مدرسان شریف

فصل اول

«کلیات»

کلیات

❖ **تعریف سیال:** سیال ماده‌ای است که حتی یک تنش برشی کوچک نیز باعث تغییر شکل پیوسته آن شود.

سیال می‌تواند به صورت مایع یا گاز باشد.

برعکس، ماده جامد وقتی تحت تأثیر تنش برشی قرار بگیرد، دچار تغییر شکل محدود و مشخصی می‌شود (یا به طور کلی می‌شکند).

تأثیر تنش برشی روی جامد و سیال

مقایسه جامدات و سیالات:

۱ـ جامدات دارای شکل مشخص و معینی هستند ولی سیالات شکل معینی ندارند.

۲ـ سیالات به شرط ساکن نبودن، (سیال، ماده‌ای است که در حالت سکون نمی‌تواند در برابر تنش برشی مقاومت کند) قادر به تحمل هر میزانی از تنش برشی هستند، در حالی که جامدات تنها تا تنش تسلیم می‌توانند تنش برشی را تحمل کنند.

۳ـ سیالات تحت تأثیر تنش برشی هر چند ناچیز به طور پیوسته تغییر شکل و حرکت خواهند داشت، در حالی که جسم جامد می‌تواند در برابر تنش برشی مقاومت کند و تغییر شکل محدود و مشخصی دارد.

تقسیم‌بندی مکانیک سیالات:

۱) استاتیک سیالات:
- ۱ـ هیدرواستاتیک: استاتیک **سیالات** تراکم‌ناپذیر (مایعات)
- ۲ـ آئرواستاتیک: استاتیک **سیالات** تراکم‌پذیر (گازها)

۲) دینامیک سیالات:
- ۱ـ هیدرودینامیک: دینامیک **جریان** تراکم‌ناپذیر
- ۲ـ آئرودینامیک: دینامیک **جریان** تراکم‌پذیر

نکته ۱: جریان گازها با عدد ماخ کوچک‌تر از ۰/۳ را می‌توان با روابط هیدرودینامیک تحلیل نمود (تراکم‌ناپذیر فرض می‌شود).

سیالات و محیط پیوسته: هر چند سیال متشکل از تعداد بی‌شماری مولکول است و در نتیجه یک خاصیت سیال (مانند دما) در واقع برآیند خواص مولکول‌ها می‌باشد، ولی در کاربردهای مهندسی سیال یک محیط پیوسته (و نه محیطی متشکل از مولکول‌های جدا از هم) در نظر گرفته می‌شود. این فرض در اکثر مسائل سیالات معتبر است به جز مواردی که فاصله مولکول‌های سیال قابل مقایسه با ابعاد مسأله باشد، مثلاً بررسی پرواز یک جسم بسیار کوچک در لایه‌های بالای اتمسفر (جایی که فاصله مولکول‌های هوا از هم زیاد است). در چنین مواردی قوانین مکانیک سیالات پیوسته صادق نیست و باید از تحلیل‌های مولکولی استفاده شود.

خواص سیال و جریان:

خواص مورد مطالعه در مکانیک سیالات به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱ـ خواصی که مشخصه ذاتی یک سیال بوده و به نحوه جریان آن مربوط نیستند، **خواص سیال** نامیده می‌شوند، مانند لزجت و کشش سطحی.

۲ـ خواصی که مشخصه ذاتی یک سیال نبوده و به نحوه جریان آن مربوط هستند، **خواص جریان** نامیده می‌شوند، مانند فشار و جرم مخصوص.

قانون لزجت (ویسکوزیته) نیوتن: در یک جریان منظم که ذرات سیال خطوط مستقیم و موازی را می‌پیمایند (جریان موازی یک بعدی)، برای سیالات بخصوصی به نام سیالات نیوتنی، تنش برشی روی سطحی مماس بر امتداد جریان متناسب است با میزان تغییر سرعت در راستای عمود بر آن سطح.

(n امتداد عمود بر راستای جریان است.)

$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial n}$$

در رابطه قانون لزجت (ویسکوزیته) نیوتن، μ لزجت دینامیکی بوده و واحد آن در سیستم واحدهای مختلف عبارت است از:

$$\frac{kg}{m.s} = \frac{N.s}{m^2} = pa.s \quad , \quad \frac{slug}{ft.s} \quad , \quad (\text{پواز})\ Poise = \frac{g}{cm.s} \quad , \quad cp = ۰/۰۰۱ pa.s$$

بعد لزجت دینامیکی، $ML^{-1}T^{-1}$ یا $FL^{-2}T$ است.

مثال ۱: توزیع سرعت یک مایع لزج ($\mu = ۰/۹ N.s/m^2$) بر روی یک سطح صلب به وسیله رابطه $u = ۰/۶۸y - y^2$ داده شده است. u سرعت مایع بر حسب m/s در فاصله y متر از سطح صلب می‌باشد. تنش برشی در نقطه $y = ۰/۱۷ m$ از سطح برابر است با:

۱) $۰/۶۱۲ N/m^2$ ۲) $۰/۳۴۰ N/m^2$ ۳) $۰/۳۰۶ N/m^2$ ۴) $۰/۱۵۳ N/m^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از قانون لزجت نیوتن، برای محاسبه تنش برشی داریم:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

پس از مشتق‌گیری از رابطه سرعت $u = ۰/۶۸y - y^2$ و قرار دادن در رابطه بالا داریم:

$$\frac{du}{dy} = ۰/۶۸ - ۲y \Rightarrow \tau = \mu(۰/۶۸ - ۲y)$$

$$\tau|_{y=۰/۱۷} = ۰/۹(۰/۶۸ - ۲\times ۰/۱۷) \Rightarrow \tau = ۰/۳۰۶ \left(\frac{N}{m^2}\right)$$

مثال ۲: سیالی با لزجت دینامیکی $\mu = ۰/۰۰۹۵۸ N.s/m^2$ در لوله‌ای به قطر $۱۰ cm$ جریان دارد. توزیع سرعت آن به صورت سهمی و طبق معادله $V = ۰/۱۳۷۲[۱-(\frac{r}{R})^2]$ است که در آن V بر حسب m/s، r فاصله شعاعی از مرکز لوله و R شعاع لوله است. تنش برشی وارده بر جدار لوله چند N/m^2 است؟

۱) $۰/۰۰۰۵۲۶$ ۲) $۰/۰۱۳۱$ ۳) $۰/۰۵۲۶$ ۴) $۰/۱۳۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از توضیحات قبل داریم:

$$R = ۰/۰۵ \ (m) \ , \ \mu = ۰/۰۰۹۵۸ \left(\frac{N.s}{m^2}\right) \qquad \frac{dv}{dr} = ۰/۱۳۷۲\left(\frac{-۲r}{R^2}\right) \qquad \tau = -\mu \frac{dv}{dr}$$

$$\tau_w = ۰/۰۰۹۵۸ \times ۰/۱۳۷۲ \times \frac{۲}{۰/۰۵} \Rightarrow \tau_w = ۰/۰۵۲۶ \left(\frac{N}{m^2}\right) \qquad r = R : \text{در جداره لوله}$$

علامت منفی در قانون لزجت نیوتن به خاطر جابه‌جایی مبدأ مختصات است.

مثال ۳: کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

۱) برای کلیه سیالات، ویسکوزیته یک خاصیت سیال است.

۲) فقط برای سیال نیوتنی، ویسکوزیته خاصیت سیال محسوب می‌شود.

۳) برای سیال نیوتنی، ویسکوزیته وابسته به تنش برشی است.

۴) برای سیال نیوتنی، ویسکوزیته فقط به شدت برشی بستگی دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای کلیه سیالات (نیوتنی و غیرنیوتنی)، ویسکوزیته خاصیتی از سیال محسوب می‌شود.

مثال ۴: توزیع سرعت در سیالی تراکم‌ناپذیر و نیوتنی در یک کانال استوانه‌ای از رابطهٔ $V_z = ۶[۱-(r/R)^۲]$ تبعیت می‌کند. اگر ویسکوزیته سیال $۲\ cp$ باشد، مقدار نیروی وارد شده بر دیواره کانال بر واحد طول کانال چند N می‌باشد؟

۱) ۲۴×۱۰^{-۳} ۲) $۴۸\pi\times۱۰^{-۳}$ ۳) ۴۸π ۴) $۰/۰۴$

پاسخ: گزینه «۲»

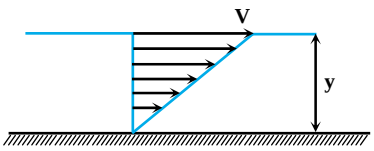
$$V_z = ۶[۱-(\frac{r}{R})^۲] \Rightarrow \frac{dV_z}{dr} = -\frac{۱۲r}{R^۲}$$

قانون لزجت نیوتن: $\tau_w = -\mu\frac{dV_z}{dr}\big|_{r=R} = -\mu(-\frac{۱۲r}{R^۲})\big|_{r=R}$ $\qquad \tau_w = \frac{۱۲\mu}{R}$

نیروی وارد بر دیواره کانال: $f = \tau_w A = \frac{۱۲\mu}{R}(۲\pi RL) \Rightarrow \frac{f}{L} = ۲۴\pi\mu$

$$\frac{f}{L} = ۲۴\pi\times۲\times۱۰^{-۳} \Rightarrow \frac{f}{L} = ۴۸\pi\times۱۰^{-۳}\ (\frac{N}{m})$$

نکته ۲: اگر ضخامت سیال نازک باشد، نمودار سرعت به صورت خطی خواهد بود:



پروفیل سرعت در سیال با ضخامت نازک

$$\tau = \mu\frac{dV}{dy} = \mu\frac{V-۰}{y}$$

$$\boxed{\tau = \mu\frac{V}{y}}$$

توجه شود که روی صفحه پایینی سرعت ذرات سیال صفر است (شرط مرزی عدم لغزش)، اما اگر سطح پایینی حرکت داشته باشد به جای سرعت V، سرعت نسبی بین دو صفحه قرار داده می‌شود.

شرط مرزی عدم لغزش (no slip): سیال در مرز تماس با جامد به آن می‌چسبد و در نتیجه سرعت آن با سرعت مرز جامد یکسان است.

لزجت دینامیکی بیانگر مقاومت سیال در مقابل تنش برشی بوده و اساس مکانیزم انتقال ممنتوم در سیال است. لزجت دینامیکی زمانی ظاهر می‌شود که بین لایه‌های سیال، حرکت نسبی وجود داشته باشد.

نکته ۳: قانون لزجت نیوتن فقط برای جریان آرام صادق است.

از قانون لزجت نیوتن استنباط می‌شود که سیال ساکن دارای هیچ گونه تنش برشی نیست. هم‌چنین تنش برشی در صورتی ایجاد می‌شود که بین لایه‌های سیال اختلاف سرعت وجود داشته باشد.

بنا به تعریف، لزجت سینماتیکی (ν) از رابطه زیر به دست می‌آید:

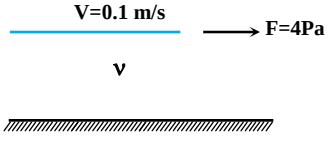
$$\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho}}$$

واحدهای مختلف ν عبارتند از:

$$\frac{m^۲}{s}\ ,\ \frac{ft^۲}{s}\ ,\ \frac{cm^۲}{s} = \text{stoke}\ \text{(استوک)}$$

بعد لزجت سینماتیکی $L^۲T^{-۱}$ است.

مثال ۵: یک صفحه شیشه‌ای متحرک به فاصله $۱\ mm$ از صفحه ثابت دیگری قرار دارد. بین دو صفحه از سیالی با جرم مخصوص $۱۰۰۰\frac{kg}{m^۳}$ پر شده است. اگر نیروی لازم در واحد سطح برای حرکت صفحه متحرک با سرعت ثابت $۰/۱\frac{m}{s}$ معادل $۴Pa(\frac{N}{m^۲})$ باشد، ضریب لزجت سینماتیکی سیال ν برابر چند $\frac{m^۲}{s}$ است؟



۱) $۱۰^{-۵}$
۲) $۰/۰۴\times۱۰^{-۳}$
۳) $۰/۰۲\times۱۰^{-۳}$
۴) $۰/۴$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به معلوم بودن جرم مخصوص (ρ)، برای محاسبه لزجت سینماتیکی باید لزجت دینامیکی محاسبه شود. لذا با استفاده از قانون لزجت نیوتن داریم:

$$\tau = \mu \frac{\Delta V}{h} \qquad ۴ = \mu \frac{۰/۱ - ۰}{۱ \times ۱۰^{-۳}} \qquad \mu = ۰/۰۴ \ (\frac{kg}{m.s})$$

لزجت سینماتیکی: $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ $\qquad \nu = \frac{۰/۰۴}{۱۰۰۰} \Rightarrow \nu = ۰/۰۴ \times ۱۰^{-۳} \ (\frac{m^۲}{s})$

اثر فشار بر روی لزجت: لزجت سینماتیکی مایعات مستقل از فشار است، ولی در گازها به فشار بستگی دارد و با افزایش فشار، لزجت سینماتیکی گازها کاهش می‌یابد. باید توجه داشت که فشار تأثیر کمی روی لزجت دینامیکی دارد که معمولاً صرف‌نظر می‌شود، زیرا با افزایش فشار سرعت برخورد مولکولی افزایش یافته و در عین حال فاصله بین مولکول‌ها کاهش می‌یابد و این دو، اثر مخالف روی لزجت دارند و در نتیجه لزجت دینامیکی مستقل از فشار است.

اثر دما بر روی لزجت: لزجت در مایعات ناشی از نیروهای جاذبه بین مولکولی است. با افزایش دما این نیروها و در نتیجه لزجت کاهش می‌یابند. از طرف دیگر لزجت در گازها ناشی از حرکت تصادفی مولکول‌ها است. این حرکات نامنظم با افزایش دما، افزایش می‌یابند و در نتیجه لزجت با افزایش دما بیشتر می‌شود.

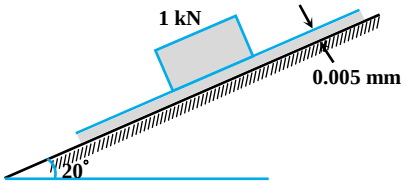
مثال ۶: با افزایش درجه حرارت، گرانروی گازها و مایعات از کدام یک از مصادیق ذیل تبعیت می‌نماید؟

۱) گرانروی مایعات افزایش و گرانروی گازها کاهش می‌یابد.
۲) گرانروی مایعات کاهش و گرانروی گازها افزایش می‌یابد.
۳) گرانروی در هر دو مورد افزایش می‌یابد.
۴) گرانروی در هر دو مورد کاهش می‌یابد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» افزایش دما در مایعات باعث کاهش جاذبه مولکول‌ها و در نتیجه کاهش لزجت می‌شود. افزایش دما در گازها باعث ازدیاد برخوردهای مولکولی و در نتیجه افزایش لزجت می‌شود.

نکته ۴: با توجه به کاهش قابل ملاحظه جرم حجمی گازها با افزایش دما، تغییرات لزجت سینماتیکی با دما بیشتر از تغییرات لزجت دینامیکی است.

مثال ۷: بلوکی به وزن ۱kN و ضلع ۲۰۰mm روی فیلمی از روغن به ضخامت ۰/۰۰۵mm بر یک سطح شیب‌دار می‌لغزد. با فرض پروفیل سرعت خطی در روغن، سرعت حد بلوک را تعیین کنید؟ ویسکوزیته روغن $P = ۷ \times ۱۰^{-۲}$ است.

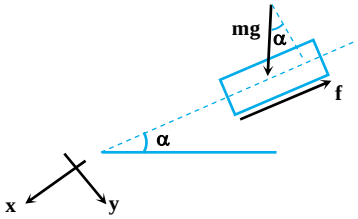


☑ **پاسخ:**

$$\mu = ۷ \times ۱۰^{-۲} \ P \ (\frac{g}{cm.s}) = ۷ \times ۱۰^{-۲} \frac{g}{cm.s} \times \frac{۱kg}{۱۰۰۰g} \times \frac{۱۰۰cm}{۱m} = ۷ \times ۱۰^{-۳} \ (\frac{kg}{m.s})$$

با توجه به خطی بودن پروفیل سرعت، قانون لزجت نیوتن عبارت است از:

$$\tau = \mu \frac{\Delta V}{\Delta y} = ۷ \times ۱۰^{-۳} \times \frac{V - ۰}{۰/۰۰۵ \times ۱۰^{-۳}} = ۱۴۰۰V(Pa)$$



لذا نیروی اصطکاک بین بلوک و روغن برابر است با:

$$f = \tau A = (۱۴۰۰V)(۰/۲)^۲ = ۵۶V(N)$$

با استفاده از دیاگرام آزاد نیروهای وارد بر بلوک، در جهت x داریم:

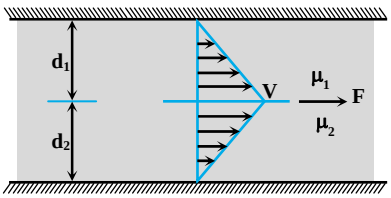
$$\sum F_x = ۰ : \ mg \sin \alpha - f = ۰$$

$$۱ \times ۱۰^۳ \sin ۲۰^\circ - ۵۶V = ۰ \Rightarrow V = ۶/۱۱ (\frac{m}{s})$$

با توجه به مفهوم سرعت حد، لغزش بلوک یکنواخت فرض شده است.

مثال ۸: نیروی لازم برای کشیدن صفحه بین دو سیال با ویسکوزیته‌های مختلف را به دست آورید. (V سرعت صفحه و ثابت است)

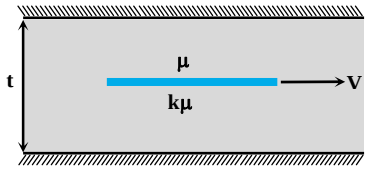
پاسخ: نیروی لازم برای کشیدن این صفحه، برابر با مجموع دو نیرویی است که از سیال بالایی و پایینی به آن وارد می‌شوند، لذا داریم:



$$\sum F=0:\ F=f_1+f_2$$
$$f_1=\tau_1 A_1\ ,\quad f_2=\tau_2 A_2$$
$$A_1=A_2=A$$
$$\tau_1=\mu_1\frac{V-0}{d_1}\quad ,\quad \tau_2=\mu_2\frac{V-0}{d_2}$$
$$F=(\tau_1+\tau_2)A\quad ,\quad F=(\frac{\mu_1}{d_1}+\frac{\mu_2}{d_2})VA$$

حالت خاص: $\begin{cases}\mu_1=\mu_2\\ d_1=d_2\end{cases}\Rightarrow F=2\frac{\mu VA}{d}$ (حرکت صفحه در یک سیال)

مثال ۹: یک ورق نازک و با مساحت زیاد بین دو سطح ثابت که به فاصلهٔ کم (t) از هم قرار دارند، طبق شکل حرکت داده می‌شود. اگر در یک طرف صفحه متحرک روغن با گرانروی μ و در طرف دیگر آن روغن با گرانروی kμ وجود داشته باشد، صفحه متحرک باید در چه فاصله‌ای از سطح پایین قرار گیرد تا نیروی لازم جهت کشیدن آن با سرعت ثابت V حداقل باشد؟



۱) $\frac{t}{2}$ ۲) $\frac{t}{\sqrt{k}}$

۳) $\frac{t}{(1+\sqrt{k})}$ ۴) $\frac{\sqrt{k}t}{(1+\sqrt{k})}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به ثابت بودن سرعت، تعادل نیرویی به صورت مقابل است: $V=\text{const.}\Rightarrow a=0\Rightarrow\sum F=0$

اگر فاصله صفحه متحرک از سطح پایین را y در نظر بگیریم، فاصله از سطح بالایی $t-y$ است و لذا با استفاده از قانون لزجت نیوتن داریم:

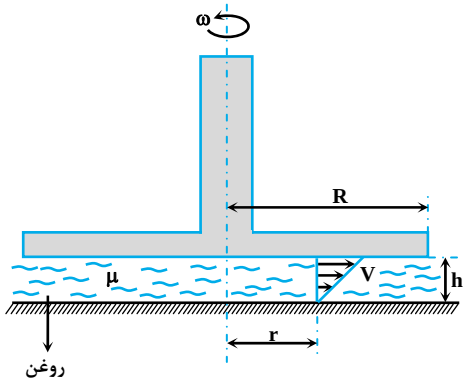
$$F=f_1+f_2=(\tau_1+\tau_2)A=(k\mu\frac{V-0}{y}+\mu\frac{V-0}{t-y})A=\mu VA(\frac{k}{y}+\frac{1}{t-y})$$

برای تعیین y به صورتی که F حداقل باشد، با استفاده از مشتق‌گیری داریم:

$$\frac{dF}{dy}=0:\ \mu VA[-\frac{k}{y^2}+\frac{1}{(t-y)^2}]=0\Rightarrow\frac{-k(t-y)^2+y^2}{y^2(t-y)^2}=0$$

$$y^2=k(t-y)^2\Rightarrow y=\sqrt{k}(t-y)\Rightarrow y(1+\sqrt{k})=\sqrt{k}\,t\Rightarrow y=\frac{\sqrt{k}\,t}{1+\sqrt{k}}$$

مثال ۱۰: یک دیسک مدور مطابق شکل با شعاع R در ارتفاع کم h با استفاده از یک لایه روغن ثابت نگه داشته شده است. اگر دیسک با سرعت زاویه‌ای ω بچرخد، عبارتی برای گشتاور اصطکاکی دیسک به دست آورید.



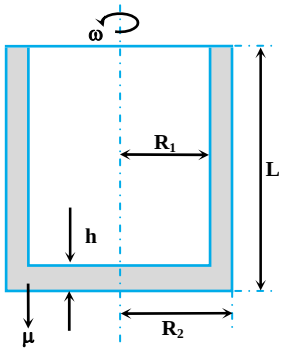
پاسخ: چون فاصله دیسک مدور و صفحه ثابت پایینی کم است، توزیع سرعت خطی فرض می‌شود. لذا با استفاده از قانون لزجت نیوتن داریم:

$$\tau=\mu\frac{dV}{dy}=\mu\frac{V-0}{h}=\frac{\mu r\omega}{h}$$
$$dF=\tau dA=\frac{\mu r\omega}{h}(2\pi r dr)$$
$$dT=dF.r=\frac{\mu r\omega}{h}(2\pi r dr)r$$
$$dT=\frac{2\pi\mu\omega r^3 dr}{h}\qquad T=\int_0^R dT\Rightarrow T=\frac{\pi\mu\omega R^4}{2h}$$

مثال ۱۱: **مطابق شکل، استوانه‌ای در داخل استوانه دیگر با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. فضای بین دو استوانه از سیالی با لزجت دینامیکی μ پر شده است. توان لازم برای این حرکت را به دست آورید.**

☑ **پاسخ:** گشتاور کل وارده برابر با مجموع گشتاور وارده از طرف پیرامون استوانه و گشتاور وارده از طرف کف استوانه است، لذا داریم:

a) گشتاور وارده از طرف پیرامون استوانه:



$$\tau_1 = \mu\frac{\Delta V}{\Delta n} = \mu\frac{V-0}{R_2-R_1} = \frac{\mu R_1\omega}{R_2-R_1}$$

$$F_1 = \tau_1 A_1 = \frac{\mu R_1\omega}{R_2-R_1}(2\pi R_1 L) = \frac{2\pi\mu R_1^2\omega L}{R_2-R_1}$$

$$T_1 = F_1.R_1 = \frac{2\pi\mu R_1^3\omega L}{R_2-R_1}$$

b) گشتاور وارده از طرف کف استوانه:

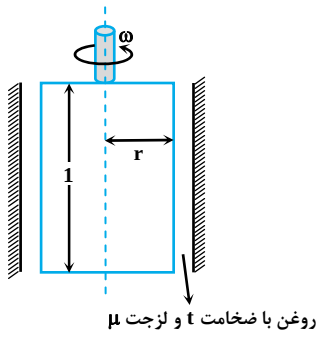
با توجه به حل مثال قبلی، گشتاور وارده از طرف کف استوانه برابر است با:

$$T_2 = \frac{\pi\mu\omega R_1^4}{2h}$$

گشتاور کل: $T = T_1 + T_2 = \frac{2\pi\mu R_1^3\omega L}{R_2-R_1} + \frac{\pi\mu\omega R_1^4}{2h} = \pi\mu\omega R_1^3\left(\frac{2L}{R_2-R_1} + \frac{R_1}{2h}\right)$

توان لازم برای حرکت: $P = T.\omega = \pi\mu\omega^2 R_1^3\left(\frac{2L}{R_2-R_1} + \frac{R_1}{2h}\right)$

مثال ۱۲: **در شکل زیر با ثابت نگه داشتن ضخامت فیلم روغن، شعاع استوانه نصف می‌شود. میزان گشتاور لازم برای چرخاندن سیلندر، با توجه به ثابت بودن سرعت چرخشی ω و جنس روغن، چند برابر می‌شود؟**



۱) $\frac{1}{8}$

۲) $\frac{1}{6}$

۳) $\frac{1}{4}$

۴) $\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

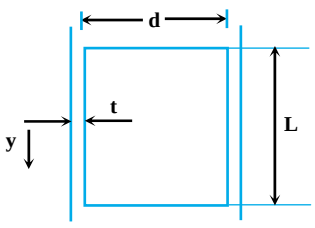
$$T = F.r = (\tau A).r = (\mu\frac{\Delta u}{\Delta r})(2\pi rl)r = \mu\times\frac{r\omega-0}{t}\times 2\pi rl\times r$$

$$T = \frac{2\pi r^3 l\mu\omega}{t} \qquad T\sim r^3$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \qquad T_2 = \frac{1}{8}T_1$$

ملاحظه می‌شود که گشتاور لازم برای چرخاندن سیلندر با توان سوم شعاع متناسب است.

مثال ۱۳: **استوانه‌ای را به قطر d و طول L و جرم حجمی ρ در نظر بگیرید که داخل استوانه دیگری قرار گرفته و در اثر وزن خود با سرعت V در حال حرکت به سمت پایین است. اگر بین دو استوانه از سیالی با لزجت μ و ضخامت t پر شده باشد، سرعت V را به دست آورید.**



☑ **پاسخ:** چون سرعت حرکت استوانه داخلی ثابت است، لذا برآیند نیروهای وارده بر آن در جهت حرکت برابر صفر خواهد بود:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow mg - f = 0 \Rightarrow f = mg$$

وزن استوانه داخلی برابر است با:

$$w = mg = \rho vg = \rho \frac{\pi d^2}{4} Lg$$

از طرف دیگر با استفاده از قانون لزجت نیوتن داریم:

$$f = \tau A = \mu \frac{V-0}{t}(\pi dL)$$

با استفاده از روابط فوق خواهیم داشت:

$$\rho \frac{\pi d^2}{4} Lg = \mu \frac{V}{t} \pi dL \Rightarrow V = \frac{\rho dgt}{4\mu}$$

مثال ۱۴: دو استوانه متحدالمرکز طویل و به طول b را در نظر بگیرید. سیالی با ضریب چسبندگی μ بین آن دو قرار دارد. استوانه داخلی (با شعاع r_1) را با سرعت زاویه‌ای ω و گشتاور T می‌چرخانیم، ولی استوانه خارجی (با شعاع r_2) ساکن است. در حالت دائم، تنش برشی روی سطح استوانه خارجی از کدام رابطه زیر به دست می‌آید؟

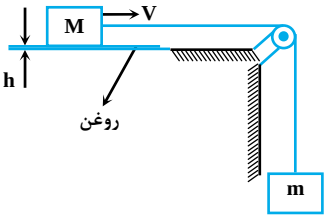
۱) $\frac{\mu r_1 \omega}{r_2 - r_1}$ ۲) $\frac{T}{\pi r_1^2 b}$ ۳) $\frac{\mu r_2 \omega}{r_2 - r_1}$ ۴) $\frac{T}{\pi r_2^2 b}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

با فرض پروفیل سرعت خطی بین دو استوانه : $\tau = \mu \frac{du}{dr} = \mu \frac{\Delta u}{\Delta r} = \mu \frac{r_1 \omega - 0}{r_2 - r_1}$; $\tau = \frac{\mu r_1 \omega}{r_2 - r_1}$

با توجه به پروفیل سرعت خطی بین دو استوانه، تنش برشی در همه جا یکسان است.

مثال ۱۵: در سیستم مقابل جرم M با مساحت A بر روی سطح افقی پوشیده شده از قشری به ضخامت h از روغن می‌لغزد. حداکثر سرعت V در سیستم چقدر است؟



۱) $V = \frac{mgh}{\mu A}$ ۲) $V = \frac{(m+M)gh}{\mu A}$

۳) $V = (\frac{m+M}{m})\frac{gh}{\mu A}$ ۴) تابعی از زمان است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

حداکثر سرعت سیستم ≡ سرعت حد $\Rightarrow a = 0 \Rightarrow \sum F = 0 : mg - f = 0$ $\quad f = \tau A$

با فرض توزیع سرعت خطی : $\tau = \mu \frac{\Delta V}{h} = \mu \frac{V - 0}{h} = \frac{\mu V}{h}$

$$mg = \frac{\mu V}{h} A \Rightarrow V = \frac{mgh}{\mu A}$$

مثال ۱۶: یک شفت به قطر ۱۰ سانتی‌متر و طول ۱۰ سانتی‌متر در داخل یک غلاف با سرعت ۱۲۰ دور در دقیقه می‌چرخد. فاصله بین شفت و غلاف به میزان ۰/۰۳ سانتی‌متر با روغن به ویسکوزیته $\mu = 0/008 \frac{kg}{m.s}$ پر شده است. توان لازم برای چرخش شفت برابر است با:

۱) ۰/۲۵w ۲) ۰/۳۳w ۳) ۰/۵w ۴) ۰/۶۶w

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» توزیع سرعت در روغن (بین شفت و غلاف) را خطی در نظر می‌گیریم:

ابتدا سرعت زاویه‌ای را از واحد دور بر دقیقه، به واحد $\frac{rad}{s}$ تبدیل می‌کنیم.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 120 \frac{\text{دور}}{\text{دقیقه}} \times \frac{1 \text{ دقیقه}}{60 \text{ ثانیه}} \quad ; \quad \omega = 4\pi(\frac{rad}{s})$$

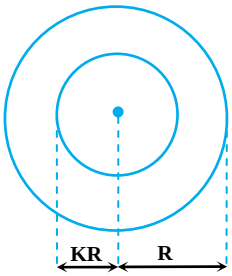
قانون لزجت نیوتن: $\tau = \mu \frac{\Delta V}{t} = \mu \frac{V - 0}{t} = \frac{\mu r \omega}{t}$

نیروی لازم برای چرخش شفت: $F = \tau A = \frac{\mu r \omega}{t} . 2\pi r L = \frac{2\pi \mu r^2 \omega L}{t}$

توان لازم برای چرخش شفت: $P = F.V = \frac{2\pi \mu r^2 \omega L}{t} . r\omega \qquad P = \frac{2\pi \mu r^3 \omega^2 L}{t}$

$$P = \frac{2\pi \times 0/008 \times (5\times 10^{-2})^3 (4\pi)^2 \times 10 \times 10^{-2}}{0/03 \times 10^{-2}} \Rightarrow P = 0/33 \ (w)$$

مثال ۱۷: اگر سیالی بین دو استوانه هم‌محور به شعاع‌های R و KR و طول L محبوس باشد و استوانه بیرونی را با سرعت زاویه‌ای معینی حول محور آن‌ها به دوران در آوریم، مقدار گشتاور لازم از کدام یک از روابط زیر به دست می‌آید؟



۱) $2\pi R^2 L(\tau_{rz})|_{r=R}$

۲) $2\pi RL(-\tau_{r\theta})|_{r=R}$

۳) $2\pi R^2 L(-\tau_{rz})|_{r=R}$

۴) $2\pi R^2 L(-\tau_{r\theta})|_{r=R}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

گشتاور پیچشی: $T = f.R \quad , \quad f = \tau_w A \quad , \quad A = 2\pi RL$

$$T = (-\tau_{r\theta})|_{r=R} \times 2\pi RL \times R \Rightarrow T = 2\pi R^2 L(-\tau_{r\theta})|_{r=R}$$

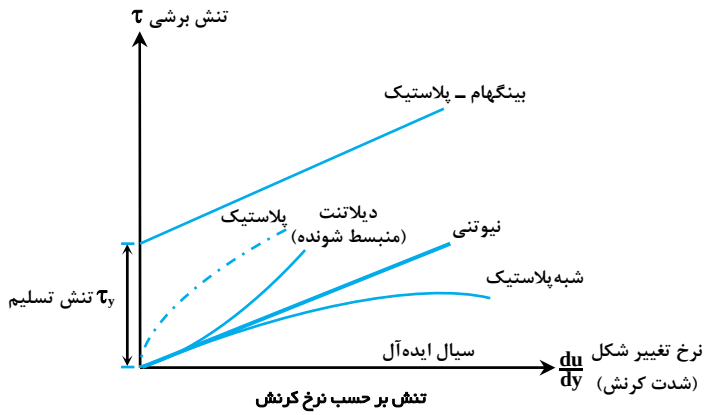
توجه شود که در این مورد تنش برشی مورد استفاده در رابطه قانون لزجت نیوتن به صورت $\tau_{r\theta}$ است و τ_{rz} در واقع تنش عمود بر سطح دیواره لوله است نه تنش برشی دیواره لوله.

سیالات غیرنیوتنی

سیالاتی که از رابطه $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ تبعیت نمی‌کنند «سیالات غیر نیوتنی» نامیده می‌شوند.

این گونه سیالات در کتاب‌های رئولوژی (علم جریان و تغییر شکل ماده) بررسی می‌شوند. در شکل زیر رفتار چهار سیال غیرنیوتنی با یک سیال نیوتنی مقایسه شده است. دیلاتنت (مایع غلیظ‌شونده در برابر نیروی برشی)، سیالی است که با افزایش تنش‌های وارد بر آن مقاومت بیشتری از خود نشان می‌دهد، مانند سوسپانسیون‌های نشاسته و ماسه بسیار ریز. سیال شبه‌پلاستیک (مایع رقیق‌شونده در برابر نیروی برشی)، سیالی است که با افزایش تنش از مقاومتش کاسته می‌شود، مانند محلول‌های پلیمر، خمیر کاغذ در آب، شیر و سیمان. اگر خاصیت رقیق‌شوندگی خیلی شدید باشد، رفتار سیال مانند منحنی نقطه‌چین می‌شود که **سیال پلاستیک** نامیده می‌شود. حالت حدی یک ماده پلاستیک آن است که قبل از شروع سیلان، نیاز به تنش تسلیم معینی دارد. در شکل، جریان خطی ایده‌آل بینگهام ـ پلاستیک نیز نشان داده شده است (لازم به تأکید است که بعد از نقطه تسلیم هم رفتار ماده می‌تواند غیرخطی باشد).

همان طور که در شکل دیده می‌شود سیال بینگهام سیالی است که در تنش‌های کمتر از تنش تسلیم، رفتار جامد و در تنش‌های بالاتر از آن، رفتار سیال را از خود نشان می‌دهد. مثالی برای این مورد خمیردندان است که از ظرف خود به بیرون جریان پیدا نمی‌کند مگر این که با فشار دادن، تنش معینی به آن اعمال شود (رفتار جامد)، اما پس از آن کوچک‌ترین تنش برشی سبب تغییر شکل بی‌وقفه آن می‌شود (رفتار سیال).



(رفتار رئولوژیک مواد با لزجت متفاوت)

یک رفتار غیرنیوتنی دیگر پدیده ناپایداری است که در شکل فوق نشان داده شده است. سیالاتی که برای ثابت نگه داشتن نرخ کرنش خود به تنش برشی بیشتری نیاز دارند، **رئوپکتیک** نامیده می‌شوند. برعکس سیالاتی که با گذشت زمان رقیق شده و به تنش کمتری نیاز دارند، **تیکسوتروپیک** نام دارند. این سیالات در موقع سکون تمایل به سفت شدن دارند، مانند ژله‌ها، رنگ‌ها و جوهر چاپ.

برای مدل کردن رابطهٔ بین تنش (τ) و نرخ کرنش برشی $(\frac{du}{dy})$ برای سیالات غیرنیوتنی روابط زیادی ارائه شده است. در بسیاری از کاربردهای مهندسی از مدل توانی استفاده می‌شود که برای جریان یک بعدی عبارت است از:

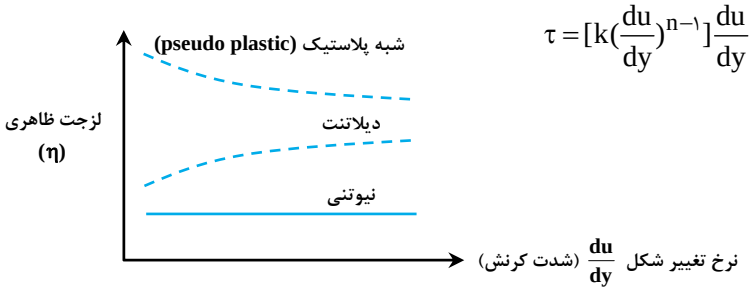
$$\tau = k(\frac{du}{dy})^n$$

در رابطه فوق، n شاخص رفتار جریان و k ضریب تناسب است.

مدل توانی به صورت زیر به قانون لزجت نیوتن تبدیل می‌شود:

$$\tau = [k(\frac{du}{dy})^{n-1}]\frac{du}{dy} = \eta\frac{du}{dy}$$

η **لزجت ظاهری** نامیده می‌شود. رفتار لزجت ظاهری با تغییر نرخ تغییر شکل برای چند نوع سیال غیرنیوتنی در شکل روبه‌رو نشان داده شده است:



مثال ۱۸: در سیالات شبه‌پلاستیک (Pseudo plastic) با افزایش تنش برشی، ویسکوزیته ظاهری .....

۱) کاهش می‌یابد. ۲) تغییر نمی‌کند. ۳) به صورت خطی افزایش می‌یابد. ۴) به صورت نمایی افزایش می‌یابد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در سیالات شبه‌پلاستیک (مایع رقیق‌شونده در برابر نیروی برشی) با افزایش تنش برشی، از مقاومت آن کاسته شده و ویسکوزیته ظاهری کاهش می‌یابد (مانند محلول‌های پلیمر، خمیر کاغذ در آب، شیر و سیمان).

مواد ویسکوالاستیک: خواص مکانیکی این مواد تابع سرعت تغییر شکل است. این مواد مانند سیالات غیرنیوتنی عمل می‌کنند، ولی هنگامی که تنش برشی ناگهان تغییر کند رفتار آن‌ها مانند پلاستیک‌ها است.

نکته ۵: سیال غیرلزج $(\mu = 0)$ و تراکم‌ناپذیر $(\rho = const.)$ را **سیال ایده‌آل** گویند.

جرم حجمی: جرم حجمی یک سیال عبارت از مقدار جرم در واحد حجم آن سیال است، لذا داریم:

$$\rho = \frac{m}{v}$$

واحد جرم حجمی در سیستم SI، $\frac{kg}{m^3}$ است.

جرم حجمی معیاری از تراکم و نزدیکی مولکول‌ها به هم می‌باشد، لذا جرم حجمی گازها از مایعات و جامدات کمتر است.

در فشار یک اتمسفر و دمای ۲۰°، جرم حجمی آب $۹۹۸/۲\frac{kg}{m^۳}$ (تقریباً ۱۰۰۰) و جرم حجمی هوا $۱/۲۰۵\frac{kg}{m^۳}$ است.

نکته ۶: با افزایش دما، فاصله بین مولکول‌های جامدات و مایعات افزایش یافته و لذا جرم حجمی کاهش می‌یابد.

نکته ۷: در حالت کلی جرم حجمی مایعات به علت تراکم‌ناپذیری آن‌ها با فشار تغییر نمی‌کند، در صورتی که با توجه به تراکم‌پذیری گازها، جرم حجمی آن‌ها با فشار تغییر می‌کند.

چگالی (نسبی): چگالی (نسبی) عبارت از نسبت جرم حجمی یک ماده به جرم حجمی سیال مرجع است:

$$S=\frac{\rho}{\rho_۰}$$

که برای گازها، سیال مرجع هوا و برای مایعات، سیال مرجع آب در نظر گرفته می‌شود. لذا داریم:

$$S_{\text{مایع}}=\frac{\rho_{\text{مایع}}}{\rho_{\text{آب}}} \quad \text{و} \quad S_{\text{گاز}}=\frac{\rho_{\text{گاز}}}{\rho_{\text{هوا}}}$$

حجم مخصوص: حجم مخصوص یک سیال عبارت از معکوس جرم حجمی آن سیال است و داریم:

$$v=\frac{۱}{\rho}$$

در واقع حجم مخصوص بیان‌کننده حجم اشغال شده واحد جرم سیال است و واحد آن در سیستم SI، $\frac{m^۳}{kg}$ می‌باشد.

وزن مخصوص: وزن مخصوص یک سیال عبارت از وزن واحد حجم آن سیال است و داریم:

$$\gamma=\frac{w}{v} \quad \text{یا} \quad \gamma=\rho g$$

واحد وزن مخصوص در سیستم SI، $\frac{N}{m^۳}$ می‌باشد.

گاز کامل، معادله حالت: اگر فرض شود که اثرات متقابل مولکول‌های یک سیال صرفاً ناشی از برخوردهای کاملاً الاستیک است، آن‌گاه طبق نظریه جنبشی گازها برای چنین سیالی (گاز کامل) رابطه ساده‌ای بین فشار، جرم مخصوص و دمای مطلق وجود دارد که عبارت است از:

معادله حالت:

$$Pv=mRT \quad \text{یا} \quad Pv=n\bar{R}T \quad \text{یا} \quad Pv=RT$$

$v=\frac{۱}{\rho}$: حجم مخصوص

$R=\frac{\bar{R}}{M}$: ثابت گاز معین ($\bar{R}$ ⟵ ثابت جهانی گازها، M ⟵ جرم مولکولی گاز معین)

T : دمای مطلق گاز P : فشار مطلق گاز

در واقع رفتار بسیاری از گازها مانند هوا، اکسیژن و هلیم در اکثر حالت‌ها بسیار نزدیک به رفتار گاز کامل بوده و با دقت خوبی با معادله حالت فوق ارائه می‌شود. چون اساس گاز کامل بر مبنای فقدان کامل جاذبه بین مولکولی است، هر عاملی که سبب افزایش جاذبه بین مولکولی شود، رفتار گاز را از حالت ایده‌آل دور می‌کند. مثلاً رفتار گازها در نزدیکی شرایط تقطیر به مقدار زیادی از رفتار گاز کامل دور می‌شود. به این دلیل در بسیاری از محاسبات نمی‌توان آمونیاک و فرئون را گاز کامل فرض نمود. هم‌چنین تحت فشارهای زیاد، اکسیژن و هلیم گاز کامل محسوب نمی‌شوند.

نکته ۸: لزجت گاز کامل لزوماً برابر صفر نیست.

تراکم‌پذیری مایعات

مایعات در اثر افزایش فشار به مقدار کمی متراکم می‌شوند. با این وجود تراکم‌پذیری مایعات در مواردی، مثلاً در فشارهای بسیار زیاد، حائز اهمیت است.

برای سنجش قابلیت تراکم دو کمیت تعریف می‌شوند. ضریب تراکم‌پذیری (β) عبارت است از:

$$\beta=-\frac{۱}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

V نشان‌دهنده حجم و اندیس T مبین تراکم ایزوترمال است. واحدهای β عکس واحدهای فشار هستند (مانند $atm^{-۱}$ و ...).

علامت منفی به این دلیل است که با افزایش فشار، حجم کاهش می‌یابد.

معکوس β که با K نشان داده می‌شود، **مدول حجمی** (مدول بالک یا ضریب کشسانی حجمی) نامیده شده و عبارت است از:

$$K=-V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$$