مدرسان شریف

فصل اول

«آنالیز ترکیبی»

درسنامه (۱): اصول شمارش

هدف کلی این فصل آشنایی با روش‌های شمارش (آنالیز ترکیبی) است.

انتظار می‌رود که پس از مطالعه این فصل:

۱ـ با مفهوم آنالیز ترکیبی آشنا شده باشید.

۲ـ مفاهیم اصل ضرب، اصل جمع، اصل شمول و عدم شمول را یاد گرفته و تفاوت آن‌ها را در به‌کارگیری مسائل تشخیص دهید.

۳ـ بتوانید جایگشت را توضیح داده و انواع جایگشت‌ها را بشناسید.

۴ـ بتوانید مفاهیم ترتیب و ترکیب را توضیح داده و تفاوت آنها را تشخیص دهید.

۵ـ بتوانید شباهت جایگشت و ترتیب را بیان کنید.

۶ـ روابط مهم ریاضی را که در قالب روابطی در ترکیبات آورده شده‌اند، بیان و اثبات کنید.

۷ـ مدل‌هایی که تحت عنوان چیدمان مهره در جعبه بیان شده‌اند، یاد گرفته، به مفاهیم آن‌ها پی برده و بتوانید آن‌ها را در قالب مثال‌های متنوع به‌کار گیرید.

۸ـ همه مفاهیم جایگشت، ترتیب و ترکیب را به‌صورت مدل مهره و جعبه بیان کنید.

مقدمه

آمار و احتمال به‌عنوان دو علم، مدل‌هایی را در اختیار قرار می‌دهند که برای مطالعه عدم حتمیت‌ها به‌کار می‌رود. رد یا پذیرش یک فرآورده یا محموله، وجود ارتباط بین دو متغیر، انتخاب ۳ نفر از ۱۰ نفر به‌عنوان مدیرعامل، رئیس هیئت مدیره و منشی و ... همه مواردی از وجود عدم قطعیت هستند. بررسی این‌گونه مسائل به شمارش تعداد حالات رخدادها مربوط می‌شود. در حقیقت بسیاری از مسائلی را که ما تحت عنوان عدم حتمیت یا همان احتمال مطرح می‌کنیم می‌توانیم به سادگی با استفاده از اصول و قواعد شمارش (آنالیز ترکیبی) بررسی کنیم. هدف اصلی این فصل بررسی این قواعد شامل اصل ضرب، اصل جمع، جایگشت‌ها، ترکیب و ترتیب است که هریک قواعد خاص خود را داشته و در اینجا با تأکید بیان می‌شود که در نظریه احتمال نقش اساسی ایفا می‌کنند. لذا به این منظور ابتدا هریک از اصول مطرح شده را بیان کرده، قوانین آن‌ها را گفته و مثال‌های متنوعی ارائه خواهد شد.

قوانین شمارش

اصل ضرب (اصل اساسی شمارش): اگر عملی به n_1 طریق و برای هر نتیجه آن، عمل دوم به n_2 طریق و برای هر نتیجه از دو عمل اول و دوم، عمل سومی به n_3 طریق ... و عمل kام به n_k طریق انجام شود. این k عمل با هم به $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ طریق انجام می‌پذیرد. به بیان دیگر فرض کنید عملی در k مرحله متوالی انجام پذیرد و مرحله i ام آن به n_i طریق قابل انجام باشد، در این صورت، عمل گفته شده به $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ طریق می‌تواند انجام شود. لازم است که به این نکته توجه شود که آنچه در اصل ضرب بسیار حائز اهمیت می‌باشد آن است که برای هر **نتیجه** از عمل یا عمل‌های قبلی، عمل دیگری انجام می‌شود.

مثال۱: سکه‌ای را دو بار (یا دو سکه را باهم) و تاسی را یک‌بار پرتاب می‌کنیم. چند حالت ممکن است به‌وجود آید؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» زمانی‌که سکه‌ای دو بار پرتاب می‌شود، این حالات می‌تواند به صورت {(شیر و شیر)، (خط و خط)، (شیر و خط)، (خط و شیر)} ظاهر شود. برای هریک از این چهار عمل فوق، تاس می‌تواند به یکی از شش طریق {۱,۲,۳,۴,۵,۶} ظاهر شود. اکنون طبق اصل ضرب تعداد حالات برابر است با ۲۴ = ۶×۴ .

مثال۲: با ارقام {۱,۲,۳,۴,۵} چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت؟

الف) تکرار ارقام مجاز است.

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۲۵ ۴) ۱۵۰

ب) تکرار ارقام مجاز نیست.

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۰۰

☑ **پاسخ:** یک عدد سه رقمی شامل انتخاب رقم صدگان، رقم دهگان و رقم یکان است. بنابراین:

الف) گزینه «۳» رقم صدگان می‌تواند یکی از ارقام گفته شده یعنی۱ تا ۵ را به ۵ حالت انتخاب کند. **به ازای هر نتیجه این عمل،** مجدداً تعداد ۵ نتیجه برای دهگان و **به ازای هر نتیجه از رقم صدگان و دهگان** همان ۵ حالت برای جایگاه یکان وجود دارد، چراکه تکرار ارقام مجاز است، بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

یکان × دهگان × صدگان

۱۲۵ = ⑤ × ⑤ × ⑤

۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵

ب) گزینه «۳» برای عمل اول (انتخاب رقم صدگان) ۵ حالت ممکن است (۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵) در عمل دوم (انتخاب رقم دهگان) **به‌ازای هر نتیجه از عمل اول** چهار نتیجه ممکن است (چرا که تکرار مجاز نیست و رقمی که در صدگان قرار گرفته است اجازه‌ی تکرار ندارد) عمل سوم (انتخاب رقم یکان) **به‌ازای هر نتیجه از عمل اول و دوم،** سه نتیجه دارد، چرا که ارقامی که در صدگان و دهگان قرار دارند، اجازه تکرار ندارد، بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

یکان × دهگان × صدگان

۶۰ = ③ × ④ × ⑤

به غیر از رقمی که در صدگان و دهگان قرار گرفت — به غیر از رقمی که در صدگان قرار گرفت — ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵

مثال۳: چند عدد سه رقمی وجود دارد؟

۱) ۸۰۰ ۲) ۹۰۰ ۳) ۹۹۹ ۴) ۱۰۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» زمانی‌که ارقامی را مشخص نکرده، به‌طور کلی ارقام {۰,۱,۲,...,۹} را درنظر می‌گیریم. در اینجا چون شرطی گذاشته نشده است، تکرار مجاز است. برای عمل اول (انتخاب عدد صدگان) ۹ انتخاب داریم (اعداد ۱ تا ۹)، سپس **به ازای هر نتیجه از انتخاب اول** برای انتخاب عدد صدگان ۱۰ انتخاب داریم (اعداد ۱ تا ۹ به همراه صفر چراکه تکرار مجاز است)، برای انتخاب رقم یکان نیز **به‌ازای هر نتیجه از آزمایش اول و دوم** مجدداً ۱۰ انتخاب داریم (اعداد ۱ تا ۹ به همراه صفر).

یکان × دهگان × صدگان

۹۰۰ = ⑩ × ⑩ × ⑨

همه ارقام به همراه صفر — همه ارقام به همراه صفر — ارقام ۱ تا ۹ بدون صفر

نکته: در ساخت اعداد در بعضی از مواقع، مسئله شرایطی را بیان می‌کند (مثل فرد یا زوج بودن عدد یا مضرب ۲ ,۴ ,۵ ,...). در این‌صورت ابتدا شرایط خواسته شده را ایجاد می‌کنیم، مثلاً برای زوج و فرد بودن ابتدا باید شرایط یکان را مشخص کنیم و یا برای مضرب ۴ باید ابتدا شرایط یکان و دهگان را بررسی کنیم. لازم به ذکر است که پس از آن ابتدا تعداد حالات ممکن برای سمت چپ‌ترین رقم تعیین و سپس تعداد حالات ارقام میانی شمرده می‌شود.

مثال۴: با ارقام {۰,۱,۲,۳,۴,۵} چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۱) ۴۸ ۲) ۷۵ ۳) ۱۸ ۴) ۹۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا شرط فرد بودن اعداد را اعمال می‌کنیم (انتخاب رقم یکان) که سه حالت برای آن وجود دارد (انتخاب ارقام ۱ یا ۳ یا ۵). سپس در انتخاب عدد صدگان **به‌ازای هر حالت از عمل اول** چهار حالت وجود دارد (همه‌ی ارقام به‌جز صفر و عددی که در یکان قرار گرفت). سپس **به ازای نتایج یکان و صدگان، چهار نتیجه** نیز برای دهگان وجود دارد (همه‌ی ارقام به‌جز عددی که در یکان و عددی که در صدگان قرار گرفت).

$$\overset{\text{صدگان}}{\underbrace{۴}_{\text{همه ارقام به جزء صفر و یکان}}} \times \overset{\text{دهگان}}{\underbrace{۴}_{\text{همه ارقام به جزء یکان و صدگان}}} \times \overset{\text{یکان}}{\underbrace{۳}_{\text{ارقام ۱ یا ۳ یا ۵}}} = ۴۸$$

مثال۵: چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ وجود دارد؟

۱) ۱۲۵۶ ۲) ۱۵۷۶ ۳) ۱۸۰۰ ۴) ۲۰۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» توجه کنید اعدادی مضرب ۵ هستند که رقم یکان آن‌ها صفر یا ۵ باشد. پس برای یکان دو انتخاب (صفر یا ۵) وجود دارد. در رقم هزارگان (عمل دوم) به ازای هریک از انتخاب‌های عمل اول، ۹ انتخاب داریم (توجه کنید در اینجا تکرار مجاز است، زیرا در مسئله شرطی وجود ندارد). اکنون به‌ازای نتایج انتخاب‌های اول و دوم در عمل سوم (انتخاب صدگان) ۱۰ حالت همگن وجود دارد و در انتخاب دهگان نیز به‌ازای نتایج انتخاب‌های اول و دوم و سوم، ۱۰ حالت همگن وجود دارد. به‌جز صفر، ۹ انتخاب (ارقام ۱ تا ۹) برای مرتبه‌ی هزارگان و در رقم صدگان و دهگان ۱۰ انتخاب وجود دارد (علاوه بر ارقام ۱ تا ۹، صفر نیز اضافه می‌شود). بنابراین تعداد اعداد چهار رقمی مضرب <u>۵</u> برابر است با:

$$\overset{\text{هزارگان}}{\underbrace{۹}_{\text{ارقام ۱ تا ۹ بدون صفر}}} \times \overset{\text{صدگان}}{\underbrace{۱۰}_{\text{همه ارقام به همراه صفر}}} \times \overset{\text{دهگان}}{\underbrace{۱۰}_{\text{همه ارقام به همراه صفر}}} \times \overset{\text{یکان}}{\underbrace{۲}_{\text{۰ یا ۵ صفر}}} = ۱۸۰۰$$

مثال۶: با ارقام {۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱} چند عدد شش رقمی که بر عدد ۳ بخش‌پذیر باشد، می‌توان ساخت؟ (تکرار ارقام مجاز نیست.)

۱) ۷۲۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۵۲۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اعدادی بر ۳ بخش‌پذیرند که مجموع ارقام آن‌ها بر ۳ بخش‌پذیر باشند. با کمی دقت متوجه می‌شویم که حاصل جمع ارقام {۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱} بر ۳ بخش‌پذیرند. بنابراین هر ترکیبی از آن‌ها بسازیم، عدد ۶ رقمی حاصل بر ۳ بخش‌پذیر است:

$$\underbrace{۶}_{\text{ارقام عدد ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ باشد.}} \times \underbrace{۵}_{\text{همه ارقام به غیر از رقم قبلی}} \times \underbrace{۴}_{\text{همه ارقام به جز دوتای قبلی}} \times \underbrace{۳}_{\text{همه ارقام به جز سه تای قبلی}} \times \underbrace{۲}_{\text{همه ارقام به جز چهارتای قبلی}} \times \underbrace{۱}_{\text{عدد باقیمانده}} = ۷۲۰$$

مثال۷: با ارقام {۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱} چند عدد چهار رقمی می‌توان ساخت که بر عدد ۴ بخش‌پذیر باشند؟

۱) ۱۲۵ ۲) ۲۱۵ ۳) ۲۵۱ ۴) ۵۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اعدادی بر۴ بخش‌پذیرند که دو رقم سمت راست آن‌ها (یکان و دهگان آن‌ها) بر ۴ بخش‌پذیر باشد. مثلاً سمت راست عدد ۱۲ یا ۲۴ یا .... باشد. بنابراین، ابتدا حالاتی که بخش‌پذیری بر ۴ را ایجاد می‌کنند، شمارش می‌کنیم. باتوجه به ارقام داده شده در صورت مسئله دو رقم اول می‌تواند ۱۲، ۲۴، ۳۲، ۴۴ و ۵۲ باشد (۵ حالت).

اکنون به‌ازای هر نتیجه از حالات گفته شده در هزارگان، ۵ نتیجه و به‌ازای هر نتیجه از دو رقم اول و هزارگان، مجدداً ۵ نتیجه در صدگان خواهیم داشت. بنابراین، تعداد حالات به صورت مقابل می‌باشد:

$$\underbrace{\overset{}{۵}}_{\substack{\text{هزارگان} \\ \text{ارقام ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵}}} \times \underbrace{۵}_{\substack{\text{صدگان} \\ \text{ارقام ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵}}} \times \overbrace{\left.\begin{matrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \\ ۳ & ۲ \\ ۴ & ۴ \\ ۵ & ۲ \end{matrix}\right\}}^{\text{دو رقم اول}} \text{حالت } ۵ = ۵\times۵\times۵ = ۱۲۵$$

درسنامه (۲): خواص ترکیب

روابط مهم در ترکیب

در این قسمت به خواص مهمی از ترکیب اشاره می‌کنیم که بسیار پرکاربرد هستند. اثبات همه آن‌ها به صورت کامل آورده شده است. در اثبـات آن‌هـا نکـات قابـل توجهی وجود دارد که می‌تواند در حل بسیاری از مسائل قابل استفاده باشد.

۱) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

اثبات (۱): انتخاب r شیء از n شیء بدون ترتیب، ترکیب $\left(\binom{n}{r}\right)$ می‌باشد. اما توجه کنید زمانی‌که می‌خواهیم r شیء را انتخـاب کنـیم، مـی‌تـوانیم $n-r$ شیء را از میان n شیء کنار گذاشته و r شیء باقی‌مانده انتخاب‌های ما باشند که این دو روش هر دو یکی هستند، اما روش اول بـه تعـداد حـالات $\binom{n}{r}$ و روش دوم به تعداد حالات $\binom{n}{n-r}$ ممکن است. این نشان می‌دهد که تساوی $\binom{n}{n-r}=\binom{n}{r}$ برقرار است.

۲) $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$

اثبات (۲): می‌توان از n شیء، r شیء را به‌گونه‌ای دیگر نیز انتخاب کرد. فرض کنید در بین n شیء یکی از اشیاء علامت داشته باشد، اکنون در انتخاب r شیء از n شیء یا شیء علامت‌دار را انتخاب می‌کنید $\binom{n-1}{r-1}$، یا این شیء را انتخاب نمی‌کنید $\binom{n-1}{r}$.
با استفاده از اصل جمع اثبات تکمیل می‌شود.

۳) $\binom{n}{r}=\binom{n-2}{r-2}+\binom{n-2}{r}+2\binom{n-2}{r-1}$

اثبات (۳): دقیقاً استدلال مانند حالات (۲) می‌باشد. فرض کنید در بین n شیء، دو شیء علامت‌گذاری شده‌اند. آنگاه شما می‌توانیـد انتخـاب‌هـای زیـر را داشته باشید: هر دو شیء علامت‌گذاری شده را انتخاب کنید $\binom{n-2}{r-2}$، یا هیچ‌کدام را انتخاب نمی‌کنید $\binom{n-2}{r}$، یـا یکـی را انتخـاب کـرده و دیگـری را انتخاب نمی‌کنید $2\binom{n-2}{r-1}$.

۴) $\binom{n}{r}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{n-k}{r-i}$

اثبات (۴): این اصل تعمیم خواص (۲) و (۳) است (k شیء را علامت‌گذاری می‌کنیم).

۵) $\binom{m+n}{k}=\sum_{r=0}^{k}\binom{m}{r}\binom{n}{k-r}$

اثبات (۵): سمت چپ تساوی تعداد حالات تشکیل یک تیم k نفره از بین $(m+n)$ نفر می‌باشد. برای به‌دست آوردن سمت راست، کافی است فرض کنـیم m زن و n مرد داشته باشیم. آنگاه تیم k نفره برحسب انتخاب مرد و زن‌ها برابر است با:

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+\ldots+\binom{m}{k-1}\binom{n}{1}+\binom{m}{k}\binom{n}{0}=\sum_{r=0}^{k}\binom{m}{r}\binom{n}{k-r}$$

تعمیم خاصیت (۵):

$$\binom{m+n+p}{k}=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\binom{p}{k-i-j}$$

$$۶)\ (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

اثبات (۶): همان‌طور که می‌دانیم خاصیت ۶ بسط دوجمله‌ای نیوتن است که می‌توانیم آن را به صورت زیر بیان کنیم:

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)....(a+b)}_{n\ \text{بار}}$$

سمت راست، ضرب n پرانتز در یکدیگر است که شامل تعدادی a، تعدادی b و تعدادی ab می‌باشد که توان‌های آن‌ها مختلف است، لذا می‌توان برای به‌دست آوردن تعداد aها و تعداد bها به صورت مقابل عمل کرد: ابتدا k پرانتز را انتخاب می‌کنیم و از داخل آن‌ها a و از بقیه پرانتزها، b را انتخاب می‌کنیم. بنابراین جمله $\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ ایجاد می‌شود. سپس به‌ازای kهای مختلف از $k=0$ تا $k=n$ همه جملات سمت راست را شمارش می‌کنیم $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$.

می‌توانیم از بسط دوجمله‌ای نتایج زیر را به‌دست آوریم:

$$۷)\ \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}=2^n$$

اثبات (۷): کافی است در بسط دوجمله‌ای به جای a و b در دو طرف عدد ۱ را قرار دهیم:

$$۸)\ \binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+...+n\binom{n}{n}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n(2)^{n-1}$$

اثبات (۸): بسط دوجمله‌ای $(1+x)^n$ را در نظر بگیرید. از دو طرف بسط مشتق گرفته سپس به جای x عدد ۱ را قرار می‌دهیم، به خاصیت (۸) می‌رسیم.

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times x^k \xrightarrow{\text{از دو طرف مشتق می‌گیریم}} n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1} \xrightarrow{\text{به جای } x \text{ عدد ۱ را قرار می‌دهیم}} n\times 2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$$

$$۹)\ \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}...(-1)^n\binom{n}{n}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0$$

اثبات (۹): بسط $(a-b)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ را درنظر بگیرید، کافی است به‌جای a و b در دو طرف، عدد ۱را قرار دهم:

$$۱۰)\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

اثبات (۱۰): باتوجه به اینکه در بسط دوجمله‌ای نیوتن ضرایب جملات از طرفین با یکدیگر مساوی هستند $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$، می‌توان از خاصیت (۵) استفاده کرد.

آنگاه داریم:

$$\binom{n+n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

$$۱۱)\ \sum_{k}^{n}\binom{2n}{2k}=\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}$$

اثبات (۱۱): بسط دوجمله‌ای $(a-b)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}a^k b^{2n-k}$ را درنظر بگیرید. اکنون مجموع ضرایب این بسط را به‌دست می‌آوریم؛ یعنی در دو طرف معادله به جای a و b عدد ۱ را قرار می‌دهیم. آنگاه خواهیم داشت:

$$(1-1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\Rightarrow 0=\text{مجموعه ضرایب جملات زوج و فرد}\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}=\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}$$

$$۱۲)\ k\binom{n}{k}+(k-۱)\binom{n}{k-۱}=n\binom{n}{k-۱}$$

اثبات (۱۲): ترکیب‌ها را در سمت چپ مساوی باز می‌کنیم تا به طرف دیگر مساوی برسیم:

$$k\binom{n}{k}+(k-۱)\binom{n}{k-۱}=k\times\frac{n!}{k!\times(n-k)!}+(k-۱)\times\frac{n!}{(k-۱)!\times(n-k+۱)!}$$

$$=\frac{n!}{(k-۱)!\times(n-k)!}+\frac{n!}{(k-۲)!\times(n-k+۱)!}=\frac{(n-k+۱)+(k-۱)}{(k-۱)!\times(n-k+۱)!}\times n!=\frac{n!}{(k-۱)!\times(n-k+۱)!}\times n=n\binom{n}{k-۱}$$

$$۱۳)\ \binom{n}{k}=\sum_{k=۱}^{r+۱}\binom{n-k}{r-k+۱}$$

اثبات (۱۳): طبق خاصیت ۲، اگر به‌جای k مقادیر مختلف ۱ تا k را قرار دهیم، به خاصیت ۱۳ خواهیم رسید.

$$۱۴)\ r\binom{n}{r}=n\binom{n-۱}{r-۱}$$

اثبات (۱۴): سمت چپ را بسط می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$r\times\frac{n!}{r!\times(n-r)!}=r\times\frac{(n-۱)!}{(r-۱)!\times[(n-۱)-(r-۱)]!}=n\binom{n-۱}{r-۱}$$

درواقع سمت راست این مساوی بیان می‌کند که از بین n نفر، یک نفر را سرگروه انتخاب کنیم که خود n حالت دارد. سپس از افراد باقی‌مانده بقیه گروه را انتخاب کنیم. سمت چپ نیز بیان می‌کند که ابتدا r نفر را از n نفر انتخاب کرده و برای سرگروهی r انتخاب داریم:

$$۱۵)\ \sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}(a-۱)^k=a^n$$

اثبات (۱۵): بسط دوجمله‌ای $\underbrace{((a-۱)+۱)^n}_{a^n}=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}(a-۱)^k ۱^{n-k}$

$$۱۶)\ \sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{k}{k}+\binom{k+۱}{k}+\dots+\binom{n}{k}=\binom{n+۱}{k+۱}$$ (تساوی چوشی ـ چی)

مثال ۴۵: مجموع تعداد اعضای تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $\{۱,۲,\dots,n\}$ کدام است؟

۱) $n۲^n$ ۲) $n۲^{n+۱}$ ۳) $n۲^{n-۱}$ ۴) $(n+۱)۲^{n-۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» **روش اول (روش تستی):** در این روش به ازای $n=۱$ مجموعه داده شده برابر $\{۱\}$ می‌شود. زیرمجموعه‌های آن شامل تنها $\{\ \}$ و $\{۱\}$ است که تعداد اعضا تمام زیرمجموعه‌های آن برابر $۱=۰+۱$ می‌باشد اکنون حاصل گزینه‌ها را به‌ازای $n=۱$ حساب می‌کنیم.

$(۱)\ n۲^n=۱\,(۲)^۱=۲$ $(۲)\ n۲^{n+۱}=۱\times۲^۲=۴$ $(۳)\ n۲^{n-۱}=۱(۲)^۰=۱$ $(۴)\ (n+۱)۲^{n-۱}=۲$

روش دوم: این روش، کلی است و برای هر n برقرار است.

مجموعه $\{۱,۲,..,n\}$ دارای $\binom{n}{۱}$ زیرمجموعه تک‌عضوی است. پس تعداد اعضای زیرمجموعه‌های تک عضوی برابر $۱\binom{n}{۱}$ می‌باشد.

مجموعه $\{۱,..,n\}$ دارای $\binom{n}{۲}$ زیرمجموعه دوعضوی است، پس تعداد اعضای زیرمجموعه‌های دو عضوی برابر $۲\binom{n}{۲}$ می‌باشد.

در نهایت، $\{۱,..,n\}$ دارای $\binom{n}{n}$ زیرمجموعه n عضوی است، لذا تعداد اعضای زیرمجموعه‌های n عضوی برابر $n\binom{n}{n}$ می‌باشد.

درنتیجه حاصل جمع تعداد اعضای تمام زیرمجموعه‌های $\{۱,..,n\}$ برابر است با:

$$\binom{n}{۱}+۲\binom{n}{n}+\dots+n\binom{n}{n}=n۲^{n-۱}$$

فصل دوم

«اصول احتمال و احتمال‌های شرطی»

درسنامه (۱): جبر پیشامدها و قضایای احتمال

مقدمه

در این فصل (بحث احتمال) به کاربرد بخش آنالیز ترکیبی در محاسبه احتمال و روش‌های حل کـردن مسـائل احتمـال کـه در قالـب‌بنـدهای کـاملاً مجـزا تقسیم‌بندی شده‌اند، خواهیم پرداخت. در ابتدای بخش احتمال، دانستن تعاریف و مفاهیم اولیه بسیار مهم و ضروری اسـت. بنـابراین در ابتـدا بـه توضـیح و تفسیر این تعاریف و مفاهیم می‌پردازیم.

آزمایش تصادفی

آزمایشی را درنظر بگیرید که نتیجه آن تا قبل از انجام آن معلوم نباشد و بتوان آن را تحت شرایط یکسان تکرار کرد. چنین آزمایشی را یک آزمایش تصادفی می‌نامند. پرتاب یک سکه، پرتاب یک تاس، پرتاب متوالی یک سکه تا مشاهده یک شیر همه مثال‌هایی از یک آزمایش تصادفی هستند.

فضای نمونه

مجموعه تمام نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه می‌نامند و آن را با نماد S نمایش می‌دهند:

فضای نمونه در پرتاب یک سکه $S=\{H,T\}$

فضای نمونه در پرتاب یک تاس $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

فضای نمونه در پرتاب یک سکه تا مشاهده یک شیر $S=\{H,TH,TTH,...\}$

فضای نمونه درجه حرارت بدن یک بیمار $S=[۳۵,۴۲]$

باتوجه به مثال‌های بالا در این‌جا فضای نمونه را می‌توان به دو حالت کلی گسسته و پیوسته تقسیم کرد.

فضای نمونه گسسته به دو صورت تقسیم می‌شود:

الف ـ فضای نمونه متناهی گسسته: تعداد اعضای آن متناهی است، مانند فضای نمونه در آزمایش پرتاب یک سکه یا در آزمایش پرتاب یک تاس.

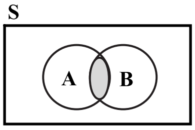
ب ـ فضای نمونه نامتناهی شمارش‌پذیر گسسته: تعداد اعضای آن یک مجموعه نامتناهی اما شمارش‌پذیر است، مانند پرتاب یک سکه تا مشاهده یک شیر.

ج ـ فضای نمونه پیوسته: اعضای آن به‌صورت یک فاصله از اعداد حقیقی یا یک سطح در فضای دوبعدی و یا ... است، مانند درجه حرارت بدن یک بیمـار که یک فاصله بسته بین $[۳۵,۴۲]$ است.

پیشامد

هر زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه را یک پیشامد می‌گویند. پیشامدی که تنها دارای یک عضو باشد، پیشامد ساده و پیشامدی را با تعداد اعضای بیشتر از یک عضو، پیشامد مرکب گوییم. اگر پیشامدی شامل هیچ عضوی نباشد، آن را پیشامد محال یا تهی و پیشامدی را که شامل تمام اعضای فضای نمونه S باشد، پیشامد حتمی می‌نامند.

اعمال روی پیشامدها

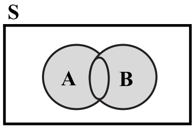


$A\cap B$

در اینجا قوانینی خاص مانند اجتماع و اشتراک و ..... بر پیشامدها تعریف می‌کنیم.

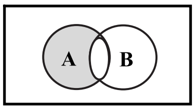
اشتراک دو پیشامد: اگر A و B دو پیشـامد دلخـواه باشـند، $A\cap B$ را اشـتراک دو پیشـامد A و B می‌گوییم و وقوع $A\cap B$ به معنای وقوع هم‌زمان هر دو پیشامد A و B است.

اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \bigcup B$ را اجتماع دو پیشامد A و B می‌گوییم و وقوع $A \bigcup B$ به معنای وقوع حداقل یکی از دو پیشامد A یا B است.



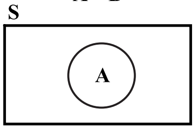
$A \bigcup B$

تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ را تفاضل پیشامد B از A می‌گوییم. وقوع $A - B$ به معنای وقوع "فقط A و نه B " است.



$A - B$

متمم پیشامد: پیشامد A' را متمم پیشامد A می‌گوییم. وقوع A' به معنای عدم وقوع پیشامد A است.



متمم $A(A')$

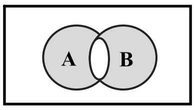
پیشامدهای ناسازگار: پیشامدهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ را پیشامدهای ناسازگار می‌گوییم، اگر وقوع هم‌زمان هر دو پیشامد غیرممکن باشد.

$$A_i \bigcap A_j = \phi \; ; \; i \neq j$$

تفاضل متقارن: پیشامد $A \Delta B$ را پیشامد تفاضل متقارن می‌نامند و وقوع آن به مفهوم رخ دادن فقط یکی از دو پیشامد است.

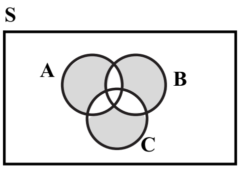
۱) $A \Delta B = (A - B) \bigcup (B - A)$

۲) $A \Delta B = (A \bigcup B) - (A \bigcap B)$



$A \Delta B$

مثال۱: در نمودار ون قسمت هاشورخورده چه پیشامدی را نشان می‌دهد؟



۱) رخداد A یا B یا C

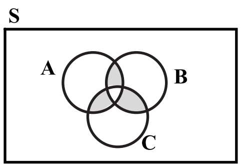
۲) رخداد دقیقاً یکی از پیشامدهای A، B و C

۳) رخداد هر سه پیشامد هم‌زمان

۴) رخداد حداکثر یک پیشامد

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» این پیشامد، پیشامد رخ دادن فقط یکی از ۳ پیشامد است که همان تفاضل متقارن ۳ پیشامد می‌باشد، زیرا اگر A رخ دهد، B و C رخ نمی‌دهد، اگر B رخ دهد، A و C رخ نمی‌دهند و اگر C رخ دهد، A و B رخ نمی‌دهند.

مثال۲: در نمودار ون مقدار هاشور خورده چه پیشامدی را نشان می‌دهد؟



۱) رخ دادن حداقل یکی از سه پیشامد
۲) رخ دادن هر سه پیشامد
۳) هیچ‌یک از پیشامدها رخ ندهد
۴) دقیقاً دو تا از پیشامدها رخ دهد

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» همان‌طورکه از شکل مشخص است ناحیه‌ی هاشورخورده اشتراک دو به دو پیشامدها و نه اشتراک هر سه می‌باشد، بنابراین این جمله یعنی دو پیشامدA و B رخ دهد و C رخ ندهد یا A و C رخ دهد و B رخ ندهد یا B و C رخ دهد و A رخ ندهد و این به مفهوم رخ دادن دقیقاً دو تا از سه پیشامد است.

احتمال

احتمال تابعی است حقیقی که از فضای نمونه آزمایش تصادفی هر عضو را به زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی در فاصله بسته $[0,1]$ نسبت می‌دهد. در گذشته این نسبت دادن به کمک تعریف فراوانی نسبی بود. درواقع این تعریف برای به‌دست آوردن احتمال وقوع یک پیشامد مانند A نسبت تعداد دفعاتی از انجام آزمایش که در آن، پیشامد A رخ دهد را به کل تعداد دفعات آزمایش، n، تقسیم می‌کند و سپس n به سمت بی‌نهایت میل داده می‌شود.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

اگرچه این تعریف صحیح است، اما معایبی نیز بر آن وارد شد که با چه اطمینانی می‌توان گفت حد به‌دست آمده بالا یک مقدار ثابت است و همچنین در صورت تکرار آزمایش تصادفی در شرایط یکسان، آیا حد به‌دست آمده جدید با مقدار حد قبلی برابر است؟

بسیاری از دانشمندان علم احتمال پاسخ به این سؤال را بدین صورت بیان کردند که همگرایی مقدار $\frac{n(A)}{n}$ می‌تواند یک فرض یا یک اصل باشد. ولی به نظر می‌رسد که این فرض یک فرض پیچیده باشد و ممکن است فقط امیدوار باشیم چنین حدی وجود دارد، زیرا هیچ‌گونه شواهد قبلی مبنی بر حد وجود ندارد. لذا به نظر می‌رسد برای بررسی دقیق‌تر، ابتدا باید اصولی دیگر را درباره احتمال بیان داشت و سپس ثابت شود که تعریف احتمال به صورت حد فراوانی نسبی وجود دارد.

تابع احتمال

احتمال را می‌توان به‌صورت یک تابع تعریف کرد. تابع احتمال، تابعی از فضای نمونه S به داخل مجموعه اعداد حقیقی R به صورت $P:S\to R$ است. به عبارت دیگر، احتمال تابعی مانند P است که به هر پیشامد A از فضای نمونه S عدد حقیقی $P(A)$ را به‌گونه‌ای نسبت می‌دهد که در سه اصل موضوع (اصول کلوموگروف) زیر صدق کند:

۱) $P(S)=۱$

۲) برای هر پیشامد A در S، $P(A)\ge ۰$

۳) اگر $A_۱,A_۲,...$ دنباله‌ای نامتناهی از پیشامدهای ناسازگار باشند، آنگاه: $$P\left(\bigcup_{i=۱}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=۱}^{\infty}P(A_i)$$

پس از معرفی تابع احتمال و اصول احتمال نتایج زیر حاصل می‌شود که بسیار مهم و پرکاربرد هستند:

۱) اگر A یک پیشامد و A' متمم آن باشد، آنگاه: $$P(A')=۱-P(A)$$

اثبات: A و A' ناسازگارند بنابراین: $P(S)=۱\Rightarrow P(A\cup A')=P(A)+P(A')=۱$

بنابراین در پاره‌ای از مواقع بهتر است برای محاسبه‌ی احتمال رخداد یک پیشامد، متمم آن را حساب کرده و از عدد ۱ کم کنید.

مثال۳: فرض کنید سکه‌ای را ۵ بار پرتاب می‌کنیم، احتمال رخ دادن حداقل یک بار خط کدام است؟

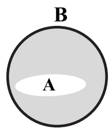
۱) $\frac{۱}{۳۲}$ ۲) $\frac{۵}{۳۲}$ ۳) $\frac{۳۱}{۳۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر A پیشامد رخداد حداقل یک‌بار خط باشد، آنگاه A' پیشامد رخ دادن متمم آن، پیشامد مشاهده هیچ بار خط می‌باشد. یعنی هر ۵ بار شیر باشدکه می‌دانیم احتمال هر بار شیر $\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین:

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^۵=۱-\frac{۱}{۳۲}=\frac{۳۱}{۳۲}$$

---

۲) اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشد، به‌طوری که $A\subset B$، آنگاه:



$$P(A)\le P(B)$$

اثبات: باتوجه به اینکه $A\subset B$ می‌باشد:

$$B=(A\cap B)\cup(A'\cap B)\xrightarrow{A\subset B}B=A\cup(A'\cap B)\xrightarrow[\text{طبق اصل سوم}]{A'\cap B,A\ \text{ناسازگارند}}P(B)=P(A)+P(A'\cap B)\Rightarrow P(A)\le P(B)$$

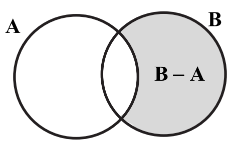
۳) اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند و $A\subset B$، آنگاه: $$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

اثبات:

$$A\subset B\Rightarrow\begin{cases}(B-A)\cup A=B\\ (B-A)\cap A=\varnothing\end{cases}\xrightarrow{\text{طبق اصل سوم کلوموگروف}}P(B)=P\big((B-A)\cup A\big)=P(B-A)+P(A)$$

$$\Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$$

۴) اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند، آنگاه:

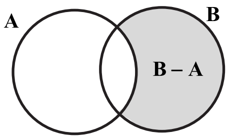


$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$$

اثبات: به شکل روبرو توجه کنید:

$$B-A=B-(B\cap A)\xrightarrow[\text{طبق خاصیت قبل}]{(A\cap B)\subset B}P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$$

۵) اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند، آنگاه:



$$\mathbf{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

اثبات: به شکل روبه‌رو توجه کنید:

$$\begin{cases} A\cup B=A\cup(B-A)\xrightarrow{\text{طبق اصل سوم احتمال}}P(A\cup B)=P(A)+P(B-A) \\ A\cap(B-A)=\varnothing\xrightarrow{\text{طبق خاصیت ۴}}P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{cases}$$

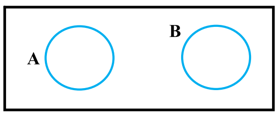
مثال۴: اگر A و B دو پیشامد غیرتهی و ناسازگار باشند، کدام‌یک از روابط زیر همواره صحیح است؟
(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۹۳)

۱) $P(A^c\cap B)=1-P(A)+P(B)$ ۲) $P(A\cap B^c)=1+P(A)-P(B)$

۳) $P[(A^c\cap B)\cup(A\cap B^c)]=P(A)+P(B)$ ۴) $P(A^c\cap B^c)=1-P(A)-P(B)+P(A)\times P(B)$

پاسخ: گزینه «۳» گزینه‌ها را به‌ترتیب بررسی می‌کنیم:

چون A و B ناسازگارند



$1)\ P(A^c\cap B)=P(B-A)=P(B)$

$2)\ P(A\cap B^c)=P(A-B)=P(A)$ (A و B ناسازگارند)

$3)\ P((A^c\cap B)\cup(A\cap B^c))=P((A-B)\cup(B-A))$

$=P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-2\underbrace{P(A\cap B)}_{0}=P(A)+P(B)$

$$4)\ P(A^c\cap B^c)\overset{\text{دمورگان}}{=\!=\!=}P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{0})=P(A)+P(B)$$

مثال ۵: فرض کنید احتمال قبولی علی در کنکور امسال ۰/۷ و احتمال قبولی دوست او ۰/۹ باشد و احتمال قبولی هر دو آن‌ها در کنکور ۰/۶۳ باشد. احتمال قبولی حداقل یکی از آن‌ها در کنکور چقدر است؟

۱) ۰/۹۰ ۲) ۰/۹۵ ۳) ۰/۹۷ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۳» طبق نتیجه گفته شده در بالا، احتمال حداقل وقوع یکی از پیشامدها به مفهوم $P(A\cup B)$ است.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/7+0/9-0/63=0/97$$

تعمیم خاصیت (۵): برای n پیشامد تعریف می‌شود (با اصل شمول و عدم شمول مقایسه کنید):

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i_1<i_2}P(A_{i_1}\cap A_{i_2})+\dots+(-1)^n\sum_{i_1<i_2<\dots<in}P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\dots\cap A_{i_n})+\dots+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\dots\cap A_n)$$

۶) اگر $A_1,A_2,\dots,A_n$، n پیشامد دلخواه باشند، آنگاه:

$$\mathbf{P(A_1\cup A_2\cup A_3\dots\cup A_n)\le P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)}$$ **(نامساوی بول)**

اثبات: به کمک استقرار خواهیم داشت:

ابتدا برای $n=2$ شروع می‌کنیم: $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$

برای n:

$$P(A_1\cup A_2\dots\cup A_n\cup A_{n+1})\le P(A_1\cup A_2\dots\cup A_n)+P(A_{n+1})\le\sum_{i=1}^{n}P(E_i)+P(E_{n+1})=\sum_{i=1}^{n+1}P(A_i)\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n}E_i)\le\sum_{i=1}^{n}P(E_i)$$

۷) اگر $A_1,A_2,\dots,A_n$، n پیشامد دلخواه باشند، آنگاه:

$$\mathbf{P(A_1\cap A_2\dots\cap A_n)\ge P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)-(n-1)}$$ **(نامساوی بون فرونی)**

اثبات: توجه کنید که طبق قانون (دمورگان) داریم:

$$(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)'=(\bigcup_{i=1}^{n}A_i')$$

$$P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=1-P[(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)']=1-P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i')$$

مدرسان شریف

فصل سوم

«متغیرهای تصادفی»

درسنامه (۱): توزیع احتمالات انواع متغیرهای تصادفی

مقدمه

برای مفهوم درستی از متغیر تصادفی، یک آزمایش تصادفی شامل پرتاب ۳ بار یک سکه را درنظر بگیرید. در این آزمایش، فضای نمونه‌ای به‌وجود آمده به‌صورت:

$$S = \{(H\ H\ H), (H\ H\ T), (H\ T\ H), (T\ H\ H), (T\ T\ H), (T\ H\ T), (H\ T\ T), (T\ T\ T)\}$$

می‌باشد که در اینجا H نماد ظاهر شدن شیر و T نماد رخ دادن خط می‌باشد. فرض کنید در این آزمایش تصادفی، تعداد شیرهای رخ داده مورد توجه باشد. در این آزمایش تصادفی، با توجه به اعضای فضای نمونه‌ای تعداد شیرها می‌تواند برابر با صفر (برای عضو(T,T,T)، برابر با ۱ (برای اعضـای(T,T,H) یـا (T,H,T) یا (H,T,T))، برابر با ۲ (برای اعضای(H,H,T) یا (H,T,H) یا (T,H,H)) یا برابر با ۳ (برای عضو(H,H,H)) باشد؛ بنابراین باتوجـه بـه مطلب گفتـه شـده می‌توانیم در اینجا تابعی مانند X با دامنه فضای نمونه"S" و برد $\{۰,۱,۲,۳\}$ تعریف کنیم که به هر عضـو فضـای نمونـه‌ای یـک عضـو از $\{۰,۱,۲,۳\}$ را نسـبت می‌دهد. به‌عنوان مثال $X(H,T,T)=۱$ و $X(H,H,T)=۲$ می‌باشد.

فضای نمونه		مجموعه اعداد
(H H H)	تعداد شیر ظاهر شده →	۳
(H H T) (H T H) (T H H)	تعداد شیر ظاهر شده →	۲
(T T H) (T H T) (H T T)	تعداد شیر ظاهر شده →	۱
(T T T)	تعداد شیر ظاهر شده →	۰

اکنون باتوجه به مطالب گفته شده، از آنجا که آزمایش تصادفی است، مقدار X نیز قبل از انجام آزمایش معلوم نبوده و عددی تصـادفی محسـوب مـی‌شـود؛ بنابراین مقدار X به نتیجه آزمایش تصادفی بستگی دارد.

انواع متغیرهای تصادفی

متغیر تصادفی را که مجموعه مقادیر آن شمارش‌پذیر باشد، **متغیر تصادفی گسسته** و متغیر تصادفی را که مجموعه مقادیر آن یک فاصلـه عـددی یـا اجتمـاع چند فاصله عددی باشد، **متغیر تصادفی پیوسته** و متغیری را که بخشی از آن شمارش‌پذیر و بخشی دیگر از آن یک فاصله عددی یا اجتماع چند فاصله عددی باشد؛ **متغیر تصادفی آمیخته** می‌گویند.

متغیرهای تصادفی زیر از نوع گسسته‌اند:

الف ـ در پرتاب دو تاس، متغیر تصادفی X می‌تواند نشان‌دهنده تفاضل دو عدد ظاهر شده باشد.

ب ـ در پرتاب ۲ بار یک سکه متغیر تصادفی X می‌تواند نشان‌دهنده تعداد شیرها باشد.

متغیرهای تصادفی زیر از نوع پیوسته‌اند:

الف ـ در فاصله $[۰,a]$ نقطه‌ای را به تصادف انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی X را برابر با نقطه انتخاب شده درنظر می‌گیریم.

ب ـ طول عمر یک قطعه الکتریکی.

متغیرهای تصادفی گسسته (توزیع احتمالات گسسته)

❖ **تعریف:** تابعی که به هریک از اعضای برد متغیر تصادفی یا زیرمجموعه‌ای از آن، عددی بین $[0,1]$ را نسبت می‌دهد، تابع توزیع احتمال نامیده می‌شود.

ویژگی‌ها: تابع $f_X(x)=P(X=x)$ را تابع جرم احتمال یا به اختصار، تابع احتمال برای متغیر تصادفی گسسته X می‌گویند، هرگاه:

الف ـ برای هر $x\in R$ داشته باشیم که $f_X(x)\geq 0$

ب ـ $\sum_{x\in R} f_X(x)=1$

توجه کنید که تابع احتمال جدول یا فرمولی است که تمام مقادیر متغیر تصادفی را همراه با احتمال‌های مربوطه نشان می‌دهد.

برای محاسبه احتمال پیشامد $(X\in A)$ که A زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است، به‌صورت روبه‌رو عمل می‌کنیم: $P(X\in A)=\sum_{x\in A} f_X(x)$

مثال۱: اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $k=1,2,3,\cdots$, $P[X=k]=c\frac{(1-p)^k}{k}$ باشد، مقدار c کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $-\frac{1}{\mathrm{Log}(1-p)}$　۲) $-\frac{1}{\mathrm{Log}(p)}$　۳) $\frac{-p}{\mathrm{Log}(p)}$　۴) $\frac{-p}{\mathrm{Log}(1-p)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر $f_X(x)$ تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته باشد، آنگاه $\sum_x^{\infty} f_X(x)=1$. چون $f_X=\frac{c(1-p)^k}{k}$ بنابراین:

$$1=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}c\frac{(1-p)^k}{k}=c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-p)^k}{k}$$

برای محاسبه مقدار این سری از مشتق‌گیری استفاده می‌شود. دقت شود که $\frac{-1}{p}$ مجموع مشتق سری می‌باشد، بنابراین مجموع سری برابر است با $\int\frac{-1}{p}$

$$\frac{\partial}{\partial p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-p)^k}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}-(1-p)^{k-1}=\frac{-1}{1-(1-p)}=\frac{-1}{p}\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-p)^k}{k}=\int-\frac{1}{p}\,dp=-\mathrm{Ln}p$$

$$1=C(-\mathrm{Ln}p)\Rightarrow C=\frac{-1}{\mathrm{Ln}p}$$

توجه شود که $\sum_{x=1}^{\infty}-(1-p)^{k-1}$ یک سری هندسی با قدر نسبت $(1-p)$ می‌باشد که مجموع آن برابر است با: $\frac{\text{جمله اول}}{1-\text{(قدر نسبت)}}=\frac{-1}{1-(1-p)}=\frac{-1}{p}$

تذکر: اگر سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ در فاصله $|x-x_0|<R$ برابر تابع $f(x)$ باشد، می‌توان از آن جمله به جمله مشتق یا انتگرال گرفت، بدون آن‌که شعاع همگرایی عوض شود. درواقع اگر $|x-x_0|<R$ ، $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ آنگاه برای $|x-x_0|<R$:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}\ ,\ \int_{x_0}^{x}f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

مثال ۲: دو تاس سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر X نمایانگر مجموع دو خال مشاهده شده باشد، تابع احتمال X کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) $f(x)=\frac{6-|x-7|}{36}\ ,\ x=2,\ldots,12$　۲) $f(x)=\frac{|x-7|-5}{36}\ ,\ x=2,\ldots,12$

۳) $f(x)=\frac{|x-7|}{36}\ ,\ x=2,\ldots,12$　۴) $f(x)=\frac{6+|x-7|}{36}\ ,\ x=2,\ldots,12$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

X: مجموع دو خال مشاهده شده $\Rightarrow x=2,3,4,\ldots,12$

$$P(X=2)=\frac{1}{36}\Rightarrow P(X=3)=\frac{2}{36}\Rightarrow P(X=4)=\frac{3}{36}\ ,\ldots,P(X=12)=\frac{1}{36}$$

مثال۳: فرض کنید X دارای تابع احتمال $x = ۱,۲,...,۵$ ، $f(x) = cx^۲$. مقدار $P(X \le ۲)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $۵c$ ۴) $۱۱c$

پاسخ: گزینه «۱» مقدار c را به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{x=۱}^{۵} f(x) = ۱ \Rightarrow c(۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ + ۵^۲) = ۱ \Rightarrow c \times ۵۵ = ۱ \Rightarrow c = \frac{۱}{۵۵}$$

$$P(X \le ۲) = P(X = ۱) + P(X = ۲) = \frac{۱}{۵۵} \times ۱ + \frac{۱}{۵۵} \times ۴ = \frac{۱}{۱۱}$$

مثال۴: شخصی می‌خواهد به دوست خود تلفن کند، ولی او در اولین رقم سمت چپ این شماره شک دارد و دقیقاً نمی‌داند در بین چهار رقم ۵ و ۶ و ۷ و ۸ کدام‌یک اولین رقم سمت چپ این شماره است. او این ارقام را یکی پس از دیگری امتحان می‌کند تا موفق شود. اگر X تعداد دفعاتی باشد که برای تلفن زدن (تا موفقیت) امتحان شده‌اند، تابع احتمال X کدام است؟

۱) $P(X = x) = \binom{۴}{x} . (\frac{۱}{۴})^{۴x} \quad x = ۱,۲,۳,۴$

۲) $P(X = x) = (\frac{۳}{۴})^{x-۱} (\frac{۱}{۴}) \quad x = ۱,۲,۳,۴$

۳) $P(X = x) = \frac{۱}{۴} \quad x = ۱,۲,۳,۴$

۴) هیچ‌کدام

پاسخ: گزینه «۳» توجه کنید که X مقادیر ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را اختیار می‌کند، زیرا X تعداد دفعاتی است که برای تلفن زدن تا موفقیت امتحان شده‌اند. احتمال اینکه $X = ۱$ باشد، یعنی این شخص در دفعه اول موفق شود برابر با $\frac{۱}{۴}$ است.

احتمال $X = ۲$ به معنای آن است که او دفعه اول موفق نشده (با احتمال $\frac{۳}{۴}$) و دفعه دوم موفق شود (با احتمال $\frac{۱}{۳}$) که برابر با $\frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۴}$ است و به همین ترتیب: (توجه شود که در هر بار شکست آن عدد کنار گذاشته می‌شود).

$$P(X = ۳) = \frac{۳}{۴} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴} \quad , \quad P(X = ۴) = \frac{۳}{۴} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} \times ۱ = \frac{۱}{۴}$$

مثال۵: یک سکه سالم آنقدر پرتاب می‌شود تا هر دو روی سکه (شیر و خط) حداقل ۲ بار مشاهده شود. اگر X نمایانگر تعداد پرتاب‌های لازم باشد، تابع احتمال X کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $f(x) = \frac{x}{۲^x} \quad x = ۴,۵,\cdots$

۲) $f(x) = \frac{x-۱}{۲^x} \quad x = ۴,۵,\cdots$

۳) $f(x) = \frac{x}{۲^{x-۱}} \quad x = ۴,۵,\cdots$

۴) $f(x) = \frac{x-۱}{۲^{x-۱}} \quad x = ۴,۵,\cdots$

پاسخ: گزینه «۴» برای اینکه هر دو روی سکه حداقل ۲ بار مشاهده شوند، کمترین تعداد آزمایش لازم ۴ است. بنابراین $x = ۴,۵,\dots$. برای اینکه آزمایش در زمانی که هر ۲ روی سکه حداقل ۲ بار مشاهده شده‌اند تمام شود، لازم است که از x پرتاب، نتیجه آخرین پرتاب و یکی از $x-۱$ پرتاب قبلی شیر و سایر پرتاب‌ها خط باشد.
یا اینکه نتیجه آخرین پرتاب و یکی از $x-۱$ پرتاب قبلی خط و سایر پرتاب‌ها شیر باشد. بنابراین:

$$P(X = x) = \binom{x-۱}{۱} (\frac{۱}{۲})^x + \binom{x-۱}{۱} (\frac{۱}{۲})^x = \frac{۲(x-۱)}{۲^x} = \frac{x-۱}{۲^{x-۱}} \quad x = ۴,۵,\cdots$$

مثال۶: از بین N کوپن با شماره‌های N و ... ۳ و ۲ و ۱، تعداد n کوپن به تصادف انتخاب می‌شوند. اگر متغیر تصادفی X برابر مینیمم اعداد به‌دست آمده در نمونه باشد، تابع احتمال X کدام است؟

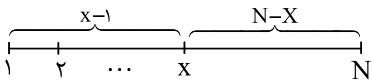
۱) $\frac{\binom{N-X}{n-۱}}{\binom{N}{n}}; ۱ \le x \le N-n+۱$

۲) $\frac{x}{n}; ۱ \le x \le N$

۳) $\frac{x}{n}; ۱ \le x \le n$

۴) $\frac{\binom{N-۱}{n-x}}{\binom{N}{n}}; ۱ \le x \le n$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تعداد n کوپن را می‌توان به $\binom{N}{n}$ طریق انتخاب کرد. همچنین با توجه به شکل زیر برای آنکه در نمونه n تایی x مینیمم اعداد باشد، لازم است تعداد $(n-۱)$ کوپن از $N-x$ کوپن آخر انتخاب شده و یک کوپن نیز برای x انتخاب شود و این عمل به $\binom{۱}{۱}\binom{N-x}{n-۱}$ طریق انجام گیرد.



همچنین $N-x \ge n-۱$ در نتیجه $۱ \le x \le N-n+۱$؛ بنابراین:

$$۱ \le x \le N-n+۱ \quad ; \quad P(X=x)=\frac{\binom{N-x}{n-۱}}{\binom{N}{n}}$$

مثال۷: در مثال بالا اگر متغیر تصادفی X برابر با ماکسیمم اعداد به‌دست آمده باشد، تابع احتمال آن کدام است؟

۱) $\dfrac{\binom{N-۱}{X-۱}}{\binom{N}{n}}$ ۲) $\dfrac{\binom{N+X}{n-۱}}{\binom{N}{n}}$ ۳) $\dfrac{\binom{x-۱}{n-۱}}{\binom{N}{n}}$ ۴) $\dfrac{\binom{N-X-۱}{n-۱}}{\binom{N}{n}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» زمانی که می‌خواهیم متغیر تصادفی X ماکزیمم اعداد باشد، ابتدا عدد مورد نظر را به یک حالت انتخاب می‌کنیم $\binom{۱}{۱}$، سپس $(n-۱)$ انتخاب بعدی را باید از اعدادی انتخاب کنیم که از عدد x کوچک‌تر باشد، بنابراین:

$$P(X=x)=\frac{\binom{۱}{۱}\binom{x-۱}{n-۱}}{\binom{N}{n}}$$

مثال۸: اگر متغیر تصادفی گسسته X از تابع توزیع احتمال $x=۱,۲,۳,\ldots$, $P(X=x)=\frac{۱}{۲^x}$ پیروی کند، آنگاه $P(|X-۲|>۲)$ برابر است با:

(ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$P(|X-۲|>۲)=P(X-۲>۲)+P(X-۲<-۲)=P(X>۴)+P(X<۰)=P(X\ge ۵)=\sum_{x=۵}^{\infty}\frac{۱}{۲^x}=\frac{(\frac{۱}{۲})^۵}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۱۶}$$

تذکر: چون x برای اعداد مثبت تعریف شده است، پس $P(X<۰)=۰$

نکته: سری $\sum_{x=k}^{\infty}a^x$ را سری هندسی گویند و درصورتی که $|a|<۱$ سری همگراست با مجموع $\frac{a^k}{۱-a}$.

مثال۹: تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت $P_X(x)=k(x+۱)(\frac{۲}{۳})^x\,; x=۱,۲,\ldots$ است. احتمال این‌که X عددی زوج باشد، کدام گزینه زیر است؟(دکتری ۹۲)

۱) ۰/۴۶ ۲) ۰/۲۳ ۳) ۰/۶۹ ۴) ۰/۹۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا مقدار k را به‌دست می‌آوریم. جمع احتمالات برابر با ۱ است:

$$\sum P(X=x)=۱ \Rightarrow k(\frac{۲}{۳}\sum_{x=۱}^{\infty}x(\frac{۲}{۳})^{x-۱}+\sum_{x=۱}^{\infty}(\frac{۲}{۳})^x)=۱$$

$$\xrightarrow{\text{تصاعد هندسی}} k(\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{(\frac{۱}{۳})^۲}+\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۳}})=۱ \Rightarrow k(۶+۲)=۸k=۱ \Rightarrow k=\frac{۱}{۸}$$

اکنون احتمال مقادیر زوج را به‌دست می‌آوریم:

$$P(X=۲m)=\frac{۱}{۲}\sum_{m=۱}^{\infty}(۲m+۱)(\frac{۲}{۳})^{۲m}=\frac{۱}{۸}\left[۲\times\frac{۴}{۹}\sum_{m=۱}^{\infty}m(\frac{۴}{۹})^{m-۱}+\sum_{m=۱}^{\infty}(\frac{۴}{۹})^m\right]=\frac{۱}{۸}\left[\frac{۸}{۹}\times\frac{۱}{(\frac{۵}{۹})^۲}+\frac{\frac{۴}{۹}}{\frac{۵}{۹}}\right]=۰/۴۶$$

مثال۹۰: فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل با تابع چگالی احتمال‌های زیر باشند، اگر $X_{(1)}=\min\{X_1,X_2\}$ مقدار $P(X_{(1)}=x_1)$ کدام است؟

$f_{X_2}(x)=2e^{-2x}, x>0$ و $f_{X_1}(x)=e^{-x}, x>0$ (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) 0 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون X_1 و X_2 مستقل‌اند، بنابراین داریم:

$$f(x_1,x_2)=f_{x_1}(x_1).f_{x_2}(x_2)=e^{-x_1}(2e^{-2x_2})=2e^{-x_1}e^{-2x_2}, x_1>0, x_2>0$$

از طرفی:

$$X_{(1)}=\min\{X_1,X_2\}\Rightarrow X_{(1)}=X_1\le X_2$$

اکنون حاصل $P(X_{(1)}=x_1)$ برابر است با:

$$P(X_{(1)}=x_1)=P(X_1\le X_2)=\int_0^\infty\int_0^{x_2}2e^{-x_1}e^{-2x_2}dx_1dx_2=-2\int_0^\infty(e^{-2x_2}e^{-x_1})|_0^{x_2}dx_2=-2\int_0^{+\infty}e^{-2x_2}(e^{-x_2}-e^0)dx_2$$

$$=-2\int_0^{+\infty}(e^{-3x_2}-e^{-2x_2})dx_2=2(\frac{1}{3}e^{-3x_2}-\frac{1}{2}e^{-2x_2})|_0^\infty=2\{(\underbrace{\cancel{\frac{1}{3}e^{-\infty}}}_{0}-\underbrace{\cancel{\frac{1}{2}e^{-\infty}}}_{0})-(\frac{1}{3}e^0-\frac{1}{2}e^0)\}=2(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2})=\frac{1}{3}$$

قضیه: متغیرهای $X_1,\dots,X_n$ از هم مستقل‌اند اگر و تنها اگر تابع چگالی توأم آن‌ها را بتوان به‌صورت حاصل‌ضرب n تابع نامنفی مجزا تفکیک کرد.

مثال۹۱: اگر X و Y دارای تابع توزیع توأم $F(x,y)=(1-e^{-x^2})(1-e^{-y^2}), x>0, y>0$ باشند، مقدار $F_{\frac{X}{Y}}(2)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) ۱ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق تعریف تابع توزیع تجمعی، $F_{\frac{X}{Y}}(2)$ برابر است با:

$$F_{\frac{X}{Y}}(2)=P(\frac{X}{Y}\le 2)=P(X\le 2y)$$

برای محاسبه $P(X\le 2y)$، ابتدا به کمک رابطه $F(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}$ تابع چگالی توأم $f(x,y)$ را حساب می‌کنیم.

$$F(x,y)=(1-e^{-x^2})(1-e^{-y^2})\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial y}=(1-e^{-x^2})(2ye^{-y^2})\Rightarrow\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}=(2xe^{-x^2})(2ye^{-y^2})=f(x,y)\quad,\quad x>0\quad,\quad y>0$$

درنتیجه:

$$F_{\frac{X}{Y}}(2)=P(\frac{X}{Y}\le 2)=P(X\le 2Y)=\int_0^\infty\int_0^{2y}4xye^{-y^2}e^{-x^2}dxdy=\int_0^\infty-2ye^{-y^2}e^{-x^2}|_0^{2y}dy=\int_0^\infty-2ye^{-y^2}(e^{-4y^2}-e^0)dy$$

$$=\int_0^\infty(-2ye^{-5y^2}+2ye^{-y^2})dy=\frac{1}{5}e^{-5y^2}-e^{-y^2}|_0^\infty=(\frac{1}{5}e^{-\infty}-e^{-\infty})-(\frac{1}{5}e^0-e^0)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

مثال۹۲: فرض کنید X و Y و Z سه متغیر تصادفی با تابع چگالی توأم به‌صورت $f_{X,Y,Z}(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}(y-1)^2-\sqrt{2}z}$ $x,y\in\mathbb{R}, z>0$ باشند. آیا X, Y و Z متقابلاً مستقل‌اند؟

۱) بله ۲) خیر

۳) بستگی به دامنه متغیرها دارد. ۴) با اطلاعات مسئله نمی‌توان پاسخ گفت.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» به راحتی می‌توانیم تابع چگالی توأم را به سه تابع نامنفی و مجزا از x و y و z تجزیه کنیم:

$$f(x,y,z)=(\underbrace{\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\ge 0})(\underbrace{e^{-\frac{1}{4}(y-1)^2}}_{\ge 0})(\underbrace{e^{-\sqrt{2}z}}_{\ge 0})=g_1(x)\cdot g_2(y)\cdot g_3(z)\quad x,y\in R, z>0$$

بنابراین X و Y و Z مستقل‌اند.

قضیه گفته شده در بالا روش بسیار مناسبی برای استقلال متغیرهای تصادفی ارائه می‌دهد.

مدرسان شریف

فصل چهارم

«امیدریاضی و واریانس»

درسنامه (۱): امیدریاضی

مفهوم امیدریاضی و خواص آن

فرض کنید کارخانه‌ای ۴ نوع کالای درجه ۱ و ۲ و ۳ و ۴ تولید می‌کند که هرکدام دارای سود خالص برابر بـا x_1 و x_2 و x_3 و x_4 تومـان بـرای مـدیریت کارخانه دارد. اگر در روز معینی تعداد کالای درجه ۱ برابر با F_1، تعداد کالای درجه ۲ برابر با F_2، تعداد کالای درجه ۳ برابر با F_3 و F_4 تعداد کالای درجـه ۴ باشد واضح است که سود خالص کل در این روز خاص برابر با $\sum_{i=1}^{4} F_i x_i = F_1x_1+F_2x_2+F_3x_3+F_4x_4$ خواهد بود و متوسط سود تولیـد هـر کـالا در این روز خاص برابر خواهد بود با:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} F_i x_i = \sum_{i=1}^{4} x_i\left(\frac{F_i}{n}\right)$$

که در اینجا n تعداد کل کالاهای تولیدی کارخانه در این روز می‌باشد. لذا $\frac{F_i}{n}$ یک فراوانی نسبی کالای درجه iام است. اکنون فرض کنید مرغوبیت کالاهـا تحت نوسانات تصادفی ایجاد می‌شوند و مدیریت کارخانه تصمیم به برنامه‌ریزی درازمدت برای سود خالص دارد. بدیهی اسـت کـه در ایـن‌صـورت مقـدار n بزرگ خواهد شد و $n\to\infty$؛ لذا با بزرگ شدن n مقدار $\frac{F_i}{n}\to P_i$ که در آن P_i احتمال تولید یک کالا از نوع درجه iام می‌باشد، بنابراین در حالت حدی متوسط سود هر کالا به‌صورت مقابل خواهد بود:

$$\mu=\sum_{i=1}^{4} x_i p_i$$

که سود مورد انتظار تولید هر کالا در درازمدت را نشان می‌دهد. بنابراین مدیریت کارخانه می‌تواند در درازمدت مبلغ μ واحد پول یا سود خالص را برای هر کالای تولیدی کارخانه متصور شود. به این مقدار مورد انتظار در ادامه امیدریاضی خواهیم گفت. به عبارت دیگر، مقدار مورد انتظـار سـود هـر کـالا، امیدریاضی سود کالا است.

❖ **تعریف:** اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $f_X(x)=P(X=x)$ باشد، امیدریاضی آن برابر است با:

$$\mu=E(X)=\sum_x x\cdot f_X(x)$$

به طور مشابه در توابع پیوسته با تبدیل "$\sum$" به "$\int$" در رابطه بالا به تعریف زیر خواهیم رسید:

❖ **تعریف:** امیدریاضی یک متغیر تصادفی پیوسته X با تابع چگالی احتمال f عبارت است از:

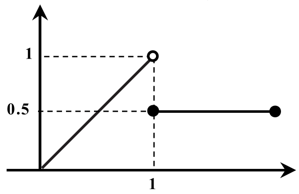
$$\mu=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx$$

توجه کنید که امیدریاضی یک متغیر تصادفی می‌تواند موجود نباشد. درواقع $E(X)$ موجود است، اگر و فقط اگر سری یا انتگـرال فـوق مطلقاً همگـرا باشند، یعنی:

$$\sum_x |x|f(x)<\infty \quad \text{یا} \quad \int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx<\infty$$

مثال۱: اگر X یک متغیر تصادفی با نمودار تابع چگالی احتمال زیر باشد، مقدار $E(X)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۹۰)



۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{12}{13}$ ۴) $\frac{13}{12}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» باتوجه به شکل می‌توان رابطه تابع چگالی احتمال را نوشت:

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{2} & 1\le x\le 2\end{cases}$$

اکنون طبق فرمول امیدریاضی خواهیم داشت:

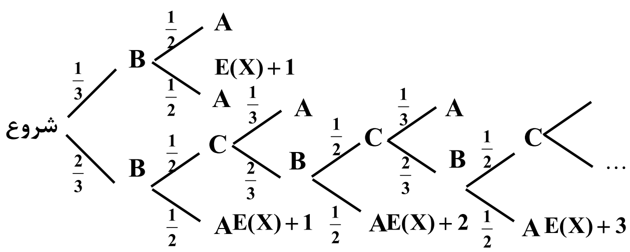
$$E(X)=\int_0^1 x.xdx+\int_1^2 x.\frac{1}{2}dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\frac{x^2}{4}\Big|_1^2=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=\frac{4+9}{12}=\frac{13}{12}$$

مثال۲: دو بازیکن فوتبال به‌صورت نوبتی و مستقل توپی را به سمت هدفی شوت می‌کنند. احتمال برخورد توپ به هدف برای بازیکن اول برای $\frac{1}{3}$ و برای بازیکن دوم $\frac{1}{2}$ است. این بازی هنگامی خاتمه می‌یابد که دو توپ متوالی شوت شده به سمت هدف، به آن برخورد کنند. اگر بازی با شوت بازیکن اول آغاز شود و N تعداد شوت‌های بازیکن اول به سمت هدف باشد، $E(N)$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۹۲)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) $\frac{20}{3}$ ۴) $\frac{22}{3}$

☑ **پاسخ:** «هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.» شکل زیر مشروحی از تعداد مراحل بازی را در قالب نمودار درختی به تصویر کشیده است. این شکل تا حدود بسیار زیادی در فهم مسئله و محاسبات کمک می‌کند.

راهنما	نماد
شرط توقف بازی	A
پیشامد بازیکن اول	B
پیشامد بازیکن دوم	C



با کمی دقت بر درخت‌ها، می‌توان روندها را به‌دست آورد که نهایت در روابط زیر خلاصه می‌شوند:

توجه: $\sum_{i=1}^{\infty} i.(p)^{i-1}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial P}(P)^i=\frac{\partial}{\partial P}\sum_{i=1}^{\infty}P^i=\frac{\partial}{\partial P}(\frac{P}{1-P})=\frac{1}{(1-P)^2}$

$$E(X)=A_1+A_2$$

$$A_1=(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1)+(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times 2)+(\frac{2}{3}\times(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2})\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3)$$

$$=\frac{1}{6}+(\frac{1}{9}.(\sum_{i=1}^{\infty} i.(\frac{1}{3})^{i-1}+\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^{i-1}))=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}(\frac{9}{4}+\frac{3}{2})+(\frac{2}{3}\times(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3})^2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 4)+\cdots=\frac{1}{6}+(\frac{1}{9}\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)(\frac{1}{3})^i)$$

$$A_2=(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(E(X)+1))+(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times(E(X)+1)+(\frac{2}{3}\times(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3})\times\frac{1}{2}\times(E(X)+2))+(\frac{2}{3}\times(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{2}\times(E(X)+3)+\cdots$$

$$=(\frac{1}{6}+\frac{3}{4}+(\frac{2}{3}E(X))$$

بنابراین: $E(X)=\frac{2}{3}E(X)+\frac{1}{6}+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}(\frac{9}{4}+\frac{3}{2})=$ ۰/۵ + ۲/۲۵ + ۰/۵ + ۰/۷۵ + ۰/۵ = ۴/۵

مدرسان شریف

فصل پنجم

«توزیع‌های آماری خاص»

درسنامه (I): توزیع‌های آماری گسسته

مقدمه

همان‌طورکه در فصل‌های قبل ملاحظه شد، متغیرهای تصادفی به دو دسته پیوسته و گسسته تقسیم می‌شوند و می‌توان توزیع‌های احتمال گسسته را به دو صورت جدول یا توزیع احتمالات و یا یک فرمول ریاضی نمایش داد. البته رابطه ریاضی را ترجیح می‌دهیم چرا که نوشتن و انجام عملیات ریاضی روی فرمول‌های ریاضی روان‌تر است. آنچه در این فصل می‌خوانیم، بررسی متغیرهای گسسته است که علاوه بر داشتن توابع احتمال به‌صورت فرمول ریاضی، در پدیده‌های طبیعی و روزمره کاربرد فراوان دارند و باتوجه به اهمیت آن‌ها، نام‌های معینی به آن‌ها داده شده است.

توزیع‌های گسسته

۱ـ توزیع تباهیده (ثابت)

هرگاه متغیر تصادفی X تنها یک مقدار ثابت مانند a را با احتمال ۱ انتخاب کند، X در a تباهیده است، بنابراین تابع احتمال آن به صورت زیر است:

$$p(X=x)=f_X(x)=\begin{cases}1 & X=a\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}\qquad \text{یا} \qquad P(X=a)=1$$

درنتیجه تابع توزیع به‌صورت روبه‌رو می‌باشد:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ 1 & x\ge a\end{cases}$$

ویژگی‌های این توزیع شامل تابع مولد فاکتوریل امیدریاضی گشتاورهای مرتبه nام حول مبدأ واریانس و تابع مولد گشتاور و تابع مشخصه به‌صورت زیر است:

✓ $\mu=E(X)=a$

✓ $G_X(z)=E(z^X)=z^a$

✓ $\sigma^2=E(X^2)-E^2(X)=a^2-a^2=0$

✓ $E(X^n)=a^n \quad n=0,1,2,\ldots$

✓ $M_X(t)=E(e^{tx})=e^{ta}$

✓ $\phi(t)=E(e^{itX})=e^{itX} \Rightarrow \phi(t)=1 \quad \forall t\in \mathbb{R}, a=0$

۲ـ توزیع یکنواخت گسسته

هرگاه متغیر تصادفی X مقادیر متمایز و محدود $x_1,x_2,\ldots,x_n$ را با احتمالات برابر اختیار کند، آن را متغیر تصادفی یکنواخت گسسته می‌گوییم. تابع احتمال آن به صورت زیر است:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{n} & x=x_1,x_2,\ldots,x_n\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

بدون کاستن از کلیت مسئله، تابع توزیع آن به صورت زیر است:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & X<x_1\\ \frac{i}{n} & x_i\le x<x_{i+1}\quad i=1,2,\ldots,n-1\\ 1 & x\ge x_n\end{cases}$$

این توزیع را با نماد $DU(x_1,..,x_n)$ نشان می‌دهیم.

توزیع یکنواخت گسسته استاندارد

درحالتی که مجموعه مقادیر ممکن X اعداد $۱,۲,...,n$ باشند، یعنی $R_X = \{۱,۲,...,n\}$ در این‌صورت $X \sim DU\{۱,۲,...,n\}$ می‌باشد. ویژگی‌های این توزیع به صورت زیر است:

✓ $Var(X) = E(X^۲) - E^۲(X) = \frac{n^۲ - ۱}{۱۲}$ ✓ $E(X) = \frac{n+۱}{۲}$

✓ $\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \frac{e^{it}(۱-e^{nit})}{n(۱-e^{it})}; t \neq ۰$ ✓ $M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{۱}{n}\sum_{x=۱}^{n} e^{tx} = \frac{e^t(۱-e^{nt})}{n(۱-e^t)}$

مثال ۱: یک صفحه هدف‌زنی دایره‌ای‌شکل به ۱۵ قطاع مساوی تقسیم شده و با شماره‌های ۱ تا ۱۵ جدا گردیده است. اگر X برابر با عددی باشد که تیر در قطاع مربوط به آن اصابت می‌کند، میانگین X کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۸ ۴) ۴۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق رابطه گفته شده در بالا خواهیم داشت:

$f_X(x) = P(X = x) = \frac{۱}{۱۵} \qquad x = ۱,۲,\ldots,۱۵$

$E(X) = \mu = \frac{n+۱}{۲} \xrightarrow{n=۱۵}$ یا $E(X) = \frac{۱۵+۱}{۲} = ۸$

۳ـ توزیع برنولی

این توزیع توصیف‌کننده کمی نتیجه انجام آزمایش‌های تصادفی ۲ حالتی است که آن‌ها را آزمایش‌های برنولی می‌گویند. متغیرهای تصادفی آزمایش‌های دو حالتی، دارای دو حالت موفقیت و شکست است.

❖ **تعریف:** هر آزمایش تصادفی که تنها دو برآمد ممکن مانند F,S داشته باشد یک آزمایش برنولی نامیده می‌شود، مشروط بر آنکه بتواند در شرایط یکسان و مستقل از هم تکرار شود. برآمد S را «موفقیت» و برآمد F را «شکست» می‌خوانیم. بنابراین، اگر $P = P(S)$ باشد $q = ۱ - p = P(F)$ آنگاه p احتمال موفقیت و q احتمال شکست خواهند بود. بدیهی است یک آزمایش برنولی با پارامتر P مشخص می‌شود.

اکنون اگر متغیر تصادفی X را به صورت $X = \begin{cases} ۱ & \text{رخ دهد } S \\ ۰ & \text{رخ دهد } F \end{cases}$ تعریف کنیم، آنگاه X یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه‌گاه $R_X = \{۰,۱\}$ است که آن را متغیر برنولی می‌نامیم.

تابع احتمال آن به‌صورت روبه‌رو است: ✓ $F_X(x) = \begin{cases} q & ۰ \le x < ۱ \\ ۱ & x \ge ۱ \end{cases}$ ✓ $f(x) = \begin{cases} p^x q^{۱-x} & x = ۰,۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$

این توزیع را با نماد $X \sim Be(p)$ نشان می‌دهیم.

در این توزیع، ویژگی‌های زیر را خواهیم داشت:

✓ $Var(X) = E(X^۲) - E^۲(X) = P(۱-P) = pq$ ✓ $E(X) = \sum_{x=۰}^{۱} x.f(x) = P$

✓ $\phi_x(it) = E(e^{itX}) = q + pe^{it}$ ✓ $M_x(t) = E(e^{tX}) = q + pe^t$

مثال ۲: متغیرهای تصادفی $X_۱$ و $X_۲$ به‌صورت مستقل دارای توزیع برنولی با $p = \frac{۱}{۴}$ می‌باشند. ترکیب خطی $Y = ۱ + X_۱ + ۲X_۲$ را درنظر بگیرید. $Var(Y)$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) ۴ ۲) $\frac{۴۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۷}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

در توزیع برنولی $Var(X) = pq$ و $E(X) = p$

$P = \frac{۱}{۴} \Rightarrow q = ۱ - p = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$

طبق خاصیت مهم واریانس، مقادیر را در فرمول جایگذاری می‌کنیم:

$$Var(aX + bY + c) = a^۲Var(X) + b^۲Var(Y) + ۲abCov(X,Y) \Rightarrow Var(X_۱ + ۲X_۲ + ۱) = ۱ \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۳}{۴} + ۴ \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۳}{۴} + ۰ = \frac{۳}{۱۶} + \frac{۳}{۴} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

مثال۳: اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر p باشد و قرار دهیم $U = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$، آنگاه توزیع U کدام است؟

۱) برنولی　　۲) یکنواخت گسسته　　۳) تباهیده　　۴) نامشخص

پاسخ: گزینه «۱» با کمی دقت متوجه می‌شویم که در توزیع برنولی ۱ یا ۰ = X_i هستند. بنابراین U نیز فقط دو مقدار ۱و ۰ را اختیار می‌کند.

$$P(U=0)=P(\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)=0)=P(\text{همه } X_i=0 \text{ باشند}) \xlongequal[]{X_i\text{ مستقل‌اند}} P(X_1=0)\times P(X_2=0)\times\ldots\times P(X_n=0)$$
$$=q\times q\times\ldots\times q=q^n$$

از طرفی $p(U=1)=1-p(U=0)=1-q^n \Rightarrow f_U(u)=P(U=u)=\begin{cases}q^n & u=0\\ 1-q^n & u=1\end{cases}$

مثال۴: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع برنولی با پارامتر p باشد، اگر برای متغیر تصادفی Y داشته باشیم، گزینه صحیح برای p کدام است؟ $E(XY)=3\ ,\ E(Y\mid X=x)=4x$ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{3}$　　۲) $\frac{2}{3}$　　۳) $\frac{3}{4}$　　۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$X\sim Ber(p) \Rightarrow E(X)=p \qquad E(XY)=3\ ,\ E(Y|X=x)=4x$$

$$3=E(XY)=E(E(XY|X))=E(XE(Y|X))=E(X4X)=4E(X^2)=4P \Rightarrow P=\frac{3}{4}$$

روش دوم: باتوجه به‌صورت مسئله X دارای توزیع برنولی می‌باشد، بنابراین: $P(x)=p^xq^{1-x} \quad x=0,1$

$$E(X.Y)=\sum_{x=0}^{1}\sum_y xyf(x,y)=\sum_y yf(x,y)=E(Y)=3$$

$$E(Y)=\sum_{x=0}^{1}E(Y|X=x).P(X=x)=\sum_{x=0}^{1}4x.P(X=x)=4\times0\times(1-P)+4\times1\times P=4P \Rightarrow E(Y)=4P \Rightarrow 3=4P \Rightarrow P=\frac{3}{4}$$

مثال۵: اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی با میانگین P باشند، امیدریاضی متغیر تصادفی $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}X_iX_j$ کدام است؟

۱) $n^2p^2q^2$　　۲) $n^2p^2(1+p^2)$　　۳) $n^2p(1+p^2)$　　۴) $np(n-p+np)$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}X_iY_j=\sum_{i=j}\sum X_iX_j+\sum_{i\neq j}\sum X_iX_j$$

دو حالت درنظر می‌گیریم؛ یک حالت آنکه $i=j$ باشد.

$$i=j \Rightarrow X_i=X_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}X_iX_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_i)^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sum_{j=1}^{n}=n\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \Rightarrow E(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}X_iX_j)=E(n\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=n\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)$$

اکنون $E(X_i^2)$ را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$Var(X_i)=E(X_i^2)-E^2(X_i) \Rightarrow E(X_i^2)=Var(X_i)+E^2(X_i)=pq+p^2=p(q+p)=p$$

$$\xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{در رابطه بالا}} n\sum_{i=1}^{n}(Var(X_i))+E^2(X_i))=n\sum_{i=1}^{n}p=n^2p$$

درصورتی‌که $i\neq j$ باشد، داریم:

$$i\neq j \Rightarrow E(\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}X_iX_j)=\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}E(X_iX_j)\xrightarrow{X_i\text{ها مستقل‌اند}}\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}E(x_i)E(x_j)=\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}p\times p$$

$$=p^2\underbrace{\sum_{i=1}^{n}}_{n}\underbrace{\sum_{j=1}^{n}}_{n}=p^2\times n(n-1)=n(n-1)p^2$$

اکنون دو حالت را با هم جمع می‌کنیم: $E(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}X_iX_j)=\underbrace{n^2p}_{i=j}+\underbrace{n(n-1)p^2}_{i\neq j}=n^2p+n^2p^2-np^2=np(n+np-p)$

درسنامه (۲): توزیع‌های آماری پیوسته

مقدمه

در فصل قبل به بحث و بررسی بر روی توزیع‌های گسسته، ارتباط بین آن‌ها و بعضی از خواص کاربردهایشان اشاره کردیم. در این فصل به‌طور مشابه به بحث و بررسی توزیع‌های پیوسته می‌پردازیم. توجه کنید که توزیع‌های آماری پیوسته معمولاً نتیجه ایده‌آل‌سازی‌های ریاضی می‌باشد و شاید بعضی از آن‌ها به سادگی بر پدیده‌های طبیعی تطبیق نداشته باشند.

۱ـ توزیع یکنواخت پیوسته

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال به‌صورت زیر باشد، دارای توزیع یکنواخت پیوسته در بازه (a,b) است و آن را با نماد $X \sim U(a,b)$ نشان می‌دهند. ویژگی‌های این توزیع به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\checkmark\ f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{b-a} & a<x<b\\ ۰ & \text{سایر جاها}\end{cases}\qquad \checkmark\ E(X)=\frac{a+b}{۲}\qquad \checkmark\ var(X)=\frac{(b-a)^{۲}}{۱۲}$$

$$\checkmark\ F_X(x)=\begin{cases}۰ & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x<b\\ ۱ & x\ge b\end{cases}\qquad \checkmark\ M_X(t)=\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$$

مثال ۷۷: اگر X به‌طور یکنواخت بر $(۱,۲)$ توزیع شده و $P(X>Z+\mu_X)=\frac{۱}{۴}$ باشد، مقدار Z کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۹۲)

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۱/۷۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اگر $X \sim U(a,b)$ باشد، در این‌صورت $a<x<b$ $f(x)=\frac{۱}{b-a}$ و $E(X)=\frac{a+b}{۲}$ است. بنابراین در این مسئله $X\sim U(۱,۲)$، پس $E(X)=\frac{۳}{۲}=۱/۵$ و داریم:

$$P(X>Z+۱/۵)=\int_{Z+۱/۵}^{۲} ۱dx=\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۲-Z-۱/۵=\frac{۱}{۴}\Rightarrow Z=\frac{۲}{۴}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$$

مثال ۷۸: اگر $X_۱$ و $X_۲$ و $X_۳$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت در فاصلهٔ $(۰,۱)$ باشند و $i,j=۱,۲,۳, i\neq j$ و $Cov(X_i,X_j)=\frac{۱}{۲۴}$ باشد، واریانس متغیر تصادفی $Z=X_۱+۲X_۲-X_۳$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{۲}{۱۲}$ ۲) $\frac{۳}{۱۲}$ ۳) $\frac{۴}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از رابطه واریانس مجموع چند متغیر تصادفی مستقل، واریانس Z را به صورت زیر می‌نویسیم:

یادآوری‌ها: $Var(aX+bY+cZ)=a^{۲}Var(X)+b^{۲}Var(Y)+c^{۲}Var(Z)+۲ab\,Cov(X,Y)+۲ac\,Cov(X,Z)+۲bc\,Cov(Y,Z)$

بنابراین طبق فرمول بالا:

$$Var(X_۱-۲X_۲-X_۳)=Var(X_۱)+۴Var(X_۲)+Var(X_۳)+۴Cov(X_۱,X_۲)-۲Cov(X_۱,X_۳)-۴Cov(X_۲,X_۳)$$
$$=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۴}{۱۲}+\frac{۱}{۱۲}-\frac{۲}{۲۴}=\frac{۵}{۱۲}$$

مثال ۷۹: در یک بانک مشتری‌ها طبق فرایند پواسون با میانگین ۳ مشتری در ساعت وارد بانک می‌شوند. اگر در ساعت اول، یک مشتری وارد بانک شده باشد، احتمال این‌که این مشتری در پنج (۵) دقیقه اول یا ده (۱۰) دقیقه آخر این یک ساعت آمده باشد، کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $e^{-۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}e^{-۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

مدرسان شریف

فصل ششم

«توزیع‌های نمونه‌ای»

درسنامه (۱): میانگین نمونه‌ای

مقدمه

❖ **تعریف:** هر ویژگی نامعلوم از یک جامعه را پارامتر گویند. میانگین جامعه (μ)، واریانس جامعه (σ^2) و نسبت جامعه (p)، هر سه پارامتر هستند. این پارامترها مجهول می‌باشند.

❖ **تعریف:** هر ویژگی در مورد نمونه تصادفی را یک آماره گویند. میانگین نمونه $(\bar{X})$، واریانس نمونه (S^2) و نسبت نمونه $(\bar{p})$، هر سه آماره هستند. توجه کنید هر آماره یک متغیر تصادفی است. به عبارت دیگر آماره تابعی از نمونه تصادفی است که به پارامتر مجهول بستگی ندارد.

برای استنباط در مورد پارامترهای جامعه باید از آماره‌های مناسب استفاده کرد. بنابراین متناظر برای هر پارامتر در جامعه یک آماره وجود دارد که این آماره، یک متغیر تصادفی می‌باشد. آماره‌ها دارای تابع احتمال می‌باشند که براساس نمونه‌های تصادفی n تایی که از جامعه آماری انتخاب شده است به دست می‌آید این تابع احتمال را «توزیع نمونه‌گیری آماره» یا «توزیع نمونه‌ای» می‌گویند.

توزیع میانگین نمونه (جامعه نامتناهی باشد)

برای تخمین میانگین جامعه (μ) آماره‌های مختلفی مانند میانه (Md)، میانگین نمونه $(\bar{X})$ و یا مُد نمونه (Mo) وجود دارد، اما در مقایسه آن‌ها با یکدیگر میانگین نمونه $(\bar{X})$ دارای دقت بیشتری است.

❖ **تعریف:** در صورتی‌که $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از جامعه‌ای با میانگین μ_x و واریانس σ_x^2 باشد به طوری‌که $E(X_1)=E(X_2)=\cdots E(X_n)=\mu_x$ و $\sigma_{x_1}^2=\sigma_{x_2}^2=\cdots=\sigma_{x_n}^2=\sigma_x^2$، آنگاه $\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$ میانگین نمونه‌ای است و در این‌صورت:

$$E(\bar{X})=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right)=\frac{E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n)}{n}=\frac{n\mu_x}{n}=\mu_x$$

$$Var(\bar{X})=Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right)=\frac{1}{n^2}Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}(Var(X_1)+Var(X_2)+\cdots+Var(X_n))=\frac{\sigma_{x_1}^2+\sigma_{x_2}^2+\ldots+\sigma_{x_n}^2}{n^2}=\frac{n\sigma_x^2}{n^2}=\frac{\sigma_x^2}{n}$$

با توجه به مطلب گفته شده درصورتی‌که نمونه تصادفی n تایی از جامعه‌ای به حجم نامتناهی انتخاب شود، خواهیم داشت:

$$E(\bar{X})=\mu \quad , \quad Var(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$$

مثال ۱: متغیر تصادفی دلخواه X دارای میانگین ۱ و واریانس ۴ است. $\bar{X}$ میانگین یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی از X است. انحراف معیار $3+2\bar{X}$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰/۱۶ ۲) ۰/۴ ۳) ۱/۶ ۴) ۳/۲

پاسخ: گزینه «۲» اگر X دارای میانگین μ_X و واریانس σ^2 باشد و a و b اعداد ثابت باشند آنگاه:

$$\mu(ax+b)=a\mu_X+b$$

$$V(aX+b)=a^2V(X)=a^2\sigma^2$$

اگر $\bar{X}$ میانگین نمونه‌ای به اندازه n از توزیعی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آنگاه:

$$E(\bar{X})=\mu\ ,\ V(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$$

بنابراین:

$$V(2\bar{X}+3)=4V(\bar{X})=4\times\frac{4}{100}\Rightarrow S=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{4^2}{100}}=\frac{4}{10}$$

مثال ۲: در یک نمونه تصادفی به اندازه ۹ از توزیع روبه‌رو، واریانس مربوط به میانگین نمونه کدام است؟ $f_X(x)=4x^3\ ;\ 0\le x\le 1$

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{675}$ ۲) $\frac{3}{675}$ ۳) $\frac{4}{675}$ ۴) $\frac{2}{675}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به اینکه:

$$n=9\Rightarrow Var(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}\Rightarrow\sigma^2=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$\begin{cases}E(X^2)=\int_0^1 x^2.4x^3dx=\int_0^1 4x^5dx=\left.\frac{4x^6}{6}\right|_0^1=\frac{4}{6}\\ E(X)=\int_0^1 4x^4dx=\left.\frac{4x^5}{5}\right|_0^1=\frac{4}{5}\end{cases}\Rightarrow\sigma^2=\frac{4}{6}-(\frac{4}{5})^2=\frac{4}{6}-\frac{16}{25}=\frac{100-96}{150}=\frac{4}{150}$$

$$\Rightarrow Var(\bar{X})=\frac{\frac{4}{150}}{\frac{9}{1}}=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{9\times\underset{75}{\cancel{150}}}=\frac{2}{675}$$

مثال ۳: اگر $X_1,\dots,X_{18}$ یک نمونه تصادفی ۱۸ تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال $f(x)=2x\ ;\ 0<x<1$ باشد، انحراف معیار (انحراف استاندارد) $\bar{X}$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{18}$ ۲) $\sqrt{18}$ ۳) ۱۸ ۴) $\frac{1}{\sqrt{18}}$

پاسخ: گزینه «۱» انحراف $\bar{X}$ به صورت زیر است، بنابراین ابتدا واریانس X را به‌دست آورده جذر می‌گیریم تا انحراف معیار X به دست آید سپس در رابطه جایگذاری می‌کنیم.

$$Var(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}\Rightarrow\sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\quad;\quad\sigma^2=E(X^2)-E^2(X)$$

$$\begin{cases}E(X^2)=\int_0^1 x^2.2xdx=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2}\\ E(X)=\int_0^1 x.2xdX=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow\sigma^2=\frac{1}{2}-(\frac{2}{3})^2=\frac{1}{18}\Rightarrow\sigma=\frac{1}{\sqrt{18}}\Rightarrow\sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{18}}}{\sqrt{18}}=\frac{1}{18}$$

توزیع میانگین نمونه (جامعه متناهی باشد)

توجه کنید که در نمونه‌گیری از جامعه متناهی توزیع نمونه‌ها (X_i) وابسته می‌باشند (چرا که نمونه‌گیری با جایگذاری می‌باشد)، پس بین مشاهدات کوواریانس وجود دارد؛ بنابراین استنباط در مورد واریانس این میانگین متفاوت خواهد بود.

قضیه ۱: اگر از جامعه‌ای متناهی به اندازه N (متناهی) با میانگین μ و واریانس σ^2 یک نمونه تصادفی به اندازه n گرفته شود و $\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$؛ آنگاه:

$$E(\bar{X})=\mu\ ,\ Var(\bar{X})=\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}$$

اثبات: $E(\bar{X})=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu \ , \ Var(\bar{X})=\frac{1}{n^2}Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}var(X_i)+\sum_{i\neq j}^{n}\sum^{n}Cov(X_i,X_j)\right)$

برای محاسبه $Cov(X_i,X_j)$ به مطلب زیر دقت کنید:

$$Cov(X_i,X_j)=E[(X_i-\mu)(X_j-\mu)]=\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{N(N-1)}\cdot(x_i-\mu)(x_j-\mu)\right]=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{N(N-1)}\cdot(x_i-\mu)(x_j-\mu)$$

$$-\sum_{i=j}\sum\frac{1}{N(N-1)}(x_i-\mu)(x_j-\mu)=0-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N(N-1)}\cdot(x_i-\mu)^2=-\frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i-\mu)^2}{N}}{N-1}=\frac{-\sigma^2}{N-1}$$

یادآوری: $P(X_i=x_i,X_j=x_j)=\frac{1}{N(N-1)}$

اکنون این مقدار را در رابطه واریانس قرار می‌دهیم:

$$Var(\bar{X})=\frac{1}{n^2}\left(n\sigma^2+\sum_{i\neq j}^{n}\sum^{n}\frac{-\sigma^2}{N-1}\right)=\frac{\sigma^2}{n}+\frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{-\sigma^2}{N-1}=\frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{N-n}{N-1}$$

توجه کنید که تفاوت در نمونه‌گیری متناهی و نامتناهی ضریبی است که در واریانس میانگین نمونه اعمال شده است $\frac{N-n}{N-1}$، که به آن ضریب تصحیح جامعه گفته می‌شود. البته درصورتی‌که $\frac{n}{N}\leq 0/05$ باشد معمولاً این ضریب اعمال نمی‌شود.

مثال۴: از جامعه محدود $s=\{1,2,3,4,5\}$ یک نمونه ۲ تایی به صورت یک به یک و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. اگر $\bar{X}$ نمایانگر میانگین این نمونه دوتایی باشد مقدار میانگین و واریانس $\bar{X}$ به ترتیب کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) ۳ و ۱ ۲) ۳ و ۰/۵ ۳) ۳ و ۰/۷۵ ۴) ۳ و ۰/۲۵

پاسخ: گزینه «۳» توجه کنید که نمونه‌گیری بدون جایگذاری و جامعه متناهی است:

$$\begin{matrix}N=5\\ n=2\end{matrix} \Rightarrow \mu=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$$

$$\begin{cases}E(\bar{X})=\mu\\ Var(\bar{X})=\frac{N-n}{N-1}\frac{\sigma^2}{n}\end{cases}\Rightarrow \sigma^2=\frac{1}{N}\sum(X_i-\mu)^2=\frac{1}{5}(4+1+0+1+4)=2\Rightarrow\begin{cases}E(\bar{X})=3\\ Var(\bar{X})=\frac{5-2}{5-1}\times\frac{2}{2}=\frac{3}{4}=0/75\end{cases}$$

قضیه حد مرکزی

قضیه بسیار زیبا و جالبی در آمار وجود دارد که بیان می‌دارد حتی اگر فرض نرمال بودن توزیع X_i را از مسئله حذف کنیم، توزیع میانگین نمونه برای nهای به اندازه کافی بزرگ باز هم دارای توزیع نرمال است $(n\to\infty)$ به بیان ساده‌تر می‌توان گفت که این قضیه نشان می‌دهد که مجموع تعداد زیادی از متغیرهای تصادفی مستقل دارای توزیعی تقریباً نرمال است. بنابراین، این قضیه روش ساده‌ای را برای محاسبه تقریبی احتمال‌های مجموع متغیرهای تصادفی مستقل ارائه می‌کند و کمک می‌کند که نشان دهیم بسیاری از جامعه‌های آماری در طبیعت دارای نمودار زنگی شکل می‌باشند.

قضیه۲: قضیه حد مرکزی: فرض کنید $X_1,X_2,\ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با میانگین مشترک $-\infty<\mu<\infty$ و واریانس $0<\sigma^2<\infty$ باشند آنگاه:

$$Z_n=\frac{\bar{X}_n-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\sim N(0,1) \quad ; \quad n\to\infty \quad ; \quad \bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$$

با توجه به قضیه بالا می‌توان نتیجه گرفت برای nهای بزرگ $(n\geq 30)$ توزیع میانگین نمونه به‌صورت روبرو است: $\bar{X}_n\approx N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$

مدرسان شریف

فصل هفتم

«نظریه برآورد»

درسنامه (۱): برآورد نقطه‌ای

مقدمه

در آمار استنباطی، هدف برآورد کردن پارامترهای مجهول جامعه ($\rho, \sigma, \sigma^2, \mu$) می‌باشد. این هدف، توسط نتایج نمونه انجام می‌شود. در این فصل به بحث و بررسی چگونگی برآورد پارامترهای جامعه توسط نتایج نمونه می‌پردازیم و توضیح خواهیم داد که چگونه این پارامترهای مجهول تخمین زده می‌شوند و تخمین‌های به‌دست آمده دارای چه خاصیت‌هایی می‌باشند.

هنگام به دست آوردن برآورد پارامتر جامعه با توجه به اینکه بخواهیم یک مقدار یا یک فاصله برای آن به‌دست آوریم، با دو مبحث برآورد نقطه‌ای و برآورد فاصله‌ای روبه‌رو هستیم.

در آمار استنباطی پارامترها را با θ و تخمین‌های آن‌ها را با $\hat{\theta}$ نشان می‌دهند. در برآورد نقطه‌ای، از مقدار آماره $\hat{\theta}$ حاصل از نمونه، برای تخمین پارامتر θ استفاده می‌کنیم درحالی‌که در برآورد فاصله‌ای با تعیین فاصله‌ای اطراف آماره $\hat{\theta}$، به فاصله‌ای می‌رسیم که با احتمال مشخص پارامتر θ را در برمی‌گیرد.

برآوردهای نقطه‌ای

❖ **تعریف:** آماره $\hat{\theta}$ را یک برآوردکننده نقطه‌ای برای پارامتر θ گوییم هرگاه با استفاده از نتایج نمونه تنها یک مقدار یا یک نقطه را به‌عنوان برآورد پارامتر θ ارائه دهد.

به طور مثال آماره $\bar{X}$ یک برآوردکننده نقطه‌ای برای پارامتر μ (میانگین جامعه) است، همچنین آماره S^2 یک برآوردکننده نقطه‌ای برای پارامتر σ^2 (واریانس جامعه) می‌باشد.

طرز به‌دست آوردن برآورد نقطه‌ای

دو روش بسیار مهم و معروف برای به‌دست آوردن برآوردهای نقطه‌ای به نام‌های روش گشتاوری (M.M.E) و روش حداکثر درستنمایی (M.L.E) وجود دارد که در ادامه به تشریح آن‌ها خواهیم پرداخت.

روش گشتاوری

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع f_θ باشد به‌طوری‌که $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$، همچنین فرض کنید k گشتاور اول این توزیع که به صورت توابعی از θ هستند وجود داشته باشد. در این روش، از برابر قرار دادن چند گشتاور اول جامعه با گشتاورهای متناظر یک نمونه و به‌دست آوردن هر تعدادی معادله مورد نیاز، پارامترهای مجهول جامعه به‌دست می‌آیند. توجه کنید که k امین گشتاور نمونه‌ای مجموعه‌ای از مشاهدات مانند $x_1, x_2, \cdots, x_n$ میانگین توان‌های kام آن‌ها است و آن را با μ_k نشان می‌دهند:

$$\mu_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n}$$

اگر جامعه تنها شامل یک پارامتر مجهول مانند θ باشد، در این صورت از حل معادله $E(X) = \bar{X}$، پارامتر مجهول جامعه به‌دست می‌آید. دقت نمایید که $\bar{X}$ میانگین نمونه‌ای معلوم و $E(X)$ برحسب پارامتر مجهول θ است.

مثال۱: اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال $k = 0,1,2,\ldots$ و $P[X = k] = pq^k$ و $Y = (-1)^X$ باشد، آنگاه برآورد گشتاوری $P[Y = +1]$ کدام است؟ $(p + q = 1)$ (ریاضی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{1}{1+\bar{x}}$ ۲) $\frac{1}{2\bar{x}+1}$ ۳) $\frac{1+\bar{x}}{2\bar{x}+1}$ ۴) $\frac{\bar{x}}{1+\bar{x}}$

پاسخ: گزینه «۱» در این توزیع هندسی $E(X) = \frac{q}{P}$ بنابراین: $\frac{q}{p} = \bar{X} \Rightarrow \frac{1-p}{p} = \bar{X} \Rightarrow \frac{1}{p} - 1 = \bar{X} \Rightarrow \hat{P} = \frac{1}{1+\bar{X}}$

از طرفی $P(Y = 1) = P(X = 0)$ است، لذا نتیجه می‌شود: $P(Y = 1) = P(X = 0) = P \Rightarrow \hat{P} = \frac{1}{1+\bar{X}}$

مثال۲: فرض کنید که $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $0 < \theta < 1$ ، $k = 0,1,2,\ldots$ ، $P(X = k) = (\frac{\theta}{2-\theta})(\frac{2(1-\theta)}{2-\theta})^k$ باشد، برآورد گشتاوری θ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{2}{1+\bar{x}}$ ۲) $\frac{2}{2+\bar{x}}$ ۳) $\frac{\bar{x}}{2-\bar{x}}$ ۴) $\frac{\bar{x}}{2+\bar{x}}$

پاسخ: گزینه «۲» $P(X = k) = (\frac{\theta}{2-\theta})(\frac{2(1-\theta)}{2-\theta})^k \quad k = 0,1,2,\cdots \quad 0 < \theta < 1$

اگر $f_\theta(x)$ تابع چگالی احتمالی با پارامتر مجهول θ باشد آنگاه از حل معادله‌ی $E(X) = \bar{X}$ برآورد MM پارامتر θ به دست می‌آید.

قرار می‌دهیم $a = \frac{\theta}{2-\theta}$ و $b = (\frac{2(1-\theta)}{2-\theta})$ بنابراین: $P(X = x) = ab^x \quad , \quad x = 0,1,2,\cdots$

لذا طبق خاصیت تابع احتمال: $\sum_{x=0}^{\infty} ab^x = 1$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} xab^x = \sum_{x=1}^{\infty} xab^x = \sum_{x=0}^{\infty} (x+1)ab^{x+1} = \sum_{x=0}^{\infty} xab^{x+1} + \sum_{x=0}^{\infty} ab^{x+1} = b\sum_{x=0}^{\infty} xab^x + b\underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} ab^x}_{1} = bE(X) + b \Rightarrow$$

$$(1-b)E(X) = b \Rightarrow E(X) = \frac{b}{1-b}$$

با جایگذاری $\frac{2(1-\theta)}{2-\theta}$ به جای b رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$E(X) = \frac{\frac{2(1-\theta)}{2-\theta}}{1 - \frac{2(1-\theta)}{2-\theta}} = \frac{2(1-\theta)}{\theta}$$

و برآورد MM پارامتر θ به صورت روبرو به‌دست می‌آید:

$$E(X) = \bar{X} \Rightarrow \frac{2(1-\theta)}{\theta} = \bar{X} \Rightarrow 2 - 2\theta = \theta\bar{X} \Rightarrow 2 = \theta(2+\bar{X}) \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{2}{2+\bar{X}}$$

مثال۳: فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\theta, 1)$ باشد، MME پارامتر θ کدام است؟

۱) $\bar{X}$ ۲) $2\bar{X}$ ۳) $3\bar{X}$ ۴) $4\bar{X}$

پاسخ: گزینه «۱» از برابری گشتاور اول نمونه‌ای و امید ریاضی (گشتاور اول جامعه) داریم: $\mu_1 = E(X) = \theta \simeq \bar{X} \Rightarrow \tilde{\theta} = \bar{X}$

مثال۴: اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از یک توزیع گسسته با تابع احتمال $P(x) = \begin{cases} \theta & , \ x = 1 \\ \theta & , \ x = 2 \\ 1-2\theta & , \ x = 3 \end{cases}$ باشد که در آن $0 < \theta < \frac{1}{2}$ می‌باشد، برآورد به روش گشتاورها، کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۹۲)

۱) $\bar{x}$ ۲) $\frac{1}{2}\bar{x}$ ۳) $\frac{\bar{x}-1}{4}$ ۴) $1 - \frac{\bar{x}}{3}$

پاسخ: گزینه «۴» به شیوه برآورد گشتاوری خواهیم داشت:

$$E(X) = \bar{X}$$

$$E(X) = \sum xP(x) = 1\times\theta + 2\times\theta + 3(1-2\theta) = \theta + 2\theta + 3 - 6\theta = \bar{X} \Rightarrow X - 3\theta + 3 = \bar{X} \Rightarrow -3\theta = \bar{X} - 3$$

$$\Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{\bar{X}-3}{-3} = 1 - \frac{\bar{X}}{3}$$

مثال۵: فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{-\theta-2} & , \ x>1\\ 0 & , \ x\le 1\end{cases}$ باشد. برآوردگر θ به روش گشتاوری کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) $\bar{X}$ ۲) $1-\bar{X}$ ۳) $\frac{1}{\bar{X}-1}$ ۴) $\frac{1}{1-\bar{X}}$

پاسخ: گزینه «۳» امید ریاضی توزیع را با میانگین نمونه برابر قرار می‌دهیم:

$$\mu_1=E(X)=\int_1^{\infty}x(\theta+1)x^{-\theta-2}dx=\int_1^{\infty}(\theta+1)x^{-\theta-1}dx=\frac{\theta+1}{-\theta}x^{-\theta}\Big]_1^{\infty}=\frac{\theta+1}{\theta}$$

$$m_1=\frac{\sum X_i}{n}=\bar{X}\quad;\quad \mu_1=m_1\Rightarrow\frac{\theta+1}{\theta}=\bar{X}\Rightarrow\theta+1=\theta\bar{X}\Rightarrow\theta(\bar{X}-1)=1\Rightarrow\tilde{\theta}=\frac{1}{\bar{X}-1}$$

مثال۶: فرض کنید ۲ و ۵ و ۸، یافته‌های یک نمونه تصادفی از تابع احتمال $f_\theta(x)=(\frac{\theta}{\theta+1})^x\times\frac{1}{\theta+1}\ ,\ \theta>0\ ,\ x=0,1,2,...$ باشند، برآورد گشتاوری θ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) ۵ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» از تساوی $E(X)=\bar{X}$، به روش گشتاوری برآوردگر پارامتر θ را حساب می‌کنیم:

$$E(X)=\sum_{x=0}^{\infty}x.(\frac{\theta}{1+\theta})^x.\frac{1}{1+\theta}=\frac{1}{1+\theta}\sum_{x=1}^{\infty}x(\frac{\theta}{1+\theta})^x=\frac{1}{1+\theta}\sum_{x=0}^{\infty}(1+x)(\frac{\theta}{1+\theta})^{x+1}=\frac{1}{1+\theta}(\sum_{x=0}^{\infty}(\frac{\theta}{1+\theta})^{x+1}+\sum_{x=0}^{\infty}x(\frac{\theta}{1+\theta})^{x+1})$$

سری اول یک سری هندسی با قدرنسبت کوچک‌تر از یک است، لذا مجموع آن برابر است با: $\frac{\frac{\theta}{1+\theta}}{1-\frac{\theta}{1+\theta}}=\theta$

$$E(X)=\frac{1}{1+\theta}(\sum_{x=0}^{\infty}(\frac{\theta}{1+\theta})^{x+1}+\sum_{x=0}^{\infty}x(\frac{\theta}{1+\theta})^{x+1})=\frac{1}{1+\theta}(\theta+\theta\sum_{x=0}^{\infty}x(\frac{\theta}{1+\theta})^x.\frac{1}{1+\theta})=\frac{1}{1+\theta}(\theta+\theta E(X))$$

$$\Rightarrow E(X)=\frac{\theta}{1+\theta}+\frac{\theta}{\theta+1}E(X)\Rightarrow\frac{E(X)}{\theta+1}=\frac{\theta}{\theta+1}\Rightarrow E(X)=\theta\Rightarrow\tilde{\theta}=\bar{x}$$

بنابراین با توجه به نمونه به‌دست آمده برآورد گشتاوری θ برابر است با: $\tilde{\theta}=\frac{2+5+8}{3}=5$

یادآوری: $\sum_{i=k}^{\infty}a^i$ یک سری هندسی با قدرنسبت a است. اگر $|a|<1$ سری همگراست و مجموع آن برابر است با $\frac{a^k}{1-a}$.

مثال۷: فرض کنید ۲,۴,۶,۸,۱۰ یافته‌های یک نمونه تصادفی از توزیع $U(\theta_1,\theta_2)$ باشد. برآورد θ_1 و θ_2 به روش گشتاوری، یعنی $(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۴)

۱) $(3+\sqrt{12},9-\sqrt{12})$ ۲) $(2+\sqrt{24},10-\sqrt{24})$ ۳) $(6-\sqrt{24},6+\sqrt{24})$ ۴) $(2+\sqrt{12},10-\sqrt{12})$

پاسخ: گزینه «۳» در توزیع یکنواخت پیوسته داریم:

$$E(X)=\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\Rightarrow\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=\bar{x}=\frac{\Sigma x_i}{n}=\frac{30}{5}=6\Rightarrow\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=6\Rightarrow\theta_1+\theta_2=12$$

اکنون گشتاور دوم برابر است با:

$$E(X^2)=\frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12}+(\frac{\theta_2+\theta_1}{2})^2=\bar{x}^2\Rightarrow\frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12}+36=\frac{\Sigma x_i^2}{n}=\frac{220}{5}=44$$

$$\Rightarrow\frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12}=8\Rightarrow(\theta_2-\theta_1)^2=96\Rightarrow\theta_2-\theta_1=2\sqrt{24}$$

اکنون از حل دستگاه دو معادله دو مجهول $\widetilde{\theta_1}$ و $\widetilde{\theta_2}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\theta_1+\theta_2=12\\ \theta_2-\theta_1=2\sqrt{24}\end{cases}\Rightarrow 2\theta_2=12+2\sqrt{24}\Rightarrow\tilde{\theta}_2=6+\sqrt{24}\Rightarrow\tilde{\theta}_1=6-\sqrt{24}$$

مثال ۸: **فرض کنید یافته‌های ۰/۹، ۰/۴، ۰/۲، ۰/۷، ۰/۳ مقادیر مشاهده شده یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. برآورد پارامتر θ به روش گشتاوری کدام است؟** (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۳)

$$f_\theta(x) = \theta(1-x)^{\theta-1}, 0 < x < 1, \theta > 0$$

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۹ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴» امید ریاضی را محاسبه کرده و برابر با میانگین نمونه قرار می‌دهیم:

$$\mu_1 = E(X) = \int_0^1 \theta x(1-x)^{\theta-1}dx$$

$$1-x=u \Rightarrow du=-dx \Rightarrow \mu_1 = -\int_1^0 \theta(1-u)u^{\theta-1}du = \int_0^1 \theta(u^{\theta-1}-u^\theta)du = \theta\left[\frac{u^\theta}{\theta}-\frac{1}{\theta+1}u^{\theta+1}\right] = \frac{1}{\theta+1}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{1}{5}(0/9+0/4+0/2+0/7+0/3) = 0/5 \Rightarrow \bar{X} = \mu_1 \Rightarrow \frac{1}{\theta+1} = 0/5 \Rightarrow \tilde{\theta} = 1$$

مثال ۹: **اگر $X_1, ..., X_n$ یک نمونهٔ تصادفی ۸ تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال $f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2}$; $0 < x < \theta$ ... باشد. برآورد کننده به روش گشتاورها برای پارامتر θ کدام است؟** (مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۱)

۱) $\hat{\theta} = \frac{2}{3}\bar{x}$ ۲) $\hat{\theta} = \min(x_1,\dots,x_n)$ ۳) $\hat{\theta} = \frac{3}{2}\bar{x}$ ۴) $\hat{\theta} = \max(x_1,\dots,x_n)$

پاسخ: گزینه «۳» روش گشتاوری: امید ریاضی را محاسبه می‌کنیم و آن را مساوی $\bar{x}$ قرار می‌دهیم:

$$E(X) = \int_0^\theta x.f(x)dx = \int_0^\theta x \times \frac{2x}{\theta^2}dx = \int_0^\theta \frac{2x^2}{\theta^2}dx = \frac{2x^3}{3\theta^2}\Big|_0^\theta = \frac{2\theta^3}{3\theta^2} = \frac{2}{3}\theta \Rightarrow E(X) = \frac{2}{3}\theta$$

این مقدار را برابر با $\bar{X}$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{2}{3}\theta = \bar{X} \to \tilde{\theta} = \frac{3\bar{X}}{2}$$

مثال ۱۰: **فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از تابع چگالی احتمال زیر باشد. برآوردگر گشتاوری θ کدام است؟** (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

$$f(x;\theta) = \begin{cases} (\theta-1)e^{-(\theta-1)x} & \theta > 1, x > 0 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

۱) $\bar{X}-1$ ۲) $1+\frac{1}{\bar{X}^{\frac{1}{2}}}$ ۳) $\bar{X}+1$ ۴) $1+\frac{1}{\bar{X}}$

پاسخ: گزینه «۴» برآورد گشتاوری از حل رابطه $E(x) = \bar{x}$ به‌دست می‌آید:

$$\bar{x} = E(X) = \int_0^\infty x(\theta-1)e^{-(\theta-1)x}dx = -xe^{-(\theta-1)x} - \frac{1}{\theta-1}e^{-(\theta-1)x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\theta-1} \Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{1}{\bar{x}}+1$$

مثال ۱۱: **یک نمونه تصادفی با معدل $\bar{X}$ از چگالی $f(x,\theta) = \begin{cases} (1+\theta)x^\theta & \theta > 0, 0 < x < 1 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$، در نظر می‌گیریم برآورد گشتاوری پارامتر θ کدام است؟**

(ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}$ ۲) $\frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}+1}$ ۳) $\frac{1+2\bar{X}}{\bar{X}-1}$ ۴) $\frac{1+2\bar{X}}{\bar{X}+1}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$E(X) = \int_0^1 x(1+\theta)x^\theta dx = (1+\theta)\int_0^1 x^{\theta+1}dx = \frac{1+\theta}{2+\theta}x^{2+\theta}\Big|_0^1 = \frac{1+\theta}{2+\theta}$$

اکنون از تساوی $E(X) = \bar{X}$ داریم:

$$\bar{X} = \frac{1+\theta}{2+\theta} \Rightarrow \bar{X}(2+\theta) = 1+\theta \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}$$

مثال۱۲: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع: $f_\alpha(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x|}{\alpha}} \ ; -\infty < x < +\infty \ , \ \alpha > 0$ باشد. در این صورت برآورد به روش گشتاوری برای α، کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

۱) $\bar{X}$

۲) $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}}$

۳) $\frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i|}{n}$

۴) $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2n}}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به آن‌که $E(x) = 0$ (به دلیل متقارن بودن توزیع) با گشتاور اول نتیجه‌ای حاصل نمی‌شود. به سراغ گشتاور دوم می‌رویم:

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 . \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x|}{\alpha}} dx = 2\int_{0}^{\infty} x^2 . \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} dx = \frac{1}{\alpha} \underbrace{\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{\alpha}} dx}_{\frac{2!}{(\frac{1}{\alpha})^3}} = 2\alpha^2$$

اکنون از حل معادله $E(X^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$ داریم:

$$2\alpha^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2n} \Rightarrow \tilde{\alpha} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2n}}$$

مثال۱۳: اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ نمونه تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای با چگالی زیر باشد، برآوردگر حاصل از روش گشتاوری θ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۰)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(\theta - x)}{\theta^2} & , \quad 0 < x < \theta \\ 0 & , \quad \text{سایر نقاط} \end{cases} \qquad (\theta > 0)$$

۱) $3\bar{X}$

۲) $2\bar{X}$

۳) $\bar{X}$

۴) $\frac{\bar{X}}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به اینکه در روش گشتاوری $E(X) = \bar{X}$ می‌باشد، بنابراین امید ریاضی را بدست می‌آوریم و برابر با $\bar{X}$ قرار می‌دهیم:

$$E(x) = \int_{0}^{\theta} \frac{2\theta x - x^2}{\theta^2} dx = \frac{\theta x^2 - \frac{x^3}{3}}{\theta^2} \Bigg|_0^\theta = \frac{\theta^3 - \frac{\theta^3}{3}}{\theta^2} = \frac{2\theta^3}{\theta^2} = 2\theta \Rightarrow E(x) = \bar{X} \Rightarrow 2\theta = \bar{X} \Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{\bar{X}}{2}$$

روش ماکزیمم درستنمایی (M.L.E): این روش که اولین‌بار توسط گوس در سال ۱۸۲۱ به‌کار گرفته شد، روشی بود که توسط فیشر در انتقاد از روش گشتاوری مورد استفاده قرار گرفت. این روش مبتنی‌بر یک تابع آماری مهم به نام تابع درستنمایی می‌باشد.

تعریف (تابع درستنمایی) : فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از تابع چگالی احتمال $f_\theta(x)$ یا تابع احتمال $f_\theta(x)$ باشد، تابع $L(\theta)$ را تابع درستنمایی می‌نامند و رابطه آن به‌صورت مقابل است:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$$

اکنون برای به‌دست آوردن برآورد ماکزیمم درستنمایی مراحل زیر را به ترتیب اجرا کنید:

۱) تابع $L(\theta)$ را تشکیل دهید.

۲) به هر روشی که می‌توانید $L(\theta)$ را ماکزیمم کرده و مقدار $\underset{\sim}{\theta}$ را برحسب تابعی از نمونه تصادفی به‌دست آورید. (معادله $\frac{\partial \operatorname{Ln}(L(\theta))}{\partial \theta} = 0$ را حل می‌کنیم.)

مثال۱۴: فرض کنید ۰/۸ و ۰/۱ و ۰/۲ و ۰/۶ یافته‌های یک نمونه تصادفی ۵ تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. برآورد حداکثر درستنمایی θ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ سراسری ۸۸)

$$f_\theta(x) = \frac{2}{1-\theta^2} x \quad , \quad \theta < x < 1$$

۱) ۰/۱

۲) ۰/۳

۳) ۰/۴

۴) ۰/۸

پاسخ: گزینه «۱» به دامنه متغیر تصادفی X توجه کنید که به پارامتر وابسته می‌باشد.

$$x_i \geq \theta \Rightarrow \min(x_i) \geq \theta \Rightarrow \hat{\theta} = \min(x_i) = \min(0/8, 0/2, 0/3, 0/1, 0/6) = 0/1$$

مدرسان شریف

فصل هشتم

«آزمون فرض‌ها»

درسنامه (۱): خطای نوع اول و دوم

مقدمه

علاوه بر برآورد پارامترهای جامعه از روی داده‌های نمونه، هدف دیگر آمار استنباطی آزمون فرضیه‌ها است. در بسیاری از فعالیت‌های علمی بیشترین توجه معطوف پاسخ دادن به سؤالاتی درباره نظریه و فرضیات مربوط به پدیده‌های تحت مطالعه می‌باشد. در فصل قبل مشاهده شد که چگونه می‌توان برای پارامترهای مجهول جامعه برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای به‌دست آورد. امّا آنچه که در این فصل می‌خوانیم توجه به درستی و نادرستی فرضیاتی است که در مورد این پارامترها ممکن است مطرح شود. برای مثال می‌توانیم فرضیه‌ها یا نظریه‌هایی را به صورت زیر مطرح کنیم:

۱ـ میانگین طول عمر یک قطعه حداقل مقدار مشخصی دارد.
۲ـ میانگین‌های جامعه اول و جامعه دوم مساوی است.
۳ ـ پراکندگی مشاهدات در بین دو تولیدکننده تفاوتی ندارد.

اگر فرضیه‌ها را به‌صورت بالا در نظر بگیریم و در مورد درستی یا نادرستی آن‌ها شک و تردید کنیم می‌توان آزمایشی تصادفی را انجام داد که نتیجه آن ممکن است با فرضیه ما ناسازگار باشد؛ در این‌صورت بر اعتبار فرضیه تردید وارد می‌شود که تصمیم در مورد درستی یا نادرستی در معرض خطا است. نمی‌توانیم از خطاهای تصادفی پرهیز کنیم، اما می‌توانیم آزمایش‌هایی را انجام دهیم و آزمایش‌های تجربی را طوری طراحی کنیم که شک و تردیدها در مورد آزمایش بسیار کم بوده و خطای ما به اندازه مشخص روی دهد.

مفاهیم آزمون فرض‌ها

❖ **تعریف:** اگر X یک متغیر تصادفی و دارای توزیع احتمال به‌صورت $f(x;\theta)$ باشد گزاره یا حکمی که درباره پارامتر θ گفته می‌شود یک فرض آماری نام دارد. این گزاره می‌تواند درست یا نادرست باشد.

فرضی را که تا به حال مورد قبول بوده است و بر اثر شواهد و آزمایش مورد تردید قرار داده‌ایم فرض صفر می‌نامند و آن را با "H_0" نشان می‌دهند. فرضی را که در برابر "H_0" می‌باشد و ممکن است در آینده جانشین "H_0" شود فرض مقابل می‌نامند و آن را با "H_1"نشان می‌دهند. توجه کنید که فرضیه صفر همواره به‌صورت "$=$" یا "$\geq$" یا "$\leq$" می‌باشد.

❖ **تعریف:** فرضیه‌ای که کلیه پارامترهای یک توزیع یا جامعه را کاملاً مشخص کند فرضیه ساده و فرضیه‌ای که فقط بعضی از پارامترهای مدل را مشخص می‌کند فرضیه مرکب نامیده می‌شود.

به طور مثال فرض کنید فرضیه‌ای بیان می‌دارد که متغیری دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک باشد. این فرضیه، کلیه پارامترهای توزیع نرمال را (میانگین و واریانس) مشخص کرده است ولی اگر فرضیه طوری بیان شود که متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین صفر باشد در این صورت واریانس مجهول است و فرضیه مرکب است.

مثال۱: ادعا شده است که «نسبت ضایعات در یک کارخانه حداقل ۳۰ درصد است» فرض‌های آماری را مشخص کرده و بیان کنید که آیا این فرضیات ساده یا مرکب هستند؟

☑ **پاسخ:** فرضیه صفر فرضیه‌ای است که به دنبال بررسی آن هستیم (درستی یا نادرستی)، اگر نسبت ضایعات p باشد فرضیات به صورت زیر است:

$$\begin{cases} H_0 : P \geq \%30 \\ H_1 : P < \%30 \end{cases}$$

توجه کنید که نوع توزیع و مقدار توزیع مشخص است پس فرضیه ساده است.

مثال۲: فرضیه‌ای بدین صورت مطرح شده است که «متوسط طول عمر یک نوع ترانزیستور دارای توزیع نرمال با واریانس ۴ است.» فرضیه‌ها کدام است؟ بیان کنید فرضیه ساده یا مرکب است؟

☑ **پاسخ:** فرضیه H_0 فرضیه‌ای است که به دنبال بررسی درستی یا نادرستی آن هستیم:

با توجه به این‌که در اینجا میانگین توزیع نامعلوم است فرضیه مرکب است.

$$\begin{cases} H_0 : X \sim N(\mu, ۴) \\ H_1 : X \sim N(\mu, \sigma^2 \neq ۴) \end{cases} \equiv \begin{cases} H_0 : \sigma^2 = ۴ \,,\ -\infty < \mu < \infty \\ H_1 : \sigma^2 \neq ۴ \,,\ -\infty < \mu < \infty \end{cases}$$

مثال۳: یک فروشنده مواد غذایی در نظر دارد ترجیحاً خرید روغن نباتی خود را از تولید کننده دیگری انجام دهد. بدین منظور با نمونه‌گیری از ۲۵ محصول کارخانه جاری قصد آزمون فرض در مورد میانگین وزن قوطی‌های روغن را دارد که در این رابطه میانگین ۴۵۰۰ گرم برای هر قوطی مورد نظر است. فرضیه مقابل (H_1) این آزمون کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری ـ آزاد ۸۷)

۱) $H_1 : \mu > ۴۵۰۰$
۲) $H_1 : \mu < ۴۵۰۰$
۳) $H_1 : \mu \le ۴۵۰۰$
۴) $H_1 : \mu \ge ۴۵۰۰$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» فروشنده وقتی خرید را انجام می‌دهد که میانگین حداقل ۴۵۰۰ باشد، بنابراین فرض H_0 به‌صورت $H_0 : \mu \ge ۴۵۰۰$ و فرض مقابل H_1 به شکل $H_1 : \mu < ۴۵۰۰$ است.

مثال۴: یک کارخانه‌دار مدعی است که «متوسط تولیدات کارخانه اول او بیش از متوسط تولیدات کارخانه دوم او می‌باشد» فرضیه H_1 کدام است؟

۱) $\mu_1 > \mu_2$
۲) $\mu_1 \ge \mu_2$
۳) $\mu_1 \neq \mu_2$
۴) $\mu_1 \le \mu_2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ادعا در H_1 بدون تساوی قرار می‌گیرد.

مثال ۵: فروشنده‌ای ادعا کرده است که بیش از ۶۰ درصد تولیدات او حداقل ۲۰ سال عمر می‌کند. فرضیه‌های آماری برای آزمون ادعا کدام است؟

۱) $\begin{cases} H_0 : p \ge \%۶۰ \\ H_1 : p \le \%۶۰ \end{cases}$
۲) $\begin{cases} H_0 : p \le \%۶۰ \\ H_1 : p > \%۶۰ \end{cases}$
۳) $\begin{cases} H_0 : p \ge \%۶۰ \\ H_1 : p < \%۶۰ \end{cases}$
۴) $\begin{cases} H_0 : p < \%۶۰ \\ H_1 : p \ge \%۶۰ \end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به گزینه‌های این سؤال می‌توان فهمید که ادعای فروشنده بر مقدار تولیدات است و نه طول عمر آن‌ها و مقدار طول عمر (حداقل ۲۰ سال) صفت مورد بررسی می‌باشد. اکنون ادعای فروشنده شامل تساوی نیست «بیش از ۶۰% تولیدات»، پس آن‌را در H_1 و خلاف آن را در H_0 قرار می‌دهیم بنابراین، فرضیه‌ها به‌صورت روبه‌رو می‌باشد:

$$\begin{cases} H_0 : P \le \%۶۰ \\ H_1 : P > \%۶۰ \end{cases}$$

آزمون‌های یک دامنه و دو دامنه (یک طرفه و دو طرفه)

با توجه به مثال‌ها و مطالب گفته شده در بالا می‌توان نتیجه گرفت که آزمون‌های آماری به صورت سه مدل زیر می‌باشند: (در حالت یک بعدی)

(آزمون یک دامنه به راست) آزمونی که فرضیه H_1 آن علامت بزرگ‌تر دارد:

$$\begin{cases} H_0 : \theta \le \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$$

(آزمون یک دامنه به چپ) آزمونی که فرضیه H_1 آن علامت کوچک‌تر دارد:

$$\begin{cases} H_0 : \theta \ge \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases}$$

(آزمون دو دامنه) آزمونی که فرضیه H_1 آن علامت نامساوی دارد:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

آزمون‌های سخت‌گیرانه و سهل‌گیرانه

در پاره‌ای از مواقع مدل‌سازی و تشکیل فرضیه‌ها با مفهومی که در قبل گفته شد مغایرت دارد. در بعضی از اوقات جای فرضیه‌ها عوض می‌شوند و ادعاهای مورد بررسی در فرضیه "H_0" قرار نمی‌گیرند. برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید.
فرض کنید کارخانه‌ای تولیدکننده‌ی قطعات خودرو می‌باشد. او فولاد مورد نیاز خود را از کارخانه‌ای خریداری می‌کند که میانگین درجه سختی فولاد او ۵۰ راکول (مقیاس اندازه‌گیری درجه سختی) است. کارخانه جدیدی که تولیدکننده فولاد است مدعی است که می‌تواند با همان قیمت کارخانه قبل فولادی با درجه سختی بالاتر از ۵۰ تأمین کند. اکنون تولیدکننده براساس یک نمونه تصادفی به بررسی ادعای او می‌پردازد. اگر تولیدکننده نسبت به تأمین‌کننده اول خود رضایت کامل داشته باشد علاقه‌مند به همکاری با او می‌باشد و به سختی دست به تغییر شرایط می‌زند در این صورت، اصطلاحاً گفته می‌شود که تولیدکننده نسبت به تأمین‌کننده جدید سخت‌گیری می‌کند، لذا شیوه تصمیم‌گیری او بدین صورت است که اگر میانگین سختی فولاد تأمین‌کننده جدید مساوی یا کمتر از ۵۰ باشد لزومی به عدم همکاری با تأمین‌کننده اول نیست و حتی اگر میانگین سختی فولاد تأمین‌کننده جدید به مقدار ناچیزی بیشتر از ۵۰ باشد باز هم ممکن است لزومی به عدم همکاری با تأمین‌کننده اول نباشد، اما اگر متوسط سختی فولاد به مقدار قابل توجهی از عدد ۵۰ بیشتر باشد تولیدکننده علاقه‌مند به همکاری با تأمین‌کننده جدید می‌باشد.

فصل نهم

«رگرسیون و همبستگی»

درسنامه (۱): خط کمترین مربعات

مقدمه

تحلیل‌های رگرسیونی روش‌هایی برای بررسی و تعیین روابط تابعی میان متغیرها هستند. کاربردهای رگرسیون در بسیاری از علوم به ویژه علوم مهندسی بسیار قابل توجه است. در حقیقت به نظر می‌رسد تحلیل‌های رگرسیونی در بین سایر تکنیک‌های علم آمار یکی از وسیع‌ترین و پرکاربردترین تکنیک آماری باشد. به‌عنوان مثال فرض کنیم یک مهندس صنایع در کارخانه تولید نوشابه استخدام شده و گمان می‌کند که مدت زمان لازم برای سرویس‌دهی به ماشین‌های حمل نوشابه، بستگی به تعداد محصول و زمان تحویل بار دارد. او ۲۵ راننده حمل را به تصادف بازدید کرده و برای هریک مدت زمان سرویس‌دهی، زمان تحویل و تعداد محصول را ثبت کرده است.

اگر y نشان‌دهنده مدت زمان سرویس‌دهی و x_1 و x_2 به ترتیب تعداد محصول و زمان تحویل بار باشند، به متغیر Y متغیر وابسته یا متغیر پاسخ و به x_1 و x_2 متغیرهای مستقل گفته می‌شود.

اکنون می‌توان الگویی مناسب بین متغیرها به‌صورت $y = f(x_1, x_2) + \varepsilon$ تقریب زد که در اینجا ε خطای تصادفی است که پراکندگی‌ها را نشان می‌دهد. در تحلیل رگرسیون، یکی از اهداف موردنظر یافتن و تعیین تابع f به‌عنوان تابع رگرسیونی با استفاده از داده‌های جمع‌آوری شده و نیز پیش‌بینی مقدار متغیر پاسخ به ازای مقادیر مختلف متغیرهای مستقل می‌باشد.

مثال‌ها و کاربردهای فراوانی از رگرسیون در کتاب‌ها و در اینترنت وجود دارد که به دانشجویان عزیز و گرامی پیشنهاد می‌شود به مطالعه و تحقیق در مورد آن‌ها به جد بپردازند، چرا که این تکنیک آماری در عمل و کاربرد بسیار سودمند است.

کتاب نوشته شده توسط چترجی، هندکوک و سیمینوف در سال ۱۹۹۵ داده‌های بی‌شماری را از بررسی‌های متفاوت ارائه کرده است که می‌تواند منبع مناسبی برای استفاده از داده‌ها باشد. همچنین سایت http://www.lib.stat.cmu.edu یکی از سایت‌های بسیار مناسب است که مجموعه‌ای از داده‌ها را همراه با پیشینه آن‌ها و زمینه مرتبط با آن‌ها شامل می‌شود.

تحلیل رگرسیون یک رویه‌ای همراه با تکرار و بازنگری است که در آن داده‌ها را به سمت یک مدل ریاضی رهنمون می‌کنیم و سپس کیفیت این مدل بررسی شده و در پایان ممکن است که نتیجه کار به اصلاح مجدد مدل و یا پذیرش و یا رد مدل بینجامد.

مراحل یک تحلیل رگرسیون

۱ـ بیان مسئله ۲ـ انتخاب متغیرهای مناسب ۳ـ جمع‌آوری داده‌ها ۴ـ تشخیص مدل (خطی ـ غیرخطی)

۵ـ انتخاب روش برازش ۶ـ برازش داده‌ها بر الگو یا مدل ۷ـ اعتبار الگو و بازنگری آن

در ادامه به تحلیل و بررسی انجام این ۷ مرحله تا حد امکان خواهیم پرداخت و تئوری آن‌ها به‌صورت قضایا و تعاریف گفته خواهد شد.

رگرسیون خطی ساده

یکی از مدل‌های بسیار ساده مدل رگرسیون خطی ساده می‌باشد. اگر Y متغیر پاسخ یا وابسته و X متغیر مستقل باشد و توزیع توأم (X, Y) وجود داشته باشد به میانگین Y به شرط x یعنی $E(Y \mid X = x)$، تابع رگرسیونی Y نسبت به X گویند.

قضیه ۱: اگر Y یک متغیر وابسته و X متغیر مستقل باشد بهترین تابع پیش‌بینی‌کننده برای Y امید ریاضی شرطی متغیر Y بر روی X است.

$(E(Y \mid X = x))$

مثال ۱: توزیع احتمال توأم X و Y در جدول زیر داده شده است. مقدار رگرسیون X و Y را به ازای مقدار $y=-1$ بدست آورید. (مهندسی صنایع ـ آزاد ۹۱)

y \ x	−۱	۱
−۱	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
۰	۰	$\frac{1}{4}$
۱	$\frac{1}{8}$	۰

۱) $\frac{3}{8}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) صفر
۴) $\frac{3}{5}$

پاسخ : گزینه «۴» مقدار رگرسیون x به شرط y عبارت است از:

$$E(X\mid Y=-1)=\sum x.p(x\mid Y=-1)$$

ابتدا احتمال شرطی را به‌دست می‌آوریم:

$$p(X\mid Y=-1)=\frac{p(X,Y=-1)}{p(Y=-1)}=\begin{array}{c|cc} x & -1 & 1 \\ \hline & \frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{8}}=\frac{1}{5} & \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}}=\frac{4}{5} \end{array}$$

$$E(X\mid Y=-1)=-1\times\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$$

مثال ۲: فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با تابع توزیع احتمال توأم روبه‌رو باشند: $x=0,1,2,y=0,1,2$; $P_{(X,Y)}=\frac{(x+1)(y+2)}{54}$ در این شرایط رگرسیون Y نسبت به X در نقطه یک کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{11}{9}$
۲) $\frac{3}{9}$
۳) $\frac{8}{9}$
۴) $\frac{2}{9}$

پاسخ: گزینه «۱» رگرسیون y بر روی x طبق قضیه $E(Y\mid X=x)$ است، بنابراین:

$$E(Y\mid X=1)=\sum_{y=0}^{2}y.P(y\mid X=1)$$

ابتدا احتمال شرطی $P(y\mid x=1)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$P(Y\mid X=1)=\frac{P(X=1,y)}{P(X=1)}=\frac{y+2}{\sum_{y=0}^{2}P(1,y)}=\frac{y+2}{9}$$

$$E(Y\mid X=1)=\sum_{y=0}^{2}y.P(y\mid X=1)=(0\times\frac{0+2}{9})+(1\times\frac{1+2}{9})+(2\times\frac{2+2}{9})=\frac{1}{3}+\frac{8}{9}=\frac{11}{9}$$

توجه: در حالت خاصی که $E(Y\mid X=x)=\alpha+\beta x$ یا $Y=\alpha+\beta x+\varepsilon$ باشد رگرسیون خطی ساده Y بر روی X به وجود می‌آید.

قضیه ۲: فرض کنید (X,Y) دارای تابع چگالی (احتمال) توأم باشند. اگر رگرسیون Y روی X، خطی ساده باشد و $E(Y\mid X=x)=\alpha+\beta x$ آن‌گاه:

$$\begin{cases}\alpha=\mu_y-\beta\mu_x\\ \beta=\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\end{cases}$$

اثبات: بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $f(x,y)$ تابع چگالی توأم (X,Y) باشد، در این صورت:

$$E(Y\mid X=x)=\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot\frac{f(x,y)}{f(x)}dy=\alpha+\beta x$$

با توجه به این‌که مخرج کسر $(f(x))$ به y وابسته نیست از طرفین وسطین کردن رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\mu_y=\int_{-\infty}^{\infty}y.f(x,y)dy=\alpha f(x)+\beta xf(x) \quad ① \text{ رابطه}$$

اکنون از دو طرف نسبت به x انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$\mu_y=\int_{-\infty}^{\infty}y.f(x,y)\,dydx=\int_{-\infty}^{\infty}y(\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx)dy=\int_{-\infty}^{\infty}yf_y(y)dy$$

$$=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx+\beta\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\alpha+\beta\mu_x\rightarrow\mu_y=\alpha+\beta\mu_x\rightarrow\alpha=\mu_y-\beta\mu_x$$

با قرار دادن این مقدار α در رابطه ① و همچنین $\mu_y f_x(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mu_y f(x,y)\,dy$ خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_y)f(x,y)dy=(\mu_y-\beta\mu_x)f(x)+\beta x f(x)=\beta(x-\mu_x)f(x)$$

اکنون دو طرف تساوی را در $(x-\mu_x)$ ضرب کرده، با انتگرال‌گیری نسبت به x داریم:

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)(y-\mu_y)f(x,y)dydx}_{Cov(x,y)=\sigma_{xy}}=\beta\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^{۲}f(x)dx\Rightarrow\sigma_{xy}=\beta\sigma_x^{۲}\Rightarrow\beta=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}\times\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

با توجه به اثبات قضیه فوق مشاهد شد که در همه جا از تابع چگالی توأم استفاده کردیم ولی در اغلب مسائل کاربردی این تابع وجود ندارد، بنابراین α و β را نمی‌توان به طور مستقیم و دقیق به دست آورد و باید آن‌ها را با روش‌های برآوردیابی، برآورد کرد. در ادامه به برآوردهای α و β (پارامترهای مدل‌ها) می‌پردازیم.

برآورد پارامترهای مدل به روش کمترین مربعات خطا

برای برآورد پارامترهای α و β از روشی به نام کمترین مربعات خطا استفاده می‌کنیم. برای این منظور نمونه‌ای زوجی به صورت $(x_۱,y_۱),....,(x_n,y_n)$ اختیار می‌کنیم و سپس مربعات خطا را تشکیل می‌دهیم. اکنون این تابع را مینیمم می‌کنیم:

$$y_i=\alpha+\beta x_i+e_i \qquad i=۱,۲,....,n$$

$$A=\sum_{i=۱}^{n}e_i^{۲}=\sum_{i=۱}^{n}(y_i-\alpha-\beta x_i)^{۲}$$

از A نسبت به α و β مشتق گرفته مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial A}{\partial\alpha}=\circ\Rightarrow -۲\displaystyle\sum_{i=۱}^{n}(y_i-\alpha-\beta x_i)=\circ\Rightarrow n\overline{y}-n\alpha-n\beta\overline{x}=\circ\Rightarrow\alpha=\overline{Y}-\beta\overline{X}\\ \dfrac{\partial A}{\partial\beta}=\circ\Rightarrow -۲\displaystyle\sum_{i=۱}^{n}x_i(y_i-\alpha-\beta x_i)=\circ\Rightarrow\sum_{i=۱}^{n}X_iY_i-\alpha\sum_{i=۱}^{n}x_i-\beta\sum_{i=۱}^{n}X_i^{۲}=\circ\end{cases}$$

از معادله اول مقدار α را به‌صورت روبه‌رو برآورد می‌کنیم:

$$\hat{\alpha}=\overline{y}-\hat{\beta}\overline{x}$$

در معادله دوم قرار می‌دهیم تا β به دست آید:

$$\sum_{i=۱}^{n}x_iy_i-\sum_{i=۱}^{n}x_i\overline{y}+\sum_{i=۱}^{n}x_i\beta\overline{x}-\sum_{i=۱}^{n}\beta x_i^{۲}=\circ$$

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=۱}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=۱}^{n}x_i^{۲}-n\overline{x}^{۲}}=\frac{\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\overline{x})y_i}{\sum_{i=۱}^{n}x_i^{۲}-n\overline{x}^{۲}}=\frac{\sum(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=۱}^{n}x_i^{۲}-n\overline{x}^{۲}}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}};\begin{cases}S_{xy}=\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=\sum x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}\\ S_{xx}=\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\overline{x})^{۲}=\sum_{i=۱}^{n}x_i^{۲}-n\overline{x}^{۲}\end{cases},\alpha=\overline{y}-\hat{\beta}\overline{x}$$

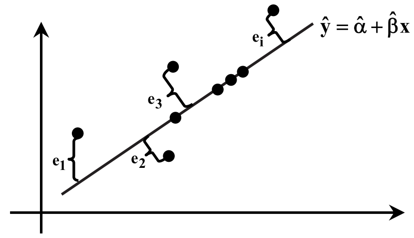
با برآورد α و β خط رگرسیون ساده به‌صورت روبه‌رو می‌باشد:

$$\hat{\mathbf{y}}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}\mathbf{x}$$

در شکل زیر خط برازش شده نشان داده شده است که بعضی از نقاط با آن فاصله دارند و بعضی از نقاط دقیقاً بر روی خط قرار دارند:

با توجه به شکل، e_iها یعنی خطای نقاط برآورد شده که به آن‌ها باقی‌مانده‌ها گفته می‌شود:

$$e_i=y_i-\hat{y}_i=y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i$$



مدرسان شریف

فصل دهم

«آمار توصیفی»

درسنامه (۱): شاخص‌های مرکزی

مطالعه توصیفی داده‌ها (آمار توصیفی)

در آمار توصیفی به توصیف اعداد و ارقام می‌پردازیم. توصیف داده‌های آماری بدون توجه به نوع داده‌ها به سه دسته کلی تقسیم می‌شود:

۱ـ تنظیم و طبقه‌بندی داده‌ها در یک جدول (جدول فراوانی)

۲ـ رسم نمودارهای گوناگون با استفاده از مقادیر جدول

۳ـ خلاصه کردن داده‌ها به یک یا چند عدد موسوم به شاخص یا آماره

در اینجا به شرح مراحل بالا می‌پردازیم که برای دو نوع داده‌های طبقه‌بندی نشده (داده‌های خام) و داده‌های طبقه‌بندی شده تعریف می‌شوند.

جدول فراوانی

این جدول یکی از ساده‌ترین و متداول‌ترین جداول آماری است که شامل پارامترهای مختلف بوده و در زیر به تعریف آن‌ها می‌پردازیم:

مراحل ساخت یک جدول فراوانی برای داده‌های طبقه‌بندی شده (پیوسته):

۱ـ دریافت داده‌های خام و در صورت لزوم گرد کردن آن‌ها.

۲ـ تعداد طبقات را تعیین می‌کنیم. دو رابطه تجربی زیر قواعدی مفید هستند:

(دستور استورجس) $K = ۱ + ۳/۳۲۲\log_{۱۰}^{n}$ تعداد طبقات (دستور تقریبی) $K = \sqrt{n}$ تعداد طبقات

۳ـ $\dfrac{\text{واحد گرد شده داده‌ها}}{۲} =$ میزان تغییرپذیری داده‌ها

۴ـ دامنه داده‌ها را که برابر با تفاضل کوچک‌ترین داده از بزرگ‌ترین داده می‌باشد، به‌دست می‌آوریم. (R) $R = \max x_i - \min x_i$

۵ ـ طول هر رده یا طبقه از تقسیم دامنه بر تعداد رده (K) به‌دست می‌آید. $I = \dfrac{R}{K}$

فراوانی مطلق و فراوانی نسبی

اگر n داده از k نوع داشته باشیم و تعداد این داده‌ها در k طبقه به ترتیب $F_۱, F_۲, \dots, F_k$ باشند به تعداد آن‌ها فراوانی‌های مطلق طبقات و بـه $f_۱ = \dfrac{F_۱}{n}$ و $f_۲ = \dfrac{F_۲}{n}$ و . . . و $f_k = \dfrac{F_k}{n}$ فراوانی‌های نسبی طبقات گفته می‌شود.

$$۱ \le F_i \le n \ \Rightarrow\ F_۱ + F_۲ + \cdots + F_k = \sum_{i=۱}^{k} F_i = n \qquad ; \qquad ۰ \le f_i \le ۱ \ \Rightarrow\ f_۱ + f_۲ + \cdots + f_k = \sum_{i=۱}^{k} f_i = ۱$$

فراوانی‌های تجمعی و فراوانی‌های تجمعی نسبی

اگر در هر طبقه، فراوانی آن طبقه و طبقات ما قبل از آن را با یکدیگر جمع کنیم فراوانی تجمعی آن طبقه به‌دست می‌آید و اگر در هر طبقه، فراوانی نسبی آن طبقه و طبقات ماقبل را با هم جمع کنیم فراوانی تجمعی نسبی آن طبقه به‌دست می‌آید:

فراوانی تجمعی طبقه j ام: $Fc_j = F_۱ + F_۲ + \cdots + F_j$

فراوانی تجمعی نسبی طبقه j ام: $fc_j = f_۱ + f_۲ + \cdots + f_j$

مثال۱: وزن تعدادی دانش‌آموز به صورت زیر داده شده است، یک جدول فراوانی مناسب برای آن‌ها تشکیل دهید.

۳۷ – ۳۲ – ۳۸ – ۳۴ – ۳۲ – ۴۰ – ۳۸ – ۳۲ – ۳۵ – ۳۴ – ۲۹ – ۳۶ – ۳۷ – ۲۴ – ۳۵ – ۳۹ – ۳۳ – ۴۲ – ۴۵ – ۳۰ – ۴۳ – ۳۲ – ۲۹ – ۲۷ – ۲۲

پاسخ: مراحل ساخت جدول فراوانی را به‌ترتیب اجرا می‌کنیم:

$$K = ۱ + ۳/۳۲۲ \log_{۱۰} ۲۵ = ۱ + ۳/۳۲۲(۱/۳۹) = ۵/۶۴ \simeq ۶$$

داده‌ها با تقریب ۱ گرد شده‌اند چون ممیز آن‌ها از بین رفته است: $\text{میزان تغییرپذیری} = \frac{۱}{۲} = ۰/۵$

$$R = \max x_i - \min x_i = ۴۵/۵ - ۲۱/۵ = ۲۴ \qquad I = \frac{R}{K} = \frac{۲۴}{۶} = ۴$$

حدود واقعی طبقات	x_i	F_i	f_i	Fc_i	fc_i
۲۱/۵ - ۲۵/۵	۲۳/۵	۲	۰/۰۸	۲	۰/۰۸
۲۵/۵ – ۲۹/۵	۲۷/۵	۳	۰/۱۲	۵	۰/۲۰
۲۹/۵ – ۳۳/۵	۳۱/۵	۶	۰/۲۴	۱۱	۰/۴۴
۳۳/۵ – ۳۷/۵	۳۵/۵	۷	۰/۲۸	۱۸	۰/۷۲
۳۷/۵ – ۴۱/۵	۳۹/۵	۴	۰/۱۶	۲۲	۰/۸۸
۴۱/۵ – ۴۵/۵	۴۳/۵	۳	۰/۱۲	۲۵	۱

توجه کنید که در جدول فراوانی، x_i نماینده دسته (مرکز دسته) حد وسط حدود واقعی طبقات می‌باشد.

نکات مربوط به جدول

۱) همواره جمع فراوانی‌های مطلق برابر با تعداد کل داده‌ها می‌باشد. $\sum_{i=۱}^{k} F_i = n$

۲) همواره جمع فراوانی‌های نسبی برابر با ۱ می‌باشد. $\sum_{i=۱}^{k} f_i = ۱$

۳) فراوانی نسبی هر طبقه از تقسیم فراوانی مطلق آن طبقه تقسیم بر کل داده‌ها حاصل می‌شود. $f_i = \frac{F_i}{n}$

۴) فراوانی تجمعی طبقه آخر جدول برابر با تعداد کل داده‌ها است. $Fc_k = n$

۵) فراوانی تجمعی نسبی طبقه آخر جدول همواره برابر با ۱ است. $fc_k = ۱$

۶) تفاضل فراوانی تجمعی دو طبقه متوالی برابر با فراوانی مطلق طبقه بالاتر است. $F_i = Fc_i - Fc_{i-۱}$

۷) تفاضل فراوانی تجمعی نسبی دو طبقه متوالی برابر با فراوانی نسبی طبقه بالاتر است. $f_i = fc_i - fc_{i-۱}$

مثال۲: در یک جدول توزیع فراوانی حجم نمونه برابر با ۴۰ و فراوانی مطلق طبقه سوم آن برابر با ۵ است. درصد فراوانی نسبی آن کدام است؟

۱) ۰/۰۵	۲) ۰/۱۲۵	۳) ۵	۴) ۱۲/۵

پاسخ: گزینه «۴» از رابطه بین فراوانی نسبی و فراوانی مطلق استفاده می‌کنیم، مقادیر را جایگذاری می‌کنیم:

$$f_i = \frac{F_i}{n} \Rightarrow f_i = \frac{۵}{۴۰} = ۰/۱۲۵ = \%۱۲/۵ \Rightarrow \text{درصد فراوانی نسبی} = f_i \times ۱۰۰ = ۰/۱۲۵ \times ۱۰۰ = \%۱۲/۵$$

مثال۳: در یک جدول توزیع فراوانی که شامل ۵۰ داده آماری است و به صورت غیرنزولی مرتب شده است فراوانی تجمعی دسته ماقبل آخر برابر با ۴۲ می‌باشد، درصد فراوانی نسبی طبقه آخر کدام است؟

۱) ۸۴	۲) ۴۲	۳) ۱۶	۴) ۱۲

پاسخ: گزینه «۳» توجه کنید که فراوانی تجمعی طبقه آخر با تعداد داده‌ها $n = ۵۰$ برابر است بنابراین از نکته (۶) در بالا استفاده می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\text{فراوانی مطلق طبقه آخر} = ۵۰ - ۴۲ = ۸ \Rightarrow f_i = \frac{F_i}{n} = \frac{۸}{۵۰} = ۰/۱۶ \Rightarrow \text{درصد فراوانی نسبی} = f_i \times ۱۰۰ = ۰/۱۶ \times ۱۰۰ = ۱۶$$

مثال۴: در ۱۲۰ داده آماری کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقادیر به ترتیب ۳۵ و ۵۷ می‌باشند. این داده‌ها در ۹ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. اگر ۳۲ درصد داده‌ها کمتر از ۴۵ و همچنین ۴۷ درصد داده‌ها کمتر از ۴۷/۵ باشند فراوانی مطلق دسته وسط کدام است؟

۱) ۱۲	۲) ۱۵	۳) ۱۶	۴) ۱۸