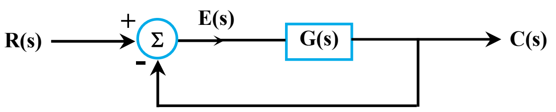
فصل اول

« نمایش‌های مختلف سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) »

تست‌های تألیفی فصل اول



مثال۱: در شکل روبه‌رو، دیاگرام بلوکی یک سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی نشان داده شده است. با توجه به نقطه جمع و انشعاب، نسبت $\frac{C(s)}{R(s)}$ را به دست آورید.

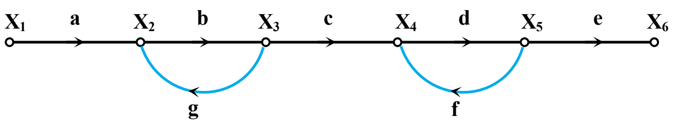
پاسخ: در این بلوک، دیاگرام فیدبک منفی وجود دارد و چون مقداری برای آن مشخص نشده است آن را سیگنال منفی واحد فرض می‌کنیم. در نقطه جمع، رابطه سیگنال‌ها برابر $E(s)=R(s)-C(s)$ است. در نقطه انشعاب، $C(s)=G(s)E(s)$ می‌باشد. زیرا سیگنال $C(s)$ از ضرب $G(s)E(s)$ حاصل می‌شود. با جایگذاری $E(s)$ از نقطه جمع داریم:

$$C(s)=G(s)[R(s)-C(s)]\Rightarrow C(s)=G(s)R(s)-G(s)C(s)\Rightarrow C(s)+C(s)G(s)=G(s)R(s)$$

$$[1+G(s)]C(s)=R(s)G(s)\Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)}$$

نسبت $\frac{C(s)}{R(s)}$ را تابع تبدیل حلقه بسته سیستم و $G(s)$ را تابع تبدیل حلقه باز سیستم می‌نامیم.

مثال۲: در مسیر گذر سیگنال زیر گره‌ها، شاخه‌ها، حلقه‌ها و نوع آن‌ها را مشخص کنید.



پاسخ :

گره: X_1 تا X_6 گره‌های مسیر گذر سیگنال می‌باشند.

شاخه: g,f,e,d,c,b,a

مبدأ: X_1

مقصد: X_6

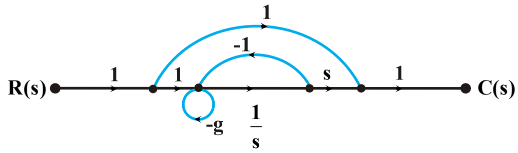
گره مخلوط: X_5,X_4,X_3,X_2 گره‌های مخلوط گذر سیگنال می‌باشند.

مسیر مستقیم: $abcde$ (بهره مسیر مستقیم)

حلقه: df,bg (بهره حلقه)

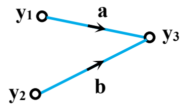
حلقه‌های جدا از هم: df,bg

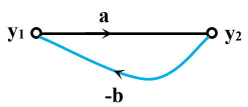
مثال۳: در مسیر گذر سیگنال زیر بهره حلقه‌ها را مشخص کنید.

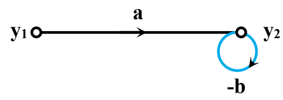


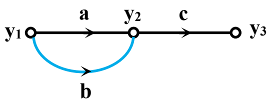
پاسخ : با دقت در شکل می‌بینیم که دو حلقه وجود دارد و بهره‌ی آن‌ها برابر است با $L_1:-g\ \ ;\ \ L_2:-\frac{1}{s}$.

مثال۴: کدام گزینه رابطه متناظر با مسیر گذر سیگنال را به درستی بیان نمی‌کند؟

۱) $y_3 = ay_1 + by_2$ ،


۲) $y_2 = \dfrac{a}{1+ab} y_1$ ،


۳) $y_2 = \dfrac{-ab}{1+b} y_1$ ،


۴) $y_3 = (ca+cb) y_1$ ،


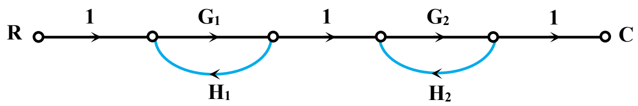
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» رابطه متناظر با مسیر گذر نشان داده شده در گزینه (۳)، $y_2 = \dfrac{a}{1+b} y_1$ است.

در واقع حلقه‌ای که روی یک گره قرار می‌گیرد جزو مسیر مستقیم به حساب نمی‌آید، زیرا برای محاسبه آن به عنوان بهره مسیر باید از آن گره دو بار عبور کنیم.

مثال۵: در مسیر گذر سیگنال (SFG) مقابل، نسبت $\dfrac{C}{R}$ را به دست آورید.

☑ **پاسخ:** گره ورودی مورد نظر R و گره خروجی C است. از R به C یک مسیر مستقیم وجود دارد که بهره آن برابر $P_1 = G_1G_2$ است.

اگر حلقه‌هایی که با این مسیر در تماس‌اند، یعنی G_1H_1 و G_2H_2 را حذف کنیم، $\Delta_1 = 1$ به دست می‌آید.



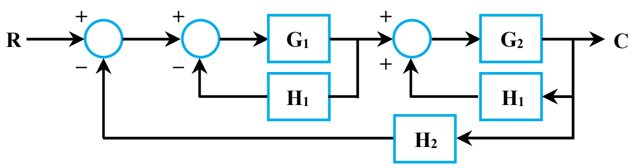
گراف دارای دو حلقه‌ی مجزا از هم است. بنابراین دترمینان مسیر برابر است با:

$$\Delta = 1 - G_1H_1 - G_2H_2 + G_1H_1G_2H_2$$

در نهایت تابع تبدیل $\dfrac{C}{R}$ به صورت روبه‌رو به دست می‌آید:

$$\frac{C}{R} = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{N} P_k \Delta_k = \frac{G_1G_2}{1 - G_1H_1 - G_2H_2 + G_1H_1G_2H_2}$$

مثال۶: تابع تبدیل $\dfrac{C}{R}$ در سیستم نشان داده شده در شکل برابر است با:



۱) $\dfrac{G_1G_2}{(1+G_1H_1)(1-G_2H_1)+G_1G_2H_2}$

۲) $\dfrac{G_1G_2}{(1+G_1H_1)(1-G_2H_1)}$

۳) $\dfrac{G_1G_2}{(1-G_1H_1)(1-G_2H_1)}$

۴) $\dfrac{G_1G_2}{(1-G_1H_1)(1-G_2H_1)+G_2G_1H_2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از R به C تنها یک مسیر مستقیم با بهره $P_1 = G_1G_2$ داریم. با حذف حلقه‌های در تماس با این مسیر، $\Delta_1 = 1$ به دست می‌آید.

در دیاگرام بلوکی فوق، سه حلقه موجود است که بهره‌های آن‌ها عبارتند از:

$$L_1 = -G_1H_1 \quad , \quad L_2 = G_2H_1 \quad , \quad L_3 = -G_1G_2H_2$$

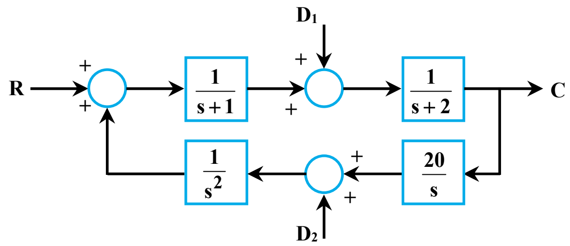
از این سه حلقه، دو حلقه‌ی L_1 و L_2 مجزا می‌باشند. بنابراین دترمینان مسیر برابر است با:

$$\Delta = 1-(L_1+L_2+L_3)+L_1L_2 = 1-(-G_1H_1+G_2H_1-G_1G_2H_2)+(G_2H_1)(-G_1H_1)$$

نهایتاً تابع تبدیل $\dfrac{C}{R}$ به صورت روبه‌رو به دست می‌آید:

$$\frac{C}{R} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1G_2}{(1+G_1H_1)(1-G_2H_1)+G_1G_2H_2}$$

مثال ۷: تابع تبدیل $\frac{C}{D_۲}$ در شکل زیر برابر است با:



۱) $\frac{۲۰}{s^۳(s+۱)(s+۲)}$　　۲) $\frac{s}{s^۳(s+۱)(s+۲)-۲۰}$

۳) $\frac{۲۰s+۱}{s^۳(s+۱)(s+۲)}$　　۴) $\frac{-s}{s^۳(s+۱)(s+۲)+۲۰}$

پاسخ: گزینه «۲» از $D_۲$ به C تنها یک مسیر مستقیم وجود دارد. بهره‌ی آن برابر است با:

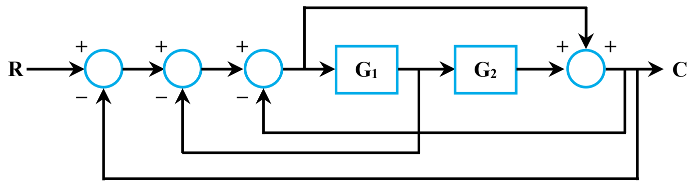
$$P_۱=(\frac{۱}{s^۲})(\frac{۱}{s+۱})(\frac{۱}{s+۲})$$

با حذف این مسیر و حلقه‌های در تماس با آن، $\Delta_۱=۱$ به دست می‌آید.

در دیاگرام تنها یک حلقه موجود است. بنابراین تابع تبدیل $\frac{C}{D_۲}$ برابر است با:

$$\frac{C}{D_۲}=\frac{P_۱\Delta_۱}{\Delta}=\frac{s}{s^۳(s+۱)(s+۲)-۲۰}$$

مثال ۸: در سیستم زیر تابع تبدیل از ورودی R به خروجی C برابر است با:



۱) $\frac{۱+G_۱G_۲}{۳+G_۱+۲G_۱G_۲}$　　۲) $\frac{G_۱G_۲}{۳+G_۱+۲G_۱G_۲}$

۳) $\frac{۱+G_۱G_۲}{۱+G_۱+۲G_۱G_۲}$　　۴) $\frac{۱+G_۱G_۲}{۲+G_۱+۲G_۱G_۲}$

پاسخ: گزینه «۱» با کمی دقت می‌فهمیم که از ورودی R به خروجی C دو مسیر مستقیم وجود دارد؛ یک مسیر با بهره‌ی $P_۱=G_۱G_۲$ و مسیر دیگر با بهره‌ی $P_۲=۱$. با حذف هر یک از این دو مسیر، $\Delta_۱=۱$ و $\Delta_۲=۱$ به دست می‌آیند. زیرا حلقه‌ای در دیاگرام باقی نمی‌ماند.

برای به دست آوردن دترمینان مسیر، باید حلقه‌های موجود را به دقت شناسایی کنیم. سه فیدبک منفی، سه حلقه با بهره‌های $L_۱=-G_۱G_۲$، $L_۲=-G_۱$ و $L_۳=-G_۱G_۲$ به وجود می‌آورند. از ترکیب مسیر مستقیم $P_۲$ با دو فیدبک هم دو حلقه دیگر مشاهده می‌شوند که در آن‌ها $L_۴=-۱$ و $L_۵=-۱$ است.

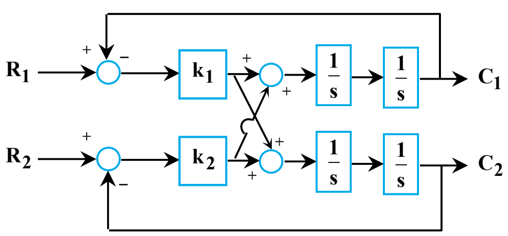
از این پنج حلقه، هیچ دوتایی از آن‌ها مجزا از هم نیستند. بنابراین دترمینان مسیر برابر است با:

$$\Delta=۱-(L_۱+L_۲+L_۳+L_۴+L_۵)=۱-(-G_۱G_۲-G_۱-G_۱G_۲-۱-۱)$$

تابع تبدیل از ورودی R به خروجی C به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$\frac{C}{R}=\frac{۱}{\Delta}(P_۱\Delta_۱+P_۲\Delta_۲)=\frac{G_۱G_۲+۱}{۳+G_۱+۲G_۱G_۲}$$

مثال ۹: تابع تبدیل $T_{۱۲}=\frac{C_۱}{R_۲}$ در سیستم زیر عبارت است از:



۱) $T_{۱۲}=\frac{k_۲s^۲}{s^۴+(k_۱+k_۲)s^۲+۲k_۱k_۲}$

۲) $T_{۱۲}=\frac{k_۲}{s^۲+(k_۱+k_۲)}$

۳) $T_{۱۲}=\frac{(k_۱+k_۲)s^۲}{s^۴+(k_۱+k_۲)s^۳+k_۲s^۲+k_۱k_۲}$

۴) $T_{۱۲}=\frac{k_۱s+k_۲}{k_۱s^۲+(k_۱+k_۲)s+k_۱k_۲}$

پاسخ: گزینه «۲» از $R_۲$ به $C_۱$ تنها یک مسیر مستقیم وجود دارد که بهره آن $P_۱=k_۲\times\frac{۱}{s}\times\frac{۱}{s}$ است. با حذف این مسیر، $\Delta_۱=۱$ به دست می‌آید.

دقت کنید که در دیاگرام بلوکی، سه حلقه وجود دارد. دو حلقه بالا و پایین مستقل از هم هستند و یک حلقه هم، همه بلوک‌های موجود را طی می‌کند، داریم:

$$L_۱=-k_۱\times\frac{۱}{s}\times\frac{۱}{s}\ ,\ L_۲=-k_۲\frac{۱}{s}\times\frac{۱}{s}\ ,\ L_۳=k_۱k_۲\times\frac{۱}{s}\times\frac{۱}{s}\times\frac{۱}{s}\times\frac{۱}{s}$$

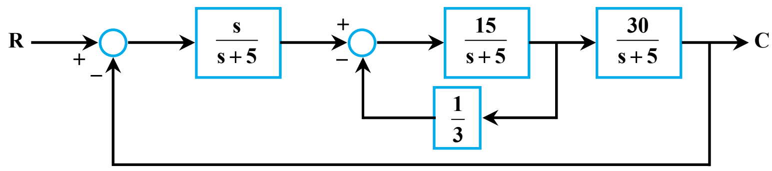
بنابراین دترمینان مسیر به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$\Delta = ۱-(L_۱+L_۲+L_۳)+(L_۱L_۲)$$

در نهایت تابع تبدیل $T_{۱۲}=\frac{C_۱}{R_۲}$ عبارت است از:

$$\frac{C_۱}{R_۲}=\frac{P_۱\Delta_۱}{\Delta}=\frac{\frac{k_۲}{s^۲}}{۱+\frac{k_۱}{s^۲}+\frac{k_۲}{s^۲}-\frac{k_۱k_۲}{s^۴}+(-\frac{k_۱}{s^۲})(-\frac{k_۲}{s^۲})}=\frac{k_۲}{s^۲+(k_۱+k_۲)}$$

مثال۱۰: صفر تابع تبدیل زیر در کدام گزینه به درستی آمده است؟



۱) $s=۰$

۲) $s=-۵$

۳) $s=-۱۰$

۴) تابع تبدیل صفری ندارد.

پاسخ: گزینه «۱»

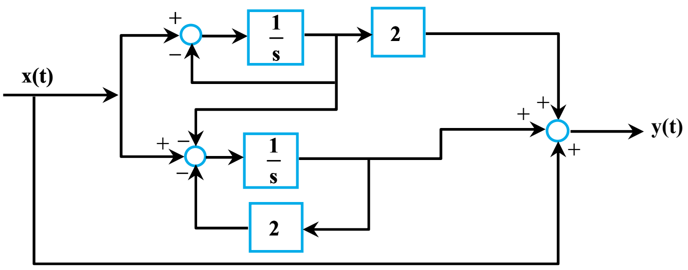
روش اول: ابتدا تابع تبدیل حلقه داخلی و سپس $\frac{C}{R}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{C}{R}=\frac{۴۵۰s}{(s+۱۰)(s+۵)^۲+۴۵۰s}$$

$$۴۵۰s=۰\Rightarrow s=۰$$

روش دوم: طبق تعریف صفر سیستم، $s=z$ صفر است اگر به ازای اعمال ورودی e^{zs} به سیستم، خروجی صفر شود. اگر به اولین بلوک بعد از سیگنال ورودی مرجع دقت شود، تابع تبدیل آن $\frac{s}{s+۵}$ است به ازای فرکانس صفر $(s=۰)$ تابع تبدیل این بلوک صفر خواهد شد، یعنی ارتباط ورودی و خروجی قطع می‌گردد. پس بدون محاسبه تابع تبدیل می‌توان گفت $s=۰$ صفر سیستم است.

مثال۱۱: معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ در سیستم کنترل شکل زیر کدام است؟



۱) $\frac{d^۲y}{dt^۲}+۳\frac{dy}{dt}+۲y=\frac{d^۲x}{dt^۲}+۶\frac{dx}{dt}+۶x$

۲) $۳\frac{d^۲y}{dt^۲}+۲\frac{dy}{dt}+y=\frac{dx}{dt}+۶x$

۳) $\frac{d^۲y}{dt^۲}+۲\frac{dy}{dt}+۳y=\frac{d^۲x}{dt^۲}+۶\frac{dx}{dt}+۷x$

۴) $\frac{d^۲y}{dt^۲}+۳\frac{dy}{dt}+۲y=\frac{d^۲x}{dt^۲}+۶\frac{dx}{dt}+۷x$

پاسخ: گزینه «۱» از ورودی به خروجی ۴ مسیر مستقیم وجود دارد که بهره و دترمینان آن‌ها به صورت زیر است:

بهره مسیرهای مستقیم

$$\begin{cases} P_۱=۱ \quad , \quad \Delta_۱=۱-(\frac{-۲}{s}+\frac{-۱}{s})+(-\frac{۱}{s})(\frac{-۲}{s}) \\ P_۲=\frac{۱}{s} \quad , \quad \Delta_۲=۱-(\frac{-۱}{s}) \\ P_۳=\frac{۲}{s} \quad , \quad \Delta_۳=۱-(\frac{-۲}{s}) \\ P_۴=\frac{۱}{s}(-\frac{۱}{s})=\frac{-۱}{s^۲} \quad , \quad \Delta_۴=۱ \end{cases}$$

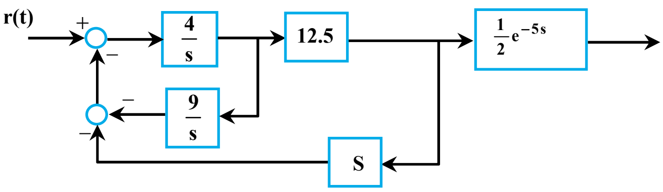
دترمینان گراف برابر است با:

$$\Delta=۱-(\frac{-۱}{s}-\frac{۲}{s})+(\frac{-۱}{s})(\frac{-۲}{s})$$

بنابراین تابع تبدیل و معادله دیفرانسیل به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\sum_k P_k\Delta_k}{\Delta}=\frac{۱+\frac{۶}{s}+\frac{۶}{s^۲}}{۱+\frac{۳}{s}+\frac{۲}{s^۲}}=\frac{۶+۶s+s^۲}{۲+۳s+s^۲}\Rightarrow\frac{d^۲y}{dt^۲}+۳\frac{dy}{dt}+۲y=\frac{d^۲x}{dt^۲}+۶\frac{dx}{dt}+۶x$$

مثال ۱۲: دیاگرام بلوکی یک سیستم کنترل در شکل زیر نشان داده شده است. پاسخ ضربه سیستم برابر کدام گزینه خواهد بود؟



۱) $\frac{۲۵}{۴۹}e^{-۵t}\cos\frac{۶}{۷}t$

۲) $-\frac{۲۵}{۴۹}\sin\frac{۶}{۷}(t-۵)u(t-۵)$

۳) $\frac{۲۵}{۴۹}e^{-۵t}\cos\frac{۶}{۷}(t-۵)u(t-۵)$

۴) $-\frac{۲۵}{۴۹}\cos\frac{۶}{۷}(t-۵)u(t-۵)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از فرمول میسون، تابع تبدیل حلقه بسته را به شکل زیر به دست می‌آوریم:

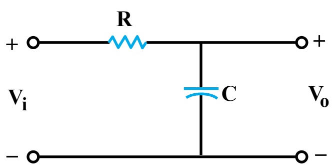
$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\sum_k P_k\Delta_k}{\Delta}\Rightarrow\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\frac{۴}{s}(۱۲/۵)(\frac{۱}{۲}e^{-۵s})}{۱+(\frac{-۳۶}{s^۲}-۴\times۱۲/۵)}=\frac{-۲۵}{۴۹}\,\frac{s}{s^۲+\frac{۳۶}{۴۹}}e^{-۵s}$$

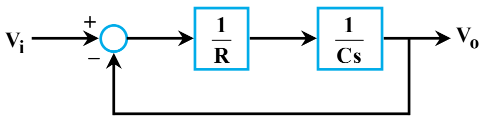
از طرفی می‌دانیم تبدیل لاپلاس $\cos\omega t$ برابر $\frac{s}{s^۲+\omega^۲}$ است و اثر e^{-Ts} تأخیر به اندازه T واحد است.

بنابراین با توجه به اینکه پاسخ ضربه عکس تبدیل لاپلاس تابع حلقه بسته سیستم است، داریم:

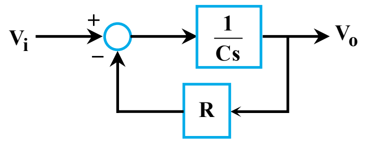
$$c(t)=\frac{-۲۵}{۴۹}\cos\frac{۶}{۷}(t-۵)u(t-۵)$$

مثال ۱۳: مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. دیاگرام بلوکی متناظر با این مدار کدام است؟

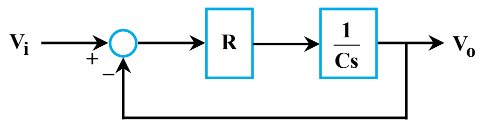




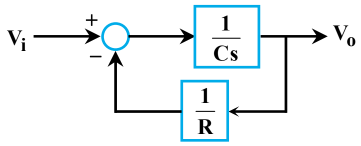
(۱)



(۲)



(۳)

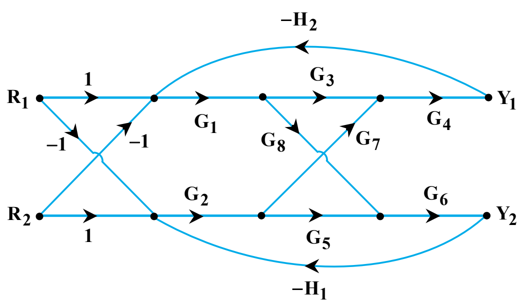


(۴)

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به بلوک دیاگرام‌های گزینه‌ها و شکل مدار فوق باید به دنبال **یافتن رابطه‌ای بین V_o و V_i باشیم**. در مدار نشان داده شده در صورت سؤال، V_o برابر ولتاژ دو سر خازن C می‌باشد و V_i نیز با استفاده از جریان عبوری از مقاومت به‌دست می‌آید. بدیهی است که چون بلوک دیاگرام‌ها در حوزه لاپلاس می‌باشد، مدار هم باید در حوزه لاپلاس تحلیل شود و رابطه بین ورودی و خروجی آن به دست آید.

$$\begin{cases}i=\frac{V_i-V_o}{R}\\ V_o=\frac{۱}{C}\int i dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}I(s)=\frac{V_i(s)-V_o(s)}{R}\\ V_o(s)=\frac{I(s)}{Cs}\end{cases}\Rightarrow V_o(s)=\frac{۱}{Cs}[\frac{V_i(s)}{R}-\frac{V_o(s)}{R}]\Rightarrow\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{\frac{۱}{RCs}}{۱+\frac{۱}{RCs}}$$

مثال ۱۴: شکل زیر SFG یک سیستم کنترلی چندمتغیره مکانیکی است که در آن $R_۱$ ورودی کنترل سرعت و $R_۲$ ورودی کنترل فشار است و $Y_۱$ و $Y_۲$ نیز به ترتیب خروجی سرعت و فشار هستند.



برای اینکه ورودی کنترل سرعت بر روی خروجی فشار اثری نداشته باشد، کدام رابطه زیر برقرار باشد؟

۱) $G_۱G_۸ = G_۲G_۵(۱+G_۱G_۳G_۴H_۲)$

۲) $G_۱G_۸ + G_۲G_۷G_۴H_۲G_۱G_۸ = G_۲G_۵(۱+G_۱G_۳G_۴H_۲)$

۳) همواره تأثیر ورودی کنترل سرعت بر خروجی فشار صفر است.

۴) امکان‌ناپذیر است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای اینکه مطلوب مسأله برآورده شود، باید $\frac{Y_۲}{R_۱} = ۰$ شود، بنابراین به کمک قضیه میسون داریم:

$$\frac{Y_۲(s)}{R_۱(s)} = \frac{G_۱G_۸G_۶ - G_۲G_۵G_۶(۱+G_۱G_۳G_۴H_۲) + G_۲G_۷G_۴H_۲G_۱G_۸G_۶}{\Delta}$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$G_۱G_۸ + G_۲G_۷G_۴H_۲G_۱G_۸ = G_۲G_۵(۱+G_۱G_۳G_۴H_۲)$$

مثال ۱۵: معادلات فضای حالت سیستمی به شکل زیر داده شده است:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۶ & -۵ \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} ۸ & ۱ \end{bmatrix} x$$

کدام گزینه تابع تبدیل این سیستم را به درستی نشان می‌دهد؟

۱) $\frac{s+۸}{s^۲+۵s+۶}$ ۲) $\frac{s+۸}{s^۲+۶s+۵}$ ۳) $\frac{۸s+۱}{s^۲+۵s+۶}$ ۴) $\frac{۸s+۱}{s^۲+۶s+۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تابع تبدیل این سیستم با جایگذاری به دست می‌آید.

$$G(s) = C(sI-A)^{-۱}B + D = \begin{bmatrix} ۸ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -۱ \\ ۶ & s+۵ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \frac{۱}{s^۲+۵s+۶} \begin{bmatrix} ۸ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+۵ & ۱ \\ -۶ & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \frac{۱}{s^۲+۵s+۶}(s+۸) = \frac{s+۸}{s^۲+۵s+۶}$$

مثال ۱۶: معادله فضای حالت و خروجی سیستمی عبارت است از:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -۷ & -۱۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \end{bmatrix} x$$

کدام گزینه صفر انتقال این سیستم را نشان می‌دهد؟

۱) $s=-۱$ ۲) $s=-۲$ ۳) $s=-\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر انتقال ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» صفرهای انتقال را می‌توان از رابطه‌ی $\det\begin{bmatrix} -s_۰I+A & B \\ C & D \end{bmatrix} = ۰$ محاسبه کرد.

$$\det\begin{bmatrix} -s_۰-۷ & -۱۲ & ۱ \\ ۱ & -s_۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} = ۱(۲+s_۰) = ۰ \Rightarrow s_۰ = -۲$$ صفر انتقال

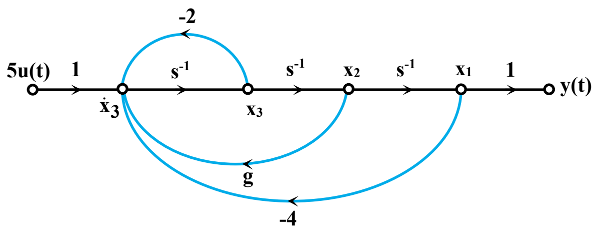
راه دیگر این است که از رابطه‌ی $G(s) = C(sI-A)^{-۱}B + D$ تابع تبدیل سیستم را به‌دست آوریم و از روی تابع تبدیل، صفر انتقال را پیدا کنیم.

$$G(s) = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+۷ & ۱۲ \\ -۱ & s \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \end{bmatrix} \frac{۱}{s^۲+۷s+۱۲} \begin{bmatrix} s & -۱۲ \\ ۱ & s+۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

در نتیجه صفر انتقال برابر است با:

$$G(s) = \frac{۱}{s^۲+۷s+۱۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ ۱ \end{bmatrix} = \frac{s+۲}{s^۲+۷s+۱۲} \Rightarrow s_۰ = -۲$$

مثال ۱۷: دیاگرام حالت یک سیستم LTI که با معادله دیفرانسیل $y^{(۳)} + ۲y^{(۲)} + ۳y^{(۱)} + ۴y = ۵u$ توصیف می‌شود، به شکل زیر داده شده است. مقدار g برابر است با:



۱) $g=-۱$

۲) $g=-۵$

۳) $g=-۳$

۴) $g=-۶$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

روش اول: خروجی سیستم $y = x_1$ است. با مشتق‌گیری متوالی از آن داریم:

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 \ , \ \ddot{y} = \dot{x}_2 = x_3 \ , \ y^{(3)} = \dot{x}_3 = -4x_1 + gx_2 - 2x_3 + 5u \ \Rightarrow \ y^{(3)} = -4y + g\dot{y} - 2\ddot{y} + 5u$$

از مقایسه این معادله با معادله دیفرانسیل صورت مثال، $g = -3$ به دست می‌آید.

روش دوم: با استفاده از قاعده میسون، تابع تبدیل را به دست می‌آوریم. از $5u(t)$ به $y(t)$ تنها یک مسیر مستقیم با $P_1 = \frac{1}{s^3}$، $\Delta_1 = 1$ وجود دارد.

در گراف، سه حلقه با بهره‌های روبه‌رو موجودند:

$$L_1 = \frac{-2}{s} \quad , \quad L_2 = \frac{g}{s^2} \quad , \quad L_3 = \frac{-4}{s^3}$$

تابع تبدیل از ورودی به خروجی عبارت است از:

$$\frac{Y(s)}{5U(s)} = \frac{\frac{1}{s^3}}{1 + \frac{2}{s} - \frac{g}{s^2} + \frac{4}{s^3}} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 - gs + 4}$$

از طرفی با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله دیفرانسیل $y^{(3)} + y^{(2)} + 3y^{(1)} + 4y = 5u$ داریم:

$$\frac{Y(u)}{5U(s)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$$

بنابراین $g = -3$ به دست می‌آید.

مثال ۱۸: **سیستمی با معادلات فضای حالت $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ که در آن $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ است را در نظر بگیرید، ماتریس انتقال حالت $\varphi(t)$ را به دست آورید.**

$$\varphi(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] \Rightarrow (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}\begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ e^{-2t} - e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

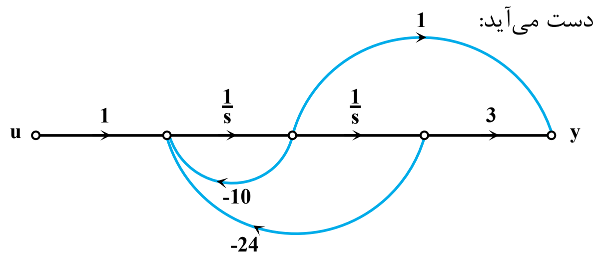
مثال ۱۹: **معادله دیفرانسیل $y'' + 5y' + 6y = u$ را به صورت فضای حالت نمایش دهید.**

☑ **پاسخ:** با توجه به آن که مشتقات u در معادله دیفرانسیل نیستند، می‌توان متغیرهای حالت را $x_1 = y$ و $x_2 = \dot{y}$ در نظر گرفت. در این صورت، نمایش فضای حالت عبارت است از:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - 6x_1 - 5x_2 \\ y = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \qquad ; \qquad y = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

مثال ۲۰: **دیاگرام حالت (مسیر گذر) سیستمی به شکل زیر داده شده است. نمایش تابع تبدیل و فضای حالت آن را به دست آورید.**

☑ **پاسخ:** نمایش تابع تبدیل به راحتی و با استفاده از قاعده میسون به شکل زیر به دست می‌آید:



$$\frac{Y}{U} = \frac{\frac{3}{s^2}(1) + \frac{1}{s}(1)}{1 + \frac{10}{s} + \frac{24}{s^2}} = \frac{s+3}{s^2 + 10s + 24}$$

اما برای محاسبه نمایش فضای حالت، ابتدا باید متغیرهای حالت را انتخاب کنیم. همان‌طور که اشاره شد اولین انتخاب، خروجی انتگرال‌گیر (عنصر ذخیره‌سازی انرژی) به عنوان متغیر حالت است. طبیعی است که ترتیب انتخاب نیز اهمیت دارد.

فرض کنید خروجی انتگرال‌گیر اول را x_2 و خروجی انتگرال‌گیر دوم را x_1 انتخاب کنیم. خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{s}x_2 \Rightarrow sx_1=x_2 \Rightarrow \dot{x}_1=x_2 \\ x_2=\frac{1}{s}(u-10x_2-24x_1) \Rightarrow \dot{x}_2=-24x_1-10x_2+u \\ y=3x_1+x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}=\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -24 & -10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u \\ y=(3 \quad 1)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+0.u \end{cases}$$

با تعویض x_1, x_2 نمایش جدید حاصل می‌شود، به طوری که:

$$A=\begin{pmatrix}-10 & -24\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \qquad C=(1 \quad 3) \qquad D=0$$

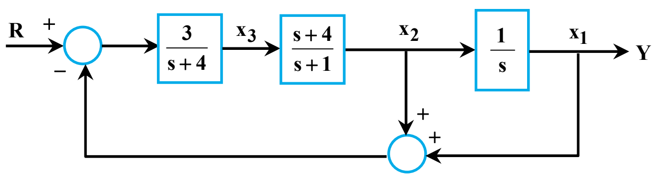
برای نمونه صفرها، قطب‌ها و بهره DC را از نمایش فضای حالت محاسبه نموده با تابع تبدیل مقایسه می‌کنیم:

$$\text{قطب‌های سیستم} = \det(sI-A)=0=\det\begin{pmatrix}s & -1\\ 24 & s+10\end{pmatrix}=0 \Rightarrow s^2+10s+24=0 \rightarrow \begin{cases}s=-6\\ s=-4\end{cases}$$

$$\text{صفرهای انتقال} = \det\begin{pmatrix}-s_0I+A & B\\ C & D\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \det\left(\begin{array}{cc|c}-s_0 & 1 & 0\\ -24 & -(s_0+10) & 1\\ \hline 3 & 1 & 0\end{array}\right)=0 \Rightarrow -s_0-3=0 \Rightarrow s_0=-3$$

$$\text{بهره DC} = D-CA^{-1}B=0-(3 \quad 1)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -24 & -10\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{8}$$

مثال ۲۱: سیستم زیر را در نظر بگیرید، از حل کدام معادله مقادیر ویژه سیستم حاصل می‌شود؟



۱) $s^3+12s^2+48s+64=0$

۲) $s^3+8s^2+19s+12=0$

۳) $s^3+12s^2+51s+76=0$

۴) $s^3+12s+27s+76=0$

پاسخ: گزینه «۲»

روش اول: معادله مذکور از رابطه‌ی $\det(sI-A)=0$ به دست می‌آید بنابراین، ابتدا ماتریس A را می‌یابیم:

$$\dot{x}_1=+x_2$$
$$\dot{x}_2+4x_2=\dot{x}_3+x_3 \Rightarrow \dot{x}_2=-3x_1-4x_2+3R$$
$$\dot{x}_3=3(R-x_1-x_2)-4x_3$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & -4 & 0\\ -3 & -3 & -4\end{bmatrix} \Rightarrow \det(sI-A)=0 \Rightarrow s^3+8s^2+19s+12=0$$

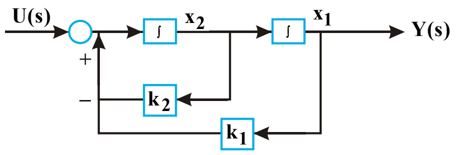
روش دوم: طبق حالت‌های تعیین شده روی شکل معادلات آن‌ها را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \frac{x_2}{s}=x_1 \Rightarrow sx_1=x_2 \Rightarrow \dot{x}_1=x_2 \\ (-x_1-x_2+R)\frac{3}{s+4}=x_3 \Rightarrow sx_3+4x_3=-3x_1-3x_2+3R \Rightarrow \dot{x}_3=-3x_1-3x_2-4x_3+3R \\ (\frac{s+4}{s+1})x_3=x_2 \Rightarrow sx_3+4x_3=sx_2+x_2 \Rightarrow \dot{x}_2=\dot{x}_3-x_2+4x_3=-3x_1-4x_2+3R \end{cases}$$

فرم ماتریس فضای حالت سیستم داده شده برابر است با:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & -4 & 0\\ -3 & -3 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 3\\ 3\end{bmatrix}R \Rightarrow \det(sI-A)=0 \Rightarrow s^3+8s^2+19s+12=0$$

مثال ۲۲: یک سیستم مرتبه دوم با تابع تبدیل $\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{(s+a)(s+b)}$ مفروض است. این سیستم را با دیاگرام بلوکی به شکل روبرو تحقق می‌دهیم. در این صورت:



۱) $k_2=b, k_1=a$

۲) $k_2=ab, k_1=a+b$

۳) $k_2=a, k_1=b$

۴) $k_2=a+b, k_1=ab$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به دیاگرام بلوکی داده شده، نمایش حالت سیستم عبارت است از:

$$y=x_1 \qquad \dot{x}_1=x_2 \qquad \dot{x}_2=-k_1x_1-k_2x_2+u$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -k_1 & -k_2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u\\ y=(1 \quad 0)x\end{cases}$$

تابع تبدیل این سیستم برابر است با:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=(1 \quad 0)\begin{pmatrix}s & -1\\ k_1 & s+k_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{s^2+k_2s+k_1}$$

از مقایسه با تابع تبدیل داده شده واضح است که:

$$k_1=ab \ , \ k_2=a+b$$

به شکل خاص ماتریس‌های C,B,A در نمایش حالت خروجی و ارتباط آن با تابع تبدیل سیستم دقت کنید. همین نتیجه را می‌توانستیم البته با محاسبه تابع تبدیل از دیاگرام بلوکی و مقایسه آن با تابع تبدیل داده شده به‌دست آوریم؛ اما رویکرد ارائه شده در حل مسأله علاوه بر ایجاد ارتباط بین شکل خاص نمایش حالت و تابع تبدیل سیستم نشان می‌دهد که چگونه می‌توان با استفاده از فیدبک متغیرهای حالت x_1 و x_2 و انتخاب مناسب بهره فیدبک k_1 و k_2 قطب‌های دلخواه را برای سیستم در محلی دلخواه مانند $s=-a$ و $s=-b$ جایابی نمود و به این ترتیب رفتار مطلوب برای سیستم را تحقق داد.

توجه کنید که اگر $a=b=0$ در این صورت $k_1=k_2=0$ و این موضوع نشان می‌دهد که استفاده از ایده فیدبک متغیرهای حالت قطب‌های سیستم جبران نشده یا $\frac{1}{s^2}$ را به محل دلخواه $s=-a$ و $s=-b$ انتقال داده است، به‌طوری‌که تابع تبدیل سیستم جبران شده به شکل $\frac{1}{(s+a)(s+b)}$ نتیجه شده است.

مثال ۲۳: در سؤال قبلی اگر متغیرهای حالت سیستم را به ترتیب برابر با جابه‌جایی و سرعت جسم انتخاب کنیم نمایش حالت سیستم به کدام صورت خواهد بود؟

۱) $\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{pmatrix}u$

۲) $\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{pmatrix}u$

۳) $\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}\frac{1}{M}\\ 0\end{pmatrix}u$

۴) $\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}\frac{1}{M}\\ 0\end{pmatrix}u$

پاسخ: گزینه «۱» معادله دینامیکی حرکت سیستم را به شکل $F=M\frac{d^2x}{dt^2}$ به دست می‌آوریم. با تعریف:

$$\begin{cases}x_1=x\\ x_2=v=\dot{x}\end{cases}$$

خواهیم داشت:

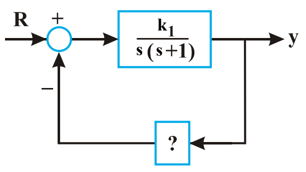
$$\dot{x}_2=\ddot{x}=\frac{1}{M}F \quad \dot{x}_1=x_2$$

لذا به ازای ورودی $u=F$ داریم:

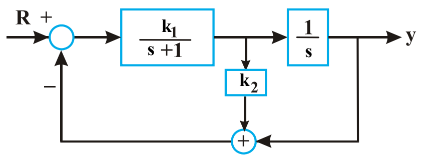
$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=\frac{1}{M}u\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{x}\end{bmatrix}u$$

تست‌های تألیفی فصل اول

۱ـ دیاگرام بلوکی شکل «الف» را در نظر بگیرید. اگر این دیاگرام را به شکل معادل «ب» تغییر دهیم، کدام گزینه به جای علامت سؤال قرار خواهد گرفت؟



(شکل الف)



(شکل ب)

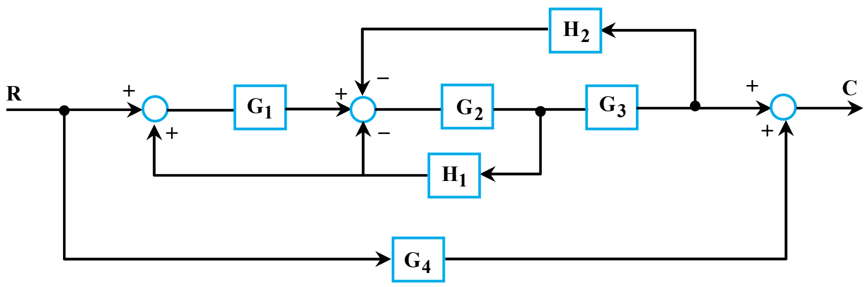
۱) $k_1 + k_2 s$

۲) $1 + k_2 s$

۳) $1 + \frac{k_2}{s}$

۴) $k_1 + \frac{k_2}{s}$

۲ـ در شکل زیر تابع تبدیل سیستم کدام است؟



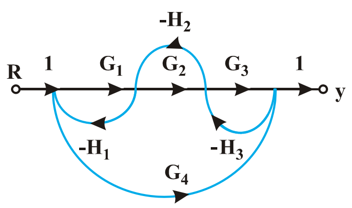
۱) $\frac{G_1G_2G_3 + G_4(1 + H_1G_2 + G_2G_3H_2)}{1 + G_2G_3H_2 + H_1G_2 - G_1G_2H_1}$

۲) $G_4 + \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_2G_3H_2 + H_1G_2 - G_1G_2H_1}$

۳) $\frac{G_1G_2G_3 + G_4(1 + H_1G_2 + G_2G_3H_2 + G_1G_2H_1)}{1 + G_2G_3H_2 + H_1G_2 - G_1G_2H_1}$

۴) $\frac{G_1G_2G_3 + G_4(1 + H_1G_2 + G_2G_3H_2)}{1 + G_2G_3H_2 + H_1G_2 + G_1G_2H_1}$

۳ـ کدام گزینه تابع تبدیل $\frac{Y(s)}{R(s)}$ را در گراف گذر سیگنال نشان داده شده در شکل به‌درستی بیان می‌کند؟



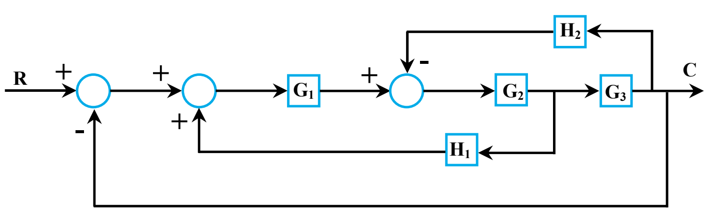
۱) $\frac{y(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3 + G_4}{1 + G_1H_1 + G_2H_2 + G_3H_3 + G_1H_1G_3H_3}$

۲) $\frac{y(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3 + G_4 + G_4G_3H_2}{1 + G_1H_1 + G_2H_2 + G_3H_3 + G_1H_1G_3H_3}$

۳) $\frac{y(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3 + G_4}{1 + G_1H_1 + G_2H_2 + G_3H_3 + G_4H_3H_2H_1 + G_1H_1G_3H_3}$

۴) $\frac{y(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3 + G_4 + G_4G_2H_2}{1 + G_1H_1 + G_2H_2 + G_3H_3 + G_4H_3H_2H_1 + G_1H_1G_3H_3}$

۴ـ در بلوک دیاگرام مقابل تابع تبدیل $\frac{C}{R}$ برابر است با:



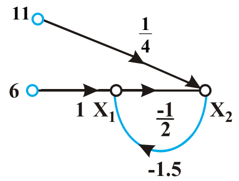
۱) $\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3}$

۲) $\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2G_3}{1 - G_1G_2H_1 + G_1G_2G_3}$

۳) $\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2G_3}{1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3}$

۴) $\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3}$

۵ـ گراف گذر سیگنال نشان داده شده در شکل زیر را درنظر بگیرید.



مقادیر $x_۱$ و $x_۲$ در کدام گزینه به‌درستی آمده است؟

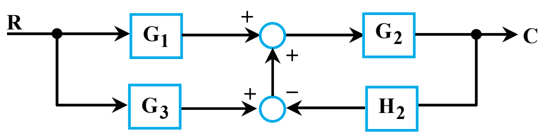
۱) $\begin{cases} x_۱ = ۷/۵ \\ x_۲ = -۱ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} x_۱ = \frac{۱۵}{۴} \\ x_۲ = -۱ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} x_۱ = ۲۴ \\ x_۲ = \frac{۱۱}{۴} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} x_۱ = ۲۴ \\ x_۲ = ۱۱ \end{cases}$

۶ـ در شکل زیر برای اینکه اثر حلقه از سیستم حذف شود، $G_۳$ کدام است؟



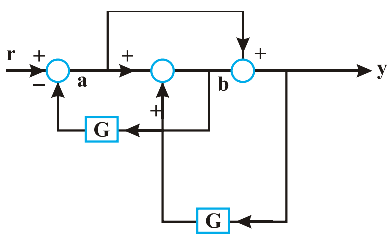
۱) $G_۳ = G_۱G_۲H_۲$

۲) $G_۳ = \frac{G_۱G_۲}{H_۲}$

۳) $G_۳ = \frac{G_۲}{H}$

۴) $G_۳ = \frac{H}{G_۱G_۲}$

۷ـ با توجه به دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل، تابع تبدیل $\frac{Y}{R}$ به کدام صورت به دست می‌آید؟



۱) $\frac{۱}{۱+G^۲}$

۲) $\frac{۲}{۱+G^۲}$

۳) $\frac{۲}{۱-G^۲}$

۴) $\frac{۱}{۱-G^۲}$

۸ـ معادله دیفرانسیل سیستمی به شکل $\ddot{y} + ۳\dot{y} + ۲y - F(t) = ۰$ مفروض است. $f(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی سیستم است. اگر بخواهیم پاسخ این سیستم شامل مود e^{-t} نشود، کافی است:

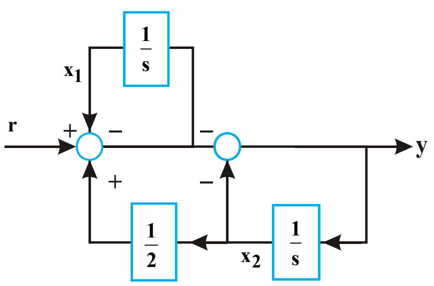
۱) شرایط اولیه به گونه‌ای باشد که $y(۰) + \dot{y}(۰) = ۰$

۲) شرایط اولیه به گونه‌ای باشد که $۲y(۰) + \dot{y}(۰) = ۰$

۳) شرایط اولیه به گونه‌ای باشد که $y(۰) + \dot{y}(۰) = ۰$ و $F(s)$ صفری در $s = -۱$ داشته باشد.

۴) شرایط اولیه به گونه‌ای باشد که $۲y(۰) + \dot{y}(۰) = ۰$ و $F(s)$ صفری در $s = -۱$ داشته باشد.

۹ـ معادله حالت سیستمی با دیاگرام نشان داده شده در شکل زیر در کدام گزینه به درستی آمده است؟



۱) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -۱ & \frac{۱}{۲} \\ ۱ & \frac{-۳}{۲} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} r$

۲) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -۱ & \frac{۱}{۲} \\ ۱ & \frac{-۱}{۲} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} r$

۳) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -۱ & \frac{۱}{۲} \\ -۱ & \frac{۳}{۲} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} r$

۴) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -۱ & \frac{۱}{۲} \\ ۱ & -۱ \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} r$

۱۰ـ تابع تبدیلی به شکل $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+a)(s+b)}$ را با انتخاب متغیرهای حالت به صورت $\begin{cases} \dot{x}_1 = -p_1x_1 + k_1u \\ \dot{x}_2 = -p_2x_2 + k_2u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$ تحقق می‌دهیم. در این شرایط:

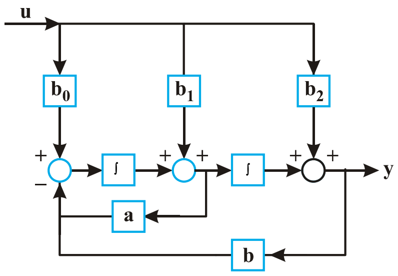
۱) $p_1 = a + b \quad p_2 = ab \quad k_1 = -k_2 = \frac{1}{b-a}$

۲) $p_1 = a \quad p_2 = b \quad k_1 = k_2 = \frac{1}{a-b}$

۳) $p_1 = a \quad p_2 = b \quad k_1 = -k_2 = \frac{1}{b-a}$

۴) $p_1 = a + b \quad p_2 = ab \quad k_1 = k_2 = \frac{1}{a-b}$

۱۱ـ برای شبیه‌سازی و تحقق سیستمی با معادله دیفرانسیل $\ddot{y} + a\dot{y} + by = e\ddot{u} + d\dot{u} + cu$ از دیاگرام بلوکی زیر استفاده می‌کنیم. u ورودی سیستم، y خروجی آن و c, d, c, b, a مقادیر ثابتی هستند. کدام گزینه صحیح است؟



۱) $b_0 = c$، $b_1 = d$، $b_2 = e$

۲) $b_0 = c$، $b_1 = d$، $b_2 = c$

۳) $b_0 = e$، $b_1 = ae - d$، $b_2 = c$

۴) $b_0 = c$، $b_1 = d - ae$، $b_2 = e$

۱۲ـ در سیستم شکل زیر G_1 و G_2 و G_3 در حوزه فضای حالت به صورت زیر نمایش داده شده‌اند، نمایش حالت و خروجی در کدام گزینه به درستی بیان شده است؟

$$u \to \boxed{G_1} \xrightarrow{w} \boxed{G_2} \xrightarrow{z} \boxed{G_3} \to y$$

$$G_1 : \begin{cases} w = x_3 + u \\ \dot{x}_3 = -3w + u \end{cases} \qquad G_2 : \begin{cases} z = x_2 + w \\ \dot{x}_2 = -3z + 2w \end{cases} \qquad G_3 : \begin{cases} y = x_1 \\ \dot{x}_1 = -4x_1 + z \end{cases}$$

۱) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} u$، $y = (1 \quad 0 \quad 0)x$

۲) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} u$، $y = (1 \quad 0 \quad 0)x$

۳) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} u$، $y = (1 \quad 0 \quad 0)x$

۴) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} u$، $y = (1 \quad 0 \quad 0)x$

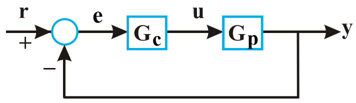
۱۳ـ نمایش فضای حالت سیستمی به شکل $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ x(0) = 0 \end{cases}$ مفروض است. به ازای ورودی پله واحد حاصل $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{dy}{dt}$ برابر است با:

۱) CB ۲) CAB ۳) CA^2B ۴) $CA^{-1}B$

۱۴ـ نمایش فضای حالت سیستمی به شکل $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ x(0) = 0 \end{cases}$ مفروض است. اگر ورودی u پله واحد باشد حاصل $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{d^2y}{dt^2}$ برابر است با:

۱) CB ۲) CAB ۳) CA^2B ۴) $CA^{-1}B$

۱۵ـ سیستم کنترل فیدبک به شکل زیر را درنظر بگیرید.



اگر نمایش فضای حالت سیستم به شکل (A_2, B_2, C_2, D_2) با بردار حالت x_2 و مدل فضای حالت جبران‌ساز را به شکل (A_1, B_1, C_1, D_1) با بردار حالت x_1 درنظر بگیریم، کدام گزینه نمایش ماتریس حالت حلقه بسته را با انتخاب $x = [x_1, x_2]^T$ به درستی نشان می‌دهد؟

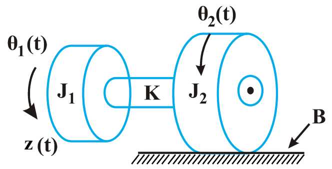
۱) $$A = \begin{bmatrix} A_1 - B_1(1+D_2D_1)^{-1}D_2C_1 & -B_1(1+D_2D_1)^{-1}D_2C_2 \\ B_2C_1 - B_2D_1(1+D_2D_1)^{-1}D_2C_1 & A_2 - B_2D_1(1+D_2D_1)^{-1}C_2 \end{bmatrix}$$

۲) $$A = \begin{bmatrix} A_1 - B_1(1+D_2D_1)^{-1}C_1 & -B_1(1+D_2D_1)^{-1}C_2 \\ B_2C_1 - B_2D_1(1+D_2D_1)^{-1} & A_2 - B_2D_1(1+D_2D_1)^{-1}C_2 \end{bmatrix}$$

۳) $$A = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 - B_2D_1C_2 \end{bmatrix}$$

۴) با دو متغیر حالت نمی‌توان فضای حالت مدل حلقه بسته را تشکیل داد.

۱۶ـ شکل زیر مدلی است از یک دیسک گردان کامپیوتر که در آن J_1 و J_2 به ترتیب ممان اینرسی روتور و دیسک، k ثابت فنر پیچشی، B ثابت میرایی و $z(t)$ گشتاور اعمال شده به موتور را مدل می‌کند. $\theta_1(t)$ جابه‌جایی زاویه‌ای روتور و $\theta_2(t)$ جابه‌جایی زاویه‌ای دیسک را نشان می‌دهد که متغیر خروجی این سیستم فرض می‌شود. با انتخاب متغیرهای حالت این سیستم به شکل $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{\theta}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = \dot{\theta}_2(t) = x_4(t) \end{cases}$ کدام گزینه نمایش فضای حالت متناظر را به درستی نشان می‌دهد؟



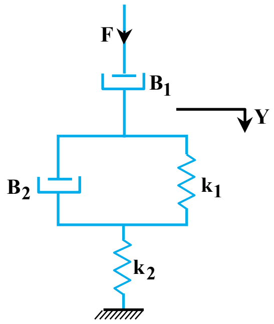
۱) $$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ +\frac{k}{J_1} & 0 & -\frac{k}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J_2} & 0 & -\frac{k}{J_2} & \frac{B}{J_2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_1} \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \end{pmatrix} \tau \;,\quad y = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)x$$

۲) $$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k}{J_1} & 0 & \frac{k}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k}{J_2} & 0 & \frac{k}{J_2} & \frac{B}{J_2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_1} \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \end{pmatrix} \tau \;,\quad y = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)x$$

۳) $$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k}{J_1} & 0 & \frac{k}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J_2} & 0 & \frac{-k}{J_2} & \frac{-B}{J_2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tau \;,\quad y = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)x$$

۴) $$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k}{J_1} & 0 & \frac{-k}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J_2} & 0 & \frac{-k}{J_2} & \frac{-B}{J_2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tau \;,\quad y = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)x$$

۱۷ـ در سیستم مکانیکی زیر، صفرهای تابع تبدیل $\frac{Y}{F}$ کدام است؟



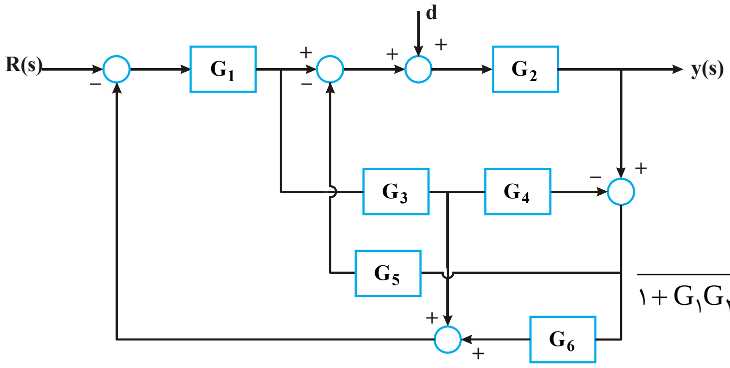
۱) $s=\frac{k_۱-k_۲}{B_۲}$ و $s=۰$

۲) $s=\frac{-(k_۱+k_۲)}{B_۲}$ و $s=\frac{k_۱-k_۲}{B_۲}$

۳) $s=\frac{k_۱+k_۲}{B_۲}$ و $s=۰$

۴) $s=\frac{-(k_۱+k_۲)}{B_۲}$ و $s=۰$

۱۸ـ تابع تبدیل حلقه بسته $\frac{Y(s)}{R(s)}$ کدام است؟



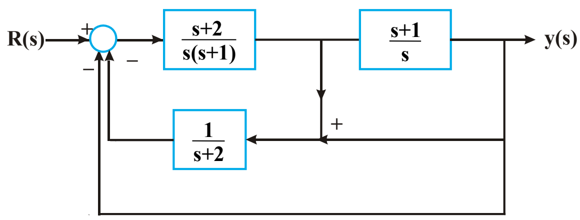
۱) $\frac{G_۱G_۲+G_۱G_۳G_۴G_۵G_۲}{۱+G_۱G_۲G_۶-G_۱G_۳G_۴G_۶+G_۱G_۳+G_۲G_۵}$

۲) $\frac{G_۱G_۲+G_۱G_۳G_۴G_۵G_۲}{۱+G_۱G_۲G_۶+G_۱G_۳G_۴G_۶+G_۱G_۳+G_۲G_۵}$

۳) $\frac{G_۱G_۲+G_۱G_۳G_۴G_۵G_۲}{۱+G_۱G_۲G_۶-G_۱G_۳G_۴G_۶+G_۱G_۳+G_۲G_۵+G_۱G_۳G_۲G_۵}$

۴) $\frac{G_۱G_۲+G_۱G_۳G_۴G_۵G_۲}{۱+G_۱G_۲G_۶+G_۱G_۳-G_۱G_۳G_۴G_۶+G_۲G_۳G_۲G_۵}$

۱۹ـ مقادیر ویژه (مودهای) و تابع تبدیل سیستم حلقه بسته زیر کدام است؟



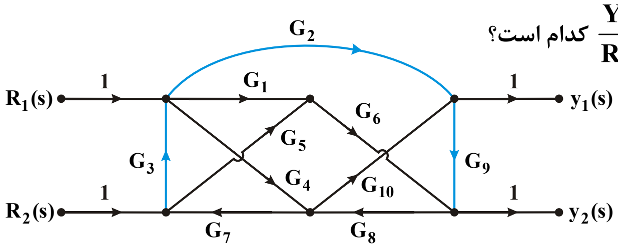
۱) $\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{(s+۱)(s+۲)}{s^۳+s^۲+۶s+۳}\ ,\ \begin{bmatrix}-۱\\-۰/۲۴\pm۲/۴j\end{bmatrix}$

۲) $\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{(s+۱)(s+۲)}{s^۳+s^۲+۵s+۳}\ ,\ \begin{bmatrix}-۰/۵۲\\-۰/۲۴\pm۲/۴j\\-۲\end{bmatrix}$

۳) $\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{(s+۱)(s+۲)}{s^۳+s^۲+۵s+۳}\ ,\ \begin{bmatrix}-۱\\-۰/۲۴\pm۲/۴j\end{bmatrix}$

۴) $\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{(s+۱)(s+۲)}{s^۳+s^۲+۶s+۳}\ ,\ \begin{bmatrix}-۰/۵۲\\-۰/۲۴\pm۲/۴j\\-۲\end{bmatrix}$

۲۰ـ سیستم با شبکه داده شده را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه بسته $\frac{Y_۱(s)}{R_۱(s)}$ کدام است؟



۱) $\frac{G_۲(۱-G_۵G_۶G_۸G_۷)+G_۴G_{۱۰}+G_۱G_۶G_۸G_{۱۰}}{۱-G_۳G_۴G_۷-G_۵G_۶G_۷G_۸-G_۸G_۹G_{۱۰}-G_۱G_۶G_۸G_۷G_۳}$

۲) $\frac{G_۲(۱-G_۵G_۶G_۸G_۷)+G_۴G_{۱۰}+G_۱G_۶G_۸G_{۱۰}}{۱-G_۳G_۴G_۷-G_۲G_۹G_۸G_۷G_۳-G_۵G_۶G_۷G_۸-G_۸G_۹G_{۱۰}-G_۱G_۶G_۸G_۷G_۳}$

۳) $\frac{G_۲+G_۴G_{۱۰}+G_۱G_۶G_۸G_{۱۰}}{۱-G_۳G_۴G_۷-G_۵G_۶G_۷G_۸-G_۸G_۹G_{۱۰}-G_۱G_۶G_۸G_۷G_۳}$

۴) $\frac{G_۲+G_۴G_{۱۰}+G_۱G_۶G_۸G_{۱۰}}{۱-G_۳G_۴G_۷-G_۲G_۹G_۸G_۷G_۳-G_۵G_۶G_۷G_۸-G_۸G_۹G_{۱۰}-G_۱G_۶G_۸G_۷G_۳}$

۲۱ـ سیستمی با معادله فضای حالت زیر مفروض است. با تعریف متغیر فضای حالت جدید بــه صــورت $w=\begin{bmatrix} y \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ مــی‌خــواهیم معــادلات فضــای حالت $\dot{w}=A_2 w$ را تشکیل دهیم. A_2 کدام است؟

$$\begin{cases} \dot{x}=A_1 x \\ y=cx \end{cases},\quad A_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

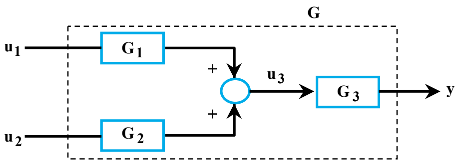
۱) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

۲۲ـ با توجه به معادلات حالت داده شده هر بلوک، معادله حالت و خروجی سیستم G کدام است؟



$$G_1:\begin{cases} \dot{x}_1=A_1x_1+B_1u_1 \\ y_1=c_1x_1+D_1u_1 \end{cases},\quad G_2:\begin{cases} \dot{x}_2=A_2x_2+B_2u_2 \\ y_2=c_2x_2+D_2u_2 \end{cases},\quad G_3:\begin{cases} \dot{x}_3=A_3x_3+B_3u_3 \\ y_3=c_3x_3 \end{cases}$$

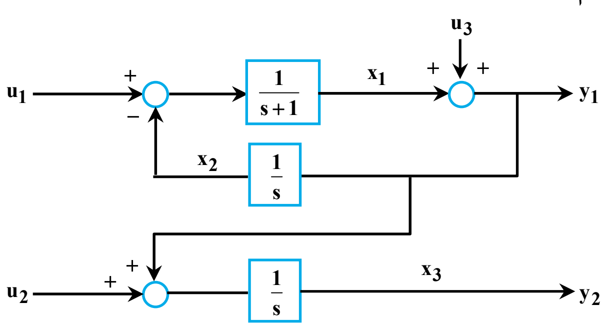
۱) $A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & A_1A_3 \\ 0 & A_2 & 0 \\ B_3C_1 & B_3C_2 & A_3 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix}$
$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} D_1 & D_2 \end{bmatrix}$

۲) $A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ B_3C_1 & B_3C_2 & A_3 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} B_1D_1 & 0 \\ 0 & B_2D_2 \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix}$
$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} D_1D_2 & D_1D_2 \end{bmatrix}$

۳) $A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ B_3C_1 & B_3C_2 & A_3 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \\ B_3D_1 & B_3D_2 \end{bmatrix}$
$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$

۴) $A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ B_3C_1 & B_3C_2 & A_3 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \\ B_1D_1 & B_2D_2 \end{bmatrix}$
$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$

۲۳ـ معادلات حالت و خروجی سیستم زیر کدام است؟



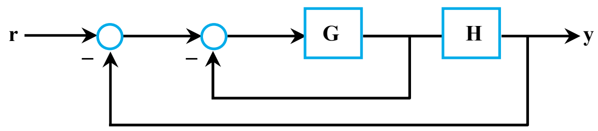
۱) $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۲) $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۳) $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۴) $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۲۴ـ اگر تحقق فضای حالت تابع تبدیل G, H به صورت زیر باشد، تحقق سیستم فیدبک زیر کدام است؟



$$G:\begin{cases}\dot{x}=A_g x+B_g u_g\\ y_g=c_g x\end{cases}\qquad H:\begin{cases}\dot{z}=A_h z+B_h u_h\\ y_h=C_h z\end{cases}$$

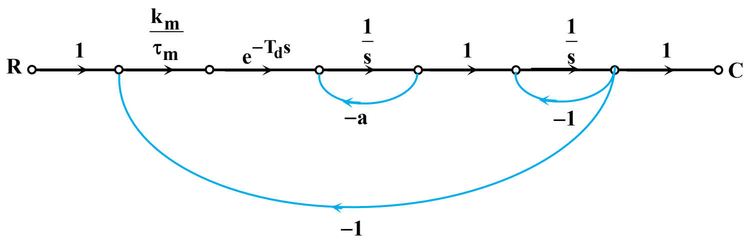
۱) $\dot{x}=\begin{bmatrix}A_g-B_gC_g & B_gC_h\\ B_hC_g & A_h\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}B_g\\ 0\end{bmatrix}r$ ، $y=\begin{bmatrix}0 & c_h\end{bmatrix}x$

۲) $\dot{x}=\begin{bmatrix}A_g-B_gC_g & -B_gC_h\\ B_hC_g & A_h\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}B_g\\ 0\end{bmatrix}r$ ، $y=\begin{bmatrix}0 & c_h\end{bmatrix}x$

۳) $\dot{x}=\begin{bmatrix}A_g & 0\\ 0 & A_h\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}B_g\\ 0\end{bmatrix}r$ ، $y=\begin{bmatrix}0 & c_h\end{bmatrix}x$

۴) $\dot{x}=\begin{bmatrix}A_g-B_gC_g-B_hC_h & -B_hC_h\\ B_hC_g & A_h\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}B_g\\ 0\end{bmatrix}r$ ، $y=\begin{bmatrix}C_hC_g & C_h\end{bmatrix}x$

۲۵ـ نمودار مسیر گذر سیگنال به شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر تابع تبدیل سیستم حلقه بسته به شکل $T(s)=\dfrac{k_m e^{-T_d s}}{(s+1)(\tau_m s+1)+k_m e^{-T_d s}}$ باشد، ثابت a برابر است با:



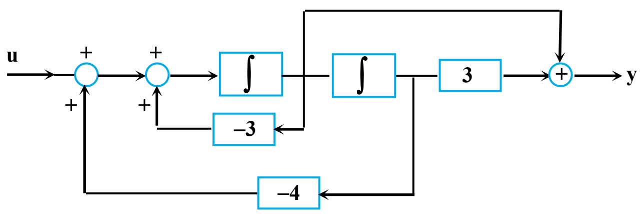
۱) τ_m

۲) $\dfrac{1}{\tau_m}$

۳) $k_m\tau_m$

۴) $\dfrac{k_m}{\tau_m}$

۲۶ـ در سیستم نشان داده شده در شکل زیر اگر $u=-y$ انتخاب شود، کدام گزینه ماتریس حالت سیستم حلقه بسته را به درستی نشان می‌دهد؟



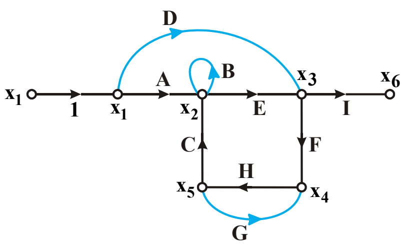
۱) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -7 & -4\end{pmatrix}$

۲) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -4 & -7\end{pmatrix}$

۳) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -4 & -3\end{pmatrix}$

۴) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{pmatrix}$

۲۷ـ نمودار گذر سیگنال زیر مفروض است. تابع تبدیل $\dfrac{x_6}{x_1}$ را به شکل $\dfrac{N}{D}$ در نظر می‌گیریم: در این صورت N برابر است با:



۱) $AEI(1-GH)+DI$

۲) $AEI+DI(1-B-GH)$

۳) $AEI(1-G.H)+DI(1-B-GH+BGH)$

۴) $AEI+DI(1+B+GH-BGH)$

پاسخنامه تست‌های تألیفی فصل اول

۱ـ گزینه «۲»

روش اول: با انتقال بلوک $\frac{۱}{s}$ در شکل «الف» به سمت چپ، بهره مسیر پیشرو از R به Y ثابت می‌ماند، اما برای ثابت ماندن بهره حلقه‌ها لازم است بهره $k_۲$ در شکل «الف» را به« $k_۲s$ » تغییر دهیم. به این ترتیب دو شاخه موازی در مسیر فیدبک با بهره‌های $k_۲s$ و یک با یکدیگر جمع خواهند شد.

روش دوم: ابتدا تابع تبدیل شکل (الف) را می‌نویسیم:

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{k_۱}{s^۲+(k_۱k_۲+۱)s+k_۱}$$

پس از آن تابع تبدیل شکل (ب) را با فرض $H(s)$ بودن بلوک مجهول به دست می‌آوریم.

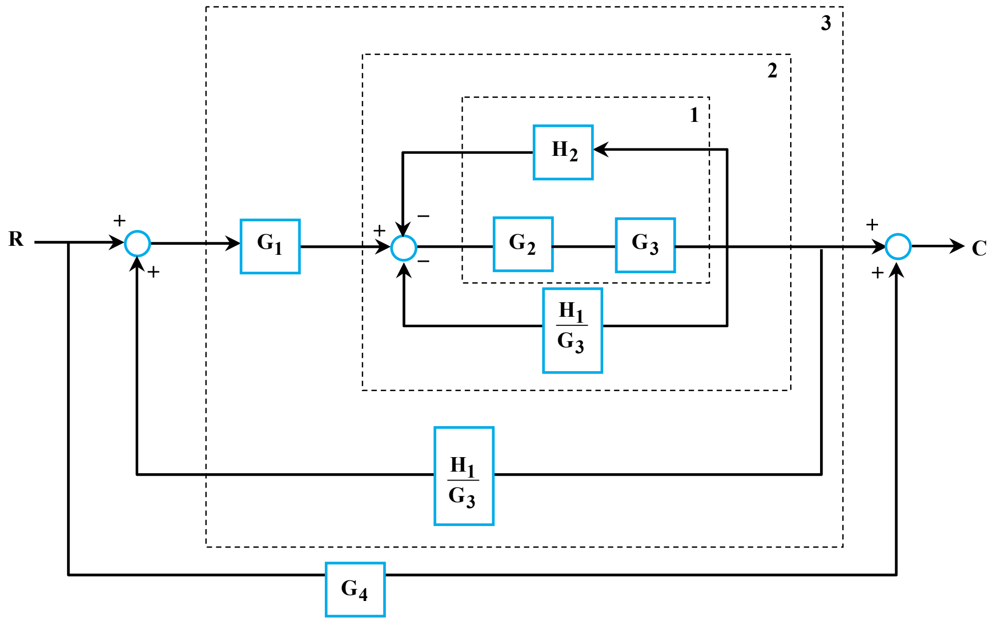
$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{k_۱}{s^۲+s+k_۱H(s)}$$

اگر دو تابع تبدیل حلقه بسته شکل (الف) و (ب) را با هم مساوی قرار دهیم، داریم:

$$s^۲+s+k_۱H(s)=s^۲+s+k_۱k_۲s+k_۱ \Rightarrow k_۱H(s)=k_۱(k_۲s+۱) \Rightarrow H(s)=k_۲s+۱$$

۲ـ گزینه «۲»

روش اول: برای حل مسأله از ساده‌سازی بلوک دیاگرام استفاده می‌کنیم. ابتدا نقطه بین $G_۲$ و $G_۳$ را به بعد از $G_۳$ منتقل می‌کنیم و مراحل را با توجه به شکل انجام می‌دهیم:



$$(۱): T_۱=\frac{G_۲G_۳}{۱+H_۲G_۲G_۳}$$

$$(۲): T_۲=\frac{T_۱}{۱+T_۱\frac{H_۱}{G_۳}}=\frac{G_۲G_۳}{۱+H_۲G_۲G_۳+H_۱G_۲}$$

$$(۳): T_۳=\frac{G_۱T_۲}{۱-G_۱T_۲\frac{H_۱}{G_۳}}=\frac{G_۱G_۲G_۳}{۱+H_۲G_۲G_۳+H_۱G_۲-G_۱G_۲H_۱}$$

$$\frac{C}{R}=G_۴+\frac{G_۱G_۲G_۳}{۱+H_۲G_۲G_۳+H_۱G_۲-G_۱G_۲H_۱}$$

روش دوم: با استفاده از قاعده میسون نیز می‌توان به راحتی تابع تبدیل حلقه بسته را به دست آورد. مسیرهای پیشرو به صورت زیر هستند:

۱) $G_۱G_۲G_۳$ ، ۲) $G_۴$

برای مسیر پیشرو اول $\Delta_۱=۱$ است و برای مسیر پیشرو دو داریم:

$$\Delta_۲=۱-[-G_۲H_۱+G_۱G_۲H_۱-G_۲G_۳H_۲]$$

بهره حلقه‌های موجود در دیاگرام نیز برابر است با:

۱) $-G_۲H_۱$ ۲) $+G_۱G_۲H_۱$ ۳) $-G_۲G_۳H_۲$

پس تابع تبدیل حلقه بسته به صورت مقابل است:

$$\frac{G(s)}{R(s)}=\frac{G_۱G_۲G_۳+G_۴(۱+G_۲H_۱-G_۱G_۲H_۱+G_۲G_۳H_۲)}{۱+G_۲H_۱+G_۲G_۳H_۲-G_۱G_۲H_۱}$$

۳ــ گزینه «۴» از قاعده میسون خواهیم داشت:

$$P_1 = G_1G_2G_3$$

$$P_2 = G_4$$

دترمینان گراف برابر است با:

$$\Delta = 1-(-G_1H_1 - G_2H_2 - G_3H_3 - G_4H_3H_2H_1) + (G_1H_1G_3H_3)$$

از طرفی داریم:

$$\Delta_1 = 1 \qquad \Delta_2 = 1-(-G_2H_2)$$

۴ــ گزینه «۳» از ورودی R به خروجی C، تنها یک مسیر مستقیم با بهره‌ی $P_1 = G_1G_2G_3$ وجود دارد. دقت کنید که سه فیدبک موجود، سه حلقه به وجود آورده‌اند و مسیر مستقیم دیگری جز P_1 موجود نیست. بهره‌ی حلقه‌های موجود در بلوک دیاگرام برابر است با:

$$L_1 = G_1G_2H_1 \ , \ L_2 = -G_2G_3H_2 \ , \ L_3 = -G_1G_2G_3$$

هیچ دو حلقه‌ای از این سه حلقه، از هم مجزا نیستند. بنابراین دترمینان مسیر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta = 1-(L_1+L_2+L_3) = 1-(G_1G_2H_1 - G_2G_3H_2 - G_1G_2G_3) = 1-G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3$$

تابع تبدیل $\frac{C}{R}$ از رابطه میسون به صورت مقابل نتیجه می‌شود:

$$\frac{C}{R} = \frac{1}{\Delta}\sum P_k\Delta_k = \frac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3}$$

۵ــ گزینه «۱» سیگنال‌های واردشونده به دو گره X_1 و X_2 را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} X_1 = 6-1/5X_2 \\ X_2 = \frac{11}{4}-\frac{1}{2}X_1 \Rightarrow X_2 = \frac{11}{4}-\frac{1}{2}(6-1/5X_2) \Rightarrow X_2 = -1 \Rightarrow X_1 = 7/5 \end{cases}$$

۶ــ گزینه «۱» برای اینکه اثر حلقه از سیستم حذف شود باید $\frac{C}{R} = G_1G_2$ شود، پس ابتدا $\frac{C}{R}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$P_1 = G_1G_2 \ و \ P_2 = G_3G_2 \ و \ \Delta_1 = 1 \ و \ \Delta_2 = 1 \qquad L_1 = -G_2H_2 \ و \ \Delta = 1+G_2H_2$$

$$\frac{C}{R} = \frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_2(G_1+G_3)}{1+G_2H_2}$$

لذا از $\frac{C}{R} = G_1G_2$ داریم:

$$\frac{G_2(G_1+G_3)}{1+G_2H_2} = G_1G_2 \Rightarrow \frac{G_1G_2(1+\frac{G_3}{G_1})}{1+G_2H_2} = G_1G_2 \Rightarrow 1+\frac{G_3}{G_1} = 1+G_2H_2 \Rightarrow G_3 = G_1G_2H_2$$

۷ــ گزینه «۲» با توجه به دیاگرام بلوکی داده شده می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a = r-Gb \\ b = a+Gy \\ y = a+b \end{cases}$$

با حذف a و b داریم:

$$b = r-Gb+Gy \Rightarrow b(1+G) = r+Gy$$

و یا:

$$b = \frac{1}{1+G}r + \frac{G}{1+G}y$$

از طرفی داریم:

$$a = r-Gb = \frac{1}{1+G}r - \frac{G^2}{1+G}y$$

و لذا:

$$y = a+b = \frac{2}{1+G}r + y(\frac{G-G^2}{1+G})$$

بنابراین:

$$y(\frac{1+G+G^2-G}{1+G}) = \frac{2}{1+G}r \Rightarrow y(\frac{1+G^2}{1+G}) = \frac{2}{1+G}r \Rightarrow \frac{y}{r} = \frac{2}{1+G^2}$$

نتیجه مشابهی با قاعده میسون به‌دست خواهد آمد.

۸ـ گزینه «۴» تبدیل لاپلاس معادله نتیجه می‌دهد:

$$s^2y(s)-sy(0)-\dot{y}(0)+3sy(s)-3y(0)+2y(s)=F(s)\ \Rightarrow\ y(s)=\frac{F(s)}{(s+1)(s+2)}+\frac{sy(0)+\dot{y}(0)+3y(0)}{(s+1)(s+2)}$$

و یا:

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{F(s)}{(s+1)(s+2)}\}+[2y(0)+\dot{y}(0)]e^{-t}-[y(0)+\dot{y}(0)]e^{-2t}$$

واضح است برای آن‌که e^{-t} در پاسخ ظاهر نشود، علاوه بر این‌که لازم است $2y(0)+\dot{y}(0)=0$ باشد، باید $F(s)$ صفری در $s=-1$ داشته باشد تا قطب $s=-1$ را در جمله اول از بین ببرد.

۹ـ گزینه «۱» با توجه به متغیرهای حالت انتخاب شده در شکل داریم:

$$x_1=\frac{1}{s}(r+\frac{1}{2}x_2-x_1)$$
$$x_2=\frac{1}{s}(y)=\frac{1}{s}(-x_2-r-\frac{1}{2}x_2+x_1)$$

و یا:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+\frac{1}{2}x_2+r\\ \dot{x}_2=x_1-\frac{3}{2}x_2-r\end{cases}$$

۱۰ـ گزینه «۳» معادلات حالت و خروجی سیستم در این شرایط به شکل مقابل خواهند بود:

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{pmatrix}-p_1 & 0\\ 0 & -p_2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}u\\ y=(1\quad 1)x\end{cases}$$

و لذا تابع تبدیل سیستم عبارت است از:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=(1\quad 1)\begin{pmatrix}s+p_1 & 0\\ 0 & s+p_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}$$

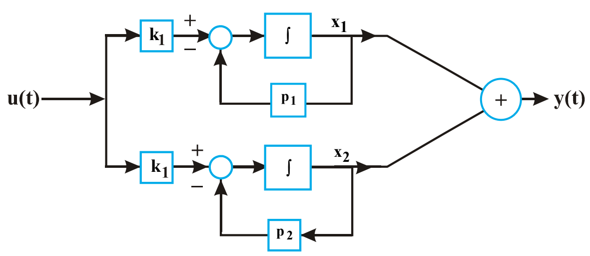
برای معکوس‌سازی ماتریس قطری کافی است درایه‌های قطر اصلی را عکس کنیم و بنابراین:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=(1\quad 1)\begin{pmatrix}\frac{1}{s+p_1} & 0\\ 0 & \frac{1}{s+p_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}=\frac{k_1}{s+p_1}+\frac{k_2}{s+p_2}$$

جالب اینکه انتخاب جدید متغیرهای حالت متناظر با نمایش کسرهای جزئی برای تابع تبدیل سیستم است و در واقع هر یک از کسرهای جزئی به عنوان یک متغیر حالت انتخاب شده‌اند. از مقایسه با تابع تبدیل صورت سؤال داریم:

$$p_1=a\ ,\ p_2=b\ ,\ k_1=\frac{1}{b-a}\qquad k_2=-k_1=\frac{1}{a-b}$$

دیاگرام بلوکی متناظر با تحقق موردنظر در این سؤال را می‌توان به شکل زیر ترسیم نمود که به تحقق موازی یا قطری مشهور است.



۱۱ـ گزینه «۴» تابع تبدیل سیستم از معادله دیفرانسیل داده شده به شکل $\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{es^2+ds+c}{s^2+as+b}$ به‌دست می‌آید. به کمک قاعده میسون تابع تبدیل را از دیاگرام بلوکی داده شده محاسبه می‌کنیم و از برابری دو تابع تبدیل ثابت‌های b_0 و b_1 و b_2 را به دست خواهیم آورد.

بهره مسیرهای پیشرو از u به y عبارتند از:

$$p_1=\frac{b_0}{s^2}\qquad p_2=\frac{b_1}{s}\qquad p_3=b_2$$

دترمینان گراف برابر است با:

$$\Delta=1-(\frac{a}{-s}-\frac{b}{s^2})=1+\frac{a}{s}+\frac{b}{s^2}$$

و اما بهره حلقه‌های مجزا از مسیرهای پیشرو به صورت مقابل است:

$$\Delta_1 = 1 \qquad \Delta_2 = 1 \qquad \Delta_3 = 1-(-\frac{a}{s})$$

و لذا با جایگذاری داریم:

$$\frac{y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=1}^{3} p_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{\frac{b_0}{s^2}+\frac{b_1}{s}+b_2(1+\frac{a}{s})}{1+\frac{a}{s}+\frac{b}{s^2}} = \frac{b_2 s^2 + (b_1 + ab_2)s + b_0}{s^2+as+b}$$

از مقایسه دو تابع تبدیل نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} b_2 = e \\ b_1 + ab_2 = d \\ b_0 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = c \\ b_1 = d - ae \\ b_2 = e \end{cases}$$

دقت کنید که در شبیه‌سازی چگونه با انتخاب متغیرهای حالت مناسب از مشتق‌گیر استفاده نشده است.

۱۲ـ گزینه «۱» متغیرهای اضافی z و w را از معادلات حذف می‌کنیم تا رابطه بین u و y به‌دست آید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 + x_2 + x_3 + u \\ \dot{x}_2 = -3(x_2 + w) + 2w = -3x_2 - w = -3x_2 - x_3 - u \\ \dot{x}_3 = -3(x_3 + u) + u = -3x_3 - 2u \\ y = x_1 \end{cases}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} u \qquad y = (1 \quad 0 \quad 0) x$$

۱۳ـ گزینه «۱» با مشتق‌گیری از معادله خروجی $y = Cx$ داریم: $\dot{y} = C\dot{x}$

و از معادله حالت می‌دانیم: $\dot{x} = Ax + Bu$

لذا: $y' = CAx + CBu$، حال در زمان $t = 0^+$ خواهیم داشت:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{dy}{dt} = CA \lim_{t\to 0^+} x(t) + CB \lim_{t\to 0^+} u(t)$$

اما $x(0) = 0$ و $\lim_{t\to 0^+} u(t) = 1$ بنابراین داریم:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{dy}{dt} = CB$$

دقت کنید که متغیرهای حالت متغیرهایی دینامیکی هستند و لذا در $t = 0$ جهش نخواهند داشت.

۱۴ـ گزینه «۲»

$$\dot{y} = c\dot{x} = CAx + CBu \Rightarrow \lim_{t\to 0^+} \frac{dy}{dt} = CA \lim_{t\to 0^+} x(t) + CB \lim_{t\to 0^+} u(t) = CB(1) = CB$$

به طریق مشابه داریم:

$$\ddot{y} = CA\dot{x} + CB\dot{u} = CA^2 x + CABu + CB\dot{u} \Rightarrow \lim_{t\to 0^+} \frac{d^2 y}{dt^2} = CAB$$

۱۵ـ گزینه «۱» مدل دو سیستم در فضای حالت را می‌نویسیم.

$$G_c = \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 e \\ u = C_1 x_1 + D_1 e \end{cases}$$

$$G_p = \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ y = C_2 x_2 + D_2 u \end{cases} \quad , \ e = r - y = r - C_2 x_2 - D_2 u$$

$$e = r - C_2 x_2 - D_2 C_1 x_1 - D_2 D_1 e \rightarrow e = (1 + D_2 D_1)^{-1}(r - C_2 x_2 - D_2 C_1 x_1)$$

$$\rightarrow \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1(1+D_2D_1)^{-1} r - B_1(1+D_2D_1)^{-1} C_2 x_2 - B_1(1+D_2D_1)^{-1} D_2 C_1 x_1$$

$$\rightarrow \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2(C_1 x_1 + D_1(1+D_2D_1)^{-1}(r - C_2 x_2 - D_2 C_1 x_1))$$

$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} A_1 - B_1(1+D_2D_1)^{-1} D_2 C_1 & -B_1(1+D_2D_1)^{-1} C_2 \\ B_2 C_1 - B_2 D_1 (1+D_2D_1)^{-1} D_2 C_1 & A_2 - B_2 D_1 (1+D_2D_1)^{-1} C_2 \end{bmatrix}$$

۱۶ـ گزینه «۳» معادلات دیفرانسیل حاکم بر این سیستم را می‌توان به کمک قوانین نیوتن به شکل زیر نوشت:

$$\begin{cases} J_1\ddot{\theta}_1+k(\theta_1-\theta_2)=\tau \\ J_2\ddot{\theta}_2+B\dot{\theta}_2+k(\theta_2-\theta_1)=0 \end{cases}$$

با توجه به متغیرهای حالت انتخاب شده در صورت سؤال داریم:

$$x_1=\theta_1\ ,\ x_2=\dot{x}_1=\dot{\theta}_1\ ,\ x_3=\theta_2\ ,\ x_4=\dot{x}_3=\dot{\theta}_2$$

و لذا:

$$x=(\theta_1,\dot{\theta}_1,\theta_2,\dot{\theta}_2)^T$$

بنابراین:

$$\dot{x}_1=x_2 \qquad \dot{x}_2=\ddot{\theta}_1=-\frac{k}{J_1}\theta_1+\frac{k}{J_1}\theta_2+\frac{1}{J_1}\tau=\frac{-k}{J_1}x_1+\frac{k}{J_1}x_3+\frac{1}{J_1}\tau$$

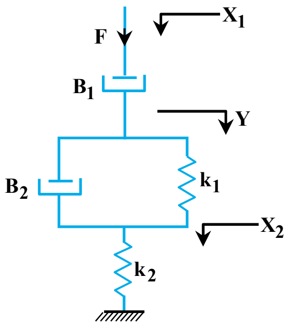
$$\dot{x}_3=x_4 \qquad \dot{x}_4=\theta_2=\frac{+k}{J_2}\theta_1-\frac{k}{J_2}\theta_2-\frac{B}{J_2}\dot{\theta}_2=\frac{k}{J_2}x_1-\frac{k}{J_2}x_3-\frac{B}{J_2}x_4$$

از طرفی داریم:

$$y=\theta_2=x_3$$

۱۷ـ گزینه «۴» با تعریف X_1 و X_2 داریم:

معادلات را برای گره‌ها می‌نویسیم:



$$\begin{cases} F-B_1 s(X_1-Y)=0 \\ B_1 s(X_1-Y)-(k_1+B_2 s)(Y-X_2)=0 \\ (k_1+B_2 s)(Y-X_2)-K_2X_2=0 \end{cases}$$

به کمک روش کرامر داریم:

$$Y=\frac{\begin{vmatrix} B_1 s & 0 & F \\ B_1 s & k_1+B_2 s & 0 \\ 0 & -(k_1+k_2)-B_2 s & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_1 s & 0 & -B_1 s \\ B_1 s & k_1+B_2 s & -(B_1+B_2)s-k_1 \\ 0 & -(k_1+k_2)-B_2 s & k_1+B_2 s \end{vmatrix}} \Rightarrow \frac{Y}{F}=-\frac{B_1B_2 s^2+B_1(k_1+k_2)s}{\Delta(s)}$$

۱۸ـ گزینه «۳» ابتدا طبق قاعده میسون مسیرهای پیشرو از $R(s)$ به $Y(s)$ را به دست می‌آوریم:

$$P_1=G_1G_2 \qquad \Delta_1=1$$
$$P_2=G_1G_3G_4G_5G_2 \qquad \Delta_2=1$$

پس از آن باید حلقه‌های موجود در سیستم را بیابیم:

$$L_1=-G_1G_2G_6$$
$$L_2=+G_1G_3G_4G_6$$
$$L_3=-G_1G_3$$
$$L_4=-G_2G_5$$

دو حلقه L_3 و L_4 نسبت به هم مستقل هستند. پس تابع تبدیل حلقه بسته برابر است با:

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G_1G_2+G_1G_3G_4G_5G_2}{1+G_1G_2G_6-G_1G_3G_4G_6+G_1G_3+G_2G_5+G_1G_3G_2G_5}$$

۱۹ـ گزینه «۴» تابع تبدیل حلقه بسته را با قاعده میسون به دست می‌آوریم. مسیر پیشرو به صورت مقابل است: $P_1 = \frac{(s+2)}{s(s+1)} \times \frac{(s+1)}{s}$

حلقه‌های موجود در دیاگرام نیز $L_1 = \frac{s+2}{s(s+1)} \times \frac{1}{s+2}$، $L_2 = \frac{(s+2)(s+1)}{s^2(s+2)(s+1)}$ و $L_3 = \frac{(s+2)(s+1)}{s^2(s+1)}$ هستند که هیچ حلقه دوبه‌دو مستقلی وجود ندارد.

در نتیجه تابع تبدیل حلقه بسته برابر است با: $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(s+2)(s+1)}{s^3+s^2+6s+3}$

توجه کنید که تابع تبدیل در واقع به صورت زیر بوده است:

$$\frac{\frac{(s+2)(s+1)}{s^2(s+1)}}{1+\frac{s+2}{s(s+1)(s+2)}+\frac{(s+2)(s+1)}{s^2(s+2)(s+1)}+\frac{(s+1)(s+2)}{s^2(s+1)}} = \frac{(s+2)^2(s+1)}{s^2(s+2)(s+1)+s(s+2)+(s+1)(s+2)+(s+1)(s+2)^2}$$

عامل $(s+2)$ از صورت و مخرج تابع تبدیل حذف می‌شود، یعنی سیستم حلقه بسته دارای حذف صفر و قطب عامل $(s+2)$ است.
توجه کنید که از روی مسیر پیشرو یا حلقه‌ها نمی‌توان به حذف صفر و قطب‌ها به درستی پی برد. به طور مثال، در مسیر پیشرو حذف صفر و قطب عامل $(s+1)$ وجود دارد، اما در تابع تبدیل حلقه بسته این عامل حذف نشده است.

۲۰ـ گزینه «۲» طبق قواعد میسون ابتدا مسیرهای پیشرو از $R_1(s)$ به $Y_1(s)$ را به‌دست می‌آوریم.

$P_1 = G_2 \qquad \Delta_1 = 1 - G_5G_6G_8G_7$

$P_2 = G_1G_6G_8G_{10} \qquad \Delta_2 = 1$

$P_3 = G_4G_{10} \qquad \Delta_3 = 1$

توجه کنید که $G_1G_6G_8G_7G_3G_4G_{10}$ مسیر پیشرو نیست، چون از گره پایینی دو بار عبور می‌کند. حلقه‌های شبکه به صورت زیر است:

$L_1 = G_3G_4G_7$

$L_2 = G_2G_9G_8G_7G_3$

$L_3 = G_5G_6G_7G_8$

$L_4 = G_8G_9G_{10}$

$L_5 = G_1G_6G_8G_7G_3$

هیچ حلقه دوبه‌دو مستقلی وجود ندارد.

بنابراین تابع تبدیل حلقه بسته برابر است با: $\frac{Y_1(s)}{R_1(s)} = \frac{G_2(1-G_5G_6G_8G_7)+G_4G_{10}+G_1G_6G_8G_{10}}{1-G_3G_4G_7-G_2G_9G_8G_7G_3-G_5G_6G_7G_8-G_8G_9G_{10}-G_1G_6G_8G_7G_3}$

۲۱ـ گزینه «۱» برای به‌دست آوردن معادلات فضای حالت با متغیرهای جدید باید داشته باشیم: $\begin{bmatrix}\dot y\\ \dot x_1\\ \dot x_3\end{bmatrix} = A_2\begin{bmatrix}y\\ x_1\\ x_3\end{bmatrix}$

$\dot y, \dot x_1, \dot x_3$ را به ترتیب می‌نویسیم.

$$\dot y = \dot x_1 + 2\dot x_2 - \dot x_3 = 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = \underbrace{x_1 - 2x_2 - x_3}_{y} + 4x_1 - 2x_3 = y + 4x_1 - 2x_3$$

$$\dot x_1 = x_1 + 2x_2 - x_3 = y$$

$$\dot x_3 = 2x_2 + 2x_3 = \underbrace{x_1 + 2x_2 - x_3}_{y} - x_1 + 3x_3 = y - x_1 + 3x_3$$

فرم ماتریسی معادلات به دست آمده به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix}\dot y\\ \dot x_1\\ \dot x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

۲۲ـ گزینه «۳» برخلاف ظاهر پاسخ‌ها که بسیار طولانی به نظر می‌آیند، با کمی دقت می‌توان پاسخ سؤال را یافت. دو سیستم G_1 و G_2 هیچ‌گونه تغییری در معادلات فضای حالت خود ندارند. توجه کنید که u_3 از مجموع دو خروجی y_1 و y_2 بلوک‌های G_1 و G_2 تشکیل می‌شود. پس داریم:

$$u_3 = y_1 + y_2 = C_1x_1 + D_1u_1 + C_2x_2 + D_2u_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_3 = A_3x_3 + B_3(C_1x_1 + C_2x_2 + D_1u_1 + D_2u_2) \\ y = C_3x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_3 = B_3C_1x_1 + B_3C_2x_2 + A_3x_3 + B_3D_1u_1 + B_3D_2u_2 \\ y = C_3x_3 \end{cases}$$

در نتیجه معادلات فضای حالت به صورت زیر می‌شود:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ B_3C_1 & B_3C_2 & A_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \\ B_3D_1 & B_3D_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad C_3]x + [0 \quad 0]u$$

دقت کنید که معادلات حالت مربوط به x_1 و x_2 تغییر پیدا نمی‌کند؛ چون ورودی آن u_1 و u_2 است.

۲۳ـ گزینه «۱» برای نوشتن معادلات حالت سیستم، با توجه به متغیرهای حالت داده شده داریم:

$$\frac{1}{s+1}(u_1 - x_2) = x_1 \Rightarrow sx_1 + x_1 = u_1 - x_2 \Rightarrow \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + u_1$$

$$\frac{1}{s}(x_1 + u_3) = x_2 \Rightarrow sx_2 = x_1 + u_3 \Rightarrow \dot{x}_2 = x_1 + u_3$$

$$\frac{1}{s}(x_1 + u_2 + u_3) = x_3 \Rightarrow sx_3 = x_1 + u_2 + u_3 \Rightarrow \dot{x}_3 = x_1 + u_2 + u_3$$

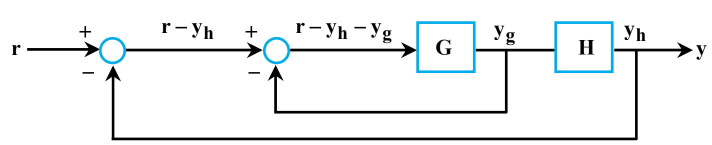
$$y_1 = x_1 + u_3 \ , \ y_2 = x_3$$

فرم ماتریسی معادلات حالت و خروجی سیستم به صورت زیر است:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

۲۴ـ گزینه «۲» در شکل زیر سیگنال‌ها را معرفی می‌کنیم.



حال باید معادلات را با سیگنال‌های داده شده بازنویسی کرد.

$$u_g = r - C_hz - C_gx \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = A_gx + B_g(r - C_hz - C_gx) \\ y_g = C_gx \end{cases}$$

$$u_h = u_g \Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = A_hz + B_h(C_gx) \\ y = y_h = C_hz \end{cases}$$

فرم ماتریسی معادلات فوق به صورت زیر است:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_g - B_gC_g & -B_gC_h \\ B_hC_g & A_h \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_g \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$y = [0 \quad C_h]x$$

۲۵ـ گزینه «۲» ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را از قاعده میسون به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{C}{R}=\frac{\Sigma P_k\Delta_k}{\Delta}$$

$$P_1=\frac{k_m}{\tau_m}e^{-T_ds}(\frac{1}{s})(\frac{1}{s}) \qquad \Delta_1=1$$

$$\Delta=1-(-\frac{a}{s}-\frac{1}{s}-\frac{k_m}{\tau_m}e^{-T_ds}\frac{1}{s^2})+(-\frac{a}{s})(-\frac{1}{s})$$

بنابراین داریم:

$$T(s)=\frac{C}{R}=\frac{P_1\Delta_1}{\Delta}=\frac{\frac{k_m}{\tau_m}e^{-T_ds}\frac{1}{s^2}}{1+\frac{a+1}{s}+\frac{a}{s^2}+\frac{k_m}{\tau_m}e^{-T_ds}\frac{1}{s^2}}$$

پس از ساده‌سازی داریم:

$$T(s)=\frac{k_me^{-T_ds}}{k_me^{-T_ds}+a\tau_m+(a+1)\tau_ms+\tau_ms^2}$$

از مقایسه با تابع داده شده در صورت سؤال می‌توان نوشت:

$$\tau_ms^2+(\tau_m+1)s+1+k_me^{-T_ds}=\tau_ms^2+(a+1)\tau_ms+a\tau_m+k_me^{-T_ds}$$

پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases}(a+1)\tau_m=\tau_m+1\\ a\tau_m=1\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{\tau_m}$$

۲۶ـ گزینه «۱»

روش اول: خروجی انتگرال‌گیرها را به ترتیب از راست به چپ x_1 و x_2 می‌نامیم. داریم:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-3x_2+(u-4x_1)\\ y=x_2+3x_1\end{cases}$$

و لذا معادله حالت حلقه باز عبارت است از:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-4x_1-3x_2+u\\ y=3x_1+x_2\end{cases}$$

با جایگذاری $u=-y$ داریم:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-4x_1-3x_2-3x_1-x_2\end{cases}$$

و یا:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-7x_1-4x_2\end{cases}$$

روش دوم: تابع تبدیل سیستم حلقه بسته را با استفاده از قانون کنترلی $u=-y$ به دست می‌آوریم.

مسیر پیشرو اول:

$$P_1=\frac{3}{s}\ ,\ \Delta_1=1$$

مسیر پیشرو دوم:

$$P_2=\frac{1}{s}\ ,\ \Delta_2=1$$

حلقه‌ها:

$$L_1=-\frac{3}{s}\ ,\ L_2=-\frac{4}{s^2}\ ,\ L_3=-\frac{3}{s^2}\ ,\ L_4=-\frac{1}{s}$$

تابع تبدیل سیستم حلقه بسته برابر است با:

$$G=\frac{\frac{3}{s}+\frac{1}{s}}{1+\frac{3}{s}+\frac{4}{s^2}+\frac{3}{s^2}+\frac{1}{s}}=\frac{4s}{s^2+4s+7}$$

حال اگر ماتریس A را مطابق تحقق کنترل‌پذیر بنویسیم، داریم:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -7 & -4\end{bmatrix}$$

۲۷ـ گزینه «۳» از قاعده میسون استفاده می‌کنیم.

بهره مسیر مستقیم اول: $P_1=AEI$ — بهره مسیر مستقیم دوم: $P_2=DI$

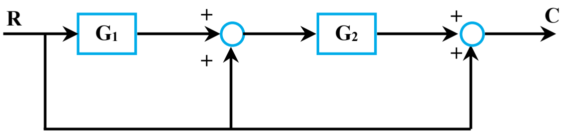
بهره حلقه‌های مجزا از P_1: GH — بهره حلقه‌های مجزا از P_2: B,GH

حلقه‌های دوبه دو مجزا از P_2: B,GH

$$\Rightarrow N=P_1\Delta_1+P_2\Delta_2=AEI(1-GH)+DI(1-B-GH+BGH)$$

آزمون فصل اول

۱ـ تابع تبدیل $\frac{C}{R}$ در سیستم نشان داده شده در شکل مقابل چیست؟



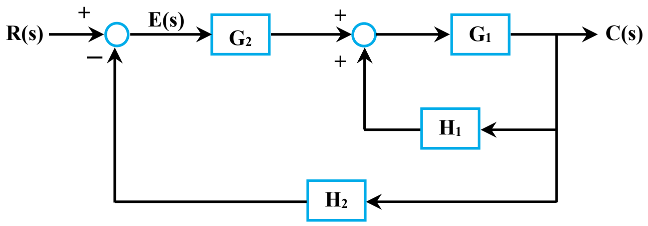
۱) $1+G_1G_2$

۲) $\frac{G_1G_2}{1-G_1G_2}$

۳) $\frac{G_1G_2+G_2}{1-G_1G_2-G_2}$

۴) $1+G_2+G_1G_2$

۲ـ تابع تبدیل $\frac{E(s)}{R(s)}$ برای سیستم نشان داده شده در شکل مقابل عبارت است از:



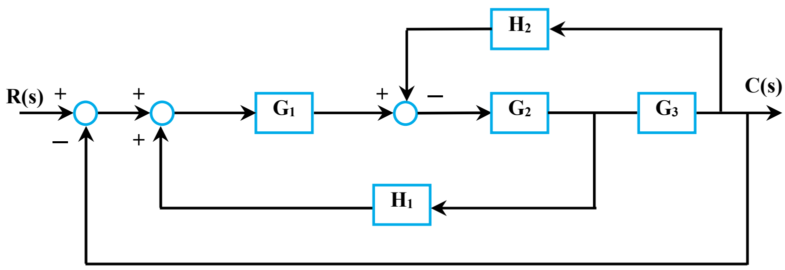
۱) $G_1G_2H_1/(1+G_1H_1-G_1G_2H_2)$

۲) $G_1G_2/(1-G_1H_1+G_1G_2H_2)$

۳) $G_1G_2H_2/(1-G_1H_1+G_1G_2H_2)$

۴) $(1-G_1H_1)/(1-G_1H_1+G_1G_2H_2)$

۳ـ تابع تبدیل $\frac{C(s)}{R(s)}$ در شکل مقابل عبارت است از:



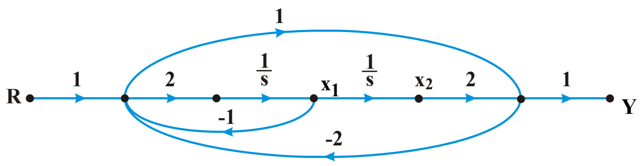
۱) $\frac{1}{1-G_1G_2H_1+G_1G_2G_3+G_2G_3H_2}$

۲) $\frac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2}$

۳) $\frac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3}$

۴) $\frac{1}{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2}$

۴ـ معادلات فضای حالت سیستمی با SFG نشان داده شده کدام است؟



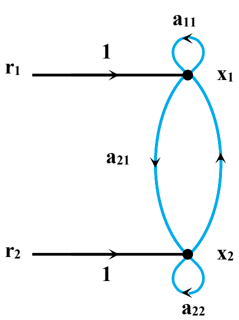
۱) $\overset{\circ}{x}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{8}{3}\\ 1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ 0\end{bmatrix}R\ ,\ y=\begin{bmatrix}\frac{2}{4} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\end{bmatrix}R$

۲) $\overset{\circ}{x}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{8}{3}\\ 1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ 0\end{bmatrix}R\ ,\ y=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}x$

۳) $\overset{\circ}{x}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{8}{3}\\ 1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ 0\end{bmatrix}R\ ,\ y=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\end{bmatrix}R$

۴) $\overset{\circ}{x}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{8}{3}\\ 1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ 0\end{bmatrix}R\ ,\ y=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\end{bmatrix}R$

۵ـ گراف گذر سیگنال (Signal Flow Graph) یک سیستم در شکل زیر آمده است. کدام دسته معادلات توصیف‌کننده این گراف هستند؟



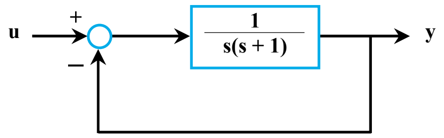
۱) $\begin{cases}a_{11}x_1+(1-a_{12})x_2=r_1\\ a_{21}x_1+(1-a_{22})x_2=r_2\end{cases}$

۲) $\begin{cases}(1-a_{11})x_1+a_{12}x_2=r_1\\ a_{21}x_1+(1-a_{22})x_2=r_2\end{cases}$

۳) $\begin{cases}(1-a_{11})x_1-a_{12}x_2=r_1\\ -a_{21}x_1+(1-a_{22})x_2=r_2\end{cases}$

۴) $\begin{cases}(1+a_{11})x_1-a_{12}x_2=r_1\\ a_{21}x_1+(1+a_{22})x_2=r_2\end{cases}$

۶ـ سیستم کنترل شکل زیر را در نظر بگیرید. با استفاده از متغیرهای حالت $x_1 = y$ و $x_2 = \dot{y}$ توصیف سیستم را به صورت معادلات دینامیکی (معادلات حالت و معادلات خروجی) بنویسید.



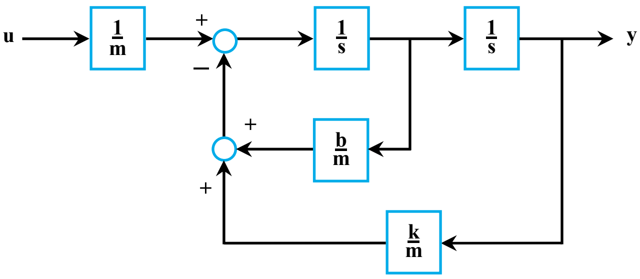
۱) $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}u$, $y=(1\quad 0)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

۲) $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}u$, $y=(1\quad 0)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u$, $y=(1\quad 0)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

۴) $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u$, $y=(1\quad 1)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

۷ـ نمایش فضای حالت سیستم نشان داده شده در شکل زیر کدام است؟



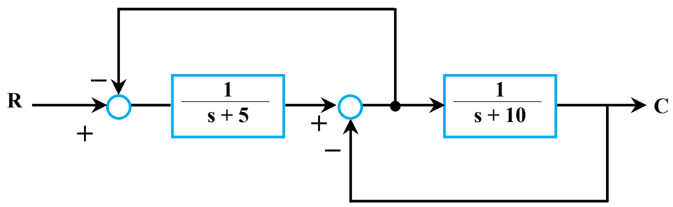
۱) $\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{b}{m} & -\frac{k}{m}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$, $y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$

۲) $\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -\frac{b}{m} & -\frac{k}{m}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{m}\end{bmatrix}u$, $y=\begin{bmatrix}\frac{b}{m} & 0\end{bmatrix}x$

۳) $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -\frac{k}{m} & \frac{b}{m}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}u$, $y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$

۴) $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}u$, $y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$

۸ـ تابع تبدیل خروجی به ورودی $\frac{C}{R}$ در شکل زیر برابر است با:



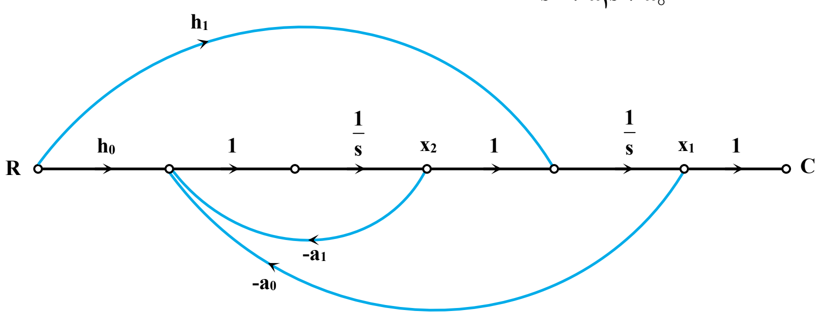
۱) $\frac{1}{s^2+17s+65}$

۲) $\frac{s+5}{s^2+17s+65}$

۳) $\frac{s+10}{s^2+15s+50}$

۴) $\frac{s+5}{s^2+15s+50}$

۹ـ تابع تبدیل ورودی ـ خروجی یک سیستم کنترل عبارت است از $\frac{c}{r}=\frac{b_1 s+b_0}{s^2+a_1 s+a_0}$ ، یک دیاگرام حالت از این سیستم در شکل زیر آمده است. کدام گزینه درست است؟



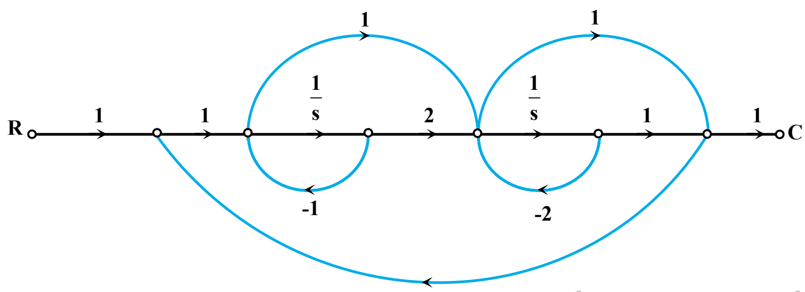
۱) $h_0=b_0 \quad , \quad h_1=b_1$

۲) $h_0=b_0-a_1b_1 \quad , \quad h_1=b_1$

۳) $h_0=b_0 \quad , \quad h_1=b_0-a_1b_1$

۴) $h_0=b_1 \quad , \quad h_1=b_0$

۱۰ـ تابع تبدیل $\frac{C(s)}{R(s)}$ سیستم نشان داده شده در گراف جریان سیگنال شکل زیر کدام است؟



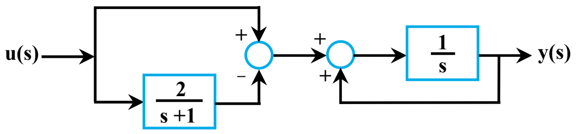
۱) $\frac{s^2+2s+3}{2s^2+6s+2}$

۲) $\frac{s^2+2s+3}{6s^2+2s+2}$

۳) $\frac{s^2+3s+2}{2s^2+6s+4}$

۴) $\frac{s^2+3s+2}{6s^2+2s+4}$

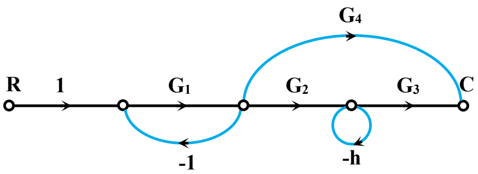
۱۱ـ تابع تبدیل بین ورودی u و خروجی y در سیستم مقابل عبارت است از:



۱) $\frac{۱}{s+۱}$　　۲) $\frac{۱}{(s+۱)^{۲}}$

۳) $\frac{s+۱}{s-۱}$　　۴) $\frac{۱}{s^{۲}-۱}$

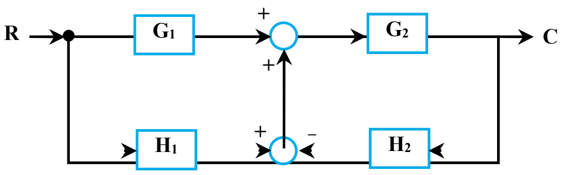
۱۲ـ در گراف گذر سیگنال مقابل تابع انتقال بین ورودی R و خروجی C چیست؟



۱) $\frac{G_۱G_۴}{۱+h+G_۱}$　　۲) $\frac{G_۱G_۲G_۳+G_۱G_۴}{۱+h+G_۱}$

۳) $\frac{G_۱G_۲h+G_۱G_۲G_۳}{(۱+h)(۱+G_۱)}$　　۴) $\frac{G_۱G_۲G_۳+G_۱G_۴(۱+h)}{(۱+h)(۱+G_۱)}$

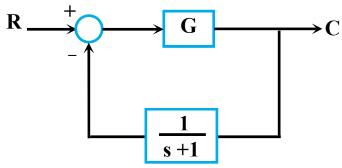
۱۳ـ تابع تبدیل $\frac{C}{R}$ در شکل زیر را به دست آورید.



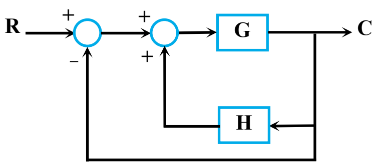
۱) $\frac{G_۱G_۲}{۱+G_۲H_۲}$　　۲) $\frac{G_۱G_۲}{۱+G_۱H_۱+G_۲H_۲}$

۳) $\frac{G_۲(G_۱+H_۱)}{۱+G_۲H_۲}$　　۴) $\frac{G_۲(G_۱+H_۱)}{۱+G_۱H_۱+G_۲H_۲}$

۱۴ـ در شکل (الف) دیاگرام بلوکی یک سیستم داده شده است. H در شکل (ب) چه باشد تا دو سیستم حلقه بسته با هم معادل شوند؟



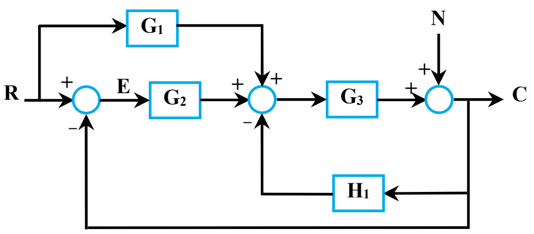
(الف)



(ب)

۱) $\frac{s+۲}{s+۱}$　　۲) $\frac{s+۱}{s+۲}$　　۳) $\frac{s}{s+۱}$　　۴) $\frac{s+۱}{s}$

۱۵ـ تابع تبدیل $\frac{E}{N}$ در سیستم مقابل کدام است؟



۱) $\frac{-۱}{۱+G_۲G_۳}$　　۲) $\frac{۱}{۱+G_۲G_۳+G_۳H_۱}$

۳) $\frac{-۱}{۱+G_۲G_۳+G_۳H_۱}$　　۴) $\frac{-G_۱G_۳}{۱+G_۲G_۳}$

۱۶ـ در سؤال (۱۵) تابع تبدیل $\frac{C}{N}$ چیست؟

۱) $\frac{۱}{۱+G_۲G_۳}$　　۲) $\frac{G_۱G_۳+G_۲G_۳}{۱+G_۳(G_۲+H_۱)}$　　۳) $\frac{۱}{۱+G_۳(G_۲+H_۱)}$　　۴) $\frac{-۱}{۱+G_۲G_۳G_۱}$

۱۷ـ در نمایش فضای حالت کدام‌یک از ماتریس‌های نمایش اطلاعات مربوط به پایداری را دربردارد؟

۱) ماتریس سیستم (A)　　۲) ماتریس ورودی (B)　　۳) ماتریس خروجی (C)　　۴) ماتریس ارتباط مستقیم (D)

۱۸ـ در نمایش فضای حالت کدام‌یک از ماتریس‌های نمایش اطلاعات مربوط به درجه نسبی سیستم را دربردارد؟

۱) ماتریس سیستم (A)　　۲) ماتریس ورودی (B)　　۳) ماتریس خروجی (C)　　۴) ماتریس ارتباط مستقیم (D)

۱۹ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد نمایش فضای حالت سیستم LTI تک ورودی ـ تک خروجی صحیح است؟

۱) $D=\lim\limits_{s\to\infty}H(s)$

۲) $D=\lim\limits_{s\to 0}H(s)$

۳) $D=\dfrac{\lim\limits_{s\to 0}H(s)}{\lim\limits_{s\to\infty}H(s)}$

۴) ماتریس D را نمی‌توان از روی تابع تبدیل سیستم تعیین نمود.

۲۰ـ می‌دانیم دو سیستم با نمایش‌های فضای حالت $\begin{cases}\dot{z}=\hat{A}z+\hat{B}v\\ t=\hat{C}z\end{cases}$ و $\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ t=Cx\end{cases}$ **دوگان یکدیگرند. در این صورت:**

۱) $\begin{cases}A=\hat{A}\\ B=\hat{B}\\ C=\hat{C}\end{cases}$

۲) $\begin{cases}A=\hat{A}^T\\ B=\hat{B}^T\\ C=\hat{C}^T\end{cases}$

۳) $\begin{cases}A=\hat{A}^T\\ B=\hat{C}^T\\ C=\hat{B}^T\end{cases}$

۴) رابطه خاصی لزوماً بین ماتریس‌های $\begin{cases}A,B,C\\ \hat{A},\hat{B},\hat{C}\end{cases}$ برقرار نیست.

۲۱ـ کدام سیستم داده شده، همواره هم کنترل‌پذیر و هم رویت‌پذیر است.

۱) $\overset{\circ}{x}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۲\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}۱\\ \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}u \quad , \quad y=\begin{bmatrix}۲ & ۰\end{bmatrix}x$

۲) $\overset{\circ}{x}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}u \quad , \quad y=\begin{bmatrix}c_۱ & c_۲\end{bmatrix}x$

۳) $\overset{\circ}{x}=\begin{bmatrix}۳ & -۴\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}۱\\ \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}u \quad , \quad y=\begin{bmatrix}c_۱ & c_۲\end{bmatrix}x$

۴) $\overset{\circ}{x}=\begin{bmatrix}۳ & ۴\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}b_۱\\ b_۲\end{bmatrix}u \quad , \quad y=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\end{bmatrix}x$

۲۲ـ معادلات فضای حالت سیستم G داده شده است. به ازای کدام مقدار $K\neq ۰$ تابع تبدیل سیستم حلقه بسته به همراه فیدبک خروجی $u=r-y$ از مرتبه یک می‌شود.

$$\overset{\circ}{x}=\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۰ & -۳\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}u \quad , \quad y=\begin{bmatrix}K & ۱\end{bmatrix}x$$

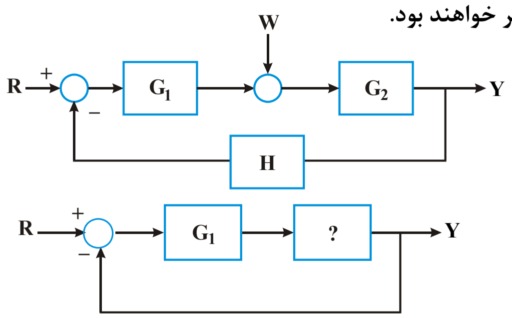
۱) $K=-۱$

۲) $K=۱$

۳) $K=۲$

۴) $K=-۲$

۲۳ـ دو بلوک زیر را در نظر بگیرید، به ازای چه تابع تبدیلی دو بلوک دیاگرام معادل یکدیگر خواهند بود.



۱) $\dfrac{G_۲}{۱+G_۱G_۲H}$

۲) $\dfrac{G_۲}{۱+G_۱H}$

۳) $\dfrac{G_۱+G_۱G_۲H}{۱+G_۱G_۲H}$

۴) این دو بلوک دیاگرام نمی‌توانند معادل باشند.

۲۴ـ ماتریس انتقال حالت سیستمی داده شده است. ماتریس A این سیستم کدام است؟

$$Q(t)=\begin{bmatrix}۲-e^{-۲t} & ۱-e^{-۲t}\\ ۲e^{-۲t}-۲ & ۲e^{-۲t}-۱\end{bmatrix}$$

۱) $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$

۲) $A=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ -۴ & -۴\end{bmatrix}$

۳) $A=\begin{bmatrix}-۲ & -۲\\ ۴ & ۴\end{bmatrix}$

۴) $A=\begin{bmatrix}۲ & -۴\\ -۴ & ۲\end{bmatrix}$

۲۵ـ کدام خاصیت در مورد ماتریس انتقال حالت درست است؟

۱) $[Q(t_۱)]^k[Q(t_۲)]^{\frac{۱}{k}}=Q(t_۱)Q(t_۲)$

۲) $Q^۲(t)=۲Q(t)$

۳) $Q(t\frac{۱}{k}+kt_۲)=[Q(t_۱)]^{\frac{۱}{k}}[Q(t_۲)]^k$

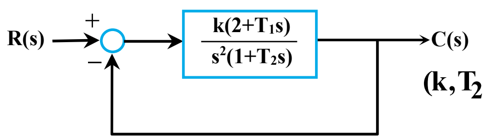
۴) $\dfrac{dQ(t)}{dt}=A$

فصل دوم

«تحلیل پایداری سیستم‌های LTI»

تست‌های تألیفی فصل دوم

مثال۱ : در سیستم مقابل:



$(k, T_2 > 0)$

۱) وقتی $T_1 > 2T_2$ باشد، سیستم حلقه ـ بسته پایدار است.

۲) سیستم حلقه بسته به ازای $k \geq 0$ همواره پایدار است.

۳) سیستم حلقه بسته بستگی به k نداشته و همواره ناپایدار است.

۴) سیستم حلقه بسته فقط به ازای $k > 0$ پایدار است.

پاسخ: گزینه «۱»

روش اول: معادله مشخصه سیستم برابر است با:

$$\Delta(s) = T_2s^3 + s^2 + kT_1s + 2k = 0$$

آرایه روث را به صورت روبه‌رو تشکیل می‌دهیم:

s^3	T_2	kT_1
s^2	1	$2k$
s^1	$k(T_1 - 2T_2)$	0
s^0	$2k$	

برای پایدار بودن، باید عناصر ستون اول آرایه روث، مثبت باشند. بنابراین باید $k > 0$ ،$T_2 > 0$ و $T_1 > 2T_2$ باشد.

روش دوم: معادله مشخصه سیستم برابر است با:

$$\Delta(s) = T_2s^3 + s^2 + T_1ks + 2k = 0$$

بدون تشکیل آرایه روث می‌توان پایداری سیستم‌های مرتبه سوم را بررسی کرد. شرایط لازم برای پایداری عبارتند از:

$$T_2 > 0 \ , \ T_1 > 0 \ , \ k > 0$$

شرط اول (هم علامت بودن ضرایب): دو فرض $k > 0$ و T_2 در سؤال وجود دارد، پس کافی است $T_1 > 0$ باشد.

شرط دوم: از آن‌جایی که $T_2 > 0$ داده شده است، برای پایداری باید داشته باشیم: $1 \times kT_1 > 2kT_2 \rightarrow T_1 > T_2$ با برقرار رابطه‌ی $T_1 > T_2$ نیازی به شرط $T_1 > 0$ نیست؛ چون خود به خود برقرار می‌گردد.

مثال۲: سیستمی با معادله مشخصه $s^4 + ks^3 + s^2 + s + 1 = 0$ توصیف می‌شود. گستره تغییرات k برای پایداری سیستم کدام است؟

۱) $k > 0$

۲) $k > 1$

۳) $1 < k < 2/72$

۴) این سیستم به ازاء هیچ مقدار k پایدار نمی‌باشد.

پاسخ: گزینه «۴»

$$\Delta(s) = s^4 + ks^3 + s^2 + s + 1 = 0$$

برای پایداری باید همه عناصر ستون اول آرایه روث هم علامت باشند.

بنابراین:

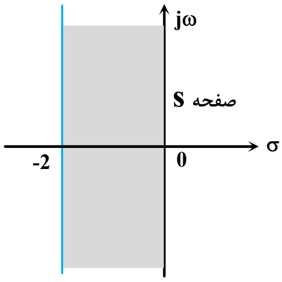
s^4	1	1	1
s^3	k	1	0
s^2	$\frac{k-1}{k}$	1	
s^1	A	0	
s^0	1		

$$A = \frac{\frac{k-1}{k} - k}{\frac{k-1}{k}} = \frac{k-1-k^2}{k-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k - 1 > 0 \\ k - 1 - k^2 > 0 \end{cases}$$

شرایط پایداری سازگار نیست، لذا گزینه (۴) صحیح است.

مثال ۳: معادله مشخصه سیستمی عبارت است از: $s^{۳}+۵s^{۲}+۱۱s+۱۵=\circ$. ناحیه مشخص شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. این معادله مشخصه:



۱) یک ریشه در ناحیه هاشورزده شده دارد.

۲) دو ریشه در ناحیه هاشورزده شده دارد.

۳) سه ریشه در ناحیه هاشورزده شده دارد.

۴) ریشه‌ای در ناحیه هاشورزده شده ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای حل این سؤال دو بار معیار روث ـ هرویتز را اجرا می‌کنیم. معادله مشخصه عبارت است از:

$$\Delta(s)=۱+L(s)=s^{۳}+۵s^{۲}+۱۱s+۱۵=\circ$$

$$\begin{array}{c|cc} s^{۳} & ۱ & ۱۱ \\ s^{۲} & ۵ & ۱۵ \\ \hline s^{۱} & ۸ & \circ \\ s^{\circ} & ۱۵ & \end{array}$$

بنابراین سیستم حلقه بسته پایدار است و تمامی قطب‌های آن سمت چپ محور $j\omega$ قرار دارند.

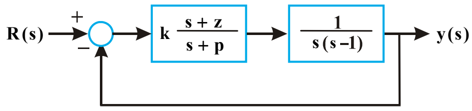
اکنون با تغییر متغیر $s\to s-۲$، پایداری سیستم جدید را بررسی می‌کنیم:

$$\Delta(s-۲)=s^{۳}-s^{۲}+۳s+۵=\circ$$

$$\begin{array}{c|cc} s^{۳} & ۱ & ۳ \\ s^{۲} & -۱ & ۵ \\ \hline s^{۱} & ۸ & \circ \\ s^{\circ} & ۵ & \end{array}$$

لذا سیستم جدید دو ریشه سمت راست دارد، به این معنی که دو ریشه حلقه بسته در ناحیه هاشورخورده قرار می‌گیرند، زیرا سیستم اولیه پایدار بوده است.

مثال ۴: سیستم نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید.



اگر $z>\circ$ و $p>\circ$ شرایط پایداری سیستم حلقه بسته را مورد تحلیل قرار دهید.

☑ **پاسخ:** معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارت است از:

$$\Delta(s)=s^{۳}+(p-۱)s^{۲}+(k-p)s+kz=\circ$$

آرایه روث را به صورت مقابل تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{c|cc} s^{۳} & ۱ & k-p \\ s^{۲} & p-۱ & kz \\ s^{۱} & A & \circ \\ s^{\circ} & ۱ & \end{array}$$

به‌طوری‌که $A=\dfrac{(p-۱)(k-p)-kz}{p-۱}$، برای پایداری باید داشته باشیم:

$$k>\circ\,,\ p>۱\,,\ A>\circ$$

دقت کنید که z و p در صورت سؤال مثبت فرض شده‌اند. مثبت بودن A نتیجه می‌دهد:

$$(p-۱)(k-p)-kz>\circ$$

و به عبارتی دیگر:

$$k(p-۱-z)>p(p-۱)$$

اگر $z<p-۱$ آنگاه، $p-۱-z>\circ$ و لذا هر مقدار k به‌طوری‌که:

$$k>\frac{p(p-۱)}{p-۱-z}$$

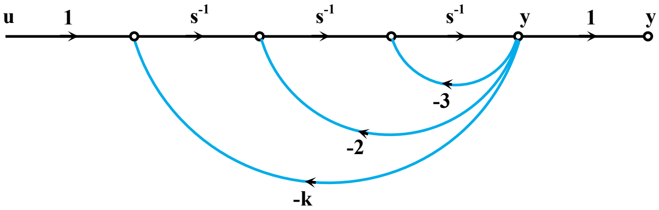
با فرض $p>۱$ به پایداری حلقه بسته منجر خواهد شد.

اما اگر $z>p-۱$ یا $z=p-۱$ شرایط پایداری سیستم حلقه بسته به ازای هیچ مقدار حقیقی بهره $\circ<k<\infty$ برقرار نخواهد شد.

بنابراین شرایط پایداری حلقه بسته به شکل مقابل خلاصه می‌شود:

$$\begin{cases} p>۱ \\ z<p-۱ \\ k>\dfrac{p(p-۱)}{p-۱-z} \end{cases}$$

مثال۵: محدوده بهره فیدبک (k) را چنان بیابید تا سیستم نشان داده شده با دیاگرام حالت زیر پایدار باشد.



۱) $k > ۰$
۲) $k < ۶$
۳) $۰ < k < ۶$
۴) $k > ۶$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» ابتدا معادله مشخصه سیستم را از روی دترمینان گراف به دست می‌آوریم، سپس آرایه روث را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta(s) = ۱ - \left(-\frac{۳}{s} - \frac{۲}{s^۲} - \frac{k}{s^۳}\right) = ۱ + \frac{۳}{s} + \frac{۲}{s^۲} + \frac{k}{s^۳} \Rightarrow \Delta(s) = ۰ \Rightarrow s^۳ + ۳s^۲ + ۲s + k = ۰$$

طبق نکته مطرح شده برای پایداری سیستم‌های مرتبه سوم باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} k > ۰ \\ ۳\times۲ > k \rightarrow k < ۶ \rightarrow ۰ < k < ۶ \end{cases}$$

بدون تشکیل جدول به محدوده k دست یافتیم. در صورت تکمیل جدول داریم:

$$\begin{array}{c|cc} s^۳ & ۱ & ۲ \\ s^۲ & ۳ & k \\ s^۱ & \frac{۶-k}{۳} & ۰ \\ s^۰ & k & ۰ \end{array}$$

برای پایداری باید $k > ۰$ و $\frac{۶-k}{۳} > ۰$ باشد. بنابراین باید $۰ < k < ۶$ باشد.

مثال۶: اگر بدانیم معادله $s^۵ + s^۴ + ۲s^۳ + ۲s^۲ + s + ۱ = ۰$ به شکل $(s^۲ + a)^n Q(s) = ۰$ قابل تجزیه است، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $a = ۱$ و $n = ۲$ و $Q(s)$ از درجه یک و ریشه آن در $s = -۲$ واقع است.
۲) $a = ۲$ و $n = ۱$ و $Q(s)$ از درجه سه و ریشه‌های آن در -۱، $-۲ \pm j$ واقع است.
۳) $a = ۱$ و $n = ۲$ و $Q(s)$ از درجه یک و ریشه آن در $s = -۱$ واقع است.
۴) $a = ۲$ و $n = ۱$ و $Q(s)$ از درجه سه و ریشه آن قابل محاسبه نیست.

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» ابتدا آرایه روث را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{c|ccc} s^۵ & ۱ & ۲ & ۱ \\ s^۴ & ۱ & ۲ & ۱ \\ s^۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ s^۲ & & & \\ s^۱ & & & \\ s^۰ & & & \end{array}$$

با توجه به این‌که سطر $s^۳$ صفر می‌شود، معادله کمکی به شکل: $s^۴ + ۲s^۲ + ۱ = (s^۲ + ۱)^۲$ فاکتوری از معادله مشخصه خواهد بود و لذا $a = ۱$ و $n = ۲$.
دقت کنید که تکمیل جدول اطلاعات جدیدی را به‌دست نمی‌دهد.

طبیعی است که در این حالت $Q(s)$ از درجه یک خواهد بود. برای تعیین ریشه آن داریم:

$$s^۵ + s^۴ + ۲s^۳ + ۲s^۲ + s + ۱ = (s^۴ + ۲s^۲ + ۱)(s + p)$$

و از برابری دو معادله به سادگی نتیجه می‌شود که $P = ۱$ و لذا ریشه $Q(s)$ در $s = -۱$ واقع است.

مثال۷: تابع تبدیل حلقه یک سیستم کنترل با فیدبک واحد به شکل $L(s) = \frac{k}{s(۱+T_۱s)(۱+T_۲s)}$ مفروض است. حدود پایداری سیستم برابر است با:

۱) $k > \frac{T_۱ + T_۲}{T_۱T_۲}$
۲) $۰ < k < \frac{T_۱ + T_۲}{T_۱T_۲}$
۳) $k > \frac{T_۱T_۲}{T_۱ + T_۲}$
۴) $۰ < k < \frac{T_۱T_۲}{T_۱ + T_۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» معادله مشخصه سیستم عبارت است از:

$$\Delta(s) = T_۱T_۲s^۳ + (T_۱ + T_۲)s^۲ + s + k = ۰$$

$$\begin{array}{c|cc} s^۳ & T_۱T_۲ & ۱ \\ s^۲ & T_۱ + T_۲ & k \\ s^۱ & A & ۰ \\ s^۰ & k & \end{array} \Rightarrow T_۱, T_۲ > ۰$$

برای پایداری باید $A>0$ و $k>0$ باشد.

$$A=\frac{T_1+T_2-kT_1T_2}{T_1+T_2}=1-\frac{kT_1T_2}{T_1+T_2}>0\Rightarrow\frac{kT_1T_2}{T_1+T_2}<1\to k<\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$$

مثال ۸: تابع تبدیل حلقه سیستمی عبارت است از: $L(s)=\frac{k(1+T_d s)}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$، حدود k برای پایداری سیستم حلقه بسته در کدام گزینه به درستی آمده است؟

۱) $k>\frac{T_1+T_2}{T_1T_2-T_d}$

۲) $0<k<\frac{T_1+T_2}{T_1T_2-T_d(T_1+T_2)}$

۳) $0<k<\frac{T_1+T_2}{(T_1T_2)T_d-T_1T_2}$

۴) $k>\frac{T_1T_2}{T_1+T_2-T_d}$

پاسخ : گزینه «۲» برای بررسی پایداری به معادله مشخصه سیستم نیازمندیم.

$$\Delta(s)=T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s+kT_ds+k=0$$

برای پایداری باید $k>0$ و $A>0$ باشد.

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & T_1T_2 & 1+kT_d \\ s^2 & T_1+T_2 & k \\ s^1 & A & 0 \\ s^0 & k & \end{array}$$

$$A=\frac{(T_1+T_2)(1+kT_d)-kT_1T_2}{T_1+T_2}>0\Rightarrow 1+kT_d-\frac{kT_1T_2}{T_1+T_2}>0$$

$$\Rightarrow k\left(\frac{-T_d(T_1+T_2)+T_1T_2}{T_1+T_2}\right)<1\Rightarrow k<\frac{T_1+T_2}{T_1T_2-T_d(T_1+T_2)}$$

مثال ۹: در معادله $\Delta(s)=(s^2-1)^{17}(s-5)$، تغییر علامت‌ها در ستون اول آرایه روث به چه صورت خواهد بود؟

پاسخ : دقت کنید که نیازی به محاسبه آرایه روث با ۳۵ سطر نیست و با توجه به ریشه‌های معادله، می‌توان وضعیت ستون اول آرایه روث را مشخص کرد. معادله $\Delta(s)$، ۳۵ ریشه دارد. ریشه‌های -1 و $s=1$ هفده بار و ریشه‌ی $s=5$، یکبار تکرار شده‌اند. چون ۱۸ ریشه سمت راست محور $j\omega$ قرار دارند، در ستون نخست آرایه روث، ۱۸ بار تغییر علامت خواهیم داشت.

همچنین به علت تکراری بودن ریشه‌های متقارن $s=1,-1$، در ابتدا سطرهای s^{33}، s^{31}، s^{29}، ...، s^1، صفر می‌شوند و باید بـا اسـتفاده از معادلـه کمکـی سطر بالای خود، جایگزین شوند. پس ۱۷ سطر فرد صفر داریم و در ستون اول جدول روث ۱۸ تغییر علامت وجود دارد.

مثال ۱۰: معادلات حالت و خروجی سیستمی عبارتند از:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & +k+1\\ -k-2 & -2k-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u(t) \qquad y(t)=[0\quad 1]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

به ازای چه مقدار از k سیستم پایدار است؟

۱) $k>-2$

۲) $-1>k>-2$

۳) به ازای $k>-1$ سیستم پایدار است.

۴) سیستم همواره پایدار است و به k بستگی ندارد.

پاسخ : گزینه «۳»

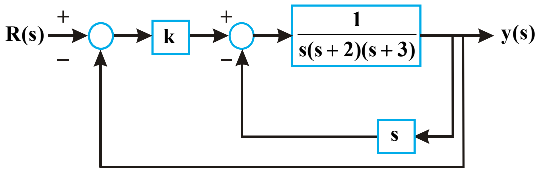
$$\Delta(s)=\mathrm{Det}(sI-A)=0\Rightarrow\Delta(s)=s^2+(2k+3)s+(k+1)(k+2)=0$$

شرایط پایداری آن است که ضرایب معادله فوق مثبت باشند. بنابراین از اشتراک حالت‌های ممکن داریم:

$$\begin{cases}2k+3>0\\ (k+1)(k+2)>0\end{cases}\Rightarrow k>-1$$

تست‌های تألیفی فصل دوم

۱ـ دیاگرام بلوکی سیستمی به شکل زیر مفروض است. بهره k چنان انتخاب می‌شود که سیستم جبران شده پایدار باشد. در این‌صورت:



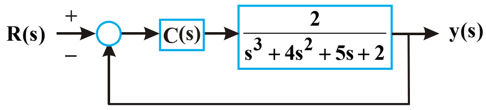
۱) $k > ۳۵$

۲) $۰ < k < ۷$

۳) $۰ < k < ۳۵$

۴) $k > ۷$

۲ـ سیستم نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید:



برای جبران‌سازی از یک کنترل‌کننده تناسبی ـ انتگرالی به شکل $C(s) = k_p + \frac{k_I}{s}$ استفاده می‌کنیم. به ازای $k_I = ۳$، بهره تناسبی k_p را بـه گونـه‌ای انتخاب می‌کنیم تا سیستم حلقه بسته پایدار باشد. سپس آن‌را به تدریج افزایش می‌دهیم تا سیستم به نوسانات پایدار برسد. در این صـورت بهـره k_p و پریود نوسانات پایدار کدام است؟

۱) $\begin{cases} k_p = ۳ \\ T = \pi\sqrt{۲} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} k_p = ۳ \\ T = \frac{۲\pi}{\sqrt{۳}} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} k_p = ۵ \\ T = \pi\sqrt{۲} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} k_p = ۵ \\ T = \frac{۲\pi}{\sqrt{۳}} \end{cases}$

۳ـ در سیستمی با معادله مشخصه $\Delta(s) = s^۵ + ۲s^۴ + ۶s^۳ + ۱۲s^۲ + ۹s + ۱۸ = ۰$ وضعیت پایداری و قرارگیری قطب‌ها چگونه است؟

۱) ناپایدار با دو ریشه سمت راست

۲) ناپایدار با یک ریشه سمت راست

۳) ناپایدار بدون ریشه سمت راست

۴) پایدار مرزی با ریشه‌های روی محور موهومی

۴ـ معادله $s^۸ + ۳s^۷ + ۵s^۶ + ۹s^۵ + ۹s^۴ + ۹s^۳ + ۷s^۲ + ۳s + ۲ = ۰$ چند جفت ریشه روی محور $j\omega$ دارد؟

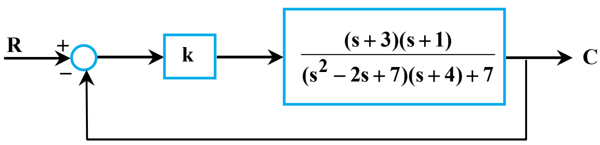
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) هیچ ریشه

۵ـ در سیستم شکل زیر، اگر سیستم نوسان با دامنه ثابت داشته باشد، k متناظر با سیستم نوسانی و فرکانس نوسان آن بـه طـور تقریبـی کـدام می‌تواند باشد؟



۱) امکان نوسانی شدن سیستم وجود ندارد

۲) $۲/۵ \ , \ \sqrt{۸}$

۳) $-۳/۵ \ , \ \sqrt{۹}$

۴) $۲/۵ \ , \ \sqrt{۹}$

۶ـ سیستمی با معادله مشخصه $\Delta(s) = s^{۱۰} + ۲s^۸ + ۶s^۶ + ۱۲s^۴ + ۹s^۲ + ۱۸ = ۰$ چند ریشه سمت چپ محور موهومی دارد؟

۱) ۵

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۲

۷ـ سیستم با تابع تبدیل حلقه بسته $T(s) = \frac{۱}{s^۳ + ۲(k+۱)s^۲ + (۵+۴k)s + ۱۰}$ را در نظر بگیرید. به ازای کدام مقدار از k سرعت پاسخ سیستم به ورودی پله از e^{-t} بیشتر است.

۱) $k > ۱$

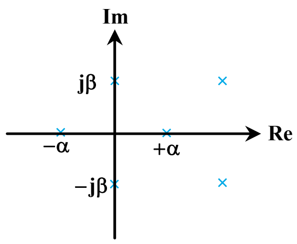
۲) $k < ۱$

۳) $k = ۱$

۴) چنین بهره kای وجود ندارد.

۸ـ جدول روث معادله مشخصه سیستمی در جدول مقابل رسم شده است، کدام‌یک از گزینه‌ها الزاماً غلط است.

s^6	x_1
s^5	x_2
s^4	x_3
s^3	$x_4 > 0$
s^2	x_5
s^1	x_6
s^0	x_7



۱) $x_1x_2 < 0$
۲) $x_5x_6 < 0$
۳) $x_3 > 0$
۴) $x_1x_3 > 0$

۹ـ کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر همه ضرایب معادله مشخصه هم‌علامت و غیرصفر باشند و چندجمله‌ای معادله مشخصه هرویتز باشد، آنگاه سیستم حلقه بسته حتماً پایدار داخلی است.

۲) اگر سطر s^1 در جدول روث صفر شود، کامل کردن جدول با روش ε و معادله کمکی به یک نتیجه می‌رسد.

۳) در یک معادله مشخصه از مرتبه ۷ اگر دو سطر s^5 و s^1 کاملاً صفر شود، تنها در صورتی سطر s^3 صفر نمی‌شود که دو تغییر علامت پس از سطر s^6 در ستون اول داشته باشیم.

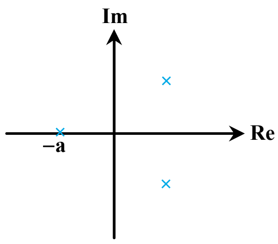
۴) در سیستم‌های کنترلی با تابع تبدیل حلقه $kG(s)$ کاهش بهره k می‌تواند باعث ناپایداری حلقه بسته شود.

۱۰ـ معادله مشخصه سیستمی به صورت $\Delta(s) = s^5 + s^4 + 10s^2 + 9ks + 9 = 0$ است. به ازای چه مقداری از بهره k سیستم در مرز ناپایداری قرار می‌گیرد؟ همچنین در این حالت دوره تناوب نوسانات سیستم کدام است؟

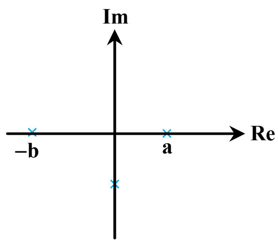
۱) $T = 2\pi\,,\ k = 1$
۲) $T = \frac{2\pi}{3}\,,\ k = 1$
۳) $T = \frac{4\pi}{3}\,,\ k = 1$
۴) $T = \frac{2\pi}{3}\,,\ k = 2$

۱۱ـ معادله مشخصه سیستمی به صورت ضرب دو چندجمله‌ای $\Delta(s) = A(s)B(s)$ است. موقعیت قطب‌های $A(s)$ و $B(s)$ در شکل زیر نشان داده شده است. کدام گزینه الزاماً درست است.

s^7	x_1
s^6	x_2
s^5	$x_3 < 0$
x^4	$x_4 > 0$
s^3	x_5
s^2	x_6
s^1	x_7
s^0	x_8



ریشه‌های $A(s)$



ریشه‌های $B(s)$

۱) $x_6 < 0$
۲) $x_1x_8 < 0$
۳) $x_6x_7 < 0$
۴) $x_2x_5 > 0$

۱۲ـ سیستمی با معادله $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = \dot{r} + r$ توصیف شده است که در آن شرایط اولیه به صورت $\begin{cases} x(0) = \alpha \\ \dot{x}(0) = \beta \end{cases}$ است. ورودی $r(t)$ و شرایط اولیه را به گونه‌ای بیابید تا خروجی سیستم همواره صفر شود.

۱) $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ r(t) = e^{t} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} \alpha = \text{آزاد} \\ \beta = -1 \\ r(t) = e^{-t} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -1 \\ r(t) = e^{-t} \end{cases}$

۴) چنین حالتی امکان‌پذیر نیست.

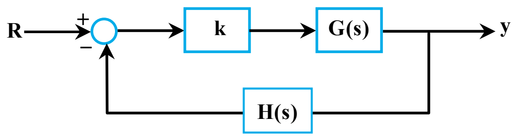
۱۳ـ تابع تبدیل حلقه سیستم با فیدبک واحد منفی به صورت $G(s) = \dfrac{s+1}{s^5 + s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$ است. مقدار اولیه و مقدار نهایی پاسخ پله سیستم کدام است؟

۱) $y(0^+) = 0$ ، $y(\infty) = \frac{1}{2}$
۲) $y(0^+) = 0$ ، $y(\infty) = 1$
۳) $y(0^+) = \infty$ ، $y(\infty) = \infty$
۴) $y(0^+) = 0$ ، $y(\infty) = \infty$

۱۴ـ در معادله حالت $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-۲ & ۰\\ ۰/۵ & -۲\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}۰\\ b\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}۱ & -۱\end{bmatrix}x\end{cases}$ در صورتی که شرایط اولیه $x_۰=\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}$ و سیستم کاملاً کنترل‌ناپذیر باشد، خروجی سیستم در چه زمانی صفر می‌شود؟

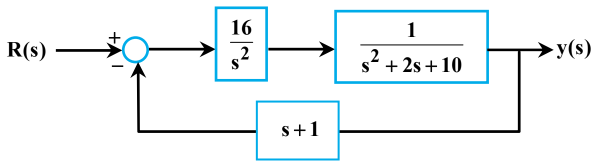
۱) ۱
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۴

۱۵ـ سیستم کنترلی داده شده به ازای $k<۰/۱$ پایدار است. اگر به جای $G(s)$ تابع تبدیل $\frac{۱}{۲G(s)}$ و به جای $H(s)$ تابع تبدیل $\frac{۲}{H(s)}$ را قرار دهیم، سیستم به دست آمده به ازای چه مقداری از k پایدار است؟



۱) $k>۱۰$
۲) $k<۱۰$
۳) $k<۰/۱$
۴) $k>۰/۱$

۱۶ـ در سیستم حلقه بسته زیر به ازای ورودی $r(t)=A\sin\omega t$ خروجی نامحدود شده است. ω کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) ۲

پاسخنامه تست‌های تألیفی فصل دوم

۱ــ گزینه «۳» ابتدا معادله مشخصه سیستم جبران شده یا حلقه بسته را از رابطه $\Delta(s) = 1 + L(s) = 0$ به‌دست می‌آوریم. دقت کنید که تابع تبدیل حلقه داخلی به صورت مقابل است:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{s(s+2)(s+3)}}{1+\frac{1}{(s+2)(s+3)}} = \frac{1}{s[(s+2)(s+3)+1]} = \frac{1}{s(s^2+5s+7)}$$

و لذا خواهیم داشت:

$$\Delta(s) = 1 + kG(s) = 0$$

بنابراین قبل از تشکیل جدول طبق نکته مطرح شده برای پایداری سیستم‌های مرتبه سوم باید داشته باشیم $\begin{cases} k > 0 \\ 5\times 7 > k \end{cases}$ پس $0 < k < 35$ است.

$$\Delta(s) = s^3 + 5s^2 + 7s + k = 0$$

با تشکیل آرایه روث داریم:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 7 \\ s^2 & 5 & k \\ s^1 & 35-k & 0 \\ s^0 & k & \end{array}$$

برای پایداری باید داشته باشیم: $0 < k < 35$

۲ــ گزینه «۴» معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارت است از:

$$\Delta(s) = 1 + C(s)\left(\frac{2}{s^3+4s^2+5s+2}\right) = 0$$

و با جایگذاری $C(s) = k_p + \frac{3}{s}$ داریم:

$$\Delta(s) = s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2(1+k_p)s + 6 = 0$$

آرایه روث را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 5 & 6 \\ s^3 & 4 & 2+2k_p & 0 \\ s^2 & \frac{18-2k_p}{4} & 6 & \\ s^1 & A & 0 & \\ s^0 & 6 & & \end{array}$$

بنابراین داریم:

$$A = \frac{(18-2k_p)(2+2k_p)-96}{(18-2k_p)}$$

برای این که سیستم حلقه بسته نوسانی باشد، باید $A = 0$. در این‌حالت ستون اول نیز نباید تغییر علامتی داشته باشد.

بنابراین:

$$(18-2k_p)(2+2k_p)-96 = 0$$

و یا:

$$k_p^2 - 8k_p + 15 = 0$$

این معادله به ازای $k_p = 3$ و $k_p = 5$ برآورده می‌شود. دقت کنید که k_p ابتدا به گونه‌ای انتخاب شده تا سیستم حلقه بسته پایدار باشد. از آرایه روث شرط پایداری حلقه بسته عبارت است از:

$$\begin{cases} 18-2k_p > 0 \\ A > 0 \end{cases}$$

و یا:

$$\begin{cases} k_p < 9 \\ -k_p^2 + 8k_p - 15 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_p < 9 \\ \text{و} \\ 3 < k_p < 5 \end{cases}$$

و بنابراین $3 < k_p < 5$ شرط پایداری سیستم حلقه بسته است. با افزایش k_p در این‌حالت تا مرز نوسان تنها جواب $k_p = 5$ قابل قبول می‌باشد.

در این‌حالت:

$$A = 0$$

و از معادله کمکی داریم:

$$2s^2 + 6 = 0 \Rightarrow s^2 + 3 = 0$$

لذا فرکانس نوسانات پایدار $\sqrt{3}$ و پریود این نوسانات $T = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ است.

۳ـ گزینه «۳» از آرایه روث استفاده می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|ccc l}
s^۵ & ۱ & ۶ & ۹ & \\
s^۴ & ۲ & ۱۲ & ۱۸ & \rightarrow\ p_۱(s)=s^۴+۶s^۲+۹ \\
s^۳ & \overset{\cancel{۴}\,۱}{\cancel{۰}} & \overset{\cancel{۱۲}\,۳}{\cancel{۰}} & & \dfrac{dp_۱}{ds}=۴s^۳+۱۲s \\
s^۲ & ۶ & ۱۸ & & \rightarrow\ p_۲(s)=s^۲+۳ \\
s^۱ & \overset{۲}{\cancel{۰}} & & & \dfrac{dp_۲}{ds}=۲s \\
s^۰ & ۱۸ & & &
\end{array}$$

از آنجایی که دو سطر تمام صفر اتفاق افتاده است، لذا ریشه مضاعف روی محور موهومی داریم و سیستم ناپایدار است و عامل ناپایداری نیز همین ریشه‌های مضاعف روی محور موهومی هستند و نه ریشه‌های سمت راست (چون تغییر علامتی وجود ندارد).

۴ـ گزینه «۳» برای معادله زیر، آرایه روث را تشکیل می‌دهیم.

$$\Delta(s)=s^۸+۳s^۷+۵s^۶+۹s^۵+۹s^۴+۹s^۳+۷s^۲+۳s+۲=۰$$

$$\begin{array}{c|cccc}
s^۸ & ۱ & ۵ & ۹ & ۷ & ۲ \\
s^۷ & ۳ & ۹ & ۹ & ۳ & \\
\hline
s^۶ & ۱ & ۳ & ۳ & ۱ & \\
s^۵ & ۰ & ۰ & ۰ & &
\end{array}
\longrightarrow \text{معادله کمکی}\ \ s^۶+۳s^۴+۳s^۲+۱=۰\rightarrow(s^۲+۱)^۳=۰$$

بنابراین سیستم حلقه بسته سه جفت ریشه روی محور موهومی دارد و نیازی به ادامه جدول نخواهد بود. اگر جدول را تکمیل کنیم، سطرهای $s^۳$ و $s^۱$ کاملاً صفر می‌شوند. همچنین معادلات کمکی آن‌ها نیز به ترتیب $A_۲(s)=(s^۲+۱)^۲$ و $A_۱(s^۲)=(s^۲+۱)$ می‌باشد. دقت کنید چون سیستم قطب مکرر از مرتبه ۳ روی $s=\pm j$ دارد، ناپایدار است. جدول تکمیل شده برای این معادله مشخصه به صورت زیر است:

$$\begin{array}{c|ccccc l}
s^۸ & ۱ & ۵ & ۹ & ۷ & ۲ & \\
s^۷ & ۳ & ۹ & ۹ & ۳ & ۰ & \\
s^۶ & ۱ & ۳ & ۳ & ۱ & & \rightarrow\ A_۱(s^۲)=s^۶+۳s^۴+۳s^۲+۱ \\
s^۵ & \cancel{۶}۱ & \cancel{۱۲}۲ & \cancel{۶}۱ & & & A'_۱(s^۲)=۶s^۵+۱۲s^۳+۶s \\
s^۴ & ۱ & ۲ & ۱ & & & \rightarrow\ A_۲(s^۲)=s^۴+۲s^۲+۱ \\
s^۳ & \cancel{۴}۱ & \cancel{۴}۱ & & & & A'_۲(s^۲)=۴s^۳+۴s \\
s^۲ & ۱ & ۱ & & & & \rightarrow\ A_۳(s^۲)=s^۲+۱ \\
s^۱ & \cancel{۲}۲ & & & & & A'_۳(s^۲)=۲s \\
s^۰ & ۱ & & & & &
\end{array}$$

همان‌طور که گفته شد، معادله مشخصه سه جفت ریشه روی $s=\pm j$ دارد.

۵ـ گزینه «۴»

$$\Delta(s)=۱+\frac{k(s+۳)(s+۱)}{(s^۲-۲s+۷)(s+۴)+۷}=۰\Rightarrow\Delta(s)=s^۳+(k+۲)s^۲+(۴k-۱)s+۳۵+۳k$$

آرایه روث را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{c|cc}
s^۳ & ۱ & ۴k-۱ \\
s^۲ & k+۲ & ۳k+۳۵ \\
s^۱ & \dfrac{۴k^۲+۴k-۳۷}{k+۲} & ۰ \\
s^۰ & ۳k+۳۵ &
\end{array}$$

برای نوسانی شدن باید سطر تمام صفر داشته باشیم، پس:

$$۴k^۲+۴k-۳۷=۰\Rightarrow k=-۳/۵۸\ \text{ و }\ ۲/۵۸$$

به ازای $k=-۳/۵۸$، در ستون اول تغییر علامت داریم و سیستم ناپایدار می‌شود، لذا فقط $k=۲/۵$ قابل قبول است.

$$(k+۲)s^۲+(۳k+۳۵)=۰\xrightarrow{k=۲/۵۸}۴/۵۸s^۲+۴۲/۷۴=۰\Rightarrow s^۲\simeq-۱۰/۶۸\ \Rightarrow s\simeq j\sqrt{۱۰/۶۸}$$

۶ـ گزینه «۲» با فاکتورگیری معادله مشخصه را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\Delta(s) = s^8(s^2+2) + 6s^4(s^2+2) + 9(s^2+2) = (s^2+2)(s^8+6s^4+9) \Rightarrow \Delta(s) = (s^2+2)(s^4+3)^2 = 0$$

$$\begin{cases} s^2+2=0 \Rightarrow s=\pm j\sqrt{2} & \text{دو ریشه روی محور موهومی} \\ s^4+3=0 \Rightarrow \text{دو ریشه سمت راست} \;,\; \text{دو ریشه سمت چپ} & \Rightarrow (s^4+3)^2=0 \Rightarrow \text{چهار ریشه سمت راست} \;,\; \text{چهار ریشه سمت چپ} \end{cases}$$

بنابراین در کل چهار ریشه سمت راست محور موهومی، چهار ریشه سمت چپ محور موهومی و دو ریشه روی محور موهومی دارد.

۷ـ گزینه «۱» برای این که سرعت پاسخ سیستم حلقه بسته به ورودی پله از e^{-t} بیشتر باشد، باید قطب‌های حلقه بسته سمت چپ خط $\delta=-1$ قرار بگیرند، چون e^{-t} متناظر با تبدیل لاپلاس $\frac{1}{s+1}$ است و هرچه به مبدأ نزدیک‌تر شویم، سرعت پاسخ کندتر می‌شود. پس کافی است $\Delta(s-1)$ را تشکیل داده و شرط قرارگیری ریشه‌ها در سمت چپ خط $\delta=-1$ را بررسی کنیم.

$$\Delta(s-1) = (s-1)^3 + 2(k+1)(s-1)^2 + (5+4k)(s-1) + 10 = s^3 + (2k-1)s^2 + 4s + (6-2k)$$

شرط پایداری معادله مشخصه فوق $(2k-1)\times 4 > 6-2k$ است. در نتیجه $k>1$ باید باشد. از آن جایی که سؤال سرعت پاسخ بیشتر از e^{-t} می‌خواهد، پس $k=1$ نیز درست نخواهد بود؛ چون در این صورت قطب روی خط $\delta=-1$ قرار می‌گیرد.

۸ـ گزینه «۲» باید به ریشه‌های معادله مشخصه و محل قرارگیری آن‌ها دقت شود. معادله مشخصه ۴ ریشه متقارن نسبت به مبدأ دارد که مکرر نیستند. همچنین یکی از این ریشه‌ها در سمت راست قرار دارد. علاوه بر این ریشه، دو ریشه غیرمتقارن نیز در سمت راست قرار دارد. پس باید ۳ تغییر علامت در ستون اول داشته باشیم. چون ۴ ریشه متقارن داریم، حتماً سطر s^3 به طور کامل صفر شده است و علامت $x_4>0$ مربوط به معادله کمکی می‌شود.

یعنی معادله کمکی به صورت مقابل است.

$$A(s^2) = x_3 s^4 + \cdots$$

$$A'(s^2) = 4x_3 s^3 + \cdots \Rightarrow 4x_3 = x_4 > 0 \Rightarrow x_3 > 0$$

پس گزینه (۳) درست است.

چون دو ریشه غیرمتقارن سمت راست قرار دارد، باید قبل از معادله کمکی دو تغییر علامت داشته باشیم. پس تنها حالت ممکن $x_1>0$ و $x_2<0$ است، یعنی گزینه (۱) همواره درست است.

بعد از معادله کمکی یعنی سطر s^4 باید یک تغییر علامت داشته باشیم، پس حالت‌های ممکن به صورت زیر هستند.

$$\begin{cases} x_5 < 0 \\ x_6 < 0 \\ x_7 < 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x_5 > 0 \\ x_6 > 0 \\ x_7 < 0 \end{cases}$$

یعنی $x_5 x_6 > 0$ است. پس این گزینه الزاماً غلط است.

۹ـ گزینه «۴» گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): با استفاده از معادله مشخصه نمی‌توان به پایداری داخلی سیستم پی برد، حتی اگر تمامی شروط پایداری BIBO برای سیستم فراهم باشد. چون حذف صفر و قطب ناپایدار در تابع تبدیل حلقه بسته سیستم ظاهر نمی‌شوند.

گزینه (۲): صفر شدن سطر s^1 را تنها با روش معادله کمکی باید تکمیل کرد و امکان یا حق استفاده از روش ε را نداریم، به طور مثال معادله مشخصه $\Delta(s)=s^2+1=0$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم این سیستم نوسانی است. با تشکیل جدول روث داریم:

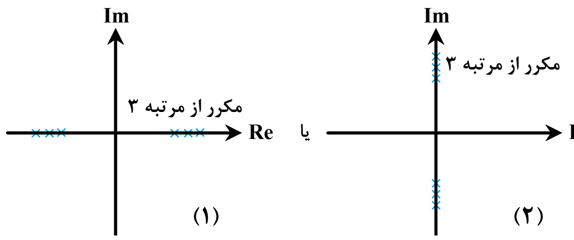
روش ε:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & \cancel{0}\,\varepsilon & \\ s^0 & 1 & \end{array}$$

اگر ε مثبت فرض شود، هیچ تغییر علامتی نداریم و سیستم پایدار است و اگر ε منفی فرض شود دو تغییر علامت وجود دارد که دو نتیجه متفاوت برای روش ε است. می‌دانیم که فرض $\varepsilon>0$ یا $\varepsilon<0$ باید یک نتیجه واحد در مورد پایداری سیستم را بدهند.

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & \cancel{0}\,2 & \\ s^0 & 1 & \end{array} \quad \Rightarrow A(s^2) = s^2+1 \;,\; A'(s^2) = 2s$$

گزینه (۳): اگر در معادله مشخصه‌ای از مرتبه ۷ دو سطر s^5 و s^1 کاملاً صفر شـوند، سطر s^3 زمانی به طور کامل صفر می‌شود که سه تغییر علامت داشته باشیم یا هـیچ تغییر علامتی وجود نداشته باشد. توجه کنید زمـانی کـه دو سـطر s^5 و s^1 بـه طـور کامل صفر شده‌اند، پس حتماً ریشه مکرر از مرتبه دو در سیستم وجود دارد. با توجه به این که ۶ ریشه متقارن نسبت به مبدأ وجود دارد، حالت‌هـای ممکـن بـرای صـفر شدن سطر s^3 به صورت مقابل است:



در حالت اول ۳ تغییر علامت و در حالت دوم صفر تغییر علامتی در ستون اول وجود دارد. یعنی برای صفر نشدن سطر s^3 هم می‌تواند یک تغییر علامـت و هم می‌تواند دو تغییر علامت وجود داشته باشد.

گزینه (۴): سیستم‌هایی با معادله مشخصه $\Delta(s) = s^3 + ks^2 + 2s + 5$ به ازای $k > \frac{5}{2}$ همواره پایدار است؛ یعنی کـاهش بهـره مـی‌توانـد باعـث ناپایـداری سیستم حلقه بسته گردد. پس این گزینه صحیح است.

۱۰ـ گزینه «۱» جدول روث را برای معادله مشخصه داده شده به دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 10 & 9k \\
s^4 & 1 & 10 & 9 \\
s^3 & \cancel{6}\ 1 & \cancel{9k-9}\ \cancel{6}\ 5 & \rightarrow\ 9k-9=0\ \rightarrow\ k=1 \\
s^2 & 5 & 9 & \\
s^1 & \frac{16}{5} & & \\
s^0 & 9 & &
\end{array}$$

معادله کمکی سطر s^4 به صورت مقابل است:

$$A(s^2) = s^4 + 10s^2 + 9 = 0 \Rightarrow A'(s^2) = 4s^3 + 20s$$

برای به دست آوردن دوره تناوب نوسانات سیستم باید $A(s^2)$ را تجزیه کنیم.

$$A(s^2) = (s^2+1)(s^2+9) = 0 \Rightarrow s^2 + 1 = 0 \Rightarrow \omega_1 = 1\,rad/s \Rightarrow T_1 = 2\pi$$

$$\Rightarrow s^2 + 9 = 0 \Rightarrow \omega_2 = 3\,rad/s \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{3}$$

توجه کنید که در صورت پایداری سیستم، سیستم همواره با بزرگ‌ترین تناوب به دست آمده نوسان می‌کنـد. البتـه لازم بـه ذکـر اسـت کـه در ایـن سـؤال دوره‌های تناوب به دست آمده مضرب صحیحی از هم هستند؛ یعنی داریم: $T_1 = 3T_2$. اگر دوره‌های تناوب مضرب صحیحی از هم نباشند، نوسانات سیسـتم از حالت سینوسی خارج می‌شود و شکل‌های نامتعارفی پیدا می‌کند.

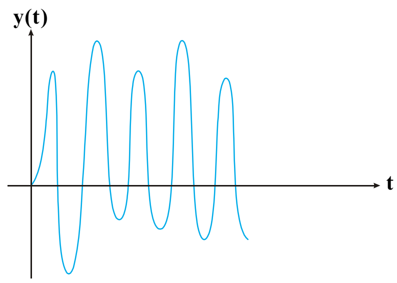
توضیح بیشتر: به طور مثال اگر معادله کمکی به صورت $A(s^2) = (s^2+2)(s^2+1)$ باشد، در این صورت دوره تناوب برابر است با:

$$s^2 + 2 = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{2}\ ,\ T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

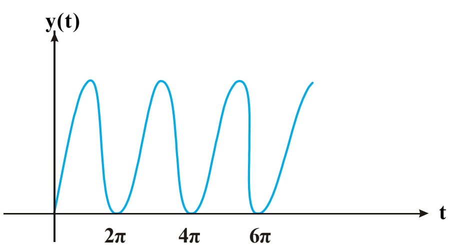
$$s^2 + 1 = 0 \Rightarrow \omega_2 = 1\ ,\ T_2 = 2\pi$$

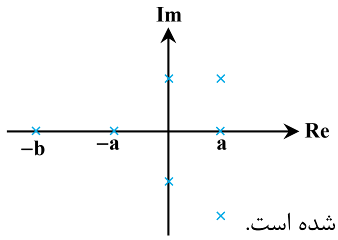
در این حالت $T_2 = \sqrt{2}T_1$ است، یعنی دوره‌های تناوب به دست آمده مضرب صحیحی از هم نیستند.

پاسخ پله این‌گونه سیستم‌ها به صورت مقابل است:



در حالی که پاسخ پله سیستم قبلی صورت اصلی سؤال به صورت زیر است:





۱۱ـ گزینه «۲» موقعیت کلی ریشه‌های $\Delta(s)$ در شکل مقابل نشان داده شده است. از موقعیت ریشه‌ها می‌توان حالت‌های مختلف علامت‌های ممکن برای جدول روث را تعیین کرد.

ـ چهار ریشه متقارن نسبت به مبدأ وجود دارد ← حتماً سطر s^3 کاملاً صفر شده و از روی معادله کمکی سطر s^4 پر شده است.

ـ سه ریشه سمت راست محور موهومی وجود دارد. یک ریشه مربوط به چهار ریشه متقارن است و دو ریشه دیگر نسبت به مبدأ متقارن نیستند.

پس در ستون اول باید سه تغییر علامت وجود داشته باشد که دو تغییر مربوط به قبل از سطر s^4 است و یک تغییر مربوط به بعد از سطر s^4.

با توجه به این اطلاعات حالت‌های ممکن برای ستون اول جدول را می‌توان به دست آورد. $x_5 > 0$ است؛ چون از روی معادله کمکی سطر s^4 تشکیل شده است. در واقع $x_5 = 4x_4 > 0$ است.

$$\left.\begin{matrix} x_4 > 0 \\ x_5 > 0 \end{matrix}\right\} \text{از پیش تعیین شده است}$$

$$\left.\begin{matrix} x_6 < 0 \\ x_7 < 0 \\ x_8 < 0 \end{matrix}\right\} \text{حالت اول:} \qquad \left.\begin{matrix} x_6 > 0 \\ x_7 > 0 \\ x_8 < 0 \end{matrix}\right\} \text{حالت دوم:}$$

همچنین داریم:

$$\left.\begin{matrix} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \end{matrix}\right\} \text{حالت اول:} \qquad \left.\begin{matrix} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{matrix}\right\} \text{حالت دوم:}$$

$$\left.\begin{matrix} x_3 < 0 \\ x_4 > 0 \end{matrix}\right\} \text{از پیش تعیین شده است}$$

با توجه به حالت‌های به دست آمده تنها گزینه‌ی (۲) صحیح می‌باشد.

۱۲ـ گزینه «۳»

ابتدا پاسخ ورودی صفر سیستم را به‌دست می‌آوریم:

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0 \;,\; x(0) = \alpha \;,\; \dot{x}(0) = \beta$$

$$x(t) = e^t(\alpha \cos t + \frac{\beta - \alpha}{2} \sin 2t)$$

پاسخ به ورودی سیستم را با در نظر گرفتن ورودی به صورت $R(s) = \frac{1}{s+\gamma}$ به‌دست می‌آوریم:

$$X(s) = \frac{s+1}{(s+\gamma)(s^2 - 2s + 5)}$$

اگر $\gamma < 0$ انتخاب شود یک مؤلفه به‌صورت $e^{-\gamma t}$ در پاسخ ظاهر می‌شود که به هیچ‌وجه صفر نمی‌شود، چون پاسخ سیستم میرایی نوسانی است.

پس $\gamma > 0$ فرض می‌کنیم و طبق گزینه‌ها $\gamma = 1$ را در نظر می‌گیریم.

$$X(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 5} \to x(t) = +\frac{e^t \sin 2t}{2}$$

پاسخ ورودی صفر و ورودی $R(s) = \frac{1}{s+1}$ را با هم جمع می‌کنیم:

$$x(t) = +\frac{e^t \sin 2t}{2} + e^t \alpha \cos 2t + \frac{\beta - \alpha}{2} e^t \sin 2t$$

اگر $\alpha = 0$ انتخاب شود با در نظر گرفتن $\beta = -1$ خروجی سیستم همواره صفر خواهد شد.

۱۳ـ گزینه «۴» ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته با فیدبک واحد منفی را به دست می‌آوریم.

$$T(s) = \frac{s+1}{s^5 + s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 3s + 2}$$

طبق قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی داریم:

$$y(0^+) = \lim_{s \to \infty} s \times \frac{s+1}{s^5 + s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 3s + 2} \times \frac{1}{s} = 0$$

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} s \times \frac{s+1}{s^5 + s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 3s + 2} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$$

دقت کنید که قضیه مقدار نهایی تنها زمانی قابل استفاده است که سیستم پایدار باشد. یعنی بدون بررسی پایداری جواب $\frac{۱}{۲}$ نمی‌تواند درست باشد.

جدول روث را برای معادله مشخصه تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{c|ccc} s^۵ & ۱ & ۴ & ۳ \\ s^۴ & ۱ & ۲ & ۲ \\ s^۳ & ۲ & ۱ & \\ s^۲ & \frac{۳}{۲} & ۲ & \\ s^۱ & -\frac{۵}{۳} & & \\ s^۰ & ۲ & & \end{array}$$

طبق جدول روث دو ریشه در سمت راست وجود دارد؛ یعنی سیستم حلقه بسته داده شده ناپایدار است و مقدار نهایی $\frac{۱}{۲}$ به طور قطع اشتباه است. مقدار نهایی سیستم ناپایدار بی‌نهایت است. توجه کنید که قضیه مقدار اولیه مستقل از پایداری سیستم است.

۱۴ـ گزینه «۳» توجه کنید که در این سؤال نیازی به تعیین مجهول b نداریم؛ چون به دنبال به دست آوردن پاسخ طبیعی سیستم هستیم. به همین دلیل کنترل‌پذیری یا کنترل‌ناپذیری تأثیری روی مسئله ندارد. تابع تبدیل سیستم به ازای شرایط اولیه داده شده را به دست می‌آوریم.

$$y(s)=C(sI-A)^{-۱}x_۰ \Rightarrow y(s)=[۱ \quad -۱]\begin{bmatrix} s+۲ & ۰ \\ -۰/۵ & s+۲\end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}=\frac{s+\frac{۳}{۲}}{s^۲+۴s+۴}$$

$$y(s)=\frac{۱}{s+۲}+\frac{-\frac{۱}{۲}}{(s+۲)^۲}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-۱}} y(t)=e^{-۲t}-\frac{۱}{۲}te^{-۲t}$$

$$y(t)=۰ \Rightarrow e^{-۲t}(۱-\frac{۱}{۲}t)=۰ \Rightarrow t=۲$$

۱۵ـ گزینه «۲» ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را به دست می‌آوریم.

$$T(s)=\frac{kG(s)}{۱+kGH(s)}$$

در واقع معادله مشخصه سیستم $\Delta(s)=۱+kGH(s)=۰$ است که داریم:

$$k=-\frac{۱}{GH}$$

برای پایداری باید داشته باشیم:

$$-\frac{۱}{GH}<\frac{۱}{۱۰} \Rightarrow -۱۰<GH$$

تابع تبدیل حلقه بسته جدید به سمت مقابل است:

$$T(s)=\frac{kH(s)}{GH(s)+k}$$

در نتیجه داریم:

$$\Delta(s)=GH(s)+k=۰ \Rightarrow k=-GH(s)\ ,\ GH>-۱۰ \Rightarrow k<۱۰$$

یعنی سیستم به ازای $k<۱۰$ پایدار می‌باشد. توجه کنید که این حالت زمانی امکان‌پذیر است که تابع تبدیل $G(s)$ و $H(s)$ سره باشند.

۱۶ـ گزینه «۳» خروجی سیستم در حالتی نامحدود می‌شود که در ستون اول جدول روث تغییر علامت داشته باشیم یا ریشه‌های مکرر روی محور موهومی قرار بگیرند. اگر در ستون اول جدول روث تغییر علامت داشته باشیم، مستقل از ورودی، خروجی به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. از آن‌جایی که خروجی به واسطه‌ی ورودی $r(t)=A\sin\omega t$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، باید سیستم یک جفت قطب موهومی داشته باشد و فرکانس ورودی نیز در همین نقطه قرار بگیرد؛ تا جفت قطب موهومی داشته باشیم و سیستم ناپایدار گردد.

جدول روث برای این سیستم به صورت مقابل است.

$$T(s)=\frac{۱۶}{s^۴+۲s^۳+۱۰s^۲+۱۶s+۱۶}$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^۴ & ۱ & ۱۰ & ۱۶ \\ s^۳ & \cancel{۲}\ ۱ & \cancel{۱۶}\ ۸ & \\ s^۲ & \cancel{۲}\ ۱ & \cancel{۱۶}\ ۸ & \to \quad A(s^۲)=s^۲+۸=۰ \Rightarrow s=\pm ۲\sqrt{۲}j \\ s^۱ & ۰ & & \\ s^۰ & ۸ & & \end{array}$$

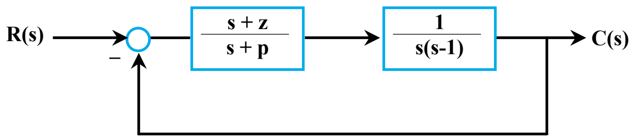
پس اگر فرکانس ورودی $۲\sqrt{۲}$ انتخاب شود، خروجی سیستم به بی‌نهایت میل می‌کند. یعنی گزینه (۳) صحیح است.

آزمون فصل دوم

۱ـ اگر یک قطب در $s=-2$ به سیستم کنترلی که تابع تبدیل حلقه باز آن با معادله $G(s)H(s)=\dfrac{k(s+3)}{s^2}$ داده شده است اضافه کنیم، در $k>0$ کدام‌یک از تغییرات زیر در مورد سیستم اتفاق می‌افتد؟

۱) از نوسانی به پایدار ۲) از ناپایدار به پایدار ۳) از پایدار به نوسانی ۴) از پایدار به ناپایدار

۲ـ بلوک نشان داده شده در شکل زیر مفروض است، با کدام شرط می‌توان سیستم حلقه بسته را پایدار نمود؟



$z,p>0$

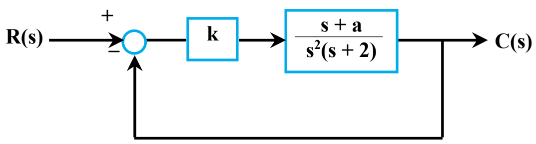
۱) $p=1$

۲) $p>1$

۳) $p<1$

۴) سیستم داده شده به ازای همه‌ی مقادیر $p>0$ و z ناپایدار است.

۳ـ سیستم کنترل شکل زیر را در نظر بگیرید. برای پایداری این سیستم حدود تغییرات a,k برابر است با:



۱) $k>0,\ 0<a<2$

۲) $k>0,\ a<2$

۳) $k>0,\ a>0$

۴) $k>0,\ a>2$

۴ـ در سیستمی که با معادلات حالت زیر توصیف شده است، حدود تغییرات k را برای پایداری سیستم به دست آورید.

$$\dot{x}_1(t)=2x_1(t)+3x_2(t)+x_3(t)+u_1(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=x_1(t)+2x_2(t)-x_3(t)+2u_2(t)$$
$$\dot{x}_3(t)=kx_1(t)+x_2(t)+u_1(t)+u_2(t)$$
$$y(t)=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)$$

۱) $k>\frac{1}{5}$

۲) $\frac{1}{5}<k<5$

۳) $k<\frac{1}{5}$ یا $k>5$

۴) سیستم به ازای کلیه مقادیر k ناپایدار است.

۵ـ معادلات حالت و خروجی سیستمی عبارتند از:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & k+1\\ -k-2 & -2k-3\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u(t)\ ,\ y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

به ازای چه مقادیری از k سیستم پایدار است؟

۱) $k>-2$ ۲) $-1>k>-2$

۳) $k>-1$ ۴) سیستم به ازای کلیه مقادیر k پایدار است.

۶ـ معادله مشخصه یک سیستم حلقه بسته عبارت است از: $s^4+4s^3+7s^2+16s+12=0$. این سیستم:

۱) یک ریشه حقیقی منفی، یک ریشه حقیقی مثبت و دو ریشه موهومی با فرکانس نوسان ۲ رادیان بر ثانیه دارد.

۲) سه ریشه حقیقی منفی و یک ریشه حقیقی مثبت دارد.

۳) دو ریشه منفی و دو ریشه موهومی محض دارد که فرکانس نوسان آن ۲ رادیان بر ثانیه است.

۴) دو جفت ریشه مزدوج مختلط دارد که یک جفت آن قسمت حقیقی مثبت دارند.

۷ـ معادله مشخصه سیستمی به صورت $\Delta(s)=s^5+s^4+2s^3+s^2+s+k$ است، به ازای چه مقادیری از k سیستم پایدار است؟

۱) برای $0<k<35$ سیستم پایدار است. ۲) برای $10<k<35$ سیستم پایدار است.

۳) برای $k>35$ سیستم پایدار است. ۴) برای هیچ مقادیری از $k>0$ سیستم پایدار نیست.

۸ـ معادله مشخصه سیستمی عبارت است از:
$$\Delta(s) = s^{۵} + ۲s^{۴} + ۲s^{۳} + ۶s^{۲} + ۳s + ۳$$

در مورد پایداری این سیستم می‌توان گفت:

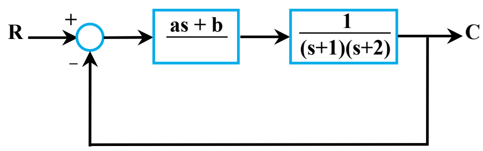
۱) سیستم حلقه بسته پایدار است.
۲) سیستم حلقه بسته یک ریشه سمت راست دارد.
۳) سیستم حلقه بسته دو ریشه سمت راست دارد.
۴) سیستم حلقه بسته سه ریشه سمت راست دارد.

۹ـ معادله مشخصه سیستمی به صورت مقابل مفروض است:
$$\Delta(s) = (s+۳)^{۳}(s+۲/۲۵)(s^{۲}+a)$$

در کدام‌یک از حالات زیر در جدول روث به سطر صفر خواهیم رسید؟

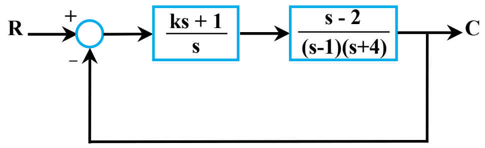
۱) فقط به ازای $a = ۰$
۲) $\forall a > ۰$
۳) $\forall a < ۰$
۴) $\forall a$

۱۰ـ در سیستم کنترل شکل زیر پارامترهای کنترل‌کننده چگونه انتخاب شوند تا سیستم حلقه بسته پایدار باشد؟



۱) $a > \frac{b}{۳} - ۲$
۲) $a > \frac{b}{۳}$
۳) $\begin{cases} a < \frac{b}{۳} - ۲ \\ b > ۰ \end{cases}$
۴) $\begin{cases} a > \frac{b}{۳} - ۲ \\ b > ۰ \end{cases}$

۱۱ـ در سیستم کنترل شکل مقابل حدود k برای پایداری حلقه بسته چیست؟

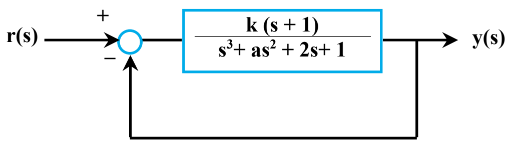


۱) $k > ۰$
۲) $-۳ < k < ۰$
۳) $۰ < k < ۳$
۴) به ازای هیچ مقدار k سیستم پایدار نخواهد بود.

۱۲ـ معادله دیفرانسیل یک سیستم مکانیکی شامل جرم ـ فنر و دمپر به همراه کنترل‌کننده به شکل $m\frac{d^{۳}x}{dt^{۳}} + c\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}} + k\frac{dx}{dt} + krx = ۰$ مفروض است که m ، c ، k و r ثابت‌های مثبت هستند. تحت چه شرایطی حرکت این سیستم پایدار خواهد بود؟

۱) $r < \frac{c}{m}$
۲) $r < \frac{m}{c}$
۳) $kr < \frac{c}{m}$
۴) این سیستم همواره پایدار است.

۱۳ـ به ازای چه مقدار از k و a سیستم مقابل در فرکانس $۲\frac{rad}{Sec}$ نوسان می‌کند؟

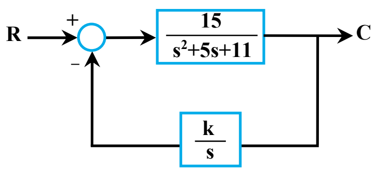


۱) $k = ۱ \ , \ a = ۰$
۲) $k = ۲ \ , \ a = ۰/۷۵$
۳) $k = ۲ \ , \ a = ۱/۲۵$
۴) $k = ۱/۲۵ \ , \ a = ۱/۷$

۱۴ـ در یک معادله مشخصه، ضرایب معادله مختلف‌العلامه هستند. کدام گزینه در مورد پایداری سیستم کنترل متناظر صحیح است؟

۱) سیستم حلقه بسته قطعاً ناپایدار است.
۲) سیستم حلقه بسته ممکن است ناپایدار باشد.
۳) سیستم حلقه بسته ناپایدار است و به تعداد تغییر علامت در معادله مشخصه قطب ناپایدار دارد.
۴) سیستم حلقه بسته قطعاً قطب‌های موهومی محض دارد.

۱۵ـ در سیستم شکل زیر k را چنان بیابید که سیستم حلقه بسته پایدار باشد.



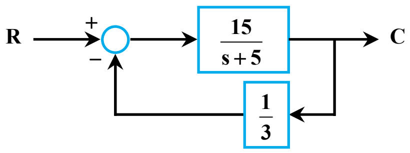
۱) $k < \frac{۳}{۱۱}$
۲) $۰ < k < \frac{۳}{۱۱}$
۳) $k > \frac{۱۱}{۳}$
۴) $۰ < k < \frac{۱۱}{۳}$

فصل سوم

« تحلیل پاسخ گذرا »

تست‌های تألیفی فصل سوم

مثال ۱: ثابت زمانی مؤثر سیستم نشان داده شده در شکل زیر برابر است با:



۱) ۱

۲) $\frac{۲}{۳}$

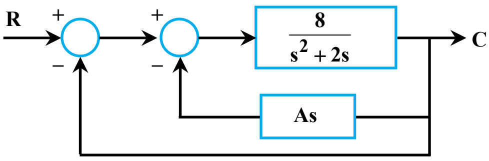
۳) ۵

۴) ۰/۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تابع تبدیل سیستم حلقه بسته را به دست می‌آوریم:

$$\frac{C}{R}=\frac{\frac{15}{s+5}}{1+\frac{5}{s+5}}=\frac{15}{s+10}=\frac{1/5}{0/1s+1}$$

مثال ۲: در سیستم زیر به ازای کدام مقدار ثابت فیدبک مشتقی (A) نسبت میرایی ξ برابر ۰/۸ خواهد شد؟



۱) ۰/۳

۲) ۰/۹

۳) ۲/۵

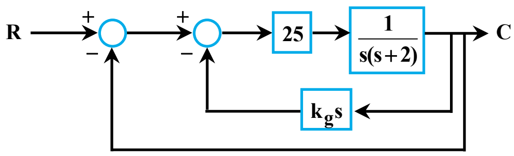
۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» معادله مشخصه سیستم به صورت روبه‌رو است:

$$\Delta(s)=s^2+(2+8A)s+8=0$$

از معادله‌ی مشخصه، $\omega_n^2=8$ و $2\zeta\omega_n=2+8A$ به دست می‌آید. به ازای $\xi=0/8$ داریم: $A\simeq 0/3$

مثال ۳: در سیستم نشان داده شده در شکل زیر بهره k_g را چنان بیابید که نسبت میرایی قطب‌های حلقه بسته $\xi=0/7$ باشد.



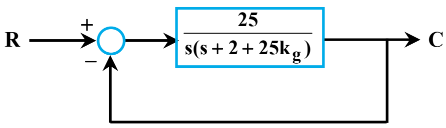
۱) $k_g=2$

۲) $k_g=0/1$

۳) $k_g=1$

۴) $k_g=0/2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با ساده‌سازی حلقه داخلی داریم:



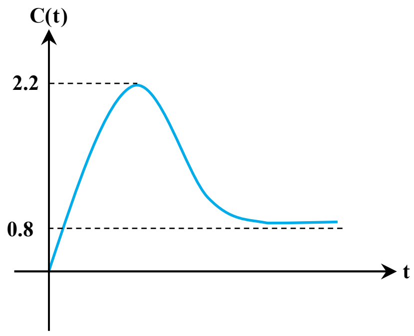
از مقایسه با شکل حلقه باز سیستم الگوی مرتبه دوم با فیدبک واحد داریم:

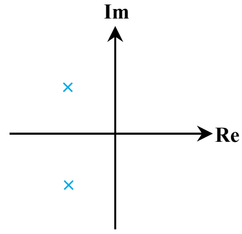
$$\frac{25}{s(s+2+25k_g)}=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

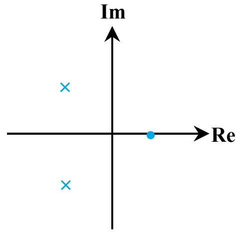
لذا: $\omega_n=5$ و $2\zeta\omega_n=2+25k_g$ و بنابراین می‌توان نوشت:

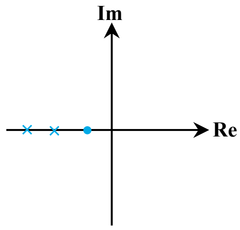
$$25k_g=2(0/7)(5)-2\Rightarrow k_g=0/2$$

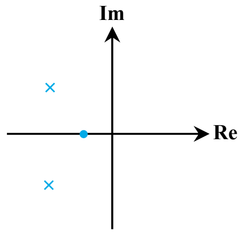
مثال۴: شکل زیر پاسخ پله یک سیستم حلقه بسته است. محل قرارگیری قطب و صفرهای سیستم حلقه بسته کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از آنجایی که پاسخ پله هیچ نوسانی ندارد، اما در آن فراجهش دیده می‌شود. مشخص است که سیستم قطب مختلط نـدارد و یـک صفر نزدیک محور موهومی باعث ایجاد فراجهش شده است. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

مثال۵: تابع حلقه بسته سیستمی با فیدبک واحد منفی عبارت است از:

$$H(s)=\frac{2}{s+1}+\frac{\alpha}{s+2}$$

محدوده α (α حقیقی) را چنان بیابید که پاسخ پله واحد سیستم فروجهش داشته باشد.

۱) $-2<\alpha<-1$ ۲) $\alpha>-4$ ۳) $-4<\alpha<-2$ ۴) $\alpha<-2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» بدین منظور تابع تبدیل حلقه بسته باید صفری در سمت راست محور موهومی داشته باشد.

$$H(s)=\frac{2(s+2)+\alpha(s+1)}{(s+1)(s+2)}=\frac{(2+\alpha)s+4+\alpha}{(s+1)(s+2)}\quad;$$ با توجه به پایداری حلقه بسته: $$s=\frac{-(4+\alpha)}{2+\alpha}>0\Rightarrow -4<\alpha<-2$$

مثال۶: تابع تبدیل حلقه بسته یک سیستم کنترل با فیدبک واحد منفی به صورت $H(s)=\frac{-s+1}{(s+1)^2}$ مفروض است. زمانی که پاسـخ پلـه سیسـتم حداکثر فروجهش (T_u) را از خود نشان می‌دهد برابر است با:

۱) $T_u=1\sec$ ۲) $T_u=0/5\sec$ ۳) $T_u=0/75\sec$ ۴) $T_u=1/2\sec$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در چنین شرایطی باید مشتق پاسخ پله یا پاسخ ضربه صفر شود. بنابراین داریم:

$$h(t)=L^{-1}\{H(s)\}=-e^{-t}+2te^{-t}=0\Rightarrow T_u=0/5\sec$$

مثال۷: ماتریس انتقال حالت $\varphi(t)$ متناظر با ماتریس سیستم $A=\begin{bmatrix}0 & +1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\begin{bmatrix}0 & e^{-2t}\\ 1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t})\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t})\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}e^{-2t} & \frac{1}{2}(1-e^{-2t})\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1 & e^{-2t}-1\\ 0 & \frac{1}{2}(e^{-2t}+1)\end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

روش اول: مسأله را در حوزه فرکانس حل می‌کنیم.

$$\varphi(t)=L^{-1}(sI-A)^{-1}$$

$$sI-A=\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s+2\end{bmatrix}\Rightarrow(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s(s+2)}\begin{bmatrix}s+2 & 1\\ 0 & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}\Rightarrow\varphi(t)=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t})\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$$

روش دوم: با توجه به خواص ماتریس انتقال حالت داریم:

$$\frac{d}{dt}[\varphi(t)]\bigg|_{t=0} = A$$

این خاصیت تنها برای گزینه (۲) صدق می‌کند، یعنی داریم:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = A$$

مثال ۸: نمایش فضای حالت سیستمی با ورودی صفر به شکل $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t)$ داده شده است، بـه ازای شـرایط اولیـه $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ کـدام گزینه صحیح است؟

۱) $x_2(t) = e^{-2t}$
۲) $x_2(t) = e^{-t}$
۳) $x_2(t) = e^{-t} - e^{-2t}$
۴) $x_2(t) = -e^{-t} + e^{-2t}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» کافی است ماتریس انتقال حالت را به دست آوریم.

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

$$e^{At} = L^{-1}((sI-A)^{-1}) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \Rightarrow x_2(t) = e^{-2t}$$

مثال ۹: اگر $e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه A کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مشتق ماتریس انتقال حالت در $t=0$ با ماتریس A برابر است. لذا:

$$\frac{d}{dt}e^{At}\bigg|_{t=0} = Ae^{At}\bigg|_{t=0} = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تست‌های تألیفی فصل سوم

۱ـ سیستمی با معادلات حالت و خروجی به شکل $\dot{x} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۲ & -k \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \end{pmatrix} u$ توصیف شده است. پارامتر k را چنان به‌دست آورید که نسبت میرایی پاسخ گذرای سیستم $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ باشد.

$$y=(۱ \quad ۰)x$$

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۲

۲ـ تابع تبدیل یک موتور DC با کنترل آرمیچر به شکل کلی $\frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{k_m}{\tau_m s+۱}$ مفروض است که در آن ω سرعت موتور و V ولتاژ اعمالی به موتور است. ولتاژ ورودی برابر ۵ ولت است و سرعت موتور در $t=۲$ ثانیه را برابر با $۳۵\frac{rad}{s}$ فرض می‌کنیم و سرعت نهایی موتور $\frac{V_۰ rad}{s}$ رادیان برثانیه است. پارامترهای k_m و τ_m عبارتند از: $(\ln ۲ = ۰/۷)$

۱) $\tau_m = ۲/۸۵, k_m = ۱۶$ ۲) $\tau_m = ۰/۳۵, k_m = ۱۶$ ۳) $\tau_m = ۰/۳۵, k_m = ۱۴$ ۴) $\tau_m = ۲/۸۵, k_m = ۱۴$

۳ـ کدام‌یک از سیستم‌های زیر در پاسخ به ورودی پله واحد فراجهش کمتری خواهد داشت؟

۱) $\frac{۱۵}{s^۲+۶s+۱۵}$ ۲) $\frac{۳(s+۵)}{s^۲+۶s+۱۵}$ ۳) $\frac{۷۵}{(s+۵)(s^۲+۶s+۱۵)}$ ۴) $\frac{۳(s+۲)}{s^۲+۶s+۱۵}$

۴ـ تابع تبدیل حلقه باز سیستمی با فیدبک واحد منفی به شکل $k>۰ \ , \ \tau>۰$ $G(s)=\frac{k}{s(\tau s+۱)}$ مفروض است. بهره k را به چه نسبتی تغییر دهیم تا نسبت میرایی پاسخ پله واحد سیستم از ۰/۱ به ۰/۴ تغییر کند؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۱۶ ۴) ۴

۵ـ تابع تبدیل $\frac{\omega_n^۲(۱+\alpha s)}{s^۲+۲\xi\omega_n s+\omega_n^۲}$ را در نظر بگیرید. $(\xi, \omega_n > ۰)$ کدام عبارت در مورد این سیستم صحیح است؟

الف) اگر $\alpha = ۰$، حداکثر جهش پاسخ پله واحد سیستم هیچ‌گاه بیش از ۱۰۰ درصد نمی‌شود.

ب) اگر $\alpha = ۰$، حداکثر جهش پاسخ پله واحد سیستم ممکن است بیش از ۱۰۰ درصد شود.

ج) اگر $\alpha \neq ۰$، حداکثر جهش پاسخ پله واحد سیستم ممکن است بیش از ۱۰۰ درصد شود.

۱) فقط الف ۲) فقط ب ۳) الف و ج ۴) ب و ج

۶ـ سیستمی با تابع تبدیل $\frac{-۲s+۱}{s^۲+۲s+۱}$ مفروض است. پاسخ پله واحد این سیستم دارای .... در زمان .... و به میزان حدوداً .... می‌باشد.

۱) فراجهش، $\frac{۲}{۳}$، ۰/۵ ۲) فروجهش، $\frac{۲}{۳}$، ۰/۵ ۳) فراجهش، $\frac{۳}{۴}$، ۰/۲ ۴) فروجهش، $\frac{۳}{۴}$، ۰/۲

۷ـ پاسخ سیستمی با تابع تبدیل $G_۱(s)=\frac{۱}{s^۲+۱/۲s+۱}$ به ورودی پله دارای جهش ۱۰% و زمان نشست تقریبی ۶sec با معیار ۲% است. در این صورت برای پاسخ سیستم $G_۲(s)=\frac{(۲s+۱)}{s^۲+۱/۲s+۱}$ به ورودی پله‌ای می‌توان گفت:

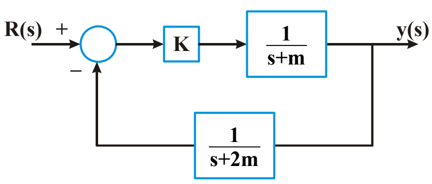
۱) دارای جهش کمتر از ۱۰% و زمان نشست کمتر از ۶ ثانیه است.

۲) دارای جهش بیشتر از ۱۰% و زمان نشست بیشتر از ۶ ثانیه است.

۳) دارای جهش بیشتر از ۱۰% و زمان نشست ۶ ثانیه است.

۴) دارای جهش بیشتر از ۱۰% و زمان نشست کمتر از ۶ ثانیه است.

۸ـ به ازای چه مقدار k، سیستم مقابل میرای بحرانی است؟



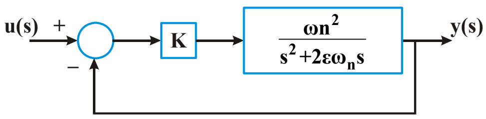
۱) $۰/۲۵m^۲ \ , \ m \in \mathbb{R}$

۲) $۰/۲۵m^۲ \ , \ m > ۰$

۳) $۰/۵m \ , \ m > ۰$

۴) $۰/۵m \ , \ m \in \mathbb{R}$

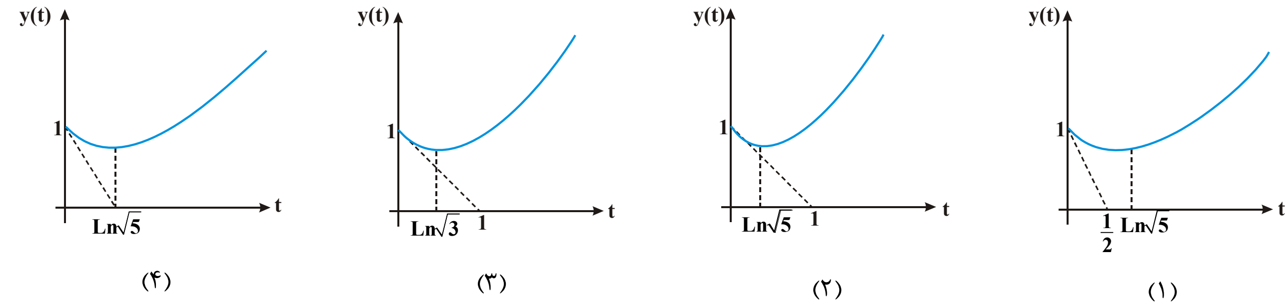
۹ـ در سیستم شکل زیر، برای دستیابی به سریع‌ترین پاسخ بدون بالازدگی و ضریب میرایی بیشتر از ۲ ثانیه، k کدام است؟



۱) $0 < k < \frac{4}{\omega_n^2}$ ۲) $k > \frac{4}{\omega_n}$

۳) $k > \frac{4}{\omega_n^2}$ ۴) $0 < k < \frac{4}{\omega_n}$

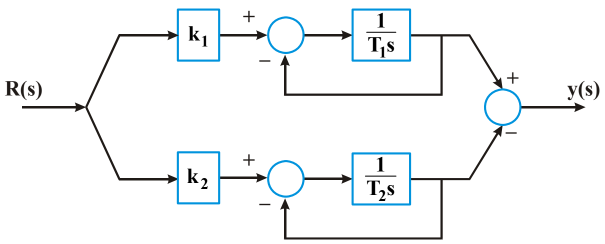
۱۰ـ اگر پاسخ ضربه یک سیستم LTI به صورت $h(t) = (2\sin t + \cos t)u(t)$ باشد و سیستم را به صورت معکوس ببندیم، پاسخ سیستم معکوس به چه صورت خواهد بود؟

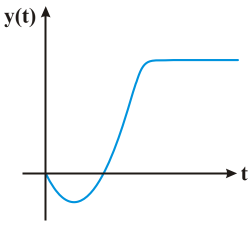


۱۱ـ سیستم کنترلی با پسخور منفی واحد و تابع تبدیل حلقه $G(s) = \frac{k}{s(s+4)^2}$ را در نظر بگیرید. مقدار k باید کدام باشد تا نسبت میرایی قطب‌های غالب برابر $\xi = 0/5$ باشد؟

۱) $k = 12$ ۲) $k = 6$ ۳) $k = 24$ ۴) $k = 64$

۱۲ـ سیستم کنترلی زیر را در نظر بگیرید. اگر پاسخ پله این سیستم به شکل زیر باشد، کدام گزینه در مورد ثابت‌های k_1، k_2، T_1 و T_2 صحیح است؟





۱) $k_1 > k_2 \, , \, \frac{k_2}{k_1} > \frac{T_2}{T_1}$ ۲) $k_1 > k_2 \, , \, \frac{k_2}{k_1} < \frac{T_2}{T_1}$

۳) $k_1 < k_2 \, , \, T_1 > T_2$ ۴) $k_1 < k_2 \, , \, T_2 > T_1$

۱۳ـ دو تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید. کدام عبارت درست است؟

$$G_1(s) = \frac{-(s-0/5)}{s^2+s+1} \, , \, G_2(s) = \frac{s+0/5}{s^2+s+1}$$

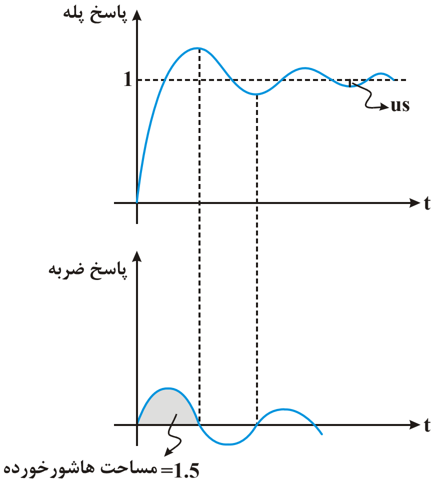
۱) میزان فراجهش تابع تبدیل G_1 با G_2 در پاسخ پله واحد برابر است.

۲) مجموع میزان فروجهش و فراجهش سیستم G_1 با فراجهش G_2 در پاسخ به پله واحد برابر است.

۳) به دلیل حضور صفر سمت راست در تابع تبدیل G_1 این سیستم فراجهش در پاسخ پله واحد نخواهد داشت.

۴) صفر سمت راست به تابع تبدیل G_1 باعث افزایش فراجهش در پاسخ پله نسبت به حالت استاندارد می‌گردد.

۱۴ـ پاسخ پله و ضربه یک سیستم مرتبه دوم استاندارد با $0 < \zeta < 1$ داده شده است. مقدار us کدام است؟



۱) ۰/۲۵

۲) ۰/۵

۳) ۰/۱۲۵

۴) $\frac{1}{16}$

۱۵ـ کدام عبارت صحیح است؟

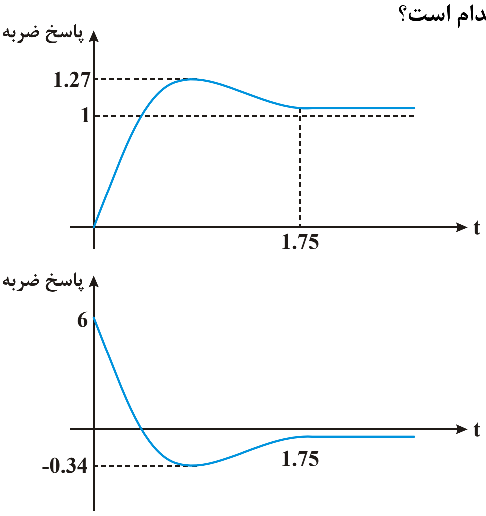
۱) اگر به تابع تبدیل $G(s)$ صفر $s=1$ اضافه شود، پاسخ پله آن به مفهوم BIBO فروجهش خواهد داشت.

۲) در سیستم مرتبه دوم استاندارد پایدار با میرایی شدید که فاصله دو قطب از هم بیش از ۵ برابر است اگر با سیستم مرتبه اول تقریب زده شود پاسخ ضربه سیستم اصلی و تقریب زده شده مشابه هم هستند.

۳) اگر به سیستم‌های مرتبه دوم استاندارد پایدار صفری در نزدیکی محور حقیقی که قطب‌ها نیز روی آن قرار دارند اضافه شود، رفتار سیستم با یک سیستم مرتبه اول قابل تقریب است.

۴) اگر به سیستم مرتبه دوم استاندارد صفری در مبدأ اضافه شود، میزان فراجهش آن در پاسخ پله واحد بی‌نهایت می‌شود.

۱۶ـ پاسخ پله و ضربه سیستم با معادلات حالت زیر داده شده است. مقدار پارامتر C_2 و C_1 کدام است؟



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [3 \quad c_1 \quad c_2]\, x$$

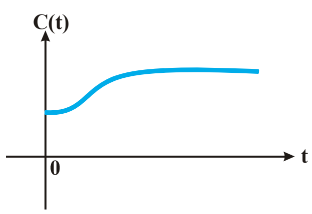
۱) $C_1 = C_2 = 3$

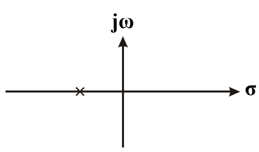
۲) $C_1 = 3$ ، $C_2 = 0$

۳) $C_1 = 0$ ، $C_2 = 3$

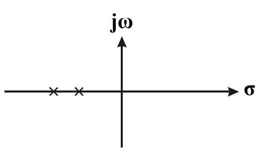
۴) $C_1 = C_2 = 0$

۱۷ـ پاسخ پله سیستمی به شکل زیر داده شده است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند نمودار قطب ـ صفر چنین سیستمی را بـه درسـتی نشـان دهد؟

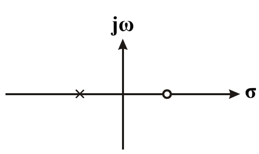




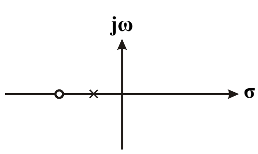
(۱)



(۲)

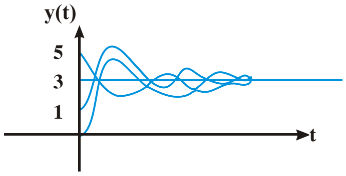


(۳)



(۴)

۱۸ـ شکل زیر پاسخ خروجی سیستمی را به ازای شرایط اولیه متفاوت و ورودی پله واحد نمایش می‌دهد. کدام گزینه نمی‌تواند تابع تبدیل چنین سیستمی باشد؟



۱) $\frac{2s+3}{4s^2+2s+1}$ ۲) $\frac{5s+2}{4s^2+2s+1}$

۳) $\frac{5s+2}{4s^2+4s+1}$ ۴) $\frac{s+3}{4s^2+4s+1}$

۱۹ـ کدام گزینه با توجه به عبارت‌های زیر صحیح است؟

گزاره اول: در یک سیستم مرتبه دوم میرای ضعیف ثابت زمانی پوش‌نمایی به ξ, ω_n وابسته است.

گزاره دوم: یک تقریب مناسب برای تابع تبدیل $\frac{600}{s(s+1)(s+15)(s+20)}$ به شکل $\frac{2}{s(s+1)}$ خواهد بود.

گزاره سوم: دریک سیستم مرتبه دوم میرای ضعیف با نسبت میرایی $\zeta = 0/1$ فرکانس نوسانات میرا با فرکانس نوسانات نامیرا تقریباً یکسان است.

۱) فقط گزاره دوم صحیح است. ۲) فقط گزاره اول نادرست است.

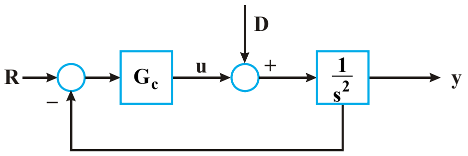
۳) گزاره‌های اول و دوم صحیح هستند. ۴) هرسه گزاره صحیح هستند.

۲۰ـ تابع تبدیل سیستمی به شکل $\frac{s+\frac{1}{2}}{s^2+2s+1}$ مفروض است. زمان جهش و اندازه فراجهش پاسخ پله واحد این سیستم در کدام گزینه به درستی آمده است؟

۱) $t=2$ و $MP=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2}$ ۲) $t=2$ و $MP=\frac{1}{2}e^{-2}$

۳) $t=\frac{1}{2}$ و $MP=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2}$ ۴) این سیستم میرای بحرانی است و فراجهشی در پاسخ پله ندارد.

۲۱ـ سیستم نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم جبران‌ساز پیش فازی طراحی کنیم که قطب‌های غالب حلقه بسته را در $-1\pm j$ قرار دهد تا درصد فراجهش پاسخ پله واحد کمتر از $16/3\%$ و زمان نشست دو درصد آن کمتر از ۴ ثانیه باشد و سایر قطب‌های حلقه بسته را در -5 قرار دهد، کدام گزینه تابع تبدیل این جبران‌ساز را به درستی نشان می‌دهد؟



۱) $\frac{7s+12}{s+10}$ ۲) $\frac{12s+10}{s+7}$

۳) $\frac{12s+7}{s+10}$ ۴) $\frac{10s+12}{s+7}$

پاسخنامه تست‌های تألیفی فصل سوم

۱ـ گزینه «۴» تابع تبدیل سیستم به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$T(s)=C(sI-A)^{-1}B+D=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+k\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow T(s)=\frac{1}{s^2+ks+2}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+k & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{s^2+ks+2}$$

برای پایداری کافی است $k>0$ باشد. در این حالت از مقایسه با سیستم مرتبه دوم الگو داریم:

$$\begin{cases}2\xi\omega_n=k\\ \omega_n^2=2\end{cases}\Rightarrow k=2(\frac{1}{\sqrt{2}})\sqrt{2}\Rightarrow k=2$$

۲ـ گزینه «۴»

$$\omega(s)=\frac{k_m}{\tau_m s+1}v(s)\Rightarrow\omega_\infty=\text{Lim}\,s\times\frac{k_m}{\tau_m s+1}\times\frac{5}{s}=70\to 5k_m=70\Rightarrow k_m=14$$

$$\omega(s)=\frac{14}{\tau_m s+1}\times\frac{5}{s}\Rightarrow\omega(s)=\frac{-70\tau_m}{\tau_m s+1}+\frac{70}{s}\Rightarrow\omega(t)=-70e^{-\frac{t}{\tau_m}}+70$$

$$\omega(2)=35\Rightarrow 35=70(1-e^{-\frac{2}{\tau_m}})\Rightarrow\frac{1}{2}=e^{-\frac{2}{\tau_m}}\Rightarrow -\text{Ln}2=-\frac{2}{\tau_m}\Rightarrow\tau_m=2/85$$

۳ـ گزینه «۳» قطب اضافه شده در $s=-5$ یک قطب حقیقی است که فراجهش قطب‌های مختلط مزدوج را کاهش می‌دهد. صفرهای اضافه شده در گزینه‌های (۲) یا (۴) در هر دو حالت فراجهش را نسبت به گزینه اول افزایش می‌دهند. توجه کنید که در همه‌ی گزینه‌ها عامل قطب مرتبه دوم $s^2+6s+15$ وجود دارد. محل قرارگیری قسمت حقیقی قطب‌ها روی خط $\delta=-3$ است و سیستم از نوع میرای ضعیف می‌باشد.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): این مدل، مدل الگوی مرتبه دوم است که فراجهش آن با فرمول $M_p=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ داده می‌شود.

گزینه (۲): این مدل صفری سمت چپ محل قرارگیری قطب‌های سیستم دارد. اگر صفر اضافه شده سمت چپ قطب‌های غالب قرار بگیرد اثر کمتری در فراجهش دارد و اگر سمت راست محل قرارگیری قطب‌های غالب تا محور موهومی باشد، اثر شدیدی روی فراجهش دارد. به همین دلیل بیشترین فراجهش را دارا می‌باشد.

گزینه (۳): در این گزینه قطب دیگری در $s=-5$ اضافه شده است که باعث میراترشدن سیستم گردد.

گزینه (۴): این مدل صفری سمت راست قطب‌های غالب سیستم تا محور موهومی دارد.

همچنین اگر بخواهیم میزان فراجهش را از کمترین یا بیشترین بنویسیم داریم: گزینه (۳)، گزینه (۱)، گزینه (۲) و گزینه (۴).

۴ـ گزینه «۱» معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارت است از:

$$\Delta(s)=\tau s^2+s+k=s^2+\frac{s}{\tau}+\frac{k}{\tau}=0$$

از مقایسه با سیستم مرتبه ۲ الگو داریم:

$$\begin{cases}2\xi\omega_n=\frac{1}{\tau}\\ \omega_n^2=\frac{k}{\tau}\end{cases}$$

بنابراین:

$$2\xi=\frac{1}{\sqrt{k\tau}}\ ,\ \omega_n=\sqrt{\frac{k}{\tau}}$$

لذا داریم: $\frac{k_1}{k_2}=(\frac{\frac{1}{\sqrt{k_2\tau}}}{\frac{1}{\sqrt{k_1\tau}}})^2=(\frac{\xi_2}{\xi_1})^2$ و یا: $\frac{k_1}{k_2}=(\frac{0/4}{0/1})^2$.

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{k_1}{k_2}=16\Rightarrow k_2=\frac{k_1}{16}$$

۵ـ گزینه «۳» در شرایطی که $\alpha \neq ۰$ باشد و صفر اضافه شده موقعیتی نزدیک‌تر به محور موهومی نسبت به قطبی‌های سیستم مرتبه ۲ الگو داشـته باشـد، حداکثر جهش سیستم می‌تواند به شدت افزایش یابد و به بیش از ۱۰۰ درصد نیز برسد. اما در شرایط $\alpha = ۰$ حداکثر جهش سیستم معادل حالت نوسانی و همان ۱۰۰ درصد خواهد بود.

۶ـ گزینه «۲» یک صفر سمت راست معادل پاسخ معکوس است.

نکته: اگر تابع تبدیل سیستمی تعداد فرد صفر سمت راست محور موهومی داشته باشیم، آنگاه در پاسخ پله سیستم همواره فروجهش خواهیم داشت.

$$y(s)=\frac{۱}{s}-\frac{۱}{s+۱}-\frac{۳}{(s+۱)^۲} \Rightarrow y(t)=۱-e^{-t}-۳te^{-t}\quad t\geq ۰\ ,\ \frac{dy}{dt}=۰ \Rightarrow t=\frac{۲}{۳}\ ,\ |y(\frac{۲}{۳})|=۰/۵۲$$

۷ـ گزینه «۲» صفر اضافه شده به سیستم در سمت راست قطب‌های مزدوج مختلط قرار دارد و لذا درصد جهش و زمان نشست را افزایش می‌دهد.

۸ـ گزینه «۲» تابع تبدیل حلقه بسته به صورت مقابل است:

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{k}{s+m}}{۱+\frac{k}{(s+m)(s+۲m)}}=\frac{k(s+۲m)}{s^۲+۳ms+۲m^۲+k}$$

میرایی بحرانی متناظر با $\xi = ۱$ است، پس داریم:

$$\begin{cases}\omega_n=\sqrt{۲m^۲+k}\\ ۲\omega_n=۳m\end{cases} \Rightarrow \omega_n \Rightarrow ۲m^۲+k=\frac{۹}{۴}m^۲ \Rightarrow k=\frac{۱}{۴}m^۲$$

دقت کنید که سیستم حلقه بسته تنها به ازای $m > ۰$ پایدار می‌باشد. پس به ازای $m > ۰$ می‌توان به میرایی بحرانی رسید.

۹ـ گزینه «۳» ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{y(s)}{R(s)}=\frac{k\omega_n^۲}{s^۲+۲\zeta\omega_n s+k\omega_n^۲}$$

ضریب میرایی بیشتر از ۲ ثانیه متناظر با $\xi\omega_n > ۲$ است و سریع‌ترین پاسخ بدون بالازدگی همان‌طور که می‌دانیم به گونه‌ای است که ریشه‌ها مکرر باشند. برای ضریب میرایی بیشتر از ۲ ثانیه باید داشته باشیم:

$$s\to s-۲ \to \Delta(s-۲)=(s-۲)^۲+۲\xi\omega_n(s-۲)+k\omega_n^۲=s^۲+(۲\xi\omega_n-۴)s+(k\omega_n^۲-۴\xi\omega_n+۴)$$

حال باید $\xi' = ۱$ باشد. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases}۲\xi'\omega'_n=۲\zeta\omega_n-۴\\ \omega'^۲_n=k\omega_n^۲-۴\xi\omega_n+۴\end{cases} \Rightarrow \sqrt{k\omega_n^۲-۴\xi\omega_n+۴}=\zeta\omega_n-۲ \Rightarrow k=\zeta^۲ \Rightarrow \zeta\omega_n > ۲ \xrightarrow{k=\zeta^۲} \sqrt{k}\omega_n > ۲ \Rightarrow k > \frac{۴}{\omega_n^۲}$$

۱۰ـ گزینه «۱» پاسخ ضربه سیستم داده شده به صورت مقابل است:

$$H(s)=\frac{۲}{s^۲+۱}+\frac{s}{s^۲+۱}=\frac{s+۲}{s^۲+۱}$$

پس سیستم معکوس $G(s)=\frac{s^۲+۱}{s+۲}$ است. پاسخ شیب به این سیستم برابر است با:

$$G(s)\times\frac{۱}{s^۲}=\frac{\frac{۱}{۲}}{s^۲}+\frac{-\frac{۱}{۴}}{s}+\frac{\frac{۵}{۴}}{s+۲} \xrightarrow{L^{-۱}} y(t)=\frac{t}{۲}-\frac{۱}{۴}+\frac{۵}{۴}e^{-۲t}$$

باید لحظه‌ای که پاسخ به کمینه خود می‌رسد را بیابیم. داریم:

$$\frac{dy(t)}{dt}=۰ \Rightarrow +\frac{۱}{۲}+(-۲)(\frac{۵}{۴}e^{-۲t})=۰ \Rightarrow e^{-۲t}=\frac{۱}{۵} \Rightarrow t=Ln\sqrt{۵}$$

در مرحله باید شیب خط مماس از لحظه صفر را بیابیم و محل برخورد آن با خط $y = ۰$ را پیدا کنیم.

$$y'(t)=\frac{۱}{۲}-\frac{۵}{۲}e^{-۲t} \Rightarrow y'(۰)=-۲ \xrightarrow{\text{معادله خط}} y-۱=-۲(t-۰)$$

$$y=-۲t+۱ \Rightarrow y=۰ \Rightarrow t=\frac{۱}{۲}$$

۱۱ــ گزینه «۳» سیستم حلقه بسته به صورت مقابل است:

$$T(s)=\frac{k}{s^{3}+8s^{2}+16s+k}$$

همچنین برای داشتن $\xi=0/5$ باید معادله مشخصه عامل $s^{2}+\omega_n s+\omega_n^{2}$ را داشته باشد. در واقع معادله مشخصه سیستم حلقه بسته باید بر $s^{2}+\omega_n s+\omega_n^{2}$ تقسیم‌پذیر باشد.

$$\begin{array}{l|l} s^{3}+8s^{2}+16s+k & s^{2}+\omega_n s+\omega_n^{2} \\ \cline{2-2} & s+(8-\omega_n) \\ \underline{s^{3}+\omega_n s^{2}+\omega_n^{2}s} & \\ (8-\omega_n)s^{2}+(16-\omega_n^{2})s+k & \\ \underline{(8-\omega_n)s^{2}+\omega_n(8-\omega_n)s+\omega_n^{2}(8-\omega_n)} & \\ (16-\omega_n^{2}-8\omega_n+\omega_n^{2})s+k-\omega_n^{2}(8-\omega_n) & \end{array}$$

باید باقی‌مانده تقسیم صفر گردد.

$$\begin{cases}16-8\omega_n=0\Rightarrow\omega_n=2\\ k-\omega_n^{2}(8-\omega_n)=0\Rightarrow k=4\times6=24\end{cases}$$

توجه کنید قطب‌های غالب سیستم در $-1\pm\sqrt{3}j$ قرار دارد و قطب سوم در $s=\omega_n-8=-6$ قرار دارد، در واقع فاصله ۵ برابری قطب‌ها رعایت شده است.

۱۲ــ گزینه «۱» تابع تبدیل حلقه بسته را به دست می‌آوریم:

$$\frac{y(s)}{R(s)}=k_1\times\frac{1}{T_1s+1}-k_2\times\frac{1}{T_2s+1}\Rightarrow T(s)=\frac{(k_1T_2-k_2T_1)s+(k_1-k_2)}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

از آن‌جایی که پاسخ پله سیستم دارای فروجهش است پس باید یک صفر سمت راست محور موهومی داشته باشیم، یعنی باید داشته باشیم:

$$s=\frac{k_2-k_1}{k_1T_2-k_2T_1}>0$$

۱) $\begin{cases}k_2>k_1\\ k_1T_2>k_2T_1\end{cases}$ یا ۲) $\begin{cases}k_2<k_1\\ k_1T_2<k_2T_1\end{cases}\Rightarrow\frac{k_2}{k_1}>\frac{T_2}{T_1}$

یعنی گزینه (۱) صحیح است. همچنین دقت کنید که پاسخ پله سیستم هیچ‌گونه جهشی ندارد و این شرط نیز با حقیقی بودن ضرایب T_1, T_2 برآورده می‌شود.

۱۳ــ گزینه «۴» معادله مشخصه دو تابع تبدیل G_1 و G_2 برابر هم هستند. در هر دو معادله مشخصه نسبت میرایی $\zeta=0/5$ است. در واقع در حالت استاندارد فراجهش به اندازه $e^{\frac{-\pi\times0/5}{\sqrt{1-0/5^{2}}}}$ است، اما توجه داریم که هیچ‌کدام از این دو تابع تبدیل در حالت استاندارد قرار ندارند. برای تابع تبدیل G_2 به دلیل حضور صفر سمت چپ نسبت به حالت استاندارد فراجهش افزایش می‌یابد. در تابع تبدیل G_1 به دلیل وجود صفر سمت راست محور موهومی این تابع تبدیل فروجهش دارد. همچنین با توجه به $\xi=0/5$ معادله مشخصه، فراجهش نیز در پاسخ پله وجود خواهد داشت اما فروجهش پاسخ باعث افزایش فراجهش نسبت به حالت استاندارد می‌شود. پس گزینه (۴) صحیح است.

برای به دست آوردن پاسخ، می‌توان عکس تبدیل لاپلاس G_1 و مدل استاندارد را به دست آوریم.

$$G_1=\frac{-(s-0/5)}{s^{2}+s+1}\xrightarrow{\text{پاسخ پله}}y_1(t)=+\frac{1}{2}-\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2}[\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)+\frac{5\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)]$$

$$G_2=\frac{1}{s^{2}+s+1}\xrightarrow{\text{پاسخ پله مدل استاندارد}}y_2(t)=1-e^{\frac{-t}{2}}[\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)]$$

اگر بخواهیم فراجهش این دو سیستم را مقایسه کنیم باید $\frac{dy_1}{dt}=0$ و $\frac{dy_2}{dt}=0$ را محاسبه کنیم. همان‌طور که می‌دانیم برای y_2 از فرمول $e^{\frac{-\pi\times0/5}{\sqrt{1-0/5^{2}}}}=0/16$ می‌توان فراجهش را به دست آورد. برای y_1 داریم:

$$\frac{dy_1}{dt}=0\Rightarrow t=4/42\Rightarrow y_1(0/83)=0/64\Rightarrow M_p=\frac{0/64-0/5}{0/5}=0/28$$

پس فراجهش مدل G_1 بیشتر از مدل استاندارد است.

۱۴ـ گزینه «۴» همان‌طور که می‌دانیم مساحت ناحیه هاشورخورده برابر است با: $1+M_p=1/5 \Rightarrow M_p=0/5$

در واقع اولین فراجهش پاسخ پله که برابر است با $e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$، که مساوی است با ۰/۵. مقدار فروجهش اول، فراجهش دوم و فروجهش دوم به ترتیب برابر است با: $e^{-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$، $e^{-\frac{3\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ و $e^{-\frac{4\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$.

پس می‌توان نتیجه گرفت مقدار us خواسته شده به صورت مقابل قابل محاسبه است: $us=(M_p)^4 \Rightarrow u_s=(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$

۱۵ـ گزینه «۴» **بررسی گزینه‌ها:**

گزینه (۱): اضافه کردن صفر سمت راست به توابع تبدیل لزوماً فروجهش در آن‌ها ایجاد نمی‌کند. اگر تابع تبدیل $G(s)=\frac{1}{(s-1)(s+1)}$ را در نظر بگیرید تابع تبدیل $G(s)=\frac{1}{s+1}$ هیچ‌گونه فروجهشی ندارد. این جمله برای سیستم‌های پایدار صحیح است.

گزینه (۲): اگر سیستم مرتبه دوم استاندارد با میرایی شدید را در صورت وجود شرایط لازم با سیستم مرتبه اول تقریب بزنیم، پاسخ پله آن‌ها با هم مشابه هستند، اما پاسخ ضربه این دو سیستم در لحظه $t=0^+$ با هم هیچ شباهتی ندارد و در واقع در این نقطه سیستم اصلی پیوسته است اما سیستم تقریب زده شده مرتبه اول ناپیوسته است.

گزینه (۳): این جمله برای سیستم‌های مرتبه دوم با میرایی شدید و بحرانی درست است، اما برای سیستم‌های مرتبه دوم با میرایی ضعیف نمی‌تواند درست باشد، چون هر چه ω_d بزرگ‌تر شود، صفر اضافه شده تنها بر روی محور حقیقی به قطب‌های سیستم نزدیک است و نمی‌تواند اثر آن را خنثی کند.

گزینه (۴): افزودن صفر در $s=0$ به سیستم‌های مرتبه دوم باعث ایجاد فراجهش می‌شود. صرف‌نظر از میزان فراجهش مقدار نهایی آن به صفر میل می‌کند یعنی داریم: $G(s)=sG'(s)$

$$\lim_{s\to 0} s\times\frac{1}{s}\times sG'(s)=0$$

چون مقدار نهایی صفر است طبق تعریف فراجهش داریم: $M_p=\frac{y(tp)-0}{0} \Rightarrow \infty$

پس فراجهش به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

۱۶ـ گزینه «۳» اگر مقادیر ویژه ماتریس A را به دست آوریم، داریم: $eig(A)=1\ ,\ -2/5\pm 1/65j$

یعنی یک مقدار ویژه ناپایدار در این سیستم قرار دارد که اثری از آن در خروجی دیده نمی‌شود. از آن‌جایی که ضریب C_1 عامل انتقال $s=1$ است، با صفر قرار دادن این ضریب مانع از حضور قطب ناپایدار در خروجی سیستم می‌شویم. برای به دست آوردن C_2 تابع تبدیل سیستم را به دست می‌آوریم:

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\frac{1}{(s-1)(s^2+5s+9)}[3 \quad \bullet \quad C_2]\begin{bmatrix} s+2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & s+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\frac{(C_2+3)s+(4C_2-3)}{s^2+5s+9}$$

با توجه به مقدار نهایی پاسخ پله یا مقدار اولیه پاسخ ضربه داریم:

$$6=\lim_{s\to\infty} s\frac{(C_2+3)s+(4C_2-3)}{s^2+5s+9}\times 1=\frac{C_2+3}{1} \Rightarrow C_2=3$$

یا داریم:

$$1=\lim_{s\to 0} s\times\frac{(C_2+3)s+(4C_2-3)}{s^2+6s+9}\times\frac{1}{s}=\frac{4C_2-3}{9} \Rightarrow C_2=3$$

۱۷ـ گزینه «۴» پاسخ پله سیستم در $t=0$ صفر نیست، لذا تابع تبدیل سیستم اکیداً سره نیست، از طرفی صفر تابع تبدیل نیز نمی‌تواند سمت راست محور موهومی باشد. شکل کلی تابع تبدیل چنین سیستمی به صورت $\frac{s+z}{s+p}$ خواهد بود. طبق قضیه مقدار اولیه داریم:

$$\lim_{t\to 0} c(t)=\lim_{s\to\infty} sc(s)=\lim_{s\to\infty} sR(s)T(s)=\lim_{s\to\infty} s(\frac{1}{s})(\frac{s+Z}{s+p})=1$$

و طبق قضیه‌ی مقدار نهایی داریم:

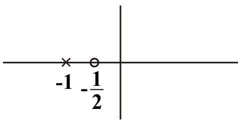
$$\lim_{t\to\infty} c(t)=\lim_{s\to 0} s\,c(s)=\lim_{s\to 0} sR(s)T(s)=\lim_{s\to 0} s(\frac{1}{s})T(s)=T(0)=\frac{Z}{p}$$

پس در نهایت با توجه به شکل داده شده $\frac{Z}{p}>1$ خواهد بود.

۱۸ـ گزینه «۱» با توجه به پاسخ حالت دائمی $y_\infty = 3$ بهره استاتیکی تابع تبدیل باید برابر ۳ باشد. لذا گزینه‌های (۲) و (۳) نمی‌توانند صحیح باشند. از طرفی درگزینه (۴) قطب‌های مکرر در $s=-0/5$ با صفری در $s=-3$ که ۶ برابر دورتر از قطب‌ها است، نشان‌دهنده‌ی پاسخی بسیار نزدیک به میرای بحرانی خواهد بود که با شکل‌های داده شده هم‌خوانی ندارد.

۱۹ـ گزینه «۴» در توضیح گزاره سوم اینکه $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ و از آنجایی که $\xi = 0/1$ و $\xi^2 = 0/01$ مقدار کوچکی است لذا در برابر یک قابل صرف‌نظر است و بنابراین $\omega_d \simeq \omega_n$. دو گزاره اول و دوم نیز صحیح هستند و درسنامه کنترل خطی بارها به این دو موضوع اشاره داشته است.

۲۰ـ گزینه «۲» دقت کنید که صفر سیستم، کمی از قطب‌های مکرر به مبدأ نزدیک‌تر است؛ لذا پاسخ اندکی فراجهش خواهد داشت. از بسط به کسرهای جزئی داریم:



$$y(s) = \frac{1}{s}H(s) = \frac{s+\frac{1}{2}}{s(s+1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{(s+1)^2}$$

با معکوس‌گیری:

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} \quad t \ge 0$$

برای یافتن حداکثر مقدار خروجی مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dy}{dt} = 0 \rightarrow \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t} = 0 \rightarrow t = 2$$

$$y(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2}$$

و میزان فراجهش عبارت است از:

$$MP = y(2) - y(\infty) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{-2} \simeq 0/067$$

۲۱ـ گزینه «۲» تابع تبدیل جبران‌ساز پیش‌فاز را به شکل کلی $G_C(s) = k\frac{s+z}{s+p}$ در نظرمی‌گیریم. با توجه به مشخصات داده شده برای پاسخ گذرای مطلوب سیستم، معادله مشخصه مطلوب حلقه بسته به شکل مقابل به دست می‌آید:

$$\Delta_g(s) = (s^2+2s+2)(s+5) = s^3+7s^2+12s+10$$

ازطرفی با جایگذاری کنترل‌کننده پیش‌فاز و محاسبه معادله مشخصه داریم:

$$\Delta(s) = s^3 + Ps^2 + ks + kz = 0$$

از مقایسه این معادله مشخصه با معادله مشخصه مطلوب خواهیم داشت:

$$P = 7, k = 12, kz = 10$$

و یا:

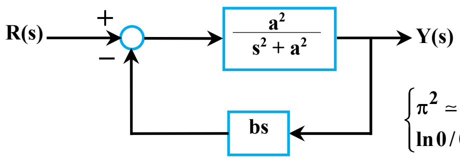
$$z = \frac{10}{12}$$

بنابراین داریم:

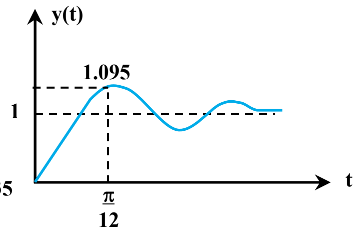
$$G_C(s) = 12\frac{s+\frac{10}{12}}{s+7} = \frac{12s+10}{s+7}$$

آزمون فصل سوم

۱ـ دیاگرام بلوکی و پاسخ پله واحد یک سیستم کنترل درشکل زیر آمده است. پارامترهای سیستم عبارتند از:



$\begin{cases}\pi^2 \simeq 10 \\ \ln 0/095 = -2/35\end{cases}$



۱) $b=15\ ,\ a=1/2$

۲) $b=0/08\ ,\ a=15$

۳) $b=15\ ,\ a=0/08$

۴) $b=1/2,\ a=15$

۲ـ پاسخ سیستمی به ورودی پله واحد با شرایط اولیه صفر برابر است با $(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}-te^{-t}-e^{-t})u(t)$ که در آن $u(t)$ تابع پله واحد است.

پاسخ ضربه سیستم برابر است با:

۱) $\delta(t)+(e^{-2t}+te^{-t})u(t)$

۲) $(e^{-2t}-te^{-t})u(t)$

۳) $(e^{-2t}+te^{-t})u(t)$

۴) $\frac{3}{2}\delta(t)+(e^{-2t}+te^{-t})u(t)$

۳ـ پاسخ پله واحد سیستم مقابل برابر است با:

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{3(s+2)}{(s+4)(s+1)^2}$$

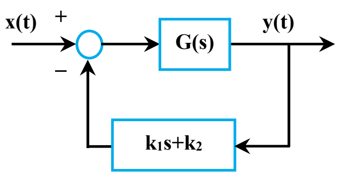
۱) $c(t)=\frac{3}{2}+\frac{1}{6}e^{-4t}-te^{-t}-\frac{5}{3}e^{-t}$

۲) $c(t)=\frac{3}{2}+\frac{1}{5}e^{-4t}-\frac{t}{2}e^{-t}-\frac{5}{3}e^{-t}$

۳) $c(t)=\frac{1}{6}e^{-4t}-te^{-t}-\frac{5}{3}e^{-t}$

۴) $c(t)=\frac{3}{2}-\frac{1}{6}e^{-4t}-te^{-t}-\frac{5}{3}e^{-t}$

۴ـ در شکل زیر معادله دینامیکی سیستم مدار باز $G(s)$ به صورت $y''(t)-3y'(t)+2y(t)=x(t)$ می‌باشد. ضرایب k_2, k_1 چه مقدار باشند تا قطب‌های تابع تبدیل حلقه بسته در نقاط $s_1=-1$ و $s=-3$ قرار گیرند؟



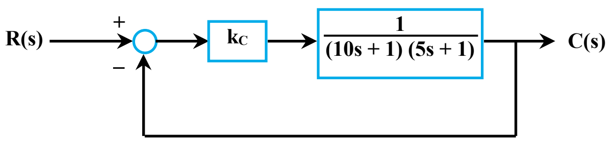
۱) $k_2=1\ ,\ k_1=7$

۲) $k_2=1\ ,\ k_1=5$

۳) $k_2=5\ ,\ k_1=7$

۴) $k_2=3\ ,\ k_1=13$

۵ـ در سیستم کنترل زیر مقدار k_c در حالت میرای بحرانی برابر است با:



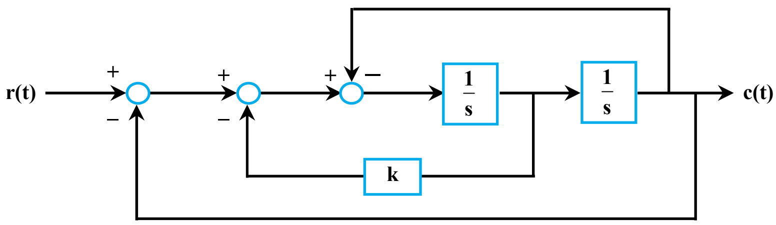
۱) ۴/۲

۲) ۱/۲۵

۳) ۰/۱۲۵

۴) ۰/۴۲

۶ـ در شکل زیر مقدار k را چنان بیابید که نسبت میرایی قطب‌های حلقه بسته برابر ۰/۷۰۷ شود.



۱) $k=1$

۲) $k=2$

۳) $k=\sqrt{2}$

۴) $k=2\sqrt{2}$

۷ـ یک سیستم مرتبه دوم دارای دو ریشه $-x\pm jy$ است. فرکانس طبیعی و ضریب میرایی پاسخ پله واحد سیستم عبارتند از:

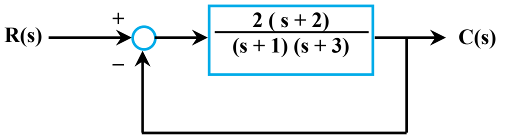
۱) $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\sqrt{x^2+y^2}$

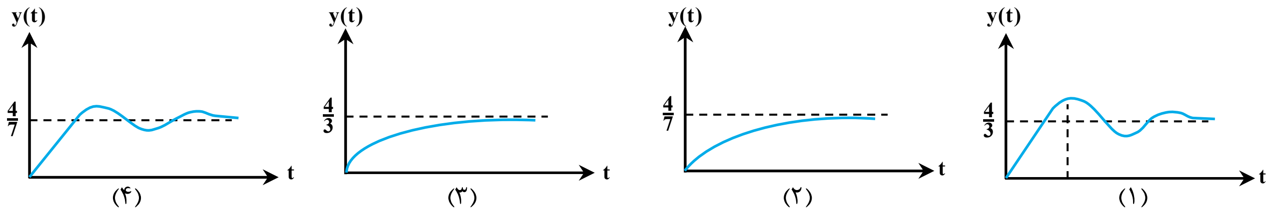
۲) $\frac{x}{x^2+y^2},\sqrt{x^2+y^2}$

۳) $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},x^2+y^2$

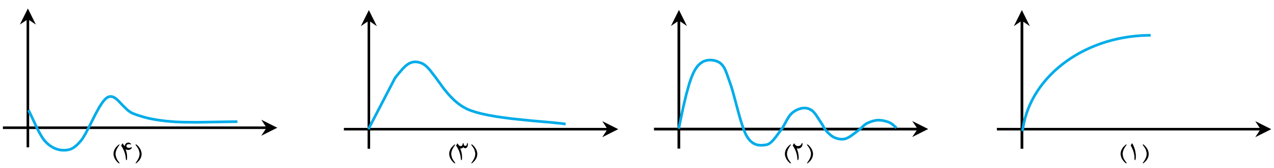
۴) $x,\sqrt{x^2+y^2}$

۸ـ کدام یک از پاسخ‌های زیر نمایش تقریبی عکس‌العمل سیستم نسبت به ورودی پله واحد است؟

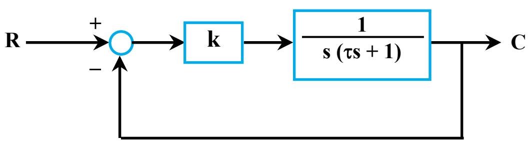




۹ـ کدام گزینه می‌تواند معرف پاسخ ضربه واحد یک سیستم مرتبه دوم از نوع میرای شدید باشد؟



۱۰ـ در سیستم زیر به ازای کدام مقادیر k و τ پاسخ $c(t)$ به ورودی ضربه واحد برابر با $c(t)=\frac{5}{2}e^{-t}\sin 2t$ می‌شود؟



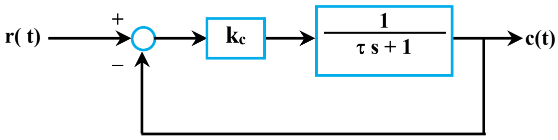
۱) $\tau=0/5,\ k=2/5$

۲) $\tau=2,\ k=2/5$

۳) $\tau=0/5,\ k=5$

۴) $\tau=2,\ k=5$

۱۱ـ در سیستم مقابل با فرض $k_c>0$ داریم:



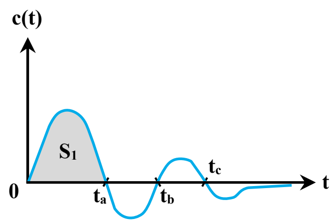
۱) ثابت زمانی سیستم مدار بسته و مدار باز برابر است.

۲) سیستم مدار باز سریع‌تر است.

۳) سیستم مدار بسته سریع‌تر است.

۴) سیستم مدار بسته به ازای بهره‌های زیاد k_c ناپایدار می‌شود.

۱۲ـ شکل زیر پاسخ ضربه واحد یک سیستم مرتبه دوم را نشان می‌دهد. مقادیر t_a و s_1 معرف چه کمیت‌هایی هستند؟



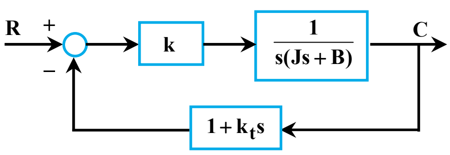
۱) $s_1=MP\ ,\ t_a=\frac{4}{\zeta\omega_n}$

۲) $s_1=MP\ ,\ t_a=\frac{\pi}{\omega_d}$

۳) $s_1=1+MP\ ,\ t_a=\frac{\pi}{\omega_d}$

۴) سیستم مرتبه دوم از نوع میرای شدید است و t_a ثابت زمانی آن می‌باشد.

۱۳ـ سیستم نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. کدام‌یک از گزینه‌ها تغییرات صحیح پارامترهای سیستم را نسبت بـه حالـت $k_t=0$ نشان می‌دهند؟



۱) ζ ثابت، $\omega_n\uparrow$, $t_s\downarrow$

۲) ζ ثابت، $\omega_n\downarrow$, $t_s\uparrow$

۳) $\zeta\uparrow$ ، ω_n ثابت، $\%OS\downarrow$

۴) $\zeta\uparrow$ ، ω_n ثابت، $t_s\uparrow$

۱۴ـ تابع تبدیل حلقه بسته یک سیستم کنترل با فیدبک واحد به صورت $\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{ks+b}{s^2+as+b}$ می‌باشد. تابع تبدیل حلقه باز این سیستم کدام است؟

۱) $\frac{ks+b}{s(s+a-k)}$

۲) $\frac{b}{s(s+a-k)}$

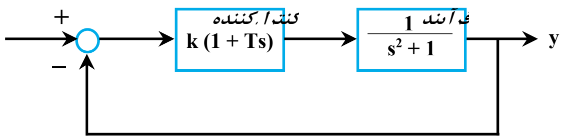
۳) $\frac{ks+b}{s(s-a+k)}$

۴) $\frac{b}{s(s-a+k)}$

۱۵ـ تابع تبدل حلقه باز سیستمی به همراه فیدبک واحد منفی برابر $G(s)=\frac{K}{s^{۲}+۶s+۵}$ است، به ازای چه مقادیری از K زمان نشست سیستم با معیار ۲% برابر با ۳s است.

۱) $K \in \mathbb{R}$ ۲) $۰<K<۴$ ۳) $K>۴$ ۴) $K>۲$

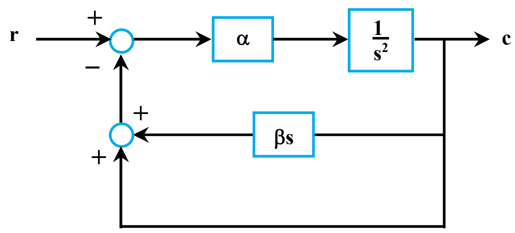
۱۶ـ در سیستم زیر به ازای کدام یک از مقادیر T,k قطب‌هایی با $\zeta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\omega_n=۲$ ایجاد می‌شوند؟



۱) $k=۳\ ,\ T=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $k=۳\ ,\ T=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

۳) $k=۱\ ,\ T=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $k=۱\ ,\ T=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۱۷ـ در سیستم کنترل شکل زیر می‌خواهیم نسبت میرایی ζ برابر ۰/۶ و فرکانس نوسانات (ω_n) برابر ۲ باشد، مقادیر α,β برابر کدام است؟



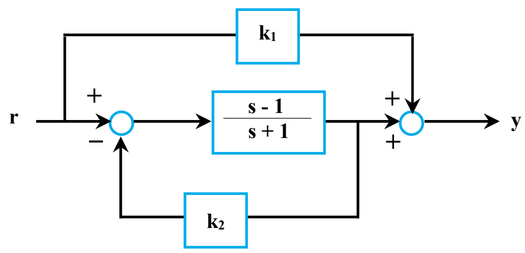
۱) $\alpha=۴\ ,\ \beta=۶$

۲) $\alpha=۰/۴\ ,\ \beta=۶$

۳) $\alpha=۰/۴\ ,\ \beta=۰/۶$

۴) $\alpha=۴\ ,\ \beta=۰/۶$

۱۸ـ به ازای چه مقادیری از $k_۱$ و $k_۲$، صفر سیستم حلقه بسته زیر در $s=-۱$ قرار خواهد گرفت؟



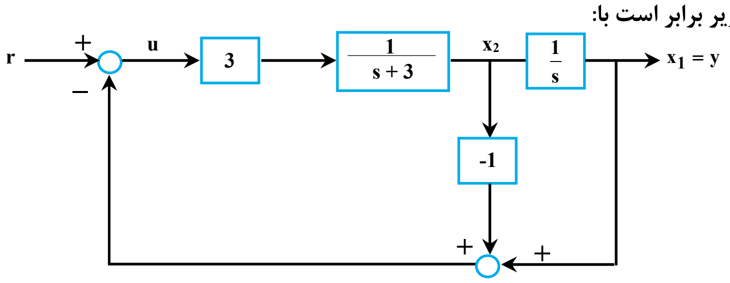
۱) $k_۱=۱\ ,\ k_۲=۰$

۲) $k_۱=-۱\ ,\ k_۲=۰$

۳) $k_۱=۱\ ,\ k_۲=۱$

۴) $k_۱=-۱\ ,\ k_۲=۱$

۱۹ـ ماتریس انتقال حالت سیستم زیر برابر است با:



۱) $\begin{bmatrix} ۳e^{-۳t} & ۰ \\ ۰ & e^{-t} \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۳e^{-۳t} & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} \cos\sqrt{۳}t & \sin\sqrt{۳}t \\ -۳\sin\sqrt{۳}t & \cos\sqrt{۳}t \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} \cos\sqrt{۳}t & \frac{\sqrt{۳}}{۳}\sin\sqrt{۳}t \\ -\sqrt{۳}\sin\sqrt{۳}t & \cos\sqrt{۳}t \end{bmatrix}$

۲۰ـ اگر ماتریس حالت سیستمی به صورت $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس انتقال حالت این سیستم کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱-e^{-۲t} \\ ۰ & e^{-۲t} \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱-e^{-۲t} \\ e^{-۲t} & ۰ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} e^{-۲t} & \frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}e^{-۲t} \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}e^{-۲t} \\ ۰ & e^{-۲t} \end{bmatrix}$

۲۱ـ پاسخ پله واحد سیستمی با تابع تبدیل حلقه بسته: $\frac{C}{R}=\frac{۱۰(s+a)}{s^{۲}+۸s+۱۵}$ عبارت است از: $c(t)=۱/۳۳+be^{-۳t}-۳e^{ct}$

مقادیر c,b,a عبارتند از:

۱) $a=\frac{۳}{۲}\ ,\ b=۲\ ,\ c=-۵$ ۲) $a=\frac{۳}{۲}\ ,\ b=۱/۶۷\ ,\ c=۵$ ۳) $a=۲\ ,\ b=۱/۶۷\ ,\ c=-۵$ ۴) $a=۲\ ,\ b=۲\ ,\ c=۵$

۲۲ــ نمایش فضای حالت یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان به صورت $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x\end{cases}$ می‌باشد. با فرض شرایط اولیه $x(0)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$ کدام گزینه صحیح است؟

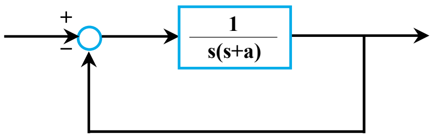
۱) $\begin{cases}x_1(t)=1+t\\ x_2(t)=1\end{cases}\quad t\geq 0$

۲) $\begin{cases}x_1(t)=t\\ x_2(t)=1\end{cases}\quad t\geq 0$

۳) $\begin{cases}x_1(t)=1+t\\ x_2(t)=t\end{cases}\quad t\geq 0$

۴) $\begin{cases}x_1(t)=t\\ x_2(t)=t+1\end{cases}\quad t\geq 0$

۲۳ــ برای پاسخ پله سیستم درجه دوم مقابل اگر a از صفر تا دو تغییر کند، کدام عبارت صحیح است؟



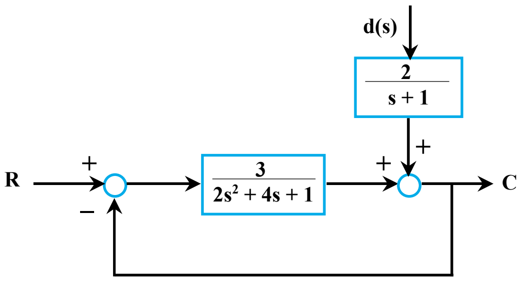
۱) پاسخ سیستم فوق میرا است.

۲) با افزایش a زمان قرار کاهش می‌یابد.

۳) با افزایش a حداکثر دامنه نیز افزایش می‌یابد.

۴) حداکثر دامنه و زمان قرار به مقدار a ربطی ندارند.

۲۴ــ سیستم زیر را در نظر بگیرید. با فرض $d(s)=0$ ضریب میرایی و فرکانس طبیعی نوسانات سیستم حلقه بسته را به دست آورید.



۱) $\omega_n=\sqrt{2}\ ,\ \zeta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

۲) $\omega_n=\sqrt{2}\ ,\ \zeta=\sqrt{2}$

۳) $\omega_n=2\ ,\ \zeta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

۴) $\omega_n=2\ ,\ \zeta=\sqrt{2}$

۲۵ــ تابع تبدیل حلقه یک سیستم کنترل به شکل $L(s)=\dfrac{k}{s(s+2\zeta\omega_n)}$ می‌باشد. به ازای کدام مقدار k پاسخ سیستم حلقه بسته میرای بحرانی خواهد بود؟

۱) $k=\zeta\omega_n$

۲) $k=\zeta^2\omega_n^2$

۳) $k=(\dfrac{1}{\zeta\omega_n})^2$

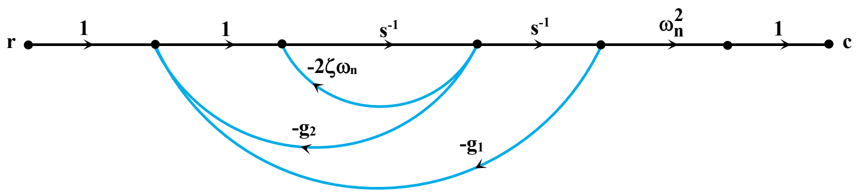
۴) $k=(\dfrac{\zeta}{\omega_n})^2$

فصل چهارم

«تحلیل پاسخ حالت دائمی»

تست‌های تألیفی فصل چهارم

مثال۱: دیاگرام حالت یک سیستم مرتبه دوم در شکل زیر نشان داده شده است. به ازای کدام مقادیر g_2, g_1 خطای حالت دائمی بـه ورودی شـیب برابر صفر می‌گردد؟



۱) $g_1 = g_2 = \omega_n^2$

۲) $g_2 = \dfrac{\omega_n}{2\zeta}, g_1 = \omega_n^2$

۳) $g_2 = \dfrac{2\zeta}{\omega_n}, g_1 = \omega_n^2$

۴) به ازای هیچ مقدار صفر نمی‌گردد.

پاسخ: گزینه «۴» تابع تبدیل خروجی به ورودی سیستم به کمک قاعده میسون عبارت است از:

$$\frac{c}{r} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n + g_2)s + g_1}$$

با داشتن تابع حلقه بسته، برای آن که خطای شیب واحد برابر صفر باشد باید داشته باشیم:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} s \times \frac{1}{s^2}\left(\frac{s^2(2\zeta\omega_n + g_2)s + g_1 - \omega_n}{s^2 + (2\zeta\omega_n + g_2)s + g_1}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g_1 = \omega_n \\ 2\zeta\omega_n = -g_2 \end{cases}$$

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

این سیستم همواره نوسانی است و پایدار محسوب نمی‌شود.

مثال۲: خطای ماندگار یک سیستم فیدبک واحد که تابع مسیر پیشرو آن $\dfrac{7}{s(s+1)(s^2+7s+12)}$ می‌باشد، در مقابل ورودی‌های پله واحد، شیب واحد و شتاب واحد کدام گزینه است؟

	برای پله واحد	برای شیب واحد	برای شتاب واحد
۱)	0	12	$\frac{7}{12}$
۲)	0	$\frac{12}{7}$	∞
۳)	0	$\frac{12}{7}$	$\frac{12}{7}$
۴)	∞	∞	∞

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا قبل از بررسی خطا در حالت ماندگار پایداری آن را بررسی می‌کنیم. معادله مشخصه سیستم برابر است با:

$$\Delta(s) = s^4 + 8s^3 + 19s^2 + 12s + 7$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 19 & 7 \\ s^3 & 2 & 3 & \\ s^2 & 17/5 & 7 & \\ s^1 & 2/2 & & \\ s^0 & 7 & & \end{array}$$

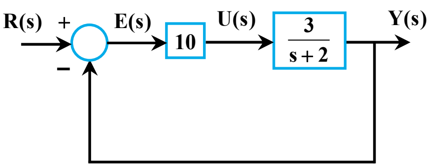
در نتیجه سیستم داده شده پایدار است و نوع آن یک است. پس خطا به ورودی پله واحد صفر و شیب واحد محدود است.

برای بررسی گزینه‌های (۲) و (۳) کافی است، شرایط پایداری حلقه بسته و خطای شیب واحد مورد تحلیل قرار گیرند. ثابت خطای شیب عبارت است از:

$$k_v = \lim_{s\to ۰} sG(s) = \frac{۷}{۱۲}$$

بنابراین به شرط پایداری حلقه بسته خطای شیب واحد $\frac{۱۲}{۷} = \frac{۱}{k_v}$ خواهد بود.

مثال ۳: **سیستم زیر را در نظر بگیرید. تابع تبدیل خطای سیستم و خطای حالت ماندگار آن به ورودی پله عبارت است از:**



۱) $\frac{s+۳۲}{۳۰s+۳۲}$ و $\frac{۱۵}{۱۶}$

۲) $\frac{s+۲}{s+۳۲}$ و $\frac{۱۵}{۱۶}$

۳) $\frac{۳۰}{s+۲}$ و $\frac{۱۶}{۱۵}$

۴) $\frac{s+۲}{s+۳۲}$ و $\frac{۱۶}{۱۵}$

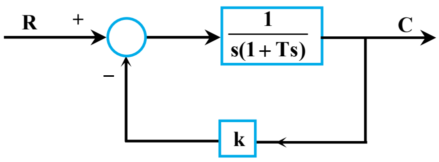
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تابع تبدیل خطای سیستم، $\frac{E(s)}{R(s)}$ برابر است با:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{۱}{۱+\frac{۳۰}{s+۲}} = \frac{s+۲}{s+۳۲}$$

$$e_\infty = \lim_{s\to ۰} s\times\left(۱-\frac{E(s)}{R(s)}\right)\times\frac{۱}{s} = \lim_{s\to ۰}\frac{۳۰}{s+۳۲} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

مثال ۴: **سیستم نشان داده شده در شکل مقابل مفروض است.**

فرض کنید $k \neq ۰{,}۱$. خطای دائمی سیستم را به ورودی پله واحد به دست آورید.



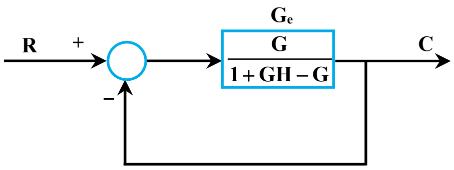
☑ **پاسخ:**

روش اول: با محاسبه تابع تبدیل حلقه بسته داریم:

$$T(s) = \frac{۱}{s(۱+Ts)+k} = \frac{۱}{Ts^۲+s+k} \quad ; \quad e_\infty = \lim_{s\to ۰} sR(s)(۱-T(s)) = ۱-T(۰) = ۱-\frac{۱}{k} = \frac{k-۱}{k}$$

از آنجایی که $k \neq ۰{,}۱$ ، خطای دائمی به ورودی پله واحد مخالف صفر و بی‌نهایت است و مقدار محدودی دارد، بنابراین سیستم نوع صفر است و خطای پله واحد آن با $\frac{k-۱}{k}$ داده می‌شود. خطای شیب و سهمی سیستم نیز بی‌نهایت می‌باشد.

روش دوم: تابع تبدیل حلقه باز را محاسبه می‌کنیم:



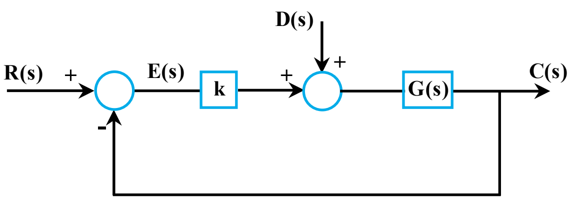
$$G_e = \frac{\frac{۱}{s(۱+Ts)}}{۱+\frac{k}{s(۱+Ts)}-\frac{۱}{s(۱+Ts)}} = \frac{۱}{s(۱+Ts)+k-۱} = \frac{۱}{Ts^۲+s+k-۱}$$

اکنون از الگوی سیستم حلقه باز با فیدبک واحد استفاده می‌کنیم. انتگرال‌گیری در تابع حلقه باز دیده نمی‌شود و لذا نوع سیستم صفر است. خطای دائمی به ورودی پله برابر است با:

$$k_p = \lim_{s\to ۰} G_e(s) = \frac{۱}{k-۱} \quad ; \quad e_\infty = \frac{۱}{۱+k_p} = \frac{۱}{۱+\frac{۱}{k-۱}} = \frac{k-۱}{k}$$

توجه کنید که اگر $k=۱$ باشد (فیدبک واحد)، خطای پله صفر می‌شود که بدیهی است، زیرا در این حالت سیستم از نوع یک است.

مثال ۵: **خطای ماندگار سیستم حلقه بسته زیر به سیگنال اغتشاش پله $d(t)=u(t)$ برابر $-B$ می‌باشد. میزان خطای ماندگار ناشی از ورودی مرجع $r(t)=u(t)$ چه مقدار است؟**



۱) $۱-B$

۲) $۱-\frac{۱}{k}$

۳) $۱-kB$

۴) $۱-\frac{B}{k}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اغتشاش $D(s)$ از نوع اغتشاش ورودی است. بنابراین خطای ماندگار به آن برابر است با:

$$e_D(\infty) = -\lim_{s\to 0}\frac{G(s)}{1+L(s)} = \frac{-G(0)}{1+kG(0)} = -B$$

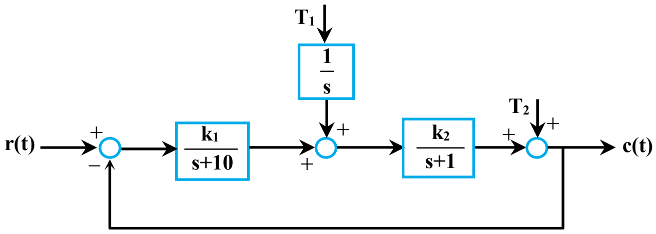
بنابراین $G(0)$ بر حسب B به دست می‌آید:

$$G(0) = \frac{B}{1-kB}$$

خطای ماندگار به ورودی مرجع پله برابر است با:

$$e_{R_\infty} = \frac{1}{1+k_p} = \frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0} kG(s)} = \frac{1}{1+kG(0)} = \frac{1}{1+\dfrac{kB}{1-kB}} = 1-kB$$

مثال ۶: سیستم کنترل شکل زیر را با ورودی r و دو اغتشاش T_1, T_2 در نظر بگیرید. اگر بخواهیم اثرات اغتشاشات T_1, T_2 کاهش یابد، کدام بیان زیر درست خواهد بود؟



۱) k_1 بزرگ، k_2 کوچک ولی k_1k_2 نیز بزرگ باشد.

۲) k_1 کوچک، k_2 بزرگ ولی k_1k_2 نیز بزرگ باشد.

۳) k_1 بزرگ، k_2 کوچک ولی k_1k_2 نیز کوچک باشد.

۴) k_1 کوچک، k_2 بزرگ ولی k_1k_2 نیز کوچک باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تابع تبدیل خروجی به اغتشاشات T_1 و T_2 را به شکل زیر محاسبه نموده و سعی می‌کنیم آنها را کوچک کنیم.

$$\frac{C(s)}{T_1(s)} = \frac{k_2(s+10)}{s[(s+1)(s+10)+k_1k_2]} \quad , \quad \frac{C(s)}{T_2(s)} = \frac{(s+1)(s+10)}{(s+1)(s+10)+k_1k_2}$$

بنابراین برای کاهش اثر اغتشاشات T_1, T_2 باید k_1k_2 بزرگ و k_2 کوچک باشد و لذا جواب گزینه (۱) صحیح است.

مثال ۷: معادلات حالت سیستمی به صورت $\begin{cases}\dot{x} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -a & -2\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}u\\ y = (1 \quad 0)x\end{cases}$ داده شده است. به ازای کدام مقدار a خطای پله واحد سیستم صفر است؟

۱) $a=2$ ۲) $a=0$ ۳) $\forall a$ ۴) به ازای هیچ مقدار a

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تابع تبدیل سیستم عبارت است از:

$$T(s) = \frac{2}{s^2+2s+a}$$

به ازای $a=2$ سیستم پایدار است و $T(0)=1$، بنابراین خطای پله واحد سیستم صفر می‌شود.

مثال ۸: سیستمی با معادلات حالت $\dot{x} = \begin{bmatrix}-5 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 20 & -10 & 1\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$ و $y = [-1 \quad 1 \quad 0]x$ توصیف می‌شود. خطای حالت دائمی سیستم به ورودی پله واحد کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{4}{5}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به این که تابع تبدیل سیستم از نمایش فضای حالت آن به شکل $T(s) = C(sI-A)^{-1}B+D$ محاسبه می‌شود، به ازای پله واحد و به فرض پایداری، از قضیه مقدار نهایی استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sR(s)(1-T(s))$$

$$R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} e(t) = 1-T(0) = 1+CA^{-1}B-D \Rightarrow \lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{4}{5}$$

تست‌های تألیفی فصل چهارم

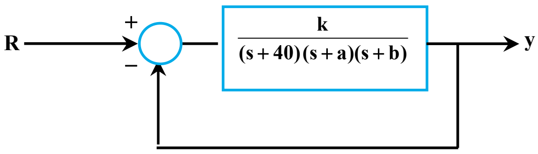
۱ـ تابع تبدیل یک سیستم مرتبه اول الگو به شکل $\frac{۱}{\tau s+۱}$ مفروض است. کدام گزینه خروجی سیستم را در حالت دائمی به ازای ورودی شیب واحد $(t>۰)$ به درستی نشان می‌دهد؟

۱) ۱　　۲) $t-\frac{۱}{\tau}$　　۳) $t-\tau$　　۴) $t-۱$

۲ـ تابع تبدیل یک سیستم مرتبه دوم به شکل $\frac{k\omega_n^۲}{s^۲+۲\xi\omega_n s+\omega_n^۲}$ مفروض است $(۰<\xi<۱)$ به ازای $k=۱$، پاسخ سیستم به ورودی شیب واحد در حالت دائمی برابر است با:

۱) $\frac{۲\xi}{\omega_n}$　　۲) $t-\frac{۲\xi}{\omega_n}$　　۳) $t+\frac{۲\xi}{\omega_n}$　　۴) $\frac{-۲\xi}{\omega_n}$

۳ـ سیستم نشان داده شده در شکل مقابل را در نظر بگیرید.



در مورد این سیستم اطلاعات زیر مفروض است. به ازای ورودی پله واحد پاسخ پس از میزان فراجهش مشخص نهایتاً به یک می‌رسد ولی ورودی شیب واحد با خطا دنبال می‌شود. با دو برابر شدن بهره به $۲k$ خروجی در ازای ورودی ضربه واحد، سینوسی با پریود $۰/۳۱۴$ خواهد بود. مقادیر a و b و k عبارتند از:

۱) $k=۵۰۰۰، b=۱۰، ab=۰$　　۲) $k=۲\times۱۰^۴، b=۱۰، ab=۰$

۳) $k=۱۰^۴، b=۱۰، ab=۰$　　۴) اطلاعات داده شده کافی نیست

۴ـ تابع تبدیل حلقه بسته سیستمی با پس‌خور واحد به صورت مقابل است:

$$M(s)=\frac{۴(s+۱)}{s^۳+۲s^۲+۴s+۴}$$

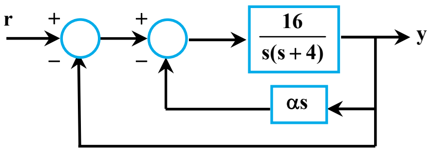
خطای حالت دائمی (ماندگار) این سیستم به ورودی $r(t)=(۳-t+\frac{t^۲}{۴})u(t)$ برابر کدام است؟

۱) صفر　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) $\frac{۱}{۴}$　　۴) $\frac{۱}{۸}$

۵ـ تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترل با فیدبک واحد به شکل $\frac{k}{s}$ داده شده است. برای ورودی پله $r(t)$ با دامنه A و به ازای شرایط اولیه به شکل $y(t_۰)=B$ که $y(t)$ خروجی سیستم است شاخص عملکرد سیستم به شکل $I=\int_۰^\infty e^۲(t)dt$ عبارت است از: $(e=r-y)$

۱) $\frac{A-B}{k}$　　۲) $\frac{(A-B)^۲}{k}$　　۳) $\frac{(A-B)^۲}{۲k}$　　۴) $\frac{A-B}{۲k}$

۶ـ سیستم نشان داده شده در شکل مقابل را در نظر بگیرید:



پارامتر طراحی $\alpha(\alpha>۰)$ را برای رسیدن به پاسخ مطلوب تغییر می‌دهیم. کدام گزینه صحیح است؟

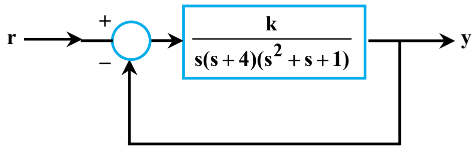
۱) با انتخاب مناسب α می‌توان خطای دائمی به ورودی شیب واحد و حداکثر جهش پاسخ زمانی سیستم را نسبت به حالت $\alpha=۰$ کاهش داد.

۲) با انتخاب مناسب α اگر حداکثر جهش پاسخ را نسبت به حالت $\alpha=۰$ کاهش دهیم خطای دائمی سیستم به ورودی شیب واحد افزایش می‌یابد.

۳) با تغییر α نمی‌توان حداکثر جهش پاسخ زمانی سیستم را نسبت به حالت $\alpha=۰$ تغییر داد.

۴) با تغییر α خطای دائمی سیستم به ورودی شیب واحد نسبت به حالت $\alpha=۰$ تغییری نخواهد داشت.

۷ـ سیستم نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید:



اگر بهره k را به نصف بهره متناظر با فرکانس نوسانات دامنه ثابت $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ رادیان بر ثانیه کاهش دهیم، ثابت خطای استاتیکی به ورودی شیب واحد برابر است با:

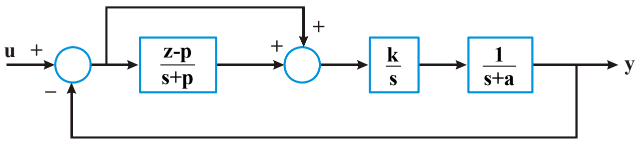
۱) ۰/۲۱ ۲) ۰/۴۲ ۳) ۰/۳۶ ۴) ۰/۸۴

۸ـ در سیستم با تابع تبدیل $G(s)=\frac{۲s+۱}{s^۲+s+۰/۵}$ در مسیر پیشرو و $H(s)=k$ در مسیر فیدبک منفی، مقدار k کدام باشد تا سیستم حلقه بسته ورودی شیب را بدون خطا تعقیب کند؟

۱) $k=۰/۵$ ۲) $k=۱$

۳) $k=۲$ ۴) به ازای هیچ مقدار k امکان‌پذیر نیست.

۹ـ در سیستم نشان داده شده در شکل زیر اگر قطب‌های حلقه بسته همگی در -۱ واقع شده باشند، به ازای $k=۱$ ثابت خطای استاتیکی سرعت سیستم در کدام گزینه آمده است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

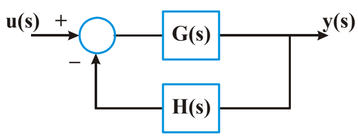
۱۰ـ برای یک سیستم خطی تابع تبدیل حلقه بسته با فیدبک منفی واحد داده شده است. اگر $e=r-c$ تعریف شود، مقدار $\int_{۰}^{\infty} e(t)dt$ در پاسخ به ورودی پله واحد کدام است؟

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{(s+\frac{۱}{۶})(s+\frac{۱}{۲})}{۹(s+\frac{۱}{۹})(s+\frac{۱}{۴})(s+\frac{۱}{۳})}$$

۱) ۴ ۲) ۸

۳) ۹ ۴) ۶

۱۱ـ کدام عبارت صحیح است؟



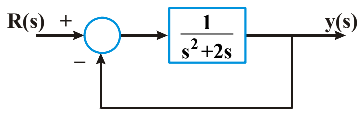
۱) تعداد قطب‌های موجود در مبدأ تابع تبدیل $GH(s)$ پس از حذف صفرهای آن در مبدأ برابر با نوع سیستم است.

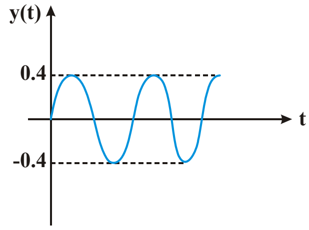
۲) بهترین روش برای صفر کردن خطا به ورودی‌های مرجع اضافه کردن انتگرال‌گیر در مسیر پیشرو است.

۳) هیچ سیستم مرتبه دومی وجود ندارد که فراجهش آن بیش از ۱۰۰٪ باشد.

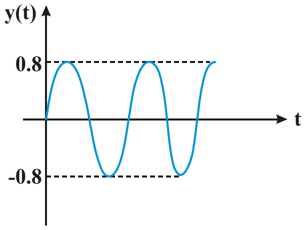
۴) اگر خطای حالت ماندگار سیستم حلقه باز با تابع تبدیل $G(s)$ به ورودی پله واحد برابر k باشد، آنگاه خطای حالت ماندگار سیستم حلقه بسته با تابع تبدیل مسیر پیشرو $G-۱$ و فیدبک واحد منفی به ورودی پله واحد $\frac{۱}{۱-k}$ خواهد بود (G سره است).

۱۲ـ خروجی سیستم زیر به ازای ورودی $r(t) = 2\sin(2t)$ در کدام گزینه به درستی نشان داده شده است؟

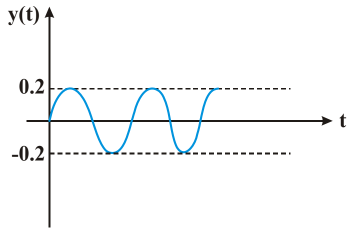




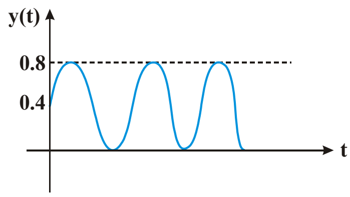
(۱)



(۲)

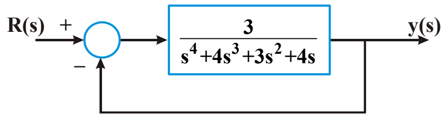


(۳)



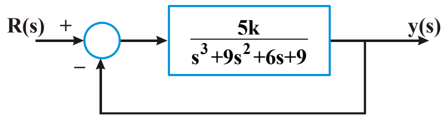
(۴)

۱۳ـ نوع سیستم زیر کدام است؟



۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) برای این سیستم نمی‌توان نوع تعریف کرد.

۱۴ـ محدوده k را به گونه‌ای بیابید تا خطای حالت ماندگار سیستم زیر به ورودی پله واحد کمتر از ۰/۱۵ شود؟

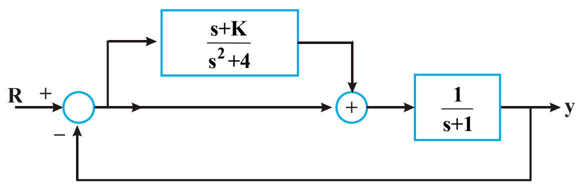


۱) k = ۱۰/۲
۲) k > ۱۰/۲
۳) k < ۱۰/۲
۴) امکان‌ناپذیر است.

۱۵ـ کدام‌یک از موارد زیر لزوماً از اثرات شناخته شده فیدبک منفی نیست؟

۱) بهبود سرعت پاسخ
۲) بهبود پایداری
۳) کاهش اثر اغتشاشات خارجی
۴) کاهش اثر تغییرات پارامترهای سیستم

۱۶ـ سیستم نشان داده شده در شکل مقابل مفروض است.



به ازای ورودی سینوسی با فرکانس ۲ به شکل $R(s) = \frac{as+b}{s^2+4}$ تحت چه شرایطی خطای دائمی در ردیابی ورودی صفر خواهد شد؟

۱) $a = 0\ ,\ k > -8$
۲) $a = 0\ ,\ -8 < k < 2$
۳) $b = 0\ ,\ k > -8$
۴) a, b دلخواه $,\ -8 < k < 2$

۱۷ـ با توجه به عبارت‌های زیر کدام گزینه صحیح است؟

عبارت (۱): افزایش بهره معمولاً رفتار دائمی را بهبود می‌دهد ولی ممکن است باعث ناپایداری شود.

عبارت (۲): خطای سرعت خطایی است در موقعیت ناشی از ورودی شیب.

عبارت (۳): اگر نمودار $\log|c(t)-c(\infty)|$ خطی باشد سیستم مرتبه اول است « $c(t)$ پاسخ پله واحد سیستم است».

۱) فقط عبارت (۲) نادرست است.
۲) فقط عبارت (۳) نادرست است.
۳) عبارت‌های (۲) و (۳) نادرست هستند.
۴) هر سه عبارت صحیح هستند.

پاسخنامه تست‌های تألیفی فصل چهارم

۱ـ گزینه «۳»

روش اول: خطای دائمی سیستم به ورودی شیب واحد عبارت است از:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sR(s)(1-T(s)) = \lim_{s\to 0} s(\frac{1}{s^2})(1-\frac{1}{\tau s+1})$$

از این رو داریم:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(\frac{\tau s}{\tau s+1}) = \tau$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty}(t-y) = \tau$$

و یا:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = t-\tau$$

روش دوم: خروجی سیستم را می‌توان به راحتی از روی تابع تبدیل آن به دست آورد.

$$y(s) = \frac{1}{\tau s+1}\times\frac{1}{s^2} = \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{\tau s+1} = -\frac{\tau}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{\tau^2}{\tau s+1}$$

عکس تبدیل لاپلاس خروجی برابر است با:

$$y(t) = t-\tau+\tau e^{-\frac{t}{\tau}}$$

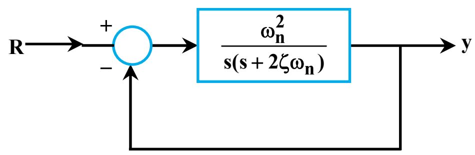
که در حالت ماندگار یعنی $t\to\infty$ داریم:

$$y(t) = t-\tau$$

۲ـ گزینه «۲»

روش اول: خطای دائمی سیستم به ازای $k=1$ به شکل $\frac{2\xi\omega_n}{\omega_n^2}=\frac{2\xi}{\omega_n}$ محاسبه می‌شود. لذا داریم: $e_\infty = r(t)-y(t)\Rightarrow \underset{t\to\infty}{y(t)} = t-e_\infty = t-\frac{2\xi}{\omega_n}$

روش دوم: سیستم داده شده، سیستم مرتبه دوم به فرم استاندارد است که بلوک دیاگرام آن به صورت زیر است.



سیستم از نوع یک است؛ پس ورودی شیب را با خطای محدود ردیابی می‌کند؛ در نتیجه گزینه (۱) و (۴) غلط است. اگر میزان خطا در حالت ماندگار را به دست آوریم، می‌توان گزینه صحیح را انتخاب کرد.

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} s\times\frac{s^2+2\zeta\omega_n s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\times\frac{1}{s^2} = \frac{2\zeta\omega_n}{\omega_n^2} = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

پس خروجی سیستم به صورت $t-\frac{2\zeta}{\omega_n}$ است و به اندازه‌ی $\frac{2\zeta}{\omega_n}$ خطا دارد.

۳ـ گزینه «۳» نوع سیستم باید یک باشد، لذا $a=0$ یا $b=0$ پس در حالت کلی می‌توان $ab=0$ را درنظر گرفت.

اگر $a=0$ فرض کنیم، به ازای ضربه واحد فرکانس نوسانات پاسخ $\omega_n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0/314} = 20\frac{rad}{s}$ خواهد بود. معادله مشخصه در این‌حالت عبارت است از:

$$(s+j20)(s-j20)(s+p) = s(s+40)(s+b)+2k \Rightarrow s^3+ps^2+400s+400p = s^3+(40+b)s^2+40bs+2k$$

بنابراین داریم:

$$\left.\begin{aligned}40+b&=p\\40b&=400\\2k&=400p\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}b&=10\\p&=50\\k&=10^4\end{aligned}$$

۴ـ گزینه «۳»

روش اول: با استفاده از قضیه مقدار نهایی داریم:

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sR(s)(1-M(s)) = \lim_{s\to 0} s(\frac{3}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2s^3})(\frac{s^3+2s^2}{s^3+2s^2+4s+4})\Rightarrow e_\infty = \frac{1}{4}$$

دقت کنید که با توجه به شکل تابع تبدیل حلقه بسته مشخص است که خطای پله و شیب صفر است و سیستم به ازای ورودی سهمی خطای محدود خواهد داشت.

از آزمون پایداری برای تعیین صحت جواب استفاده می‌کنیم، پس داریم:

$$\Delta(s) = s^3+2s^2+4s+4$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & 4 \\ \hline s^1 & 2 & 0 \\ s^0 & 4 & \end{array}$$

با توجه به آرایه روث، سیستم حلقه بسته پایدار است.

روش دوم: تابع تبدیل حلقه باز به همراه فیدبک واحد منفی متناظر با تابع تبدیل $M(s)$ را می‌یابیم.

$$M(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)} \Rightarrow \frac{4(s+1)}{s^3+2s^2+4s+4}=\frac{G}{1+G} \Rightarrow G=\frac{4(s+1)}{s^2(s+2)}$$

سیستم حلقه باز از نوع دو است؛ پس خطای حالت ماندگار آن به ورودی‌های پله و شیب صفر است. تنها کافی است خطای آن را به ازای $r(t)=\frac{t^2}{4}u(t)$ محاسبه کنیم. ثابت خطای شیب برابر است با:

$$k_a=\lim_{s\to 0} s^2G(s)=2$$

در نتیجه خطای حالت ماندگار برابر است با:

$$e_\infty=\frac{1}{k_a}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

دقت کنید که ضرایب جدول ثابت‌های خطا برای ورودی‌هایی با دامنه واحد آورده شده است.

۵ـ گزینه «۳» تابع تبدیل سیستم حلقه بسته عبارت است از:

$$T(s)=\frac{k}{s+k}=\frac{Y(s)}{R(s)}$$

لذا معادله دیفرانسیل حاکم بر این سیستم عبارت است از:

$$\dot{y}(t)+ky(t)=k\,r(t)$$

با اعمال تبدیل لاپلاس یک‌طرفه با فرض شرایط اولیه داده شده به شکل $y(t_0)=B$ داریم:

$$sY(s)-y(t_0)+kY(s)=k(\frac{A}{s}) \Rightarrow (s+k)Y(s)=B+\frac{kA}{s} \Rightarrow Y(s)=\frac{B+\frac{kA}{s}}{s+k}$$

با تفکیک کسرها و به کمک تبدیل لاپلاس معکوس می‌توان نوشت:

$$y(t)=A(1-e^{-kt})+Be^{-kt}$$

و لذا داریم:

$$e(t)=A-y(t)=e^{-kt}(A-B)$$

بنابراین:

$$I=\int_0^\infty (A-B)^2e^{-2kt}dt=(A-B)^2(-\frac{1}{2k})e^{-2kt}\Big|_0^\infty=\frac{(A-B)^2}{2k}$$

۶ـ گزینه «۲» در حالت $\alpha=0$ داریم:

$$k_v=\lim_{s\to 0} sG(s)=4 \quad \text{و} \quad e_\infty=\frac{1}{k_v}=0/25$$

از طرفی معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارت است از:

$$\Delta(s)=s^2+4s+16=s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2 \Rightarrow \xi=0/5\ ,\ \omega_n=4$$

اگر $\alpha\neq 0$:

$$\Delta(s)=s^2+(4+16\alpha)s+16 \Rightarrow \omega_n=4 \quad \text{و} \quad \xi=\frac{1}{2}+2\alpha$$

از طرفی در حالت جدید داریم:

$$k_v=\frac{4}{1+4\alpha}$$

واضح است اگر α را تغییر دهیم $(\alpha>0)\xi$ افزایش یافته لذا حداکثر جهش پاسخ کم می‌شود اما خطای شیب نیز افزایش می‌یابد.

۷ـ گزینه «۲» ابتدا آرایه روث را تشکیل می‌دهیم. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارت است از:

$$s^4+5s^3+5s^2+4s+k=0$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 5 & k \\ s^3 & 5 & 4 & \\ s^2 & \frac{21}{5} & k & \\ s^1 & \frac{84}{5}-5k & 0 & \\ s^0 & k & & \end{array}$$

اگر $k=\frac{84}{25}$ در این‌صورت سیستم با فرکانس $\frac{2}{\sqrt{5}}$ نوسان می‌کند.

اگر بهره k را به نصف این مقدار کاهش دهیم داریم: $k=\frac{42}{25}$

در این‌صورت $k_v=\lim_{s\to 0} sG(s)=\frac{k}{4}=0/42$

۸ـ گزینه «۱»

روش اول: ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را می‌نویسیم:

$$T(s)=\frac{G(s)}{1+kG(s)}=\frac{\frac{2s+1}{s^2+s+0/5}}{1+k\frac{2s+1}{s^2+s+0/5}}=\frac{2s+1}{s^2+(1+2k)s+(0/5+k)}$$

برای اینکه خطا به ورودی شیب صفر باشد باید:

$$\begin{cases}0/5+k=1\\1+2k=2\end{cases}\Rightarrow k=0/5$$

بررسی پایداری نیز باید به ازای $k=0/5$ انجام شود:

$$\Delta(s)=s^2+2s+1=0\Rightarrow$$ پایدار است.

روش دوم: تابع تبدیل مسیر پیشرو $G(s)$ و مسیر فیدبک $H(s)$ است. این بلوک را به سیستمی با فیدبک واحد تبدیل می‌کنیم. از آن‌جاکه مـی‌خـواهیم خطا به ورودی شیب صفر باشد باید نوع سیستم ۲ باشد.

$$G'(s)=\frac{G(s)}{1+GH(s)-G(s)}=\frac{\frac{2s+1}{s^2+s+0/5}}{1+\frac{(2s+1)k}{s^2+s+0/5}-\frac{2s+1}{s^2+s+0/5}}=\frac{2s+1}{s^2+s+0/5+k(2s+1)-2s-1}$$

$$G'(s)=\frac{2s+1}{s^2+(1+2k-2)s+(0/5+k-1)}$$

برای آن‌که سیستم نوع ۲ باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}2k-1=0\Rightarrow k=0/5\\k-0/5=0\Rightarrow k=0/5\end{cases}\Rightarrow k=0/5$$

۹ـ گزینه «۲» ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را تشکیل می‌دهیم.

$$\frac{y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{s+z}{s+p}\times\frac{k}{s}\times\frac{1}{s+a}}{1+\frac{s+z}{s+p}\times\frac{k}{s}\times\frac{1}{s+a}}=\frac{k(s+z)}{s^3+(a+p)s^2+(ap+k)s+kz}$$

در نتیجه معادله مشخصه سیستم باید به صورت $\Delta(s)=s^3+3s^2+3s+1$ باشد تا همه‌ی قطب در -1 جایابی شوند.

$$\begin{cases}a+p=3\\ap+k=3\\kz=1\end{cases}$$

توجه کنید که چهار معادله و سه مجهول داریم. دقت به این موضوع نیز اهمیت دارد که $k=1$ تنها به ازای محاسبه ثابت خطای استاتیکی سرعت قابل به کارگیری است. برای محاسبه‌ی ثابت خطای استاتیکی سرعت سیستم داریم:

$$k_v=\lim_{s\to 0}sG(s)\Rightarrow k_v=\lim_{s\to 0}s\times\frac{s+z}{s+p}\times\frac{k}{s}\times\frac{1}{s+a}$$

$$k_v=\frac{z}{p}\times\frac{k}{a}$$

برای محاسبه‌ی ضریب خطای استاتیکی سرعت از معادلات قطب‌های حلقه بسته استفاده می‌کنیم:

$$ap+k=3\xrightarrow{k=1}ap=2\ ,\ z=\frac{1}{k}\xrightarrow{k=1}z=1$$

$$k_v=\frac{1}{2}$$

۱۰ـ گزینه «۲»

روش اول: همان‌طور که از خواص تبدیل لاپلاس می‌دانیم، $\int_0^{\tau}f(t)dt\xrightarrow{\ell}\frac{1}{s}F(s)$ است. پس داریم:

$$\int_0^{\infty}e(t)dt\xrightarrow{\ell}\frac{1}{s}E(s)=\frac{(s+\frac{1}{6})(s+\frac{1}{2})}{9s(s+\frac{1}{9})(s+\frac{1}{4})(s+\frac{1}{3})}$$

از قضیه مقدار نهایی داریم:

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\times\left(1-\frac{Y(s)}{R(s)}\right)\times\frac{1}{s}\times\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0} s\times\frac{1}{s^2}\times\frac{108s^3+63s^2+8s}{108s^3+75s^2+16s+1}=8$$

روش دوم: می‌توان خطا را در حوزه‌ی زمان به دست آورد و انتگرال آن را محاسبه کرد.

$$\int_0^\infty e(t)dt=\int_0^\infty r(t)-y(t)\ \Rightarrow y(s)=\frac{(s+\frac{1}{6})(s+\frac{1}{2})}{9s(s+\frac{1}{9})(s+\frac{1}{4})(s+\frac{1}{3})}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)=1+\frac{e^{-\frac{t}{3}}}{2}-\frac{4}{5}e^{-\frac{t}{4}}-0/7e^{-\frac{t}{9}}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty\left(-e^{-\frac{t}{3}}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}e^{-\frac{t}{4}}+0/7e^{-\frac{t}{9}}\right)dt=8$$

۱۱ـ گزینه «۴» گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

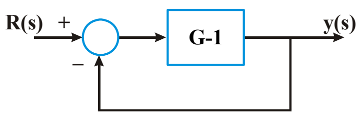
بررسی گزینه (۱): زمانی می‌توان تعداد انتگرال‌گیرها را برابر با نوع سیستم دانست که فیدبک سیستم از نوع واحد باشد. پس این گزینه غلط است.

بررسی گزینه (۲): یکی از انتخاب‌ها در صفر کردن خطای حالت ماندگار اضافه کردن انتگرال‌گیر است، اما این روش موجب ناپایداری سیستم حلقه بسته می‌گردد؛ پس روش یا راهکار مناسبی نیست.

بررسی گزینه (۳): سیستم مرتبه دوم با تابع تبدیل $G(s)=\frac{s}{s^2+2s+2}$ دارای فراجهش بی‌نهایت است. پس این گزینه نیز غلط است.

بررسی گزینه (۴): سیستم حلقه باز با تابع تبدیل $G(s)$ را در نظر می‌گیریم.

$$R(s)-y(s)=(1-G(s))R(s)\ \Rightarrow e_{ss}=\lim_{s\to 0} s(1-G(s))\times\frac{1}{s}=k$$



حال اگر سیستم را به صورت حلقه بسته با تابع تبدیل $G-1$ در مسیر پیشرو و فیدبک واحد ببندیم، داریم:

$$\Rightarrow \frac{y(s)}{R(s)}=T(s)=\frac{G-1}{1+G-1}=\frac{G-1}{G}$$

دقت کنید که معادله مشخصه سیستم $\Delta(s)=G$ است؛ چون در حالت حلقه باز خطای محدود داشتیم؛ یعنی $G(s)$ پایدار است. به همین دلیل تابع تبدیل حلقه بسته نیز پایدار است. برای خطا داریم:

$$E(s)=\lim_{s\to 0} s(1-T(s))\times\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}(1-T(s))=1-\frac{G(0)-1}{G(0)}=\frac{+1}{G(0)}=\frac{1}{1-k}$$

۱۲ـ گزینه «۱» تابع تبدیل حلقه بسته برابر است با:

$$T(s)=\frac{1}{s^2+2s+1}$$

دقت کنید که قضیه حالت ماندگار در این سؤال قابل استفاده نیست؛ چون ورودی سیستم سینوسی است و خروجی آن نیز با توجه به پایداری $T(s)$ بالطبع سینوسی می‌شود؛ در نتیجه پاسخ حد واحدی ندارد. باید از حالت ماندگار سینوسی استفاده کنیم که در آن به جای s، $j\omega$ قرار می‌دهیم.

$$T(j\omega)=\frac{1}{-\omega^2+1+2j\omega}\ \Rightarrow |y_{ss}|=2\times\left|\frac{1}{-3+4j}\right|=\frac{2}{5}$$

باید توجه شود که $\frac{2}{5}$ دامنه مثبت نوسان است؛ یعنی پاسخ به صورت $y=\frac{2}{5}\sin(2t+\varphi)$ است. پس گزینه (۱) صحیح است.

۱۳ـ گزینه «۴» اگر طبق تعریف نوع سیستم بخواهیم نوع سیستم داده شده را بیابیم، با توجه به واحد بودن فیدبک به این نتیجه می‌رسیم که نوع سیستم یک است، اما باید دقت کرد که قبل از تعیین نوع باید از پایداری سیستم‌ها اطمینان حاصل شود. برای بررسی پایداری سیستم داده شده از جدول روث استفاده می‌کنیم.

$$\Delta(s)=s^4+4s^3+3s^2+4s+3=0$$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 3 & 3\\
s^3 & \cancel{4}\,1 & \cancel{4}\,1 & \\
s^2 & 2 & 3 & \\
s^1 & -\frac{1}{2} & & \\
s^0 & 3 & &
\end{array}$$

از جدول روث به این نتیجه می‌رسیم که سیستم داده شده ناپایدار است؛ در نتیجه برای سیستم‌های ناپایدار نوع تعریف نمی‌شود. پس گزینه (۴) صحیح است.

۱۴ـ گزینه «۴» ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را به دست می‌آوریم:

$$\frac{y(s)}{R(s)} = \frac{5k}{s^3 + 9s^2 + 6s + 9 + 5k}$$

برای آن که خطای حالت ماندگار در محدوده خواسته شده قرار گیرد، باید داشته باشیم:

$$E(s) = \lim_{s \to 0} s(1 - T(s)) \times \frac{1}{s} = 1 - T(0) \Rightarrow 1 - \frac{5k}{9 + 5k} < 0/15 \Rightarrow \frac{9}{9 + 5k} < 0/15 \Rightarrow k > 10/2$$

اما باید دقت کرد که بدون بررسی پایداری، این جواب لزوماً درست نیست. برای پایداری سیستم حلقه بسته باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 9 \times 6 > 9 + 5k \Rightarrow k < 9 \\ 9 + 5k > 0 \Rightarrow k > \frac{-9}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{-9}{5} < k < 9$$

مقادیر به دست آمده برای k به منظور کوچک کردن خطا در بازه پایداری سیستم قرار نمی‌گیرد؛ پس نمی‌توان چنین k را پیدا کرد و گزینه (۴) صحیح است.

۱۵ـ گزینه «۲» فیدبک منفی معمولاً به منظور بهبود سرعت پاسخ، کاهش اثر اغتشاشات و اثر تغییرات پارامترهای سیستم به شکل صحیح بـه کـار گرفتـه می‌شود؛ اما در استفاده از فیدبک منفی عموماً بهبود پایداری مد نظر نیست و خطر ناپایداری حلقه بسته را همواره در نظر گرفت.

۱۶ـ گزینه «۴» تابع تبدیل حلقه بسته به شکل مقابل محاسبه می‌شود:

$$T(s) = \frac{y}{R} = \frac{s^2 + s + 4 + k}{s^3 + 2s^2 + 5s + 8 + k}$$

و تابع تبدیل حلقه $L(s)$ عبارت است از:

$$L(s) = \left(1 + \frac{s + k}{s^2 + 4}\right)\left(\frac{1}{s + 1}\right)$$

از آنجایی که $L(s)$ شامل قطب‌های ورودی $R(s)$ است، به شرط پایداری حلقه بسته خطای دائمی در ردیابی این ورودی صفر خواهد بود. از معیار پایداری روث داریم:

s^3	1	5
s^2	2	$8 + k$
s^1	$2 - k$	0
s^0	$8 + k$	

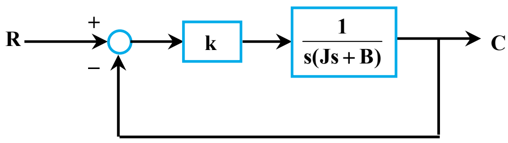
و لذا داریم:

$$-8 < k < 2$$

۱۷ـ گزینه «۴»

آزمون فصل چهارم

۱ـ در سیستم زیر، کدام گزینه به ترتیب مقدار خطای حالت دائمی سیستم به ورودی شیب و مقادیر ζ و ω_n قطب‌های حلقه بسته را نشان می‌دهد؟



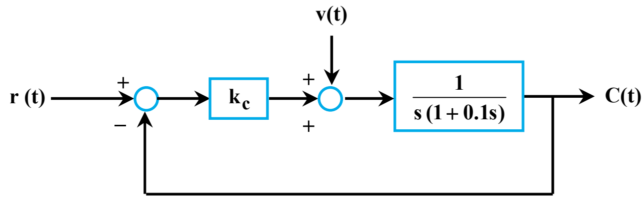
۱) $e_{ss}=\frac{۱}{kB}, \zeta=\frac{B}{\sqrt{kJ}}, \omega_n=\sqrt{\frac{J}{k}}$

۲) $e_{ss}=\frac{۱}{kB}, \zeta=\frac{B}{۲\sqrt{kJ}}, \omega_n=\sqrt{k}$

۳) $e_{ss}=\frac{B}{k}, \zeta=\frac{B}{۲\sqrt{kJ}}, \omega_n=\sqrt{\frac{k}{J}}$

۴) $e_{ss}=\frac{B}{k}, \zeta=\frac{B}{\sqrt{kJ}}, \omega_n=\sqrt{\frac{k}{j}}$

۲ـ در سیستم زیر با فرض اینکه $r(t)$ ورودی مبنا و $v(t)$ ورودی اغتشاش، هر کدام توابع پله‌ای واحد باشند مقدار k_c را طوری بیابید که اثر اغتشاش در خروجی حالت ماندگار کمتر از ۱۰ درصد اثر ورودی مبنا در خروجی حالت ماندگار باشد.



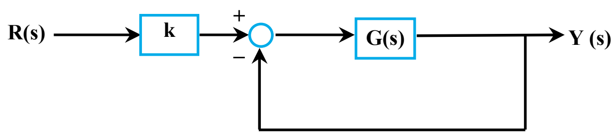
۱) $k_c > ۱۰$

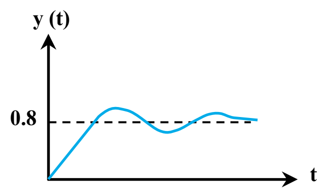
۲) $k_c > ۲$

۳) $k_c > ۵$

۴) $k_c > ۱$

۳ـ سیستم کنترل زیر را در نظر بگیرید. پاسخ پله واحد این سیستم در حالت $k = ۱$ در شکل آمده است. مقدار k را چنان بیابید که خطای دائمی پاسخ سیستم به پله واحد صفر باشد.





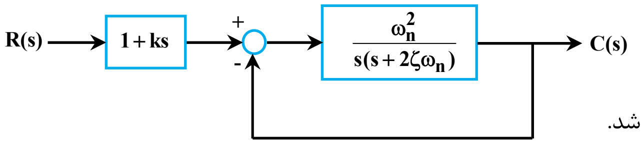
۱) $k=۱/۱$

۲) $k=۱/۲۵$

۳) $k=۱/۴$

۴) $k=۰/۸$

۴ـ در سیستم زیر مقدار k را چگونه تنظیم کنیم تا خطای دائمی سیستم به ورودی شیب واحد صفر شود؟ $(e(t)=r(t)-c(t))$



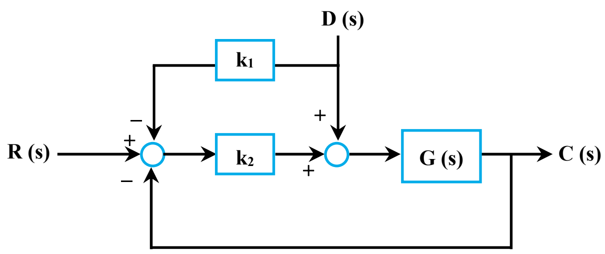
۱) $k=\frac{۲\zeta}{\omega_n}$

۲) $k=\frac{\zeta}{۲\omega_n}$

۳) $k=\frac{\zeta}{\omega_n}$

۴) به ازای هیچ مقدار k خطا صفر نخواهد شد.

۵ـ در شکل زیر مقدار $k_۱$ را چنان به دست آورید تا اثر اغتشاش $D(s)$ با فرض پایداری سیستم حلقه بسته در خروجی برابر صفر باشد.



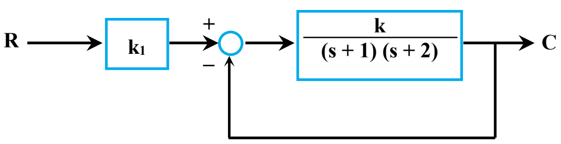
۱) $k_۱=\frac{۱}{k_۲}$

۲) $k_۱=k_۲$

۳) $k_۱=\frac{k_۲}{۲}$

۴) $k_۱=\frac{۱}{۲k_۲}$

۶ـ در شکل زیر به ازای کدام مقدار بهره $k_۱$ خطای دائمی به ورودی پله واحد برابر صفر خواهد شد؟ $(e=r-c)$



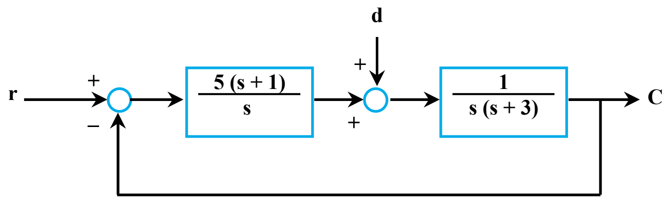
۱) $k_۱=۱+\frac{۱}{k}$

۲) $k_۱=\frac{k}{۲}$

۳) $k_۱=\frac{۱}{۲k}+۱$

۴) $k_۱=۱+\frac{۲}{k}$

۷ــ سیستم کنترل نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. خطای حالت دائمی این سیستم را به ورودی $r(t) = (۲ - t + ۰/۵t^۲)u(t)$ به دست آورید. $(D(s) = ۰)$



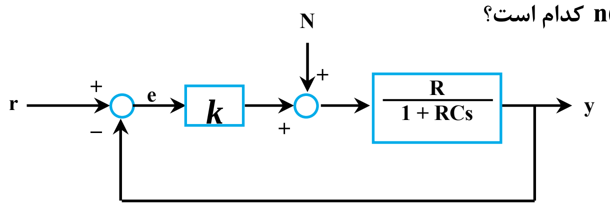
۱) $e_\infty = ۰$

۲) $e_\infty = \frac{۳}{۵}$

۳) $e_\infty = \frac{۵}{۳}$

۴) $e_\infty \to \infty$

۸ــ در سیستم زیر خطای حالت ماندگار e_∞ ، به ازای اغتشاش $n(t) = n_\circ u(t)$ کدام است؟



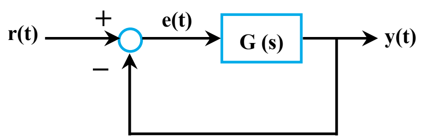
۱) $-\frac{n_\circ}{۱ + kR}$

۲) $\frac{n_\circ R}{۱ + kR}$

۳) $-\frac{n_\circ R}{۱ + kR}$

۴) $\frac{n_\circ}{۱ + kR}$

۹ــ یک سیستم کنترل حلقه بسته با فیدبک منفی واحد دارای تابع تبدیلی به صورت $M(s) = \frac{(۱ + ۲s)(۱ + ۳s)(۱ + ۴s)}{(۱ + ۵s)(۱ + ۶s)(۱ + ۷s)}$ می‌باشد. فرض کنید ورودی r پله واحد باشد. مطلوب است محاسبه $\int_\circ^\infty e(t)dt$ که $e(t)$ سیگنال خطاست.



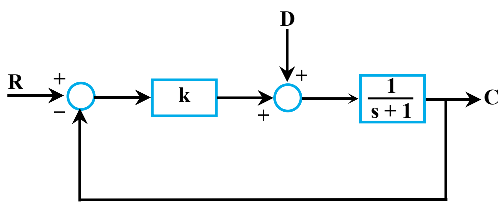
۱) ۹

۲) ۱۸

۳) ۲۴

۴) ۲۷

۱۰ــ در سیستم زیر به ازای چه مقداری از k ، خطای دائمی به ورودی پله واحد در R کوچک‌تر یا مساوی ۱۰ درصد خواهد بود؟



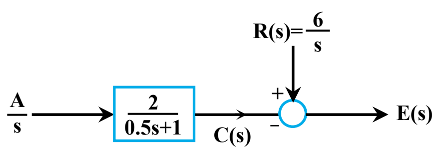
۱) $k \geq ۴/۵$

۲) $k \geq ۹$

۳) $k \geq ۶$

۴) $k \geq ۳$

۱۱ــ در شکل زیر مقدار A را چنان بیابید که $e_{ss} = ۰$.



۱) $A = ۱$

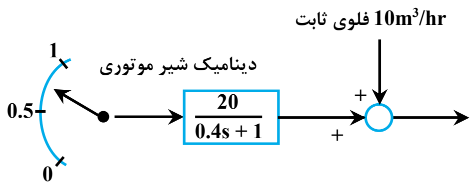
۲) $A = ۲$

۳) $A = ۳$

۴) $A = \frac{۳}{۲}$

۱۲ـ در شکل زیر یک سیستم کنترل حلقه باز نشان داده شده است.

تنظیم شیر موتوری توسط اپراتور صورت می‌گیرد (تنظیم C) به طوری که دو سیال با یکدیگر مخلوط می‌شوند ($0 < C < 1$). یکی از سیال‌ها دارای فلوی ثابت $10 \frac{m^3}{hr}$ است. فلوی خروجی باید $14/6 \frac{m^3}{hr}$ باشد. مقدار تنظیم شیر (C) را برای رسیدن به این مقدار فلوی خروجی در حالت دائمی به دست آورید.



۱) $C = 0/23$

۲) $C = 0/46$

۳) $C = 0/6$

۴) $C = 0/4$

۱۳ـ در کدام یک از ساختارهای شکل زیر کاهش بهره حلقه باعث تضعیف تأثیر اغتشاش N(s) در خروجی خواهد شد؟

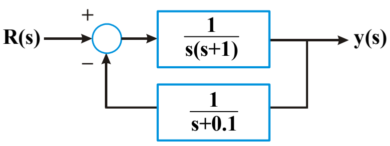
۱) شکل ۱ ۲) شکل ۲ ۳) هر دو ساختار ۴) هیچ‌یک از دو ساختار

۱۴ـ می‌دانیم یک سیستم کنترل در برابر ورودی سهمی واحد خطای دائمی محدودی دارد (مخالف صفر و بی‌نهایت) کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) سیستم حتماً پایدار است. ۲) نوع سیستم، ۲ است.

۳) خطای پله و شیب حتماً صفر است. ۴) خطای پله و شیب صفر است و نوع سیستم، ۳ است.

۱۵ـ نوع سیستم زیر کدام است؟



۱) ۱

۲) ۰

۳) ۲

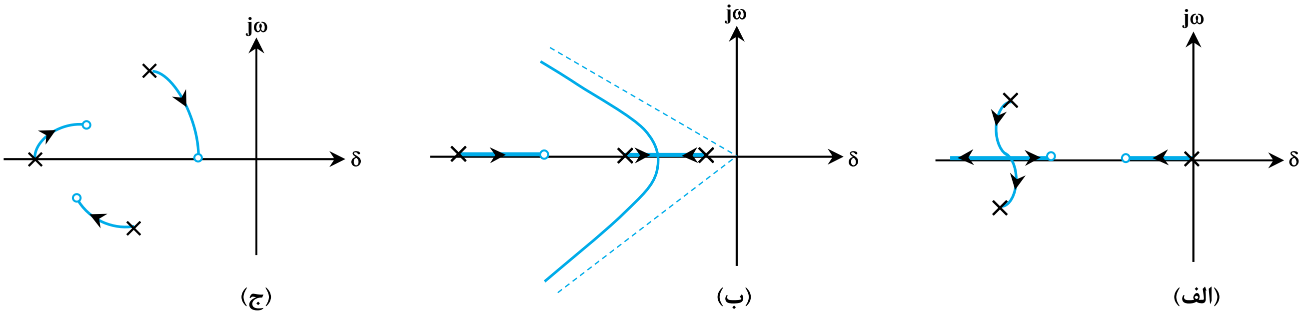
۴) برای این سیستم نوع تعریف نمی‌شود

فصل پنجم

«ابزار گرافیکی تحلیل و طراحی در حوزه زمان»

تست‌های تألیفی فصل پنجم

مثال ۱: کدام شکل نمی‌تواند مکان هندسی ریشه‌ها باشد؟



۱) الف و ج ۲) ب و ج ۳) ج ۴) هر سه مورد

پاسخ: گزینه «۴» گزینه‌های (الف) و (ج) به دلیل عدم تقارن نسبت به محور حقیقی، نمی‌توانند مکان هندسی ریشه‌های سیستمی باشند.

گزینه (ب) نیز نمی‌تواند مکان هندسی باشد؛ چون درجه نسبی سیستم $r=۲$ است، پس زاویه مجانب‌ها به صورت شکل نشان داده شده نیست.

اگر $k>۰$ باشد، زاویه مجانب $\pm\frac{\pi}{۲}$ می‌باشد و اگر $k<۰$ باشد، زاویه مجانب‌ها ۰ و π می‌باشد که در شکل ب، هیچکدام از این دو دیده نمی‌شود.

مثال ۲: معادله مشخصه سیستمی با فیدبک واحد منفی به صورت $F(s)=s^۳+۲s^۲+s(k+۱)+۲k=۰$ است. با فرض $k>۰$ و با توجه به مکان هندسی ریشه‌ها، کدام یک از عبارات زیر درست است؟

۱) فاصله $[-۲,۰]$ از محور حقیقی جزء مکان است و سیستم نوسانی است.

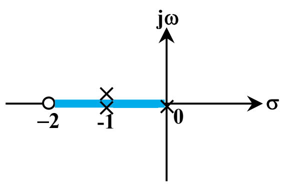
۲) فاصله $[-۱,۰],[-۲,-\infty)$ از محور حقیقی جزء مکان است و محور موهومی مجانب مکان است.

۳) فاصله $[-۲,۰]$ از محور حقیقی جزء مکان است و محور موهومی مجانب مکان است.

۴) فاصله $[-۱,۰],[-۲,-\infty)$ از محور حقیقی جزء مکان است و سیستم برای $k>۰$ پایدار است.

پاسخ: گزینه «۳» قطب‌ها و صفر سیستم را در صفحه s رسم می‌کنیم. مکان روی محور حقیقی، نقاطی است که سمت راست آن‌ها تعداد فردی قطب و صفر وجود داشته باشد. لذا فاصله $[-۲,۰]$ از محور حقیقی جزء مکان است.

معادله مشخصه: $s^۳+۲s^۲+s(k+۱)+۲k=۰ \Rightarrow ۱+k\frac{(s+۲)}{s(s+۱)^۲}=۰ \Rightarrow L(s)=\frac{s+۲}{s(s+۱)^۲}, k>۰$



از طرفی: $r=۲ \rightarrow \sigma_۰=\frac{\sum \text{قطب‌ها}-\sum \text{صفرها}}{r}=\frac{(-۱-۱)-(-۲)}{۲}=۰$

در نتیجه محور موهومی مجانب مکان است.

برای یادآوری دقت کنید که زاویه مجانب‌ها برابر است با $\frac{(۲k'+۱)\pi}{r}$ در نتیجه داریم: $r=۲\ ,\ k'=۰,۱ \Rightarrow \frac{\pi}{۲},-\frac{\pi}{۲}$

مثال ۳: تابع تبدیل حلقه یک سیستم کنترلی به شکل $L(s)=\frac{k}{s(s+a)}$ مفروض است. نقطه شکست مکان هندسی ریشه‌های این سیستم به ازای $k>۰$ و $a>۰$ در کدام گزینه آمده است؟

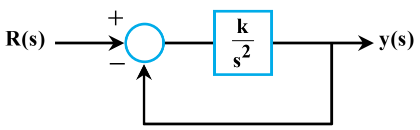
۱) $s=-\frac{a}{۲}$ ۲) $s=\frac{-۲}{a}$ ۳) $s=\frac{-۱}{۲a}$ ۴) نقطه شکست ندارد.

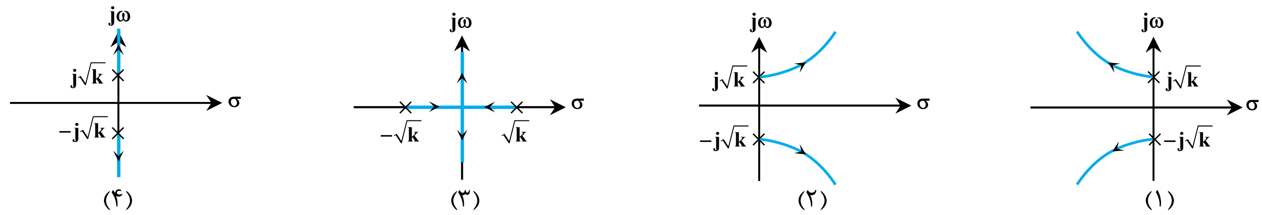
پاسخ: گزینه «۱» برای محاسبه نقطه شکست از رابطه $\frac{dL(s)}{ds}=۰$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{dL(s)}{ds}=۰ \Rightarrow \frac{-۲s-a}{(s(s+a))^۲}=۰ \Rightarrow s=\frac{-a}{۲}$$

البته باید دقت کرد که نقطه شکست روی مکان باشد.

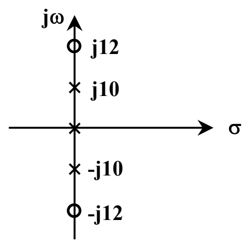
مثال ۴: مکان هندسی ریشه‌های سیستم روبه‌رو، به ازای $k \geq ۰$ کدام است؟

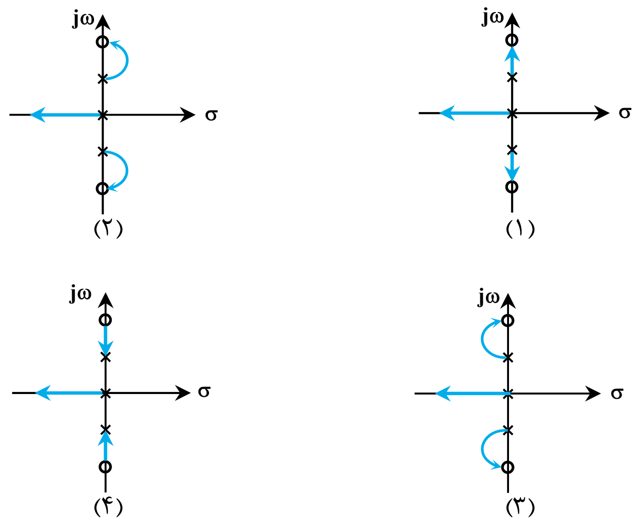




پاسخ: گزینه «۴» معادله مشخصه سیستم عبارت است از $s^۲ + k = ۰$، بنابراین قطب‌ها $\pm j\sqrt{k}$ هستند. همچنین مجانب‌ها، ۲ تا و با زوایـای $\pm ۹۰^\circ$ می‌باشند که روی محور موهومی قرار دارند. دقت کنید که ریشه‌های این سیستم به ازای تغییر k از صفر تا بی‌نهایت همواره موهومی محض است. پس تنها گزینه (۴) می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۵: نمودار قطب ـ صفر تابع حلقه سیستمی به شکل زیر مفروض است. کدام گزینه مکان ریشه‌های این سیستم را به ازای $k > ۰$ نشان می‌دهد؟





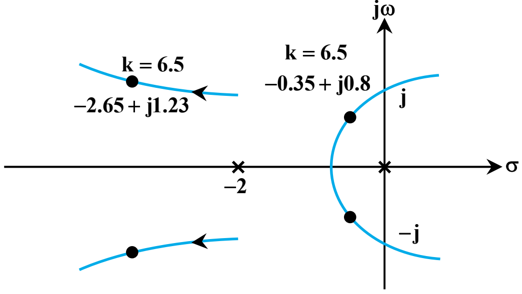
پاسخ : گزینه «۲» از زوایای خروج از قطب‌های $\pm j۱۰$ شکل مکان مشخص می‌شود.

$$\varphi_{۱۰j} = ۱۸۰ - \varphi_۰ - \varphi_{-۱۰j} + \theta_{۱۲j} + \theta_{-۱۲j}$$

$$\varphi_{۱۰j} = ۱۸۰ - ۹۰ - ۹۰ + ۹۰ - ۹۰ = ۰$$

همچنین دقت کنید که به ازای $k > ۰$ مکان از قطب‌ها خارج شده و به سمت صفرها می‌رود، بنابراین گزینه (۴) نمی‌تواند درست باشد.

مثال ۶: مکان هندسی ریشه‌های یک سیستم کنترل در شکل زیر داده شده است. مقدار تقریبی درصد فراجهش پاسخ پله واحد در نقطـه کـار داده شده به ازای $k = ۶/۵$ چقدر است؟



۱) ٪۴۰

۲) ٪۱۰

۳) ٪۵

۴) ٪۲۵

پاسخ: گزینه «۴» به ازای $k = ۶/۵$، قطب غالب مرتبه دوم داریم؛ چراکه جزء حقیقی دو قطب دیگر حدود ۸ برابر دورتر است. بنابراین:

$$(s + ۰/۳۵ + j۰/۸)(s + ۰/۳۵ - j۰/۸) = s^۲ + ۰/۷s + ۰/۷۶۲۵ = ۰ \Rightarrow \xi = ۰/۴ \Rightarrow \%OS \approx ۲۵\%$$

مثال۷: در مثال قبل مقدار تقریبی زمان نشست پاسخ پله واحد سیستم به ازای $k = 6/5$ برابر است با:

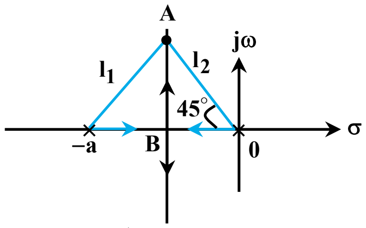
۱) $t_s < 11\,sec$ ۲) $t_s = 11\,sec$ ۳) $t_s > 11\,sec$ ۴) اطلاعات مسأله کافی نیست.

پاسخ : گزینه «۳» سیستم داده شده از مرتبه چهارم است که دو قطب غالب دارد معادله مشخصه سیستم با قطب‌های غالب برابر است با:

$$T(s) = s^2 + 0/7s + 0/7625 = 0 \Rightarrow T_s = \frac{4}{0/35} = 11$$

چون دو قطب دیگر نیز در سیستم حلقه بسته داریم پس زمان نشست بزرگ‌تر از ۱۱ ثانیه خواهد بود.

مثال۸: شکل زیر مکان ریشه‌های یک سیستم مرتبه دوم را نشان می‌دهد. مقادیر l_1 و l_2 نشان داده شده در شکل برابر است با:



۱) $l_1 = l_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ۲) $l_1 = l_2 = \frac{a^2}{2}$ ۳) $l_1 = l_2 = \frac{a^2}{\sqrt{2}}$ ۴) اطلاعات مسأله کافی نیست.

پاسخ : گزینه «۱» تابع تبدیل حلقه سیستم برابر است با:

$$L(s) = \frac{1}{s(s+a)}$$

در این شرایط با توجه به شکل استاندارد معادله مشخصه به شکل:

$$\Delta(s) = 1 + k\frac{1}{s(s+a)} = 0 \Rightarrow s^2 + as + k = 0$$

با توجه به این که $\theta = 45°$، داریم:

$$\cos\theta = \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{OB}{l_2}$$

از طرفی طول OB با طول BA مساوی است و برابر با $\frac{a}{2}$ می‌باشد.

$$l_1 = l_2 = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

از طرفی OB طول نقطه شکست مکان است که همان جزء حقیقی قطب‌ها یا $-\frac{a}{2}$ است. بنابراین:

$$l_1 = l_2 = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

مثال۹: در سؤال قبل بهره k در نقطه A از مکان چقدر است؟

۱) a^2 ۲) $\frac{a^2}{4}$ ۳) $\frac{a^2}{2}$ ۴) $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$

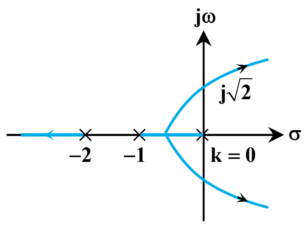
پاسخ : گزینه «۳» از شرط اندازه داریم:

$$|L(s)|_A = \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{l_1 l_2} = \frac{1}{k} \Rightarrow k = l_1 l_2$$

با توجه به اینکه $l_1 = l_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ داریم: $k = \frac{a^2}{2}$

$$|k| = \frac{\text{حاصل‌ضرب طول قطب‌ها تا نقطه موردنظر}}{\text{حاصل‌ضرب طول صفرها تا نقطه موردنظر}} = l_1 l_2 = \frac{a^2}{2}$$

مثال۱۰: اگر مکان هندسی ریشه‌های یک سیستم به صورت زیر باشد، حد k برای پایداری سیستم کدام است؟



۱) $0 < k < \sqrt{2}$

۲) $0 < k < 6$

۳) $0 < k < 1$

۴) هیچ‌کدام

پاسخ : گزینه «۲»

روش اول: معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارت است از:

$$s(s+1)(s+2) + k = 0 \rightarrow s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$$

از آرایه روث داریم:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & k \\ s^1 & \frac{6-k}{3} & \\ s^0 & k & \end{array}$$

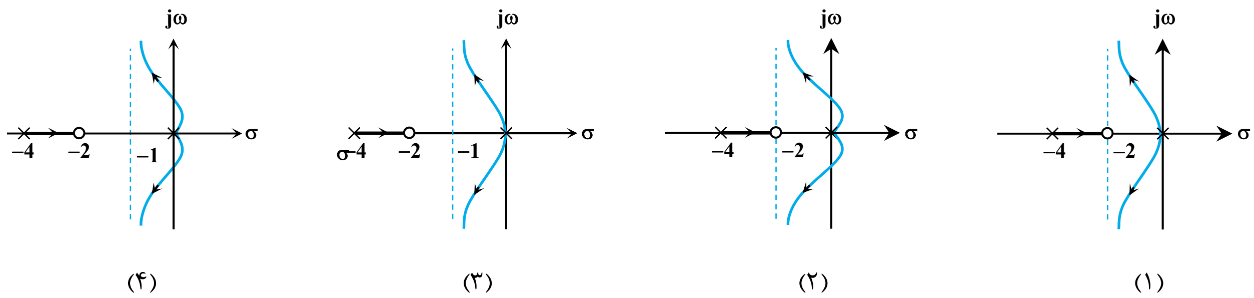
بنابراین محدوده‌ی پایداری $0 < k < 6$ می‌باشد.

روش دوم: از رابطه‌ی $k = -\frac{1}{L(s)}$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$s = j\sqrt{2} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{6}}{1} = 6$$

پس بهره $k = 6$ متناظر با دو قطب روی محور موهومی است.

مثال ۱۱: مکان هندسی قطب‌های حلقه بسته سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز $GH(s) = \frac{k(s+2)}{s^2(s+4)}$ به ازای تغییرات k از صفر تا $+\infty$ کدام است؟



پاسخ : گزینه «۳» محل تلاقی مجانب‌ها با محور افقی را به‌دست می‌آوریم:

$$\sigma = \frac{-4-0+2}{2} = -1$$

سپس با استفاده از آرایه روث بررسی می‌کنیم که آیا مکان محور موهومی را قطع می‌کند یا نه.

معادله مشخصه سیستم عبارت است از:

$$s^2(s+4) + k(s+2) = 0 \rightarrow s^3 + 4s^2 + ks + 2k = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & k \\ s^2 & 4 & 2k \\ s^1 & \frac{k}{2} & \\ s^0 & 2k & \end{array}$$

فقط به ازای $k = 0$ و تنها در مبدأ مکان ریشه‌ها محور موهومی را قطع می‌کند. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

با محاسبه زاویه خروج از قطب مبدأ می‌توان گزینه صحیح را بین گزینه‌های ۳ و ۴ انتخاب کرد.

$$2\varphi_0 = 180 - 0 + 0 \Rightarrow \varphi_0 = 90$$

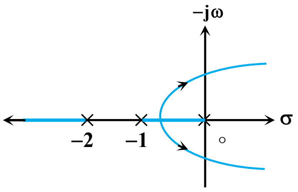
تنها در گزینه (۳) زاویه خروج ۹۰ درجه دیده می‌شود.

تست‌های تألیفی فصل پنجم

۱ـ تابع تبدیل حلقه سیستمی به شکل $L(s)=\dfrac{k}{(s+۱)(s^۲+۴s+۵)}$ مفروض است $(k>۰)$، زاویه خروج مکان ریشه‌های سیستم از قطب $-۲+j$ برابر است با:

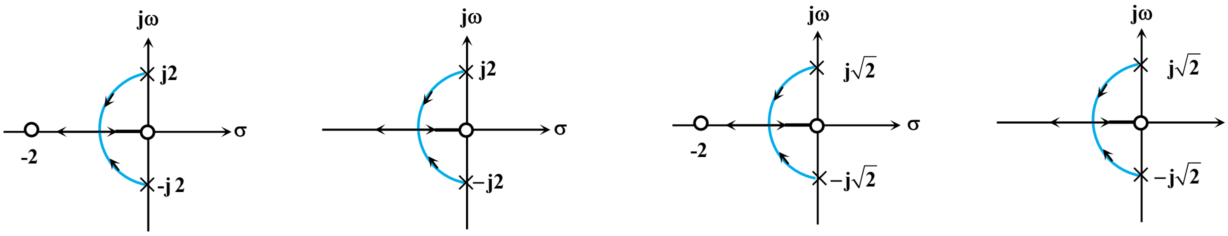
۱) -۳۰° ۲) -۶۰° ۳) -۹۰° ۴) -۴۵°

۲ـ مکان هندسی ریشه‌های سیستمی به شکل زیر مفروض است. اگر بدانیم پاسخ زمانی سیستم نوسانی میرا می‌باشد کدام گزینه صحیح است؟



۱) $۰<k<۰/۴$
۲) $۰/۴<k<۱۲$
۳) $۰/۴<k<۶$
۴) $۶<k<۱۲$

۳ـ مکان هندسی ریشه‌های سیستمی با معادلات حالت و خروجی به شکل $y=(۱\quad ۰)x$ و $\dot{x}=\begin{pmatrix}۰ & ۱\\ -۲ & -k\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}۰\\ ۱\end{pmatrix}u$ به ازای $k>۰$ در کدام گزینه به درستی آمده است؟



۴ـ تابع تبدیل حلقه سیستمی با فیدبک واحد به شکل $\dfrac{k(s+b)}{(s+\alpha+j\beta)(s+\alpha-j\beta)}$ مفروض است، مکان هندسی ریشه‌های این سیستم برحسب k ....

۱) قسمتی از دایره‌ای است به مرکز $(-\frac{b}{۲},۰)$ و شعاع $\sqrt{(\alpha-b)^۲+(\beta-b)^۲}$

۲) قسمتی از دایره‌ای است به مرکز $(-b,۰)$ و شعاع $\sqrt{(\alpha-b)^۲+(\beta-b)^۲}$

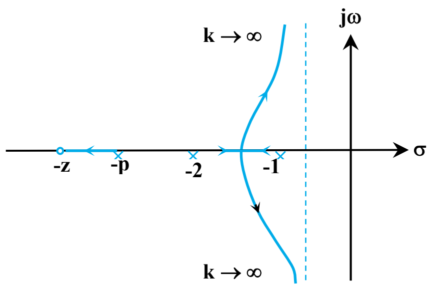
۳) قسمتی از دایره‌ای است به مرکز $(-\frac{b}{۲},۰)$ و شعاع $\sqrt{(\alpha-b)^۲+\beta^۲}$

۴) قسمتی از دایره‌ای است به مرکز $(-b,۰)$ و شعاع $\sqrt{(\alpha-b)^۲+\beta^۲}$

۵ـ پاسخ حلقه بسته یک سیستم کنترلی با $G(s)=\dfrac{k(s+۸)}{s(s+۲)}$, $H(s)=\dfrac{s+۱}{s+۴}$ و فیدبک منفی برای k بزرگ و برای ورودی پله واحد، مشابه پاسخ کدام یک از سیستم‌های حلقه بسته زیر است؟

۱) $\dfrac{۴}{s^۲+s+۱}$ ۲) $\dfrac{۲}{s+۸}$ ۳) $\dfrac{۴}{(s+۱)(s+۸)}$ ۴) $\dfrac{۴}{s+۱}$

۶ـ مکان هندسی ریشه‌های سیستمی مطابق شکل است. کدام گزینه در مورد پایداری سیستم صحیح است؟ (p,z بزرگ‌تر از ۲ می‌باشند).



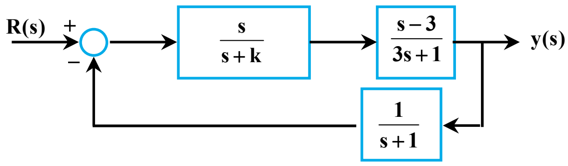
۱) اگر $۰<z-p<۳$ باشد برای تمام k های مثبت سیستم پایدار نیست.

۲) اگر $z-p>۳$ باشد برای تمام k های مثبت سیستم پایدار نیست.

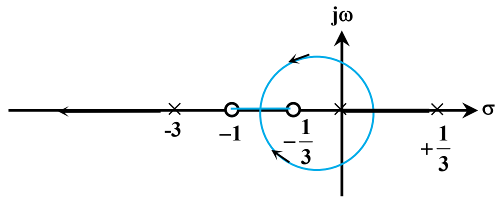
۳) اگر $z-p<۰$ باشد برای تمام k های مثبت سیستم پایدار نیست.

۴) اگر $p=z$ باشد برای تمام k های مثبت سیستم پایدار نیست.

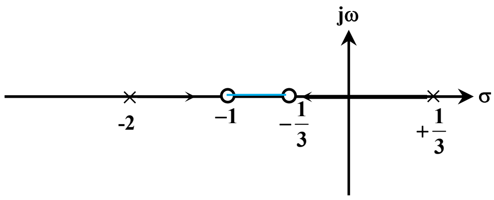
۷ـ مکان هندسی ریشه‌های سیستم زیر برای مقادیر مثبت k در کدام گزینه به درستی رسم شده است؟



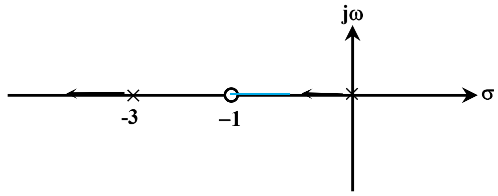
۱)



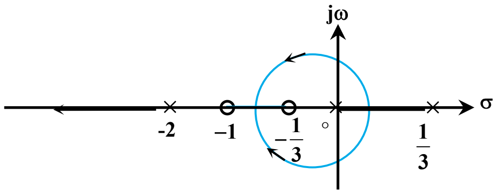
۲)



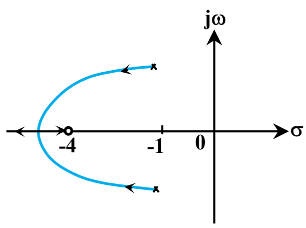
۳)



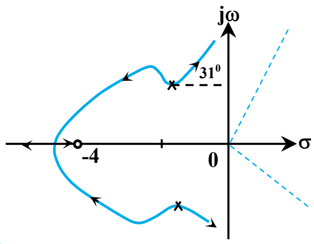
۴)



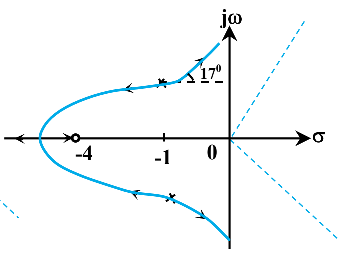
۸ـ در یک سیستم با پس‌خور منفی تابع تبدیل مدار باز به شکل $GH(s)=\dfrac{s+۴}{(s^۲+۲s+۵)^۲}$ است. مکان هندسی ریشه‌های این سیستم کدام شکل تقریبی است؟



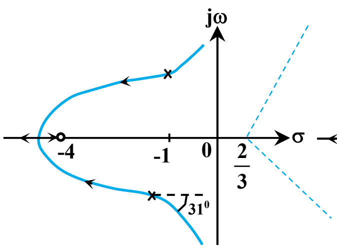
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

۹ـ تابع حلقه ـ باز سیستمی عبارت است از: $G(s)=\dfrac{k(s+۱)^۲}{s^۳(s+۱۰)^۲}$. کدام عبارت در رابطه با مکان ریشه سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد منفی درست است؟

۱) تنها قسمت‌هایی از محور حقیقی منفی بر روی مکان ریشه قرار دارند و سیستم حلقه ـ بسته پایدار شرطی است.

۲) تمام محور حقیقی منفی روی مکان قرار دارد و دو شاخه از مکان ریشه همواره در سمت راست محور موهومی قرار می‌گیرند.

۳) تمام محور حقیقی منفی روی مکان قرار دارد و سیستم حلقه ـ بسته به ازای $k\to\infty$, $k\to ۰$ دو ریشه در سمت راست محور موهومی دارد.

۴) تمام محور حقیقی منفی روی مکان قرار دارد و به ازای مقادیر کوچک بهره دو شاخه در سمت راست و به ازای مقادیر بزرگ‌تر بهره آن دو شاخه به سمت چپ محور حرکت خواهند کرد و به ازای $k\to\infty$ پنج قطب پایدار خواهیم داشت.

۱۰ـ تابع تبدیل حلقه باز سیستمی با فیدبک واحد منفی به شکل $G(s)=\dfrac{۲}{(s+۱)(s+۷)(s^۲+۲s+۲)}$ مفروض است. در مورد معادله مشخصه سیستم به شکل $\Delta(s)=۱+kG(s)=۰$ با تغییرات k کدام گزینه صحیح است؟ $(k>۰)$

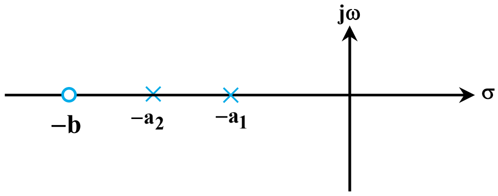
۱) مجموع قطب‌های حلقه بسته ثابت و همواره برابر با ۱۰− می‌باشد.

۲) مجموع قطب‌های حلقه بسته ثابت و همواره برابر با ۹− می‌باشد.

۳) مجموع قطب‌های حلقه بسته ثابت نیست و به k بستگی دارد.

۴) مجموع قطب‌های حلقه بسته ثابت و برابر با ۶− می‌باشد.

۱۱ــ نمودار قطب ــ صفر سیستمی به شکل زیر داده شده است:



کدام گزینه در مورد مکان ریشه‌های این سیستم با تغییر پارامتر k صحیح است؟ $(k > 0)$

۱) مکان ریشه‌ها دایره‌ای است به مرکز $(-b, 0)$ و شعاع $\sqrt{b-a_2}$

۲) مکان ریشه‌ها دایره‌ای است به مرکز $(-b, 0)$ و شعاع $\sqrt{b-a_1}$

۳) مکان ریشه‌ها دایره‌ای است به مرکز $(-b, 0)$ و شعاع $\sqrt{(b-a_1)(b-a_2)}$

۴) مکان ریشه‌ها دایره‌ای است به مرکز $(-b, 0)$ و شعاع $\sqrt{b-(a_1+a_2)}$

۱۲ــ رابطه بین صفر و قطب‌های تابع حلقه سیستمی با فیدبک واحد منفی به شکل $\frac{1}{s+a}\Big|_{s=\sigma} = \frac{1}{s+1-j\sqrt{3}} + \frac{1}{s+1+j\sqrt{3}}$ مفروض است. اگر نقاط شکست مکان ریشه‌های سیستم از حل معادله $\sigma^2 + 4\sigma = 0$ به‌دست آیند، مقدار a برابر است با:

۱) ۴ ۲) −۲ ۳) ۲ ۴) اطلاعات کافی نیست.

۱۳ــ تابع تبدیل حلقه سیستمی با فیدبک واحد منفی به شکل $L(s) = \frac{k(s+2)}{(s+1)(s+3+j)(s+3-j)}$، $(k > 0)$ مفروض است. کدام گزینه در مورد ریشه‌های مشخصه این سیستم صحیح است؟

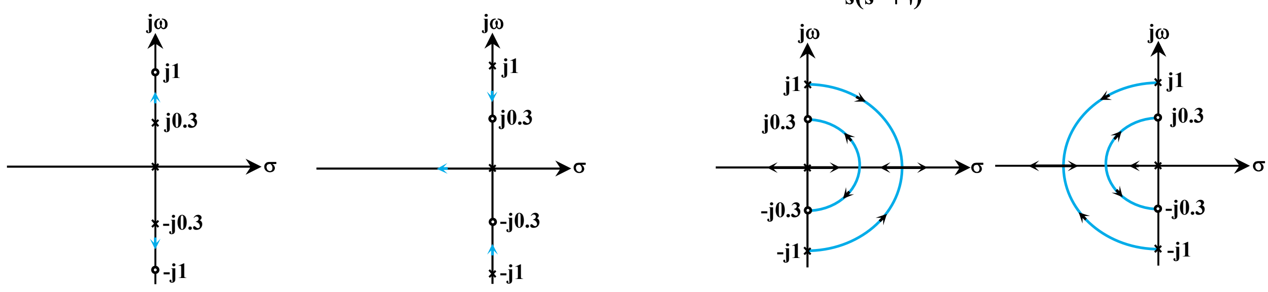
۱) همواره یک ریشه حقیقی و دو ریشه مزدوج مختلط با جزء حقیقی کمتر از $-\frac{9}{2}$

۲) همواره یک ریشه حقیقی و دو ریشه مزدوج مختلط با جزء حقیقی کمتر از $-\frac{5}{2}$

۳) همواره یک ریشه حقیقی و دو ریشه مزدوج مختلط با جزء حقیقی بیشتر از $-\frac{9}{2}$

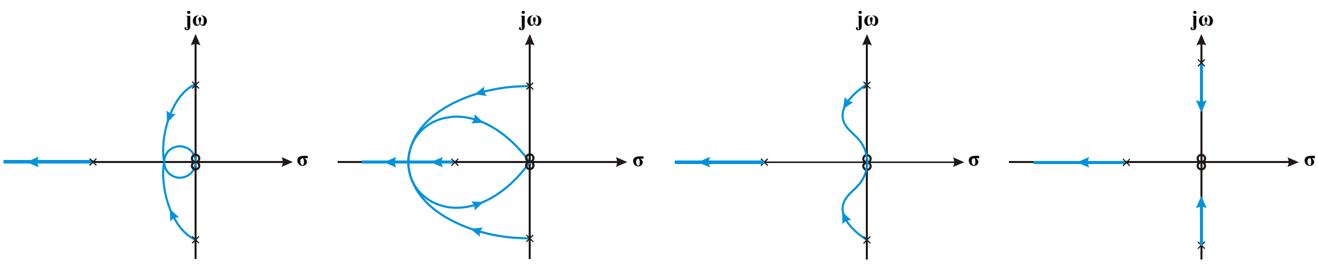
۴) همواره یک ریشه حقیقی و دو ریشه مزدوج مختلط با جزء حقیقی بیشتر از $-\frac{5}{2}$

۱۴ــ کدام دیاگرام زیر مکان ریشه‌ها را وقتی $GH(s) = k\frac{s^2+0/1}{s(s^2+1)}$ است، نشان می‌دهد؟



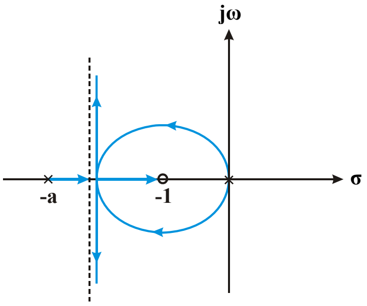
(۴) (۳) (۲) (۱)

۱۵ــ مکان هندسی ریشه‌های سیستمی با معادله مشخصه $\Delta(s) = s^3 + (k+1)s^2 + s + 1 = 0$ به‌ازای $k > 0$ و فیدبک واحد منفی کدام است؟



(۴) (۳) (۲) (۱)

۱۶ـ معادله مشخصه سیستمی $\Delta(s)=s^{۲}(s+a)+k(s+b)=۰$ است که به‌صورت $۱+k\frac{(s+b)}{s^{۲}(s+a)}=۰$ با $b=۱$ بازنویسی شده است. مکان هندسی ریشه‌های آن در شکل زیر آورده شده است. نقطه شکست کدام است؟



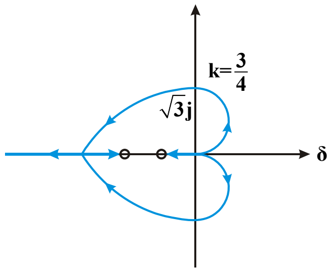
۱) -۵

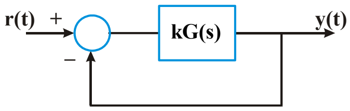
۲) -۴

۳) -۳

۴) -۲

۱۷ـ نمودار مکان هندسی ریشه‌های تابع تبدیل $G(s)$ همراه با فیدبک واحد منفی در شکل زیر آورده شده است. مقدار بهره k را به‌گونه‌ای بیابید تا خطای حالت ماندگار به ورودی $r(t)=(۲+۱/۵t+۲t^{۲}+۱۲t^{۳})u(t)$ برابر ۱۸ گردد.





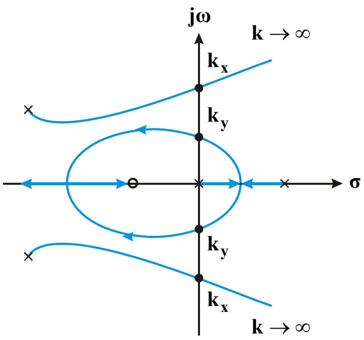
۱) $\frac{۴}{۳}$

۲) ۲

۳) ۴

۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۸ـ مکان هندسی ریشه‌های یک سیستم با فیدبک واحد منفی در شکل زیر آورده شده است. شاخه‌های مکان به‌ازای k_x و k_y با محور موهومی برخورد می‌کنند. کدام گزینه صحیح است.



۱) سیستم حلقه بسته همواره ناپایدار است، چون شاخه‌های مکان سمت راست محور موهومی قرار دارد.

۲) با فرض $k_x<k_y$، سیستم حلقه بسته ناپایدار است و در محدوده $k_x<k<k_y$، ۲ ریشه پایدار و ۲ ریشه ناپایدار دارد.

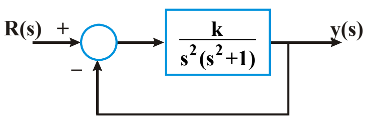
۳) با فرض $k_x<k_y$ سیستم حلقه بسته در محدوده $k_y<k<k_x$ پایدار است.

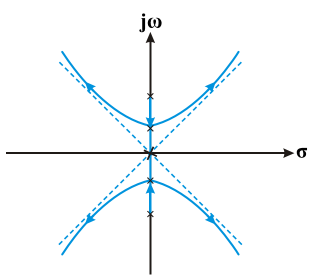
۴) با فرض $k_x>k_y$ سیستم حلقه بسته در محدوده $k_x<k<k_y$، ۴ ریشه سمت چپ محور $j\omega$ دارد.

۱۹ـ نقطه شکست تابع تبدیل سیستمی به‌صورت $G(s)=\frac{ke^{-۲s}}{(s+۱)(s+۲)}$ در کدام گزینه به‌ازای $k<۰$ به‌درستی آمده است؟

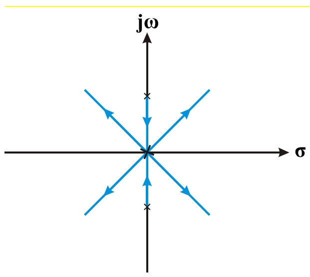
۱) $-۲/۷$ ۲) $-۱/۷$ ۳) $-۱/۳$ ۴) نقطه شکست ندارد

۲۰ـ مکان هندسی ریشه‌های حلقه بسته زیر به‌ازای $k>۰$ کدام است؟

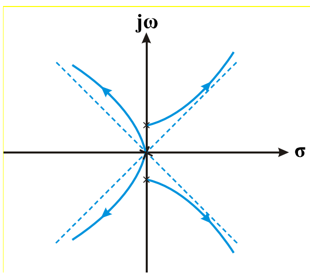




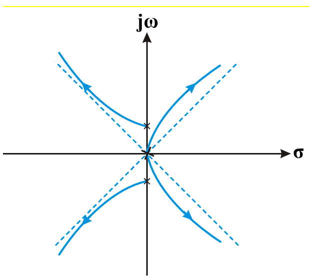
(۱)



(۲)

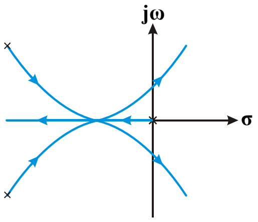


(۳)



(۴)

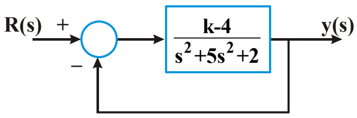
۲۱ـ به‌ازای کدام تعداد از α، مکان هندسی ریشه‌های حلقه بسته برای سیستم $G(s)=\frac{k}{s(3s^2+8s+\alpha)}$ به‌صورت زیر است؟



۱) $\frac{8}{3}$　　۲) $\frac{64}{9}$

۳) $\frac{16}{3}$　　۴) $\frac{4}{9}$

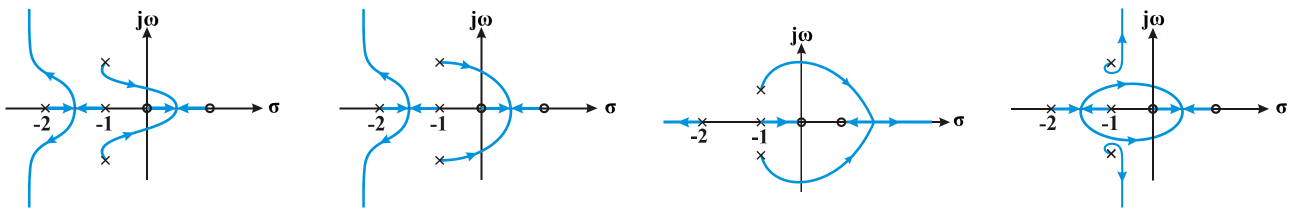
۲۲ـ در سیستم داده شده شکل زیر نقطه شکست و مقدار k که به‌ازای آن قطب‌ها در نقطه شکست قرار می‌گیرند کدام است؟



۱) $k=8/25\ ,\ s=\frac{-5}{2}$　　۲) $k=4/25\ ,\ s=\frac{-9}{4}$

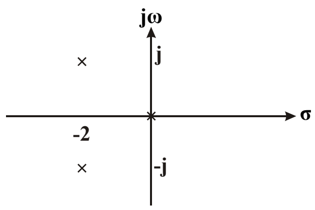
۳) $k=8/25\ ,\ s=\frac{5}{2}$　　۴) $k=4/25\ ,\ s=\frac{-5}{2}$

۲۳ـ مکان هندسی ریشه‌های سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز $G=\frac{k(s)(s-1)}{(s+1)(s+2)(s^2+2s+2)}$ به‌ازای $k\geq 0$ و فیدبک واحد منفی کدام است؟ $(\tan^{-1}2=63^\circ)$



(۴)　　(۳)　　(۲)　　(۱)

۲۴ـ نمودار قطب ـ صفر سیستمی به شکل زیر داده شده است. اگر $s=\frac{-5}{3}$ ریشه مکرر سیستم حلقه بسته باشد، خطای دائمی آن به ورودی $0/1tu(t)$ برابر است با:



۱) ۰/۱

۲) ۲/۷

۳) ۰/۲۷

۴) ۰/۱۷

۲۵ـ تابع تبدیل حلقه باز سیستمی با فیدبک واحد منفی عبارت است از: $G(s)=\frac{k(s+3)}{(s+1)(s+2)}$

بزرگ‌ترین مقدارk که به ازای آن ریشه‌های معادله مشخصه مکرر خواهند بود را انتخاب می‌کنیم در این صورت:

۱) $k=3+\sqrt{2}$، $s=-3-\sqrt{2}$　　۲) $k=3+2\sqrt{2}$، $s=-3+\sqrt{2}$　　۳) $k=3+2\sqrt{2}$، $s=-3-\sqrt{2}$　　۴) $k=3+\sqrt{2}$، $s=-3+\sqrt{2}$

۲۶ـ با توجه به گزاره‌های زیر کدام پاسخ صحیح است؟

گزاره اول: تغییر جزئی در محل صفر و قطب‌ها باعث تغییر جزئی در شکل مکان ریشه‌های سیستم خواهد شد.

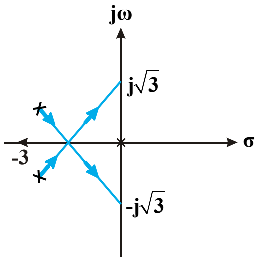
گزاره دوم: مجانب‌های مکان ریشه‌ها رفتار آن را به ازای $|s|\gg 1$ نشان می‌دهند.

گزاره سوم: برای هر نقطه آزمونs روی محور حقیقی مجموع زوایای بردارهای رسم شده از قطب‌های مزدوج مختلط 360° خواهد بود.

۱) فقط گزاره دوم صحیح است.　　۲) گزاره‌های اول و دوم صحیح هستند.

۳) فقط گزاره اول نادرست است.　　۴) هر سه گزاره صحیح هستند.

۲۷ــ مکان ریشه‌های سیستمی با تابع حلقه باز $kG(s)$ و فیدبک واحد منفی به شکل مقابل مفروض است. k را به گونه‌ای تنظیم می‌کنیم کـه همـه ریشه‌های معادله مشخصه یکسان باشند. در این شرایط محل ریشه‌ها و خطای حالت دائمی به ورودی $0/5tu(t)$ برابر است با:



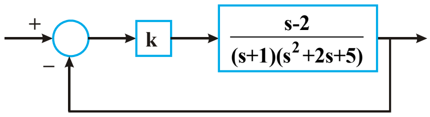
۱) $s = -2$ ، $e_\infty = \frac{1}{2}$

۲) $s = -2$ ، $e_\infty = \frac{3}{4}$

۳) $s = -\frac{3}{4}$ ، $e_\infty = \frac{1}{2}$

۴) $s = -\frac{3}{4}$ ، $e_\infty = \frac{3}{4}$

۲۸ــ سیستم نشان داده شده در شکل زیر مفروض است.



به ازای $k = 5$ کدام گزینه در مورد قطب‌های حلقه بسته صحیح است؟

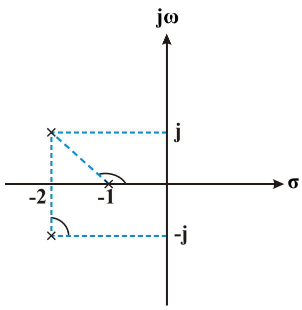
۱) یک ریشه سمت راست و دو ریشه مزدوج مختلط سمت چپ خط $\sigma = -1$ داریم.

۲) یک ریشه حقیقی و دو ریشه مزدوج مختلط سمت چپ خط $\sigma = -1$ داریم.

۳) یک ریشه سمت راست و دو ریشه مزدوج مختلط سمت راست خط $\sigma = -1$ داریم.

۴) یک ریشه حقیقی و دو ریشه مزدوج مختلط سمت راست خط $\sigma = -1$ داریم.

پاسخنامه تست‌های تألیفی فصل پنجم



۱ـ گزینه «۴» محل قرارگیری قطب‌های حلقه باز سیستم در شکل مقابل آورده شده است.

زاویه خروج از قطب $s=-۲+j$ برابر است با:

$$\phi_{-۲+j}=۱۸۰-۹۰-۹۰-\tan^{-۱}۱$$
$$\Rightarrow \phi_{-۲+j}=۱۸۰-۱۸۰-۴۵=-۴۵$$

پس گزینه (۴) صحیح است.

۲ـ گزینه «۳» برای آن‌که پاسخ زمانی سیستم در قالب کلی نوسانی میرا قرار گیرد قطب‌های حلقه بسته باید مزدوج مختلط باشند. لذا بهره حلقه باز باید بین بهره متناظر نقطه شکست مکان و محل تلاقی آن با محور موهومی باشد.

معادله مشخصه متناظر با سیستم را می‌توان به شکل $\Delta(s)=۱+k\dfrac{۱}{s(s+۱)(s+۲)}=۰$ نوشت. از شرط پایداری داریم: $s^۳+۳s^۲+۲s+k=۰$

$$\begin{array}{c|cc} s^۳ & ۱ & ۲ \\ s^۲ & ۳ & k \\ s^۱ & ۶-k & ۰ \\ s^۰ & k & \end{array} \qquad ۰<k<۶$$

از طرفی در نقطه شکست داریم:

$$\frac{dk}{ds}=۰ \Rightarrow ۳s^۲+۶s+۲=۰ \Rightarrow s=-۱\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

که جواب قابل قبول $-۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}=-۰/۴۳$ می‌باشد. مقدار k در این نقطه از شرط اندازه به شکل زیر به‌دست می‌آید:

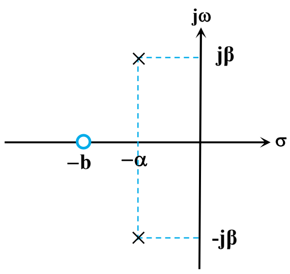
$$|L(s)|=\frac{۱}{k} \Rightarrow \frac{۱}{(۰/۴۳)(۰/۵۷)(۱/۵۷)}=\frac{۱}{k}$$

لذا $k\simeq ۰/۴$. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۳ـ گزینه «۱» معادله مشخصه سیستم حلقه بسته از رابطه $\text{Det}(sI-A)=۰$ به شکل $s^۲+ks+۲=۰$ به‌دست می‌آید.

شکل استاندارد تابع تبدیل حلقه برای رسم مکان هندسی ریشه برابر است با: $\Delta(s)=۱+k\dfrac{s}{s^۲+۲}=۰$

و لذا $s=۰$؛ تنها صفر سیستم و قطب‌های آن در $s=\pm j\sqrt{۲}$ واقع‌اند.



۴ـ گزینه «۴» کافی است نقطه شکست مکان را محاسبه کنیم.

$$\frac{dG(s)}{ds}=۰ \Rightarrow s^۲+۲\alpha s+\alpha^۲+\beta^۲-(۲s+۲\alpha)(s+b)=۰$$

و یا:

$$s^۲+۲bs+۲\alpha b-\alpha^۲-\beta^۲=۰$$

ریشه‌های این معادله عبارتند از:

$$s=-b\pm\sqrt{b^۲-۲\alpha b+\alpha^۲+\beta^۲}$$

و یا:

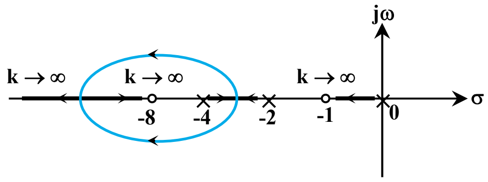
$$s=-b\pm\sqrt{(\alpha-b)^۲+\beta^۲}$$

پس گزینه (۴) صحیح است.

۵ـ گزینه «۴» تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از:

$$T(s)=\frac{k(s+۸)(s+۴)}{s(s+۲)(s+۴)+k(s+۸)(s+۱)}$$

مکان ریشه‌های سیستم نیز به شکل مقابل رسم می‌شود. بهره DC سیستم برابر ۴ $T(\circ)=$ می‌باشد. بنابراین یکی از گزینه‌های (۱) یا (۴) صحیح است. به ازای مقادیر بزرگ k با توجه به مکان ریشه‌های سیستم، سه ریشه حقیقی منفی داریم و بنابراین پاسخ نمی‌تواند نوسانی باشد.



۶ـ گزینه «۲» شرط پایداری سیستم آن است که محل تلاقی مجانب‌ها سمت چپ محور موهومی باشد و لذا:

$$\sigma_\circ=\frac{-p-۲-۱+z}{۲}<\circ\Rightarrow z-p<۳$$

در نتیجه به ازای $z-p>۳$ سیستم همواره پایدار نمی‌باشد، چون در این حالت دو شاخه از مکان هندسی ریشه‌ها به سمت راست حرکت می‌کنند.

۷ـ گزینه «۴» معادله مشخصه را به شکل استاندارد بازنویسی می‌کنیم:

$$\Delta(s)=۱+\frac{s}{s+k}\frac{s-۳}{۳s+۱}\frac{۱}{s+۱}=\circ\quad\Rightarrow\quad(۳s^۲+۴s+۱)(s+k)+s^۲-۳s=\circ$$

و یا:

$$۳s^۳+۳ks^۲+۴s^۲+۴ks+s+k+s^۲-۳s=\circ\quad\Rightarrow\quad۳s^۳+۵s^۲-۲s+k(۳s^۲+۴s+۱)=\circ$$

بنابراین داریم:

$$\Delta(s)=۱+k\frac{(۳s+۱)(s+۱)}{s(۳s-۱)(s+۲)}=\circ$$

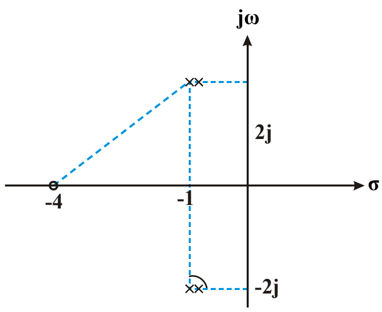
از موقعیت قطب و صفرها واضح است که گزینه (۴) صحیح است.

۸ـ گزینه «۳» با توجه به این که درجه نسبی تابع تبدیل مدار باز ۳ می‌باشد لذا مکان ریشه‌ها سه مجانب با زوایای $\pm۶\circ^\circ$ و $۱۸\circ^\circ$ دارد. بنابراین گزینه ۱ غلط است. با محاسبه محل تقاطع مجانب‌ها داریم:

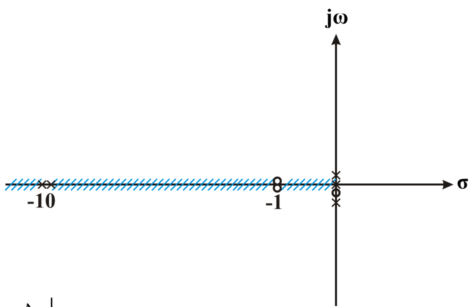
$$\sigma_\circ=\frac{-۱-۱-۱-۱-(-۴)}{۳}=\circ$$

پس گزینه (۴) نیز اشتباه است. با محاسبه زاویه خروج مکان از قطب‌های مزدوج مختلط می‌توان به گزینه صحیح رسید.

$$۲\phi_{-۱+۲j}=۱۸\circ-۹\circ-۹\circ+\tan^{-۱}\frac{۲}{۳}=۳۳\;\Rightarrow\phi_{-۱+۲j}=۱۶/۸^\circ$$



۹ـ گزینه «۳» مکان هندسی روی محور حقیقی برای تابع تبدیل داده شده به‌صورت مقابل است: یعنی کل محور حقیقی منفی را در برمی‌گیرد، چون تعداد فرد قطب و صفر سمت راست آن قرار دارد. پس گزینه (۱) اشتباه است.



معادله مشخصه سیستم برابر است با:

$$\Delta(s)=s^۵+۲\circ s^۴+۱\circ\circ s^۳+ks^۲+۲ks+k=\circ$$

جدول روث را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{c|ccc}
s^۵ & ۱ & ۱\circ\circ & k\\
s^۴ & \cancel{۲\circ}\;۱\circ & \cancel{۱\circ\circ}\;۵\circ & \cancel{۲k}\;k\\
s^۳ & ۹۵ & \circ/۹k & \\
s^۲ & \frac{۴۷۵\circ-۹k}{۹۵} & k & \\
s^۱ & \frac{-۸/۱k^۲-۹\circ۲۵k+۴۲۷۵}{۴۷۵\circ-۹k} & & \\
s^\circ & k & &
\end{array}$$

به‌راحتی می‌توان دید که به‌ازای $k \to \infty$ سیستم ناپایدار است و گزینه (۴) نیز نمی‌تواند صحیح باشد.

به‌ازای $k \to \infty$ عبارت $\frac{-8.1k^2-9025k+4275}{4750-9k}$ مثبت می‌شود و به‌ازای $k \to \infty$ عبارت $4750-9k$ منفی می‌گردد و دو ریشه در سمت راست محور موهومی ایجاد می‌کنند.

۱۰ــ گزینه «۱» اگر درجه نسبی بزرگ‌تر یا مساوی دو باشد مجموع ریشه‌های مشخصه ثابت است و به k بستگی ندارد. به ازای $k=0$ ریشه‌های مشخصه عبارتند از $-1\pm j$ و -7 و -1 و لذا مجموع ریشه‌ها ثابت و برابر با -10 می‌باشد.

۱۱ــ گزینه «۳» نقاط شکست مکان از رابطه $\frac{dL(s)}{ds}=0$ به‌دست می‌آیند. معادله مشخصه را می‌توان به شکل زیر نوشت. لذا:

$$L(s)=\frac{s+b}{(s+a_1)(s+a_2)}$$

با مشتق‌گیری داریم:

$$s^2+(a_1+a_2)s+a_1a_2-(2s+a_1+a_2)(s+b)=0$$

و یا:

$$s^2+2bs+a_1b+a_2b-a_1a_2=0$$

ریشه‌های این معادله عبارتند از:

$$-b\pm\sqrt{b^2-(a_1+a_2)b+a_1a_2}$$

و یا:

$$-b\pm\sqrt{(b-a_1)(b-a_2)}$$

بنابراین مکان دایره‌ای است به مرکز $(-b,0)$ و شعاع $\sqrt{(b-a_1)(b-a_2)}$.

۱۲ــ گزینه «۳» در نقاط شکست مکان ریشه‌های سیستم $\sum_i \frac{1}{s-z_j}=\sum_i \frac{1}{s-p_i}$ که p_i قطب‌های تابع حلقه و z_j صفرهای آن به‌شمار می‌آیند.

لذا از حل معادله داده شده نقاط شکست به‌دست می‌آیند که از مقایسه آن با معادله $\sigma^2+4\sigma=0$ به پاسخ صحیح خواهیم رسید. با ساده‌سازی معادله داده شده داریم:

$$\frac{s+1-j\sqrt{3}+s+1+j\sqrt{3}}{(s+1+j\sqrt{3})(s+1-j\sqrt{3})}=\frac{1}{s+a} \Rightarrow 2(s+1)(s+a)=(s+1)^2+3$$

و یا:

$$2(s^2+(a+1)s+a)=s^2+2s+4$$

لذا:

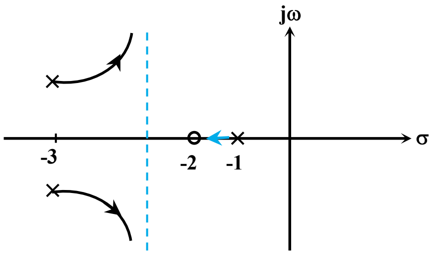
$$s^2+2as+2a-4=0$$

از مقایسه با: $s^2+4s=0$ داریم: $a=2$.

لذا صفر تابع تبدیل حلقه سیستم در $s=-2$ واقع است و در حقیقت:

$$L(s)=\frac{k(s+2)}{(s+1+j\sqrt{3})(s+1-j\sqrt{3})}$$

۱۳ــ گزینه «۲» مکان ریشه‌های سیستم به شکل زیر قابل ترسیم است:



لذا ریشه‌های معادله مشخصه شامل یک ریشه حقیقی و دو ریشه مزدوج مختلط با جزء حقیقی کمتر از σ_0 (محل تلاقی مجانب‌ها) می‌باشد.

از طرفی داریم:

$$\sigma_0=\frac{-3+j-3-j-1-(-2)}{2}=-\frac{5}{2}$$

۱۴ــ گزینه «۱»

روش اول: معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارت است از:

$$\Delta(s)=s^{۳}+ks^{۲}+s+۰/۱k$$

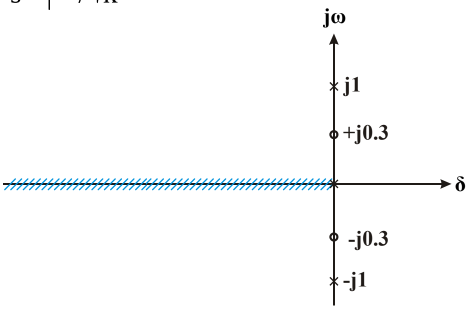
از آرایه روث داریم:

$$\begin{array}{l|ll} s^{۳} & ۱ & ۱ \\ s^{۲} & k & ۰/۱k \\ s^{۱} & ۰/۹ & ۰ \\ s^{۰} & ۰/۱k & \end{array}$$

بنابراین به ازای $k>۰$ سیستم پایدار است و ریشه‌های روی محور موهومی ندارد. چنین شرایطی تنها در گزینه (۱) قابل مشاهده است.

روش دوم: مکان هندسی ریشه‌ها را به‌ازای $k>۰$ رسم می‌کنیم. مکان هندسی روی محور حقیقی در شکل مقابل نشان داده شده است.

پس گزینه (۴) اشتباه است.



نقطه شکست را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{dG(s)}{ds}=۰\Rightarrow(۲s)(s)(s^{۲}+۱)-(۳s^{۲}+۱)(s^{۲}+۰/۱)=۰\Rightarrow s=\pm۰/۷۰۷\ ,\ \pm۰/۴۴۷$$

چون $s=-۰/۴۴۷$ و $s=-۰/۷۰۷$ روی مکان هندسی قرار ندارند، پس غلط است و $s=۰/۷۰۷$ و $s=۰/۴۰۴$ صحیح است. یعنی گزینه (۱) صحیح است. همچنین می‌توان زاویه خروج از قطب $j۱$ یا ورود به صفر $j۰/۳$ را محاسبه کرد. برای این کار داریم:

زاویه خروج از قطب $s=j۱$:

$$\phi_{j۱}=۱۸۰-۹۰-۹۰+۹۰+۹۰=۱۸۰$$

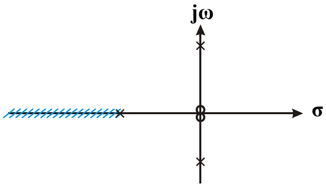
زاویه ورود به صفر $s=j۰/۳$:

$$\theta_{۰/۳j}=۱۸۰-۹۰+۹۰+۹۰-۹۰=۱۸۰$$

دو زاویه به‌دست آمده تنها در گزینه (۱) صدق می‌کند.

۱۵ــ گزینه «۲» تابع تبدیل حلقه باز $G=\dfrac{ks^{۲}}{s^{۳}+s^{۲}+s+۱}$ است.

مکان روی محور حقیقی به‌صورت مقابل است.



تعداد شاخه‌ها برابر با $\max(۲,۳)=۳$ است. یک مجانب وجود دارد که زاویه آن برابر است با: $\dfrac{\pi}{۱}=\pi$

برای بررسی نقطه شکست داریم:

$$\frac{dG}{ds}=۰\Rightarrow ۲s(s^{۳}+s^{۲}+s+۱)-(۳s^{۲}+۲s+۱)s^{۲}=۰$$

$$\Rightarrow -s^{۴}+s^{۲}+۲s=۰\Rightarrow s=۰\ ,۱/۵۲\ ,-۰/۷۶\pm۰/۸۵j$$

چون مرتبه سیستم ۳ است، $s=-۰/۷۶\pm۰/۸۵j$ نمی‌تواند نقطه شکست باشد. همچنین $k=-\dfrac{۱}{GH(s)}\Big|_{s=۱/۵۲}<۰$ است که در شرط سؤال صدق نمی‌کند. $s=۰$ نیز نقطه شکست است، چون دو صفر در مبدأ قرار دارند و این دو صفر، صفرهای حلقه باز هستند. زاویه ورود و خروج:

زاویه خروج از قطب: $s=+j$

$$\phi_{j}=۱۸۰-۹۰+۹۰+۹۰-۴۵=۲۲۵$$

زاویه ورود به صفر: $s=۰$

$$۲\theta_{۰}=۱۸۰-۰+۰\Rightarrow\theta_{۰}=۹۰$$

پس گزینه (۲) صحیح است.

۱۶ـ گزینه «۳» نقطه شکست از مرتبه ۳ است، یعنی ۳ قطب حلقه بسته در آن به هم می‌رسند؛ در نتیجه در آن نقطه شکست، معادله مشخصه ریشه‌های مکرر دارد. برای نقطه شکست داریم:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s}+\frac{1}{s+a}=\frac{1}{s+1} \Rightarrow \frac{2}{s}+\frac{1}{s+a}=\frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow 2s^2+(3+a)s+2a=0 \Rightarrow \Delta=(3+a)^2-4(2)(2a)=0 \Rightarrow \Delta=a^2-10a+9=0$$

$$\Delta=(a-1)(a-9)=0 \Rightarrow a=1\ ,\ a=9$$

باید بین دو مقدار به‌دست آمده مقدار درست را انتخاب کنیم و نقطه شکست را به‌دست آوریم.

با توجه به مجانب رسم شده داریم:

$$\text{مجانب} \rightarrow \sigma_0=\frac{-a+1}{2} \rightarrow -a<\frac{-a+1}{2}<-1 \rightarrow a>3$$

در نتیجه $a=9$ درست است. نقطه شکست برابر است با:

$$2s^2+(12s)+18=0 \rightarrow s=-3$$

پس گزینه (۳) صحیح است.

۱۷ـ گزینه «۱» از آن‌جایی که سه شاخه از مبدأ خارج شده است، پس حتماً سه قطب در مبدأ داریم. همچنین محل قرارگیری دو صفر حلقه باز مشخص نشده است. پس داریم:

$$G(s)=k\frac{(s+a)(s+b)}{s^3}$$

با تشکیل جدول روث، k بحرانی و محل برخورد را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta(s)=1+k\frac{(s+a)(s+b)}{s^3}=0$$

$$\Delta(s)=s^3+k(s^2+(a+b)s+ab)=0 \Rightarrow \Delta(s)=s^3+ks^2+k(a+b)s+kab=0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & k(a+b) \\ s^2 & \cancel{k}\ 1 & \cancel{kab}\ ab \\ s^1 & k(a+b)-ab & \\ s^0 & ab & \end{array} \Rightarrow k(a+b)-ab=0 \Rightarrow k=\frac{ab}{a+b}=\frac{3}{4}$$

$$A(s)=s^2+ab=0 \Rightarrow s=\pm\sqrt{ab}\,j \Rightarrow ab=3 \Rightarrow a+b=4$$

برای محاسبه خطای حالت ماندگار باید توجه داشت که خطای این سیستم که از نوع ۳ است به ورودی $r(t)=(2+1/5t+2t^2)u(t)$ برابر صفر است و تنها باید خطای ورودی $12t^3u(t)$ محاسبه شود.

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\times(1-T(s))\times\frac{72}{s^4}=18 \Rightarrow e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s^3+ks^2+k(a+b)s+kab-ks^2-k(a+b)s+kab}{s^3+ks^2+k(a+b)s+kab}\times\frac{72}{s^3}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{s^3}{kab}\times\frac{72}{s^3}=18 \Rightarrow \frac{72}{k\times 3}=18 \Rightarrow k=\frac{72}{3\times 18}=\frac{4}{3}$$

۱۸ـ گزینه «۳» با توجه به مکان هندسی سیستم داده شده نمی‌توان به‌طور قطع گفت که سیستم همواره ناپایدار است؛ چون ممکن است که قبل از رفتن دو شاخه بالایی به‌سمت راست محور موهومی شاخه پایینی به سمت چپ محور موهومی بیاید. پس گزینه (۱) غلط است.

اگر $k_x<k_y$ فرض شود، سیستم ناپایدار است اما در محدوده $k_x<k<k_y$، هر ۴ ریشه در سمت راست محور موهومی قرار دارند. پس گزینه (۲) اشتباه است.

اگر $k_y<k_x$ فرض شود، در محدوده $k_y<k<k_x$ سیستم با چهار ریشه در سمت چپ محور $j\omega$ پایدار است. پس گزینه (۳) صحیح است.

اگر $k_x<k_y$ فرض شود، در محدوده $k_x<k<k_y$ هر ۴ ریشه در سمت راست محور موهومی قرار دارند. پس گزینه (۴) غلط است.

۱۹ـ گزینه «۱» دقت کنید که با وجود تأخیر در تابع تبدیل، روند یافتن نقطه شکست همانند قبل است.

$$\frac{dG(s)}{ds}=0 \Rightarrow -2e^{-2s}(s^2+3s+2)-(2s+3)e^{-2s}=0$$

$$e^{-2s}(-2s^2-8s-7)=0 \Rightarrow s_1=-2/7 \qquad s_2=-1/3$$

این دو باید حتماً در شرط $k=-\frac{۱}{G(s)}>۰$ صدق کنند؛ چون نمی‌توان مکان را بر روی محور حقیقی به‌سادگی مشخص کرد. نکته مهم این‌که با انتخاب تقریب‌های پده با مرتبه‌های متفاوت مکان هندسی متفاوتی به‌دست می‌آید. برای به دست آوردن مکان هندسی این تابع تبدیل بهتر است $e^{-۲s}$ را با تقریب پده مرتبه بالا تقریب بزنیم.

$$k=-\frac{۱}{G(s)}\bigg|_{s=s_۱}=-۰/۰۰۵۴<۰$$

$$k=-\frac{۱}{G(s)}\bigg|_{s=s_۲}=۰/۰۱۵۶>۰$$

تنها $s=-۲/۷$ در شرط بهره صدق می‌کند، یعنی گزینه (۱) صحیح است.

۲۰ـ گزینه «۱» هیچ قسمتی از محور حقیقی جزء مکان هندسی نیستند. مکان ۴ مجانب دارد که زاویه آن‌ها $\frac{\pi}{۴}$ است در واقع زاویه مجانب‌ها $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$ و $\frac{-\pi}{۴}$ و $\frac{-۳\pi}{۴}$ است. محل تلاقی مجانب‌ها $\sigma_۰=۰$ است.

زاویه خروج از قطب $s=j$:

$$\phi_j=۱۸۰-۹۰-۹۰-۹۰=-۹۰$$

پس گزینه (۳) و (۴) غلط است.

زاویه خروج از قطب $s=۰$:

$$۲\phi_۰=۱۸۰\Rightarrow\phi_۰=۹۰$$

برای محاسبه نقطه شکست داریم:

$$\frac{dG(s)}{ds}=۰\Rightarrow ۴s^۳+۲s=۰\Rightarrow ۲s(۲s^۲+۱)=۰\Rightarrow s=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}j$$

۲۱ـ گزینه «۲» همان‌طور که در شکل دیده می‌شود ۳ ریشه در یک نقطه به هم می‌رسند. پس نقطه شکست ریشه مکرر باید داشته باشد.

نقطه شکست:

$$\frac{dG(s)}{ds}=۰\Rightarrow ۹s^۲+۱۶s+\alpha=۰\Rightarrow\Delta=۰$$

$$\Delta=۱۶^۲-۴(۹)(\alpha)=۰\Rightarrow\alpha=\frac{۶۴}{۹}$$

۲۲ـ گزینه «۱» برای حل این سؤال باید دقت کرد که نمی‌توان $k-۴$ در صورت تابع تبدیل را با یک k' عوض کرد. در این‌صورت به جواب اشتباه می‌رسیم. تابع تبدیل در فرم استاندارد به‌صورت زیر است.

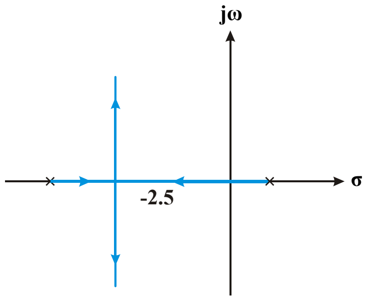
$$\Delta(s)=s^۲+۵s+۲+k-۴=۰$$

$$\Delta(s)=s^۲+۵s+k-۲\Rightarrow\Delta(s)=۱+\frac{k}{s^۲+۵s-۲}$$

با توجه به گزینه‌ها $k>۰$ است. پس داریم:

$$\frac{dG(s)}{ds}=۰\Rightarrow ۲s+۵=۰\Rightarrow s=\frac{-۵}{۲}$$

$$k=-\frac{۱}{G(s)}\bigg|_{s=\frac{-۵}{۲}}=۸/۲۵$$



در واقع مکان هندسی تابع تبدیل داده شده به‌صورت مقابل است.

با تغییر $k-۴$ به k' به جواب اشتباه زیر می‌رسید.

$$k=۴/۲۵\ ,\ s=-۲/۵$$

۲۳ـ گزینه «۴» با توجه به بهره منفی گزینه (۲) نمی‌تواند صحیح باشد، چون طبق قواعد بهره مثبت رسم شده است. محل قرارگیری مجانب‌ها و تعداد آن‌ها و همچنین زاویه آن‌ها برابر است با:

$$\text{تعداد مجانب‌ها}: n-m=۲ \text{، محل برخورد مجانب‌ها} \Rightarrow \sigma_\circ=\frac{-۱-۲-۱-۱-۱}{۲}=-۳ \quad \text{و} \quad \text{زاویه}: \frac{\pi}{۲} \text{ و } \frac{-\pi}{۲}$$

با توجه به محل برخورد مجانب‌ها گزینه (۱) نیز نمی‌تواند صحیح باشد. پس تنها کافی است زاویه خروج از قطب را به‌دست آوریم.

$$\phi_{-۱+j}=۱۸\circ-۹\circ-۹\circ-۴۵+۹\circ+۴۵+\tan^{-۱}۲+۹\circ=۲۴۳^\circ$$

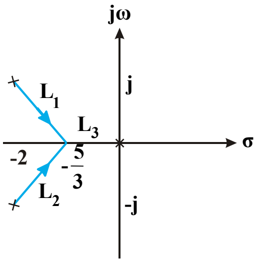
۲۴ـ گزینه «۳» از شرط اندازه در $s=\frac{-۵}{۳}$ داریم:

$$|L(s)|=\frac{۱}{k} \Rightarrow k=\frac{۱}{|L(s)|}=L_۱L_۲L_۳$$

به‌طوری که:

$$k=\frac{\sqrt{۱\circ}}{۳}\frac{\sqrt{۱\circ}}{۳}\frac{۵}{۳}=\frac{۵\circ}{۲۷}$$

و لذا:

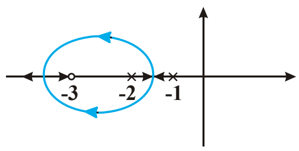


$$G(s)=\frac{k}{s(s^۲+۴s+۵)}$$

بنابراین:

$$k_V=\lim_{S\to\circ}sG(s)=\frac{k}{۵}=\frac{\frac{۵\circ}{۲۷}}{۵}=\frac{۱\circ}{۲۷} \Rightarrow e_\infty=\frac{۱}{k_V}\times\frac{۱}{۱\circ}=\frac{۲۷}{۱\circ}\times\frac{۱}{۱\circ}=\circ/۲۷$$

۲۵ـ گزینه «۲» توان ریشه‌های سیستم به شکل زیر است:



لذا بزرگ‌ترین مقدار k که به ازای آن ریشه‌های مکرر داریم در دومین نقطه شکست (سمت چپ ۳-) اتفاق می‌افتد.

دقت کنید که در نقطه شکست داریم:

$$\frac{dL(s)}{ds}=\circ \rightarrow (s+۱)(s+۲)-(۲s+۳)(s+۳)=\circ$$

و با:

$$s^۲+۶s+۷=\circ \rightarrow s=-۳\pm\sqrt{۲}$$

لذا دومین نقطه شکست $-۳-\sqrt{۲}$ خواهد بود و این نتیجه در محاسبه k از شرط اندازه استفاده می‌شود.

در این نقطه از شرط اندازه داریم:

$$|L(s)|=\frac{۱}{k} \rightarrow k=\frac{۱}{|L(s)|}=\frac{L_{p_۱}L_{p_۲}}{L_Z}=\frac{(۱+\sqrt{۲})(۲+\sqrt{۲})}{\sqrt{۲}}=۳+۲\sqrt{۲}$$

۲۶ـ گزینه «۳» تغییر جزئی در محل صفر و قطب‌ها ممکن است شکل مکان ریشه را به کلی تغییر دهد.

۲۷ـ گزینه «۲» تابع تبدیل $kG(s)$ را برای این سیستم می‌توان به شکل مقابل نوشت:

$$kG(s)=\frac{k}{s(s+۳+j\sqrt{۳})(s+۳-j\sqrt{۳})}=\frac{k}{s(s^۲+۶s+۱۲)}$$

برای آن‌که همه ریشه‌های معادله مشخصه یکسان باشند k در نقطه شکست مکان تنظیم می‌شود که هر سه شاخه به یکدیگر برخورد می‌کنند. در این شرایط:

$$\frac{dG}{ds}=\circ \rightarrow ۳s^۲+۱۲s+۱۲=\circ \rightarrow s^۲+۴s+۴=\circ \rightarrow s=-۲$$

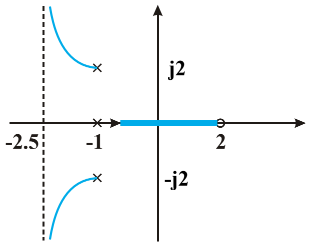
در این شرایط:

$$\Delta(s)=s^۳+۶s^۲+۱۲s+k=\circ \Rightarrow k=۸$$

برای محاسبه خطای دائمی به ورودی $\circ/۵tu(t)$ با توجه به پایداری حلقه بسته (مکان هنوز به $j\omega$ برخورد نکرده است، چراکه نقطه کار در شکست تنظیم شده است) داریم:

$$k_V=\frac{k}{۱۲} \rightarrow e_\infty=\circ/۵\frac{۱}{k_V}=\circ/۵\frac{۱۲}{k}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$$

۲۸ـ گزینه «۱» مکان ریشه‌های سیستم با تغییرات k به شکل زیر است:



از معیار روث شرط پایداری حلقه بسته را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta(s) = s^۳ + ۳s^۲ + (۷+k)s + ۵ - ۲k = ۰$$

$$\begin{array}{lll} s^۳ & ۱ & ۷+k \\ s^۲ & ۳ & ۵-۲k \\ s^۱ & A & ۰ \\ s^۰ & ۵-۲k & \end{array}$$

و لذا: $۰ < k < \frac{۵}{۲}$.

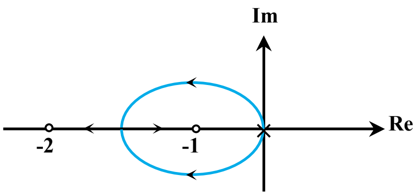
به ازای $k = ۵$ سیستم ناپایدار است و با توجه به شکل ریشه‌ها گزینه (۱) صحیح است.

آزمون فصل پنجم

۱ـ سیستمی با تابع حلقه $L(s)=\frac{۰/۲k(s+۵)}{(s+۱)^۳}$ مفروض است. به ازای $k>۰$ محل برخورد مجانب‌های مکان ریشه‌های این سیستم با محور حقیقی برابر است با:

۱) ۱   ۲) ۱-   ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{-۱}{۲}$

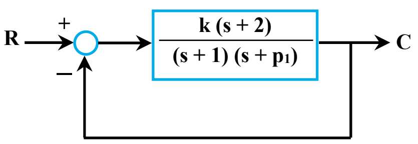
۲ـ شکل زیر مکان هندسی ریشه‌های یک سیستم حلقه بسته را نشان می‌دهد. بهره k به طوری است که سیستم دارای قطب‌هایی با نسبت میرایی $\zeta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ گردد، مقدار ω_n به‌ازای این بهره چیست؟



۱) $\omega_n=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}, k=\frac{۵}{۴}$ ۲) $\omega_n=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}, k=\frac{۴}{۵}$

۳) $\omega_n=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}, k=\frac{۴}{۵}$ ۴) $\omega_n=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}, k=\frac{۵}{۴}$

۳ـ در سیستم شکل زیر برای آنکه به ازای همه مقادیر مثبت k رفتار سیستم مدار بسته بدون نوسان باشد، $p_۱$ باید در چه شرایطی صدق کند؟



۱) $p_۱>۱$

۲) $p_۱<۱$

۳) $p_۱<۲$

۴) $p_۱>۲$

۴ـ در سیستمی که تابع تبدیل حلقه باز آن به صورت $G(s)=\frac{k(s+۱)}{s(s-۲)}$ بوده و پس‌خور منفی واحد دارد، کدام یک از بیان‌های زیر نادرست است؟

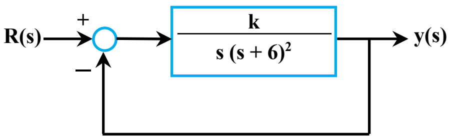
۱) مکان ریشه‌های این سیستم دایره‌ای به مرکز ۱- و شعاع $\sqrt{۳}$ است.

۲) مکان ریشه‌های سیستم برای $k<۰$ بر روی محور حقیقی منفی قرار دارد.

۳) برای $k<۰$ مکان ریشه‌ها نقطه شکستی ندارد.

۴) این سیستم دارای دو نقطه شکست بوده و به ازای مقادیر بزرگ k ناپایدار است.

۵ـ به ازای کدام مقدار k مکان ریشه‌های سیستم کنترل حلقه بسته زیر از نقطه‌ی $-۱\pm j\sqrt{۱۵}$ می‌گذرد؟



۱) ۳۲

۲) ۱۶۰

۳) ۲۴۰

۴) ۶۰۰

۶ـ معادله مشخصه یک سیستم کنترل عبارت است از: $s^۳+۱۰s^۲+۲۹s+k=۰$. به ازای چه مقداری از k قطب‌های حلقه بسته در $-۲\pm j$ قرار خواهند گرفت؟ قطب سوم در این حالت چه مقداری خواهد داشت؟

۱) $s=-۱, k=۲۰$ ۲) $s=-۶, k=۲۰$ ۳) $s=-۴, k=۳۰$ ۴) $s=-۶, k=۳۰$

۷ـ تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترل با فیدبک واحد عبارت است از: $G(s)=\frac{k(s+۲)}{s(s+۱)}$. در کدام حالت نسبت میرایی قطب‌های حلقه بسته بین صفر و یک خواهد بود؟

۱) $۰/۵۹<k<۳/۴۱$ ۲) $۰/۱۷<k<۵/۸۳$ ۳) $۰/۱۷<k<۳/۴۱$ ۴) $۰/۵۹<k<۵/۸۳$

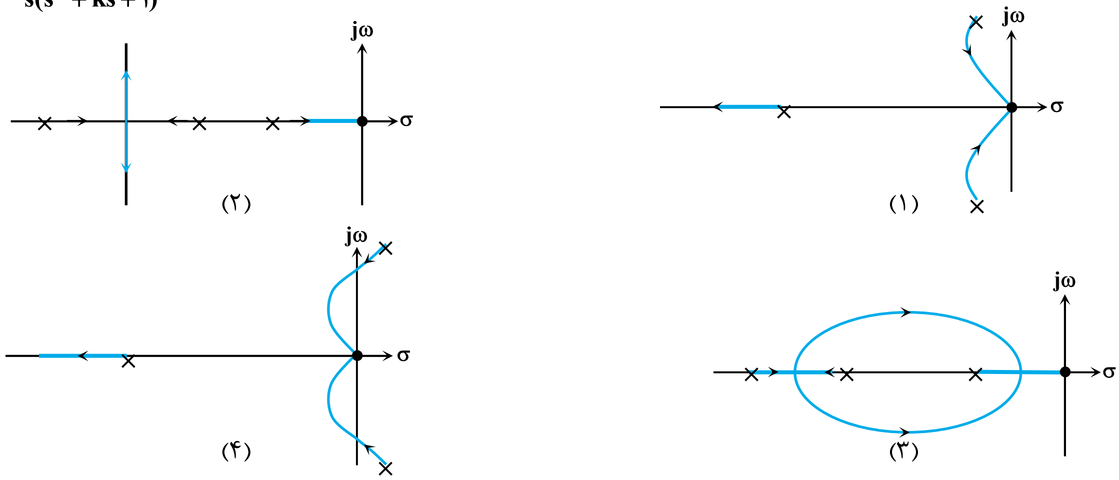
۸ـ تابع حلقه باز یک سیستم با فیدبک واحد عبارت است از: $G(s)=\frac{k(s+۱)}{s^۲+۴s+۵}$. زاویه خروج مکان ریشه‌ها از قطب‌های مزدوج مختلط عبارت است از:

۱) $\pm۶۰^\circ$ ۲) $\pm۹۰^\circ$ ۳) $\pm۱۲۰^\circ$ ۴) $\pm۲۲۵^\circ$

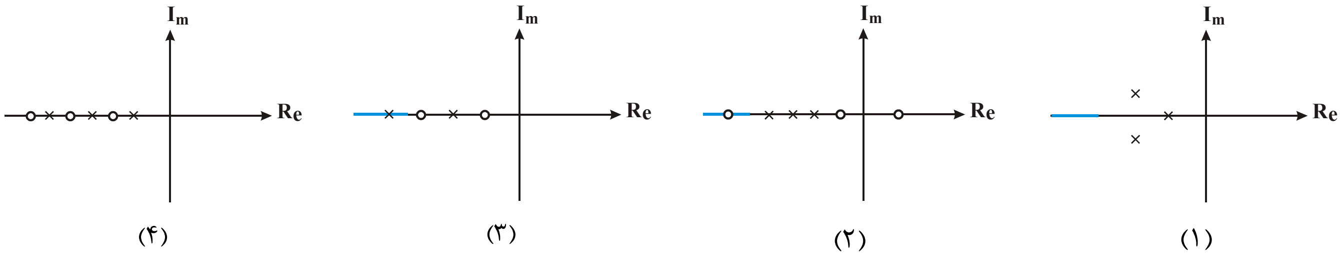
۹ـ تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترل با فیدبک واحد عبارت است از: $G(s)=\frac{k(s+۱)}{s^۲(s+۹)}$. به ازای کدام مقدار k هر سه ریشه سیستم حلقه بسته حقیقی و برابر خواهند بود؟

۱) $k=۲۷$ ۲) $k=۹$ ۳) $k=۱۸$ ۴) $k=۳$

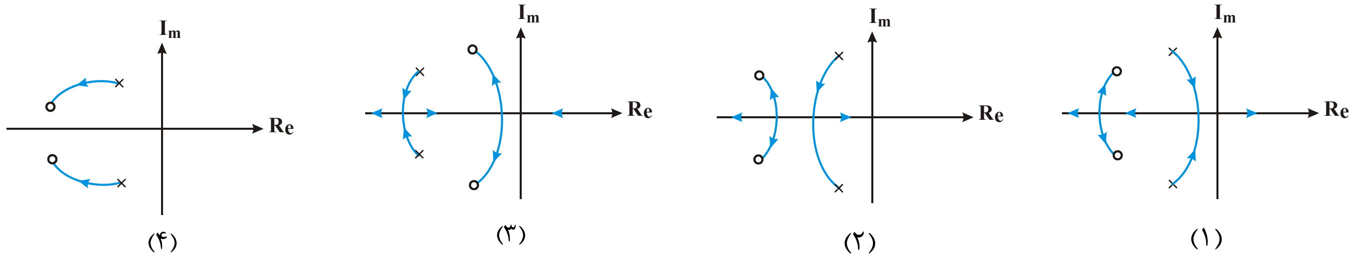
۱۰ـ مکان ریشه‌های سیستم مدار بسته با فیدبک واحد به‌ازای تغییرات مقادیر مثبت k کدام است؟ $GH(s)=\frac{۲(s+۲)}{s(s^{۲}+ks+۱)}$



۱۱ـ در کدام ترتیب قرارگیری محل صفر و قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز پاسخ پله هیچ گونه فراجهشی نخواهد داشت؟



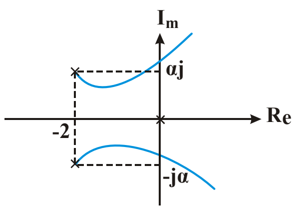
۱۲ـ مکان هندسی تابع تبدیل $G(s)=\frac{K(s^{۲}+۴s+۴/۲۵)}{s^{۲}+۲s+۲}$ به ازای فیدبک واحد مثبت و $K\geq ۰$ کدام است؟



۱۳ـ مکان هندسی ریشه‌های کدام تابع تبدیل، متقارن است؟

۱) $G(s)=\frac{۱}{s(s+۱)(s+۲)}$ ۲) $G(s)=\frac{۱}{s(s-۱)(s+۱)}$ ۳) $G(s)=\frac{(s+۱)}{s(s+۲)}$ ۴) $G(s)=\frac{۱}{s(s+۱)^{۲}(s+۲)}$

۱۴ـ محل برخورد با محور موهومی مکان هندسی ریشه‌های سیستمی که در شکل زیر نشان داده شده است در $K=K_{۰}$ رخ می‌دهد اگر قسمت حقیقی ریشه‌ها بدون تغییر قسمت موهومی آن‌ها (برای ریشه‌های مختلط) به ۳ـ منتقل شود محل برخورد در چه بهره‌ای رخ می‌دهد؟



۱) $\frac{K_{۰}}{۴}+۵$
۲) $۱/۵K_{۰}+۵$
۳) $۱/۵K_{۰}+۳۰$
۴) $\frac{K_{۰}}{۴}+۳۰$

۱۵ـ مکان هندسی ریشه‌های سیستمی را در نظر بگیرید که فقط یک صفر نامینیمم فاز دارد و همهِ قطب‌های آن سمت چپ محور موهومی قرار دارد، در این حالت کدام گزینه درست است؟

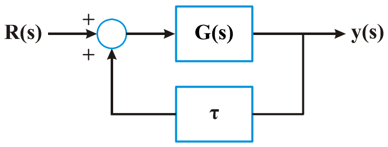
۱) این سیستم با افزایش بهره می‌تواند پایدار شود.
۲) این سیستم با اضافه کردن یک صفر نامینیمم فاز دیگر به سیستم می‌توان سیستم را به ازای همه بهره‌ها پایدار کرد.
۳) با اضافه کردن یک قطب در همان نقطه نامینیمم فازی می‌توان سیستم را پایدار کرد.
۴) سیستم تنها به ازای بهره‌های خاصی پایدار است که به صورت $K\in[۰,K_{۰}]$ است.

فصل ششم

«ابزار گرافیکی تحلیل و طراحی در حوزه فرکانس»

تست‌های تألیفی فصل ششم

مثال ۱: تابع تبدیل $G(s)=\frac{۴}{s+۲}$ است. سیستم حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید. برای آن که پهنای باند سیستم حلقه بسته کمتر از $\frac{۱}{۲}$ سیستم حلقه باز شود محدوده τ کدام است؟



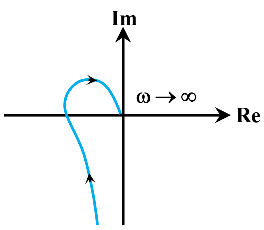
۱) $\tau>\frac{۱}{۴}$
۲) $۰<\tau<\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۴}<\tau<\frac{۱}{۲}$
۴) $\tau<\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه «۳» پهنای باند سیستم حلقه باز برابر $۲\frac{rad}{s}$ است. تابع تبدیل حلقه بسته $T(s)=\frac{۴}{s+۲-۴\tau}$ است. برای این که پهنای باند سیستم حلقه بسته کمتر از $\frac{۱}{۲}$ سیستم حلقه باز شود باید داشته باشیم:

$$۲-۴\tau<\frac{۱}{۲}\times ۲\Rightarrow \tau>\frac{۱}{۴}$$

اما سیستم حلقه بسته در بازه $\tau<\frac{۱}{۲}$ پایدار است. پس گزینه (۳) درست است.

مثال ۲: دیاگرام قطبی سیستم حلقه باز $G(j\omega)$ با فاز مینیمم به صورت مقابل است:



کدام‌یک از توابع زیر می‌تواند دارای دیاگرام قطبی داده شده باشد؟

۱) $G(s)=\frac{k(s+۱)}{s(s+۲)(s+۳)}$
۲) $G(s)=\frac{k}{s(s+۱)(s+۲)}$
۳) $G(s)=\frac{k(s+۱)}{s(s+۲)(s+۵)(s+۱۰)}$
۴) $G(s)=\frac{k(s+۱)}{s^۲(s+۲)(s+۳)}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به دیاگرام نایکوئیست داده شده و مینیمم فاز بودن سیستم می‌توان به این نتیجه رسید که $G(s)$ نوع یک است. پس گزینه (۴) اشتباه است. با توجه به این که دیاگرام نایکوئیست با زاویه -۲۷۰ به مبدأ می‌رود می‌توان به این نتیجه رسید که درجه‌ی نسبی سیستم ۳ است، یعنی گزینه (۱) نیز اشتباه است. برای تعیین گزینه درست از دو روش تحلیلی و ترسیمی استفاده می‌کنیم.

روش تحلیلی:

$$\measuredangle G_۲(j\omega)=-۹۰-\tan^{-۱}\omega-\tan^{-۱}\frac{\omega}{۲}$$

$$\measuredangle G_۳(j\omega)=-۹۰-\tan^{-۱}\frac{\omega}{۲}-\tan^{-۱}\frac{\omega}{۵}-\tan^{-۱}\frac{\omega}{۱۰}+\tan^{-۱}\omega$$

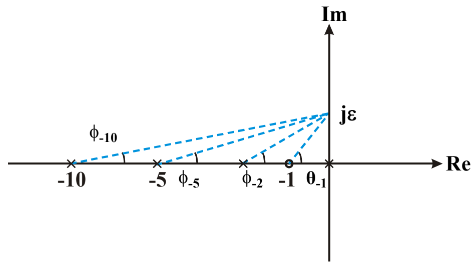
از آن‌جایی که سیستم حدوداً از فاز اولیه -۹۱ درجه به ازای $\omega=۰^+$ شروع شده است باید به دنبال تابعی باشیم که در فرکانس $\omega=۰^+$ زاویه‌ای کمتر از -۹۰ دارد.

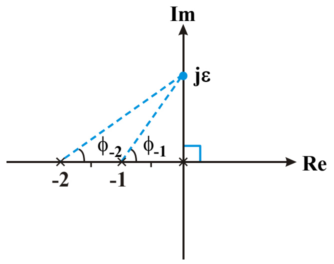
نکته: به ازای فرکانس‌های $\omega\to ۰$ می‌توان از تقریب $\tan^{-۱}\omega\cong\omega$ استفاده کرد. یعنی برای عبارت فاز $G_۲$ و $G_۳$ داریم:

$$\measuredangle G_۲(j۰^+)=-۹۰-\omega-\frac{\omega}{۲}=-۹۰-۳\frac{\omega}{۲}\cong -۹۱\quad,\quad \measuredangle G_۳(j۰^+)=-۹۰-\frac{\omega}{۲}-\frac{\omega}{۵}-\frac{\omega}{۱۰}+\omega=-۹۰+\frac{\omega}{۵}\cong -۸۹$$

تا به همین‌جا مشخص می‌شود که گزینه (۲) صحیح است.

روش ترسیمی: مکان صفر و قطب تابع تبدیل حلقه باز را در صفحه s رسم می‌کنیم.

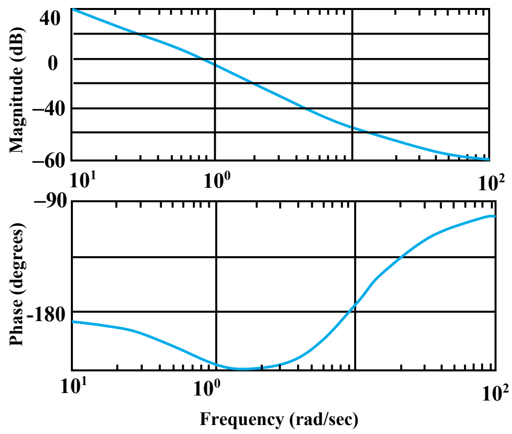




گزینه (۳): $\measuredangle G_3(j\omega) = -90 + \theta_{-1} - \varphi_{-2} - \varphi_{-5} - \varphi_{-10} \cong -89$

گزینه (۲): $\measuredangle G_2(j\omega) = -90 - \varphi_{-1} - \varphi_{-2} \cong -91$

مثال ۳: منحنی‌های اندازه و زاویه فاز تابع تبدیل $G(s)$ در شکل مقابل داده شده است. تابع تبدیل $G(s)$ متناظر کدام است؟



۱) $\dfrac{s+10}{10s(s+1)}$

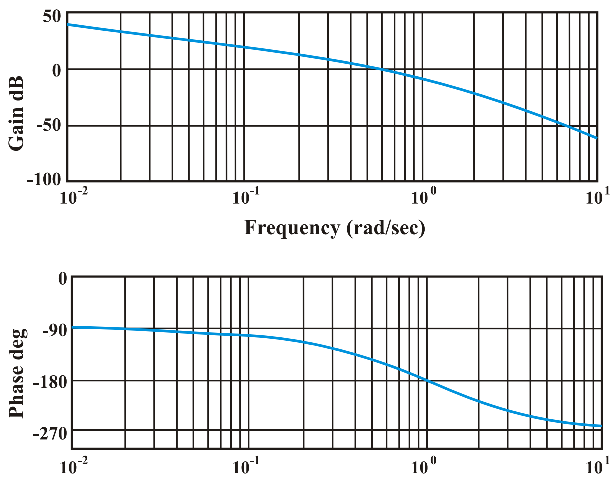
۲) $\dfrac{s+10}{100s^2(s+1)}$

۳) $\dfrac{(s+10)^2}{100s(s+1)^2}$

۴) $\dfrac{(s+10)^2}{100s^2(s+1)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» زاویه شروع نمودار Bode فاز -180° می‌باشد، پس حضور عامل $\dfrac{1}{s^2}$ در تابع تبدیل $G(s)$ قطعی است. از طرفی زاویه نهایی سیستم -90° است که بر درجه نسبی یک دلالت می‌کند.

مثال ۴: دیاگرام Bode تابع تبدیل مدار باز یک سیستم مدار بسته با فیدبک واحد منفی در شکل مقابل نشان داده شده است. پاسخ سیستم مدار بسته به ورودی $r(t) = t$ دارای ....

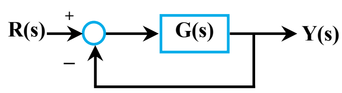


۱) خطای نامحدود است.

۲) خطای ماندگار صفر است.

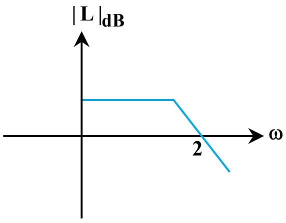
۳) خطای ماندگار $e_{ss} = 1$ است.

۴) خطای ماندگار محدود است، اما با استفاده از اطلاعات داده شده نمی‌توان مقدار خطا را محاسبه کرد.



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به مثبت بودن حاشیه بهره و حاشیه فاز، سیستم حلقه بسته پایدار است. از طرفی می‌دانیم سیستم نوع یک است، زیرا زاویه شروع -90° و شیب شروع $-20\dfrac{dB}{dec}$ است. از طرفی محل برخورد مجانب فرکانس پایین با محور $0dB$ متناظر با ثابت خطای شیب است و لذا $k_v = 1$ و در نتیجه خطای ماندگار به ورودی شیب برابر یک خواهد بود.

مثال۵: در سیستمی که در فضای حالت به صورت $\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & a\\ 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}u$ و $y=[2\quad 0]x$ توصیف می‌شود، نمودار اندازه بود بـه شـکل زیـر است. مقدار a کدام است؟



۱) $\sqrt{\frac{2}{5}}$

۲) $\sqrt{5}$

۳) $\sqrt{\frac{5}{2}}$

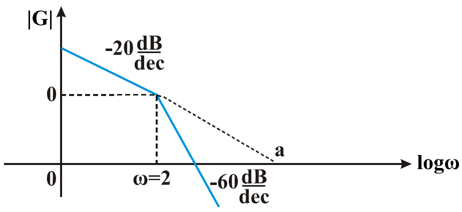
۴) اطلاعات کافی نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D=[2\quad 0]\begin{bmatrix}s+1 & -a\\ 0 & s+2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}=\frac{4a}{(s+1)(s+2)}\Rightarrow G(s)=\frac{4a}{s^2+3s+2}$$

$$\begin{cases}|G(j2)|=1\\ |G(j\omega)|=\dfrac{4a}{\sqrt{(2-\omega^2)^2+(3\omega)^2}}\end{cases}\Rightarrow |G(j2)|=\frac{4a}{\sqrt{4+36}}=\frac{4a}{\sqrt{40}}\Rightarrow |G(j2)|=\frac{2a}{\sqrt{10}}\Rightarrow 2a=\sqrt{10}\Rightarrow a=\sqrt{\frac{5}{2}}$$

مثال۶: منحنی اندازه Bode سیستمی مینیمم فاز با بهره DC مثبت در شکل زیر آورده شده است. نقطه‌ی a را تعیین کنید. $(\zeta=1)$



۱) ۴

۲) ۲۵

۳) ۲/۵

۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تابع تبدیل سیستم حلقه باز به صورت $G(s)=\frac{k}{(s)(s^2+4s+4)}$ است. برای محاسبه‌ی k از اندازه سیستم در فرکانس $\omega=2$ استفاده می‌کنیم.

$$20\log|G(j2)|=0\ \Rightarrow \frac{k}{2\times 4\times 2}=1\ \Rightarrow k=16$$

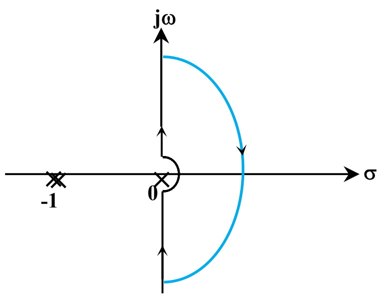
نقطه‌ی a دقیقاً برابر با k_v است، در نتیجه داریم:

$$k_v=\lim_{s\to 0}s\times\frac{16}{s(s^2+4s+4)}=4$$

مثال۷: به ازای چه مقادیری از k، سیستم حلقه بسته با تابع حلقه $L(s)=\frac{k}{s(s+1)^2}$ پایدار است؟

☑ **پاسخ:**

$$\hat{L}(s)=\frac{L(s)}{k}=\frac{1}{s(s+1)^2}$$



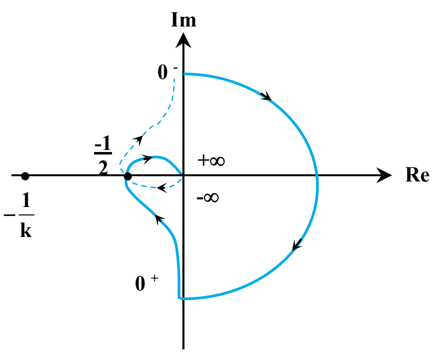
به ازای $\omega\to 0$ و $\omega\to\infty$، $\hat{L}(j\omega)$ برابر است با:

$$\omega\to 0:\ \hat{L}(j\omega)=\infty<-\frac{\pi}{2}$$

$$\omega\to\infty:\hat{L}(j\omega)=0<-\frac{3\pi}{2}$$

نقطه برخورد با محور حقیقی را به دست می‌آوریم:

$$\operatorname{Im}\hat{L}(j\omega)=0\ \Rightarrow \omega=1\ \Rightarrow \operatorname{Re}(\hat{L}(j1))=\frac{-1}{2}$$



دقت کنید که نگاشت قطب در مبدأ معادل یک نیم‌دایره در جهت ساعت از 0^- به 0^+ است.

برای پایداری، باید نمودار نایکوئیست نقطه متحرک $(-\frac{1}{k},0)$ را دور نزند، یعنی:

$$N=0\ \Rightarrow -\frac{1}{k}<-\frac{1}{2}\ \Rightarrow 0<k<2$$

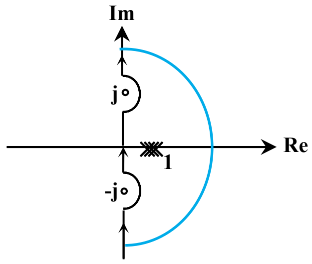
مثال ۸: پایداری سیستم با تابع حلقه $L(s)=\dfrac{k(s^۲+۱)}{(s-۱)^۳}$ را بررسی کنید.

پاسخ:

$$\hat{L}(s)=\frac{s^۲+۱}{(s-۱)^۳}\Rightarrow P=۳$$

$$\omega\to \circ:\hat{L}(j\omega)=۱\angle\pi$$

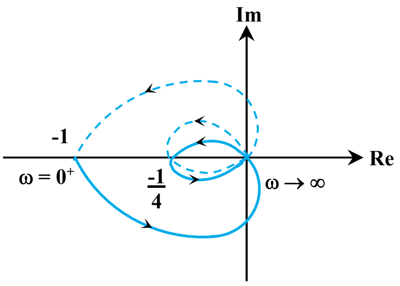
$$\omega\to\infty:\hat{L}(j\omega)=\circ\angle-\frac{\pi}{۲}$$



تکرار صفرهای موهومی برابر ۱ است، لذا نمودار نایکوئیست مبدأ را قطع می‌کند.

$$\operatorname{Im}\hat{L}(j\omega)=\circ\to\begin{cases}\omega=\circ\to \operatorname{Re}(\hat{L}(j\circ))=-۱\\ \omega=\pm\sqrt{۳}\to \operatorname{Re}(\hat{L}(j\sqrt{۳}))=-\dfrac{۱}{۴}\end{cases}$$

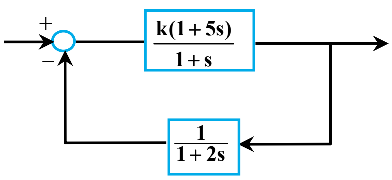
$$\operatorname{Re}(\hat{L}(j\omega))=\circ\Rightarrow\begin{cases}\omega=۱\Rightarrow \operatorname{Im}(\hat{L}(j۱))=\circ\\ \omega=\pm\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow \operatorname{Im}(\hat{L}(j\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}))=\circ/۴۳j\end{cases}$$

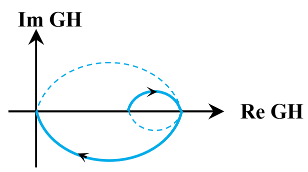


شرط پایداری برابر است با:

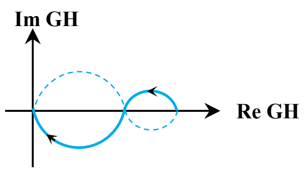
$$P=۳\Rightarrow N=-۳\Rightarrow -\frac{۱}{۴}<\frac{-۱}{k}<\circ\Rightarrow k>۴$$

مثال ۹: منحنی نایکوئیست سیستم کنترل شکل زیر به ازای k مثبت به کدام صورت زیر است؟

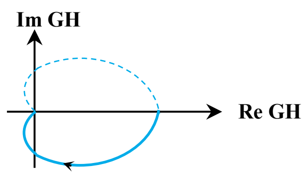




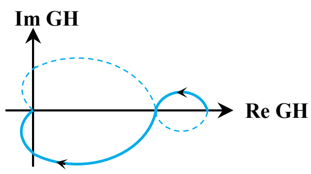
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

پاسخ: گزینه «۱»

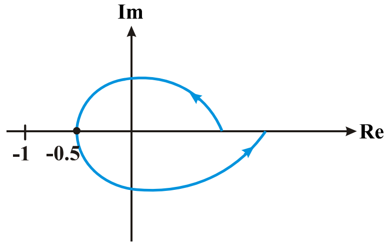
$$L(s)=\frac{k(۱+۵s)}{(۱+s)(۱+۲s)}$$

درجه نسبی این سیستم حداقل فاز برابر با یک است. لذا فاز در $\omega=\infty$ برابر با -۹۰ خواهد بود. بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست هستند. همچنین:

$$\operatorname{Im}(L(j\omega))=\circ\Rightarrow\begin{cases}\omega=\circ\to \operatorname{Re}(L(j\circ))=۱\\ \omega^۲=\dfrac{۱}{۵}\to \operatorname{Re}(L(j\dfrac{\sqrt{۵}}{۵}))=\dfrac{۵}{۳}>۱\end{cases}$$

یعنی در فرکانس $\omega=\dfrac{\sqrt{۵}}{۵}$ در نقطه‌ای دورتر از فرکانس $\omega=\circ$ نسبت به مبدأ روی محور حقیقی قرار داریم پس تنها گزینه (۱) صحیح است.

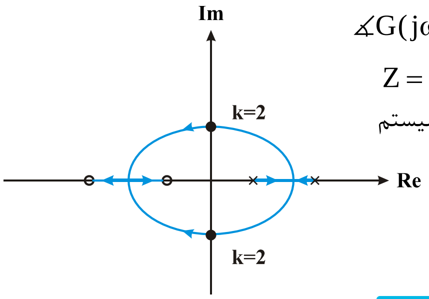
مثال۱۰: دیاگرام نایکوئیست سیستم در شکل مقابل داده شده است. مکان هندسی تقریبی آن را به دست آورید و محدوده پایداری آن را تعیین کنید. سیستم دو قطب و دو صفر محدود دارد.



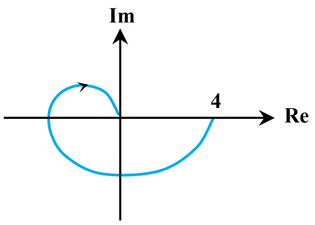
پاسخ: از دیاگرام نایکوئیست مشخص است که فاز سیستم همواره در حال افزایش است. تابع تبدیل سیستم در حالت کلی به صورت $G(s)=k\frac{(s+a)(s+b)}{(s+c)(s+d)}$ است و چون فاز دیاگرام هیچ‌گاه کاهشی نمی‌شود می‌توان نتیجه گرفت هر دو قطب سیستم در سمت راست محور موهومی قرار دارند و باعث افزایش فاز دیاگرام می‌شوند. در این حالت منحنی فاز سیستم به صورت زیر است:

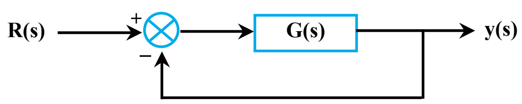
$$\measuredangle G(j\omega)=\tan^{-1}\frac{\omega}{a}+\tan^{-1}\frac{\omega}{b}-\pi+\tan^{-1}\frac{\omega}{c}-\pi+\tan^{-1}\frac{\omega}{d}$$

در نتیجه برای این سیستم $p=۲$ است. در این حالت و به ازای $k<۲$، $N=۰$ است و $Z=N+P=۲$ می‌باشد. همچنین برای $k>۲$، $N=-۲$ است و داریم $Z=N+P=۰$. مکان هندسی ریشه‌های این سیستم به صورت مقابل است.



مثال۱۱: پاسخ حالت ماندگار به ورودی پله را در سیستمی با دیاگرام بلوکی و نمودار قطبی زیر بیابید.





۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۵}$

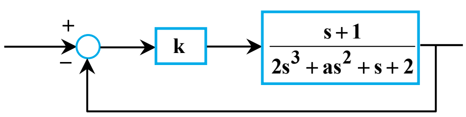
۳) $\frac{۴}{۵}$

۴) $\frac{۴}{۴+k}$

پاسخ: اگر سیستم حلقه بسته را پایدار فرض کنیم خواهیم داشت:

$$y_{ss}=\lim_{s\to ۰} s\times\frac{۱}{s}\left[\frac{G(s)}{۱+G(s)}\right]=\frac{۴}{۱+۴}=۰/۸$$

مثال۱۲: برای سیستمی به شکل زیر، نمودار نایکوئیست $G(s)$ محور حقیقی را در نقطه $q=-\frac{۱}{۳}$ قطع می‌کند. فرکانس تقاطع نمودار نایکوئیست $G(s)$ با محور حقیقی کدام است؟



۱) $۲\frac{rad}{s}$

۲) $۳\frac{rad}{s}$

۳) $۲/۵\frac{rad}{s}$

۴) $\sqrt{۲}\frac{rad}{s}$

پاسخ: گزینه «۴» نقطه‌ی $q=-\frac{۱}{۳}$ در تابع تبدیل سیستم صدق می‌کند یعنی $G(j\omega_c)=-\frac{۱}{۳}$. معادله مشخصه سیستم برابر است با:

$$\Delta(s)=۱+kG(j\omega_c)=۱+k\times(-\frac{۱}{۳})=۰\Rightarrow k=۳$$

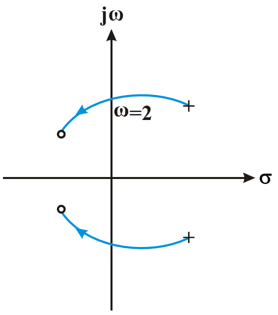
به ازای این مقدار از k سیستم روی محور موهومی قطب خواهد داشت چون روی مرز ناپایداری قرار می‌گیرد. در واقع با سه برابر شدن بهره محل تقاطع به جای $-\frac{۱}{۳}$، به $-\frac{۱}{۳}\times۳=-۱$ منتقل می‌شود.

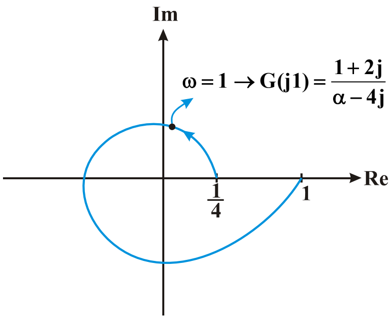
حال از معیار روث استفاده می‌کنیم.

$$\begin{array}{c|cc} s^۳ & ۲ & ۴ \\ s^۲ & a & ۵ \\ s^۱ & \frac{۴a-۱۰}{a} & \\ s^۰ & ۵ & \end{array} \quad \Rightarrow ۴a-۱۰=۰ \Rightarrow a=\frac{۵}{۲} \Rightarrow F(s)=۲/۵s^۲+۵=۰ \Rightarrow \omega=+\sqrt{۲}$$

این فرکانس همان فرکانس محل برخورد با محور حقیقی است.

مثال ۱۳: مکان هندسی ریشه‌ها و دیاگرام نایکوئیست سیستم در شکل زیر آورده شده است. مقداری از $k>۰$ که سیستم در مرز ناپایـداری قـرار می‌گیرد، کدام است؟





۱) ۳

۲) ۲

۳) $\frac{۱}{\alpha}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به مکان هندسی ریشه‌ها مشخص است که تابع تبدیل سیستم به صورت $G(s)=k\frac{as^۲+bs+c}{ds^۲+es+f}$ اسـت. طبـق نمـودار نایکوئیست رسم شده برای فرکانس $\omega=۰$ و $\omega\to\infty$ داریم:

$$G(j۰^+)=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{c}{f}=\frac{۱}{۴}\ ,\ G(j\infty)=۱ \Rightarrow \frac{a}{d}=۱$$

برای به دست آوردن بهره بحرانی معادله مشخصه سیستم را تشکیل می‌دهیم.

$$\Delta(s)=(d+ak)s^۲+(e+kb)s+(f+ck)=۰$$

از آن‌جایی که دو قطب سیستم در سمت راست قرار دارند می‌توان نتیجه گرفت $f>۰$ و d، $e<۰$ است. همچنین هر دو صفر سیستم مینیمم فاز است پس $a,b,c>۰$ هستند. برای پایداری معادله مشخصه تنها کافی است علامت $(e+kb)$ را تعیین کنیم.

$$\omega=۱ \Rightarrow G(j۱)=\frac{۱+۲j}{\alpha-۴j}=\frac{(-a+c)+bj}{(-d+f)+ej} \Rightarrow \frac{b}{e}=\frac{۲}{-۴} \Rightarrow e=-۲b$$

$$\Rightarrow e+kb=-۲b+kb=(-۲+k)b \Rightarrow \begin{cases} k>۲ \Rightarrow \text{پایدار} \\ k=۲ \Rightarrow \text{بحرانی} \\ k<۲ \Rightarrow \text{ناپایدار} \end{cases}$$

مثال ۱۴: تابع تبدیل یک سیستم به صورت $G(s)=\frac{ke^{-Ts}}{s+۱}\ (k>۱)$ داده شده است. اگر این سیستم با فیدبک واحد حلقه بسته شود، تحـت چـه شرایطی سیستم حلقه بسته، پایدار است؟

۱) $[T\sqrt{k^۲-۱}]<tg^{-۱}\sqrt{k^۲-۱}$

۲) $[T\sqrt{k^۲-۱}+tg^{-۱}\sqrt{k^۲-۱}]<\pi$

۳) $[(T\sqrt{k^۲-۱}+tg^{-۱}\sqrt{k^۲-۱}]>\pi$

۴) $T\sqrt{k^۲-۱}>tg^{-۱}\sqrt{k^۲-۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» افزایش تأخیر ممکن است باعث کاهش حد فاز و نهایتاً ناپایداری سیستم شود. لذا حد فاز سیستم را مثبت قرار می‌دهیم تا شـرایط پایداری بر حسب زمان تأخیر به دست آید.

از شرط اندازه و شرط زاویه داریم:

$$|G(j\omega)|=۱ \Rightarrow \frac{k}{\sqrt{۱+\omega^۲}}=۱ \Rightarrow k^۲=۱+\omega^۲ \Rightarrow \omega=\sqrt{k^۲-۱}$$

$$\angle G(j\omega)=-T\omega-tg^{-۱}\omega=-T\sqrt{k^۲-۱}-tg^{-۱}\sqrt{k^۲-۱}$$

بنابراین حد فاز سیستم عبارت است از:

$$PM=\pi-T\sqrt{k^۲-۱}-tg^{-۱}\sqrt{k^۲-۱}$$

برای پایداری، حد فاز باید مثبت باشد.

$$PM>۰ \Rightarrow T\sqrt{k^۲-۱}+tg^{-۱}\sqrt{k^۲-۱}<\pi$$

مثال ۱۵: فرکانس قطع فاز سیستمی با تابع حلقه $\frac{1}{s(s+1)(0/2s+1)}$ برابر است با:

۱) $\omega = 5$　　۲) $\omega = \sqrt{2}$　　۳) $\omega = 2$　　۴) $\omega = \sqrt{5}$

پاسخ: گزینه «۴» در فرکانس قطع فاز، زاویه تابع حلقه برابر $-\pi$ است، بنابراین برای محاسبه ω از فرمول $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$ استفاده می‌کنیم.

$$\measuredangle L = -\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} - tg^{-1}\omega - tg^{-1} 0/2\omega = -\pi \Rightarrow tg^{-1}\omega + tg^{-1} 0/2\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 - (\omega)(0/2\omega) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 0/2\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = 5 \Rightarrow \omega = \sqrt{5}$$

مثال ۱۶: تابع تبدیل حلقه یک سیستم کنترل به صورت $L(s) = \frac{k}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$ مفروض است. به ازای کدام مقدار k حد بهره این سیستم برابر ۲ خواهد بود؟

۱) $k = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$　　۲) $k = \frac{T_1 + T_2}{2T_1 T_2}$　　۳) $k = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$　　۴) $k = \frac{T_1 T_2}{2(T_1 + T_2)}$

پاسخ: گزینه «۲»

روش اول: برای به دست آوردن حد بهره ابتدا باید فرکانس قطع فاز را به دست آوریم. $\measuredangle G(j\omega) = -\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} T_1\omega - \tan^{-1} T_2\omega = -\pi$

$$\tan^{-1} T_1\omega + \tan^{-1} T_2\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{T_1\omega + T_2\omega}{1 - T_1T_2\omega^2} = \tan 90 \Rightarrow 1 - T_1T_2\omega^2 = 0$$

$$\omega_{gp} = \frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$$

$$GM = \frac{1}{\dfrac{k}{\dfrac{1}{\sqrt{T_1T_2}} \times \sqrt{1 + \dfrac{T_1^2}{T_1T_2}}\sqrt{1 + \dfrac{T_2^2}{T_1T_2}}}} = \frac{1}{\dfrac{kT_1T_2}{T_1+T_2}} = \frac{T_1+T_2}{kT_1T_2} \Rightarrow GM = 2 \Rightarrow k = \frac{1}{2}\left(\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}\right)$$

روش دوم: محدوده پایداری این سیستم از روش روث به شکل $0 < k < \frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$ محاسبه می‌شود و لذا برای آنکه حد بهره برابر ۲ باشد لازم است $k = \frac{k_{max}}{2}$ باشد و در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

مثال ۱۷: تابع تبدیل یک سیستم حلقه باز $G(s) = \frac{2\sqrt{3}}{s(s+1)}$ است. حد فاز این سیستم برابر است با:

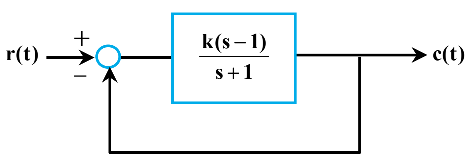
۱) -120°　　۲) -30°　　۳) 30°　　۴) 120°

پاسخ: گزینه «۳» برای به دست آوردن حد فاز، نخست فرکانس قطع بهره را به دست می‌آوریم: $\left|\frac{2\sqrt{3}}{s(s+1)}\right| = 1 \rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}} = 1 \rightarrow \omega = \sqrt{3}$

در $\omega = \sqrt{3}$، فاز سیستم برابر است با: $\measuredangle \frac{2\sqrt{3}}{s(s+1)} = 0 - 90^\circ - \tan^{-1}\omega\Big|_{\omega=\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6}$

حد فاز سیستم برابر $\pi - \frac{5\pi}{6}$ یا 30° می‌باشد.

مثال ۱۸: در سیستم حلقه بسته زیر مقدار بهره k را به گونه‌ای تعیین کنید تا حد بهره سیستم حلقه بسته دقیقاً ۲ باشد. $(k \geq 0)$



۱) $k = \frac{1}{3}$　　۲) $k = \frac{1}{2}$　　۳) $k = \frac{2}{3}$　　۴) $k = 1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

روش اول: ابتدا فرکانس قطع فاز را به دست می‌آوریم:

$$\measuredangle G(j\omega) = -\pi \Rightarrow \tan^{-۱}\frac{\omega}{-۱} - \tan^{-۱}\frac{\omega}{۱} = -\pi$$

$$\pi - \tan^{-۱}\omega - \tan^{-۱}\omega = -\pi \Rightarrow -۲\tan^{-۱}\omega = ۰ \Rightarrow \omega = ۰$$

از ابتدا نیز می‌توان تشخیص داد که $\omega = ۰$ فرکانس قطع فاز است. چون بهره DC سیستم -۱ است، بهره DC نیز به معنای $\omega = ۰$ است. پس حد بهره برابر است با:

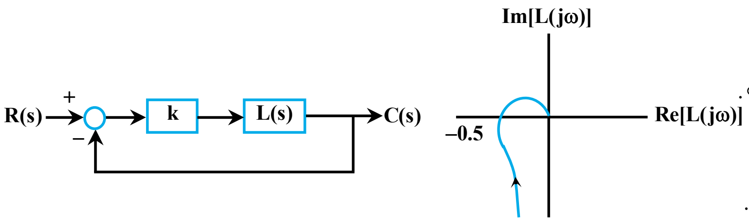
$$GM = \frac{۱}{|G(j\omega)|} \Rightarrow GM = \frac{۱}{\frac{k\sqrt{\omega^۲+۱}}{\sqrt{\omega^۲+۱}}} = \frac{۱}{k} = ۲ \Rightarrow k = \frac{۱}{۲}$$

روش دوم: برای آنکه $GM = ۲$ باشد باید اندازه $L(j\omega_{pc})$، برابر با $\frac{۱}{۲}$ باشد تا با دو برابر کردن اندازه، سیستم به مرز ناپایداری برسد.

$$|L(j\omega)|_{\omega_{pc}} = k = \frac{۱}{۲}$$

دقت کنید که در این مثال نیازی به محاسبه ω_{pc} نخواهد بود.

مثال ۱۹: نمودار قطبی مدار باز $L(s)$، سیستم کنترلی مقابل در شکل نشان داده شده است. در صورتی که $L(s)$ یک تابع حداقل فاز باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد این سیستم صحیح است؟



۱) سیستم نوع صفر و ناپایدار است.

۲) سیستم نوع صفر و پایدار است و محدوده‌ی پایداری $۰ < k < ۲$.

۳) سیستم نوع یک و پایدار است و محدوده‌ی پایداری $k > ۲$.

۴) سیستم نوع یک و پایدار است و محدوده‌ی پایداری $۰ < k < ۲$.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» زاویه شروع نمودار قطبی در فرکانس‌های پایین -۹۰° و اندازه آن بی‌نهایت است. با توجه به این که فیدبک واحد منفی است، می‌توان اظهار داشت که نوع سیستم یک است. از آن‌جایی که $L(s)$ حداقل فاز فرض شده است، در معیار نایکوئیست $P = ۰$ می‌باشد و از شکل واضح است که $GM = ۲$ خواهد بود.

مثال ۲۰: در سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز $G(S) = \dfrac{k(s+۴)}{s^n(s+۱)(s+۲)}$ و فیدبک واحد منفی، خطای حالت ماندگار به ورودی $(۷+۶t)u(t)$ برابر ۰/۷۵ است. حد بهره این سیستم را به دست آورید.

☑ **پاسخ:** چون خطای حالت ماندگار به ورودی $(۷+۶t)u(t)$ مقدار محدودی است لذا، خطا به ورودی پله‌ای $۷u(t)$ صفر بوده و به ورودی شیب $۶tu(t)$ مقدار ۰/۷۵ را دارد پس $n = ۱$ می‌باشد و داریم:

$$k_v = \lim_{s\to ۰} sG(s) = \lim_{s\to ۰}\frac{k(s+۴)}{(s+۱)(s+۲)} = ۲k$$

$$e_{ss} = \frac{۶}{k_v} = \frac{۶}{۲k} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow k = ۴ \Rightarrow G(s) = \frac{۴(s+۴)}{s(s+۱)(s+۲)}$$

با داشتن تابع تبدیل به صورت $G(s) = \dfrac{۴k(s+۴)}{s(s+۱)(s+۲)}$ می‌توان حد بهره را به کمک جدول روث به دست آورد.

$$\Delta(s) = s^۳ + ۳s^۲ + ۲s + ۴ks + ۱۶k = ۰$$

$$\begin{array}{l|ll} s^۳ & ۱ & ۴k+۲ \\ s^۲ & ۳ & ۱۶k \\ s^۱ & ۱۲k+۶-۱۶k & \Rightarrow -۴k+۶=۰ \Rightarrow k = \frac{۳}{۲} \\ s^۰ & ۱۶k & \end{array}$$

تست‌های تألیفی فصل ششم

۱ـ تابع تبدیل سیستمی به شکل $k>۰$, $G(s)=\dfrac{ks}{(s+a)(s^{۲}+۲۰s+۱۰۰)}$ مفروض است. اگر در $\omega=\dfrac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}$ زاویه فاز $G(s)$ برابر صفر درجه باشد، مقدار a برابر است با:

۱) $\dfrac{۱۰}{۳}$ ۲) $۱۰\sqrt{۳}$ ۳) ۱۰ ۴) $\sqrt{۳}$

۲ـ اطلاعات زیر در مورد سیستم کمینه فاز با تابع تبدیل حلقه $L(s)$ و فیدبک واحد منفی در دسترس است. سیستم حلقه بسته نیز پایدار فرض می‌شود.

الف) فاز شروع حلقه برابر -۹۰° است. ب) شیب نهایی نمودار دامنه صفر است.

ج) $L(j۲)=۰$ د) حاشیه فاز سیستم در فرکانس قطع بهره $\omega_{gc}=۱$ برابر ۴۵ درجه است.

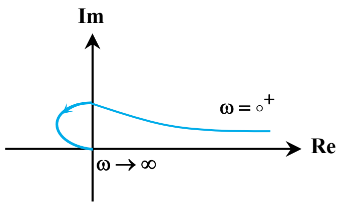
تابع تبدیل حلقه $L(s)$ در کدام گزینه به درستی آمده است؟

۱) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۳}\,\dfrac{s^{۲}+۴}{s(s+۲)}$ ۲) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۳}\,\dfrac{s^{۲}+۴}{s(s+۱)}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\,\dfrac{s^{۲}+۴}{s(s+۱)}$ ۴) $\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\,\dfrac{s^{۲}+۴}{s(s+۲)}$

۳ـ تابع تبدیل حلقه سیستمی با فیدبک واحد منفی به شکل $L(s)=\dfrac{k}{s(s^{۲}+s+۴)}$ مفروض است. اگر ثابت خطای استاتیکی شیب برابر با $\dfrac{۱}{۲}$ باشد، محل تلاقی نمودار نایکوئیست سیستم با محور حقیقی برابر است با:

۱) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۲) $-\dfrac{۱}{۴}$ ۳) $-\dfrac{۱}{۸}$ ۴) $-\dfrac{۱}{\sqrt{۲}}$

۴ـ نمودار نایکوئیست سیستمی به شکل زیر مفروض است. اگر بدانیم در تشکیل آرایه روث برای معادله مشخصه سیستم حلقه بسته ستون اول دو تغییر علامت را نشان می‌دهد، تابع تبدیل حلقه باز سیستم:



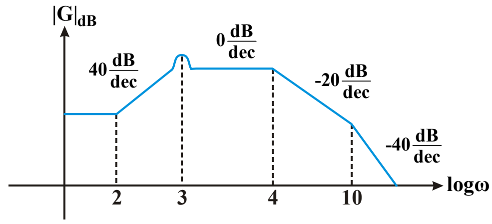
۱) قطب ناپایداری ندارد.

۲) یک قطب ناپایدار دارد.

۳) دو قطب ناپایدار دارد.

۴) سه قطب ناپایدار دارد.

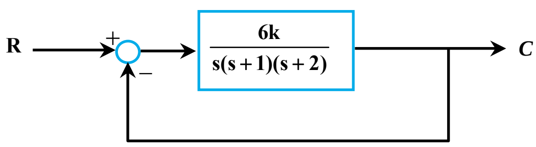
۵ـ نمودار مجانبی دامنه Bode برای سیستمی کمینه فاز به شکل زیر داده شده است. کدام گزینه تابع تبدیل تقریبی را به درستی نشان می‌دهد؟



۱) $\dfrac{k(s+۲)^{۲}}{(s+۴)(s^{۲}+۳)(s+۱۰)}$ ۲) $\dfrac{k(s^{۲}+۲)}{(s+۴)(s^{۲}+۹)(s+۱۰)}$

۳) $\dfrac{k(s+۲)^{۲}}{(s+۴)(s+۳)(s+۱۰)}$ ۴) $\dfrac{k(s+۲)^{۲}}{(s+۴)(s^{۲}+۰/۶s+۹)(s+۱۰)}$

۶ـ کدام بیان در مورد سیستم کنترل داده شده در شکل زیر برای $k>۰$ معتبر نمی‌باشد؟



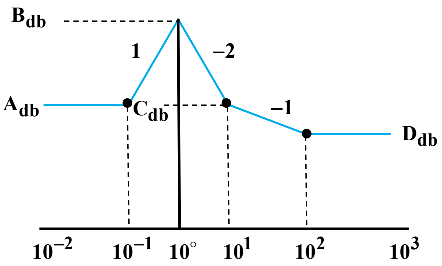
۱) سیستم برای $۰<k<۱$ پایدار است.

۲) نقطه شکست مکان ریشه در $s=-۱/۵۷۷$ است.

۳) شیب نهایی منحنی اندازه Bode برابر $-۶۰\ dB/dec$ است.

۴) منحنی نایکوئیست محور حقیقی منفی را در نقطه $-k$ قطع می‌کند.

۷ـ نمودار مجانبی دامنه Bode برای یک سیستم کنترل با تابع حلقه $\frac{0/1(s-0/1)(s+10)(s+100)}{(s+1)^3}$ در شکل زیر رسم شده است.



مقادیر A، B، C، D برحسب دسی‌بل برابرند با:

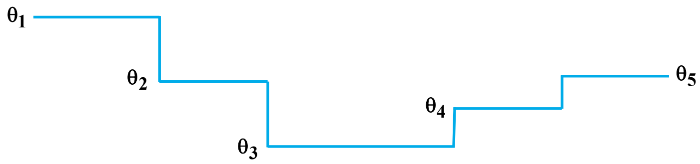
۱) $A=20^{db}$ $C=0^{db}$ $B=40^{db}$ $D=-20^{db}$

۲) $A=-20^{db}$ $C=-40^{db}$ $B=0^{db}$ $D=-60^{db}$

۳) $A=20^{db}$ $C=20^{db}$ $B=40^{db}$ $D=0^{db}$

۴) $A=-20^{db}$ $C=-20^{db}$ $B=0^{db}$ $D=-40^{db}$

۸ـ نمودار مجانبی فاز را برای سؤال قبلی به شکل کلی زیر رسم نموده‌ایم. کدام گزینه صحیح است؟



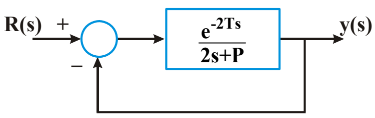
۱) $\theta_1=-180^\circ$ $\theta_2=-270^\circ$ $\theta_3=-360^\circ$ $\theta_4=-270^\circ$ $\theta_5=-180^\circ$

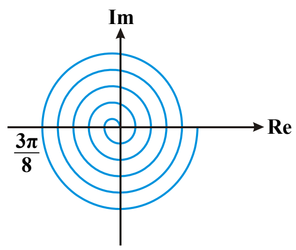
۲) $\theta_1=180^\circ$ $\theta_2=90^\circ$ $\theta_3=-180^\circ$ $\theta_4=-90^\circ$ $\theta_5=0^\circ$

۳) $\theta_1=180^\circ$ $\theta_2=0^\circ$ $\theta_3=-270^\circ$ $\theta_4=-90^\circ$ $\theta_5=0^\circ$

۴) $\theta_1=180^\circ$ $\theta_2=90^\circ$ $\theta_3=-90^\circ$ $\theta_4=90^\circ$ $\theta_5=0^\circ$

۹ـ برای سیستم نشان داده در شکل زیر، نمودار نایکوئیست رسم شده است. $\frac{P}{T}$ کدام است؟





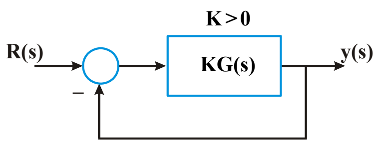
۱) $\frac{4}{3\pi}$

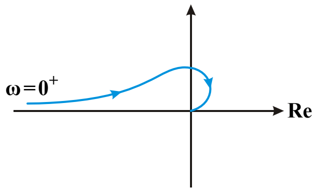
۲) $\frac{3\pi}{4}$

۳) $\frac{4\pi}{3}$

۴) $\frac{3}{4\pi}$

۱۰ـ دیاگرام نایکوئیست سیستمی با بلوک دیاگرام زیر رسم شده است. کدام گزینه صحیح است؟





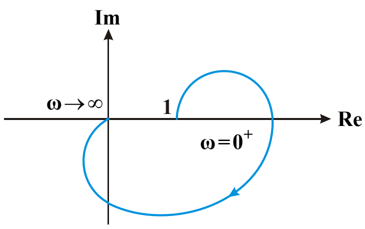
۱) سیستم به ازای بهره‌های کوچک k پایدار و به ازای بهره‌های بزرگ k ناپایدار است.

۲) سیستم همواره پایدار است.

۳) سیستم همواره ناپایدار است.

۴) به دلیل نامعلوم بودن مقدار قطب‌های ناپایدار حلقه باز نمی‌توان در مورد پایداری حلقه بسته اظهارنظر کرد.

۱۱ـ دیاگرام نایکوئیست سیستمی با تابع تبدیل $G(s)=\frac{1+Ts}{(s+1)^3}$ در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه در مورد T درست است؟



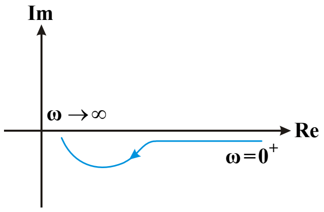
۱) $T>\sqrt{3}$

۲) $T>3$

۳) $T<\frac{1}{3}$

۴) $T<\frac{1}{\sqrt{3}}$

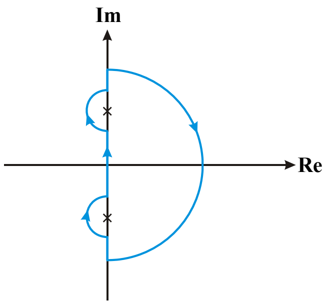
۱۲ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر متناظر با دیاگرام نایکوئیست رسم شده است؟

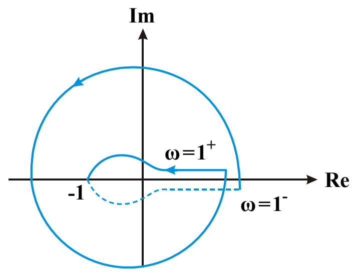


۱) $G_۱ = \frac{(s-۱)(s+۱۰)}{s^۲}$　　۲) $G_۲ = \frac{(s+۱)^۳(s+۱۰)}{s^۴}$

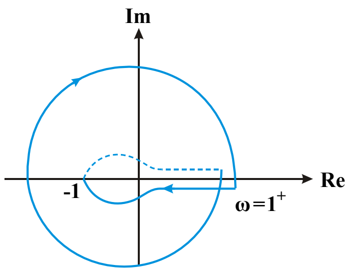
۳) $G_۳ = \frac{(s-۱)(s-۱۰)}{s^۲}$　　۴) هیچ‌کدام

۱۳ـ نمودار قطبی تابع تبدیل $G(s) = \frac{-(s+۱)^۴}{(s^۲+۱)^۲}$ با توجه به مسیر نایکوئیست داده شده در کدام گزینه به درستی آمده است؟

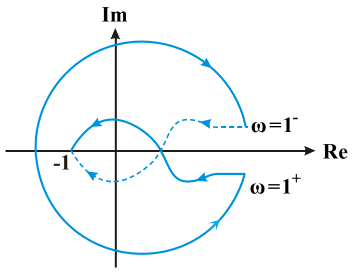




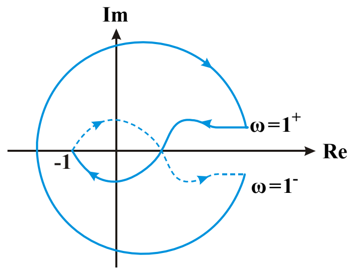
(۱)



(۲)

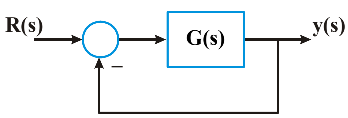


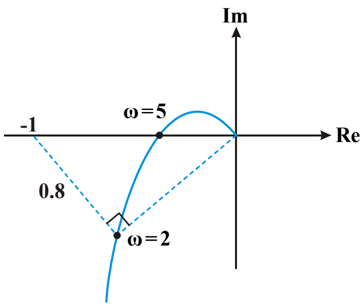
(۳)



(۴)

۱۴ـ دیاگرام نایکوئیست سیستم $G(s)$ در شکل زیر آورده شده است. اگر به سیستم ورودی‌های $۲\cos(۵t)$ و $۵\cos(۲t)$ اعمال شود و با توجه به حد بهره ۱۰dB دامنه خروجی سیستم کدام است؟





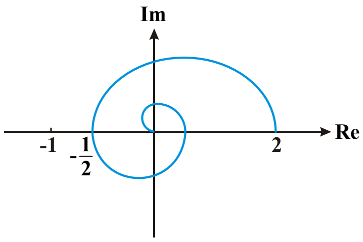
۱) $-\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$ ، ۳/۷۵

۲) $\frac{-۲(۱+\sqrt{۱۰})}{۹}$ ، ۰/۷۵

۳) $-\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$ ، ۰/۷۵

۴) $\frac{-۲(۱+\sqrt{۱۰})}{۹}$ ، ۳/۷۵

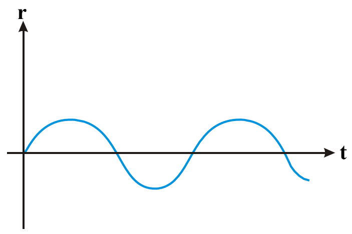
۱۵ـ دیاگرام نایکوئیست سیستمی با فیدبک منفی واحد رسم شده است. کمترین خطای حالت ماندگار این سیستم با تغییر بهره k به ورودی پله کدام است؟



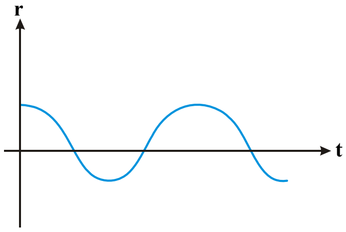
۱) $\frac{۱}{۳}$　　۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۵}$　　۴) $\frac{۴}{۵}$

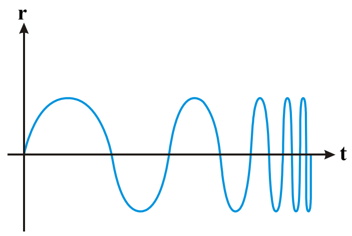
۱۶ـ ورودی سیستم برای رسم نمودار بود آن به کدام صورت است؟



(۱)



(۲)



(۳)

۴) نوع ورودی برای رسم اهمیتی ندارد.

۱۷ـ فاز نهایی کدام تابع تبدیل را می‌توان با رابطه $-90(n-m)$ به دست آورد که در آن n درجه مخرج تابع تبدیل و m درجه صورت آن است؟

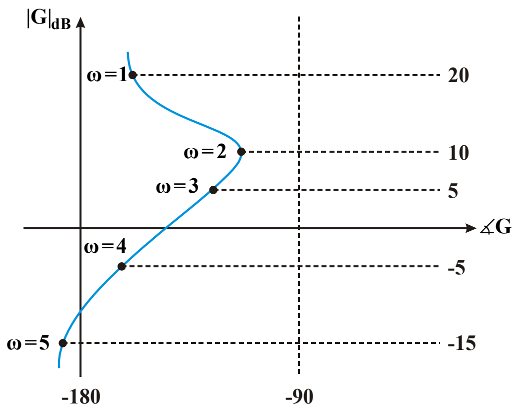
۱) $\frac{(s+10)}{(s+1)(1-2s)}$

۲) $\frac{(s-1)}{(1-s)(s+2)}$

۳) $\frac{(s+8)}{(s-2)(s+3)}$

۴) با توجه به نامینیمم فاز بودن توابع تبدیل در گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ نمی‌توان از رابطه‌ی $-90(n-m)$ برای به دست آوردن مقدار نهایی فاز سیستم استفاده کرد.

۱۸ـ نمودار نیکولز یک سیستم در شکل زیر نمایش داده شده است. بهره سیستم را چند برابر کنیم تا حد فاز سیستم حداکثر شود؟



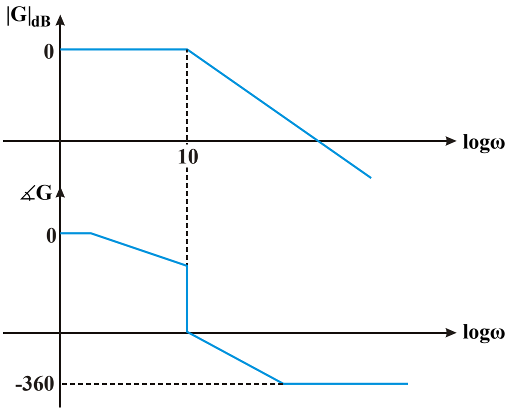
۱) $\frac{1}{10}$ برابر

۲) $10^{-\frac{3}{4}}$ برابر

۳) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ برابر

۴) $10^{\frac{1}{4}}$ برابر

۱۹ـ منحنی اندازه و فاز بود سیستمی در شکل زیر نشان داده شده است. تابع تبدیل این سیستم کدام است؟



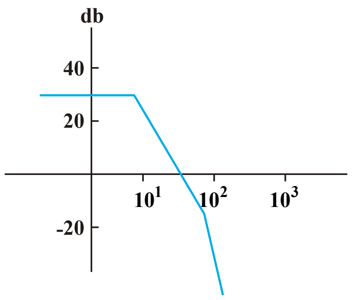
۱) $\frac{(s+10)^2}{(s^2+100)}$

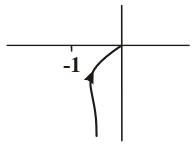
۲) $\frac{100(s-10)}{(s+10)(s^2+100)}$

۳) $\frac{(s^2+100)}{(s-10)(10-s)}$

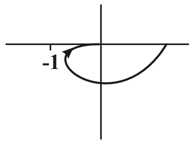
۴) $\frac{100(10-s)}{(s+10)(s^2+100)}$

۲۰ـ نمودار قطبی متناظر با نمودار Bode دامنه به شکل زیر برای یک سیستم کنترل کمینه فاز با فیدبک واحد منفی در کدام گزینه نشان داده شده است؟

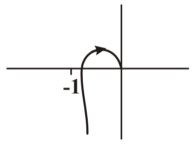




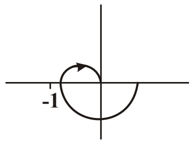
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

۲۱ـ با توجه به عبارت‌های زیر کدام گزینه صحیح است؟

الف) دوایر دامنه ثابت (M ثابت) نسبت به محور حقیقی متقارن هستند.

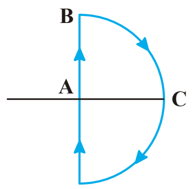
ب) تأخیر انتقالی افت فاز شدیدی را بدون تضعیف در فرکانس‌های بالا به همراه دارد.

ج) نمودار لگاریتم دامنه برحسب فاز (نیکولز) برای تحلیل پایداری مطلق و نسبی کفایت می‌کند.

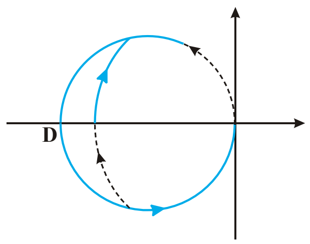
۱) فقط عبارت «الف» صحیح است.
۲) عبارت‌های «الف» و «ج» نادرست هستند.
۳) فقط عبارت «ج» نادرست است.
۴) هر سه عبارت صحیح هستند.

تذکر: در سؤالات ۲۲ تا ۲۵ از تابع تبدیل اشاره شده در سؤال ۲۲ استفاده شده است. سؤالات به نوعی به یکدیگر مربوط هستند، اما هر یک به شکل جداگانه قابل پاسخگویی هستند.

۲۲ـ دیاگرام نایکوئیست سیستمی با تابع تبدیل حلقه به شکل $L(s)=\dfrac{300(s-1)}{(s-10)(s-100)}$ به صورت مقابل داده شده است. شکل (الف) مسیر نایکوئیست متناظر و شکل (ب) نمودار نایکوئیست سیستم را نشان می‌دهد.



(الف)



(ب)

نگاشت متناظر با نقطه A در شکل (الف) برابر است با:

۱) $0/3$
۲) 0
۳) 3
۴) $-0/3$

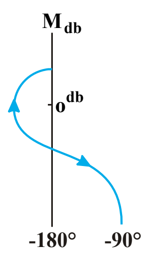
۲۳ـ در سؤال قبلی، در نگاشت متناظر با مسیر AB در صفحه S مطابق با شکل (الف) و ترسیم نمودار قطبی مطابق شکل (ب) در نقطه D فرکانس ω به طور تقریبی برابر است با:

۱) $3\ \mathrm{rad}/s$
۲) $30\ \mathrm{rad}/s$
۳) $10\ \mathrm{rad}/s$
۴) با اطلاعات داده شده قابل محاسبه نیست.

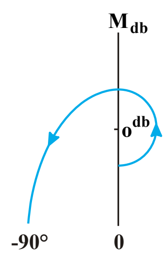
۲۴ـ در سؤال ۲۲، اگر بهره حلقه باز K را افزایش دهیم، به ازای مقادیر بزرگ بهره K وضعیت پایداری سیستم حلقه بسته چگونه تغییر می‌کند؟

۱) از پایداری به ناپایدار با یک ریشه سمت راست
۲) از پایدار به ناپایدار با دو ریشه سمت راست
۳) از ناپایدار با یک ریشه سمت راست به پایدار
۴) سیستم حلقه بسته پایدار می‌ماند.

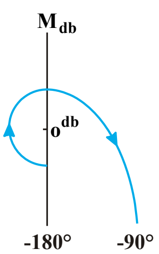
۲۵ـ کدام گزینه نمودار نیکولز متناظر با تابع تبدیل داده شده در صورت سؤال ۷ را به درستی نشان می‌دهد؟



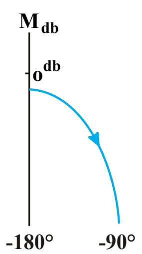
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

۲۶ـ با توجه به عبارت‌های زیر کدام گزینه صحیح است؟

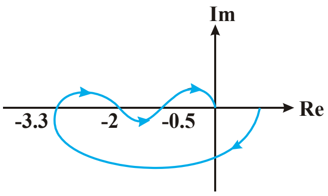
الف) حد بهره و حد فاز کافی سیستم را در برابر خطاهای مدل‌سازی حفاظت می‌کنند.

ب) حد بهره و حد فاز کافی سیستم پاسخ گذرای قابل قبولی را تضمین می‌کنند.

ج) در طراحی جبران‌ساز معمولاً حد فاز مناسبی را انتخاب می‌کنیم. در این صورت به طور معمول حد بهره قابل قبولی نیز نتیجه خواهد شد.

۱) فقط عبارت «الف» صحیح است.
۲) فقط عبارت «ب» نادرست است.
۳) فقط عبارت «ج» نادرست است.
۴) هر سه عبارت صحیح هستند.

۲۷ـ نمودار قطبی سیستمی به شکل زیر مفروض است. اگر بدانیم سیستم حلقه باز پایدار است، محدوده بهره حلقه باز $k > ۰$ که به ازای آن سیستم حلقه بسته پایدار باشد برابر است با:



۱) $۰ < k < ۰/۵$

۲) $۰ < k < ۰/۳$ یا $۰/۵ < k < ۲$

۳) $۰ < k < ۰/۳$ یا $k > ۲$

۴) $۰/۳ < k < ۰/۵$

۲۸ـ با توجه به عبارت‌های زیر کدام گزینه صحیح است؟

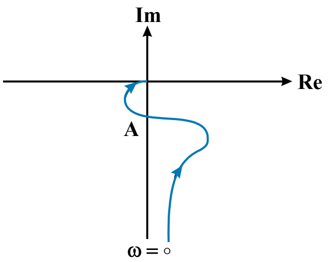
الف) تغییر بهره هیچ تأثیری بر حاشیه فاز (PM) ندارد.

ب) حداکثر شیفت فاز توسط جبران‌ساز $\frac{۱+۶s}{۱+۲s}$ برابر است با ۳۰ درجه

ج) حاشیه فاز و نسبت میرایی سیستم مستقل از یکدیگر هستند.

۱) فقط عبارت «ج» نادرست است.
۲) عبارات «ب» و «ج» نادرست هستند.
۳) عبارات «الف» و«ج» نادرست هستند.
۴) هر سه عبارت نادرست هستند.

۲۹ـ تابع تبدیل حلقه باز سیستمی با فیدبک واحد منفی به شکل $L(s) = \frac{۱+Ts}{s(s+۱)(۲s+۱)}$ مفروض است $(T > ۰)$. اگر نمودار قطبی چنین سیستمی به شکل زیر باشد و بدانیم فرکانس در نقطه A برابر با $\omega_A = \frac{۱}{۲}$ است. در این صورت:



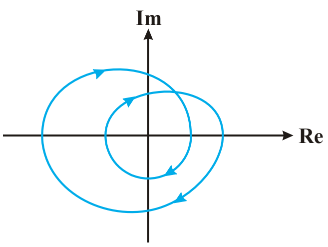
۱) $T = \frac{۳}{۲}$

۲) $T = ۶$

۳) $T = ۱۲$

۴) $T = ۳$

۳۰ـ مسیری مانند Γ_s در صفحه s توسط تابعی مثل F(s) به شکل زیر نگاشته شده است. کدام گزینه در مورد تعداد صفر و قطب‌های تابع F(s) درون مسیر Γ_s صحیح است؟



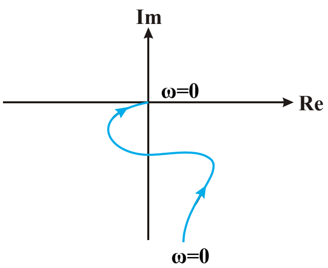
۱) F(s) سه قطب و یک صفر درون Γ_s دارد.

۲) F(s) سه صفر و یک قطب درون Γ_s دارد.

۳) F(s) صفر و قطبی درون Γ_s ندارد.

۴) F(s) یک صفر و یک قطب درون Γ_s دارد.

۳۱ـ با توجه به نمودار قطبی زیر که متناظر با سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز $L(s) = \frac{۱+Ts}{s(s+۱)(۲s+۱)}$ و فیدبک واحد منفی است $(T > ۰)$ اگر بدانیم $\lim_{\omega\to ۰} \mathrm{Re}\, L(j\omega) = ۳$ در این‌صورت:



۱) $T = ۶$

۲) $T = ۴$

۳) $T = ۳$

۴) $T = ۸$

پاسخنامه تست‌های تألیفی فصل ششم

۱ـ گزینه «۳»

$$\varphi=\frac{\pi}{۲}-tg^{-۱}\frac{\omega}{a}-۲tg^{-۱}\frac{\omega}{۱۰}$$

به ازای $\omega=\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}$:

$$tg^{-۱}\frac{\omega}{a}+۲tg^{-۱}\frac{\omega}{۱۰}=\frac{\pi}{۲}$$

و یا:

$$tg^{-۱}\frac{\omega}{a}+۲tg^{-۱}\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{\pi}{۲}$$

لذا:

$$tg^{-۱}\frac{\omega}{a}+۲(\frac{\pi}{۶})=\frac{\pi}{۲}$$

در نتیجه:

$$tg^{-۱}\frac{\omega}{a}=\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۳}=\frac{\pi}{۶}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\omega}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow a=۱۰$$

۲ـ گزینه «۲» گزینه صحیح را به شکل $L(s)=k\frac{s^۲+۴}{s(s+a)}$ در نظر می‌گیریم. حاشیه فاز در $\omega_{gc}=۱$ برابر ۴۵ درجه است. لذا:

$$|L|=۱\Rightarrow k\frac{۳}{۱(\sqrt{۱+a^۲})}=۱\Rightarrow ۱+a^۲=۹k^۲$$

$$\angle L(j۱)=-۱۳۵^\circ\Rightarrow -۹۰^\circ-tg^{-۱}\frac{۱}{a}=-۱۳۵^\circ\Rightarrow a=۱$$

و لذا داریم:

$$۹k^۲=۲\Rightarrow k=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

۳ـ گزینه «۱»

روش اول: ثابت خطای استاتیکی شیب برابر است با:

$$k_v=\lim_{s\to ۰}sG(s)$$

$$\frac{۱}{۲}=\frac{k}{s^۲+s+۴}\Rightarrow k=۲$$

پس داریم $G(s)=\frac{۲}{s(s^۲+s+۴)}$. حال کافی است محل برخورد با محور حقیقی را به دست آوریم. یعنی داریم:

$$Im(G(j\omega))=۰\Rightarrow\frac{۲}{j\omega(-\omega^۲+۴+j\omega)}=\frac{-۲j(-\omega^۲+۴-j\omega)}{\omega((-\omega^۲+۴)^۲+\omega^۲)}\Rightarrow -\omega^۲+۴=۰\Rightarrow\omega=۲$$

$$Re(G(j۲))=\frac{۲}{۲j(۲j)}=-\frac{۱}{۲}$$

روش دوم: طبق تعریف ثابت خطای استاتیکی شیب برابر است با:

$$k_v=\lim_{s\to ۰}sG(s)=\frac{k}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

و یا $k=۲$.

از معیار پایداری روث داریم:

$$\Delta(s)=s^۳+s^۲+۴s+k=۰$$

$$\begin{array}{c|cc} s^۳ & ۱ & ۴ \\ s^۲ & ۱ & k \\ s^۱ & ۴-k & ۰ \\ s^۰ & k & \end{array}$$

لذا شرط پایداری $۰<k<۴$ است و به ازای $k=۲$ حد بهره ۲ می‌باشد. یعنی با افزایش بهره k به دو برابر مقدار فعلی، سیستم در آستانه ناپایداری قرار می‌گیرد، لذا محل تلاقی نمودار نایکوئیست در شرایط فعلی با محور حقیقی $-\frac{۱}{۲}$ خواهد بود.

۴ـ گزینه «۱» محل شروع دیاگرام نایکوئیست از نقطه‌ای با فاز اولیه ۳۶۰− درجه یا صفر شروع شده است. این حالت متناظر با سیستم نوع دو یا نوع چهار است (با این فرض که سیستم کمترین مرتبه ممکن را دارد).

$$G(s)=\frac{(s+a)(s+b)}{s^4}\qquad a,b>0$$

$$\measuredangle G(j\omega)=-360+\tan^{-1}\frac{\omega}{a}+\tan^{-1}\frac{\omega}{a}\Rightarrow \measuredangle G(j0^+)=\frac{\omega}{a}+\frac{\omega}{b}\cong 1^\circ$$

$$\measuredangle G(j\infty)=-2\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cong -181$$

این حالت دقیقاً متناظر با شکل رسم شده است که نمودار دو دور کامل ۱− را دور می‌زند.

$$G(s)=\frac{(s-a)(s-b)}{s^4}\qquad a,b>0$$

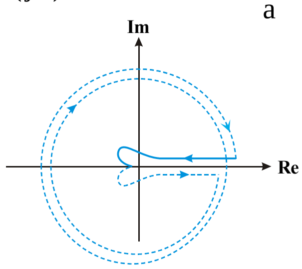
$$\measuredangle G(j\omega)=-360+\pi-\tan^{-1}\frac{\omega}{a}+\pi-\tan^{-1}\frac{\omega}{b}=-\tan^{-1}\frac{\omega}{a}-\tan^{-1}\frac{\omega}{b}$$

$$\measuredangle G(j0^+)=-\frac{\omega}{a}-\frac{\omega}{b}\cong -1$$

فاز سیستم از فرکانس $\omega\to 0^+$ با شکل رسم شده مطابقت ندارد.

$$G(s)=\frac{(s-a)}{s^2}\qquad a>0$$

$$\measuredangle G(j\omega)=-\pi+\pi-\tan^{-1}\frac{\omega}{a}=-\tan^{-1}\frac{\omega}{a}\Rightarrow \measuredangle G(j0^+)=-\frac{\omega}{a}\cong -1$$

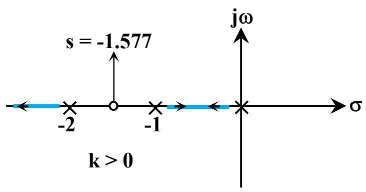


فاز اولیه این سیستم نیز با شکل رسم شده در فرکانس $\omega\to 0$ در تضاد است. پس شکل کلی سیستم به صورت مقابل است: (حالت اول)

در این حالت $N=2$ است و از آن‌جایی که سیستم حلقه بسته دو قطب ناپایدار دارد یعنی $Z=2$ است، می‌توان نتیجه گرفت که تابع تبدیل حلقه هیچ قطب ناپایداری ندارد یعنی $P=0$. گزینه (۱) صحیح است.

۵ـ گزینه «۴» با توجه به شیب شروع نمودار دامنه تابع تبدیل قطبی در مبدأ ندارد. $\omega=2$ صفر مرتبه دوم را مدل می‌کند. $\omega=3$ قطب مرتبه دوم با $0<\zeta<1$ را نشان می‌دهد. $\omega=4,10$ نیز قطب مرتبه اول هستند.

۶ـ گزینه «۲» همه گزینه‌ها مستقل از یکدیگر باید بررسی شوند. اما با یک نگاه کلی می‌توان حدس زد که گزینه ۲ معتبر نیست چرا که با توجه به موقعیت قطب‌ها و صفرهای تابع حلقه باز نقطه $s=-1/577$ نمی‌تواند به ازای $k>0$ روی مکان باشد. چرا که در این نقطه مجموع صفر و قطب‌های تابع حلقه در سمت راست زوج است.



۷ـ گزینه «۱»

$$\lim_{s\to 0}|L(s)|=(0/1)(0/1)(10)(100)=10\ \Rightarrow\ A_{db}=20\,db$$

در $\omega=10^{-1}$ صفری داریم که در یک دهه $20db$ به مقدار تابع اضافه می‌کند، لذا $B=40\,db$. در $\omega=10^\circ$ سه قطب داریم که در یک دهه $40\,db$ مقدار دامنه را کاهش می‌دهند و لذا $C=0db$، نهایتاً در $\omega=10$ شیب خط به $-20\frac{db}{dec}$ تبدیل می‌شود یعنی در $\omega=10^2$، $D=-20\,db$.

۸ـ گزینه «۲» برای به دست آوردن منحنی فاز این سیستم و زوایا θ_i ها، منحنی فاز را به طور تحلیلی به دست می‌آوریم:

$$\measuredangle G(j\omega)=\pi-\tan^{-1}\frac{\omega}{0/1}-3\tan^{-1}\omega+\tan^{-1}\frac{\omega}{10}+\tan^{-1}\frac{\omega}{100}$$

ترتیب فعال شدن به این صورت است که ابتدا فاز اولیه ۱۸۰ درجه است. سپس برای $-\tan^{-1}\frac{\omega}{0/1}$ فاز سیستم $\frac{\pi}{2}$ کاهش می‌یابد و به $\frac{\pi}{2}$ می‌رسد. پس از آن $-3\tan^{-1}\omega$ داریم که $\frac{3\pi}{2}$ فاز سیستم را کاهش می‌دهد و به $-\pi$ می‌رسد. پس از آن $\tan^{-1}\frac{\omega}{10}$، $\frac{\pi}{2}$ و $\tan^{-1}\frac{\omega}{100}$ نیز $\frac{\pi}{2}$ فاز به سیستم اضافه می‌کند. این دو عامل باعث می‌شود که فاز نهایی سیستم به صفر برسد. پس گزینه (۲) صحیح است.

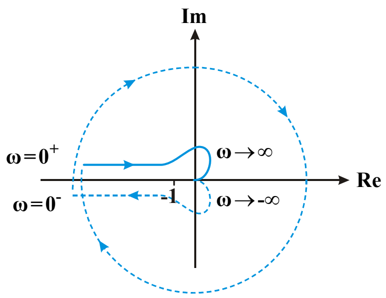
۹ـ گزینه «۲» تابع تبدیل حلقه باز سیستم به صورت $\frac{e^{-2Ts}}{2s+p}$ است. فاز تابع تبدیل سیستم را در فرکانس $\omega=\frac{3\pi}{8}$ برابر با $-\pi$ قرار می‌دهیم.

$$\measuredangle G(j\omega)=-2T\omega-\tan^{-1}2\frac{\omega}{p}\Big|_{\omega=\frac{3\pi}{8}}=-\pi\ \Rightarrow \tan^{-1}\frac{3\pi}{4p}=\pi-\frac{3\pi}{4}T$$

معادله فوق دو مجهول دارد اما تنها معادله‌ای است که می‌توانیم بنویسیم به همین دلیل یک پارامتر را ثابت و دیگری را می‌یابیم.

$$T=1\Rightarrow \tan^{-1}\frac{3\pi}{4p}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow p=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow \frac{p}{T}=\frac{3\pi}{4}$$

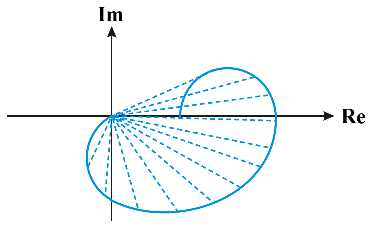
۱۰ـ گزینه «۳» سیستم اگر مینیمم فاز باشد از نوع ۲ و ۶ و ... است و اگر نامینیمم فاز باشد از نوع ۴ و ۸ و ... است. باید شکل را کامل کنیم. در این‌جا سیستم را به صورت نوع ۲ در نظر می‌گیریم و شکل را تکمیل می‌کنیم.

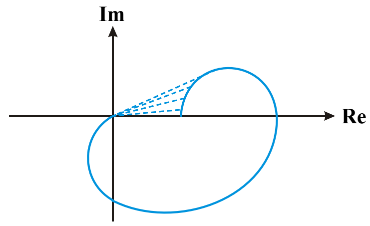


می‌توان دید که دیاگرام نایکوئیست دو بار در جهت ساعت نقطه ۱- را دور می‌زند یعنی $N=2$ است. تعداد قطب‌های حلقه بسته در سمت راست محور $j\omega$ برابر است با $Z=N+P$. با توجه به مثبت بودن تعداد دورها حول نقطه ۱-، صرف‌نظر از تعداد قطب‌های ناپایدار حلقه باز، سیستم حلقه بسته همواره حداقل دو قطب ناپایدار دارد. پس همواره ناپایدار است.

اگر دیاگرام نایکوئیست به ازای سیستم نوع چهار نیز رسم شود، به همین نتیجه خواهیم رسید. پس گزینه (۳) صحیح است.

۱۱ـ گزینه «۲» با توجه به تابع تبدیل داده شده و دیاگرام نایکوئیست می‌توان دریافت که ابتدا فاز سیستم افزایش می‌یابد. شکل زیر افزایش فاز را نشان می‌دهد.





پس از آن فاز سیستم همواره کاهش می‌یابد، چون ۳ قطب در سیستم وجود دارد. برای این که فاز سیستم در ابتدا افزایش و سپس کاهش یابد، باید در ابتدا صفر سیستم فعال شود تا فاز سیستم افزایش یابد.

$$\measuredangle G(j\omega)=\tan^{-1}T\omega-3\tan^{-1}\omega$$

برای این که اثر صفر در ابتدا فعال شود باید $T>1$ انتخاب شود یعنی گزینه‌های (۳) و (۴) صحیح نیستند. برای یافتن محدوده آن تابع تبدیل حلقه باز را به صورت $G(j\omega)=\mathrm{Re}(G(j\omega))+j\,\mathrm{Im}(G(j\omega))$ می‌نویسیم.

$$G(j\omega)=\frac{-T\omega^4+(3T-3)\omega^2+1}{\omega^6+3\omega^4+3\omega^2+1}+j\frac{(-3T+1)\omega^3+(T-3)\omega}{\omega^6+3\omega^4+3\omega^2+1}$$

فرکانس تقاطع با محور حقیقی را به دست می‌آوریم.

$$\mathrm{Im}(G(j\omega))=0\Rightarrow \omega((-3T+1)\omega^2+(T-3))=0\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{3-T}{-3T+1}}$$

برای مثبت بودن فرکانس تقاطع باید شرط $T>3$ یا $T<\frac{1}{3}$ رعایت شود اما از آن جایی که $T>1$ قابل قبول است پس $T>3$ است.

۱۲ـ گزینه «۱» با توجه به محل شروع دیاگرام نایکوئیست از زاویه حدود -1° می‌توان تشخیص داد سیستم از نوع ۴ مینیمم فاز یا نوع ۲ غیرمینیمم فاز است. باید فاز نقطه شروع گزینه‌ها را بررسی کنیم.

$$\measuredangle G_1(j\omega)=\pi-\tan^{-1}\omega+\tan^{-1}\frac{\omega}{10}-\pi\ \Rightarrow \measuredangle G_1(j0^+)=-\omega+\frac{\omega}{10}<0$$

$$\measuredangle G_2(j\omega)=-2\pi+3\times\tan^{-1}\omega+\tan^{-1}\frac{\omega}{10}\ \Rightarrow \measuredangle G_2(j0^+)=3\omega+\frac{\omega}{10}>0$$

$$\measuredangle G_3(j\omega)=-\pi+\pi-\tan^{-1}\omega+\pi-\tan^{-1}\frac{\omega}{10}\ \Rightarrow \measuredangle G_3(j0^+)=\pi-\omega-\frac{\omega}{10}\cong 179$$

از همین بررسی می‌توان گزینه (۱) را به عنوان گزینه صحیح انتخاب کرد. همچنین این گزینه، تنها گزینه‌ای است که همواره فاز منفی دارد.

۱۳ـ گزینه «۱» مسیر نایکوئیست در جهت ساعتگرد است و مسیر نایکوئیست نقطه‌ی $\pm j$ را به صورت ساعتگرد دور می‌زند. پس دیاگرام نایکوئیست به اندازه‌ی ۳۶۰ درجه نقطه ۱- را در جهت پادساعتگرد دور می‌زند. با توجه به این نکته تنها گزینه‌های (۱) و (۳) می‌توانند صحیح باشند. اگر فاز سیستم در فرکانس $\omega = 1$ را به دست آوریم، می‌توانیم گزینه صحیح را انتخاب کنیم.

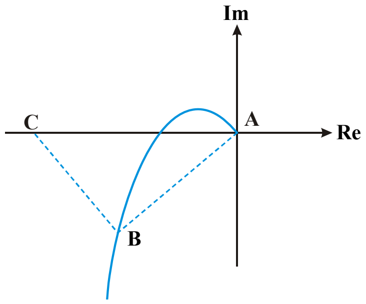
$$\measuredangle G = 180 + 4\tan^{-1}\omega$$

به ازای فرکانس $\omega = 1^+$ فاز سیستم برابر است با:

$$\measuredangle G(j1^+) = 180 + 4\tan^{-1}1^+ \cong 361$$

با توجه به فاز این فرکانس تنها گزینه (۱) صحیح است. توجه کنید سیستم در فرکانس $\omega \to 0^+$ و $\omega \to \infty$ در نقطه‌ی ۱- قرار خواهد داشت. همچنین توجه کنید که عامل قطب این سؤال در تابع تبدیل هیچ تأثیری بر روی منحنی فاز ندارد چون همواره به ازای همه فرکانس‌ها عددی مثبت است.

۱۴ـ گزینه «۴» چون در سؤال در مورد تابع تبدیل حلقه باز اطلاعی داده نشده آن را پایدار فرض می‌کنیم. برای به دست آوردن دامنه خروجی سیستم به ازای ورودی $2\cos(5t)$ سیستم از حد بهره سیستم استفاده می‌کنیم. فرکانس قطع سیستم $\omega = 5$ است.



$$20\log\left|\frac{1}{G(s)}\right| = 10 \Rightarrow \log\left|\frac{1}{G(s)}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow |G(s)| = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

پس خروجی سیستم با توجه به فاز ۱۸۰− درجه سیستم برابر است با:

$$\frac{G(5j)}{1+G(5j)} \times 2 = \frac{-\frac{1}{\sqrt{10}}}{-\frac{1}{\sqrt{10}}+1} \times 2 = \frac{-2(1+\sqrt{9})}{10}$$

برای ورودی $5\cos 2t$ نیز از زاویه 90° استفاده می‌کنیم. خروجی سیستم در فرکانس $\omega = 2$ برابر است با:

$$\frac{G(2j)}{1+G(2j)} \times 5 = \frac{|AB|}{|BC|} \times 5 = \frac{0/6}{0/8} \times 5 = 3/75$$

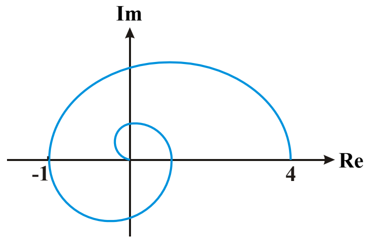
۱۵ـ گزینه «۳» برای این‌که کمترین خطای حالت ماندگار را داشته باشیم باید دیاگرام را به ازای افزایش بهره k تا مرز ناپایداری ببریم چرا که خطای حالت ماندگار این سیستم پایدار برابر است با:

$$E = 1 - \frac{G(0)}{1+G(0)} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{G(0)+1}$$

این رابطه یعنی هرچه $G(0)$ بزرگ‌تر باشد و سیستم پایدار بماند، کمترین خطا را خواهیم داشت. پس اگر $k = 2$ انتخاب شود سیستم روی ۱- قرار می‌گیرد و مرز ناپایداری سیستم است. در این حالت خطای حالت ماندگار برابر است با:

$$E = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$$

دیاگرام نایکوئیست در این حالت به صورت زیر است:



۱۶ـ گزینه «۳» ورودی سیستم‌ها برای رسم نمودار بود به صورت $\forall\omega \in [0,\infty)$ و $r(t) = \sin\omega t$ است یعنی فرکانس ورودی را در گذر زمان افزایش می‌دهیم یا به عبارت دیگر تمامی فرکانس‌های سیستم $G(s)$ را تحریک می‌کنیم.

۱۷ـ گزینه «۳» باید فاز سیستم‌های داده شده را به دست آوریم.

بررسی گزینه (۱): ابتدا باید تابع تبدیل را به فرم استاندارد بنویسیم:

$$G_1(s) = \frac{-(s+10)}{(s+1)(2s-1)}$$

و سپس فاز آن را تعیین کنیم:

$$\measuredangle G_1(j\omega) = \tan^{-1}\frac{\omega}{10} - \tan^{-1}\frac{\omega}{1} + \pi - \pi + \tan^{-1}2\omega = \tan^{-1}\frac{\omega}{10} - \tan^{-1}\omega + \tan^{-1}2\omega$$

$$\measuredangle G_1(j\infty) = 90 \neq (2-1)\times(-90)$$

بررسی گزینه (۲): ابتدا تابع تبدیل را ساده می‌کنیم:

$$G_۲(s)=\frac{-۱}{s+۲}$$

$$\measuredangle G_۲(j\omega)=\pi-\tan^{-۱}\frac{\omega}{۲}\Rightarrow \measuredangle G_۲(j\infty)=۹۰\neq(۱)\times(-۹۰)$$

بررسی گزینه (۳):

$$\measuredangle G_۳(j\omega)=\tan^{-۱}\frac{\omega}{۸}-\tan^{-۱}\frac{\omega}{۳}-\pi+\tan^{-۱}\frac{\omega}{۲}$$

$$\measuredangle G_۳(j\infty)=-۹۰=-۹۰(۲-۱)$$

۱۸ـ گزینه «۲» از روی نمودار نیکولز داده شده می‌توان فهمید که حداکثر حد فاز سیستم در فرکانس $\omega=۲$ رخ می‌دهد. برای رسیدن به حداکثر حد فاز باید نمودار نیکولز به اندازه‌ی $۱۰dB$ به سمت پایین حرکت کند.

$$۲۰\log k=-۱۰ \quad \text{یا} \quad ۲۰\log kG(s)\Big|_{s=۲j}=۰\Rightarrow ۲۰\log k+۲۰\log G(۲j)=۰$$

$$۲۰\log k=-۱۰\Rightarrow k=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$

به ازای این بهره حد فاز سیستم حداکثر می‌شود.

۱۹ـ گزینه «۴» فاز اولیه سیستم برابر با صفر و اندازه آن نیز برابر با $۰dB$ است. از اندازه‌ی اولیه نمی‌توان کمک گرفت چون اندازه اولیه تمام گزینه‌ها برابر با $۰dB$ است. فاز اولیه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

$$\measuredangle G_۱(j۰^+)=۲\tan^{-۱}\frac{\omega}{۱۰}-۰=۰$$

$$\measuredangle G_۲(j۰^+)=\pi-\tan^{-۱}\frac{\omega}{۱۰}+\tan^{-۱}\frac{\omega}{۱۰}-۰=۱۸۰$$

$$\measuredangle G_۳(j۰^+)=۰-\pi+\tan^{-۱}\frac{\omega}{۱۰}+\pi-\pi+\tan^{-۱}\frac{\omega}{۱۰}=-۱۸۰$$

$$\measuredangle G_۴(j۰^+)=\pi-\tan^{-۱}\frac{\omega}{۱۰}+\pi-\tan^{-۱}\frac{\omega}{۱۰}-۰=۳۶۰=۰$$

پس گزینه (۱) یا (۴) صحیح است. فاز نهایی سیستم ۱ و ۴ را بررسی می‌کنیم.

$$\measuredangle G_۱(j\infty)=۲\tan^{-۱}\frac{\omega}{۱۰}-\pi=۰$$

$$\measuredangle G_۴(j\infty)=\pi-\tan^{-۱}\frac{\omega}{۱۰}+\pi-\tan^{-۱}\frac{\omega}{۱۰}-\pi=۰=-۳۶۰$$

نکته‌ای که با توجه به آن می‌توان گزینه صحیح را انتخاب کرد روند حرکت منحنی فاز است اگر دقت شود منحنی فاز در حال کاهش یافتن است تا به مقدار نهایی خود برسد. در بین گزینه‌های (۱) و (۴) کاهش فاز در گزینه (۴) دیده می‌شود و گزینه (۱) با افزایش فاز و سپس کاهش آن به مقدار نهایی صفر درجه می‌رسد.

از ابتدا می‌توان گزینه‌های (۱) و (۳) را حذف کرد چرا که عامل $(s+۱۰)^۲$ در گزینه (۱) و $(s^۲+۱۰۰)$ در گزینه (۳) باعث افزایش فاز می‌شوند، در حالی که نمودار فاز سیستم هیچ‌گونه افزایش فازی را نشان نمی‌دهد. برای انتخاب گزینه صحیح بین (۲) و (۴) نیز باید از فاز اولیه کمک گرفت.

۲۰ـ گزینه «۴» از شیب شروع نمودار دامنه مشخص است که تابع تبدیل، قطبی در مبدأ ندارد و لذا اندازه شروع محدود است. بنابراین گزینه ۱ و ۳ نمی‌توانند صحیح باشند.

از فرکانس گوشه $۱۰^۱$ تا $۱۰^۲$ نمودار اندازه ۴۰ دسی‌بل کاهش را نشان می‌دهد و لذا $\omega=۱۰^۱$ قطب مرتبه دوم را نشان می‌دهد. با توجه به قطب در $\omega=۱۰^۲$ سیستم سه قطب دارد و لذا با توجه به کمینه فازی آن فاز شروع صفر و فاز نهایی آن -۲۷۰° خواهد بود. بنابراین پاسخ (۲) نیز نادرست است و گزینه (۴) صحیح خواهد بود.

۲۱ـ گزینه «۳» اندازه تأخیر انتقالی در تمامی فرکانس‌ها برابر یک است و لذا تضعیفی در فرکانس‌های بالا به همراه ندارد. نمودار لگاریتم دامنه برحسب فاز در تحلیل پایداری مطلق و نسبی برای سیستم‌هایی با چندین فرکانس قطع و یا سیستم‌های ناکمینه فاز به تنهایی کفایت نمی‌کند و در این شرایط بهتر است به نمودارهای مکان ریشه و نایکوئیست در تحلیل پایداری استفاده کنیم.

۲۲ـ گزینه «۴» نقطه A در صفحه s در واقع $s = j\omega$ را به ازای $\omega = ۰$ نشان می‌دهد. برای محاسبه نگاشت این نقطه کافی است در تابع تبدیل $L(s)$ به جای s، صفر قرار دهیم و لذا نگاشت A برابر با $-۰/۳$ به‌دست می‌آید.

۲۳ـ گزینه «۲» نگاشت مسیر AB توسط $L(s)$ در حقیقت نمودار قطبی را نتیجه می‌دهد. در نقطه D در شکل (ب) زاویه فاز برابر با -۱۸۰° خواهد بود. لذا فرکانس ω در نقطه D همان فرکانس قطع فاز است و برای محاسبه آن می‌توان از $\operatorname{Im} L(s) = ۰$ استفاده نمود و یا به طور معادل از معیار پایداری روث به شکل مقابل استفاده نمود:

$$\Delta(s) = ۱ + KL(s) = ۰ \to \Delta(s) = (s-۱۰)(s-۱۰۰) + ۳۰۰k(s-۱) = ۰$$

و یا:

$$s^۲ + (۳۰۰k - ۱۱۰)s + ۱۰۰۰ - ۳۰۰k = ۰$$

برای پایداری باید:

$$\begin{cases} ۳۰۰k - ۱۱۰ > ۰ \\ ۱۰۰۰ - ۳۰۰k > ۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{۱۱}{۳۰} < k < \frac{۱۰}{۳}$$

در حالت نوسانی داریم:

$$۳۰۰k - ۱۱۰ = ۰ \to k = \frac{۱۱}{۳۰}$$

در این حالت:

$$\Delta(s) = s^۲ + ۱۰۰۰ - ۳۰۰\left(\frac{۱۱}{۳۰}\right)$$

و یا:

$$\Delta(s) \cong s^۲ + ۹۰۰ \to w_{pc} \approx ۳۰ \, {}^{rad}\!/_{s}$$

۲۴ـ گزینه «۱» در پاسخ به سؤال قبلی دیدیم که در شرایط فعلی سیستم حلقه بسته پایدار است. با افزایش بهره حلقه باز K برطبق نمودار نایکوئیست داده شده $N = -۱$ خواهد شد. در این حالت با توجه به اینکه $P = ۲$ می‌باشد، $Z = N + P = ۱$ و لذا سیستم حلقه بسته با یک ریشه سمت راست ناپایدار خواهد شد.

۲۵ـ گزینه «۳» از نمودار نایکوئیست داده شده در صورت سؤال، متناظر با تابع تبدیل $L(s)$ واضح است که فاز شروع برابر -۱۸۰° و فاز نهایی برابر -۹۰° خواهد بود. لذا گزینه ۲ صحیح نیست. از طرفی به علت وجود صفر ناپایدار در $s = ۱$ فاز سیستم در فرکانس‌های پایین ابتدا کاهش می‌یابد، سپس با توجه به دوقطب ناپایدار در $s = ۱۰$ و $s = ۱۰۰$ افزایش یافته تا سرانجام به -۹۰° برسد. از طرفی اندازه شروع برابر با -۱۰^{db} به‌دست می‌آید. لذا گزینه ۱ نادرست است. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۲۶ـ گزینه «۴» با توجه به تعریف حد بهره و حد فاز به عنوان حاشیه پایداری سیستم در شرایط گوناگون نظیر تغییر بهره حلقه یا تغییر فاز آن به علت تأخیر زمانی موجود در سیستم واضح است که هر سه عبارت تعبیر صحیحی از این دو معیار را ارائه می‌دهند.

۲۷ـ گزینه «۲» از محک پایداری نایکوئیست می‌دانیم $Z = N + P$. با توجه به پایداری حلقه باز: $P = ۰$ و بنابراین برای پایداری حلقه بسته به طوری که $Z = ۰$ باشد باید $N = ۰$ و به این ترتیب:

$$\begin{cases} -۲ < \dfrac{-۱}{k} < -۰/۵ \\ \dfrac{-۱}{k} < -۳/۳ \end{cases}$$

از حل این نامعادلات خواهیم داشت:

$$\begin{cases} ۰ < k < ۰/۳ \\ ۰/۵ < k < ۲ \end{cases}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۲۸ـ گزینه «۳» متغیر بهره با تغییر فرکانس قطع بهره باعث تغییر حاشیه فاز خواهد شد. از طرفی حاشیه فاز و نسبت میرایی سیستم به یکدیگر مرتبط هستند. برای جبران‌ساز پیش‌فاز $\frac{1+6s}{1+2s}$ شیفت فاز به شکل مقابل محاسبه می‌شود:

$$\phi = tg^{-1}6\omega - tg^{-1}2\omega$$

حداکثر مقدار شیفت فاز را با مشتق‌گیری حساب می‌کنیم.

$$\frac{d\phi}{d\omega} = 0 \Rightarrow \frac{6}{1+36\omega^2} - \frac{2}{1+4\omega^2} = 0 \Rightarrow 6+24\omega^2 = 2+72\omega^2$$

و یا:

$$\omega^2 = \frac{1}{12} \Rightarrow \omega = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

در نتیجه:

$$tg\phi_{max} = \frac{4\omega}{1+12\omega^2} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

و لذا $\phi_{max} = 30^\circ$

۲۹ـ گزینه «۲» فرکانس در نقطه A را می‌توان از تلاقی نمودار قطبی با محور موهومی به دست آورد. به این منظور داریم:

$$L(j\omega) = \frac{1+j\omega T}{-3\omega^2 + j\omega(1-2\omega^2)}$$

و بنابراین:

$$L(j\omega) = \frac{(1+j\omega T)\left(-3\omega^2 - j\omega(1-2\omega^2)\right)}{9\omega^4 + \omega^2(1-2\omega^2)^2}$$

به این ترتیب:

$$\operatorname{Re} L(j\omega) = 0 \Rightarrow -3\omega^2 + T\omega^2(1-2\omega^2) = 0$$

و یا $T-3 = 2T\omega^2$

با جایگذاری $\omega = \frac{1}{2}$ داریم:

$$T-3 = 2T(\frac{1}{4})$$

و لذا:

$$T = 6$$

۳۰ـ گزینه «۲» طبق قضیه نگاشت داریم:

$$N = Z - P$$

که N تعداد دفعاتی است که مسیر نگاشته شده مبدأ مختصات را دربرمی‌گیرد. در این سؤال $N=2$ و بنابراین تفاوت صفر و قطب‌های $F(s)$ درون مسیر اولیه در صفحه S یا درون مسیر Γ_S باید برابر دو باشد، یعنی $\begin{cases} z=3 \\ p-1 \end{cases}$ تنها گزینه ممکن است.

۳۱ـ گزینه «۱» برای محاسبه T باید جزء حقیقی $L(j\omega)$ را در فرکانس صفر محاسبه کنیم. بنابراین داریم:

$$L(j\omega) = \frac{(1+j\omega T)(-3\omega^2 - j\omega(1-2\omega^2))}{9\omega^4 + \omega^2(1-2\omega^2)}$$

و یا:

$$\operatorname{Re} L(j\omega) = \frac{-3\omega^2 + \omega^2 T(1-2\omega^2)}{9\omega^4 + \omega^2(1-2\omega^2)^2}$$

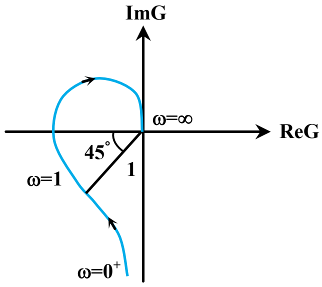
به ازای $\omega \to 0$ داریم:

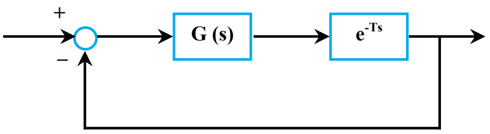
$$R_e L(j\omega) \to -3 + T$$

$$T = 6 \quad \text{یا} \quad -3+T = 3$$

آزمون فصل ششم

۱ـ در سیستم کنترل شکل زیر تابع $G(s)$ هیچ صفر یا قطبی در سمت راست محور $j\omega$ ندارد. دیاگرام قطبی تابع G نیز در شکل ترسیم شده است. حداکثر تأخیر زمانی T که منجر به ناپایداری سیستم نشود کدام است؟ (نزدیک‌ترین جواب را انتخاب کنید)





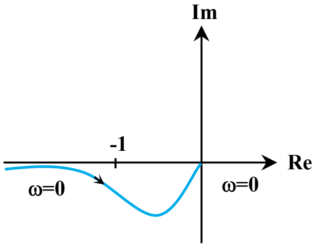
۱) $T=۰/۵۲^{S}$

۲) $T=۰/۷۸^{S}$

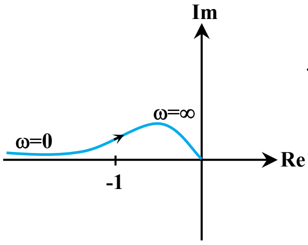
۳) $T=۰/۹۱^{S}$

۴) $T=۱^{S}$

۲ـ سیستمی دارای تابع مدار باز $\dfrac{k(\tau_a s+1)}{s^2(\tau_b s+1)}$ و دارای دیاگرام نایکوئیست شکل (۱) است $(\tau_a > \tau_b > ۰)$. اگر صفر تابع مدار باز را حذف کنیم دیاگرام نایکوئیست آن به صورت شکل(۲) خواهد بود. درباره پایداری سیستم‌های مدار بسته با فیدبک واحد به ازای مقادیر مختلف $k > ۰$ چه می‌توان گفت؟



(۱)



(۲)

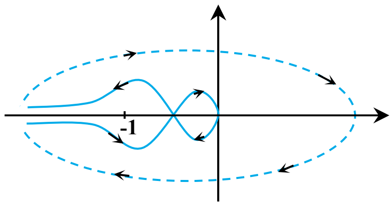
۱) سیستم (۱) ناپایدار با دو قطب سمت راست و سیستم (۲) پایدار است.

۲) هر دو سیستم پایدارند.

۳) هر دو سیستم ناپایدار با دو قطب سمت راست.

۴) سیستم (۱) پایدار است و سیستم (۲) با دو قطب سمت راست ناپایدار است.

۳ـ دیاگرام نایکوئیست سیستمی به شکل زیر مفروض است. اگر تابع تبدیل سیستم حلقه باز پایدار باشد کدام گزینه درست است؟



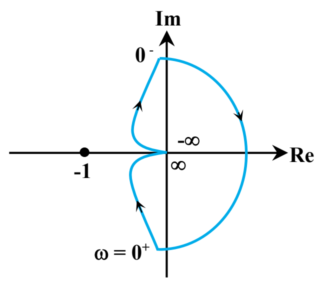
۱) سیستم کنترل حلقه بسته دو قطب ناپایدار دارد.

۲) سیستم کنترل حلقه بسته پایدار است.

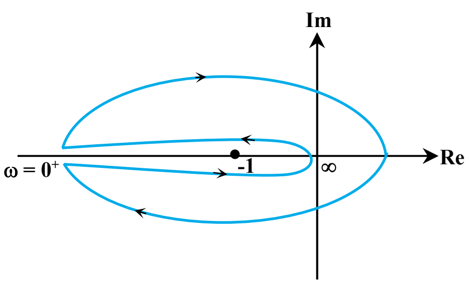
۳) سیستم کنترل حلقه بسته ناپایدار است و یک قطب ناپایدار دارد.

۴) سیستم کنترل حلقه بسته ناپایدار و دو قطب ناپایدار دارد.

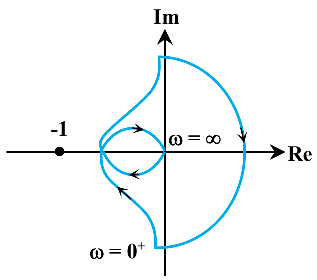
۴ـ دیاگرام نایکوئیست $G(s)=\dfrac{k}{s(1+۰/۱s)(1+۰/۲s)}$ به ازای $k=۲۰$ در کدام گزینه آمده است؟



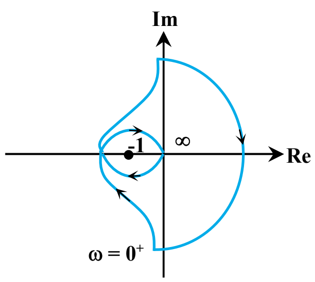
(۱)



(۲)

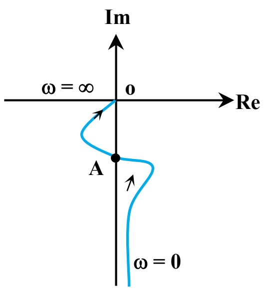


(۳)



(۴)

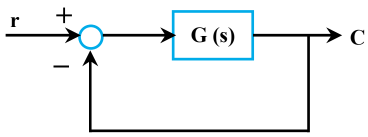
۵ـ نمایش تقریبی دیاگرام نایکوئیست سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز $\frac{1+5s}{s(s+1)(2s+1)}$ در شکل زیر آمده است. مقدار ω در نقطه A و طول oA چقدر است؟

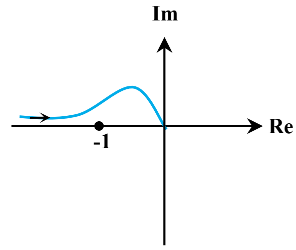


۱) $oA=\frac{2\sqrt{2}}{3}, \omega_A=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $oA=2\sqrt{2}, \omega_A=\frac{\sqrt{2}}{2}$

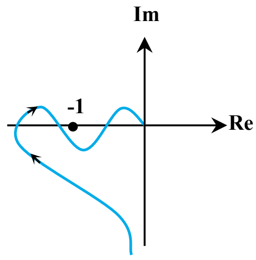
۳) $oA=2\sqrt{5}, \omega_A=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۴) $oA=\frac{5\sqrt{5}}{3}, \omega_A=\frac{\sqrt{5}}{5}$

۶ـ با در نظر گرفتن سیستم کنترل شکل مقابل، اگر G(s) پایدار باشد، کدام پاسخ فرکانسی برای G(s) منجر به یک سیستم حلقه بسته پایدار خواهد شد؟

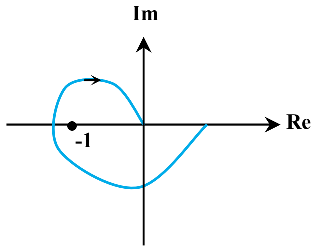




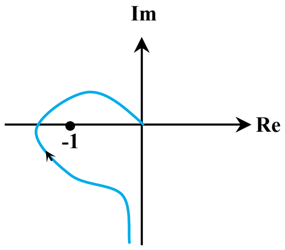
(۱)



(۲)



(۳)

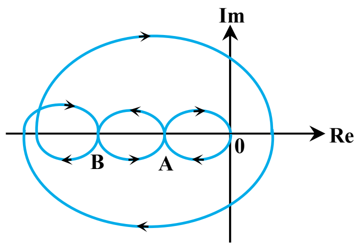


(۴)

۷ـ اگر $G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ باشد، اندازه G(s) در فرکانس ω_n برابر است با:

۱) ۱   ۲) $\frac{1}{\zeta}$ ۳) $\frac{\zeta}{2}$ ۴) $\frac{1}{2\zeta}$

۸ـ یک سیستم کنترل حلقه باز دارای یک صفر و چهار قطب در سمت چپ محور موهومی است. دیاگرام نایکوئیست این سیستم در شکل زیر آمده است. سیستم حلقه بسته متناظر در چه حالتی پایدار خواهد بود؟



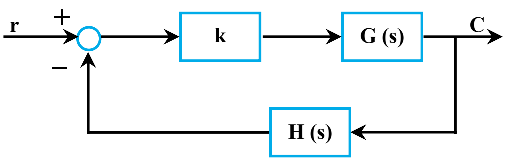
۱) $0<oA<1$

۲) $oB<1$

۳) $oA<1<oB$

۴) سیستم حلقه بسته همواره ناپایدار است.

۹ـ در سیستم کنترل شکل زیر به ازای $k>0$ کدام گزاره صحیح است؟



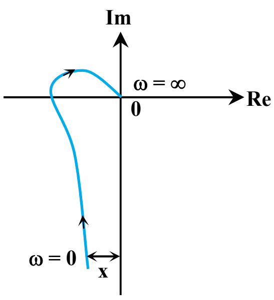
۱) صفرهای حلقه بسته همان صفرهای G(s) و قطب‌های H(s) هستند.

۲) صفرهای حلقه بسته همان صفرهای G(s) و صفرهای H(s) هستند.

۳) صفرهای حلقه بسته فقط صفرهای G(s) هستند.

۴) صفرهای حلقه بسته فقط قطب‌های H(s) هستند.

۱۰ـ نمودار قطبی سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز $GH(s)=\frac{1}{s(s+p_1)(s+p_2)}$ برای $p_1,p_2>0$ به شکل زیر است. با توجه به شکل، مقدار x کدام است؟



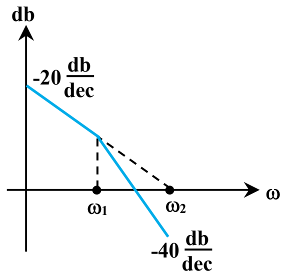
۱) $\frac{-\sqrt{p_1^2+p_2^2}}{p_1^2p_2^2}$ ۲) $\frac{-(p_1+p_2)}{p_1^2p_2^2}$

۳) $\frac{p_1p_2}{p_1^2+p_2^2}$ ۴) صفر

۱۱ـ اگر تابع تبدیل مدار باز یک سیستم کنترل به صورت $\frac{40}{(4s+1)(s^2+4s+4)}$ باشد در فرکانس $\omega = 1/5\,\frac{rad}{s}$ شیب نمودار مجانبی اندازه چیست؟

۱) ‎-3 ۲) ‎-2 ۳) ‎-1 ۴) صفر

۱۲ـ تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترل با فیدبک واحد به صورت $\frac{k}{s(Js+B)}$ می‌باشد. اگر نمودار Bode دامنه این سیستم به شکل زیر باشد مقادیر ω_1, ω_2 عبارتند از:



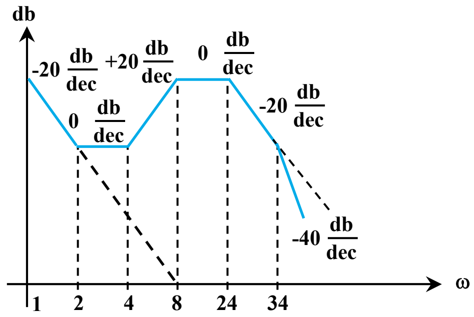
۱) $\omega_1 = \frac{B}{J}$, $\omega_2 = \frac{k}{B}$

۲) $\omega_1 = \frac{B}{J}$, $\omega_2 = \frac{k}{J}$

۳) $\omega_1 = \frac{J}{B}$, $\omega_2 = \frac{k}{J}$

۴) $\omega_1 = \frac{J}{B}$, $\omega_2 = \frac{k}{B}$

۱۳ـ نمودار Bode دامنه تابع تبدیل $G(s) = \frac{k(1+0/5s)(1+as)}{s(1+\frac{s}{8})(1+bs)(1+\frac{s}{36})}$ در شکل زیر آمده است. مقادیر b,a,k عبارتند از:



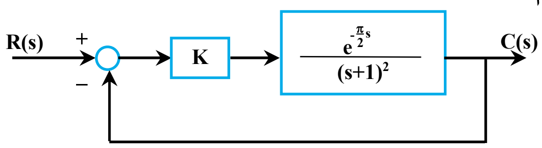
۱) $k = 2\sqrt{2}$, $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{24}$

۲) $k = 2\sqrt{2}$, $a = \frac{1}{24}$, $b = \frac{1}{4}$

۳) $k = 8$, $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{24}$

۴) $k = 8$, $a = \frac{1}{24}$, $b = \frac{1}{4}$

۱۴ـ در سیستم کنترل شکل مقابل مقدار k برای این که حد بهره برابر ۲ باشد، کدام است؟



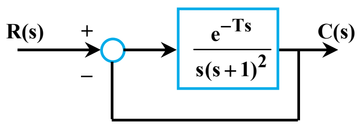
۱) $k = 1$

۲) $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۳) $k = \sqrt{2}$

۴) $k = 2\sqrt{2}$

۱۵ـ در سیستم نشان داده شده در شکل مقابل حد پایداری مدار بسته به ازای چه مقداری از τ حاصل می‌شود؟



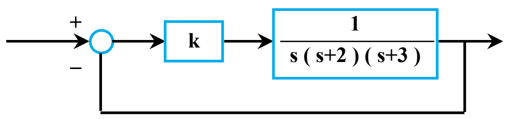
۱) $\frac{\pi}{2}$

۲) $\frac{3\pi}{4}$

۳) $\frac{\pi}{4}$

۴) $\frac{\pi}{3}$

۱۶ـ در سیستم کنترل زیر به ازای چه مقدار k حد بهره برابر ۳ خواهد بود؟



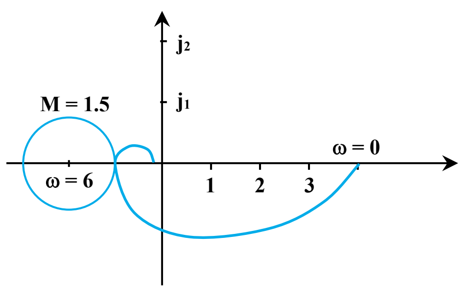
۱) ۳

۲) ۵

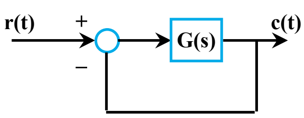
۳) ۸

۴) ۱۰

۱۷ـ دیاگرام قطبی تابع تبدیل مدار باز $G(j\omega)$ برای سیستم نشان داده شده در شکل الف به طریق تجربی در شکل (ب) رسم شده است. مقدار حالت دائمی خروجی سیستم حلقه بسته به ازای ورودی پله واحد عبارت است از:



(ب)



(الف)

۱) $C_{ss} = \frac{3}{4}$

۲) $C_{ss} = \frac{4}{5}$

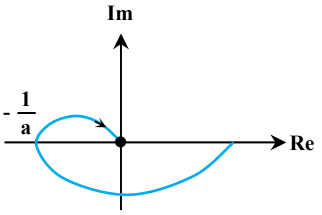
۳) $C_{ss} = 1$

۴) $C_{ss} = \frac{4}{3}$

۱۸ـ تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترل با فیدبک واحد $\frac{k}{s(s+1)(s+2)}$ می‌باشد. به ازای کدام مقدار k حد بهره 16^{dB} می‌باشد؟

۱) $k=0/98$ ۲) $k=0/89$ ۳) $k=0/5$ ۴) $k=2$

۱۹ـ دیاگرام قطبی یک سیستم در شکل زیر نشان داده شده است. می‌دانیم خطای دائمی این سیستم به ورودی پله واحد برابر $e_\circ$ است که $(e_\circ \neq 0,\infty)$. سیستم حلقه باز قطب ناپایداری نیز ندارد. کدام شرط را روی a قرار می‌دهید؟



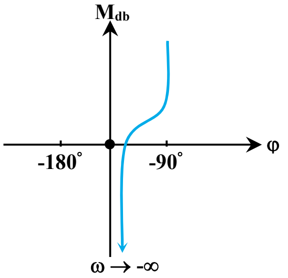
۱) $a<1$

۲) $a>1$

۳) $0<a<1$

۴) مستقل از مقدار a شرایط داده شده برقرار خواهند بود.

۲۰ـ دیاگرام Nichols سیستمی در شکل مقابل آمده است. کدام گزینه نادرست است؟



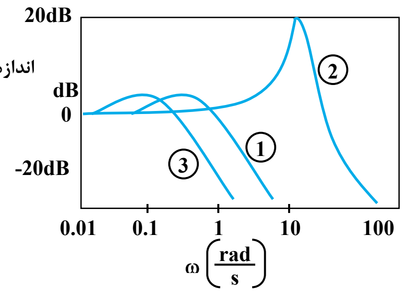
۱) شیب شروع نمودار اندازه Bode برابر $-20\frac{dB}{dec}$ می‌باشد.

۲) با افزایش بهره این سیستم ناپایدار خواهد شد.

۳) نوع سیستم یک است.

۴) شیب نهایی نمودار اندازه Bode برابر $-40\frac{dB}{dec}$ خواهد بود.

۲۱ـ شکل زیر پاسخ فرکانسی حلقه بسته را برای سه سیستم مختلف نشان می‌دهد. کدام گزینه درست است؟



۱) $\begin{cases}\zeta_1=\zeta_3\approx 0/5\\ \zeta_2\simeq 0/707\end{cases}$, $\begin{cases}T_{s_1}\simeq T_{s_2}\\ T_{s_3}\simeq 10T_{s_1}\end{cases}$

۲) $\begin{cases}\zeta_1=\zeta_3\approx 0/5\\ \zeta_2\simeq 0/707\end{cases}$, $\begin{cases}T_{s_1}\simeq T_{s_2}\\ T_{s_3}\simeq 0/1T_{s_1}\end{cases}$

۳) $\begin{cases}\zeta_1=\zeta_3\simeq 0/5\\ \zeta_2\simeq 0/05\end{cases}$, $\begin{cases}T_{s_1}\simeq T_{s_2}\\ T_{s_3}\simeq 10T_{s_1}\end{cases}$

۴) $\begin{cases}\zeta_1=\zeta_3\simeq 0/5\\ \zeta_2=0/05\end{cases}$, $\begin{cases}T_{s_1}\simeq T_{s_2}\\ T_{s_3}\simeq 0/1T_{s_1}\end{cases}$

۲۲ـ توابع تبدیل حلقه باز دو سیستم با فیدبک واحد عبارتند از: $G_2(s)=\frac{k}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$ و $G_1(s)=\frac{k}{\tau_1 s+1}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $G_1(s)$ به ازای تمام مقادیر مثبت k پایدار است، اما $G_2(s)$ ممکن است با افزایش k ناپایدار شود.

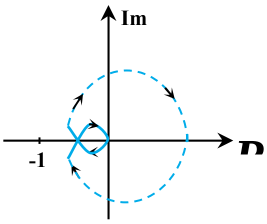
۲) حد بهره $G_2(s)$ کمتر از $G_1(s)$ است.

۳) حد فاز $G_1(s)$ کمتر از $G_2(s)$ است.

۴) حد فاز $G_1(s)$ بیشتر از $G_2(s)$ است، ولی حد بهره هر دو برابر بی‌نهایت است.

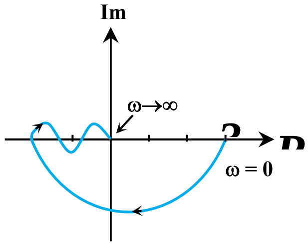
۲۳ـ تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترل با فیدبک واحد عبارت است از $\frac{k}{s(s+1)(2s+1)}$.

به ازای کدام مقدار از بهره k دیاگرام نایکوئیست این سیستم به شکل مقابل خواهد بود؟



۱) $k=2$ ۲) $k=\frac{3}{2}$ ۳) $k=\frac{4}{3}$ ۴) $k=\frac{5}{2}$

۲۴ـ شکل زیر نمودار نایکوئیست تابع حلقه باز سیستمی با فیدبک واحد منفی را نشان می‌دهد. بهره حالت ماندگار $(s=0)$ تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از:



۱) ۰/۲۵

۲) ۰/۵

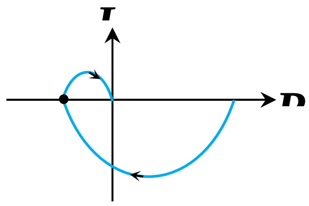
۳) ۰/۷۵

۴) ۱

۲۵ـ تابع تبدیل حلقه باز سیستمی به صورت $GH(s)=\dfrac{k}{s(s+1)(s+5)}$ است. مقدار k را چنان تعیین کنید که حد بهره سیستم (GM) برابر ۴۰db باشد.

۱) ۱/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۶ ۴) ۱/۸

۲۶ـ تابع تبدیل مدار باز سیستمی $GH=\dfrac{k}{s^3+3s^2+2s+4}$ می‌باشد. به ازای چه مقدار مثبتی از k دیاگرام نایکوئیست آن مطابق شکل خواهد بود؟



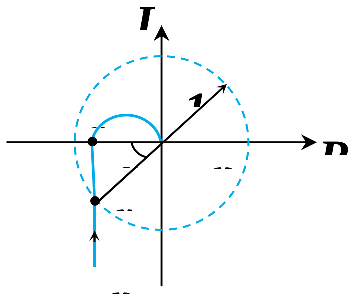
۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

۲۷ـ دیاگرام قطبی یک سیستم حداقل فاز به شکل زیر است. حاشیه فاز سیستم عبارت است از:



۱) α

۲) $\pi-\alpha$

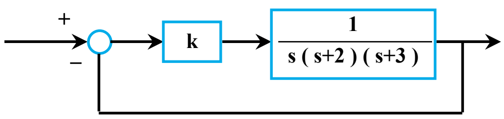
۳) $-\pi+\alpha$

۴) $-\alpha$

۲۸ـ در سؤال قبل حداکثر تأخیر زمانی که باعث ناپایداری سیستم خواهد گشت کدام است؟

۱) $T=\dfrac{\alpha^\circ}{\omega_2}$ ۲) $T=\dfrac{\frac{\pi}{180}\alpha}{\omega_2}$ ۳) $T=\dfrac{\alpha^\circ}{\omega_1}$ ۴) $T=\dfrac{\frac{\pi}{180}\alpha}{\omega_1}$

۲۹ـ در شکل زیر اگر بدانیم حد بهره سیستم برابر ۲ می‌باشد مقدار K برابر است با:



۱) ۱۰

۲) ۱۵

۳) ۲۰

۴) ۲۵

۳۰ـ تابع تبدیل حلقه سیستمی عبارت است از: $L(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(s+\alpha)}$ که α عدد حقیقی مثبتی است. به ازای کدام مقدار α فرکانس قطع فاز این سیستم برابر ۲ رادیان بر ثانیه خواهد بود؟

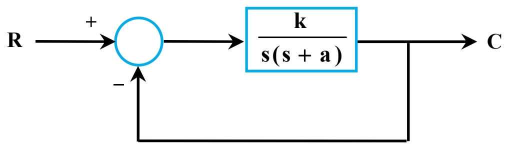
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۴

فصل هفتم

«مسأله کنترل و معرفی ساختارهای مختلف در یک سیستم کنترل خطی»

تست‌های تألیفی فصل هفتم

مثال ۱: در سیستم نشان داده شده در شکل زیر حساسیت سیستم حلقه بسته را به تغییرات پارامترهای k,a بیابید.



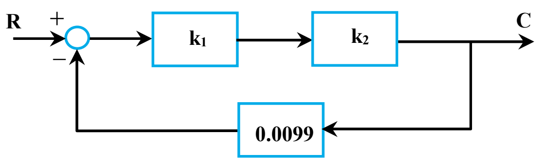
پاسخ: تابع تبدیل حلقه بسته را به دست آورده و حساسیت را طبق تعریف محاسبه می‌کنیم.

$$T(s)=\frac{k}{s^2+as+k}$$

$$S_k^{T(s)}=\frac{k}{T(s)}\frac{\partial T(s)}{\partial k}=\frac{k}{k}(s^2+as+k)\left(\frac{s^2+as+k-k}{(s^2+as+k)^2}\right)\Rightarrow S_k^{T(s)}=\frac{s(s+a)}{s^2+as+k}\quad ;\quad S_a^{T(s)}=\frac{a}{T(s)}\frac{\partial T(s)}{\partial a}=\frac{-as}{s^2+as+k}$$

با افزایش k، حساسیت سیستم حلقه بسته به پارامتر a و پارامتر k کاهش می‌یابد.

مثال ۲: سیستم $T_1=\frac{C}{R}$ را که در آن $k_1=k_2=100$ است، در نظر بگیرید. در مورد حساسیت T_1 نسبت به k_1 کدام گزینه صحیح است؟

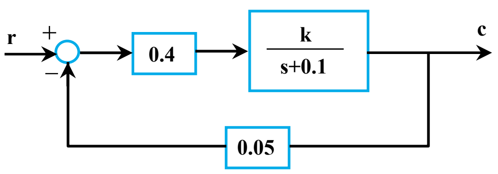


۱) $S_{k_1}^{T_1}=0/09$
۲) $S_{k_1}^{T_1}=0/01$
۳) $S_{k_1}^{T_1}=0/1$
۴) $S_{k_1}^{T_1}=0/9$

پاسخ: گزینه «۲» مطابق تعریف حساسیت داریم:

$$S_{k_1}^{T_1}=\frac{S_{k_1}^{\text{حلقه باز}}}{1+L(s)}=\frac{1}{1+0/0099k_1k_2}\Bigg|_{k_1=k_2=100}=0/01$$

مثال ۳: در سیستم زیر اگر مقدار اسمی پارامتر k برابر با ۵ باشد، کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح خواهد بود؟



۱) پاسخ فرکانسی این سیستم نسبت به پارامتر k حساس نیست.

۲) کمترین مقدار حساسیت تابع تبدیل فرکانسی این سیستم نسبت به k برابر صفر و بیشترین مقدار آن ۵ است.

۳) کمترین مقدار حساسیت تابع تبدیل فرکانسی این سیستم نسبت به k برابر ۱ و بیشترین مقدار آن ۲ است.

۴) کمترین مقدار حساسیت تابع تبدیل فرکانسی این سیستم نسبت به k برابر ۰/۵ و بیشترین مقدار آن ۱ است.

پاسخ: گزینه «۴» حساسیت سیستم حلقه بسته نسبت به پارامتر k را محاسبه کرده و بیشینه و کمینه آن را به دست می‌آوریم:

$$S_k^{\frac{C}{R}}=\frac{S_k^{\text{حلقه باز}}}{1+L(s)}=\frac{1}{1+\frac{0/02k}{s+0/1}}\xrightarrow{k=5}\frac{s+0/1}{s+0/2}\quad ;\quad \begin{cases}\max(s)=1\\ s\to\infty\end{cases},\ \begin{cases}\min(s)=0/5\\ s\to 0\end{cases}$$

مثال ۴: با توجه به عبارت‌های زیر کدام گزینه صحیح است؟

۱ـ محل تلاقی مجانب‌های مکان همواره روی محور حقیقی است. ۲ـ نقاط شکست مکان همواره روی محور حقیقی است. ۳ـ در نقاط شکست مکان حساسیت به ریشه بی‌نهایت بزرگ است.

۱) فقط ۲ غلط است. ۲) ۱ و ۲ غلط هستند. ۳) ۲ و ۳ غلط هستند. ۴) همه عبارت‌ها صحیح هستند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» محل تلاقی مجانب‌ها از رابطه‌ی مقابل محاسبه می‌شود.

$$\delta_\circ = \frac{\sum Real(P_i) - \sum Real(Z_i)}{n-m}$$

که در آن $Real(\cdot)$ قسمت حقیقی است و P_i و Z_i قطب و صفرهای حلقه باز هستند. همان‌طور که از رابطه فوق می‌توان فهمید، هیچ‌گاه $\delta_\circ$ نمی‌تواند مختلط باشد. مکان هندسی ریشه‌های سیستمی با مرتبه ۴ یا بیشتر می‌تواند نقاط شکستی مختلط داشته باشد. اما سیستم‌های مرتبه ۳ و کمتر نمی‌توانند نقطه‌ی شکست مختلط داشته باشند. در محل نقاط شکست حساسیت به ریشه‌ها بسیار زیاد است و با کمترین تغییر در محل قرارگیری ریشه‌ها، بهره k شدیداً تغییر پیدا می‌کند.

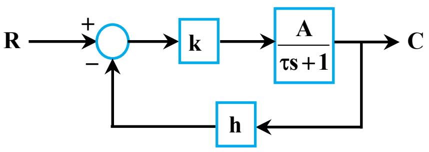
مثال ۵: اگر $T(\mu) = e^{-j\omega\mu}$ ، حساسیت $T(\mu)$ نسبت به μ عبارت است از:

۱) $-j\omega$ ۲) $-j\omega e^{-j\omega\mu}$ ۳) $-j\omega\mu$ ۴) $j\omega\mu$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» مطابق تعریف حساسیت داریم:

$$S_\mu^T = \frac{\mu}{T}\frac{\partial T}{\partial \mu} = \frac{\mu}{e^{-j\omega\mu}}(-j\omega)(e^{-j\omega\mu}) = -j\omega\mu$$

مثال ۶: در سیستم نشان داده شده در شکل زیر، حساسیت تابع تبدیل حلقه بسته را به تغییرات جزئی در پارامتر h محاسبه کنید.



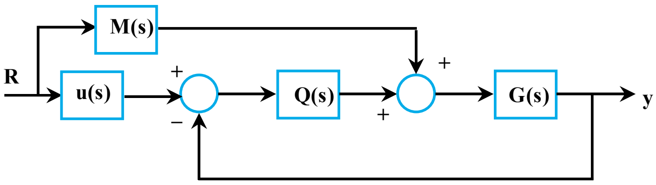
۱) $\frac{\tau s+1}{\tau s+1+kAh}$ ۲) $\frac{-kAh}{\tau s+1+kAh}$ ۳) $\frac{-\tau s}{\tau s+1+kAh}$ ۴) $\frac{1}{\tau s+1+kAh}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$S_h^{T(s)} = \frac{h}{T(s)}\frac{\partial T(s)}{\partial h} = \frac{h}{\frac{Ak}{\tau s+1+Akh}}\frac{-(kA)^2}{(\tau s+1+Akh)^2} = \frac{-kAh}{\tau s+1+kAh}$$

تست‌های تألیفی فصل هفتم

۱ـ دیاگرام بلوکی یک سیستم کنترل به شکل زیر مفروض است. کدام گزینه در مورد حساسیت حلقه بسته نسبت به تغییرات جزئی در تابع G(s) صحیح است؟



۱) حساسیت حلقه بسته نسبت به $G(s)$ وابسته به $Q(s)$ نیست.

۲) حساسیت حلقه بسته نسبت به $G(s)$ وابسته به $u(s)$ و $M(s)$ نیست.

۳) حساسیت حلقه بسته نسبت به $G(s)$ وابسته با انتخاب مناسب $M(s)$ و $u(s)$ کاهش می‌یابد.

۴) حساسیت حلقه بسته نسبت به $G(s)$ در حالتی‌که $M(s)=u(s)$ باشد به صفر می‌رسد.

۲ـ تابع تبدیل حلقه باز سیستمی با فیدبک واحد منفی عبارت است از $G(s)=\dfrac{k(s+7)}{s^2+2s+10}$، در شرایطی که خطای دائمی سیستم به ورودی پله واحد برابر ۱۲/۵ درصد است، حساسیت این خطا به تغییرات جزئی در پارامتر k برابر است با:

۱) ۰/۸۷۵ ۲) −۰/۸۷۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) −۰/۷۵

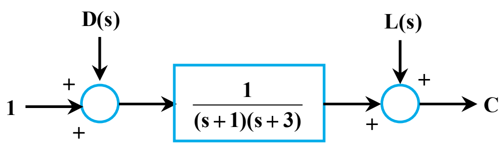
۳ـ نمایش فضای حالت سیستمی به شکل $y=(2\ \ 0)x$ و $\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -5 & -k\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}r$ مفروض است. حساسیت سیستم حلقه بسته به تغییرات k در کدام گزینه به درستی آمده است؟

۱) $\dfrac{-6ks}{s^2+ks+15}$ ۲) $\dfrac{-1}{s^2+ks+15}$ ۳) $\dfrac{ks}{s^2+ks+15}$ ۴) $\dfrac{-ks}{s^2+ks+15}$

۴ـ اگر حساسیت تابع T به شکل $T(k)=|T(k)|e^{i\varphi_T}$ را نسبت به پارامتر k به صورت $S_k^{T(k)}$ در نظر بگیریم، کدام رابطه صحیح است؟

۱) $S_k^T=S_k^{|T|}+j\varphi_T S_k^{\varphi_T}$ ۲) $S_k^T=S_k^{|T|}+jS_k^{\varphi_T}$ ۳) $S_k^T=S_k^{|T|}.S_k^{\varphi_T}$ ۴) $S_k^T=S_k^{|T|}+j\dfrac{S_k^{\varphi_T}}{\varphi_T}$

۵ـ سیستم حلقه باز نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید.



L(s) و D(s) ورودی‌های اغتشاش را مدل می‌کنند. استفاده از فیدبک منفی واحد در فرکانس‌های پایین، اثر هر یک از اغتشاشات D(s) و L(s) را به ترتیب چند برابر تغییر خواهد داد؟

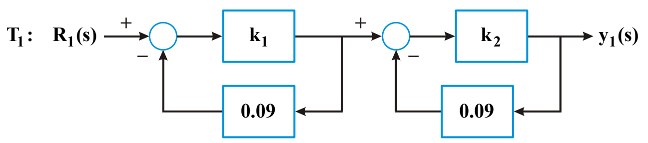
۱) اثر اغتشاش L تغییری نمی‌کند ولی اثر اغتشاش D، $\frac{3}{4}$ برابر می‌شود.

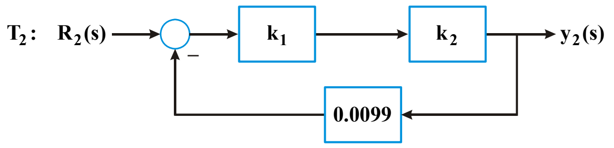
۲) اثر اغتشاش L، $\frac{3}{4}$ برابر و اثر اغتشاش D، $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود.

۳) اثر اغتشاش هر دو اغتشاش $\frac{3}{4}$ برابر می‌شود.

۴) اثر اغتشاش L، $\frac{3}{4}$ برابر می‌شود ولی اثر اغتشاش D تغییری نمی‌کند.

۶ـ دو بلوک دیاگرام زیر را در نظر بگیرید. به ازای $k_۱ = k_۲ = ۱۰۰$ تابع تبدیل این دو سیستم با هم برابر است. مطلوب است محاسبه $\dfrac{S_{k_۱}^{T_۱}}{S_{k_۱}^{T_۲}}$ در این سیستم‌ها؟





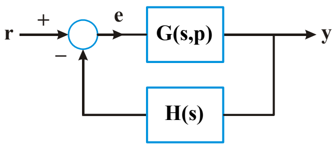
۱) $۱۰^۲$

۲) $۰/۱$

۳) $۰/۰۱$

۴) $۱۰^۳$

۷ـ سیستم کنترلی نشان داده شده را در نظر بگیرید. اگر S_p^T حساسیت تابع تبدیل حلقه بسته نسبت به پارامتر p و S_p^G حساسیت تابع تبدیل G نسبت به پارامتر p باشد، می‌دانیم که رابطه $S_p^T(s=۰) = \frac{۱}{۵} S_p^G(s=۰)$ برقرار است. خطای حالت ماندگار نسبت به ورودی $r(t) = ۲u(t)$ را به دست آورید. حلقه بسته پایدار است.



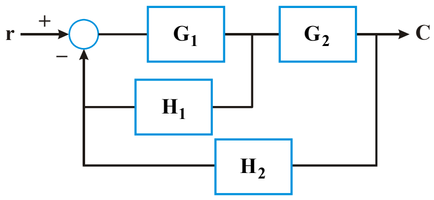
۱) $۰/۱$

۲) $۰/۴$

۳) $۰/۲$

۴) اطلاعات کافی نیست.

۸ـ در سیستم شکل زیر، α پارامتری از فرآیند $G_۲$ و β پارامتری از فیدبک $H_۱$ است. کدام گزینه برابر با S_α^T است؟



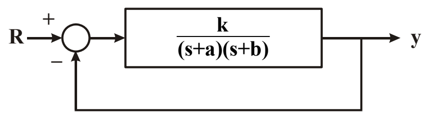
۱) $S_\alpha^T = \dfrac{G_۲^۲ H_۱}{۱+G_۱H_۱+G_۱G_۲H_۲} S_\beta^{H_۱}$

۲) $S_\alpha^T = \dfrac{۱+G_۱H_۱}{۱+G_۱H_۱+G_۱G_۲H_۲} S_\alpha^{G_۲}$

۳) $S_\alpha^T = \dfrac{-G_۱G_۲H_۱}{۱+G_۱H_۱+G_۱G_۲H_۲} S_\beta^{H_۱}$

۴) $S_\alpha^T = \dfrac{(۱-G_۱H_۱)G_۲}{۱+G_۱H_۱+G_۱G_۲H_۲} S_\alpha^{G_۲}$

۹ـ سیستم نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. با فرض اینکه k , b , a همگی مثبت هستند و به ازای ورودی پله واحد، حساسیت خطای دائمی به تغییرات جزئی در پارامتر a برابر است با:



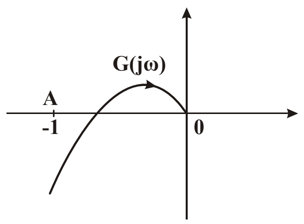
۱) $\dfrac{-k}{ab+k}$

۲) $\dfrac{k}{ab+k}$

۳) $\dfrac{-۱}{ab+k}$

۴) $\dfrac{۱}{ab+k}$

۱۰ـ در یک سیستم کنترل با فیدبک واحد منفی، نمودار قبلی تابع تبدیل حلقه باز G(s) به شکل زیر مفروض است. اگر سیستم حلقه بسته پایدار باشد و بدانیم حاشیه فاز سیستم برابر با α رادیان است، مقدار $|۱+G(j\omega_{gc})|$ در کدام گزینه به درستی آمده است؟



۱) $۲(۱-\cos\alpha)$

۲) $\sqrt{۲(۱+\cos\alpha)}$

۳) $\sqrt{۲(۱-\cos\alpha)}$

۴) $۲(۱+\cos\alpha)$

۱۱ـ تابع تبدیل حساسیت یک سیستم کنترل با فیدبک واحد منفی به شکل $\dfrac{s(s+۴/۲)}{s^۲+۴/۲s+۹}$ داده شده است. اگر ورودی r(t) پله واحد و اغتشاش خروجی $\Delta_\circ$ به صورت $۰/۵\sin(۰/۲t)$ به این سیستم اعمال شود، خروجی آن در حالت دائمی به شکل $y_\infty = b + a\sin(۰/۲t+\phi)$ خواهد بود. در این صورت اندازه تابع تبدیل حساسیت سیستم در فرکانس $\omega = ۰/۲$ و مقدار b به ترتیب برابر است با:

۱) $b=۱, \frac{a}{۲}$

۲) $b=۱, ۲a$

۳) $b=\frac{۱}{۲}, a$

۴) $b=۱, a$

پاسخنامه تست‌های تألیفی فصل هفتم

۱ـ گزینه «۲»

روش اول: تابع تبدیل حلقه بسته را به شکل $T(u)=\frac{MG+uQG}{1+QG}$ می‌توان نوشت. از آن‌جایی‌که اگر $T=\frac{N}{D}$ و N و D هر دو تابعی از G باشند، می‌توان گفت: $S_G^T=S_G^N-S_G^D$.

با توجه به اینکه $S_G^N=1$ داریم: $S_G^T=1-S_G^D=1-\frac{QG}{1+QG}$ و یا $S_G^T=\frac{1}{1+QG}$ که ملاحظه می‌شود تابعی از u و M نیست.

روش دوم: تابع تبدیل سیستم حلقه برابر است با:

$$T(s)=\frac{MG+uQG}{1+QG}$$

$$S_G^T=\frac{\partial T}{\partial G}\times\frac{G}{T}=\frac{(M+uQ)(1+QG)-(Q)(MG+uQG)}{(1+QG)^2}\times\frac{G}{\frac{MG+uQG}{1+QG}}=\frac{1}{1+QG}$$

گزینه (۲) صحیح است چون حساسیت به $u(s)$ و $M(s)$ وابسته نیست.

۲ـ گزینه «۲» خطای پله واحد سیستم حلقه بسته عبارت است از: $e_\infty=\frac{1}{1+k_p}$ به‌طوری‌که: $k_p=\lim\limits_{s\to 0}G(s)=0/7k$ و لذا:

$$\frac{1}{1+0/7k}=\frac{1}{8}=0/125$$

بنابراین: $k=10$.

اما:

$$S_k^e=\frac{k}{e}\frac{de}{dk}=\frac{k}{\frac{1}{1+0/7k}}\frac{-0/7}{(1+0/7k)^2}$$

با ساده‌سازی عبارت بالا داریم:

$$S_k^e=\frac{-0/7k}{1+0/7k}$$

به ازای $k=10$ داریم:

$$S_k^e=\frac{-7}{8}=-0/875$$

۳ـ گزینه «۴» تابع تبدیل سیستم حلقه بسته را به شکل $T(s)=C(sI-A)^{-1}B$ و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$T(s)=[2\quad 0]\begin{bmatrix} s & -3 \\ 5 & s+k\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{6}{s^2+ks+15}$$

$$S_k^T=\frac{k}{T}\frac{\partial T}{\partial k}=\frac{-ks}{s^2+ks+15}$$

۴ـ گزینه «۱» حساسیت T به k را به شکل $S_k^T=\frac{d\ln T}{d\ln k}$ نیز می‌توان نوشت. با جایگذاری $T=|T|e^{j\varphi_T}$ داریم:

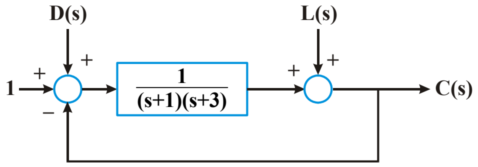
$$S_k^T=\frac{d\ln[|T|e^{j\varphi_T}]}{d\ln k}=\frac{d[\ln|T|+j\varphi_T]}{d\ln k}=\frac{d\ln|T|}{d\ln k}+j\frac{d\varphi_T}{d\ln k}=S_k^{|T|}+j^{\varphi_T}+\frac{d\ln^{\varphi_T}}{d\ln k}$$

و یا:

$$S_k^T=S_k^{|T|}+j\varphi_T S_k^{\varphi_T}$$

۵ـ گزینه «۳» در حالت حلقه باز، خروجی ناشی از اغتشاشات به شکل $C(s)=L(s)+\frac{۱}{(s+۱)(s+۳)}D(s)$ به دست می‌آید که در فرکانس‌های پایین $C(۰)=L(۰)+\frac{۱}{۳}D(۰)$ در اثر استفاده از فیدبک داریم:

$$C(s)=\frac{(s+۱)(s+۳)}{s^۲+۴s+۴}L(s)+\frac{۱}{s^۲+۴s+۴}D(s)$$



در فرکانس‌های پایین نیز داریم:

$$C(۰)=\frac{۳}{۴}L(۰)+\frac{۱}{۴}D(۰)$$

۶ـ گزینه «۴» برای محاسبه $S_{k_۱}^{T_۱}$ داریم:

$$T_۱(s)=\frac{k_۱k_۲}{۱+۰/۰۹k_۱+۰/۰۹k_۲+۰/۰۰۸۱k_۱k_۲}$$

$$S_{k_۱}^{T_۱}=\frac{\partial T_۱}{\partial k_۱}\times\frac{k_۱}{T_۱}$$

$$=\frac{k_۲(۱+۰/۰۹k_۱+۰/۰۹k_۲+۰/۰۰۸۱k_۱k_۲)-(۰/۰۹+۰/۰۰۸۱k_۲)(k_۱k_۲)}{(۱+۰/۰۹k_۱+۰/۰۹k_۲+۰/۰۰۸۱k_۱k_۲)^۲}\times\frac{k_۱}{\frac{k_۱k_۲}{۱+۰/۰۹k_۱+۰/۰۹k_۲+۰/۰۰۸۱k_۱k_۲}}=۱۰$$

برای محاسبه $S_{k_۲}^{T_۲}$ داریم:

$$T_۲(s)=\frac{k_۱k_۲}{۱+۰/۰۰۹۹k_۱k_۲}$$

$$S_{k_۱}^{T_۲}=\frac{\partial T_۲}{\partial k_۱}\times\frac{k_۱}{T_۲}=\frac{k_۲(۱+۰/۰۰۹۹k_۱k_۲)-۰/۰۰۹۹k_۲(k_۱k_۲)}{(۱+۰/۰۰۹۹k_۱k_۲)^۲}\times\frac{k_۱}{\frac{k_۱k_۲}{۱+۰/۰۰۹۹k_۱k_۲}}=۰/۰۱$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{S_{k_۱}^{T_۱}}{S_{k_۱}^{T_۲}}=\frac{۱۰}{۰/۰۱}=۱۰۰۰$$

۷ـ گزینه «۲» با توجه به رابطه‌ی $S_p^T=\frac{۱}{۵}S_p^G$ در فرکانس صفر برای خطای حالت ماندگار داریم:

$$e_{ss}=\lim_{s\to ۰}s\times\frac{۱}{۱+G(s)}\times\frac{۲}{s}=\frac{۲}{۱+G(۰)}$$

$$S_p^T=\frac{\partial T}{\partial p}\times\frac{P}{T}\ ,\ S_p^G=\frac{\partial G}{\partial p}\times\frac{p}{G}\quad ,\quad T=\frac{G}{۱+GH}$$

$$S_p^T=\frac{\partial G}{\partial p}\left(\frac{۱+GH-GH}{(۱+GH)^۲}\right)\times\frac{p}{\frac{G}{۱+GH}}=\frac{\partial G}{\partial p}\times\frac{۱}{۱+GH}\times\frac{p}{G}\Rightarrow\frac{۱}{۱+GH(۰)}=\frac{۱}{۵}\times۱\Rightarrow e_\infty=۰/۴$$

۸ـ گزینه «۲» برای به دست آوردن حساسیت تابع تبدیل حلقه بسته نسبت به پارامتر α داریم:

$$S_\alpha^T=\frac{\partial T}{\partial\alpha}\times\frac{\alpha}{T}\ ,\ T=\frac{G_۱G_۲}{۱+G_۱H_۱+G_۱G_۲H_۲}$$

$$S_\alpha^T=\frac{\partial G_۲}{\partial\alpha}\left(\frac{G_۱(۱+G_۱H_۱+G_۱G_۲H_۲)-G_۱H_۲(G_۱G_۲)}{(۱+G_۱H_۱+G_۱G_۲H_۲)^۲}\right)\left(\frac{\alpha}{\frac{G_۱G_۲}{۱+G_۱H_۱+G_۱G_۲H_۲}}\right)$$

$$\Rightarrow S_\alpha^T=\frac{۱+G_۱H_۱}{۱+G_۱H_۱+G_۱G_۲H_۲}\times\alpha\times\frac{\partial G_۲}{\partial\alpha}\times\frac{۱}{G_۲}$$

با دقت در گزینه‌ها باید $\frac{\partial G_۲}{\partial\alpha}$ داشته باشیم پس گزینه‌های (۲) و (۴) می‌توانند درست باشند. با توجه به گزینه‌های (۲) و (۴) نیز می‌توان فهمید که گزینه (۲) درست است چون داریم:

$$S_\alpha^T=\frac{۱+G_۱H_۱}{۱+G_۱H_۱+G_۱G_۲H_۲}\times\frac{\partial G_۲}{\partial\alpha}\times\frac{\alpha}{G_۲}$$

۹ـ گزینه «۲» خطای دائمی به ورودی پله واحد برابر است با:
$$e_\infty = \frac{1}{1+k_p}$$

و یا:
$$k_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{k}{ab}$$

بنابراین:
$$e_\infty = \frac{1}{1+\frac{k}{ab}} = \frac{ab}{ab+k}$$

ازطرفی حساسیت خطای دائمی به تغییرات جزئی در پارامتر a به شکل زیر محاسبه می‌شود:
$$S_a^{e_\infty} = \frac{a}{e_\infty}\frac{\partial e_\infty}{\partial a} = \frac{ab+k}{b}\cdot\frac{b(ab+k)-ab^2}{(ab+k)^2} = \frac{k}{ab+k}$$

۱۰ـ گزینه «۳» در فرکانس قطع بهره یا ω_{gc} می‌دانیم:
$$\left|G(j\omega_{gc})\right| = 1$$

برای محاسبه حاشیه فاز سیستم در این فرکانس داریم:
$$PM = \pi + \angle G(j\omega_{gc})$$

و با توجه به اینکه:
$$PM = \alpha$$

بنابراین:
$$\angle G(j\omega_{gc}) = \alpha - \pi$$

به این ترتیب:
$$G(j\omega_{gc}) = \left|G(j\omega_{gc})\right| e^{j\angle G(j\omega_{gc})} = e^{j(\alpha-\pi)}$$

لذا:
$$\left|1+G(j\omega_{gc})\right| = \left|1+e^{j(\alpha-\pi)}\right| = \left|1-e^{j\alpha}\right|$$

در نهایت:
$$\left|1+G(j\omega_{gc})\right| = \left|1-\cos\alpha - j\sin\alpha\right| = \sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha} = \sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \sqrt{2(1-\cos\alpha)}$$

۱۱ـ گزینه «۲» خروجی پروسه را در حالت کلی می‌توانیم به صورت مقابل بنویسیم:
$$y(s) = \frac{y}{R}R(s) + \frac{y}{D_0}D_0(s) = T(s)R(s) + S(s)D_0(s)$$

در حالت دائمی به ازای ورودی پله واحد در $R(s)$ داریم:
$$y_{\infty_R} = T(0) = 1 - s(0) = 1$$

و لذا:
$$y_{\infty_R} = 1$$

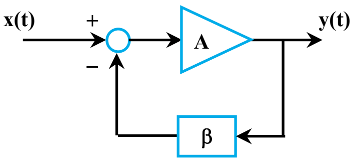
همچنین:
$$y_{\infty_{D_0}} = 0/5\left|S(j0/2)\right|\sin(0/2t + \angle s(j0/2))$$

پس در حالت کلی:
$$y_\infty = 1 + 0/5\left|S(j0/2)\right|\sin(0/2t + \angle s(j0/2))$$

و لذا:
$$b = 1, \left|S(j0/2)\right| = 2a$$

آزمون فصل هفتم

۱ـ دیاگرام بلوکی یک تقویت‌کننده فیدبک تک حلقه‌ای در شکل زیر آمده است. با فرض $\beta = ۰/۰۹۹$ و $A = ۱۰۰۰$ یک تغییر ۱۰ درصدی در بهره A متناظر با چه تغییری در بهره حلقه بسته T خواهد بود؟



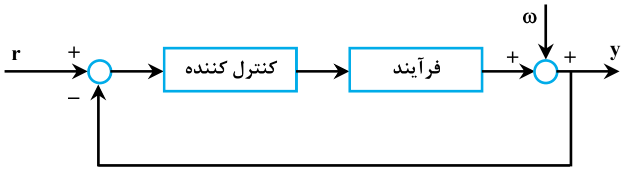
۱) ۱ درصد

۲) ۱۰ درصد

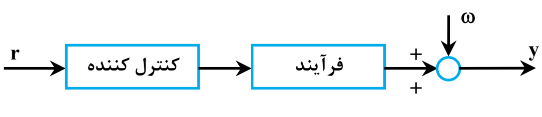
۳) ۰/۱ درصد

۴) ۰/۰۱ درصد

۲ـ کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟



(a)



(b)

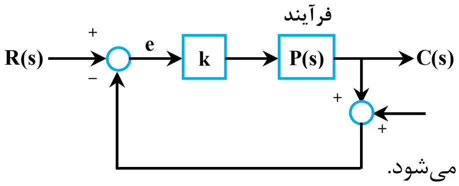
۱) سیستم (a) نسبت به ورودی مزاحم ω و تغییرات پارامترهای فرآیند مقاوم‌تر از سیستم (b) خواهد بود.

۲) سیستم (b) نسبت به ورودی مزاحم ω و تغییرات پارامترهای فرآیند مقاوم‌تر از سیستم (a) خواهد بود.

۳) سیستم (a) نسبت به ورودی مزاحم ω و سیستم (b) نسبت به تغییر پارامترهای فرآیند مقاوم‌تر است.

۴) سیستم (b) نسبت به ورودی مزاحم ω و سیستم (a) نسبت به تغییر پارامترهای فرآیند مقاوم‌تر است.

۳ـ در سیستم حلقه بسته شکل زیر اگر درجه p(s) بالا باشد به ازای مقادیر بزرگ k کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح خواهد بود؟



۱) در صورت پایداری سیستم حلقه بسته، خطای دائمی e_{ss} افزایش می‌یابد.

۲) از پایداری سیستم حلقه بسته کاسته می‌شود.

۳) در صورت پایداری سیستم حلقه بسته، حساسیت این سیستم به نویز اندازه‌گیری کم می‌شود.

۴) در صورت پایداری سیستم حلقه بسته، حساسیت این سیستم به تغییر پارامترهای p(s) بیشتر می‌شود.

۴ـ تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترل با فیدبک واحد عبارت است از $G(s) = \dfrac{۱۰۰}{\tau s + ۱}$. اگر مقدار نامی τ برابر ۳ باشد، حساسیت سیستم حلقه بسته به تغییرات جزئی در τ :

۱) در فرکانس‌های پایین و بالا یکسان است.

۲) در فرکانس‌های پایین صفر و در فرکانس‌های بالا یک است.

۳) در فرکانس‌های پایین صفر و در فرکانس‌های بالا ۱- می‌باشد.

۴) در فرکانس‌های پایین صفر و در فرکانس‌های بالا $\frac{۱}{۲}$ است.

۵ـ پاسخ یک ترمیستور به دما به صورت $R = R_\circ e^{-۰/۱t}$ مدل شده است که $R_\circ = ۱۰,۰۰۰\Omega$، R مقاومت برحسب اهم و t دما برحسب درجه سلسیوس می‌باشد. مدل خطی از ترمیستور در $t = ۲۰^\circ C$ با فرض تغییرات جزئی دما عبارت است از:

۱) $\Delta R = -۱۳/۵\Delta t$

۲) $\Delta R = -۱۳۵\Delta t$

۳) $\Delta R = -۱/۳۵\Delta t$

۴) $\Delta R = ۱۳/۵\Delta t$

۶ـ تابع تبدیل حلقه بسته یک سیستم کنترل عبارت است از $T(s) = \dfrac{G_۱(s) + kG_۲(s)}{G_۳(s) + kG_۴(s)}$. حساسیت سیستم حلقه بسته نسبت به k عبارت است از:

۱) $S_k^T = \dfrac{k(G_۱G_۴ - G_۲G_۳)}{(G_۳ + kG_۴)(G_۱ + kG_۲)}$

۲) $S_k^T = \dfrac{k(G_۱G_۴ - G_۲G_۳)}{(G_۴ + kG_۳)(G_۲ + kG_۱)}$

۳) $S_k^T = \dfrac{k(G_۲G_۳ - G_۱G_۴)}{(G_۴ + kG_۳)(G_۲ + kG_۱)}$

۴) $S_k^T = \dfrac{k(G_۱G_۳ - G_۲G_۴)}{(G_۳ + kG_۴)(G_۱ + kG_۲)}$

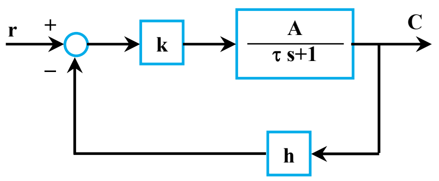
۷ـ فرض کنید $T(s)=\frac{MG+UQG}{۱+QG}$، حساسیت $T(s)$ را به G به دست آورید.

۱) $S_G^T=۱$ ۲) $S_G^T=\frac{Q}{۱+QG}$ ۳) $S_G^T=\frac{QG}{۱+QG}$ ۴) $S_G^T=\frac{۱}{۱+QG}$

۸ـ اگر $T(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$ حساسیت $T(s)$ را نسبت به پارامتر k که هم در صورت و هم در مخرج است به دست آورید.

۱) $S_k^T=۱$ ۲) $S_k^T=\frac{S_k^N}{S_k^D}$ ۳) $S_k^T=S_k^N.S_k^D$ ۴) $S_k^T=S_k^N-S_k^D$

۹ـ در سیستم زیر حساسیت پاسخ حلقه بسته به تغییرات h کدام است؟



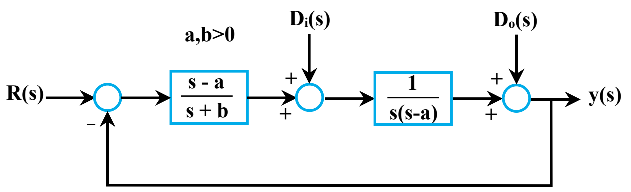
۱) $\frac{-k}{\tau s+۱+kAh}$ ۲) $\frac{-kh}{\tau s+۱+kAh}$

۳) $\frac{-kAh}{\tau s+۱+kAh}$ ۴) $\frac{-Ah}{\tau s+۱+kAh}$

۱۰ـ در سؤال قبل، حساسیت سیستم حلقه بسته به تغییرات A در فرکانس‌های پایین چیست؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{kAh}$ ۴) $\frac{۱}{۱+kAh}$

۱۱ـ با توجه به انتخاب کنترل‌کننده به شکل زیر برای یک سیستم ناپایدار با تابع تبدیل $(a>۰)$ $\frac{۱}{s(s-a)}$ کدام گزینه درست است؟



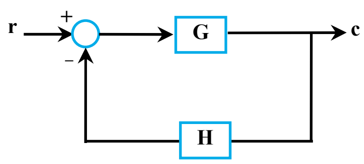
۱) سیستم حلقه بسته پایدار است. ۲) تابع تبدیل $\frac{y}{R}$ ناپایدار است.

۳) تابع تبدیل $\frac{y}{D_i}$ ناپایدار است. ۴) تابع تبدیل $\frac{y}{D_\circ}$ ناپایدار است.

۱۲ـ مطلوب است محاسبه حساسیت $T(s)=\frac{۴}{s^۲+as+۴}$ به تغییرات جزئی در a در مقدار نامی $a=۲$.

۱) $\frac{-۲s}{s^۲+۲s+۲}$ ۲) $\frac{-s}{s^۲+۲s+۴}$ ۳) $\frac{-۲s}{s^۲+۲s+۴}$ ۴) $\frac{-s}{s^۲+۲s+۲}$

۱۳ـ در سیستم کنترل شکل مقابل، کدام گزینه حساسیت سیستم حلقه بسته را نسبت به تابع H به درستی نشان می‌دهد؟



۱) $\frac{GH}{۱+GH}$ ۲) $\frac{۱}{۱+GH}$

۳) $\frac{-۱}{۱+GH}$ ۴) $\frac{-GH}{۱+GH}$

۱۴ـ حساسیت زمان نشست (T_s) در یک سیستم مرتبه دوم نمونه نسبت به تغییرات ضریب میرایی (ζ) برابر است با:

۱) $\frac{۱}{\omega_n}$ ۲) ۱ ۳) $-\omega_n$ ۴) ۱-

۱۵ـ کدام گزینه در مقایسه سیستم کنترل حلقه باز و سیستم حلقه بسته با تابع حلقه $L(s)$ صحیح است؟

۱) حساسیت دو سیستم نسبت به تغییرات مدل فرآیند یکسان است.

۲) سیستم حلقه باز به تغییرات مدل فرآیند ۱۰۰ درصد حساس است. ولی سیستم حلقه بسته اصلاً به تغییرات مدل حساس نیست.

۳) فیدبک، حساسیت حلقه بسته به مدل فرآیند را به اندازه $۱+L(s)$ نسبت به سیستم حلقه باز کاهش می‌دهد.

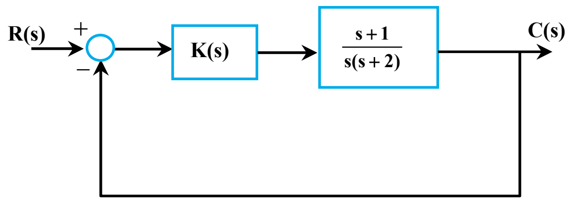
۴) فیدبک، حساسیت حلقه بسته به مدل فرآیند را به اندازه $L(s)$ نسبت به سیستم حلقه باز کاهش می‌دهد.

فصل هشتم

« روش‌های جبران‌سازی کلاسیک »

تست‌های تألیفی فصل هشتم

مثال۱: در سیستم شکل زیر، ساده‌ترین جبران‌کننده $K(s)$ برای اینکه خطای ماندگار در پاسخ به ورودی $r(t)=0/5t^2$ مساوی $0/1$ باشد کدام است؟



۱) $\frac{1}{s}$

۲) $\frac{20}{s}$

۳) $\frac{s+2}{s}$

۴) $s+2$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$e_\infty=\frac{1}{k_a}=\frac{1}{10}\Rightarrow k_a=10 \qquad r(t)=0/5t^2\Rightarrow R(s)=\frac{1}{s^3}$$

از طرفی:

$$k_a=\lim_{s\to 0}s^2G(s)=\lim_{s\to 0}s^2K(s)\frac{s+1}{s(s+2)}=\lim_{s\to 0}\frac{sK(s)}{2}=10\Rightarrow K(s)=\frac{20}{s}$$

توجه کنید که به ازای $K(s)=\frac{20}{s}$ سیستم حلقه بسته پایدار است. گزینه (۳) و (۱) شرط خطای حالت ماندگار را برآورده نمی‌کنند و همچنین گزینه (۳) از یک صفر و یک قطب تشکیل شده است، اما گزینه‌های (۱) و (۲) تنها یک قطب دارند.

مثال۲: یک جبران‌کننده پیش‌فاز (Lead Compensator) با تابع تبدیل $\alpha<1$, $G_c(s)=\frac{\alpha(1+sT)}{1+\alpha Ts}$ را در نظر بگیرید. در چه فرکانسی فاز آن حداکثر می‌شود؟

۱) $T\sqrt{a}$ ۲) $\frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$ ۳) $\frac{\alpha+1}{2\alpha T}$ ۴) $\frac{2\alpha T}{\alpha+1}$

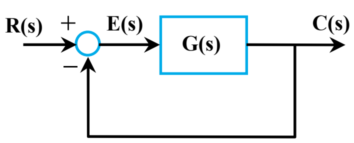
☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به تابع جبران‌کننده، فاز آن را به دست می‌آوریم:

$$G_c(s)=\frac{\alpha(1+sT)}{1+\alpha Ts}\ ,\ \alpha<1\Rightarrow\ \measuredangle G_c(j\omega)=tg^{-1}\omega T-tg^{-1}\alpha\omega T$$

برای محاسبه حداکثر فاز، مشتق آن را نسبت به فرکانس برابر صفر قرار می‌دهیم. از این رو داریم:

$$\frac{d(\measuredangle G_C(j\omega))}{d\omega}=\frac{T}{1+\omega^2T^2}-\frac{\alpha T}{1+\alpha^2\omega^2T^2}=0\Rightarrow\omega^2=\frac{1}{T^2\alpha}\Rightarrow\omega=\frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

مثال۳: برای سیستم کنترل شکل زیر، $G(s)$ از کمترین مرتبه را چنان تعیین کنید که اولاً خطای حالت دائمی ناشی از اعمال ورودی شیب واحد مساوی $\frac{3}{2}$ باشد، ثانیاً دو ریشه از ریشه‌های معادله مشخصه سیستم در $-1\pm j$ واقع باشند.



۱) $G(s)=\frac{4}{s(s+6)}$

۲) $G(s)=\frac{6}{s(s^2+4s+9)}$

۳) $G(s)=\frac{2}{s(s+3)}$

۴) $G(s)=\frac{6}{s(s^2+6s+9)}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» برای آنکه خطای دائمی به ورودی شیب واحد $\frac{۳}{۲}$ باشد، ثابت خطای شیب را برابر $\frac{۲}{۳}$ قرار می‌دهیم:

$$k_v = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \lim_{s\to ۰} sG(s) = \frac{k}{b} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۲b = ۳k$$

که در همه گزینه‌ها صدق می‌کند؛ اما شرط بعدی وجود دو قطب حلقه بسته در $-۱ \pm j$ است که معادل با وجود $(s^۲ + ۲s + ۲)$ در معادله مشخصه است. اگر معادله مشخص گزینه (۱) و (۳) را تشکیل دهیم چنین ریشه‌ای در آن‌ها وجود ندارد. پس این دو گزینه غلط هستند.

از طرفی معادله مشخصه مطلوب را می‌توان به صورت مقابل نوشت: $\Delta(s) = (s + ۱ + j)(s + ۱ - j)(s + \alpha) = s^۳ + (\alpha + ۲)s^۲ + (۲\alpha + ۲)s + ۲\alpha$

از مقایسه با $\Delta(s) = ۱ + G(s) = s^۳ + as^۲ + bs + k$ داریم: $\alpha = ۲, a = ۴, k = ۴, b = ۶ \quad \Rightarrow G(s) = \dfrac{۴}{s(s^۲ + ۴s + ۶)}$

مثال ۴: به سیستمی با درجه نسبی r یک جبران‌ساز پیش فاز به فرم $\frac{s+a}{s+b}$ افزوده می‌شود، مجانب‌های مکان هندسی به چه صورتی جابه‌جا می‌شوند؟

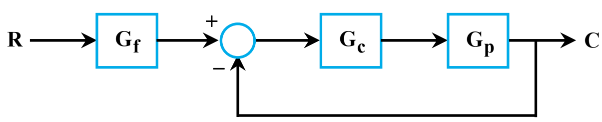
۱) به اندازه $\frac{b-a}{r}$ به سمت راست
۲) به اندازه $\frac{b-a}{r}$ به سمت چپ
۳) به اندازه $b-a$ به سمت راست
۴) به اندازه $b-a$ به سمت چپ

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

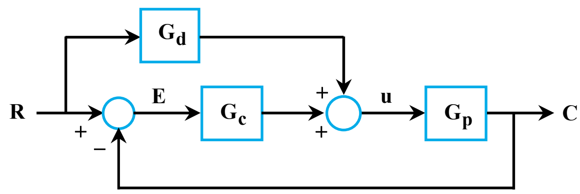
$$\text{محل تلاقی مجانب‌ها} = \sigma_۰ = \frac{\sum \text{قطب‌ها} - \sum \text{صفرها}}{r}$$

در جبران‌ساز پیش فاز $z < p$ است، بنابراین $a < b$ می‌باشد. پس با افزودن یک صفر در $-a$ و یک قطب در $-b$، محل تلاقی مجانب‌ها به اندازه‌ی $\frac{-b+a}{r}$ جابه‌جا می‌شود که چون $|b|>|a|$ می‌باشد، پس این جابه‌جایی به سمت چپ است. بنابراین اندازه‌ی جابه‌جایی $\frac{b-a}{r}$ است.

مثال ۵: جبران‌ساز $G_d(s)$ در شکل (الف) را چگونه انتخاب کنیم تا اثری مشابه پیش فیلتر $G_f(s)$ در ساختار شکل (ب) داشته باشد؟



شکل (ب)



شکل (الف)

۱) $G_d = G_f G_c$
۲) $G_f = (G_d - ۱)G_c$
۳) $G_d = (G_f - ۱)G_c$
۴) $G_f = G_d(۱ + G_c)$

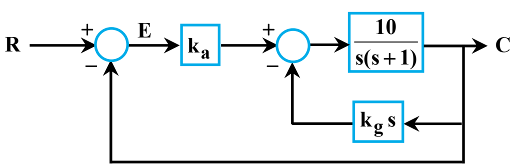
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» تابع تبدیل حلقه بسته دو سیستم (الف) و (ب) را معادل قرار می‌دهیم:

سیستم (ب) : $T_۲(s) = G_f \times \dfrac{G_p G_c}{۱ + G_p G_c}$

سیستم (الف) : $T_۱(s) = \dfrac{G_c G_p + G_d G_p}{۱ + G_c G_p}$

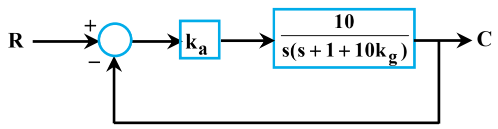
در نتیجه داریم: $G_c G_p + G_d G_p = G_f G_p G_c \Rightarrow G_d = (G_f - ۱)G_c$

مثال ۶: در سیستم زیر مقادیر ثابت‌های طراحی k_a و k_g را چنان بیابید که خطای حالت دائمی سیستم به ورودی شیب واحد ۰/۱ و نسبت میرایی قطب‌های حلقه بسته برابر ۰/۵ باشد.



۱) $k_a = k_g = ۱۰$
۲) $k_a = ۱۰$ و $k_g = ۰/۹$
۳) $k_a = ۰/۹$ و $k_g = ۱۰$
۴) $k_a = ۱۰$ و $k_g = ۹$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با ساده‌سازی تابع حلقه باز داریم:



از مقایسه با سیستم مرتبه دوم الگو داریم:

$$\begin{cases} 10k_a = \omega_n^2 \\ 1+10k_g = 2\zeta\omega_n \end{cases}$$

به ازای $\zeta = 0/5$:

$$\begin{cases} 10k_a = \omega_n^2 \\ 1+10k_g = \omega_n \end{cases}$$

از طرفی به ازای خطای دائمی $e_\infty = 0/1$ داریم:

$$e_\infty = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{10} \Rightarrow k_v = 10 \Rightarrow \lim_{s\to 0} sG(s) = 10 \Rightarrow \frac{10k_a}{1+10k_g} = 10 \Rightarrow k_a = 1+10k_g$$

با حل دستگاه معادلات زیر مقادیر ثابت‌های طراحی به دست می‌آیند:

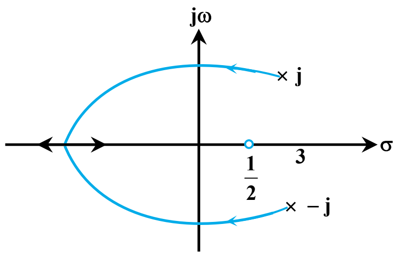
$$\begin{cases} 10k_a = \omega_n^2 \\ 1+10k_g = \omega_n \\ k_a = 1+10k_g \end{cases} \Rightarrow k_a = 10 \;,\; \omega_n = 10 \;,\; k_g = 0/9$$

تست‌های تألیفی فصل هشتم

۱ـ معادله دینامیکی یک سیستم مکانیکی به شکل: $M\ddot{y}+B\dot{y}+ky=F$ مفروض است. F نیروی ورودی و y میزان جابه‌جایی‌است. برای جبران‌سازی از فیدبک تناسبی سرعت به شکل $-K_p\dot{y}$ استفاده می‌کنیم $(K_p>۰)$. در این‌صورت:

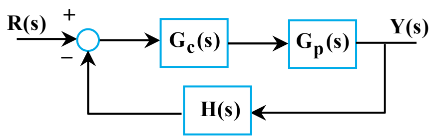
۱) میرایی سیستم به اندازه K_p کاهش می‌یابد.
۲) میرایی سیستم به اندازه K_p افزایش می‌یابد.
۳) میرایی سیستم به اندازه $\frac{K_p}{۲}$ افزایش می‌یابد.
۴) میرایی سیستم تغییری نمی‌کند.

۲ـ مکان هندسی ریشه‌های سیستمی به شکل زیر مفروض است. برای پایدارسازی سیستم از یک جبران‌ساز تناسبی استفاده کرده‌ایم. بهره جبران‌ساز را چگونه انتخاب کنیم تا سیستم جبران شده پایدار باشد؟



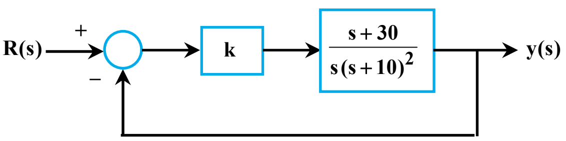
۱) $۶<k<۱۰$
۲) $۳<k<۱۰$
۳) $۶<k<۲۰$
۴) $k>۶$

۳ـ در سیستم زیر، $H(s)$ را طوری تعیین کنید که خطای تعقیب به ازای همه‌ی ورودی‌ها برابر صفر باشد؟



۱) برای برخی فرآیندها و کنترلرهای فیزیکی، $H=\frac{G_pG_c-۱}{G_pG_c}$
۲) برای تمامی فرآیندها و کنترلرهای فیزیکی، $H=\frac{G_pG_c-۱}{G_pG_c}$
۳) به ازای ورودی‌های پله و شیب و سهمی، $H=\frac{G_pG_c-۱}{G_pG_c}$
۴) چنین $H(s)$ای نمی‌توان تعیین کرد تا تمامی ورودی‌ها تعقیب شوند.

۴ـ سیستم نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر حاشیه بهره سیستم برابر دو باشد، خطای دائمی آن به شیب واحد برابر است با:

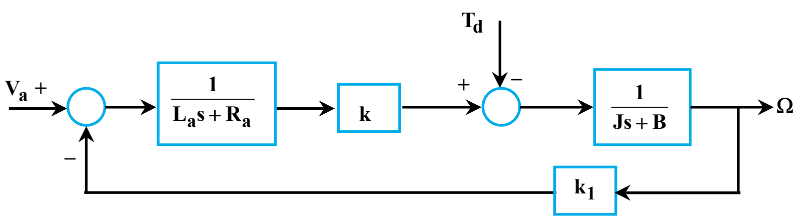


۱) ۱/۳ درصد
۲) ۳/۳ درصد
۳) ۶/۳ درصد
۴) بی‌نهایت

۵ـ معادله مشخصه سیستمی به شکل $1+k\frac{(۳s+۱)(s+۱)}{s(۳s-۱)(s+۲)}=۰$ مفروض است. حدود k چه باشد تا ریشه‌های مشخصه با جزء حقیقی منفی داشته باشیم؟

۱) $k>۱۰\sqrt{۶}-۱۱$
۲) $۰<k<۱۰\sqrt{۶}-۱۱$
۳) $k>\frac{۱۰\sqrt{۶}-۱۱}{۲۴}$
۴) $۰<k<\frac{۱۰\sqrt{۶}-۱۱}{۲۴}$

۶ـ دیاگرام بلوکی یک موتور DC با کنترل آرمیچر به شکل زیر داده شده است. اگر $L_a=R_a=۱$، $J=۲$، $B=۳$ و $k_1=۵$ باشد، پارامتر k را چنان بیابید که فراجهش پاسخ پله واحد سیستم در V_a به شکل $M_p=e^{-\frac{\pi}{\sqrt{۳}}}$ محاسبه شود.



۱) $k=۱/۹$
۲) $k=۱/۱$
۳) $k=۹/۱$
۴) $k=۹/۹$

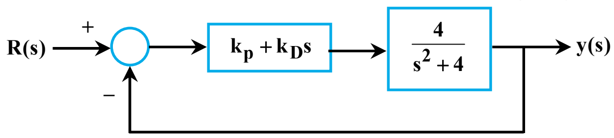
۷ـ معادله دینامیکی یک سیستم مرتبه اول به شکل $\dot{x} = x + u$ داده شده است. کنترل‌کننده فیدبک چنان طراحی شده است که $u(t) = -kx(t)$ به‌طوری‌که با گذشت زمان حالت نهایی $x(t)$ به صفر برسد. به ازای حالت اولیه $x(\circ) = \sqrt{۲}$ حاصل $\int_{\circ}^{\infty} x^{۲}(t)dt$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{k}$ ۲) $\frac{k}{k-۱}$ ۳) $\frac{۱}{k-۱}$ ۴) $\frac{۱}{۱-k}$

۸ـ برای جبران‌سازی سیستمی با تابع تبدیل $\frac{۱}{(s+۱)(s+۲)(s+۴)}$ از یک جبران‌ساز تناسبی استفاده کرده‌ایم. بهره جبران‌ساز تناسبی را چگونه انتخاب کنیم تا قطب‌های غالب حلقه بسته در $-۱ \pm j\sqrt{۳}$ واقع شوند؟

۱) $k = ۶$ ۲) $k = ۱۲$ ۳) $k = ۴$ ۴) $k = ۸$

۹ـ سیستم نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید:



پارامترهای جبران‌ساز PD را چنان انتخاب کرده‌ایم که سیستم حلقه بسته پایدار بوده، خطای دائمی آن به پله واحد ۱۰ درصد و نسبت میرایی پاسخ گذرا $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ باشد، در این شرایط:

۱) $k_D = \sqrt{۵}$ ۲) $k_D = ۲\sqrt{۵}$ ۳) $k_D = ۹$ ۴) $k_D = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$

۱۰ـ سیستمی با تابع تبدیل $\frac{k}{s(s+۲)^{۲}}$ مفروض است. می‌خواهیم جبران‌ساز G_c را چنان بیابیم که سیستم حلقه بسته قطب‌های غالبی با $\xi = \circ/۵$ و $\omega_n = ۲$ داشته باشد. فاز تابع تبدیل جبران نشده در نقطه کار چقدر است؟

۱) $-۱۵\circ^{\circ}$ ۲) $-۲۴\circ^{\circ}$ ۳) $-۲۱\circ^{\circ}$ ۴) $-۱۲\circ^{\circ}$

۱۱ـ در سؤال قبلی برای رسیدن به مشخصات مطلوب طراحی از یک جبران‌ساز پیش‌فاز به شکل $\frac{s+q}{s+p}$ استفاده می‌کنیم. اگر صفر جبران‌ساز در ۱− باشد، قطب آن و بهره k برابرند با:

۱) $-۴ \ , \ k = ۱۶$ ۲) $-۲ \ , \ k = ۱۶$ ۳) $-۴ \ , \ k = ۱۲$ ۴) $-۲ \ , \ k = ۱۲$

۱۲ـ معادله دینامیکی سیستمی به شکل $\dot{x} = x + u$ در نظر گرفته می‌شود. کنترل فیدبک چنان طراحی شده است که $u = -kx$ به‌طوری‌که با گذشت زمان حالت نهایی به صفر برسد. به ازای حالت اولیه $x(\circ) = \sqrt{۲}$، شاخص عملکرد کنترل را به شکل $J = \int_{\circ}^{\infty}(x^{۲}(t) + \lambda u^{۲}(t))dt$ تعریف می‌کنیم. حداقل مقدار J به ازای کدام مقدار k به‌دست می‌آید؟

۱) $۱+\sqrt{۱+\lambda}$ ۲) $۱+\sqrt{۱+\frac{۱}{\lambda}}$ ۳) $۱-\sqrt{۱+\lambda}$ ۴) $۱-\sqrt{۱+\frac{۱}{\lambda}}$

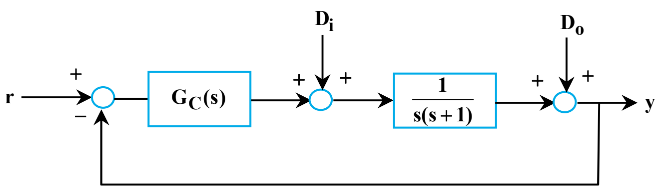
۱۳ـ چه تعداد از جملات زیر صحیح است؟

الف) اگر در سیستمی منحنی نایکوئیست همواره روی محور حقیقی باشد، حتماً در آرایه روث این سیستم سطر تمام صفر رخ می‌دهد.

ب) از دید حذف اغتشاش، کنترل PI بهتر از کنترلر پس فاز عمل می‌کند. ج) اگر فرکانس قطع فاز یافت نشود یعنی حد بهره بی‌نهایت است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴ـ در سیستم شکل زیر می‌خواهیم اثر اغتشاش ورودی و خروجی که هر دو پله‌ای واحد هستند در حالت دائمی صفر باشد. کدام گزینه کنترل کننده مناسب است؟



۱) $\frac{۱}{s}$ ۲) $\frac{s+۲}{s}$ ۳) $\frac{۱+۲s}{s}$ ۴) ۱

۱۵ـ معادله فضای حالت سیستمی به صورت $\begin{cases}\dot{x}_۱ = x_۲ \\ \dot{x}_۲ = u\end{cases}$ است. کنترل‌کننده فیدبک حالت $u = -Kx$ را طوری طراحی کرده‌ایم که نسبت میرایی برابر ۰/۵ و فرکانس طبیعی سیستم ۴ می‌باشد، K کدام است؟

۱) $[۱۶ \quad ۴]$ ۲) $[۴ \quad ۱۶]$ ۳) $[۱ \quad ۴]$ ۴) $[۱ \quad ۱۶]$

۱۶ـ سیستم زیر با معادلات فضای حالت و خروجی داده شده را در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} u \quad , \quad u = r - kx$$
$$y = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \end{bmatrix} x$$

۱) سیستم داده شده به ازای $k_۲ = ۲$ کنترل‌ناپذیر حالت است و نمی‌توان قطب‌های سیستم را جابایی کرد.

۲) شرط پایداری سیستم حلقه بسته $k_۲ > ۳$ و $k_۱ + k_۲ > ۲$ است.

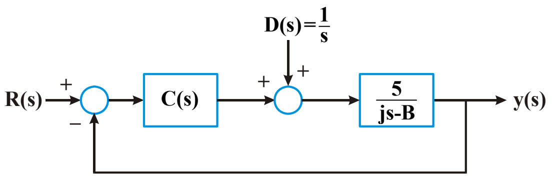
۳) خطای حالت ماندگار سیستم به ورودی پله واحد به ازای $k_۱ + k_۲ = ۴$ صفر می‌شود.

۴) با فرض پایداری سیستم، با اعمال ورودی $r(t) = Ae^{+۲t}$ که در آن A محدود است خروجی به صفر میل می‌کند.

۱۷ـ با توجه به سیستم $G(s) = \dfrac{(s-۱)}{(s-۲)(s+۴)}$ کدام‌یک از جبران‌سازهای پیشنهادی را برای این که سیستم حلقه بسته در پاسخ به ورودی پله میرای شدید باشد انتخاب می‌کنید؟ $(k > ۰)$

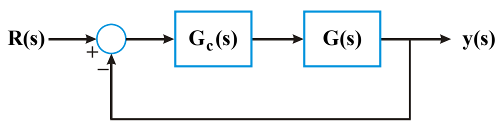
۱) $G_c = k$ ۲) $G_c = \dfrac{k(s+۱)}{s-۱/۵}$ ۳) $G_c = \dfrac{k(s-۲)}{s+۲}$ ۴) $G_c = \dfrac{k(s+۳)}{s-۵}$

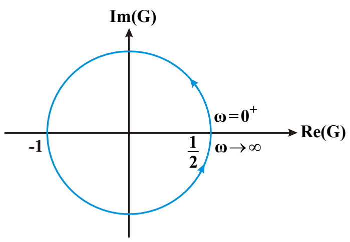
۱۸ـ بلوک دیاگرام سیستم زیر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم کنترل‌کننده $C(s)$ را به گونه‌ای طراحی کنیم که حلقه بسته به طور کامل سیگنال ورودی اغتشاش را رد کند. ساده‌ترین کنترل‌کننده کدام است؟



۱) I
۲) P
۳) PI
۴) PID

۱۹ـ دیاگرام نایکوئیست سیستمی در شکل زیر داده شده است. ساده‌ترین کنترل‌کننده‌ای که به وسیله‌ی آن می‌توان سیستم داده شده را پایدار کرد کدام است؟



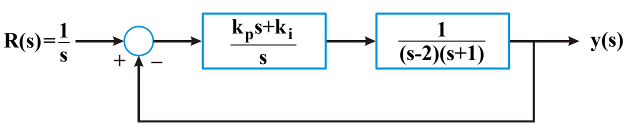


۱) سیستم داده شده پایدار است.
۲) P
۳) PI
۴) PD

۲۰ـ دیاگرام بلوکی زیر را در نظر بگیرید. هدف از طراحی کنترل‌کننده به دست آوردن سیستمی با مشخصه‌های زیر است:

الف) زمان نشست ۸ ثانیه با معیار ۲٪ $(T_s = \dfrac{۴}{\zeta\omega_n})$ ب) زمان صعود $t_p = \dfrac{۲\pi}{\sqrt{۳}}$

ضرایب کنترل‌کننده کدام است؟



۱) $k_i = -۲ \, , \, k_p = ۱$
۲) $k_i = ۱ \, , \, k_p = -۲$
۳) $k_d = ۱ \, , \, k_p = ۱$
۴) چنین کنترل‌کننده‌ای نمی‌توان طراحی کرد.

۲۱ـ با توجه به عبارت‌های زیر گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) خطای مدل‌سازی یک سیستم ممکن است به علت عدم دقت در تخمین پارامترهای سیستم باشد.

ب) خطای مدل‌سازی یک سیستم ممکن است به علت تغییر مشخصات سیستم با زمان باشد.

ج) خطای مدل‌سازی یک سیستم ممکن است به علت نادیده گرفتن ویژگی‌های غیرخطی سیستم باشد.

۱) فقط عبارت (الف) صحیح است.
۲) عبارت‌های (الف) و (ج) صحیح هستند.
۳) فقط عبارت (ج) غلط است.
۴) هر سه عبارت صحیح هستند.

۲۲ـ با توجه به عبارت‌های زیر کدام گزینه صحیح است؟

الف) تابع تبدیل یک جبران‌ساز به شکل $\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}$ مفروض است. اگر $T>0$ و این جبران‌ساز یک مدار پس فاز باشد: $0<\alpha<1$

ب) رفتار دو سیستم با توابع تبدیل $e^{-j\omega T}$ و $\frac{1}{1+jwT}$ در فرکانس‌های پایین مشابه است.

ج) دوایر فاز ثابت (N ثابت) برای $\alpha=\alpha_1$ و $\alpha=\alpha_1+180^\circ n$ که n عددی صحیح است، یکسان هستند.

۱) فقط عبارت «ب» صحیح است.
۲) عبارات «الف» و «ب» صحیح هستند.
۳) عبارات «ب» و «ج» صحیح هستند.
۴) هر سه عبارت صحیح هستند.

۲۳ـ با توجه به عبارت‌های زیر کدام گزینه صحیح است؟

الف) برای آنکه سیستمی ورودی‌های دلخواه را ردیابی کند، پهنای باند سیستم باید حتی‌الامکان بزرگ باشد.

ب) از نگاه نویز اندازه‌گیری پهنای باند سیستم نباید خیلی بزرگ انتخاب شود.

ج) توالی صحیح بهبود پایداری سیستم عبارت است از استفاده از فیدبک منفی، کاهش بهره و افزودن عامل مشتقی

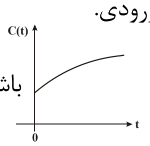
۱) عبارت «الف» و «ب» صحیح هستند.
۲) فقط عبارت «ب» صحیح است.
۳) عبارت «الف» و «ج» صحیح هستند.
۴) هر سه عبارت صحیح هستند.

۲۴ـ با توجه به عبارت‌های زیر کدام گزینه صحیح است؟

الف) یک جبران‌ساز پس فاز در واقع شبیه یک فیلتر پایین‌گذر عمل می‌کند.

ب) در یک کنترل‌کننده انتگرالی نرخ تغییرات خروجی متناسب است با ورودی.

ج) اگر نمودار خروجی یک جبران‌ساز به‌ازای ورودی پله واحد به شکل



باشد، این جبران‌ساز از نوع تناسبی ـ انتگرالی خواهد بود.

۱) فقط عبارت «الف» صحیح است.
۲) عبارت‌های «الف» و «ب» صحیح هستند.
۳) عبارت‌های «الف» و «ج» صحیح هستند.
۴) هر سه عبارت صحیح هستند.

پاسخنامه تست‌های تألیفی فصل هشتم

۱ـ گزینه «۲»

روش اول: با جایگذاری $F=-K_p\dot{y}$ در معادله دینامیکی سیستم داریم:

$$M\ddot{y}+B\dot{y}+ky=-K_p\dot{y}\;\Rightarrow\; M\ddot{y}+(B+K_p)\dot{y}+ky=0$$

لذا میرایی سیستم از B به $B+K_p$ افزایش می‌یابد.

روش دوم: معادلات فضای حالت متناظر با سیستم داده شده را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} y=x_1 \\ \dot{y}=x_2 \\ \ddot{y}=\dot{x}_2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=\dfrac{F}{M}-\dfrac{k}{M}x_1-\dfrac{B}{M}x_2 \end{cases}\Rightarrow \dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-k}{M} & \dfrac{-B}{M} \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix}F$$

اگر برای جبران‌سازی از فیدبک داده شد، یعنی $u=-k_p\dot{y}+F$ استفاده کنیم، داریم:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{M} & -\dfrac{B}{M}-\dfrac{k_p}{M} \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix}F \qquad y=[1 \quad 0]x$$

در نتیجه برای تابع تبدیل داریم:

$$G(s)=\frac{1}{Ms^2+(B+k_p)s+k}$$

می‌توان دید که میرایی سیستم افزایش یافته؛ چون بدون تغییر ω_n در سیستم‌های مرتبه دوم جمله متناظر با $2\zeta\omega_n$ افزایش یافته که نشان‌دهنده بزرگ‌تر شدن ζ است در نتیجه میرایی افزایش یافته است. به جای تشکیل معادلات فضای حالت می‌توان از معادله دیفرانسیل مستقیماً به تابع تبدیل رسید.

$$M\ddot{y}+B\dot{y}+ky=F\;\Rightarrow u=-k_p\dot{y}+F\;\Rightarrow M\ddot{y}+(B+k_p)\dot{y}+ky=F\xrightarrow{\ell}\frac{y(s)}{F(s)}=\frac{1}{Ms^2+(B+k_p)s+k}$$

حال می‌توان نتایج حالت قبل را برای این مورد در نظر گرفت.

۲ـ گزینه «۳» تابع تبدیل سیستم به صورت $G(s)=\dfrac{k(s-\frac{1}{2})}{s^2-6s+10}$ است. در نتیجه معادله مشخصه سیستم برابر است با:

$$\Delta(s)=s^2-6s+10+ks-\frac{k}{2}=0\;\Rightarrow\begin{cases} k-6>0\;\Rightarrow k>6 \\ 10-\dfrac{k}{2}>0\;\Rightarrow k<20 \end{cases}\Rightarrow 6<k<20$$

۳ـ گزینه «۲»

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G_cG_p}{1+G_cG_pH}\Rightarrow Y(s)=\frac{G_cG_p}{1+G_cG_pH}R(s)$$

$$E(s)=(R(s)-Y(s))=R(s)[1-\frac{G_cG_p}{1+G_cG_pH}]=R(s)\frac{1+G_cG_p(H-1)}{1+G_cG_pH}$$

برای اینکه $E(s)=0$ شود باید:

$$1+G_cG_p(H-1)=0\Rightarrow H=\frac{G_pG_c-1}{G_pG_c}$$

و تنها شرطی که وجود دارد این است که H باید سره باشد و این شرط برقرار است اگر G_p و G_c سره باشند و G_p و G_c فیزیکی هستند، یعنی علّی بوده پس G_c و G_p سره می‌باشند و در نتیجه H نیز سره است.

۴ـ گزینه «۲» آستانه ناپایداری را از جدول روث تعیین می‌کنیم:

$$\Delta(s)=1+L(s)=0 \Rightarrow s(s+10)^2+k(s+30)=0$$

و یا:

$$s^3+20s^2+(k+100)s+30k=0$$

آرایه روث به شکل زیر است:

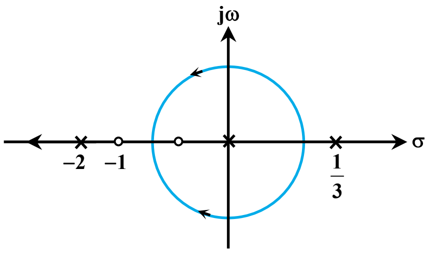
$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & k+100 \\ s^2 & 20 & 30k \\ s^1 & 2000-10k & 0 \\ s^0 & 30k & \end{array}$$

برای پایداری باید $0<k<200$ باشد. از آنجایی‌که حاشیه بهره سیستم دو می‌باشد، لذا در شرایط فعلی $k=\frac{k_{max}}{GM}=100$. در این‌صورت:

$$k_v=\lim_{s\to 0} sG(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{100(s+30)}{s(s+10)^2}=\frac{30(100)}{100}=30$$

بنابراین خطای شیب واحد عبارت است از $\frac{1}{k_v}=\frac{1}{30}=0/033$.

۵ـ گزینه «۳» مکان ریشه‌های سیستم را به شکل مقابل رسم می‌کنیم:



برای این‌که ریشه‌های معادله مشخصه جزء حقیقی منفی داشته باشند، بهره k باید بزرگ‌تر از آستانه پایداری سیستم انتخاب شود.

از جدول روث داریم:

$$\Delta(s)=3s^3+(3k+5)s^2+(4k-2)s+k=0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 3 & 4k-2 \\ s^2 & 3k+5 & k \\ s^1 & A & 0 \\ s^0 & k & \end{array} \qquad A=\frac{12k^2+14k-10-3k}{3k+5}$$

با فرض $k>0$، کافی است $A>0$ و لذا داریم:

$$k>\frac{10\sqrt{6}-11}{24}$$

۶ـ گزینه «۱»

$$MP=e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}=e^{-\pi \operatorname{cotg}\theta} \Rightarrow \operatorname{cotg}\theta=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\theta=\xi=\frac{1}{2}$$

از طرفی:

$$\frac{\Omega}{V_a}=\frac{k}{(Js+B)(L_as+R_a)+kk_1}$$

به ازای پارامترهای داده شده می‌توان نوشت:

$$\Delta(s)=2s^2+5s+3+5k=0$$

از مقایسه با سیستم مرتبه ۲ الگو داریم:

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n=\frac{5}{2} \\ \omega_n^2=\frac{3+5k}{2} \end{cases} \Rightarrow \omega_n=\frac{5}{2}\ ,\ k=1/9$$

۷ـ گزینه «۳»

$$\dot{x}=x+u=x-kx=(1-k)x \Rightarrow x(t)=e^{(1-k)t}x(0)$$

برای پایداری باید $k>1$ باشد. در این‌صورت داریم:

$$\int_0^\infty x^2(t)\,dt=\int_0^\infty e^{2(1-k)t}x^2(0)\,dt=2\left[\frac{1}{2(1-k)}e^{2(1-k)t}\right]_0^\infty$$

و یا داریم:

$$\int_0^\infty x^2(t)\,dt=\frac{-1}{1-k}=\frac{1}{k-1}$$

۸ـ گزینه «۲»

روش اول: اگر فرض کنیم $-1\pm j\sqrt{3}$ به مکان ریشه سیستم جبران نشده تعلق داشته است، در این‌صورت جبران‌سازی تناسبی برای رسیدن به این شرایط کفایت می‌کند. در این‌حالت از شرط اندازه داریم:

$$|L(s)|_{-1+j\sqrt{3}}=\frac{1}{k}\Rightarrow\frac{1}{|s+1||s+2||s+4|_{s=-1+j\sqrt{3}}}=\frac{1}{k}$$

و یا:

$$\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{4}\sqrt{9+3}}=\frac{1}{k}\Rightarrow k=12$$

روش دوم: برای این که $s=-1\pm j\sqrt{3}$ قطب‌های غالب سیستم شوند باید معادله مشخصه سیستم بر s^2+2s+4 بخش‌پذیر باشد. پس داریم:

$$s^3+7s^2+14s+8+k=(s^2+2s+4)(s+\beta)\Rightarrow\begin{cases}\beta+2=7\\2\beta+4=14\Rightarrow\beta=5\Rightarrow k=12\\4\beta=8+k\end{cases}$$

۹ـ گزینه «۱» معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارت است از:

$$\Delta(s)=s^2+4k_Ds+4+4k_p=0$$

برای پایداری کافی است $k_D>0$ و $k_p>-1$ باشند.

خطای پله واحد سیستم عبارت است از:

$$\frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}G(s)}=\frac{1}{1+k_p}=\frac{1}{10}$$

لذا $k_p=9$. در این‌حالت:

$$\begin{cases}2\xi\omega_n=4k_D\\\omega_n^2=4(1+k_p)=40\end{cases}$$

و یا:

$$k_D=\frac{2\xi\omega_n}{4}=\frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{40}}{4}=\sqrt{5}$$

۱۰ـ گزینه «۲» نقطه کار مطلوب، ریشه‌های معادله $s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2$ یا s^2+2s+4 هستند که عبارت است از $s=-1\pm j\sqrt{3}$

لذا فاز تابع تبدیل $\frac{k}{s(s+2)^2}$ را در $-1+j\sqrt{3}$ محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\angle\frac{k}{s(s+2)^2}=-\angle s-2(\angle s+2)$$

به ازای $s=-1+j\sqrt{3}$:

$$-\angle(-1+j\sqrt{3})-2\angle(1+j\sqrt{3})=-(\pi-tg^{-1}\sqrt{3})-2tg^{-1}\sqrt{3}$$

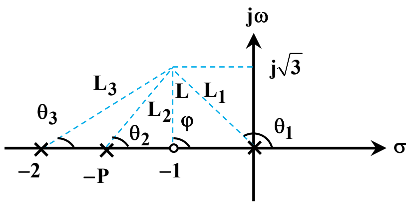
و یا:

$$\angle G=-\pi-tg^{-1}\sqrt{3}=-\pi-\frac{\pi}{3}=-\frac{4\pi}{3}$$

۱۱ـ گزینه «۱»

روش اول: با توجه به زاویه فاز سیستم جبران نشده در نقطه کار، جبران‌ساز پیش فاز باید 60° فاز مثبت را تأمین کند.

شرط زاویه را برای سیستم جبران شده در نقطه مطلوب می‌نویسیم.



$$\varphi-\theta_1-\theta_2-2\theta_3=(2m+1)\pi$$

$$\Rightarrow -240^\circ+\varphi-\theta_2=(2m+1)180^\circ$$

دقت کنید که φ و θ_2 زاویه متناظر با صفر و قطب‌های جبران‌ساز هستند:

لذا: $\varphi=90^\circ$ و θ_2 مجهول است که باید شرط زاویه را برقرار کند:

$$-240^\circ+90^\circ-\theta_2=-180^\circ\Rightarrow\theta_2=30^\circ$$

از طرفی:

$$tg\theta_2=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{P-1}\Rightarrow P=4$$

مقدار k از شرط اندازه در نقطه مطلوب به شکل روبرو محاسبه می‌شود:

$$\frac{1}{k}=\frac{L}{L_1L_2(L_3)^2}\Rightarrow\frac{1}{k}=\frac{\sqrt{3}}{(2)(\sqrt{12})(2)^2}=\frac{\sqrt{3}}{8(2\sqrt{3})}=\frac{1}{16}$$

و یا $k=16$.

روش دوم: سیستم حلقه بسته باید قطب‌هایی در $s=-1\pm j\sqrt{3}$ داشته باشد. یعنی معادله مشخصه سیستم حلقه بسته بر چندجمله‌ای s^2+2s+4 بخش‌پذیر باشد. معادله مشخصه سیستم به همراه جبران‌ساز داده شده برابر است با:

$$\Delta(s)=s^4+(P+4)s^3+(4P+4)s^2+(k+4P)s+k$$

$$s^4+(P+4)s^3+(4P+4)s^2+(k+4P)s+k=(s^2+2s+4)(s^2+\alpha s+\beta)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}P+4=\alpha+2\\ 2\alpha+\beta+4=4+4P\\ 4\alpha+2\beta=k+4P\\ 4\beta=k\end{cases}\Rightarrow k=16\ ,\ P=4\ ,\ \alpha=6\ ,\ \beta=4$$

۱۲ـ گزینه «۲» با جایگذاری قانون کنترل در معادله سیستم داریم:

$$\dot{x}=(1-k)x$$

لذا برای پایداری باید $k>1$ باشد.

از طرفی:

$$J=\int_0^\infty(x^2+\lambda k^2x^2)dt=\int_0^\infty(1+\lambda k^2)x^2(t)dt\ \Rightarrow\ J=(1+\lambda k^2)\int_0^\infty x^2(t)dt$$

اما $x(t)=e^{(1-k)t}x(0)$ که $x(0)=\sqrt{2}$ است. با جایگذاری و انتگرال‌گیری داریم:

$$J=(1+\lambda k^2)\frac{1}{k-1}$$

حداقل مقدار J با مشتق‌گیری نسبت به k به‌دست می‌آید.

$$\min J:\frac{\partial J}{\partial k}=0\ \rightarrow\ \lambda k^2-2\lambda k-1=0\ \rightarrow\ k=1\pm\sqrt{1+\frac{1}{\lambda}}$$

مقدار بهینه k، $k=1+\sqrt{1+\frac{1}{\lambda}}$ است.

۱۳ـ گزینه «۴» هر سه عبارت صحیح هستند.

الف) اگر منحنی نایکوئیست همواره روی محور حقیقی باشد، یعنی هیچ عبارت توان فردی نداریم، پس حتماً سطر تماماً صفر در جدول روث اتفاق می‌افتد.

ب) کنترل‌کننده PI یک قطب در مبدأ به سیستم اضافه می‌کند، یعنی نوع سیستم را یکی بالا می‌برد. به همین دلیل امکان حذف برخی از اغتشاش‌ها را به سیستم اضافه می‌کند، اما در کنترل‌کننده پس‌فاز چنین حالتی وجود ندارد.

ج) اگر نتوان ωای پیدا کرد که در آن $\measuredangle G(j\omega)=-180$ باشد در واقع حد بهره بی‌نهایت است.

۱۴ـ گزینه «۳» برای اینکه اثر اغتشاش ورودی خنثی شود باید $G(s)$ شامل ترم $\frac{1}{s}$ باشد، بنابراین گزینه (۴) نادرست است. با بررسی پایداری سیستم حلقه بسته به کمک جدول روث ـ هرویتز می‌بینیم که تنها گزینه (۳) موجب پایداری سیستم حلقه بسته است.

گزینه ۳: $\Delta(s)=1+\frac{1+2s}{s}\frac{1}{s(s+1)}=0\Rightarrow s^3+s^2+2s+1=0$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2\\ s^2 & 1 & 1\\ s^1 & 1 & \\ s^0 & 1 & \end{array}\ \Rightarrow\ \text{پایدار}\ \Rightarrow\ \text{گزینه ۳}$$

ناپایداری گزینه‌های (۱) و (۲) به همین ترتیب قابل اثبات است.

۱۵ـ گزینه «۱»

$$\det(sI-(A-BK))=0\Rightarrow\left|\begin{bmatrix}s&0\\0&s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\-K_1&-K_2\end{bmatrix}\right|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}s&-1\\K_1&s+K_2\end{vmatrix}=0\Rightarrow s^2+K_2s+K_1=0\qquad(1)$$

از طرفی معادله مشخصه مطلوب چنین است:

$$s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2=0\Rightarrow s^2+4s+16=0\qquad(2)$$

$$(1)=(2)\Rightarrow\begin{cases}K_1=16\\K_2=4\end{cases}$$

۱۶ـ گزینه «۴» برای حل ابتدا باید تابع تبدیل سیستم را به دست آوریم:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}(r-[k_1 \quad k_2]x)=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & -1\\ -k_1 & 2-k_2\end{bmatrix}}_{A_{cL}}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=c(sI-A_{CL})^{-1}B=\frac{s-2}{s^2+(k_2-3)s-k_1-k_2+2}$$

گزینه (۱): شرط کنترل‌پذیری مخالف صفر بودن دترمینان ماتریس کنترل‌پذیری زیر است.

$$C_A=[B \quad A_{CL}B]=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2-k_2\end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس روبه‌رو مخالف صفر است. پس گزینه (۱) غلط است.

گزینه (۲): شرط پایداری سیستم طبق تابع تبدیل به دست آمده به صورت مقابل است:

$$k_2>3 \ , \ k_1+k_2<2$$

پس این گزینه نیز غلط است.

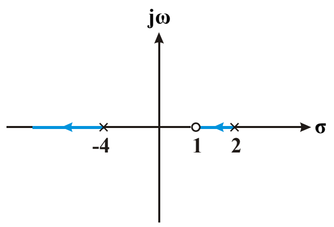
گزینه (۳): خطای حالت ماندگار برابر است با:

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s(1-T(0))\times\frac{1}{s}=\frac{-k_1-k_2+4}{-k_1-k_2+2}$$

اگر $k_1+k_2=4$ باشد رابطه‌ی فوق صفر می‌شود، اما دقت کنید که در این حالت سیستم ناپایدار می‌شود. پس گزینه (۳) نیز اشتباه است.

گزینه (۴): با اعمال ورودی $r(t)=Ae^{2t}$ به سیستم و با فرض پایداری آن، از آن‌جایی که فرکانس ورودی دقیقاً برابر با صفر سیستم $s=2$ برابر است، پس خروجی سیستم به صفر میل می‌کند.

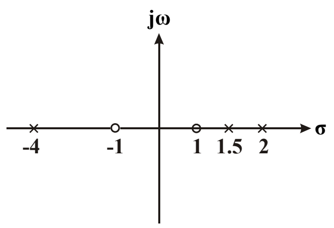
۱۷ـ گزینه «۴» بهترین روش برای حل این مسئله استفاده از مکـان هندســی ریشــه‌هـا اسـت.



مکان هندسی سیستم حلقه باز به صورت روبه‌رو است:

این سیستم همواره یک قطب در سمت راست دارد. پس گزینه (۱) یعنی کنترل‌کننده تناسـبی نمی‌تواند مشخصات خواسته شده را برآورده کند.

گزینه (۳) نیز نمی‌تواند درست باشد؛ چون پایداری داخلی آن از بین رفته است. در ایـن حالـت قطب ناپایدار $s=2$ با صفر ناپایدار در این نقطه حذف شده است.

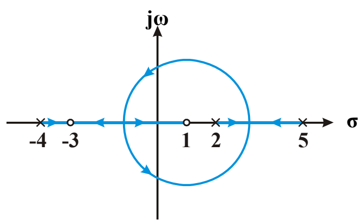


برای بررسی گزینه (۲) باید مکان هندسی ریشه‌ها را بررسی کنیم:

در این سؤال مهم بررسی نقاط شکست است. داریم:

$$\frac{dGG_c(s)}{ds}=0 \Rightarrow s=0/53 \ , 1/07 \ , -1/1\pm 3/29j$$

در این حالت نیز سیستم همواره قطب ناپایدار خواهد داشت.



گزینه (۴): مکان هندسی این سیستم به صورت مقابل است. در این حالت نقطه‌ی شکست به صورت $s=-0/41$ و $s=2/97$ است که این سیستم می‌تواند به ازای برخی مقادیر k میرایی شدید داشته باشد.

۱۸ـ گزینه «۳» برای این که سیستم حلقه بسته بتواند اغتشاش را به طور کامل حذف کند نیاز به یک انتگرال‌گیر داریم، پس گزینه (۲) نمی‌توانـد درسـت باشد. حال تابع تبدیل سیستم حلقه بسته را می‌نویسیم.

$$T(s)=\frac{5c(s)}{js-B+5c(s)}$$

می‌توان از معادله مشخصه سیستم دریافت که با کنترل‌کننده I نمی‌توان سیستم را پایدار کرد.

همچنین اگر معادله مشخصه را برای کنترل‌کننده PI بنویسیم، داریم:

$$\Delta(s)=js^2-Bs+5k_ps+k_I=js^2+(5k_p-B)s+k_I$$

با کنترل‌کننده PI می‌توان ضرایب را به گونه‌ای انتخاب کرد تا سیستم پایدار باشد و خطای حالت دائم آن به ورودی D(s) صفر شود. گزینه (۳) صحیح است. همچنین اگر خواسته‌ای بر روی مشخصات حالت گذرا قرار داده می‌شد، آنگاه باید از کنترل‌کننده PID استفاده می‌کردیم.

۱۹ـ گزینه «۲» ابتدا باید تابع تبدیل سیستم داده شده را به دست آوریم. با توجه به این که سیستم از $+\frac{۱}{۲}$ شروع شده است و به $\frac{۱}{۲}$ ختم شده است و همواره شکل آن دایره‌ای است، تابع تبدیل آن به فرم کلی مقابل می‌باشد.

$$G(s)=\frac{As^{۲}+Bs+C}{Ds^{۲}+Es+F}\Rightarrow\frac{A}{D}=\frac{C}{F}=\frac{۱}{۲}$$

از آن‌جایی که با افزایش ω همواره فاز سیستم در حال افزایش است، پس هیچ قطب سمت چپی نداریم؛ چون همان‌طور که می‌دانیم قطب‌های سمت راست در منحنی فاز نقش صفرهای سمت چپ را بازی می‌کنند؛ در نتیجه تابع تبدیل باید به فرم مقابل باشد:

$$G(s)=\frac{s^{۲}+s+۱}{۲s^{۲}-s+۲}$$

دقت کنید به دست آوردن دقیق اعداد پارامترهای B و E مهم نیست. باید توجه داشت که این دو پارامتر به صورت $E=-B$ است. حال برای پایدارسازی این سیستم معادله مشخصه سیستم را تشکیل می‌دهیم.

$$\Delta(s)=۲s^{۲}-s+۲+ks^{۲}+ks+k=۰\Rightarrow\Delta(s)=(۲+k)s^{۲}+(k-۱)s^{۲}+(k+۲)=۰$$

اگر $k>۱$ انتخاب شود سیستم حلقه بسته پایدار می‌گردد. در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

۲۰ـ گزینه «۴» با توجه به خواسته‌های کنترلی ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را تشکیل می‌دهیم و سپس شرایط را برآورده می‌کنیم:

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{k_ps+k_i}{s^{۳}-s^{۲}+(k_p-۲)s+k_i}$$

برای داشتن زمان نشست ۸ ثانیه باید داشته باشیم:

$$T_s=\frac{۴}{\zeta\omega_n}=۸\Rightarrow\zeta\omega_n=\frac{۱}{۲}$$

و برای زمان صعود $\frac{۲\pi}{\sqrt{۳}}$ ثانیه داریم:

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{۲\pi}{\sqrt{۳}}\Rightarrow\omega_d=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\zeta=\frac{۱}{۲}\ ,\ \omega_n=۱$$

حال باید پارامترهای سیستم را به دست آوریم:

$$s^{۳}-s^{۲}+(k_p-۲)s+k_i=(s^{۲}+s+۱)(s+\alpha)\Rightarrow\begin{cases}\alpha+۱=-۱\Rightarrow\alpha=-۲\\ \alpha+۱=k_p-۲\Rightarrow k_p=۱\\ \alpha=k_i\Rightarrow k_i=-۲\end{cases}$$

دقت کنید که با توجه به شرایط به دست آمده گزینه (۱) صحیح است، اما قبل از همه‌ی این‌ها باید به مسیر پیش‌روی سیستم دقت کرد. تابع تبدیل حلقه باز به صورت $\frac{۱}{(s-۲)(s+۱)}$ است و کنترل‌کننده طراحی شده $\frac{s-۲}{s}$ می‌باشد. در مسیر پیش‌رو حذف صفر و قطب ناپایدار رخ داده است که باعث می‌شود سیستم چنین مشخصه‌ای را برآورده نکند.

۲۱ـ گزینه «۴» هر سه عامل معرفی شده باعث بروز خطای مدل‌سازی خواهند شد.

۲۲ـ گزینه «۴» هر سه عبارت از مفاهیم شناخته شده و مطرح در سیستم‌های کنترل خطی به شمار می‌آیند.

۲۳ـ گزینه «۴» هر سه عبارت صحیح هستند و در تشریح اصول جبران‌سازی سیستم‌های کنترل در مورد آن‌ها به‌طور مفصل صحبت شده است.

۲۴ـ گزینه «۴» در یک کنترل‌کننده انتگرالی داریم:

$$c(t)=k_i\int u(t')dt'$$

که $u(t)$ ورودی و $c(t)$ خروجی کنترل‌کننده است. بنابراین:

$$\frac{dc(t)}{dt}=k_iu(t)$$

و یا نرخ تغییرات خروجی متناسب با ورودی است.

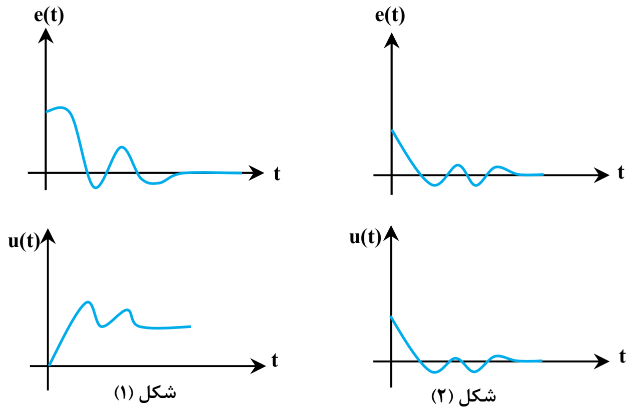
از طرفی در یک جبران‌ساز تناسبی ـ انتگرالی با تابع تبدیل به شکل $\frac{c(t)}{u(t)}=k_c+\frac{k_i}{s}$ به ازای ورودی پله واحد خواهیم داشت:

$$c(s)=k_c.\frac{۱}{s}+\frac{k_i}{s^{۲}}$$

عکس تبدیل لاپلاس نتیجه می‌دهد:

آزمون فصل هشتم

۱ـ شکل‌های زیر سیگنال خطای محرک ورودی کنترل‌کننده و سیگنال کنترل خروجی آن را نشان می‌دهند. هر یک از این اشکال معرف چه نوع عملکرد کنترلی می‌تواند باشد؟



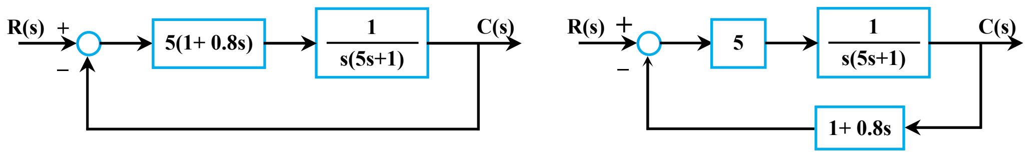
۱) شکل (۱): انتگرالی   شکل (۲): تناسبی

۲) شکل (۱): مشتقی   شکل(۲): انتگرالی

۳) شکل (۱): تناسبی   شکل(۲): انتگرالی

۴) شکل‌ها اطلاعات مشخصی به دست نمی‌دهند.

۲ـ سیستم‌های نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. کدام گزینه در مورد این سیستم‌ها درست است؟



۱) تابع تبدیل حلقه GH برای دو سیستم یکسان است، لذا مکان هندسی ریشه‌ها و در نتیجه پاسخ پله آن دو کاملاً یکسان است.

۲) صفرها و قطب‌های حلقه بسته دو سیستم یکسان است، لذا پاسخ‌های متناظر آن دو یکسان است.

۳) تابع تبدیل حلقه GH برای دو سیستم یکسان است، لذا مکان هندسی ریشه‌های دو سیستم مشابه است، اما سیستم سمت چپ پاسخ سریع‌تر و خطای حالت دائمی کمتری دارد.

۴)گزینه‌های (۱) و (۲) صحیح هستند.

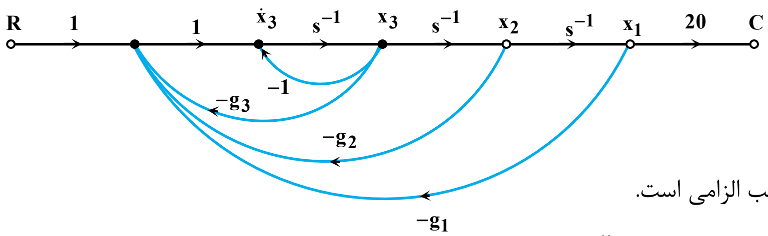
۳ـ تابع انتقال مقابل یک کنترل‌کننده lead / lag را نشان می‌دهد:

$$G(s)=\frac{۱}{\beta}\times\frac{s+\frac{۱}{T_۱}}{s+\frac{۱}{\beta T_۱}}\times\frac{s+\frac{۱}{T_۲}}{s+\frac{\beta}{T_۲}}\ ;\ \beta>۱$$

هنگامی‌که $\beta\to\infty$ این کنترل‌کننده به چه نوع کنترل‌کننده‌ای تبدیل می‌شود؟

۱) P   ۲) PD   ۳) PI   ۴) PID

۴ـ یک سیستم کنترل‌کننده با فیدبک حالت در شکل زیر نشان داده شده است. بردار $\begin{bmatrix} g_۱ & g_۲ & g_۳ \end{bmatrix}$ را چنان تعیین کنید که دو عدد از قطب‌های سیستم حلقه بسته در $-۱\pm j$ قرار گرفته و خطای حالت ماندگار سیستم به ورودی پله واحد صفر باشد:



۱) $\begin{bmatrix} ۲۰ & ۲۲ & ۱۱ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۲۰ & ۱۱ & ۲۲ \end{bmatrix}$

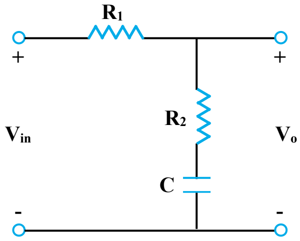
۳) $\begin{bmatrix} ۲۰ & ۲۰ & ۲۲ \end{bmatrix}$

۴) برای پیدا کردن این بردار مشخص کردن سومین قطب الزامی است.

۵ـ در یک سیستم کنترل با معادله دیفرانسیل $\frac{d^۲y}{dt^۲}+۲\frac{dy}{dt}+y=u(t)$، اگر متغیرهای حالت را به صورت $x_۱=y$ و $x_۲=\frac{dy}{dt}$ تعریف کنیم و برای قرار دادن قطب‌های حلقه بسته در $s=-۲$ و $s=-۳$ از فیدبک حالت $u(t)=r(t)-g_۱x_۱-g_۲x_۲$ استفاده کنیم، مقادیر $g_۱$ و $g_۲$ کدام‌اند؟

۱) $g_۱=۵\ ,\ g_۲=۲$ ۲) $g_۱=۳\ ,\ g_۲=۵$ ۳) $g_۱=g_۲=-۷$ ۴) $g_۱=۵\ ,\ g_۲=۳$

۶ـ مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل زیر مفروض است. اگر مدار به عنوان جبران‌ساز در یک سیستم کنترل به کار رود کدام گزینه صحیح است؟



۱) به عنوان پایدارساز عمل می‌کند.

۲) خطای دائمی را تغییر اساسی نمی‌دهد ولی پاسخ گذرای سیستم را بهبود می‌بخشد.

۳)پاسخ گذرای سیستم را به طور اساسی تغییر نداده ولی خطای حالت دائم آن بهتر می‌شود.

۴) گزینه (۱) و (۲) هر دو درست هستند.

۷ـ سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)=\dfrac{k}{s^۲(Ts+۱)}$ و فیدبک واحد مفروض است. برای پایدارسازی این سیستم از یک جبران‌ساز تناسبی ـ مشتقی (PD) در مسیر مستقیم استفاده می‌کنیم به شکلی که $G_{new}(s)=\dfrac{k(\tau s+۱)}{s^۲(Ts+۱)}$ در این صورت باید:

۱) $\tau>T$

۲) $\tau<T$

۳) با انتخاب دلخواه τ سیستم حلقه بسته پایدار خواهد شد.

۴) با این جبران‌ساز نمی‌توان سیستم حلقه بسته را پایدار کرد.

۸ـ تابع تبدیل $G_c(s)=\dfrac{۱}{\alpha}\dfrac{s+z}{s+p}$ $(\alpha>۱)$ یک جبران‌کننده پس افت فاز را نشان می‌دهد. در چه فرکانسی حداکثر افت فاز (phase lag) را خواهیم داشت؟

۱) $\omega_m=\dfrac{۱}{\sqrt{zp}}$

۲) $\omega_m=\sqrt{\dfrac{p}{z}}$

۳) $\omega_m=\sqrt{\dfrac{z}{p}}$

۴) $\omega_m=\sqrt{zp}$

۹ـ معادلات حالت و خروجی سیستمی به شکل زیر داده شده‌اند. می‌خواهیم نسبت میرایی سیستم حلقه بسته برابر ۰/۵ و فرکانس طبیعی نامیرای آن یک رادیان بر ثانیه باشد، مقادیر $k_۱$ و $k_۲$ عبارتند از:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}۱ & ۰\end{bmatrix}x \qquad u=-\begin{bmatrix}k_۱ & k_۲\end{bmatrix}x$$

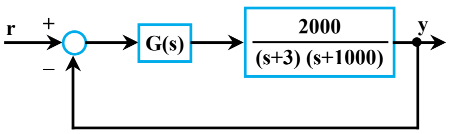
۱) $k_۱=k_۲=۲$

۲) $k_۱=k_۲=-۲$

۳) $k_۱=۲, k_۲=۱$

۴) $k_۱=۱, k_۲=۲$

۱۰ـ در سیستم زیر جبران‌ساز $G_c(s)=\dfrac{k(s+z)}{s(s+p)}$ را طوری طراحی کنید که شرایط زیر تقریباً برآورده شود. $(T_s=\dfrac{۴}{\zeta\omega_n})$ $\zeta=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$, $T_s=\dfrac{۲}{۳}$



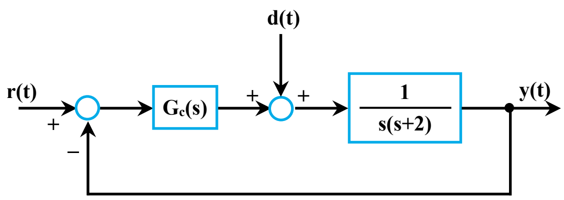
۱) $G_c(s)=\dfrac{۳۶(s+۳)}{s(s+۱۲)}$

۲) $G_c(s)=\dfrac{۳۶(s+۳)}{s(s+۶)}$

۳) $G_c(s)=\dfrac{۷۲(s+۳)}{s(s+۶)}$

۴) $G_c(s)=\dfrac{۷۲(s+۳)}{s(s+۱۲)}$

۱۱ـ در سیستم داده شده، کنترل‌کننده‌ای که خطای ماندگار به اغتشاش $d(t)=\sin t$ را صفر می‌کند کدام است. به ازای چه نوع ورودی مرجع در این حالت خطای ماندگار صفر خواهد بود؟



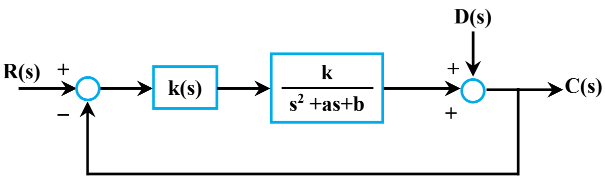
۱) $G_c(s)=\dfrac{s}{s^۲+۱}$، پله و $\sin t$

۲) $G_c(s)=\dfrac{s+۲}{s^۲+۱}$، پله و $\sin t$

۳) $G_c(s)=\dfrac{-s+۰/۱}{s^۲+۱}$، پله و $\sin t$

۴) $G_c(s)=\dfrac{-s+۰/۱}{s^۲+۱}$، پله و شیب

۱۲ـ در سیستم کنترل شکل زیر با فرض $R(s) = D(s) = \frac{1}{s}$ و $\begin{cases} k(s) = k_p + k_d s \\ k_p , k_d > 0 \end{cases}$ و همچنین با فرض پایداری سیستم حلقه بسته برای کاهش خطای حالت دائمی سیستم به ورودی داده شده در $R(s)$ و $D(s)$ داده شده کدام راهکار مناسب است؟



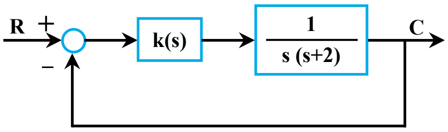
۱) افزایش k_p

۲) افزایش k_d

۳) افزایش همزمان k_p و k_d

۴) خطای حالت دائمی در هر حالت صفر است.

۱۳ـ در سیستم نشان داده شده در شکل زیر ساده‌ترین جبران‌کننده برای این که خطای حالت دائمی سیستم به ورودی $r(t) = \frac{1}{2}t^2$ برابر $0/1$ باشد، برابر است با:



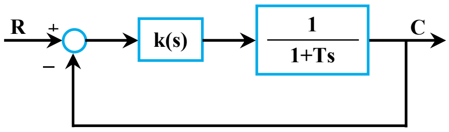
۱) $\frac{1}{s}$

۲) $\frac{20}{s}$

۳) $\frac{20(s+1)}{s}$

۴) $\frac{s+1}{s}$

۱۴ـ در سیستم کنترل شکل زیر جبران کننده $k(s)$ که به ازای آن خطای دائمی سیستم به ورودی مرجع شیب واحد صفر می‌شود، برابر است با:



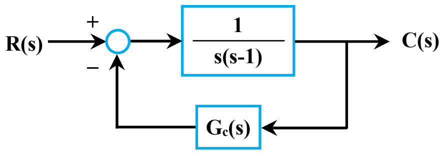
۱) $\frac{k}{s^2}$

۲) $\begin{cases} \frac{k(1+T_d s)}{s^2} \\ T_d = T \end{cases}$

۳) $\begin{cases} \frac{k(1+T_d s)}{s^2} \\ T_d > T \end{cases}$

۴) $\begin{cases} \frac{k(1+T_d s)}{s^2} \\ T_d < T \end{cases}$

۱۵ـ سیستم کنترل شکل زیر مفروض است. ساده‌ترین جبران‌کننده $G_c(s)$ برای پایدارسازی سیستم حلقه بسته در کدام گزینه آمده است؟



۱) $G_c(s) = k_p$

۲) $G_c(s) = k_p + \frac{k_I}{s}$

۳) $G_c(s) = k_p + k_D s$

۴) $G_c(s) = k_p + k_D s + \frac{k_I}{s}$

پاسخنامه آزمون‌ها

فصل اول: « نمایش‌های مختلف سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI)»

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۳»
۱۶ـ گزینه «۳»	۱۷ـ گزینه «۱»	۱۸ـ گزینه «۴»	۱۹ـ گزینه «۱»	۲۰ـ گزینه «۳»
۲۱ـ گزینه «۳»	۲۲ـ گزینه «۲»	۲۳ـ گزینه «۴»	۲۴ـ گزینه «۲»	۲۵ـ گزینه «۳»

فصل دوم: « تحلیل پایداری سیستم‌های LTI»

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۴»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۴»

فصل سوم: «تحلیل پاسخ گذرا»

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۱»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۳»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۳»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۴»	۱۸ـ گزینه «۴»	۱۹ـ گزینه «۴»	۲۰ـ گزینه «۴»
۲۱ـ گزینه «۳»	۲۲ـ گزینه «۱»	۲۳ـ گزینه «۲»	۲۴ـ گزینه «۱»	۲۵ـ گزینه «۲»

فصل چهارم: «تحلیل پاسخ حالت دائمی»

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۴»

فصل پنجم: «ابزار گرافیکی تحلیل و طراحی در حوزه زمان»

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۴»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۴»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۴»

فصل ششم: «ابزار گرافیکی تحلیل و طراحی در حوزه فرکانس»

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۲»
۱۶ـ گزینه «۴»	۱۷ـ گزینه «۲»	۱۸ـ گزینه «۱»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۲»
۲۱ـ گزینه «۳»	۲۲ـ گزینه «۴»	۲۳ـ گزینه «۳»	۲۴ـ گزینه «۳»	۲۵ـ گزینه «۲»
۲۶ـ گزینه «۳»	۲۷ـ گزینه «۱»	۲۸ـ گزینه «۴»	۲۹ـ گزینه «۲»	۳۰ـ گزینه «۴»

فصل هفتم: «مسأله کنترل و معرفی ساختارهای مختلف در یک سیستم کنترل خطی»

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۳»	۱۳ـ گزینه «۴»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۳»

فصل هشتم: «روش‌های جبران‌سازی کلاسیک»

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۱»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۳»