت سیال به وجود می‌آورد. لذا سرعت صوت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$C^2 = \frac{dP}{d\rho} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s$$

این رابطه برای انتشار موج صوتی بسیار کوچک، در هر جریانی از سیال بدون توجه به اثرات غیرآیزنتروپیک موجود در خود جریان، معتبر است.

سرعت صوت در گاز کامل

با استفاده از معادله $\frac{P}{\rho}=cte$ برای فرآیند گاز کامل خواهیم داشت:

$$C=\sqrt{\frac{kP}{\rho}} \quad , \quad \boxed{C=\sqrt{kRT}}$$

$k=\frac{C_P}{C_V}$ عبارت از نسبت گرماهای ویژه سیال است. امواج فوق موجب تغییر فشارهای بسیار کوچک می‌شوند.

در ادامه امواجی بررسی خواهند شد که در آن‌ها تغییر فشار نسبتاً بزرگی (در مقایسه با تغییر فشار ناشی از امواج صوتی) در یک جبهه بسیار نازک رخ می‌دهد. چنین امواجی که **امواج ضربه‌ای** نامیده می‌شوند، آیزنتروپیک نبوده و نسبت به سیال با سرعتی بیشتر از سرعت صوت حرکت می‌کنند.

امواج صوتی را می‌توان به عنوان حالت حدی امواج ضربه‌ای، که در آن‌ها تغییر فشار در عرض موج بسیار کوچک است، تلقی کرد.

دبی جرمی عبوری گاز ایده‌آل در یک مجرا برابر است با:

$$\dot{m}=\rho AV=\frac{P}{RT}A(MC)=\frac{P}{RT}MA(\sqrt{kRT})=\frac{PMA\sqrt{k}}{\sqrt{RT}}\Rightarrow \dot{m}\sim\frac{PMA}{\sqrt{T}}$$

با نوشتن رابطهٔ پیوستگی بین دو مقطع دلخواه ۱ و ۲:

(M عدد ماخ است)

$$\dot{m}_1=\dot{m}_2\Rightarrow\frac{P_1M_1A_1}{\sqrt{T_1}}=\frac{P_2M_2A_2}{\sqrt{T_2}}\Rightarrow\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{P_2M_2A_2}{P_1M_1A_1}\right)^2$$

مثال ۱: اگر سیالی تراکم‌پذیر با دمای $100^\circ C$ و عدد ماخ ۲ و فشار ۲atm به یک مقطع مربعی با ابعاد ۴cm وارد شود و در هنگام خروج عدد ماخ ۴ و فشار ۱atm باشد، مقدار دمای خروجی را بیابید؟

☑ **پاسخ:** طبق روابط جریان گاز ایده‌آل در مقطع مجرا داریم:

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{P_2}{P_1}\times\frac{A_2}{A_1}\times\frac{M_2}{M_1}\right)^2\Rightarrow\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{1}{2}\times1\times\frac{4}{2}\right)^2=1\Rightarrow T_2=T_1\Rightarrow T_2=(100+273/15)\Rightarrow T_2=373/15\ (K)$$

مثال ۲: اگر سیال تراکم‌پذیر در حالت آدیاباتیک در لوله حرکت کند و عدد ماخ در انتهای لوله به ۱ برسد، با افزایش طول لوله دبی جرمی $(\dot{m})$ به چه صورتی تغییر می‌کند؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۲)

۱) زیاد می‌شود. ۲) فرق نمی‌کند. ۳) کم می‌شود. ۴) بستگی به شرایط ورودی لوله دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» شیپوره مادون صوت به صورت همگرا است و شیپوره همگرا می‌تواند به عنوان یک شیر محدودکننده عمل کرده و به ازای هر دسته شرایط سکون معین، امکان عبور یک دبی حداکثر را بدهد. لذا با افزایش طول لوله، دبی جرمی $(\dot{m})$ کاهش می‌یابد.

مثال ۳: کدام گزینه برای تعیین سرعت صوت در یک محیط پیوسته صحیح است؟ (مهندسی شیمی ـ آزاد ۸۷)

P: فشار ρ: دانسیته سیال s: آنتروپی

۱) $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_P^{\frac{1}{2}}$ ۲) $\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_s$ ۳) $\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_s^{\frac{1}{2}}$ ۴) $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_P$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$C^2=\frac{dP}{d\rho}=\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_s\Rightarrow C=\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_s^{\frac{1}{2}}$$
: سرعت انتشار امواج الاستیک (صوت) در یک محیط پیوسته

فرآیند آیزنتروپیک

فرآیند آیزنتروپیک یک فرآیند آدیاباتیک برگشت‌پذیر است که طی فرآیند، آنتروپی تغییر نمی‌کند: $S_1=S_2$

در فرآیند آیزنتروپیک گاز ایده‌آل روابط زیر حاکم است:

$$\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}\quad;\quad\frac{P_1}{P_2}=\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k\quad;\quad\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{k-1}$$

$$k=\frac{C_p}{C_v}$$

در جریان آدیاباتیک گاز کامل، دمای سکون ثابت می‌ماند. در جریان آیزنتروپیک به علت آدیاباتیک و برگشت‌پذیر بودن جریان، نه فقط دما بلکه تمام خواص سکون ثابت باقی می‌مانند.

مدرسان شریف

فصل یازدهم

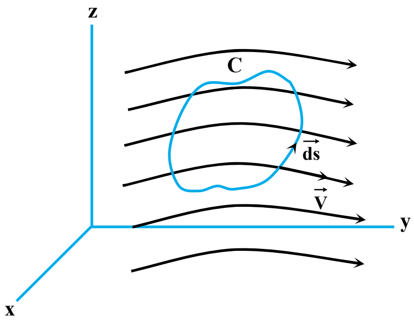
« جریان پتانسیل »

درسنامه (۱): کلیات

در این فصل یک روش ریاضی برای حل جریان‌های بسیار ایده‌آل که غیرچرخشی، تراکم‌ناپذیر و دائمی باشند، ارائه شده است. به عنوان مثالی از کاربرد این روش، می‌توان به حل جریان در خارج از لایه مرزی یک جریان تراکم‌ناپذیر اشاره نمود. در ادامه برخی از مفاهیم مورد نیاز تعریف می‌شوند:

گردش (Circulation): به عنوان انتگرال خطی مؤلفه مماسی سرعت بر روی یک مسیر بسته در لحظه t تعریف می‌شود:

$$\boxed{\Gamma = \oint_c \vec{V}.\vec{ds}}$$



c یک مسیر بسته است. در رابطه بالا $\vec{ds}$ یک بردار جزئی مماس بر منحنی است و مسیر پادساعت‌گرد حول منحنی، مثبت در نظر گرفته می‌شود.

پتانسیل سرعت:

در روش جریان پتانسیل، یک تابع پتانسیل $\phi(x,y,z,t)$ تعریف می‌شود. این تابع پیوسته بوده و به صورتی است که معادلات اساسی مکانیک سیالات را ارضا کند. یعنی در معادلات بقای جرم و ممنتوم یک جریان تراکم‌ناپذیر و غیرچرخشی صدق نماید. با استفاده از خواص بردارها، رابطه زیر برای هر تابع اسکالر ϕ صحیح است:

$$\vec{\nabla}\times[-\vec{\nabla}\phi] = 0$$

از طرف دیگر معادل ریاضی فرض غیرچرخشی بودن جریان مورد بحث به صورت زیر است:

$$\boxed{\text{curl}\vec{V} = 0 \quad \text{یا} \quad \vec{\nabla}\times\vec{V} = 0}$$

از مقایسه دو رابطه فوق می‌توان تابع پتانسیل را به صورت زیر به میدان سرعت $\vec{V}$ ارتباط داد:

$$\boxed{\vec{V} = -\vec{\nabla}\phi}$$

توجه شود که قبلاً توسط اپراتور $\vec{\nabla}$، تابع اسکالر P (فشار) به تابع برداری $\vec{f}$ (نیرو بر واحد حجم) ارتباط داده شده بود. تفاوت بحث حاضر این است که فرض می‌شود تابع اسکالر φ وجود دارد که به صورت فوق با میدان سرعت مرتبط است.

با استفاده از رابطه بالا، مؤلفه‌های سرعت بر حسب تابع ϕ در مختصات کارتزین عبارتند از:

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad , \quad v = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad , \quad w = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

از طرفی میدان سرعت باید معادله پیوستگی را ارضا نماید، یعنی:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

با استفاده از اپراتور لاپلاس (لاپلاسین) $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ داریم:

$$\boxed{\nabla^2\phi = 0}$$

یعنی تابع پتانسیل ϕ باید در معادله لاپلاس صدق نماید.

از بحث فوق نتیجه می‌شود که:

میدان سرعت هر جریان غیرچرخشی را می‌توان به صورت گرادیان یک تابع اسکالر ϕ بیان نمود.

مثال ۱: تابع پتانسیل سرعت را .... می‌توان تعریف کرد.

۱) برای هر میدانی که تابع جریان است
۲) برای هر میدان غیرچرخشی
۳) برای هر میدان سرعتی
۴) فقط برای یک میدان غیرچرخشی دو بعدی

پاسخ: گزینه «۲» همان طور که در متن بیان شد، هر جریان غیرچرخشی را می‌توان به صورت گرادیان یک تابع اسکالر ϕ (پتانسیل سرعت) بیان کرد. از طرفی پتانسیل سرعت برای جریان‌های دو بعدی و سه بعدی به کار می‌رود، ولی تابع جریان فقط برای جریان‌های دو بعدی است.

مثال ۲: در جریان دو بعدی اگر $\begin{cases} u = ۲xy \\ v = x^۲ + ۱ \end{cases}$، تابع پتانسیل جریان کدام گزینه می‌شود؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۴)

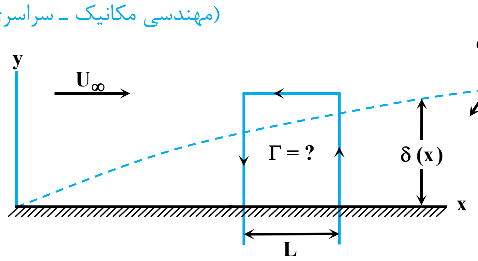
۱) $x^۲y + x + c$
۲) $x^۲y + y + c$
۳) $y^۲ + xy + c$
۴) $x^۲y + xy + c$

پاسخ: گزینه «۲» با نوشتن رابطه بین پتانسیل سرعت و سرعت و سپس انتگرال‌گیری می‌توان پتانسیل سرعت را محاسبه کرد:

$$\begin{cases} u = ۲xy & u = \dfrac{\partial\phi}{\partial x} \Rightarrow \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = ۲xy \Rightarrow \phi = x^۲y + f(y) \\ v = x^۲ + ۱ & v = \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \Rightarrow \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = x^۲ + ۱ \Rightarrow x^۲ + f'(y) = x^۲ + ۱ \end{cases}$$

$$f'(y) = ۱ \Rightarrow f(y) = y + c \Rightarrow \phi = x^۲y + y + c$$

مثال ۳: مقدار گردش (Circulation) برای لایه مرزی نشان داده شده در شکل زیر در طول L روی صفحه تخت، کدام یک از مقادیر زیر می‌باشد؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۴)

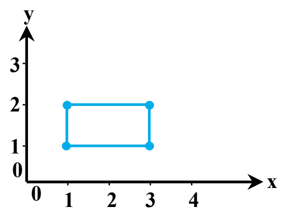


۱) $U_\infty \delta$
۲) $-U_\infty L$
۳) $U_\infty (L + \delta)$
۴) $-۲U_\infty (\delta + L)$

پاسخ: گزینه «۲» طبق تعریف، گردش برابر است با:
$$\Gamma = \oint_c \vec{V}.\vec{ds}$$

مقدار گردش در مرز پایینی به علت سرعت صفر روی جداره، صفر است و در مرز راست و چپ نیز به دلیل این که زاویه بین $\vec{V}$ و $\vec{ds}$ برابر ۹۰° است، صفر خواهد بود. بنابراین گردش فقط در مرز بالایی مخالف صفر بوده و عبارت است از:
$$\Gamma = (U_\infty)(L)\cos ۱۸۰^\circ \Rightarrow \Gamma = -U_\infty L$$

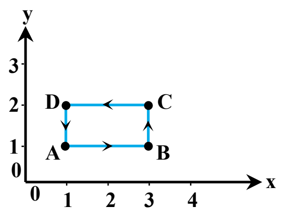
مثال ۴: برای میدان سرعت دو بعدی $u = -By, v = Bx$ است. سیرکولاسیون Γ بر روی یک مستطیل با گوشه‌های (۱،۲)، (۳،۲)، (۳،۱) و (۱،۱) را محاسبه نمایید. (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۷)



۱) $۶B$
۲) $۴B$
۳) $-۶B$
۴) ۰ (صفر)

پاسخ: گزینه «۲» گردش یا سیرکولاسیون عبارت است از:
$$\Gamma = \oint_c \vec{V}.\vec{ds}$$

انتگرال در مسیر بسته به انتگرال در مسیرهای مشخص شده در شکل مقابل تقسیم شده و داریم:



$$\Gamma = \int_A^B u dx + \int_B^C v dy + \int_C^D u dx + \int_D^A v dy$$

$$\Gamma = \int_A^B (-By)dx + \int_B^C (Bx)dy + \int_C^D (-By)dx + \int_D^A (Bx)dy$$

$$\Gamma=-By\int_{۱}^{۳}dx+Bx\int_{۱}^{۲}dy-By\int_{۳}^{۱}dx+Bx\int_{۲}^{۱}dy$$

$$\Gamma=-B(۱)(۳-۱)+B(۳)(۲-۱)-B(۲)(۱-۳)+B(۱)(۱-۲)\Rightarrow\ \Gamma=۴B$$

نکته۱: شرایط پتانسیل ایده‌آل، دائمی، غیرچرخشی و تراکم‌ناپذیر بودن جریان است.

نکته۲: هرگاه در ناحیه‌ای نیروهای لزجی ناچیز باشند، می‌توان آن ناحیه را غیرچرخشی در نظر گرفت.

تابع جریان: تابع جریان تابعی است مانند $\psi(x,y,z,t)$ که خطوط $\psi=cte$ معرف خطوط جریان هستند. قبلاً ذکر شد معادله خطوط جریان یک جریان دو بعدی، تراکم‌ناپذیر و دائمی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{v}{u}}$$

در نتیجه:

$$\boxed{vdx-udy=۰}$$

از طرف دیگر برای تابع $\psi(x,y)$ (جریان دو بعدی و دائمی) داریم:
$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy$$

روی خطوط $\psi=cte$، $d\psi=۰$ است و لذا ارتباط بین تابع جریان با مؤلفه‌های سرعت جریان به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{u=-\frac{\partial\psi}{\partial y}\ ,\ v=\frac{\partial\psi}{\partial x}}$$

نکته۳: برای تعیین دبی حجمی بین هر دو نقطه ۱ و ۲ از رابطه زیر استفاده می‌شود:

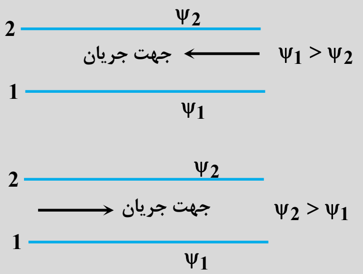
$$\boxed{q_{۱,۲}=\int_{y_۱}^{y_۲}u\,dy=\int_{y_۱}^{y_۲}\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=\int_{\psi_۱}^{\psi_۲}d\psi=\psi_۲-\psi_۱}$$

$\psi_۱$ و $\psi_۲$ مقادیر تابع جریان در نقاط ۱ و ۲ هستند.

نکته۴: به کمک تابع جریان می‌توان جهت جریان را تشخیص داد. به طوری که اگر مقدار ψ برای دو خط جریان ۱ و ۲ که خط جریان ۲ بالای خط جریان ۱ است معلوم باشد، تشخیص جهت جریان به صورت زیر است:

اگر $\psi_۲>\psi_۱\Leftarrow$ جهت جریان به سمت چپ است.

اگر $\psi_۲>\psi_۱\Leftarrow$ جهت جریان به سمت راست است.



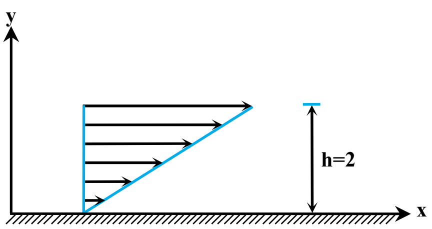
موارد مذکور در شکل روبه‌رو نیز نشان داده شده است.

نکته۵: مقدار ψ روی هر خط جریان ثابت است.

مثال۵: اگر تابع جریان در جریانی به صورت $\psi=x^۲+۲y$ باشد، دبی عبوری بین دو نقطه $A(۱,۳)$ و $B(۳,۴)$ را محاسبه کنید؟

پاسخ: با توجه به رابطه بیان شده بین دبی و تابع جریان می‌توان نوشت:
$$q=\psi_B-\psi_A\ ,\ \psi_B=۱۷\ ,\ \psi_A=۷\Rightarrow q=۱۷-۷=۱۰(\frac{m^۲}{s})$$

مثال۶: برای جریان یک بعدی در جهت x با تغییرات خطی سرعت (مانند شکل زیر)، کدام گزینه تابع جریان ψ را نشان می‌دهد؟



۱) $\psi=\frac{۱}{۲}y^۲+x$

۲) $\psi=y^۲+۱$

۳) $\psi=\frac{۴}{۳}y^۲+x$

۴) $\psi=۲y^۲+۱$

پاسخ: گزینه «۲» کافی است که تابع تغییرات سرعت را به دست آورده و پس از رابطه‌ای که بین سرعت و تابع جریان وجود دارد، تابع جریان را محاسبه کنیم. با توجه به شکل، سرعت به صورت خطی با y تغییر می‌کند. لذا سرعت برابر است با:
$$u=ay+b$$

شرایط مرزی سرعت عبارتند از:

$$\begin{cases} y=0 \ , \ u=0 \Rightarrow b=0 \\ y=2 \ , \ u=4 \Rightarrow a=2 \end{cases}$$

با اعمال شرایط مرزی و یافتن ضرایب مجهول، سرعت برابر است با:

$$u = 2y \ , \ v=0$$

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=2y \Rightarrow \psi = y^2 + f(x) \qquad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow f(x)=C$$

$\psi = y^2 + C \Rightarrow$ با توجه به جواب‌ها: $C=1 \Rightarrow \psi = y^2+1$

مثال ۷: تابع جریان به صورت $\psi=-\frac{A}{2}\mathrm{Ln}(x^2+y^2)$ داده شده است. توزیع سرعت مطابق با کدام گزینه است؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۱)

۱) $V_x=-\frac{Ay}{x^2+y^2}$ ، $V_y=\frac{Ax}{x^2+y^2}$

۲) $V_x=\frac{Ay}{x^2+y^2}$ ، $V_y=-\frac{Ax}{x^2+y^2}$

۳) $V_x=-\frac{Ax}{x^2+y^2}$ ، $V_y=\frac{Ay}{x^2+y^2}$

۴) $V_x=\frac{Ax}{x^2+y^2}$ ، $V_y=-\frac{Ay}{x^2+y^2}$

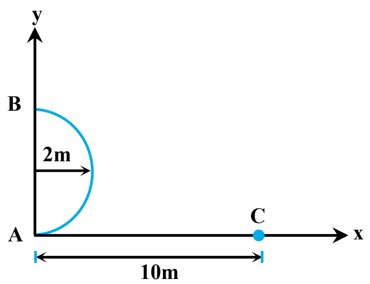
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» رابطه تابع جریان با سرعت به صورت مقابل است:

$$\psi=-\frac{A}{2}\ln(x^2+y^2) \qquad V_x=-\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad , \quad V_y=\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

با قرار دادن ψ در روابط بالا نتیجه می‌شود:

$$V_x=-(-\frac{A}{2})\times\frac{2y}{x^2+y^2} \Rightarrow V_x=\frac{Ay}{x^2+y^2} \quad ; \quad V_y=-\frac{A}{2}\times\frac{2x}{x^2+y^2} \Rightarrow V_y=-\frac{Ax}{x^2+y^2}$$

مثال ۸: تابع جریان ψ به صورت $\psi=x^2+2xy+4t^2y$ داده شده است. در لحظهٔ $t=2\sec$ دبی گذرنده از مسیر نیم‌دایره‌ای که در شکل نشان داده شده است و دبی گذرنده از خط A تا C (Q_{AC}) چقدر است؟ (Q_{AB}) (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۵)



۱) $Q_{AC}=100\frac{m^3}{s}$, $Q_{AB}=64\frac{m^3}{s}$

۲) $Q_{AC}=100\frac{m^3}{s}$, $Q_{AB}=36\frac{m^3}{s}$

۳) $Q_{AC}=64\frac{m^3}{s}$, $Q_{AB}=100\frac{m^3}{s}$

۴) $Q_{AC}=100\frac{m^3}{s}$, $Q_{AB}=62/8\frac{m^3}{s}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون تابع جریان به زمان وابسته است، ابتدا در لحظه $t=2(s)$ تابع جریان محاسبه می‌شود:

$$\psi=x^2+2xy+4t^2y \qquad t=2(s): \ \psi=x^2+2xy+16y$$

با استفاده از رابطه بین دبی و تابع جریان داریم:

$$Q_{AB}=\psi_B-\psi_A \qquad A\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix} \ , \ B\begin{vmatrix}0\\4\end{vmatrix} \qquad Q_{AB}=(0+0+16\times4)-(0) \Rightarrow Q_{AB}=64\ (\frac{m^3}{s})$$

$$Q_{AC}=\psi_C-\psi_A \qquad C\begin{vmatrix}10\\0\end{vmatrix} \qquad Q_{AC}=(10^2+0+0)-(0) \Rightarrow Q_{AC}=100\ (\frac{m^3}{s})$$

نکته ۶: پتانسیل سرعت فقط برای جریان‌های غیرچرخشی تعریف می‌شود، ولی تابع جریان هم برای جریان‌های چرخشی و هم برای جریان‌های غیرچرخشی تعریف می‌شود.

خطوط پتانسیل: خطوط پتانسیل مکان هندسی ϕهای ثابت هستند. در جریان دو بعدی و دائمی داریم:

$$\phi=\phi(x,y) \Rightarrow d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy=-udx-vdy$$

با توجه به این که بر روی خطوط پتانسیل $d\phi=0$ است، لذا داریم:

$$u=-\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad , \quad v=-\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

رابطه بین تابع جریان و پتانسیل سرعت برای جریان‌های دو بعدی، تراکم‌ناپذیر و غیرچرخشی

برای یک جریان دو بعدی، پتانسیل سرعت (ϕ) باید تابعی از x، y و t باشد. با برابر قرار دادن مؤلفه‌های سرعت بر حسب تابع جریان و پتانسیل سرعت روابط زیر به دست می‌آیند که **معادلات کوشی ـ ریمان** نامیده می‌شوند:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

اگر یکی از توابع ϕ یا ψ معلوم باشد، تابع دیگر را می‌توان از روابط بالا به دست آورد. مثلاً اگر ϕ معلوم باشد، داریم:

$$\psi=\int(\frac{\partial\phi}{\partial x})dy+f(x) \quad ; \quad \psi=-\int(\frac{\partial\phi}{\partial y})dx+g(y)$$

از مقایسه نتایج، ثابت‌های انتگرال‌گیری تعیین می‌شوند.

مثال ۹: فرض کنید $\phi=Ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ پتانسیل سرعت یک جریان دو بعدی، غیرچرخشی و تراکم‌ناپذیر باشد که در تمام نقاط به جز مبدأ، معین است. تابع جریان را به دست آورید.

☑ **پاسخ:** با استفاده از رابطهٔ بین ψ و ϕ می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}\Rightarrow\psi=tg^{-1}\frac{y}{x}+f(x)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\phi}{\partial y}\Rightarrow\frac{-y}{x^2+y^2}+f'(x)=\frac{-y}{x^2+y^2}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow f(x)=C$$

پس می‌توان تابع جریان را به صورت مقابل بیان نمود:

$$\psi=tg^{-1}\frac{y}{x}+C\Rightarrow\psi=tg^{-1}\frac{y}{x}$$

مثال ۱۰: برای یک جریان پتانسیل که تابع پتانسیل آن $\phi=y+x^2-y^2$ می‌باشد، کدام یک از توابع زیر می‌تواند یک تابع جریان باشد؟
(مهندسی مکانیک «تبدیل انرژی و طراحی جامدات» ـ آزاد ۸۵)

۱) $2xy-x$ ۲) $2xy$ ۳) $2x^2y$ ۴) $2xy^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\phi=y+x^2-y^2 \qquad \begin{cases}\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\phi}{\partial y}\\ \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial\psi}{\partial x}=-1+2y\\ \frac{\partial\psi}{\partial y}=2x\end{cases}$$

$$\psi=-x+2yx+f(y)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=2x\Rightarrow 2x+f'(y)=2x\Rightarrow f'(y)=0\Rightarrow f(y)=c\Rightarrow\psi=-x+2yx+c\Rightarrow\psi=-x+2yx$$

مثال ۱۱: برای میدان سرعت دو بعدی $\begin{cases}u=-By\\ v=Bx\end{cases}$، به ترتیب تابع جریان و تابع پتانسیل سرعت را محاسبه کنید. (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۷)

۱) تابع جریان $\psi=\frac{B}{2}(x^2-y^2)+C$ و تابع پتانسیل سرعت تعریف نمی‌شود.

۲) تابع جریان $\psi=-\frac{B}{2}(x^2+y^2)+C$ و تابع پتانسیل سرعت تعریف نمی‌شود.

۳) تابع جریان $\psi=-\frac{B}{2}(x^2+y^2)+C$ و تابع پتانسیل سرعت $\phi=\frac{B}{2}(x^2+y^2)+C$

۴) تابع جریان $\psi=\frac{B}{2}(-x^2+y^2)+C$ و تابع پتانسیل سرعت $\phi=\frac{B}{2}(x^2-y^2)+C$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با داشتن رابطه بین تابع جریان و میدان سرعت می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}u=-By\\ v=Bx\end{cases} \qquad \begin{cases}u=\frac{\partial\psi}{\partial y}\\ v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial\psi}{\partial y}=-By\\ \frac{\partial\psi}{\partial x}=-Bx\end{cases}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = -By \Rightarrow \psi = \frac{-By^2}{2} + f(x) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -Bx \xrightarrow{\text{با قرار دادن } \psi \text{ از رابطه فوق}} f'(x) = -Bx \Rightarrow f(x) = \frac{-Bx^2}{2} + C \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1,2)} \psi = -\frac{By^2}{2} - \frac{Bx^2}{2} + C \Rightarrow \psi = -\frac{B}{2}(x^2 + y^2) + C$$

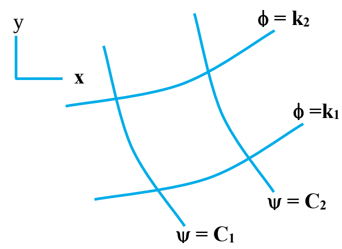
با داشتن رابطه بین تابع پتانسیل و میدان سرعت می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = u = -By \Rightarrow \phi = -Byx + f(y)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = v = Bx \xrightarrow{\text{با قرار دادن } \phi \text{ از رابطه فوق}} -Bx + f'(y) = Bx \Rightarrow f'(y) = 2Bx$$

چون $f'(y)$ تابعی از y بوده و سمت راست تابعی از x است، بنابراین غیرقابل قبول بوده و تابع پتانسیل وجود ندارد.

❖ **رابطه بین خطوط جریان و خطوط پتانسیل ثابت:** قبلاً مطرح شد که خطوط ψ ثابت، یک دسته خط جریان را تشکیل می‌دهند. اکنون اضافه می‌شود که خطوط ϕ ثابت یا خطوط پتانسیل جریان، یک خانواده منحنی عمود بر خطوط جریان را تشکیل می‌دهند. یعنی در نقاط تلاقی، مماس بر منحنی‌ها با یکدیگر زاویه قائمه می‌سازند. بنابراین دو دسته منحنی، یک **شبکه متعامد** یا یک **شبکه جریان** را تشکیل می‌دهند.



تلاقی خطوط جریان و خطوط پتانسیل

تحلیل اساسی جریان غیرچرخشی، دو بعدی و تراکم‌ناپذیر

ملاحظات پیوستگی این شرط لازم را اعمال می‌کنند که پتانسیل سرعت باید یک تابع هارمونیک باشد. (حل‌های معادله لاپلاس به نام **توابع هارمونیک** شناخته می‌شوند.)

هم‌چنین می‌توان نشان داد که برای جریان غیرچرخشی، تابع جریان نیز باید معادله لاپلاس را برقرار نماید و لذا هارمونیک است.

$$\nabla^2\phi = 0 \quad , \quad \nabla^2\psi = 0$$

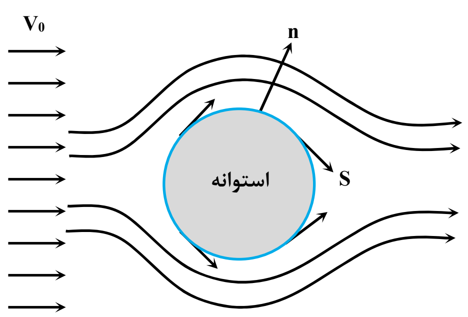
یادآوری: اپراتور لاپلاس یا لاپلاسین در مختصات دکارتی دو بعدی عبارت است از:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

نکته ۷: همان‌طور که پیش‌تر گفتیم، در جریان‌های دو بعدی، تراکم‌ناپذیر، غیرچرخشی و دائمی، قانون دوم نیوتن و قانون اول ترمودینامیک هر دو به معادله برنولی منجر می‌شوند و در غیاب انتقال حرارت و اصطکاک در این جریان‌ها، محدودیتی از طرف قانون دوم ترمودینامیک اعمال نمی‌شود.

شرایط مرزی برای جریان‌های غیرلزج

تابع پتانسیل و تابع جریان یک جریان بخصوص، علاوه بر هارمونیک بودن باید شرایط مرزی را نیز ارضا کنند. در استوانه نشان داده شده، سرعت روی سطوح مرزی باید طوری باشد که همواره مؤلفه آن در راستای عمود بر سطح صفر باشد. چون در ملاحظات این بحث به کلی از اصطکاک صرف‌نظر شده است، هیچ محدودیتی در مورد مؤلفه مماسی سرعت در سطوح مرزی وجود ندارد، یعنی سیال به سطح نمی‌چسبد. علاوه بر این ملاحظات در مرز جامد، باید در بی‌نهایت نیز شرایطی بر ϕ و ψ اعمال شود. مثلاً برای جریان نشان داده شده، سرعت باید در فواصل دور از استوانه یکنواخت و برابر V_0 باشد.



امتداد جریان روی مرز

شرایط مرزی محلی در روی مرز (با اندیس b) و شرایط در فواصل دور، به صورت حدی بیان می‌شوند:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_b = 0 \qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)_b = 0 \qquad -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} = V_0 \qquad -\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} = V_0$$