مدرسان شریف

فصل اول

«سینماتیک نیوتنی»

پیش از شروع مطالب، ابتدا تعریفی از علم مکانیک ارائه می‌دهیم. علمی است مربوط به مطالعه حرکت اجسام و علل به‌وجود آمدن آن حرکات. به طور کلی مکانیک به سه بخش سینماتیک، دینامیک و استاتیک تقسیم می‌شود.

سینماتیک: در این بخش از مکانیک به بررسی حرکت اجسام، بدون در نظر گرفتن عامل حرکت پرداخته می‌شود؛ عامل حرکت، نیرو نامیده می‌شود.

دینامیک: در این بخش، حرکت اجسام با توجه به نیروهای وارد بر جسم مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

استاتیک: این شاخه از مکانیک، به وضعیت تعادل اجسام تحت تأثیر نیروها و گشتاورهای نیروهای وارد بر آن‌ها می‌پردازد.

کمیت: در فیزیک به هرآنچه قابل اندازه‌گیری باشد کمیت گفته می‌شود. کمیت‌ها به چند دسته تقسیم می‌شوند. در مکانیک با دو دسته از آنها سر و کار داریم.

۱ـ کمیت‌های اسکالر (نرده‌ای): هر کمیتی که تنها با یک عدد مشخص شود و جهتی در فضا به خود اختصاص ندهد، کمیت اسکالر یا نرده‌ای خوانده می‌شود. به عبارت دیگر برای تعیین این نوع کمیت‌ها، تنها کافی است که اندازه آنها را تعیین کنیم تا این کمیت‌ها کاملاً تعریف شوند.

به عنوان چند مثال برای کمیت‌های اسکالر می‌توان از جرم، دما و انرژی نام برد.

۲ـ کمیت‌های برداری: برای تعیین این کمیت‌ها علاوه بر مقداری که به آنها نسبت می‌دهیم نیازمند تعیین جهت نیز برای آنها هستیم؛ یعنی جهت در فضا به آن کمیت برداری هویت می‌بخشد. نکته دیگر در مورد کمیت‌های برداری این است که از قاعده جمع برداری پیروی می‌کنند. کمیت‌های برداری در دستگاه‌های مختصات مختلف دارای نمایش‌های مختلفی هستند، اما طولشان (بزرگی‌شان) بدون تغییر خواهد ماند.

چند نمونه از کمیت‌های برداری عبارتند از: نیرو، سرعت، شتاب، تکانه خطی، تکانه زاویه‌ای و گشتاور نیرو.

کمیت‌ها را به طریق دیگری نیز می‌توان دسته‌بندی کرد؛ دسته‌بندی آن‌ها به دو گروه کمیت‌های اصلی و کمیت‌های فرعی.

کمیت‌های اصلی: کمیت‌های اصلی معمولاً به گونه‌ای تعریف می‌شوند که مقدارشان مستقل از کمیت‌های دیگر باشد. یعنی بتوان آنها را بلافاصله و بی‌واسطه تعریف کرد. با این وجود می‌توان مقدار آنها را برحسب کمیت‌های فرعی نیز بیان کرد، اما نمی‌توان مفهوم آنها را بر این اساس درک کرد؛ نمونه‌هایی از کمیت‌های اصلی عبارتند از: جرم، طول، زمان.

کمیت‌های فرعی: این کمیت‌ها را می‌توان براساس کمیت‌های اصلی تعریف و بیان کرد. به طور کلی هر کمیتی که اصلی نباشد، فرعی است و کمیتی که هویتی دوگانه داشته باشد وجود ندارد. در این مورد می‌توان به اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای و همچنین نیرو اشاره کرد. این سه کمیت با روابط زیر تعریف می‌شوند:

(اندازه حرکت خطی) = (جرم) × (سرعت) = (جرم) × $\dfrac{(\text{طول})}{(\text{زمان})}$ $\rightarrow \vec{p} = m\vec{v}$

(اندازه حرکت زاویه‌ای) = (طول) × (جرم) × (سرعت) = (طول) × (جرم) × $\dfrac{(\text{طول})}{(\text{زمان})}$ $\rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

(نیرو) = $\dfrac{(\text{جرم}) \times (\text{طول})}{(\text{زمان}) \times (\text{زمان})} \rightarrow \vec{F} = m\vec{a}$

نکته اصلی در هر معادله فیزیکی در هر شاخه‌ای از فیزیک این است که باید دو طرف معادله برحسب کمیت‌های یکسانی بیان شوند. یعنی اصطلاحاً ابعاد جملات دوطرف معادله یکسان باشند. با توجه به اهمیت بردارها به اختصار برخی روابط هندسی حاکم بر آنها را بیان می‌کنیم.

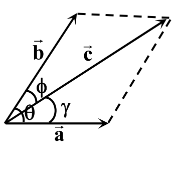
جمع

اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داده شده باشند، آنگاه می‌توان برداری مانند $\vec{c}$ یافت که حاصل اثر یا وجود آن همانند اثر یا وجود همزمان هر دو بردار با هم است و آن را حاصل جمع برداری دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌نامیم و با رابطه مقابل نشان می‌دهیم.

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

اگر زاویه میان دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با θ نشان دهیم، آنگاه طول بردار حاصل جمع $(\vec{c})$ با رابطه زیر به دست می‌آید.

$$|\vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^{2} + |\vec{b}|^{2} + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$



زاویه میان بردار حاصل جمع $\vec{c}$ با بردار $\vec{a}$ و یا با بردار $\vec{b}$ را به‌صورت زیر می‌توان به دست آورد:

$$|\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{c}|^۲-۲|\vec{a}||\vec{c}|\cos\gamma \Rightarrow \gamma=\cos^{-۱}\left(\frac{|\vec{a}|^۲+|\vec{c}|^۲-|\vec{b}|^۲}{۲|\vec{a}||\vec{c}|}\right)$$

با توجه به شکل داریم:

$$\phi=\theta-\gamma$$

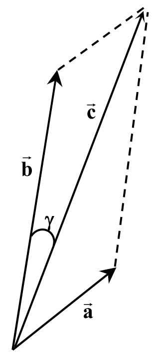
$$|\vec{a}|^۲=|\vec{b}|^۲+|\vec{c}|^۲-۲|\vec{b}||\vec{c}|\cos\varphi \Rightarrow \varphi=\cos^{-۱}\left(\frac{|\vec{c}|^۲+|\vec{b}|^۲-|\vec{a}|^۲}{۲|\vec{b}||\vec{c}|}\right)$$

البته نیازی نیست که روابط بالا را حفظ باشیم، کافی است شیوه‌ی به دست آوردن آنها را بدانیم، این که از قانون جمع بردارها استفاده شده و برای مثال برای محاسبه این طور فرض شده که بردار $\vec{b}$ از جمع برداری بردارهای $\vec{c}$ و $\vec{a}$ به دست آمده است.

اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با مؤلفه‌هایشان در دستگاه مختصات دکارتی داده شده باشند، آنگاه هر مؤلفه بردار برآیند $\vec{c}$ از حاصل جمع مؤلفه‌های متناظر دو بردار به دست می‌آید. به عنوان مثال در دستگاه مختصات دکارتی داریم: $\vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}$ و $\vec{b}=b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}$

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\hat{i}+(a_y+b_y)\hat{j}+(a_z+b_z)\hat{k} \Rightarrow |\vec{c}|=\sqrt{(a_x+b_x)^۲+(a_y+b_y)^۲+(a_z+b_z)^۲}$$

مثال۱: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک صفحه با مؤلفه‌های $\begin{cases}\vec{a}=(۲,۲)\\ \vec{b}=(۱,۴)\end{cases}$ تعریف می‌شوند. اندازه بردار برآیند و همچنین زاویه این بردار را با بردار $\vec{b}$ بیابید.



۱) $\cos^{-۱}\left(\frac{۵۶}{\sqrt{۷۶۵}}\right), \sqrt{۴۰}$

۲) $\cos^{-۱}\left(\frac{۵۴}{۲\sqrt{۷۶۵}}\right), \sqrt{۴۵}$

۳) $\cos^{-۱}\left(\frac{۶۰}{\sqrt{۳۲}}\right), \sqrt{۷۲}$

۴) $\cos^{-۱}\left(\frac{۵۰}{۲\sqrt{۷۲۱}}\right), \sqrt{۹۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به شکل برای به دست آوردن زاویه γ ابتدا اندازه بردار $\vec{c}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{c}=(۲+۱)\hat{i}+(۲+۴)\hat{j}=۳\hat{i}+۶\hat{j} \quad , \quad |\vec{c}|=\sqrt{۹+۳۶}=\sqrt{۴۵}$$

در اینجا چون پاسخ تست دارای دو بخش است، اگر پاسخ صحیح قسمت اول را یافتیم پیش از پیدا کردن پاسخ قسمت دوم می‌توان با بررسی گزینه‌ها پاسخ صحیح را پیدا کرد که در این تست گزینه (۲) می‌باشد.

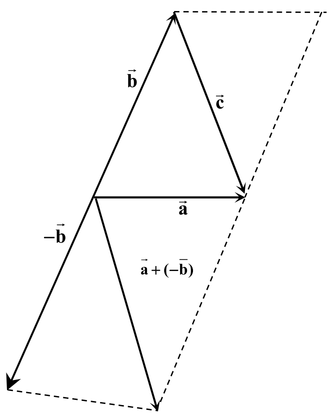
$$\gamma=\cos^{-۱}\left(\frac{|\vec{b}|^۲+|\vec{c}|^۲-|\vec{a}|^۲}{۲|\vec{b}||\vec{c}|}\right) \qquad \begin{cases}|\vec{a}|=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}\\ |\vec{b}|=\sqrt{۱+۱۶}=\sqrt{۱۷}\end{cases} \Rightarrow \gamma=\cos^{-۱}\left(\frac{(۱۷)+(۴۵)-(۸)}{۲(\sqrt{۱۷})(\sqrt{۴۵})}\right)=\cos^{-۱}\left(\frac{۵۴}{۲\sqrt{۷۶۵}}\right)$$

تفریق

در اینجا نیز به همان روشی که جمع برداری دو بردار را به دست آوردیم عمل می‌کنیم، با این تفاوت که تفاضل دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به‌صورت $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ نشان داده می‌شود و به این صورت تعریف می‌شود که بردار $\vec{a}$ را با قرینه بردار $\vec{b}$ (یعنی برداری که اندازه‌اش با $\vec{b}$ یکی بوده ولی جهتش عکس جهت $\vec{b}$ می‌باشد) جمع می‌کنیم. از لحاظ ترسیمی می‌توان گفت اگر دو بردار را از یک نقطه رسم کنیم، برداری که انتهای بردار دوم $(\vec{b})$ را به انتهای بردار اول $(\vec{a})$ وصل کند همان تفاضل دو بردار می‌شود. در این مورد جهت بردار از انتهای $\vec{b}$ به سوی انتهای $\vec{a}$ است.

در اینجا کاملاً روشن می‌شود که همان روابطی که برای اندازه بردار حاصل جمع به دست آوردیم با تبدیل مؤلفه‌های $\vec{b}$ به مؤلفه‌هایی با علامت منفی برای به دست آوردن اندازه بردار تفاضل نیز برقرارند. یعنی:

$$|\vec{c}|=\sqrt{(a_x-b_x)^۲+(a_y-b_y)^۲+(a_z-b_z)^۲}$$



با استفاده از روابط $\vec{b}=\vec{a}-\vec{c}$ ، $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ ، $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ و با توجه به اینکه به ترتیب زاویه میان $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را با θ، زاویه میان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با γ و زاویه میان $\vec{a}$ و $\vec{c}$ را با φ نشان می‌دهیم، می‌توان با داشتن طول‌های $|\vec{a}|$، $|\vec{b}|$ و $|\vec{c}|$ آنها را به دست آورد.

$$|\vec{a}|=\sqrt{|\vec{b}|^۲+|\vec{c}|^۲+۲|\vec{c}||\vec{b}|\cos\theta} \quad , \quad |\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^۲+|\vec{c}|^۲-۲|\vec{a}||\vec{c}|\cos\varphi} \quad , \quad |\vec{c}|=\sqrt{|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma}$$

ضرب دو بردار

برای بردارها سه نوع ضرب تعریف می‌شود که عبارتند از:

ضرب عدد در یک بردار: در این ضرب چون یک عدد در یک بردار ضرب می‌شود، راستای بردار در فضا تغییر نمی‌کند؛ بلکه این اندازه آن است که تغییر می‌کند و سوی آن نیز می‌تواند تغییر کند.

لازم به یادآوری است که راستا مربوط به چگونگی قرار گرفتن یک خط راست در فضا است، اما سو نشان‌دهنده جهت حرکت روی این خط راست است. به زبان ریاضی می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases}\vec{A}=c\vec{B}\\ |\vec{A}|=|c||\vec{B}|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{A}\parallel\vec{B} & c>0\\ \vec{A}\parallel(-\vec{B}) & c<0\end{cases}$$

ضرب داخلی(عددی یا نقطه‌ای) دو بردار: برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که طول هر کدام و زاویه میان آن‌ها مشخص باشد می‌توان ضرب داخلی را به صورتی تعریف کرد که حاصل آن یک عدد باشد: $\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

که در آن θ زاویه میان دو بردار می‌باشد. ترتیب دو بردار در نتیجه ضرب داخلی تأثیری ندارد. یعنی این حاصلضرب خاصیت جابجایی دارد: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

حاصل‌ضرب داخلی دو بردار با توجه به رابطه تعریف‌کننده آن هنگامی صفر است که دست کم یکی از سه حالت $|\vec{a}|=0$ یا $|\vec{b}|=0$ یا $\cos\theta=0$ روی دهد. یعنی یا طول یکی از بردارها صفر باشد و یا اینکه آن دو بردار بر هم عمود باشند.

باید توجه داشت که حاصل ضرب داخلی دو بردار، مستقل از دستگاه مختصات است، یعنی در یک لحظه در همه دستگاه‌های مختصات دکارتی، کروی و استوانه‌ای دارای یک مقدار است. اگر بردارها را با مؤلفه‌هایشان نشان دهیم آنگاه خواهیم داشت: $c=\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

اگر دو بردار بر هم عمود باشند، آنگاه یک معادله قیدی میان مؤلفه‌هایشان برقرار است. بر این اساس شش مؤلفه مربوط به دو بردار دیگر نمی‌توانند هر مقدار دلخواهی داشته باشند، بلکه چنانچه پنج مؤلفه را آزادانه انتخاب کنیم آنگاه ناچاریم مؤلفه ششم را به گونه‌ای در نظر بگیریم که معادله قیدی را برقرار کند.

این ویژگی معادله قیدی هنگامی سودمند است که می‌خواهیم، با کمک یک معادله قیدی میان تعدادی از مختصات دستگاه، یکی از مختصات را بر حسب باقی بیان کنیم؛ یعنی به این مختصه به‌طور تلویحی در معادله قیدی اشاره شده است. $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

مثال۲: حاصل‌ضرب داخلی دو بردار با مؤلفه‌هایی که به‌صورت $\begin{cases}\vec{A}=2\hat{e}_1+3\hat{e}_2+4\hat{e}_3\\ \vec{B}=\hat{e}_1-4\hat{e}_2+6\hat{e}_3\end{cases}$ **داده شده‌اند با کدام گزینه داده می‌شود؟ ($\hat{e}_i$ها بردارهای واحد در یک دستگاه مختصات متعامد دلخواه‌اند)**

۱) ۱۴　　۲) ۱۵　　۳) ۱۶　　۴) ۱۷

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به تعریف ضرب داخلی داریم:

$$C=\vec{A}\cdot\vec{B}=(2\hat{e}_1+3\hat{e}_2+4\hat{e}_3)\cdot(\hat{e}_1-4\hat{e}_2+6\hat{e}_3)=(2\hat{e}_1)\cdot(\hat{e}_1-4\hat{e}_2+6\hat{e}_3)+(3\hat{e}_2)\cdot(\hat{e}_1-4\hat{e}_2+6\hat{e}_3)+(4\hat{e}_3)\cdot(\hat{e}_1-4\hat{e}_2+6\hat{e}_3)$$
$$=(2)(1)(\hat{e}_1\cdot\hat{e}_1)+(2)(-4)(\hat{e}_1\cdot\hat{e}_2)+(2)(6)(\hat{e}_1\cdot\hat{e}_3)+(3)(1)(\hat{e}_2\cdot\hat{e}_1)+(3)(-4)(\hat{e}_2\cdot\hat{e}_2)+(3)(6)(\hat{e}_2\cdot\hat{e}_3)$$
$$+(4)(1)(\hat{e}_3\cdot\hat{e}_1)+(4)(-4)(\hat{e}_3\cdot\hat{e}_2)+(4)(6)(\hat{e}_3\cdot\hat{e}_3)$$

چون دستگاه متعامد است، یعنی هر بردار واحد بر بردار واحد دیگر عمود است، تنها سه جمله باقی می‌مانند.

$$C=(2)(1)(\hat{e}_1\cdot\hat{e}_1)+(3)(-4)(\hat{e}_2\cdot\hat{e}_2)+(4)(6)(\hat{e}_3\cdot\hat{e}_3)=2-12+24=14$$

بنابراین اگر دستگاه متعامد باشد، برای به دست آوردن حاصل‌ضرب داخلی ۲ بردار در آن کافی است مؤلفه‌های متناظر هر کدام را در هم ضرب کرده و نتایج را با هم جمع می‌کنیم.

◆ ◆ ◆ ◆

ضرب خارجی (برداری) دو بردار: این نوع ضرب برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که طول هر کدام و زاویه میان آنها مشخص است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$

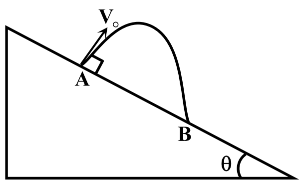
$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ که در آن همانند قبل θ زاویه میان دو بردار می‌باشد حاصل این ضرب، برداری است عمود بر صفحه‌ای که از دو بردار اولیه به دست می‌آید (یعنی صفحه‌ای که آن دو بردار را دربر می‌گیرد). جهت آن از طریق قاعده دست راست تعیین می‌شود. به این صورت که چهارانگشت دست راست را در سوی بردار اول قرار داده، در جهتی که زاویه کوچکتر میان دو بردار را جاروب کند به سوی بردار دوم خم می‌کنیم. آنگاه جهت انگشت شست دست راست جهت بردار حاصلضرب برداری آن دو بردار را می‌دهد. از این‌جا روشن می‌شود که اگر ترتیب دو بردار را در حاصلضرب برداری جابجا کنیم، بردار حاصل در جهت عکس حالت به دست آمده قبلی می‌شود. به زبان ریاضی داریم: $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول

۱ـ دو متحرک A و B روی یک خط مستقیم به سمت یکدیگر در حرکت‌اند. تندی متحرک A، $16\frac{m}{s}$ و تندی متحرک B، $8\frac{m}{s}$ است. لحظه‌ای که فاصله دو متحرک از هم $45m$ است، هر دو ترمز می‌کنند. متحرک A با شتاب ثابت $2\frac{m}{s^2}$ و متحرک B با شتاب $4\frac{m}{s^2}$ ترمز می‌کنند. پس از چند ثانیه از شروع به ترمز، دو متحرک به یکدیگر برخورد می‌کنند. تندی متحرک B در لحظه برخورد تقریباً کدام است؟ (سراسری ۸۶)

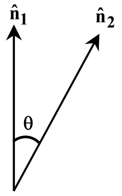
۱) $2/8\ s$ و صفر
۲) $13/2\ s$ و صفر
۳) $3\ s$ و $4\frac{m}{s}$
۴) $5s$ و $12\frac{m}{s}$

۲ـ پرتابه‌ای از بالای تپه‌ای مطابق شکل، عمود بر سطح تپه پرتاب شده است. اندازه سرعت اولیه V_0 چند $\frac{m}{s}$ است؟ (از مقاومت هوا چشم‌پوشی شود و $(g = 10\frac{m}{s^2}\ ,\ AB = 75m\ ,\ \sin\theta = \frac{3}{5}$ (سراسری ۸۶)



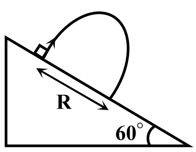
۱) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$
۲) 10
۳) 15
۴) 20

۳ـ $\hat{n}_1$ و $\hat{n}_2$ دو بردار یکه‌اند که با هم زاویه θ می‌سازند. کدام گزینه یک مجموعه بردارهای یکه و دو به دو متعامد را مشخص می‌کند؟ (سراسری ۸۷)



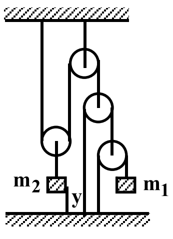
۱) $\hat{n}_1,\ \frac{\hat{n}_1\times\hat{n}_2}{\sin\theta},\ \frac{\hat{n}_1(\hat{n}_1.\hat{n}_2)-\hat{n}_2}{\sin\theta}$
۲) $\hat{n}_1,\ \frac{\hat{n}_1\times\hat{n}_2}{\sin\theta},\ \frac{\hat{n}_1(\hat{n}_1.\hat{n}_2)-\hat{n}_2}{\sin^2\theta}$
۳) $\hat{n}_2,\ \frac{\hat{n}_2\times\hat{n}_1}{\sin\theta},\ \frac{\hat{n}_1(\hat{n}_1.\hat{n}_2)-\hat{n}_2}{\sin\theta}$
۴) $\hat{n}_2,\ \frac{\hat{n}_2\times\hat{n}_1}{\sin\theta},\ \frac{\hat{n}_1(\hat{n}_1.\hat{n}_2)-\hat{n}_2}{\sin^2\theta}$

۴ـ گلوله‌ای با سرعت v_0 با زاویه قائم نسبت به سطح تپه از روی تپه‌ای که شیب آن نسبت به افق 60° است، شلیک می‌شود. برد پرتابه، R، برابر است با: (سراسری ۸۷)



۱) $4\frac{v_0^2}{g}$
۲) $4\sqrt{3}\frac{v_0^2}{g}$
۳) $2\sqrt{3}\frac{v_0^2}{g}$
۴) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{v_0^2}{g}$

۵ـ در دستگاه نشان داده‌شده در شکل زیر، جابجایی m_2 برحسب زمان به صورت $y = \frac{1}{2}at^2$ است. شتاب رو به پایین m_1 برابر است با: (سراسری ۸۷)



۱) $2a$
۲) $4a$
۳) $6a$
۴) $8a$

۶ـ هرگاه بردار $\vec{V} = (x+2y+az)\hat{i} + (bx-3y-z)\hat{j} + (4x+cy+2z)\hat{k}$ غیر چرخشی باشد، می‌توان آن را به صورت گرادیان یک تابع نرده‌ای مانند φ نوشت $\vec{V} = \vec{\nabla}\varphi$، φ عبارت است از: (سراسری ۸۷)

۱) $\frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + z^2 - 2xy + 4yz + xz$
۲) $x^2 - 3y^2 + z^2 + 2xy - 4xz + yz$
۳) $\frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + 2z^2 + 2xy + xy - yz$
۴) $\frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + z^2 + 2xy + 4xz - yz$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول

۱ـ گزینه «۱» برای حل مسئله نمی‌توان از راه‌حل سرعت و شتاب نسبی دو جسم استفاده کرد؛ زیرا اگر زمان توقف هر کدام از قطارها را حساب کنیم داریم:

$$t_A=\frac{V_{\circ A}}{a_A}=\frac{۱۶}{۲}=۸S \quad ; \quad t_B=\frac{V_{\circ B}}{a_B}=\frac{۸}{۴}=۲S$$

مشاهده می‌کنیم متحرک A در $t=۸$ ثانیه متوقف می‌شود؛ اما متحرک B در $t=۲$ ثانیه متوقف شده، در حالی که متحرک A همچنان در حال حرکت است. در این حالت تغییر در فاز سرعت داریم، پس نمی‌توان از شتاب و سرعت نسبی استفاده کرد؛ در صورت استفاده ما را به جواب نادرست ۳ می‌رساند.

باید ببینیم متحرک A در دو ثانیه چه مسافتی را طی می‌کند:

$$\Delta x_A=-\frac{۱}{۲}at^۲+V_\circ t=-\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲^۲+۱۶\times ۲=-۴+۳۲=۲۸m$$

اما متحرک B نیز در این دو ثانیه جابه‌جایی داشته که مقدار آن عبارت است از:

$$\Delta x_B=-\frac{۱}{۲}at^۲+V_\circ t=-۲\times ۲^۲+۸\times ۲=۸\,m$$

پس مسافت باقی‌مانده بعد از توقف B عبارت است از:

$$۴۵-(۲۸+۸)=۹\,m$$

باید ببینیم این ۹ متر توسط A در چه مدتی طی می‌شود تا به متحرک B برسد. که با جایگذاری در مسئله و توجه به اینکه باید $V_{\circ A}$ را پس از طی ۲۸ متر در نظر بگیریم با استفاده از:

$$V^۲-V_\circ^۲=-۲a\Delta x \Rightarrow V=(-۲a\Delta x+V_\circ^۲)^{\frac{۱}{۲}}=(-۲\times ۲\times ۲۸+۱۶^۲)^{\frac{۱}{۲}}=۱۲=V_{\circ A}$$

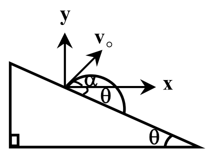
با جایگذاری مقدار ۹m در معادله روبرو $t=\circ/۸s$ به‌دست می‌آید:

$$۹=-\frac{۱}{۲}at^۲+V_{\circ A}t$$

حال با جمع این زمان با زمانی که طول کشیده تا جسم B ساکن شود، خواهیم داشت:

$$t_{\text{کل}}=۲+\circ/۸=۲/۸s$$

۲ـ گزینه «۴» در اصل چون پرتابه روی یک سطح شیبدار حرکت می‌کند، باید بتوانیم حرکت را تصویر کنیم.



$$\begin{cases} y=xtg\alpha-\dfrac{gx^۲}{۲v_\circ^۲\cos^۲\alpha} \\ x_\circ=AB\cos\theta \\ y=-AB\sin\theta \end{cases}$$

$$-AB\sin\theta=(AB\cos\theta)tg(\frac{\pi}{۲}-\theta)-\frac{g(AB\cos\theta)^۲}{۲v_\circ^۲\cos^۲(\frac{\pi}{۲}-\theta)} \Rightarrow -\sin\theta=\cos\theta\cot g\theta-\frac{g}{۲v_\circ^۲}AB\cot g^۲\theta$$

$$-\frac{۳}{۵}=\frac{۴}{۵}\times\frac{۴}{۳}-\frac{۱\circ}{۲v_\circ^۲}\times ۷۵\times(\frac{۴}{۳})^۲ \Rightarrow v_\circ^۲=۲۵\times ۱۶ \Rightarrow v_\circ=۲\circ(\frac{m}{s})$$

۳ـ گزینه «۱» چون برای هر مجموعه بردار یکه و متعامد باید ضرب نقطه‌ای آنها به صورت جفت جفت صفر باشد، اما گزینه‌های ۳ و ۴ این شرط را ندارند.

گزینه۳: باید $n_۲$ بر $\frac{n_۱(\hat{n}_۱.\hat{n}_۲)-\hat{n}_۲}{\sin\theta}$ عمود باشد، ولی:

$$\hat{n}_۲\cdot\frac{\hat{n}_۱(\hat{n}_۱.\hat{n}_۲)-\hat{n}_۲}{\sin\theta}=\frac{(\hat{n}_۲.\hat{n}_۱)^۲-۱}{\sin\theta}=\frac{\cos^۲\theta-۱}{\sin\theta}\neq\circ$$

و برای گزینه ۴ نیز وضع به همین صورت است، یعنی:

$$\hat{n}_۲\cdot\frac{\hat{n}_۱(\hat{n}_۱.\hat{n}_۲)-\hat{n}_۲}{\sin^۲\theta}=\frac{(\hat{n}_۲.\hat{n}_۱)^۲-۱}{\sin^۲\theta}=\frac{\cos^۲\theta-۱}{\sin^۲\theta}\neq\circ$$

یکی دیگر از خاصیت‌های بردار یکه این است که باید دارای اندازه یک (واحد) باشد، یعنی برای یک بردار یکه $\hat{n}$ باید $\hat{n}.\hat{n}=۱$ شود که گزینه‌های ۱ و ۲ را همین طور چک می‌کنیم.

گزینه ۲ بردار سوم چنین برمی‌آید:

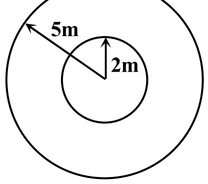
$$\frac{\hat{n}_۱(\hat{n}_۱.\hat{n}_۲)-\hat{n}_۲}{\sin^۲\theta}\cdot\frac{\hat{n}_۱(\hat{n}_۱.\hat{n}_۲)-\hat{n}_۲}{\sin^۲\theta}=\frac{(\hat{n}_۱.\hat{n}_۲)^۲-(\hat{n}_۱.\hat{n}_۲)^۲-(\hat{n}_۱.\hat{n}_۲)^۲+۱}{\sin^۴\theta}=\frac{۱-\cos^۲\theta}{\sin^۴\theta}=\frac{\sin^۲\theta}{\sin^۴\theta}=\frac{۱}{\sin^۲\theta}$$

که مخالف واحد است، پس گزینه ۲ نیز غلط است و فقط گزینه ۱صحیح می‌باشد. از طرفی چون در سؤال مطرح شده که کدام گزینه سه بردار یکه متعامد را نشان می‌دهد، بهترین راه این است که گزینه‌ها بررسی شوند.

نیروی مرکزگرا

اگر جسمی با سرعت یکنواخت v بر مسیری دایره‌ای به شعاع r در حرکت باشد، در این صورت لازمه ایجاد و تداوم این حرکت، شتاب مرکزگرایی است که بزرگی آن برابر با $\frac{v^۲}{r}$ می‌باشد؛ پس بنابر قانون دوم نیوتن، نیروی جانبی مرکزی با بزرگی $F=\frac{mv^۲}{r}$ وجود دارد تا این شتاب را تأمین کند و منشأ آن، نیروهای خارجی مثل نیروی عمودی سطح، نیروی کشش طناب یا نیروی اصطکاک می‌باشد. قابل ذکر است که وقتی می‌گوییم جسم دارای شتاب مرکزگراست، منظورمان این نیست که جسم در یک مسیر مارپیچ به‌سوی مرکز شتاب می‌گیرد و با آن برخورد می‌کند؛ بلکه سرعت مماسی ذره همواره در حال تغییر جهت به سوی مرکز است.

مثال۱۰: شخصی به جرم $۷۰\,kg$ روی یک چرخ‌وفلک افقی که با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega=۱۰(\frac{rad}{s})$ در حال دوران است، ساکن می‌باشد. اگر در ابتدا فاصله شخص تا مرکز چرخ‌وفلک برابر با $۵m$ باشد و این شخص با طنابی که به مرکز چرخ‌وفلک وصل است، خود را تا فاصله $۲m$ از مرکز برساند و سرعت آن در این لحظه برابر با $۱۰\frac{m}{s}$ و به سوی مرکز دوران باشد، کار انجام‌گرفته روی شخص از طرف طناب را بیابید.



۱) ۰

۲) ۳۵۰۰

۳) ۷۰۰۰۰

۴) ۷۳۵۰۰−

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای استفاده کردن از قضیه کار ـ انرژی باید دقت کرد، چون سرعت‌های اولیه و نهایی در اینجا مؤلفه‌های مماسی سرعت شخص بر مسیر دایره‌ای هستند، چنین نیرویی که بر این شخص در راستای مماسی وارد می‌شود، نیروی کوریولیس است که از رابطه $-۲m\vec{\omega}\times\vec{V}$ به‌دست می‌آید. از آنجا که آهنگ تغییر سرعت شعاعی را نمی‌دانیم (تنها مقادیر اولیه و نهایی آن را می‌دانیم)، پس تغییر انرژی جنبشی ناشی از این نیرو مدنظر نیست. نیرویی که در اینجا در نظر می‌گیریم، نیروی مرکزگرا است که از طناب به شخص وارد می‌شود. چنانچه به‌اشتباه، سرعت‌های مماسی شخص را در نظر بگیریم برای کار انجام‌گرفته خواهیم داشت:

$$V_۱=r_۱\omega=۵\times۱۰=۵۰\ ,\ V_۲=r_۲\omega=۲\times۱۰=۲۰\Rightarrow W=\frac{۱}{۲}m(v_۲^۲-v_۱^۲)=\frac{۷۰}{۲}(۴۰۰-۲۵۰۰)=-۷۳۵۰۰j$$

در این صورت پاسخ نادرست مربوط به گزینه «۴» به‌دست خواهد آمد، اما پاسخ صحیح عبارت است از:

$$W=\frac{۱}{۲}m(V_۲^۲-V_۱^۲)=\frac{۱}{۲}(۷۰)(۱۰۰-۰)=۳۵۰۰J$$

نکته قابل توجه این است که مؤلفه شعاعی سرعت شخص در ابتدا صفر بوده و در پایان $۱۰\frac{m}{s}$ می‌باشد.

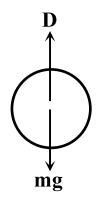
نیروی مقاومت هوا

هنگامی که جسمی به سوی بالا پرتاب می‌شود یا سقوط می‌کند، از طرف هوا نیرویی متناسب با سرعت جسم به آن وارد می‌گردد. چون هوا نوعی شاره است، به‌طور کلی این نیروی مقاوم از رابطه $D=\frac{۱}{۲}c\rho Av^۲$ به‌دست می‌آید. در این رابطه c ضریب کششی و A سطح مقطع جسم است که عمود بر سرعت v می‌باشد و ρ چگالی شاره‌ای است که جسم در آن سقوط می‌کند. v سرعت نسبی جرم و شاره است.

مثال۱۱: کره‌ای به شعاع $R=۲m$ و جرم $m=۶۰kg$ از ارتفاع $h=۱۰m$ نسبت به سطح زمین از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند. با فرض این‌که ضریب کششی را با $c=۰/۴$ و چگالی هوا را با $\rho=۱\frac{kg}{m^۳}$ نشان دهیم، شتاب این گلوله را درست در لحظه برخورد به سطح زمین بیابید.

۱) $۰/۶(\frac{m}{s^۲})$ ۲) $۱/۶(\frac{m}{s^۲})$ ۳) $۳/۶(\frac{m}{s^۲})$ ۴) $۵/۶(\frac{m}{s^۲})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» نیروهایی که بر کره وارد می‌شوند، عبارتند از: نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا. سرعت کره درست در لحظه برخورد با سطح زمین از رابطه $V=\sqrt{۲gh}$ به‌دست می‌آید. بنابراین نیروی مقاومت هوا در لحظه برخورد با زمین عبارت است از $D=\frac{۱}{۲}c\rho V^۲A$. A مساحت سطح مقطع کره می‌باشد که دایره‌ای به شعاع R است؛ $A=\pi R^۲$. بنابراین $D=\frac{۱}{۲}c\rho(۲gh)(\pi R^۲)$ و پس از جایگذاری اعداد داریم:



$$D=\frac{۱}{۲}(۰/۴)(۲۰۰)(۴\pi)\simeq ۵۰۰N$$

از طرف دیگر، نیروی وزن گلوله عبارت است از: $W = mg = ۶۰ \times ۱۰ = ۶۰۰N$ ، با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$mg - D = ma \Rightarrow a = \frac{۶۰۰ - ۵۰۰}{۶۰} = ۱/۶(\frac{m}{s^۲})$$

در اینجا لازم به ذکر است که از یک تقریب استفاده کرده‌ایم و آن اینکه سرعت کره را در لحظه برخورد با زمین بدون در نظر گرفتن نیروی مقاومت هوا بدست آورده‌ایم. حال آنکه سرعت مقدار کمتری دارد و باید برای محاسبه آن در لحظه برخورد از $m\frac{dv}{dt} = mg - D = mg - \frac{۱}{۲}c\rho V^۲ A$ انتگرال‌گیری کرد و به ناچار باید $\rho = \rho(h)$ را بدانیم که چون زمانگیر است و در صورت تست به آن اشاره نشده است، از آن صرف‌نظر می‌کنیم.

نیروی وزن

نیرویی است که از یک جسم نجومی به جسم دیگر نزدیک به آن وارد می‌شود $w = mg$. در این رابطه g شتاب سقوط آزاد در سطح سیاره یا ستاره است. این جسم نجومی در مسائل پیش‌رو معمولاً زمین است.

نیروی جاذبه گرانشی

برای دو جرم $m_۱$ و $m_۲$ که به فاصله r از هم قرار گرفته‌اند، نیروی جاذبه گرانشی با رابطه $\vec{F} = -G\frac{m_۱m_۲}{r^۲}\hat{r}$ تعریف می‌شود که در آن G ثابت گرانشی است.

مثال۱۲: کدام‌یک از شکل‌های تابعی زیر را نمی‌توان به عنوان رابطه‌ای برای قانون جهانی گرانش در نظر گرفت؟

۱) $\vec{F} = -G\frac{m_۱m_۲}{r^۲}\hat{r}$ ۲) $\vec{F} = -G\frac{m_۱m_۲}{r^۳}\vec{r}$ ۳) $\vec{F} = G\frac{m_۱m_۲}{r^۲}(\vec{\nabla}r)$ ۴) $\vec{F} = G\frac{m_۱m_۲}{r^۲}\vec{\nabla}(\frac{۱}{r})$

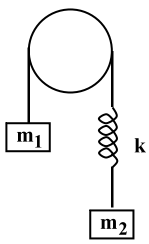
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون نیروی جاذبه گرانشی با عکس مجذور فاصله متناسب است و شعاعی و به‌سوی مرکز می‌باشد، پس گزینه‌ای که علامت آن به‌سوی بیرون از مرکز باشد، نادرست است. از آنجا که حاصل $\vec{\nabla}(r)$ بردار واحد شعاعی و به‌سوی بیرون مرکز است، پس حاصل نمایشگر یک نیروی رانشی است نه ربایشی.

◆ ◆ ◆ ◆

نکات مهم:

۱ـ در صورتی که پس از حل مسأله، شتاب منفی به دست آید، شتاب از نظر اندازه صحیح بوده ولی در سوی عکس جهتی است که به عنوان مثبت انتخاب شده است؛ اما باید توجه داشت که در به دست آوردن سایر کمیت‌ها مانند کشش نخ و یا نیروهای داخلی باید از همان شتاب به‌دست آمده استفاده کرد.

مثال۱۳: یک ماشین آتوود تعدیل‌یافته به‌صورت زیر می‌باشد. میزان تغییر طول فنر بدون جرم با کدام گزینه بیان می‌شود؟(k ثابت فنر است و $m_۱$ با شتاب تندشونده به‌سوی پایین می‌رود)



۱) $\Delta y = \frac{m_۲ g}{k(m_۱ + m_۲)}$ ۲) $\Delta y = \frac{۲m_۱m_۲}{m_۱ + m_۲}(\frac{g}{k})$

۳) $\Delta y = \frac{m_۲^۲ g}{k(m_۱ + m_۲)}$ ۴) $\Delta y = \frac{m_۱^۲ g}{k(m_۱ + m_۲)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» معادلات حرکت مربوط به دو جرم را نوشته و با توجه به شرایط مسئله می‌بینیم که $F = T$ یعنی نیروی کشش نخ وارد بر جرم $m_۱$ همان نیروی کشش فنر وارد بر جرم $m_۲$ است. بنابراین:

$$\begin{cases} m_۱g - F = m_۱a \\ F - m_۲g = m_۲a \end{cases}$$

پس از حل این دستگاه برای F می‌توان نوشت:

$$F = \frac{۲m_۱m_۲}{m_۱ + m_۲}g$$

و با توجه به قانون هوک $F = k\Delta y$ داریم:

$$\Delta y = \frac{F}{k} = \frac{۲m_۱m_۲}{m_۱ + m_۲}(\frac{g}{k})$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲ـ می‌توان در بررسی حرکت کلی و در به دست آوردن شتاب مجموعه ذرات با هم نیروهای داخلی مثل کشش نخ را در نظر نگرفت.

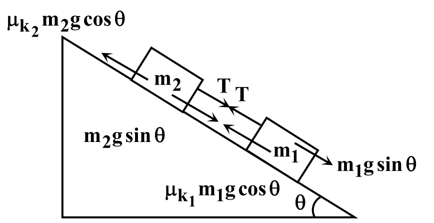
مثال۱۴: دو جرم $m_۱$ و $m_۲$ که دارای ضریب اصطکاک جنبشی یکسانی با یک سطح شیبدار می‌باشند، توسط فنری به هم متصل شده‌اند و از بالای سطح شیبدار در حال پایین آمدن می‌باشند. کدام حالت مجموعه دو جرم زودتر به پایین سطح شیبدار می‌رسد؟

۱) فنر فشرده شده باشد. ۲) فنر کشیده شده باشد.

۳) فنر نصف طول عادی خود را داشته باشد. ۴) هیچ‌کدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» نیروی خارجی وارد بر مجموعه، نیروی وزن دو جرم m_1 و m_2 و نیروی اصطکاک میان آن دو با سطح شیبدار است و این دو نیرو هستند که حرکت کل مجموعه را تعیین می‌کنند، نه نیروی فنر که نیرویی درونی است. طبق قانون سوم نیوتن، درون مجموعه دو نیروی وارد بر دو جسم از طرف فنر همدیگر را خنثی می‌کنند.

۳ـ اگر دو جرم m_1 و m_2 را در نظر بگیریم که به‌وسیله یک ریسمان به هم متصل شده و روی سطح شیبداری قرار گرفته باشند که دارای اصطکاک است، به دلیل وجود نیروی اصطکاک میان دو جرم با سطح، اگر بدون در نظر گرفتن ریسمان حرکت هر یک از جرم‌ها را بررسی کنیم، با توجه به آنکه ممکن است ضریب اصطکاک μ_1 میان جرم m_1 و سطح شیبدار با ضریب اصطکاک میان جرم m_2 با سطح شیبدار یعنی μ_2 متفاوت باشد، شتاب حرکت این دو متفاوت خواهد بود. اگر $a_1 > a_2$ باشد، از آنجا که m_1، m_2 را به دنبال خود می‌کشد، شتاب حرکت هر دو برابر خواهد شد.



$$\begin{cases} m_1 g\sin\theta - T - \mu_{k_1} m_1 g\cos\theta = m_1 a \\ T + m_2 g\sin\theta - \mu_{k_2} m_2 g\cos\theta = m_2 a \end{cases}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۱۵: دو جرم m_1 و m_2 روی سطح شیبداری به زاویه $\theta = 30^\circ$ قرار گرفته‌اند و توسط طنابی به یکدیگر متصل شده‌اند. اگر ضرایب اصطکاک جنبشی آنها با سطح را به‌ترتیب با μ_{k_1} و μ_{k_2} نشان دهیم و حداکثر نیرویی را که طناب می‌تواند پیش از پاره شدن تحمل کند، با T نمایش دهیم، آنگاه μ_{k_2} باید در کدام شرط صدق کند؟

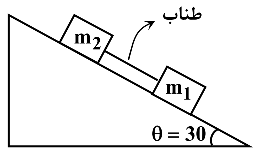
۱) $\mu_{k_2} = 0$

۲) $\mu_{k_2} \le \dfrac{T + \mu_{k_2} m_2 g}{m_1 + m_2}$

۳) $\mu_{k_2} \le \left(\dfrac{m_1 + m_2}{m_1}\right)\left(\dfrac{T + \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mu_{k_1} m_1 m_2 g}{(m_1 + m_2)}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} m_2 g}\right)$

۴) $\mu_{k_2} \ge \left(\dfrac{m_1 + m_2}{m_1}\right)\left(\dfrac{T - \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mu_{k_1} m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} m_2 g}\right)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» دستگاه معادلات مربوط به دو جرم عبارت است از:



$$\begin{cases} m_1 g\sin\theta - T - \mu_{k_1} m_1 g\cos\theta = m_1 a \\ T + m_2 g\sin\theta - \mu_{k_2} m_2 g\cos\theta = m_2 a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{g}{2} - \frac{(\mu_{k_1} m_1 + \mu_{k_2} m_2)}{(m_1 + m_2)}\frac{\sqrt{3}}{2} g$$

نیرویی که از طرف جرم m_1 به طناب وارد می‌شود برابر است با:

$$T = m_1 g(\frac{1}{2}) - \mu_{k_1} m_1 g\frac{\sqrt{3}}{2} - m_1 a$$

نیرویی که از طرف جرم m_2 به طناب وارد می‌شود برابر است با:

$$T = \mu_{k_2} m_2 g\frac{\sqrt{3}}{2} - m_2 g(\frac{1}{2}) + m_2 a$$

برای پاره نشدن طناب باید ضریب اصطکاک جنبشی μ_{k_2} کمتر از مقداری مشخص باشد:

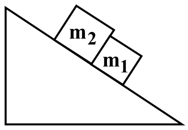
$$\mu_{k_2} \le \left(\frac{T + \frac{m_2 g}{2} - m_2 a}{\frac{\sqrt{3}}{2} m_2 g}\right) \Rightarrow \mu_{k_2} \le \frac{T + \frac{m_2 g}{2} - \frac{m_2 g}{2} + \frac{m_2(\mu_{k_1} m_1 + \mu_{k_2} m_2)}{(m_1 + m_2)}\frac{\sqrt{3}}{2} g}{\frac{\sqrt{3}}{2} m_2 g} \Rightarrow \mu_{k_2} \le \frac{(m_1 + m_2)}{m_1}\left(\frac{T + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_{k_1} m_1 m_2 g}{(m_1 + m_2)}}{\frac{\sqrt{3}}{2} m_2 g}\right)$$

اما چنانچه $a_1 < a_2$ باشد، طناب شل شده و تا زمانی که m_2 به m_1 برخورد نکرده باشد، دو جرم مجزا داریم و پس از آن شتاب دو جرم یکی می‌شود. در این حالت که دو جرم به هم رسیده‌اند و با هم حرکت می‌کنند، معادلات حرکت عبارتند از:

$$\begin{cases} m_1 g\sin\theta + F - \mu_{k_1} m_1 g\cos\theta = m_1 a' \\ m_2 g\sin\theta - F - \mu_{k_1} m_2 g\cos\theta = m_2 a' \end{cases}$$

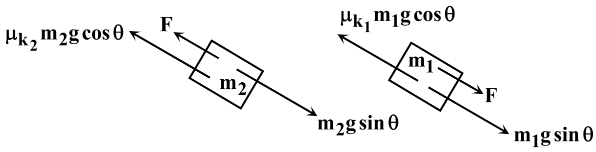
که در این معادلات F نیروی رانشی است که دو جرم به دلیل تماس مستقیم بر هم وارد می‌کنند.

مثال۱۶: دو جرم m_1 و m_2 به‌ترتیب با ضرایب اصطکاک جنبشی $\mu_{k_1}=0/4$ و $\mu_{k_2}=0/3$ در حالی‌که با هم در تماس هستند، به سوی پایین سطح شیبداری به زاویه $\theta=45^\circ$ در حرکت‌اند. اگر $m_1=2kg$ و $m_2=3kg$ باشد شتاب حرکت دو جرم m_1 و m_2 و همچنین نیرویی که به هم وارد می‌کنند به‌ترتیب عبارتند از:



۱) $3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$
۲) $(4/3)\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$
۳) $(2/31)\frac{\sqrt{3}}{2}, 0$
۴) $0/6\sqrt{2}\ ,\ 3/3\sqrt{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» نمودار جسم آزاد نیروهایی که بر هریک از دو جرم وارد می‌آیند به‌صورت زیر است:



$$\begin{cases} m_1g\sin\theta+F-\mu_{k_1}m_1g\cos\theta=m_1a & (1)\\ m_2g\sin\theta-F-\mu_{k_2}m_2g\cos\theta=m_2a & (2)\end{cases}$$

برای پیدا کردن a، معادلات (۱) و (۲) را با یکدیگر جمع و F را از این دو معادله حذف می‌کنیم.

$$g\sin\theta(m_1+m_2)-g\cos\theta(\mu_{k_1}m_1+\mu_{k_2}m_2)=a(m_1+m_2)\Rightarrow a=g\sin\theta-g\cos\theta(\frac{\mu_{k_1}m_1+\mu_{k_2}m_2}{m_1+m_2})$$

$$a=10(\frac{\sqrt{2}}{2})-10(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{(0/4)(2)+(0/3)(3)}{2+3})=5\sqrt{2}(1-\frac{1/7}{5})\ \Rightarrow\ \boxed{a=3/3\sqrt{2}(\frac{m}{s_2})}$$

$$\Rightarrow F=m_1a+\mu_{k_1}m_1g\cos\theta-m_1g\sin\theta=(2)(3/3)(\sqrt{2})+(0/4)(2)(10)(\frac{\sqrt{2}}{2})-(2)(10)(\frac{\sqrt{2}}{2})=0/6\sqrt{2}$$

کار، انرژی و قانون بقای انرژی

یکی دیگر از روش‌های حل مسائل دینامیک استفاده از روش قانون پایستگی است که غالباً روشی ساده‌تر از روش مبتنی‌بر قانون دوم نیوتن می‌باشد. قانون پایستگی انرژی عبارت است از:

$$\Delta K+\Delta U=W_d$$

که در آن ΔK تغییرات انرژی جنبشی، ΔU تغییرات انرژی پتانسیل و W_d کار انجام شده توسط نیروهای ناپایستار است.

اگر نیروی ناپایستار در کار نباشد، داریم $\Delta K+\Delta U=0$ وچون E (انرژی مکانیکی) برابر با حاصل‌جمع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل است، می‌توان گفت انرژی مکانیکی پایسته است، یعنی: $E_f=E_i$.

برای حل کردن مسائل با استفاده از قانون پایستگی انرژی سه مرحله زیر را انجام می‌دهیم:

۱ـ ابتدا نقاط i و f را برای سیستم تعیین می‌کنیم که همان نقاط ابتدایی و انتهایی بررسی حرکت می‌باشند.

۲ـ انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم را در نقاط i و f به‌دست می‌آوریم.

۳ـ اگر تنها نیروی اتلافی وارد به سیستم نیروی ثابت اصطکاک باشد، کار انجام‌شده توسط آن به صورت $W_d=-Fd$ می‌باشد که در آن F نیروی اصطکاک و d مسافتی است که جسم جابه‌جا می‌شود. علامت منفی به این دلیل ظاهر می‌شود که نیروهای اتلافی همواره در خلاف جهت جابجایی ذره می‌باشند.

مثال۱۷: جسمی به جرم 5kg با سرعت $10\frac{m}{s}$ به سطح استخر پر از آبی به عمق 6m برخورد می‌کند و با سرعت تقریباً ثابت به کف استخر می‌رسد. اگر سرعت برخورد به کف استخر برابر با $3\frac{m}{s}$ باشد، نیروی مقاومت شاره بر جسم را پیدا کنید.

۱) 87/7N
۲) 77/9N
۳) 87/9N
۴) 78/9N

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» تغییر انرژی جنبشی جسم برابر است با:

$$\Delta K=\frac{1}{2}mV_2^2-\frac{1}{2}mV_1^2=\frac{1}{2}(5)(3^2-10^2)=-\frac{455}{2}$$

تغییر انرژی پتانسیل جسم برابر است با:

$$\Delta U=mg(0)-mg(6)=0-(5\times10\times6)=-300$$

می‌بینیم که هم انرژی جنبشی جسم کاهش یافته و هم انرژی پتانسیل گرانشی آن.

با توجه به رابطه پایستگی انرژی مکانیکی داریم:

$$\Delta K+\Delta U=W_d\ \Rightarrow -227/5-300=-527/5$$

$$W_d=F.d=Fd\cos\pi=-Fd\ \Rightarrow -527/5=-F\times(6)\ \Rightarrow F=87/9\ (N)$$

انواع نیروها از دیدگاهی دیگر

نیروی وابسته به زمان: اگر $F = F(t)$ باشد، آنگاه می‌توان از طریق انتگرال‌گیری از معادله حرکت نیوتن، توابع مختصات و سرعت را برحسب زمان ($x(t)$ و $V(t)$) پیدا کرد:

$$m\frac{dv}{dt} = F(t) \text{ یا } m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t)$$

مثال ۱۸: اگر نیروی وارد بر ذره‌ای برحسب زمان به صورت $F(t) = \frac{ab^2}{(a^2 + V_0^2t^2)^{\frac{1}{2}}}$ داده شده باشد، آنگاه سرعت ذره به ازای زمان‌های بسیار طولانی کدام است؟ (b, a, v_0 اعدادی ثابت هستند)

۱) $\frac{b^2}{mav_0}$　۲) $\frac{b}{mav_0}$　۳) $\frac{a^2}{mbv_0}$　۴) $\frac{m}{abv_0}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به معادله حرکت داریم:

$$m\frac{dv}{dt} = F(t) = \frac{ab^2}{(a^2 + v_0^2t^2)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \int_{v_0}^{v} mdv = \int_0^t \frac{ab^2dt}{\sqrt{a^2 + v_0^2t^2}}$$

$$\Rightarrow V - V_0 = \int_0^t \frac{\frac{ab^2}{m}dt}{(a^2 + v_0^2t^2)^{\frac{1}{2}}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{ab^2}{mv_0}(\cos\theta)^{-1}d\theta = \frac{b^2}{mav_0}\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\Big|_{\theta_0}^{\theta}$$

از تغییر متغیر $\begin{cases} \frac{v_0t}{a} = \tan\theta \\ dt = \frac{a}{v_0}\sec^2\theta d\theta \end{cases}$ استفاده کرده‌ایم.

برای جایگذاری راحت‌تر بهتر است $\sin\theta$ را برحسب $\tan\theta$ بنویسیم؛ یعنی از $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ استفاده کرده و به $\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$ برسیم.

$$\Rightarrow v = \frac{b^2}{mav_0}\left[\frac{\frac{v_0}{a}t}{\sqrt{1+\frac{v_0^2t^2}{a^2}}}\Big|_0^t\right] = \frac{b^2t}{ma^2\sqrt{1+\frac{v_0^2t^2}{a^2}}} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} v = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{b^2t}{ma^2\sqrt{1+\frac{v_0^2t^2}{a^2}}}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{b^2}{ma^2\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{v_0^2}{a^2}}}\right) = \frac{b^2}{mav_0}$$

نیروی وابسته به سرعت

اگر نیرویی وابسته به سرعت باشد، مانند نیروی مقاومت هوا، آنگاه می‌توان $x(v)$ را با استفاده از معادله دیفرانسیل نیرو به‌دست آورد. معمولاً نیروهای وابسته به سرعت از جنس نیروهای اتلافی یا مقاوم هستند که بیشتر با توان اول یا دوم سرعت متناسب‌اند.

$$m\frac{dV}{dt} = F(V)$$

مثال ۱۹: اگر نیروی وارد بر ذره‌ای برحسب سرعت آن به صورت $F(V) = -Ae^{BV}$ باشد، آنگاه سرعت آن برحسب زمان عبارت است از (v_0 سرعت اولیه ذره و A و B اعدادی ثابت‌اند.)

۱) $At^2 + Bt$　۲) $-\frac{1}{B}Ln(\frac{AB}{m}t + e^{-BV_0})$　۳) $\frac{A^2t}{Bm} + V_0$　۴) $-\frac{1}{A}Ln(\frac{ABt}{m} + e^{-AV_0})$

پاسخ: گزینه «۲» معادله حرکت نیوتن به صورت زیر می‌باشد:

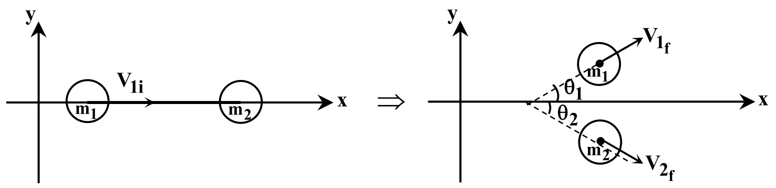
$$m\frac{dV}{dt} = -Ae^{BV} \Rightarrow \int_{V_0}^{V} e^{-Bv}dV = \int_0^t (-\frac{A}{m}dt) \Rightarrow -\frac{1}{B}(e^{-BV} - e^{-BV_0}) = -\frac{At}{m} \Rightarrow V = -\frac{1}{B}Ln(\frac{ABt}{m} + e^{-BV_0})$$

نیروهای وابسته به مکان

این نیروها بسته به مکان ذره تغییر می‌کنند و ممکن است تغییر علامت نیز داشته باشند.

$$F(x) = m\frac{d^2x}{dt^2} \text{ یا } F(x) = m\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = mV\frac{dV}{dx} \Rightarrow F(x)dx = mVdV$$

برخورد دوبُعدی (برخورد در صفحه)



به‌طور کلی برای حل مسأله برخورد در صفحه اطلاعات لازم برای حل مسئله عبارتند از مؤلفه‌های تکانه‌های خطی دو ذره قبل و بعد از برخورد (جمعاً دوازده کمیت) و نیز نسبت دو جرم برخوردکننده $\frac{m_1}{m_2}$، با توجه به اینکه معادلات در دسترس ما عبارتند از $\vec{P}_{1i}+\vec{P}_{2i}=\vec{P}_{1f}+\vec{P}_{2f}$ (جمعاً سه معادله) و نیز $\frac{P_{1i}^2-P_{1f}^2}{m_1}=\frac{P_{2f}^2-P_{2i}^2}{m_2}$ بنابراین چهار معادله داریم و سیزده مجهول. پس اگر نه پارامتر از ذرات برخوردکننده را داشته باشیم می‌توان چهار پارامتر دیگر را از یافتن پاسخ این چهار معادله یافت. معمولاً این نه پارامتر مورد نیاز عبارتند از: شش مؤلفه تکانه‌های خطی دو ذره قبل از برخورد، نسبت دو جرم $\frac{m_1}{m_2}$ و نیز دو زاویه پراکندگی ذره اول پس از برخورد در فضا.

از حل کردن این سه معادله به معادله‌های مقابل می‌رسیم:

$$P_{1i}^2+P_{1f}^2+2P_{1i}P_{1f}\cos\theta_1=P_{2f}^2$$

$$\frac{P_{1f}}{P_{1i}}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\cos\theta_1\pm\left[\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\cos^2\theta_1+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

با توجه به علامت‌های $+$ و $-$ دیده می‌شود که برای هر مقدار زاویه پراکندگی θ_1 دو مقدار متفاوت برای V_{1f} خواهیم داشت که مقدار بزرگ‌تر مربوط به برخورد خراشان (برخوردی که در آن اجسام در حال عبور از کنار هم تماس کوچکی با هم داشته باشند) (زاویه پراکندگی کوچک‌تر از θ_2) و مقدار کوچک‌تر مربوط به برخورد رودررو (زاویه پراکندگی بزرگ‌تر از θ_2) خواهد بود.

اگر $m_1>m_2$ آنگاه کمیت زیر رادیکال برای $\theta_1=\theta_m$ صفر خواهد شد به‌صورتی که $0\le\theta_m\le\frac{\pi}{2}$ $\quad\cos^2\theta_m=1-\frac{m_2^2}{m_1^2}$

اگر $m_1\gg m_2$ آنگاه زاویه پراکندگی θ_1 بسیار کوچک خواهد بود که مطابق تجربه می‌باشد.

اگر $\theta_1=0$ آنگاه یا برخوردی روی نمی‌دهد و یا برخورد رودررو خواهد بود و در این صورت داریم:

$$\frac{P_{1f}}{P_{1i}}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\quad,\theta_2=0,\quad\frac{P_{2f}}{P_{1i}}=\frac{2m_2}{m_1+m_2}$$

که درست همان روابطی است که برای برخورد کشسان یک بعدی به‌دست آوردیم اگر $m_1=m_2$ آنگاه به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{P_{1f}}{P_{1i}}=\cos\theta_1\quad,\quad\frac{P_{2f}}{P_{1i}}=\sin\theta_1\quad,\quad\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$$

می‌توان دو رابطه اول را این‌طور نوشت:

$$P_{1f}^2+P_{2f}^2=P_{1i}^2$$

که همان رابطه پایستگی انرژی جنبشی به‌ازای $m_1=m_2$ است.

با برابر قرار دادن مؤلفه‌های متناظر در دو راستا خواهیم داشت (با این شرط که جسم دوم ساکن است):

در راستای x: $P_x=$ ثابت $\rightarrow m_1V_{1i}+0=m_1V_{1f}\cos\theta+m_2V_{2f}\cos\varphi$

در راستای y: $P_y=$ ثابت $\rightarrow 0+0=m_1V_{1f}\sin\theta-m_2V_{2f}\sin\varphi$

و اگر این برخورد از نوع کشسان باشد، آنگاه:

$$\frac{1}{2}m_1V_{1i}^2+0=\frac{1}{2}m_1V_{1f}^2+\frac{1}{2}m_2V_{2f}^2$$

مثال۸: جسمی به جرم $m_1=2kg$ با سرعت اولیه $4(\frac{m}{s})$ به‌صورت کشسان به جسم ساکنی به جرم $m_2=4kg$ برخورد می‌کند. اگر پس از برخورد، جسم اول با سرعت $2(\frac{m}{s})$ و تحت زاویه ۶۰ درجه نسبت به خط واصل اولیه مراکز دو ذره پراکنده شود، جسم دوم با چه سرعت و زاویه‌ای منحرف خواهد شد؟

۱) $\theta_2=\frac{\pi}{6}\ ,\ V_{2f}=\sqrt{3}\frac{m}{s}$

۲) $\theta_2=\frac{\pi}{6}\ ,\ V_{2f}=2\sqrt{3}\frac{m}{s}$

۳) $\theta_2=\frac{\pi}{3}\ ,\ V_{2f}=\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{m}{s}$

۴) $\theta_2=\frac{\pi}{3}\ ,\ V_{2f}=2\sqrt{3}\frac{m}{s}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای پاسخ دادن به این تست نیازی به در نظر گرفتن پایستگی انرژی جنبشی نیست. با استفاده از پایستگی اندازه حرکت خطی در دو بعد می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} m_1 V_{1i} + 0 = m_1 V_{1f} \cos\theta_1 + m_2 V_{2f} \cos\theta_2 \\ 0 = m_1 V_{1f} \sin\theta_1 - m_2 V_{2f} \sin\theta_2 \end{cases}$$

از این دو معادله می‌توان $\tan\theta_2$ را پیدا کرد. پس از جایگذاری داده‌ها در این دو معادله خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (2)(4) = (2)(2)\cos 60 + (4) v_{2f} \cos\theta_2 \\ 2(2)\sin 60 = (4) v_{2f} \sin\theta_2 \end{cases}$$

از تقسیم این دو معادله بر هم داریم:

$$\tan\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

و بنابراین $\frac{2}{6} = 30^\circ = \theta_2 = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3})$. با قرار دادن این مقدار در معادله دوم، V_{2f} را به‌دست می‌آوریم:

$$V_{2f} = \frac{m_1 V_{1f} \sin\theta_1}{m_2 \sin\theta_2} = \frac{2(4)(\frac{\sqrt{3}}{2})}{4(\frac{1}{2})} = 2\sqrt{3}$$

برخورد ناکشسان عبارت است از برخوردی که در آن انرژی پتانسیل یا جنبشی مربوط به ذرات داخلی اجسام برخوردکننده بـه هـم پـس از برخـورد تغییـر می‌کنند. دو نوع برخورد ناکشسان داریم:

انرژی‌گیر: که در آن انرژی جنبشی ذرات (چه همان ذرات قبل از برخورد باشند یا ذرات جدید ناشی از برخورد) پس از برخـورد کمتـر از انـرژی جنبشـی ذرات قبل از برخورد بوده.

انرژی‌ده: که پس از برخورد انرژی جنبشی افزایش می‌یابد.

برخورد اجسام ماکروسکوپی همواره به‌صورت انرژی‌گیر است چون همواره بخشی از انرژی جنبشی انتقالی اجسام پس از برخورد به دیگر صورت‌های انرژی مانند انرژی پتانسیل تغییر شکل جسم یا انرژی جنبشی دورانی تبدیل می‌شود. رابطه پایستگی انرژی کل در برخوردهای ناکشسان به این صورت نوشته می‌شود:

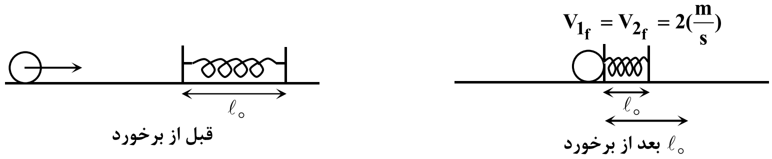
$$K_{1i} + K_{2i} + Q = K_{1f} + K_{2f}$$

برای برخورد انرژی‌گیر $Q < 0$ می‌باشد، چون انرژی جنبشی پس از برخورد باید کمتر از انرژی جنبشی قبل از برخورد باشد به این دلیل باید از انرژی جنبشی ذرات قبل از برخورد مقدار Q را کم کرد. به همین روش برای برخورد انرژی‌ده $Q > 0$ بوده و برای برخورد کشسان $Q = 0$.

مثال۹: جسمی به جرم 2kg با سرعت $10(\frac{m}{s})$ به فنری افقی و ساکن به جرم 2 kg و ثابت فنر $100(\frac{N}{m})$ برخورد کرده و مجموعه جسم و فنـر بـا یک سرعت به حرکت خود ادامه می‌دهد. اگر نیمی از انرژی تلف‌شده به انرژی پتانسیل کشسانی فنر تبدیل شود، فنر چه میزان فشرده خواهد شد؟

۱) $0/5\ m$ ۲) $\sqrt{5}m$ ۳) $\sqrt{0/5}m$ ۴) $\sqrt{2/6}m$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» وضعیت جسم را قبل و بعد از برخورد می‌توان به‌صورت زیر ترسیم کرد:



با توجه به پایستگی تکانه خطی در یک بعد داریم:

$$m_1 V_{1i} + 0 = m_1 V_{1f} + m_2 V_{2f} \to m_1 V_{1i} = (m_1 + m_2) V_2 \Rightarrow (2)(10) = (2+2) V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{20}{4} = 5(\frac{m}{s})$$

انرژی تلف‌شده: $\frac{1}{2} m_1 V_{1i}^2 - Q = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_2^2 \Rightarrow Q = 100 - 50 = 50$

چون نیمی از انرژی هدررفته به‌صورت انرژی پتانسیل کشسانی فنر تبدیل شده است، $\frac{Q}{2} = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2$ می‌باشد، بنابراین:

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}(100)(\Delta l)^2 \Rightarrow \Delta l = \sqrt{0/5}$$

ضریب بازگشت

در برخورد، ضریب بازگشت به‌صورت $\varepsilon = \frac{|\vec{V}_{2f} - \vec{V}_{1f}|}{|\vec{V}_{2i} - \vec{V}_{1i}|}$ تعریف می‌شود که همان نسبت سرعت نسبی بعد از برخورد به سرعت نسبی قبل از برخورد است و مقدار آن همیشه بین صفر و یک می‌باشد. برای یک برخورد کاملاً کشسان، این ضریب حالت حدی $\varepsilon = 1$ را دارد و برای یک برخورد کاملاً ناکشسان چون دو جسم، نسبت به هم دارای سرعت نخواهند بود، مقدار این ضریب دارای حالت حدی $\varepsilon = 0$ می‌باشد.

نکته۹: با استفاده از ضریب بازگشت و معادله پایستگی تکانه خطی می‌توانیم سرعت‌های نهایی مربوط به هر کدام از دو جسم برخوردکننده را پیدا کنیم.

$$V_{1f} = \frac{(m_1 - \varepsilon m_2)V_{1i} + (m_2 + \varepsilon m_1)V_{2i}}{m_1 + m_2}, V_{2f} = \frac{(m_1 + \varepsilon m_2)V_{1i} + (m_2 - \varepsilon m_1)V_{2i}}{m_1 + m_2}$$

با نگاه به این روابط مشخص می‌شود که منظور از $\varepsilon = 0$ برخورد کاملاً ناکشسان است. همان‌طور که به‌راحتی می‌توان دید، در این حالت $V_{1f} = V_{2f}$ و این یعنی هیچ‌کدام از دو ذره پس زده نمی‌شوند، بلکه به هم می‌چسبند. اگر برخورد دو جسم به‌صورت کاملاً کشسان باشد $\varepsilon = 1$ و چنانچه $m_1 = m_2$ باشد، می‌بینیم که در این حالت $V_{1f} = V_{2i}$ و $V_{2f} = V_{1i}$. به عبارت دیگر، دو جسم در اثر برخورد سرعت‌های خود را با هم مبادله می‌کنند.

مثال۱۰: در برخورد ناکشسان میان ذره m_1 با سرعت V_1 و ذره ساکن m_2 چنانچه ضریب بازگشت برابر با e باشد انرژی تلف‌شده Q را بیابید؟

۱) $\frac{1}{2}V^2(m_1 - m_1(\frac{e+1}{1+\frac{m_2}{m_1}}))^2$

۲) $\frac{1}{2}m_1V^2 - \frac{1}{2}mV^2(1-\frac{m_2(e+1)}{(m_1+m_2)})^2 - \frac{1}{2}m_2V^2(\frac{e+1}{1+\frac{m_2}{m_1}})^2$

۳) $\frac{1}{2}m_1V^2 + \frac{1}{2}m_1V^2(1+\frac{m^2(e-1)}{(m_1+m_2)})^2 + \frac{1}{2}m_2V^2(\frac{e-1}{1-\frac{m_2}{m_1}})^2$

۴) $\frac{1}{2}m_1V^2(1+\frac{m_1(e+1)}{(m_1+m_2)})^2 + \frac{1}{2}m_2V^2(\frac{e+1}{1+\frac{m_2}{m_1}})^2$

پاسخ: گزینه «۱» سه معادله در دست داریم:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_1V^2 - Q = \frac{1}{2}m_1V_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2V_{2f}^2 \\ m_1V = m_1V_{1f} + m_2V_{2f} \\ e = \frac{V_{2f} - V_{1f}}{V} \end{cases}$$

$$Q = \frac{1}{2}m_1V^2 - \frac{1}{2}m_1V_{1f}^2 - \frac{1}{2}m_2V_{2f}^2$$

V_{2f} و V_{1f} را برحسب m_1، m_2، V و e می‌نویسیم

$$e = \frac{V_{2f} - V_{1f}}{V} = \frac{V_{2f} - V + \frac{m_2}{m_1}V_{2f}}{V} \Rightarrow V_{2f} = \frac{(e+1)V}{1+\frac{m_2}{m_1}}$$

$$V_{1f} = V - \frac{m_2}{m_1}V_{2f} = V - \frac{m_2}{m_1}(\frac{(e+1)V}{(1+\frac{m_2}{m_1})}) = V(1-\frac{m_2(e+1)}{(m_1+m_2)})$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2}m_1V^2 - \frac{1}{2}m_1V^2(1-\frac{e+1}{(m_1+m_2)})^2 - \frac{1}{2}m_2V^2(\frac{e+1}{1+\frac{m_2}{m_1}})^2$$

نکته۱۰: در برخورد ناکشسان رودررو، کاهش انرژی Q و ضریب بازگشت از طریق معادله $Q = \frac{1}{2}\mu V^2(1-\varepsilon^2)$ با هم ارتباط دارند که در آن μ معرف جرم کاهش یافته بوده ($\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$) و V بزرگی سرعت نسبی دو جسم پیش از برخورد است که از رابطه $V = |\vec{V}_{2i} - \vec{V}_{1i}|$ به‌دست می‌آید.

مثال۱۱: جرم $m_1 = 4kg$ با سرعت اولیه V' به جرم $m_2 = 2kg$ که با سرعت اولیه $\frac{V'}{2}$ در حرکت است، برخورد می‌کند. اگر انرژی تلف‌شده در برخورد برابر با 100J باشد، ضریب بازگشت مربوط به این برخورد با کدام گزینه داده می‌شود؟

۱) $\sqrt{1-\frac{600}{V'}}$ ۲) $\sqrt{1-\frac{600}{V'^2}}$ ۳) $\sqrt{1+\frac{600}{V'^2}}$ ۴) $\sqrt{1-\frac{600}{V'^3}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای به دست آوردن پاسخ می‌توان از روابط پایستگی اندازه حرکت خطی و همچنین پایستگی انرژی کل استفاده کرد؛ اما در این‌صورت، لزوماً باید یک معادله درجه دوم را حل کنیم که کمی طولانی است؛ اما چنانچه رابطه $Q=\frac{1}{2}\mu V^2(1-\varepsilon^2)$ را به خاطر داشته باشیم، می‌توان با محاسبه μ و V و جایگذاری آن‌ها در این رابطه ε را به‌دست آورد.

$$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}=\frac{2\times 4}{2+4}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3},\ V=\left|\frac{V'}{2}-V'\right|=\frac{V'}{2},\ Q=100\,\text{J}$$

بنابراین:

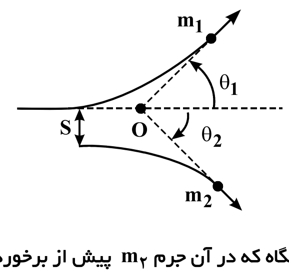
$$100=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{V'^2}{4}\right)(1-\varepsilon^2)\ \Rightarrow \varepsilon=\sqrt{1-\frac{600}{V'^2}}$$

نکته۱۱: اگر توپی را از ارتفاع h نسبت به سطح زمین رها کنیم و چنانچه ضریب بازگشت مربوط به برخورد توپ با زمین ε باشد، مسافت کلی که توپ ضمن حرکت پیش از توقف کامل می‌پیماید، عبارت است از $h(\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2})$. این کل مسافتی است که توپ بالا و پایین می‌رود و هرچه ضریب بازگشت بزرگ‌تر باشد، این مسافت بیشتر است. به‌عنوان مثال، مسافت‌های پیموده‌شده پیش از توقف برای دو حالتی که در آن‌ها $\varepsilon_1=\frac{1}{4}$ و $\varepsilon_2=\frac{1}{2}$ هستند، به ترتیب عبارتند از $(1/1)h$ و $(1/6)h$.

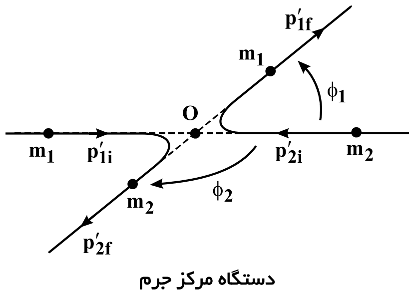
همچنین مدت زمانی که توپ حین بالا و پایین آمدن در هوا قرار دارد، از لحظه رها شدن تا پیش از توقف کامل با عبارت $\sqrt{\frac{2h}{g}}(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon})$ داده می‌شود. در مورد زمان کل مربوط به بالا و پایین پریدن توپ نیز این مطلب با برداشت شهودی و غیرعلمی ما سازگار است؛ به این صورت که هر چه ضریب بازگشت بیشتر باشد، برخورد توپ با زمین به برخورد کشسان نزدیک‌تر است. بنابراین انرژی جنبشی در هر برخورد کمتر تلف می‌شود و توپ زمان بیشتری در هوا خواهد ماند. به‌عنوان نمونه، مدت زمان‌های متناظر برای دو توپ با ضرایب بازگشت $\varepsilon_1=\frac{1}{4}$ و $\varepsilon_2=\frac{1}{2}$ که از یک ارتفاع نسبت به سطح زمین رها می‌شوند، عبارتند از $(1/6)\sqrt{\frac{2h}{g}}$ و $3\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

برخورد در دستگاه مرکز جرم

پیش از این درباره‌ی بررسی برخورد از دید ناظر واقع در چارچوب مرجع آزمایشگاه صحبت کردیم. حال نوبت بررسی برخورد از دید ناظری می‌رسد که در دستگاه مختصات مرکز جرم ذرات برخوردکننده قرار گرفته است. از دید این ناظر دو جرم برخوردکننده m_1 و m_2 در راستای خطی که از مرکز جرم دستگاه دو ذره می‌گذرد، به هم نزدیک می‌شوند، پس از آنکه برخورد کردند در راستای خطی دیگر که آن نیز از مرکز جرم می‌گذرد، اما با راستای پیش از برخورد زاویه ϕ می‌سازد، از هم دور می‌شوند. زاویه ϕ را زاویه انحراف ذرات برخوردکننده در دستگاه مختصات مرکز جرم می‌نامند. مقایسه برخورد از دید ناظرهای دو دستگاه مختصات آزمایشگاه و دستگاه مختصات مرکز جرم در شکل زیر نمایش داده شده است. علت برتری دستگاه مرکز جرم صفر بودن سرعت آن قبل و بعد از برخورد است و اگر برخورد کشسان باشد سرعت ذرات پیش و پس از برخورد یکسان است. می‌توان این برخورد را از دید دو ناظر مرکز جرم و آزمایشگاه چنین نشان داد:

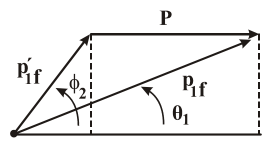


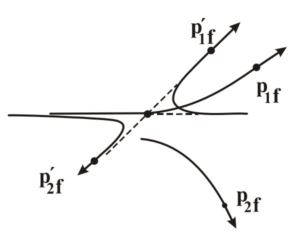
دستگاه آزمایشگاه که در آن جرم m_2 پیش از برخورد ساکن است.



دستگاه مرکز جرم

با منطبق کردن مرکز برخورد O در دو شکل برهم خواهیم داشت:





و در نتیجه داریم:

$$\tan\phi_1=\frac{V'_{1f}\sin\theta_1}{V'_{1f}\cos\theta_1+V}$$

در حالت برخورد کشسان داریم $\tan\phi_1 = \dfrac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1 + (\frac{m_1}{m_2})}$ (برای ϕ_2 نیز به همین ترتیب)

اگر $m_1 \ll m_2$ آنگاه ϕ_1 بسیار کوچک است.

اگر $m_1 = m_2$ آنگاه $\tan\phi_1 = \tan\dfrac{\theta_1}{2} \leftarrow \phi_1 = \dfrac{1}{2}\theta_1$.

اگر $m_2 \ll m_1$ آنگاه $\tan\phi_1 = \tan\theta_1 \leftarrow \phi_1 = \theta_1$. در این حالت پاسخ در هر دو دستگاه یکسان است.

از آنجا که می‌توان مکان مرکز جرم را منطبق بر دستگاه مختصات مرکز جرم در نظر گرفت، در این دستگاه مختصات $x_{cm} = y_{cm} = z_{cm} = 0$ می‌باشد.

همچنین $\vec{P}_{1fcm} + \vec{P}_{2fcm} = \vec{P}_{1icm} + \vec{P}_{2icm} = 0$ و این یعنی اندازه حرکت خطی کل دستگاه، قبل از برخورد و بعد از برخورد در این دستگاه مختصات صفر است.

مثال۱۲: جرم $m_1 = 2kg$ با سرعت $V'_{1i} = 2(\frac{m}{s})$ در دستگاه مرکز جرم به جرم همسان خود به‌صورت کشسان برخورد می‌کند. اگر زاویه پراکندگی در این دستگاه برابر با ۹۰ درجه باشد سرعت جرم m_1 پس از برخورد در دستگاه آزمایشگاه کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ ۴) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا رابطه زوایا در دو دستگاه مختصات را می‌نویسیم (در حالت کشسان)

$$\tan\phi_1 = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1 + (\frac{m_1}{m_2})} \xrightarrow{\theta_1 = \frac{\pi}{2}} \tan\phi_1 = 1 \Rightarrow \phi_1 = \frac{\pi}{4}$$

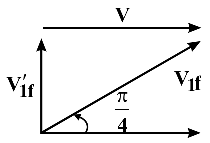
با توجه به شکل:

$$V'_{1f} = V_{1f}\sin\frac{\pi}{4}$$

در برخورد کشسان سرعت‌ها بدون تغییر می‌مانند

$$V'_{1f} = 2(\frac{m}{s}) \longrightarrow$$

$$V_{1f} = \frac{V'_{1f}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$



پایستگی انرژی کل

با توجه به پایستگی انرژی کل دستگاه خواهیم داشت:

$$\frac{P_{1icm}^2}{2m_1} + \frac{P_{2icm}^2}{2m_2} = \frac{P_{1fcm}^2}{2m_1} + \frac{P_{2fcm}^2}{2m_2} + Q$$

در این رابطه Q انرژی تلف‌شده در برخورد است.

با استفاده از این رابطه و همچنین پایستگی اندازه حرکت خطی می‌توان نشان داد:

$$\frac{P_{1icm}^2}{2\mu} = \frac{P_{1fcm}^2}{2\mu} + Q$$

که در آن $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ جرم کاهش‌یافته دستگاه متشکل از دو جرم می‌باشد.

همچنین اگر پارامتر γ را به‌صورت $\gamma = \dfrac{m_1 V_{1i}}{V_{fcm}(m_1 + m_2)}$ تعریف کنیم، می‌توان برای زاویه پراکندگی φ_1 مربوط به جرم m_1 در دستگاه مختصات آزمایشگاه با توجه به زاویه پراکندگی در دستگاه مختصات مرکز جرم چنین نوشت: $\tan\varphi_1 = \dfrac{\sin\theta}{\gamma + \cos\theta}$.

نکته۱۲: اگر $Q = 0$ باشد، یعنی برخورد به‌صورت کاملاً کشسان انجام گیرد، $V_{1icm} + V_{1fcm} = 0$ و این یعنی اندازه سرعت جرم m_1 تغییر نمی‌کند، بلکه تنها راستای آن دچار تغییر می‌شود؛ در این حالت $\gamma = \dfrac{m_1}{m_2}$ خواهد بود.

مثال۱۳: جسمی به جرم $m_1 = 2kg$ با سرعت اولیه $V_{1icm} = 5(\frac{m}{s})$ در دستگاه مرکز جرم به جسمی به جرم $m_2 = 3kg$ برخورد کرده و با سرعت $V_{1fcm} = 1(\frac{m}{s})$ برمی‌گردد. اگر سرعت جرم m_1 پیش از برخورد در دستگاه آزمایشگاه برابر با $4(\frac{m}{s})$ و زاویه پراکندگی در دستگاه مرکز جرم $\theta = \frac{\pi}{4}$ باشد، آنگاه زاویه پراکندگی در دستگاه مختصات آزمایشگاه کدام است؟

۱) $\tan^{-1}(\dfrac{1}{1+\frac{4}{5\sqrt{2}}})$ ۲) $\tan^{-1}(\dfrac{2}{1+\frac{16}{5\sqrt{2}}})$ ۳) $\tan^{-1}(\dfrac{1}{1+\frac{16}{5\sqrt{2}}})$ ۴) $\tan^{-1}(\dfrac{2}{1-\frac{16}{5\sqrt{2}}})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از آنجاکه V_{1i}، V_{1icm}، m_1، m_2 و θ مشخص می‌باشند، می‌توان از رابطه $\gamma = \frac{m_1 V_{1i}}{V_{fcm}(m_1 + m_2)}$ و $\tan\varphi_1 = \frac{\sin\theta}{\gamma + \cos\theta}$ استفاده و زاویه φ_1 را محاسبه کرد.

$$\gamma_1 = \frac{(2)(4)}{(1)(2+3)} = \frac{8}{5} \Rightarrow \tan\varphi_1 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{8}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \varphi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1 + \frac{16}{5\sqrt{2}}}\right)$$

نکته۱۳: اگر $m_1 \simeq m_2$ باشد، $\gamma = 1$ بوده و در نتیجه: $\tan\varphi_1 \simeq \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan(\frac{\theta}{2}) \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\theta}{2}$

نکته۱۴: در حالت کلی اگر برخورد دو ذره به‌صورت ناکشسان انجام گیرد، γ از رابطه $\gamma = \frac{m_1}{m_2}[1 - \frac{Q}{T}(1 + \frac{m_1}{m_2})]^{-\frac{1}{2}}$ به‌دست می‌آید که در آن Q اتلاف انرژی است و T انرژی جنبشی اولیه جسم در دستگاه مختصات آزمایشگاه می‌باشد.

مثال۱۴: جرم $m_1 = 2kg$ با سرعت $V_{1i} = 2(\frac{m}{s})$ نسبت به دستگاه مختصات آزمایشگاه به جسمی به جرم $m_2 = 2kg$ برخورد می‌کند. اگر ۱۰ درصد از انرژی جرم m_1 حین برخورد هدر رود، سرعت بازگشت جرم m_1 را در دستگاه مختصات مرکز جرم پیدا کنید.

۱) $\frac{\sqrt{5}}{4}$　　۲) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$　　۳) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$　　۴) $\frac{33}{15}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در اینجا با داشتن انرژی تلف‌شده V_{1i}، m_1 و m_2 و با کمک دو رابطه زیر داریم:

$$\gamma = \frac{m_1 V_{1i}}{V_{1fcm}(m_1 + m_2)} \quad \text{و} \quad \gamma = \frac{m_1}{m_2}[1 - \frac{Q}{T}(1 + \frac{m_1}{m_2})]^{-\frac{1}{2}}$$

می‌توان V_{1fcm} را پیدا کرد. برای پیدا کردن Q ابتدا باید T را پیدا کنیم، اما با توجه به‌صورت تست چون $Q = \frac{T}{10}$، پس $\gamma = \frac{2}{2}[1 - \frac{1}{10}(1 + \frac{2}{2})]^{-\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$. دانستن این مطلب مفید است که γ یک عدد است؛ بنابراین مربوط به اندازه‌گیری هیچ کمیت فیزیکی نیست و در نتیجه بدون بُعد می‌باشد. با توجه به تعریف γ داریم: $V_{1fcm} = \frac{m_1 V_{1i}}{\gamma(m_1 + m_2)}$ و در نتیجه:

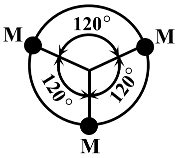
$$V_{1fcm} = \frac{2(2)}{\frac{3\sqrt{5}}{4}(2+2)} = \frac{4}{3\sqrt{5}}$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هفتم

۱ـ براساس قانون سوم کپلر، چنانچه نیم‌قطر طویل‌تر سیاره‌ی زحل حدود ۱۰ واحد نجومی باشد، دوره‌ی تناوب زحل حدود چند سال است؟
(۱ واحد نجومی = فاصله زمین تا خورشید)　　(سراسری ۸۵)

۱) ۲۰　　۲) ۳۰　　۳) ۱۰۰　　۴) ۲۴۰

۲ـ یک منظومه‌ی سه سیاره‌ای شامل سه سیاره با جرم‌های یکسان M و فواصل مساوی از یکدیگر است که در یک مدار مشترک دایره‌ای، به شعاع R، حرکت می‌کنند. اگر تندی حرکت سه سیاره یکسان باشد، دوره‌ی تناوب حرکت هر یک از سیارات کدام است؟　　(سراسری ۸۵)

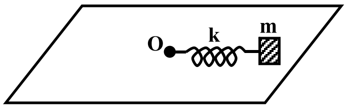


۱) $(\frac{۶\pi^۲R^۳}{GM})^{\frac{۱}{۲}}$　　۲) $(\frac{۲\sqrt{۳}\pi^۲R^۳}{GM})^{\frac{۱}{۲}}$

۳) $(\frac{۴\sqrt{۳}\pi^۲R^۳}{GM})^{\frac{۱}{۲}}$　　۴) $(\frac{۲\pi^۲R^۳}{GM})^{\frac{۱}{۲}}$

۳ـ ذره‌ای به جرم m به فنری سبک با ثابت k وصل شده و فنر به نقطه‌ی ثابت O متصل است. این ذره با بسامد زاویه‌ای ω_θ حول نقطه‌ی O در چرخش است. اگر ذره در حین چرخش، حول شعاع تعادل، نوسانات شعاعی کم‌دامنه با بسامد زاویه‌ای ω_r انجام دهد، کدام رابطه درست است؟

(راهنمایی: $V_{eff} = \frac{L^۲}{۲mr^۲} + V(r)$)　　(سراسری ۸۵)



۱) $\omega_\theta = \omega_r$　　۲) $\omega_\theta = ۲\omega_r$

۳) $\omega_r = ۲\omega_\theta$　　۴) $\omega_r = ۴\omega_\theta$

۴ـ ذره‌ای به جرم m، انرژی مکانیکی $E_\circ$ و تکانه زاویه‌ای $L_\circ$ تحت تأثیر یک نیروی مرکزی روی مسیر مارپیچی $r = r_\circ e^{b\theta}$ در صفحه‌ی افقی حرکت می‌کند. $r_\circ$ و b ثابت و r و θ مختصات قطبی ذره است. انرژی پتانسیل وابسته به نیروی مرکزی فوق کدام است؟　　(سراسری ۸۶)

۱) $E_\circ - \frac{L_\circ^۲}{۲mr^۲}$　　۲) $E_\circ - \frac{L_\circ^۲ b}{۲mr^۲}$　　۳) $E_\circ - \frac{L_\circ^۲(۱-b^۲)}{۲mr^۲}$　　۴) $E_\circ - \frac{L_\circ^۲(۱+b^۲)}{۲mr^۲}$

۵ـ سرعت فرار از سطح سیاره‌ای که جرم آن ۸ برابر جرم زمین و شعاع آن ۲ برابر شعاع زمین است، چند برابر سرعت فرار از سطح زمین است؟
(سراسری ۸۶)

۱) $\frac{۱}{۴}$　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) ۲　　۴ (

۶ـ سرعت فرار یک ذره در راستای قائم در فاصله‌ی $r(r > R_e)$ از مرکز زمین v_e است و سرعت همان ذره در یک مدار دایره‌ای پایدار حول زمین با همان شعاع r، v_c است. اگر از مقاومت هوا صرف‌نظر کنیم، رابطه‌ی بین v_e و v_c کدام است؟　　(سراسری ۸۷)

۱) $v_e = v_c$　　۲) $v_e = \sqrt{۲}v_c$　　۳) $v_e = \frac{۳}{۲}v_c$　　۴) $v_e = ۲v_c$

۷ـ دو ذره با جرم یکسان، یکی در مسیر دایره‌ای و دیگری در مسیر سهمی در یک میدان نیروی مرکزی جاذبه‌ی $-\frac{k}{r^۲}$ $(k > \circ)$ با تکانه‌ی زاویه‌ای یکسان حرکت می‌کنند. اگر شعاع مسیر دایره‌ای R و فاصله‌ی نقطه‌ی حضیض سهمی از مرکز نیرو $r_\circ$ باشد، $\frac{R}{r_\circ}$ کدام است؟　　(سراسری ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۲}$　　۲) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$　　۳) $\sqrt{۲}$　　۴) ۲

۸ـ ذره‌ای به جرم m و تکانه‌ی زاویه‌ای L در یک مسیر مارپیچی به معادله $r = k\theta$ (که k ثابت است) حرکت می‌کند. شکل تابع نیروی مرکزی مدار فوق کدام است؟　　(سراسری ۸۷)

۱) $F(r) = \frac{-L^۲}{m}(\frac{۱}{r^۳} + \frac{۲k^۲}{r^۵})$　　۲) $F(r) = \frac{-L^۲}{m}(\frac{۱}{r^۵} + \frac{۲k^۲}{r^۳})$　　۳) $F(r) = \frac{-L^۲}{m}(\frac{۱}{r^۵} + \frac{k^۲}{r^۳})$　　۴) $F(r) = \frac{-L^۲}{m}(\frac{۱}{r^۳} + \frac{k^۲}{r^۵})$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل هفتم

۱ـ گزینه «۲» طبق قانون سوم کپلر داریم:

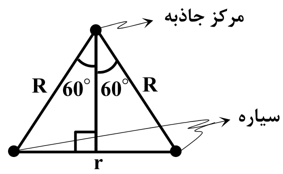
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}a^{\frac{3}{2}} \qquad ; \qquad \frac{T'}{T} = \frac{a'^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} = 1\times\frac{10^{\frac{3}{2}}}{1} \approx 30$$

توجه شود که T دوره تناوب گردش زمین به دور خورشید است و a فاصله زمین تا خورشید می‌باشد که ۱ واحد نجومی است.

۲ـ گزینه «۲» فرض می‌کنیم در لحظه اول انرژی پتانسیل و جنبشی سیستم صفر باشد، در آن صورت پایستگی انرژی عبارت است از: $E = K + U$

$$\begin{cases} v = R\omega = \frac{2\pi R}{T} \\ r = R\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow E_i = E_f \Rightarrow 0 = 3\times(\frac{1}{2}Mv^2) - 3(\frac{GM^2}{r}) \Rightarrow 3\frac{GM^2}{r} = \frac{3}{2}MV^2$$

$$T^2 = \frac{2\pi^2 R^3\sqrt{3}}{GM}$$



توجه شود که r فاصله دو سیاره از یکدیگر است.

۳ـ گزینه «۳» در حرکت تحت نیروی مرکزی داریم:

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + v(r) \qquad ; \qquad \omega_r = \sqrt{\frac{1}{m}\left|\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\right|}$$

برای فنر $v(r) = \frac{1}{2}kr^2 \Rightarrow V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2$

$$\frac{d^2V_{eff}}{dr^2} = \frac{3L^2}{mr^4} + k \Rightarrow \omega_r = \sqrt{\frac{\frac{3L^2}{mr^4}+k}{m}} \qquad (I)$$

همچنین ω_θ یا همان $\dot\theta$ از تعریف مستقیم L (تکانه زاویه‌ای) به دست می‌آید.

$$L = mr^2\dot\theta = mr^2\omega_\theta \Rightarrow L^2 = m^2r^4\omega_\theta^2 \qquad (II)$$

رابطه II را در I جایگذاری می‌کنیم:

$$\omega_r = \left(\frac{3m\omega_\theta^2 + k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

از طرفی برای حرکت دورانی جرم m طبق نیروی مرکزی داریم (در اینجا نیروی مرکزگرا نیروی کشسانی فنر است):

$$\frac{mv^2}{r} = kr = mr\omega_\theta^2 \Rightarrow \omega_\theta^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_r = 2\omega_\theta$$

۴ـ گزینه «۴»

$$r = r_0 e^{b\theta} \Rightarrow \dot r = br_0e^{b\theta}\dot\theta$$

$$E_0 = v(r) + \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) = v(r) + \frac{m}{2}(r_0^2b^2e^{2b\theta}\dot\theta^2 + r_0^2e^{2b\theta}\dot\theta^2) \Rightarrow E_0 = v(r) + \frac{1}{2}mr_0^2e^{2b\theta}(b^2+1)\dot\theta^2 \ , \ \dot\theta = \frac{L_0}{mr^2}$$

$$E_0 = v(r) + \frac{1}{2}mr_0^2e^{2b\theta}(b^2+1)\frac{L_0^2}{m^2r^4} = v(r) + \frac{1}{2}mr_0^2e^{2b\theta}(b^2+1)\frac{L_0^2}{m^2r_0^2e^{2b\theta}}\times\frac{1}{r^2}$$

$$\Rightarrow E_0 = v(r) + \frac{L_0^2(b^2+1)}{2mr^2} \Rightarrow v(r) = E_0 - \frac{L_0^2(b^2+1)}{2mr^2}$$

۵ـ گزینه «۳» می‌دانیم فرمول سرعت فرار به شکل مقابل است:

$$v_e = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad ; \quad M' = 8M \ , \ R' = 2R \Rightarrow \frac{V_e'}{Ve} = \sqrt{\frac{M'R}{MR'}} = \sqrt{\frac{8M}{M}}\sqrt{\frac{R}{2R}} = 2\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \Rightarrow V_e' = 2V_e$$

۶ـ گزینه «۲» برای حل این مسئله از قانون پایستگی انرژی بهره می‌بریم. در نقطه «فرار» انرژی پتانسیل گرانشی را صفر، فرض می‌کنیم و سرعت فرار را در حالتی در نظر می‌گیریم که ذره در فرار از جو زمین حداقل انرژی جنبشی یعنی صفر را داشته باشد.

$$k + u = 0 + 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mV_e^2 - \frac{GmM}{r} = 0 \Rightarrow V_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

نیروهای محدودکننده و ضرایب لاگرانژ

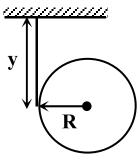
اگر بخواهیم در بررسی حرکت دستگاهی مقید و محدود، نیروهای عامل این محدودیت‌ها را نیز به‌دست آوریم، باید از روش مبتنی بر ضرایب لاگرانژ استفاده کنیم. در این روش ابتدا معادله محدودکننده (قیدی) $f_j(q_i,t)$ را در نظر می‌گیریم. در اینجا f می‌تواند تابعی از چند مختصه باشد. با معرفی تابع $\lambda_j(t)$ که تنها تابعی از زمان است، به معادله $\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}+\sum_j \lambda_j(t)\frac{\partial f_j}{\partial q_i}=0$ دست خواهیم یافت. $i=1,2,\dots,n$ تعداد درجات آزادی و $j=1,2,\dots,m$ تعداد معادلات قیدی حاکم بر دستگاه می‌باشد. لازم به ذکر است با وجود اینکه می‌توان تعداد m مختصه از n مختصه آزاد را کاهش داده و به مسئله‌ای با $n-m$ درجه آزادی رسید، نیروهای تعمیم‌یافته به‌صورت $Q_i=\sum_j \lambda_j(t)\frac{\partial f_j}{\partial q_i}$ تعریف می‌شوند.

نکته ۳: اگر نیروی تعمیم‌یافته، مربوط به مختصه فضایی q باشد، آنگاه این نیرو همان نیروی عادی است؛ اما چنانچه q_i یک مختصه زاویه‌ای باشد، آنگاه این نیروی تعمیم‌یافته معرف یک گشتاور نیرو خواهد بود.

متوجه می‌شویم که تعداد $m+n$ مجهول در دست داریم (n مجهول q_i و m مجهول λ_j) و باید از m معادله قیدی که به صورت $f_j(q_i,t)=0$ یا $\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial f_j}{\partial t}dt=0$ نوشته می‌شوند، استفاده کنیم. معادله دوم، دیفرانسیل معادله اول است که با آن معادل می‌باشد.

مثال ۶: ضریب لاگرانژ مربوط به دیسکی به جرم m و شعاع R را بیابید که نخ دور آن پیچیده شده است و یک سر نخ به سقف آویزان است و به هنگام سقوط دیسک، نخ از دور آن باز خواهد شد؟

۱) $\frac{1}{2}mg$ ۲) $-\frac{1}{2}mg$ ۳) $\frac{1}{3}mg$ ۴) $-\frac{1}{3}mg$



پاسخ: گزینه «۴» با توجه به شکل مسئله مشخص می‌شود که معادله قیدی به صورت $f=y-R\phi=0$ برقرار است. انرژی جنبشی دیسک برابر است با: $T=\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\frac{1}{2}I_{cm}\dot{\phi}^2$

و انرژی پتانسیل آن $V=-mgy$، بنابراین $L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\frac{1}{4}mR^2\dot{\phi}^2+mgy$. اکنون چون یک معادله قیدی داریم، پس یک ضریب لاگرانژ مورد نیاز است. بنابراین

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0\\ \frac{\partial L}{\partial \phi}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}+\lambda\frac{\partial f}{\partial \phi}=0\end{cases}$$

و این یعنی

$$\begin{cases}mg-m\ddot{y}+\lambda=0\\ -\frac{1}{2}mR^2\ddot{\phi}-\lambda R=0\end{cases}$$

با مشتق‌گیری از معادله قیدی داریم $\ddot{\phi}=\frac{\ddot{y}}{R}$ و پس از جایگذاری در دستگاه معادله بالا $\lambda=-\frac{1}{3}mg$ به دست می‌آید.

معادلات هامیلتون

از آنجا که معادلات لاگرانژ، معادلاتی از مرتبه دوم برحسب مشتقات زمانی هستند، بهتر است که با معادلاتی از مرتبه اول سروکار داشته باشیم. این مهم با معرفی تابع هامیلتون و معادلاتص هامیلتون حاصل می‌شود. اگر تابع $H=\sum_i \dot{q}_i p_i-L$ را در مورد مختصات تعمیم‌یافته در نظر بگیریم، آنگاه برای سیستم‌های دینامیکی ساده، که می‌توان انرژی جنبشی آنها را به صورت تابع درجه دوم همگنی از سرعت‌های تعمیم‌یافته $\dot{q}_i$ و نیز انرژی پتانسیل آنها را تنها به صورت تابعی از مختصات q_i نوشت داریم: $L=T(q_i,\dot{q}_i)-V(q_i)$. با کمک قضیه اولر برای توابع همگن داریم:

$$\sum_i \dot{q}_i p_i=\sum_i \dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\sum_i \dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=2T$$

و بنابراین $\sum_i \dot{q}_i p_i-L=2T-(T-V)=T+V$؛ یعنی، برای این‌گونه دستگاه‌های دینامیکی H همان انرژی کل دستگاه است.

اکنون چنانچه از معادله $p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$، $\dot{q}_i$ها را برحسب q_i و p_iها بیان و تغییرات تابع هامیلتون را محاسبه کنیم، به معادله $\delta H=\sum_i[\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i]$ می‌رسیم و در نتیجه $\frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot{q}_i$ و $\frac{\partial H}{\partial q_i}=-\dot{P}_i$ این معادلات عبارتند از $2n$ معادله مرتبه اول هامیلتون.

مثال۷: دو ذره به جرم‌های m_1 و m_2 توسط فنری به طول آزاد l و ثابت فنر k به هم متصل هستند. این مجموعه می‌تواند روی یک صفحه افقی صاف که تکیه‌گاه آن است بچرخد و مرتعش شود، معادلات حرکت هامیلتون مربوط به این دستگاه را بیابید.

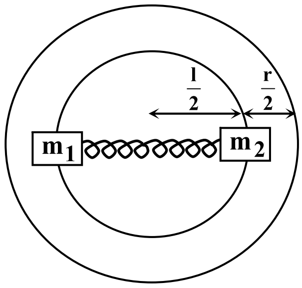
۱) $\dot{r}=\dfrac{P_r}{(m_1-m_2)}\ ,\ \dot{\theta}=\dfrac{2P_\theta}{(m_1-m_2)l^2}$

۲) $\dot{r}=\dfrac{P_\theta}{(m_1-m_2)}\ ,\ \dot{\theta}=\dfrac{2P_r}{(m_1-m_2)l^4}$

۳) $\dot{r}=\dfrac{P_\theta}{(m_1+m_2)}\ ,\ \dot{\theta}=\dfrac{2p_r}{(m_1+m_2)l^2}$

۴) $\dot{r}=\dfrac{P_r}{(m_1+m_2)}\ ,\ \dot{\theta}=\dfrac{4P_\theta}{(m_1+m_2)l^2}$

پاسخ: گزینه «۴» شکل مربوط به این تست را در نظر می‌گیریم. انرژی جنبشی دستگاه از دو بخش دورانی و کشسانی تشکیل یافته است.



$$T=\frac{1}{2}m_1\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)^2+\frac{1}{2}m_1\dot{r}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{r}^2$$

$$V=\frac{1}{2}kr^2$$

در اینجا r تغییر طول فنر نسبت به حالت عادی است، پس:

$$L=T-V=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\left[\frac{l^2\dot{\theta}^2}{4}+\dot{r}^2\right]-\frac{1}{2}kr^2$$

$$P_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=(m_1+m_2)\dot{r}\Rightarrow \dot{r}=\frac{p_r}{(m_1+m_2)}\quad ;\quad p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=(m_1+m_2)\frac{l^2}{4}\dot{\theta}\Rightarrow \dot{\theta}=\frac{4P_\theta}{(m_1+m_2)l^2}$$

می‌دانیم $H=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\left[\frac{l^2\dot{\theta}^2}{4}+\dot{r}^2\right]+\frac{1}{2}kr^2$، پس از جایگذاری مقادیر به‌دست آمده برای $\dot{r}$ و $\dot{\theta}$ داریم:

$$\begin{cases}\dot{r}=\dfrac{p_r}{m_1+m_2}\\[2mm] \dot{\theta}=\dfrac{4P_\theta}{(m_1+m_2)l^2}\end{cases}$$

$$H=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\left[\frac{16P_\theta^2}{(m_1+m_2)^2l^2}+\frac{P_r^2}{(m_1+m_2)^2}\right]+\frac{1}{2}kr^2$$

$$\frac{\partial H}{\partial P_r}=\dot{r}\Rightarrow \frac{P_r}{(m_1+m_2)}=\dot{r}\qquad ,\qquad \frac{\partial H}{\partial P_\theta}=\dot{\theta}\Rightarrow \frac{4P_\theta}{(m_1+m_2)l^2}=\dot{\theta}$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل نهم

۱ـ لاگرانژین سیستمی با سه درجه آزادی q_1، q_2 و q_3 به شکل $L = c_1\dot{q}_1^2 + c_2\dot{q}_2^2 + c_3 q_1\dot{q}_2 + c_4\dot{q}_2\dot{q}_3 + c_5 q_1 q_3$ است که در آن c_iها مقادیر ثابتی هستند. اگر p_i اندازه حرکت تعمیم‌یافته‌ی مربوط به مختصه‌ی q_i باشد، ثابت‌های حرکت کدام است؟ (سراسری ۸۵)

۱) p_2 و $(c_1\dot{q}_1^2 + c_2\dot{q}_2^2 - c_5 q_1 q_3)$

۲) p_2 و $(c_1\dot{q}_1^2 + c_2\dot{q}_2^2 - c_4\dot{q}_2\dot{q}_3 - c_5 q_1 q_3)$

۳) p_1 و p_2 و $(c_1\dot{q}_1^2 + c_2\dot{q}_2^2 + c_4\dot{q}_2\dot{q}_3 - c_5 q_1 q_3)$

۴) p_3 و p_2 و $(c_1\dot{q}_1^2 + c_2\dot{q}_2^2 - c_3 q_1\dot{q}_2 - c_5 q_1 q_3)$

۲ـ لاگرانژین ذره‌ای به جرم m در سه بعد به شکل $L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + b\vec{v}.\vec{A}(\vec{r}, t)$ است. معادله حرکت این ذره کدام است؟ (b مقدار ثابتی است.) (سراسری ۸۵)

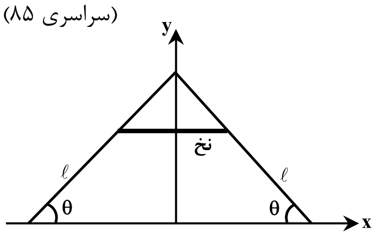
۱) $m\ddot{\vec{r}} = b\vec{\nabla}(\vec{v}.\vec{A})$

۲) $m\ddot{\vec{r}} = b\frac{d\vec{A}}{dt} + b\vec{\nabla}\times\vec{A}$

۳) $m\ddot{\vec{r}} = -b\frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{v}\times\vec{A}$

۴) $m\ddot{\vec{r}} = -b\frac{d\vec{A}}{dt} + b\vec{\nabla}(\vec{v}.\vec{A})$

۳ـ دو میله نازک به جرم m و طول l توسط یک لولا و یک نخ به یکدیگر بسته شده‌اند. سیستم روی سطح صافی در حال سکون است. در یک لحظه نخ بریده می‌شود. لاگرانژی سیستم کدام است؟ (مبدأ پتانسیل را محور x در نظر بگیرید، از اصطکاک محل اتصال دو میله صرف‌نظر شود.) (سراسری ۸۵)



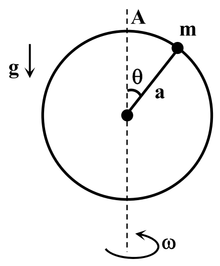
۱) $\frac{1}{4}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\sin\theta$

۲) $\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\sin\theta$

۳) $\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2 - 2mgl\sin\theta$

۴) $\frac{1}{4}ml^2\dot{\theta}^2 - 2mgl\sin\theta$

۴ـ یک سیم دایره‌ای شکل به شعاع a از داخل مهره‌ای به جرم m گذشته و مطابق شکل حول یک محور قائم با سرعت زاویه‌ای ثابت ω و در حضور نیروی جاذبه‌ی گرانشی زمین می‌چرخد. اگر مهره از نقطه‌ی A بدون سرعت اولیه رها شده باشد و از اصطکاک بین مهره و سیم صرف‌نظر کنیم، انرژی جنبشی مهره در وضعیت نشان داده شده در شکل کدام است؟ (سراسری ۸۶)



۱) $ma^2\omega^2\sin^2\theta + 2mga\sin^2\frac{\theta}{2}$

۲) $mga(1-\cos\theta)$

۳) $\frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\theta + mga(1-\cos\theta)$

۴) $\frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\theta + 2mga(1-\cos\theta)$

۵ـ نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به جرم m و ثابت فنر k تحت تأثیر نیروی اصطکاک $F = -b\dot{x}$ قرار دارد. هامیلتونی این نوسانگر برابر است با: (سراسری ۸۷)

۱) $H = \frac{p^2}{2m}\exp(\frac{bt}{m}) + \frac{kx^2}{2}\exp(\frac{bt}{m})$

۲) $H = \frac{p^2}{2m}\exp(\frac{bt}{m}) + \frac{kx^2}{2}\exp(-\frac{bt}{m})$

۳) $H = \frac{p^2}{2m}\exp(-\frac{bt}{m}) + \frac{kx^2}{2}\exp(\frac{bt}{m})$

۴) $H = \frac{p^2}{2m}\exp(-\frac{bt}{m}) + \frac{kx^2}{2}\exp(-\frac{bt}{m})$

۶ـ سیمی به شکل چرخزاد $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1+\cos\theta) \end{cases}$ از داخل مهره‌ای به جرم m می‌گذرد. حرکت مهره در داخل سیم را بدون اصطکاک فرض کنید. هامیلتونی مهره برحسب θ و P_θ (تکانه مزدوج θ) کدام است؟ (سراسری ۸۸)

۱) $H = \frac{P_\theta^2}{8ma^2\sin^2\frac{\theta}{2}} + 2mga\cos^2\frac{\theta}{2}$

۲) $H = \frac{P_\theta^2}{2ma^2\sin^2\frac{\theta}{2}} + 2mga\cos^2\frac{\theta}{2}$

۳) $H = \frac{P_\theta^2}{4ma^2\sin^2\frac{\theta}{2}} + mga\cos^2\frac{\theta}{2}$

۴) $H = \frac{P_\theta^2}{4ma^2\sin^2\frac{\theta}{2}} + 2mga\cos^2\frac{\theta}{2}$