فصل اول

« مروری بر احتمالات و آمار مهندسی»

مقدمه

تذکر: در صورتی که درس آمار و احتمال را از کتاب آمار و احتمال مدرسان شریف و یا سایر مراجع معتبر به صورت موازی و یا پیش از شروع کردن درس کنترل کیفیت مطالعه نموده‌اید، و تسلط کافی روی مباحث درس آمار و احتمال دارید به صورت اکید توصیه می‌شود، مطالعه‌ی درس کنترل کیفیت از این کتاب را از فصل دوم شروع نمایید و در صورت نیاز به مطالعه‌ی سطحی و برخی از تمرینات تستی از این فصل اکتفا نمایید.

بخش اول: مروری بر احتمالات

به منظور آشنایی بیشتر با مفاهیم احتمالات به مثال زیر توجه کنید. فرض کنید به منظور ارزیابی عملکرد یک دستگاه تمام ۲۰ قطعه تولید شده توسط آن دستگاه را مورد ارزیابی قرار داده‌ایم. بررسی‌ها نشان داد که تعداد ۵ قطعه معیوب بوده است. حال سوال این است که احتمال خراب بودن یک قطعه تولیدی توسط این دستگاه به چه میزان است. از آن‌جا که در بین تولیدات ۵ قطعه خراب بوده است احتمال معیوب بودن یک قطعه از تقسیم عدد ۵ بر عدد ۲۰ حاصل خواهد شد. عدد ۲۰ کل وضعیت ممکن را به ما نشان می‌دهد و عدد ۵ در این مثال بیانگر حادثه و یا رخدادی است که ما به دنبال یافتن اثرات آن هستیم.

بنابراین به منظور یافتن احتمال یک رخداد و یا حادثه، بهترین روش شمارش تعداد دفعاتی است که آن حادثه رخ داده است. این امر به اصل شمارش معروف است. اصل شمارش می‌گوید اگر آزمایش ۱ بتواند یکی از m نتیجه ممکن را کسب نماید و برای هر نتیجه آن، n نتیجه ممکن برای آزمایش ۲ وجود داشته باشد، آن‌گاه برای دو آزمایش با هم، nm نتیجه ممکن وجود خواهد داشت.

مثال۱: چند تابع را می‌توان روی n نقطه تعریف کرد، اگر هر تابع بتواند فقط مقادیر ۰ و ۱ را داشته باشد؟

۱) $2^n - 1$ ۲) 2^{n-1} ۳) 2^n ۴) 2^{2n}

پاسخ: گزینه «۳» از آن‌جا که در هر یک از n نقطه دو حالت امکان‌پذیر خواهد بود، در نتیجه تعداد حالات کل برابر است با: $\underbrace{2\times2\times2\times\ldots\times2}_{n}=2^n$

جایگشت

فرض کنید می‌خواهیم ترتیب‌های متفاوت از حروف a، b و c را به دست آوریم. این سه حرف شش ترتیب abc، acb، bca، bac، cab و cba را ایجاد خواهند کرد. هر کدام از حالات فوق تشکیل یک ترکیب را می‌دهد در صورتی‌که همه آن شش ترکیب از سه حرف a، b و c تشکیل شده‌اند. این نوع تشکیل ترکیب را جایگشت می‌گویند. بنابراین جایگشت تعداد کل ترکیب‌های ممکن است که در آن ترتیب اعضا در ترکیب‌ها اهمیت دارد.

جایگشت را به دو صورت با تکرار و بدون تکرار اعضا می‌توان در نظر گرفت. در مثال فوق فرض کنید می‌خواهیم ترتیب‌های سه عضوی را بدون تکرار اعضا تشکیل دهیم. برای این منظور در عضو اول ترتیب ۳ عضو، در عضو دوم ترتیب ۲ عضو خواهیم داشت زیرا عضوی که در قسمت اول قرار گرفته است امکان تکرار آن در عضو دوم وجود ندارد. و در نهایت برای عضو سوم ترتیب فقط ۱ عضو خواهیم داشت و بنابراین تعداد ترتیب‌ها بدون تکرار اعضا $3 \times 2 \times 1 = 6$ خواهد بود. برای بیان ساده‌تر این ترتیب‌ها از عبارت فاکتوریل به صورت $3!$ استفاده می‌کنند.

اما در حالت ترتیب‌های ممکن با تکرار اعضا، تعداد کل ترتیب‌ها $3\times3\times3 = 27$ خواهد بود زیرا در هر عضو ترتیب، ۳ عنصر خواهیم داشت. به عنوان مثال aaa و یا bbb نیز از ترتیب‌های ممکن خواهند بود.

مثال۲: چند ترتیب متفاوت از پرتاب توب در بازی بسکتبال که متشکل از ۹ بازیکن است وجود دارد؟

۱) $8!$ ۲) $9!$ ۳) $10!$ ۴) $2!$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از آن‌جا که در مسئله ذکر شده است ترتیب‌ها باید متفاوت باشند، این بدان معنی است که تکرار در اعضای ترتیب امکان‌پذیر نمی‌باشد و بنابراین تعداد کل ترتیب‌ها $9! = 362880$ خواهد بود.

تعداد جایگشت‌های n شیء که n_1 تا از آن‌ها مثل هم، n_2 تا از آن‌ها مثل هم، ... و n_r تای آن‌ها مثل هم هستند برابر است با:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_r!} \qquad n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$$

باید توجه داشت که فرمول فوق تنها در حالتی‌که ترتیب اهمیت دارد، معتبر است. به منظور آشنایی بیشتر با کاربردهای این فرمول به مثال زیر توجه کنید:

مثال۳: چند علامت مختلف را که هر کدام شامل ۹ پرچم قرار گرفته در یک خط هستند به وسیله ۴ پرچم سفید، ۳ پرچم قرمز و ۲ پرچم آبی می‌توان تهیه نمود؟

۱) ۱۳۰۰ ۲) ۱۴۰۰ ۳) ۱۱۶۰ ۴) ۱۲۶۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$\frac{9!}{4! \times 3! \times 2!} = 1260$$

ترکیب

در ترکیب بر خلاف جایگشت، ترتیب اعضا مهم نیست. به عنوان مثال در ترتیب‌های ممکن از حروف a، b و c، ترتیب‌های abc، acb، bca، bac، cab و cba تنها تشکیل یک ترکیب را می‌دهند. زیرا در ترکیب تنها تعداد ترتیب‌های ۳ عضوی مهم است و این‌که هر عضو ترتیب در کجای ترتیب قرار گرفته است، اهمیتی ندارد. برای محاسبه تعداد ترکیب‌های ممکن r عضوی از یک مجموعه n عضوی از فرمول زیر استفاده می‌شود:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

مثال۴: از یک گروه متشکل از ۵ زن و ۷ مرد، چند شورای مختلف ۵ عضوی شامل ۲ زن و ۳ مرد می‌توان انتخاب نمود؟

۱) ۳۵۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۴۵۰ ۴) ۵۵۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای حل مثال فوق باید تعداد حالات انتخاب ۲ زن از بین ۵ زن و تعداد حالات انتخاب ۳ مرد از بین ۷ مرد را تعیین نمود. از آن‌جا که در این مثال ترتیب قرار گرفتن مردها و یا زن‌ها در گروه‌های خود اهمیتی ندارد بنابراین می‌بایست تعداد ترکیب‌های مختلف را محاسبه نمود. بنابراین داریم:

$$\binom{5}{2} \times \binom{7}{3} = 350$$

در حالتی‌که ترتیب اعضا در یک دنباله حائز اهمیت باشد آن‌گاه همواره تساوی زیر برقرار خواهد بود:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \qquad 1 \le r \le n$$

تساوی زیر به قضیه دو جمله‌ای معروف است که کاربرد وسیعی در زمینه تحلیل‌های آماری چند جمله‌ای دارد. به منظور فهم بهتر رابطه فوق به مثال زیر توجه کنید:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

مثال۵: در معادله $(x+y)^5$ ضریب عبارت x^2y^3 کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به قضیه دو جمله‌ای از آن‌جا که $k = 2$ است. بنابراین ضریب عبارت فوق برابر ۱۰ خواهد بود زیرا:

$$\binom{5}{2} = 10$$

تساوی زیر به قضیه چند جمله‌ای معروف است که در ادامه کاربرد آن در قالب یک مثال بیان شده است:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1, n_2, \dots, n_r) \\ n_1 + n_2 + \dots + n_r = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}$$

مثال۶: در معادله $(x+y+z)^5$ ضریب عبارت x^2y^2z کدام است؟

۱) ۳۰		۲) ۴۰		۳) ۵۰		۴) ۶۰

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به قضیه چند جمله‌ای داریم:

$$\left.\begin{matrix} n_1=2 \\ n_2=2 \\ n_3=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \binom{5}{2,2,1} = \frac{5!}{2!2!1!} = 30$$

تعداد $\binom{n-1}{r-1}$ بردار متمایز r عنصری با عناصر **صحیح مثبت** $(x_i > 0$ و $i=1,2,...,r)$ و با شرط $x_1+x_2+...+x_r=n$ وجود دارد.

تعداد $\binom{n+r-1}{r-1}$ بردار متمایز r عنصری با عناصر **صحیح غیر منفی** $(x_i >= 0$ و $i=1,2,...,r)$ و با شرط $x_1+x_2+...+x_r=n$ وجود دارد.

مثال ۷، نمونه‌ای بسیار خوب از کاربرد ترکیب در تعیین جواب‌های یک معادله است.

مثال۷: چند جواب متمایز غیر منفی برای معادله $x_1+x_2+x_3=3$ وجود دارد؟

۱) ۵۰		۲) ۴۰		۳) ۱۰۰		۴) ۶۰

پاسخ: گزینه «۴» براساس آنچه قبلاً بیان شده، از آن‌جا که در این مثال تنها جواب‌های غیرمنفی مدنظر است بنابراین خواهیم داشت:

$$\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{3+3-1}{3-1} = 60$$

احتمال و پیشامدها

همان‌طور که در مقدمه این فصل نیز اشاره شد، احتمال بیانگر تعداد دفعات وقوع یک رخداد و یا حادثه است. در ادامه این فصل به جای عبارت رخداد و یا حادثه از واژه پیشامد استفاده خواهد شد. اگر فرض کنید تعداد کل حالات ممکن برای یک آزمایش (عدد ۲۰ در مثال ذکر شده در مقدمه این فصل) عدد n باشد و تعداد دفعاتی که یک پیشامد مانند پیشامد E رخ داده است برابر $n(E)$ باشد (عدد ۵ در مثال بخش مقدمه برای قطعات معیوب: قطعه معیوب یک پیشامد است.) آن‌گاه احتمال رخداد پیشامد E به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$P(E)=\frac{n(E)}{n}$$

اشتراک دو پیشامد: اشتراک دو پیشامد E و F شامل همه نتایجی است که در هر دو پیشامد E و F وجود دارد و به صورت $E \cap F$ نشان داده می‌شود. به پیشامدهایی که اشتراک آن‌ها تهی باشد پیشامدهای ناسازگار می‌گویند.

مکمل پیشامد: مکمل پیشامد E که به صورت E^c نشان داده می‌شود شامل تمام حالات ممکن آزمایش خواهد بود که در پیشامد E نباشد. بنابراین پیشامدهای E و E^c ناسازگار خواهند بود، زیرا اشتراک آن‌ها تهی می‌باشد. بنابراین داریم:

$$P(E)+P(E^c)=1 \quad \Rightarrow \quad P(E^c)=1-P(E)$$

برای دو پیشامد E و F، اگر همه نقاط E در F نیز باشند، گوییم F شامل E است و به صورت $E \subset F$ (E زیر مجموعه‌ای از F) نمایش می‌دهیم (در نتیجه $P(E) \le P(F)$). همچنین دو پیشامد فوق یکسان هستند در صورتی‌که E=F باشد.

اجتماع دو پیشامد: اجتماع دو پیشامد E و F را که به صورت $E \cup F$ نمایش می‌دهیم، شامل تمام اعضایی است که در E، یا در F و یا در هر دو باشد. احتمال رخداد اجتماع دو پیشامد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(E \cup F)=P(E)+P(F)-P(E \cap F)$$

احتمال شرطی

در برخی موارد احتمال رخداد یک پیشامد منوط به رخداد پیشامد دیگری است. به عنوان مثال ممکن است بخواهیم احتمال این‌که یک فرد سیگاری باشد به شرط آن‌که آن فرد دارای جنسیت مذکر باشد را محاسبه کنیم. در این مثال احتمال این‌که یک فرد سیگاری باشد به این‌که جنسیت او چه باشد مشروط شده است. برای درک بهتر این موضوع فرض کنید سه دستگاه یک کالا را تولید می‌کنند. کالایی را از بین تولیدات انتخاب کرده و متوجه شده‌ایم که آن کالا معیوب است. حال می‌خواهیم بدانیم که این کالای معیوب با چه احتمالی به دستگاه یک تعلق دارد. در این‌جا قسمتی که از آن اطلاع دقیق داریم جزء شرط قرار خواهد گرفت. در این مثال معیوب بودن کالا به عنوان شرط مسئله است زیرا می‌دانیم که کالا معیوب می‌باشد. از طرفی قسمتی که اطلاع دقیق در مورد آن نداریم و آن را با مقدار احتمالی تعیین می‌کنیم جزء قسمتی از مسئله خواهد بود که رخداد آن منوط به رخداد شرط می‌باشد.

در این مثال اگر بخواهیم تعلق داشتن کالای معیوب را به دستگاه اول آزمون کنیم در نتیجه می‌بایست احتمال رخداد این‌که کالا به دستگاه اول تعلق داشته باشد به شرط آن‌که آن کالا معیوب باشد را محاسبه کنیم.

احتمال رخداد پیشامد E به شرط رخدادن پیشامد F به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(F|E)=\frac{P(F\cap E)}{P(E)}$$

در نتیجه در این فرمول خواهیم داشت:

$$P(F\cap E)=P(E\cap F)=P(E|F)P(F)$$

همچنین اگر E و H دو پیشامد باشند آن‌گاه در فرمول بیز داریم:

$$P(E)=P((E\cap H)\cup(E\cap H^c))=P(E\cap H)+P(E\cap H^c)$$

$$=P(E|H)P(H)+P(E|H^c)P(H^c)=P(E|H)P(H)+P(E|H^c)[1-P(H)]$$

مثال۸: فرض کنید در کارخانه سه دستگاه مختلف نوعی کالا را به ترتیب به اندازه ۱۰، ۱۵ و ۲۰ تولید می‌کنند که از بین آن‌ها به ترتیب ۵، ۵ و ۱۰ کالا معیوب است. اگر کالایی انتخاب شود و ملاحظه شود که معیوب است با چه احتمالی آن کالا توسط دستگاه اول تولید شده است.

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۳۵ ۳) ۰/۳۲ ۴) ۰/۳۶

پاسخ: گزینه «۳» پیشامد معیوب بودن را با F و پیشامد مرتبط با دستگاه اول را با E_1 نمایش می‌دهیم داریم:

$$P(E_1|F)=\frac{P(E_1\cap F)}{P(F)}=\frac{P(F|E_1)P(E_1)}{P(F|E_1)P(E_1)+P(F|E_2)P(E_2)+P(F|E_3)P(E_3)}=\frac{\frac{5}{10}\times\frac{1}{3}}{\frac{5}{10}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{15}\times\frac{1}{3}+\frac{15}{20}\times\frac{1}{3}}=0/32$$

توجه داشته باشید که اگر E و F دو پیشامد مستقل باشند آن‌گاه خواهیم داشت:

$$P(E\cap F)=P(E)\times P(F) \quad \Rightarrow \quad P(E|F)=P(E)$$

همچنین نسبت $\frac{P(H)}{P(H^c)}$ را نسبت بخت پیشامد H گویند.

اگر E و F دو پیشامد ناسازگار باشند آن‌گاه احتمال این‌که پیشامد E قبل از پیشامد F رخ دهد به صورت مقابل است:

$$\frac{P(E)}{P(E)+P(F)}$$

فرض کنید در دو منطقه زلزله‌ای رخ داده است. اگر در منطقه اول یک زلزله دیگر رخ دهد، آن‌گاه اگر بخواهیم تعیین کنیم در زلزله آینده دوباره در منطقه اول رخ خواهد داد، از فرمول فوق استفاده می‌کنیم، زیرا وقوع زلزله در منطقه اول و دوم مستقل از یکدیگر می‌باشد.

متغیرهای تصادفی

فضای نمونه شامل تمام حالات ممکن رخداد یک آزمایش است. گاهی بجای بررسی حالات یک فضای نمونه بهتر است که تابعی از حالات ممکن در فضای نمونه را بررسی کنیم. این توابع حقیقی را که روی فضای نمونه آزمایش تعریف می‌شود، متغیرهای تصادفی گویند.

به عنوان مثال در پرتاب چند بار یک سکه به جای آن‌که بررسی کنیم در هر پرتاب کدام طرف سکه ظاهر خواهد شد شاید بهتر باشد تعدادی دفعاتی که یک روی سکه مشاهده خواهد شد را بررسی کنیم. فرض کنید سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم، آن‌گاه متغیر تصادفی X را می‌توان تعداد شیرهای ظاهر شده در نظر گرفت و در نتیجه متغیر تصادفی X مقادیر ۰، ۱، ۲ و ۳ خواهد گرفت. $X=3$ به این معنا است که در هر سه بار پرتاب سکه طرف شیر ظاهر شده است. بنابراین برای مقادیر ممکن برای یک متغیرهای تصادفی می‌توانیم احتمالاتی را در نظر بگیریم زیرا که متغیر تصادفی خود تابعی از کل حالات ممکن برای یک آزمایش است. برای مثال ذکر شده، می‌توان چنین در نظر گرفت:

$$P(X=2)=P(\{T,H,H),(H,T,H),(H,H,T)\})=\frac{3}{8}$$

T بیانگر طرف خط سکه و H طرف شیر سکه می‌باشد و همان‌طور که می‌دانیم در سه بار پرتاب متوالی یک سکه ۸= ۲ × ۲ × ۲ حالت مختلف خواهیم داشت. (هر سکه دو حالت دارد.) به منظور درک بهتر مفاهیم متغیرهای تصادفی به مثال زیر توجه کنید.

مثال۹: سه توپ را به تصادف از ظرفی که شامل ۳ توپ سفید، ۳ توپ قرمز و ۵ توپ سیاه است انتخاب می‌کنیم. فرض کنید برای هر توپ سفید انتخاب شده ۱ تومان پاداش و برای هر توپ قرمز انتخاب شده، ۱ تومان جریمه در نظر گرفته شده است. متغیر تصادفی متناسب با میزان برد دارای چه مقادیر است و احتمال یکی از مقادیر را محاسبه کنید.

۱) $\frac{39}{165}$ ۲) صفر ۳) $\frac{30}{165}$ ۴) $\frac{35}{165}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» فرض کنید X متغیر تصادفی متناسب با میزان برد باشد، بنابراین با توجه به انتخاب ۳ توپ، مقادیر متغیر X، ۳ ±، ۲ ±، ۱ ± و ۰ خواهد بود. علامت منفی بیانگر میزان باخت می‌باشد که فرد باید به میزان مربوطه جریمه پرداخت کند. احتمال $X=1$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$P(X=1)=P(X=-1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{5}{2}+\binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{11}{3}}=\frac{39}{165}$$

برای یک متغیر تصادفی X، تابع F که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(x)=P(X\le x)\quad -\infty\le x\le\infty$$

را تابع توزیع تجمعی و یا به بیان ساده‌تر تابع توزیع X می‌نامیم. بنابراین تابع توزیع، احتمال کوچک‌تر یا مساوی بودن متغیر تصادفی X از مقدار x را برای تمام مقادیر x مشخص می‌کند. برخی نکات مهم در محاسبه تابع توزیع X به صورت زیر است:

$$P(X>x)=1-P(X\le x)$$

$$P(X=a)=P(X\le a)-P(X<a)$$

$$P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$$

می‌توان گفت اگر یک متغیر تصادفی که بتواند تعداد قابل شمارش از مقادیر حقیقی را اختیار کند یک متغیر تصادفی گسسته نامیده می‌شود. برای متغیر تصادفی گسسته X، تابع جرمی احتمال و یا به بیان ساده‌تر تابع احتمال $p(a)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p(a)=P(X=a)$$

برای کلیه مقادیر $x_i\ (i=1,2,...)$ خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{\infty}p(x_i)=1$$

✍ **مثال۱۰: اگر تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت $p(i)=\frac{c\lambda^i}{i!}$ و λ یک عدد ثابت باشد، آن‌گاه مقدار c کدام است؟**

۱) e^{-1} ۲) ۱ ۳) $e^{-\lambda}$ ۴) $e^{-\frac{\lambda}{2}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از آن‌جا که $\sum_{i=1}^{\infty}p(x_i)=1$ می‌باشد در نتیجه:

$$c\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}=1\ \Rightarrow\ ce^{\lambda}=1\ \Rightarrow\ c=e^{-\lambda}$$

یک متغیر تصادفی که مقادیر پیوسته و غیر قابل شمارش را اختیار کند متغیر تصادفی پیوسته نامیده می‌شود که **تابع چگالی احتمال** آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(X\in B)=\int_B f(x)\,dx$$

که در آن B یک زیر مجموعه از اعداد حقیقی است. طول عمر یک باتری و یا زمان عبور از عرض یک خیابان نمونه‌هایی از متغیرهای تصادفی پیوسته است.

در این متغیرهای برای کلیه مقادیر x خواهیم داشت:

$$P(X\in(-\infty,\infty))=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$$

همچنین تابع توزیع تجمعی برای یک متغیر تصادفی پیوسته به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$F(a)=\int_{-\infty}^{a}f(x)dx$$

بنابراین تنها با مشتق‌گیری از تابع توزیع تجمعی می‌توان به تابع چگالی دست یافت، زیرا تابع تجمعی، تابع مجموع تابع چگالی است.

✍ **مثال۱۱: اگر مدت زمان کارکرد یک باتری بر حسب ساعت قبل از خرابی یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی زیر باشد، احتمال این‌که باتری بین ۵۰ تا ۱۵۰ ساعت قبل از خرابی کار کند، چقدر است؟**

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\frac{x}{100}} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

۱) ۰/۶۵۰ ۲) ۰/۶۳۳ ۳) ۰/۷۵۰ ۴) ۰/۷۳۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا باید مقدار λ را محاسبه کنیم. در نتیجه داریم:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\lambda\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x}{100}}\,dx=-\lambda(100)e^{-\frac{x}{100}}\Big|_{0}^{\infty}=100\lambda \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{1}{100}$$

حال به منظور محاسبه احتمال مورد نظر خواهیم داشت:

$$\frac{1}{100}\int_{50}^{150} e^{-\frac{x}{100}}\,dx=-e^{-\frac{x}{100}}\Big|_{50}^{150}=e^{-\frac{1}{2}}-e^{-\frac{3}{2}}\cong 0/233$$

امید ریاضی و واریانس

اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $p(x)$ باشد آن‌گاه امید ریاضی یا مقدار امید را که به صورت $E[X]$ نشان می‌دهیم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E[X]=\sum_{x:p(x)>0} x\,p(x)$$

همچنین برای هر تابع حقیقی g امید ریاضی به صورت روبه‌رو محاسبه می‌شود:

$$E[g(X)]=\sum_{i} g(x_i)\,p(x_i)$$

در صورتی‌که X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد، امید ریاضی متغیر تصادفی X به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$$

و برای تابع حقیقی g خواهیم داشت:

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)\,dx$$

بنابراین امید ریاضی X یک میانگین وزنی از مقادیری است که متغیر X اختیار می‌کند و وزن هر مقدار، احتمالی است که X می‌تواند آن مقدار را اختیار کند.

توجه داشته باشید که برای متغیر تصادفی غیر منفی Y، داریم:

$$E[Y]=\int_{0}^{\infty} P(Y>y)\,dy$$

مثال۱۲: در پرتاب یک تاس، مقدار $E[X^2]$ را محاسبه کنید؟ متغیر X بیانگر شماره‌ای است که در هر بار پرتاب تاس ظاهر می‌شود.

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) $\frac{14}{2}$ ۳) $\frac{91}{6}$ ۴) $\frac{91}{12}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم که در پرتاب یک تاس داریم، $p(1)=p(2)=p(3)=p(4)=p(5)=p(6)=\frac{1}{6}$ بنابراین:

$$E[X]=1\left(\frac{1}{6}\right)+2\left(\frac{1}{6}\right)+3\left(\frac{1}{6}\right)+4\left(\frac{1}{6}\right)+5\left(\frac{1}{6}\right)+6\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{2}$$

$$E[X^2]=1^2\left(\frac{1}{6}\right)+2^2\left(\frac{1}{6}\right)+3^2\left(\frac{1}{6}\right)+4^2\left(\frac{1}{6}\right)+5^2\left(\frac{1}{6}\right)+6^2\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{91}{6}$$

با استفاده از قوانین امید ریاضی و واریانس می‌توان روابط بسیار جالبی در علم احتمال را ثابت نمود. به عنوان مثال اگر فروش کالایی سود خالص b و عدم فروش کالا زیان خالص l داشته باشد و S میزان سفارش کالا و X یک متغیر تصادفی و بیانگر تعداد تقاضای خرید کالا باشد در آن صورت تابع احتمال سود به صورت زیر خواهد بود:

$$P(s)=\begin{cases} bX-(s-X)l & X\le s\\ sb & X>s\end{cases}$$

بنابراین امید ریاضی سود برابر است با:

$$E[P(s)]=sb+(b+1)\sum_{i=0}^{s}(i-s)p(i)$$

در این حالت به منظور افزایش سود، میزان سفارش (s) باید به حدی باشد که:

$$\sum_{i=0}^{s} p(i)<\frac{b}{b+1}$$

$p(i)$ احتمال خرید کالای iام است.

فرض کنید اگر شما s دقیقه زودتر در محل مورد نظر حاضر شوید، با هزینه cs مواجه می‌شوید و اگر s دقیقه دیرکرد داشته باشید، مواجه با هزینه ks خواهید شد. اگر زمان مسافت طی شده از مکان فعلی شما تا محل مورد نظر یک متغیر تصادفی پیوسته f باشد و از طرفی بخواهیم متوسط مقدار هزینه را حداقل کنیم، آن‌گاه زمان حرکت بهینه t از مکان فعلی با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\int_{0}^{t} f(x)\,dx = \frac{k}{k+c}$$

در مورد امید ریاضی می‌توان گفت اگر a و b مقادیر ثابتی باشند آن‌گاه:

$$E[aX+b] = aE[X]+b$$

به عبارتی مقادیر ثابت تأثیری در نحوه محاسبه امید ریاضی ندارند.

اگر X متغیر تصادفی (پیوسته و گسسته) با میانگین μ باشد آن‌گاه واریانس X به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Var(X) = E[(X-\mu)^{2}] = E[X^{2}] - (E[X])^{2}$$

در مورد واریانس اگر a و b مقادیر ثابتی باشند آن‌گاه:

$$Var(aX+b) = a^{2}Var(X)$$

مثال۱۳: در پرتاب یک تاس مقدار واریانس متغیر تصادفی X را محاسبه کنید؟ متغیر X بیانگر شماره‌ای است که در هر بار پرتاب تاس ظاهر می‌شود.

۱) $\frac{35}{12}$　　۲) $\frac{35}{24}$　　۳) $\frac{35}{6}$　　۴) $\frac{35}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به مثال قبل داریم:

$$E[X^{2}] = \frac{91}{6} \qquad E[X] = \frac{7}{2}$$

$$Var(X) = E[(X-\mu)^{2}] = E[X^{2}] - (E[X])^{2} = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^{2} = \frac{35}{12}$$

مثال۱۴: اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر باشد، آن‌گاه امید ریاضی و واریانس آن را حساب کنید؟

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

۱) $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{18}$　　۲) $\frac{1}{18}$ و $\frac{2}{3}$　　۳) $\frac{4}{6}$ و $\frac{2}{18}$　　۴) $\frac{2}{18}$ و $\frac{4}{6}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» به منظور محاسبه امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی X داریم:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \int_{0}^{1} 2x^{2}\,dx = \frac{2}{3}$$

$$E[X^{2}] = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2}\,f(x)\,dx = \int_{0}^{1} 2x^{3}\,dx = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = E[(X-\mu)^{2}] = E[X^{2}] - (E[X])^{2} = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{1}{18}$$

مهمترین متغیرهای تصادفی گسسته

همان‌طور که قبلاً بیان شد متغیر تصادفی گسسته، متغیری است که مقادیر حقیقی گسسته و قابل شمارش را اختیار می‌کند. در این بخش مهمترین متغیرهای تصادفی گسسته در علم احتمالات مورد بررسی قرار می‌گیرد. این متغیرها دارای بیشترین کاربرد در زمینه‌های مختلف هستند.

متغیر تصادفی برنولی و دو جمله‌ای

در صورتی‌که بتوان نتایج یک آزمایش را به صورت موفقیت و شکست نشان داد در حالی‌که وقتی موفقیت حاصل شود متغیر تصادفی X مقدار ۱ و وقتی شکست حاصل گردد متغیر X مقدار صفر را اختیار کند، در آن صورت X یک متغیر برنولی با تابع احتمال زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} p(0) = P(X=0) = 1-p \\ p(1) = P(X=1) = p \end{cases}$$

حال اگر n آزمایش ساده و مستقل انجام شود که هر یک را بتوان به صورت شکست و موفقیت نشان داد، در صورتی‌که متغیر تصادفی X بیانگر تعداد موفقیت‌ها در n آزمایش باشد، در آن صورت X یک متغیر دو جمله‌ای با پارامترهای (n, p) خواهد بود و تابع احتمال آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p(i)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\qquad i=0,1,\ldots,n$$

مثال ۱۵: در ۵ بار پرتاب یک تاس سالم، مقدار احتمال این‌که تعداد شیرهای ظاهر شده برابر ۲ باشد را محاسبه کنید؟

۱) $\frac{20}{32}$ ۲) $\frac{10}{32}$ ۳) $\frac{40}{32}$ ۴) $\frac{45}{32}$

پاسخ: گزینه «۲» اگر X یک متغیر تصادفی و بیانگر تعداد دفعاتی باشد که شیر ظاهر می‌شود، بنابراین این آزمایش را می‌توان به صورت یک متغیر دو جمله‌ای با پارامترهای $(n=5, p=\frac{1}{2})$ در نظر گرفت در نتیجه داریم:

$$P(X=2)=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{10}{32}$$

اگر X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای (n, p) باشد در آن صورت:

$$E[X]=np\qquad Var[X]=np(1-p)$$

همچنین اگر X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای (n, p) باشد، P(X=k) زمانی بیشترین مقدار را انتخاب می‌کند که k بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی $(n+1)p$ باشد. اگر n زوج باشد k منحصر به فرد است و اگر n فرد باشد دو مقدار برای k وجود خواهد داشت.

متغیر تصادفی پواسون

متغیر تصادفی X که یکی از مقادیر ۰، ۱، ۲، ... را اختیار می‌کند، یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ نامیده می‌شود، هر گاه برای $\lambda>0$

$$p(i)=P(X=i)=e^{-\lambda}\frac{\lambda!}{i!}\qquad i=0,1,2,\ldots$$

در توزیع پواسون داریم:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}=e^{\lambda}$$

این معادله از مهم‌ترین معادلات در زمینه توزیع پواسون است که می‌تواند در پاسخگویی سریع به تست‌ها کمک کند. بنابراین در ذهن سپردن آن خالی از لطف نیست.

برخی از مثال‌های متغیر تصادفی که از قاعده احتمال پواسون تبعیت می‌کنند عبارتند از:

۱. تعداد اشتباهات چاپی روی یک صفحه یا تعدادی از صفحات یک کتاب.

۲. تعداد افراد جامعه که تا سن ۱۰۰ سالگی زندگی می‌کنند.

۳. تعداد تلفن‌های اشتباهی که در یک روز زده می‌شود.

۴. تعداد مشتریانی که در یک روز وارد بانک می‌شوند.

۵. ...

توجه داشته باشید اگر X یک متغیر تصادفی پواسون باشد در آن صورت واریانس و امید ریاضی آن برابر λ خواهد بود.

اگر X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای (n, p) باشد به نحوی که n بزرگ، p کوچک و np مقدار معقولی داشته باشد در آنصورت متغیر X را می‌توان با استفاده از یک متغیر پواسون با پارامتر $\lambda=np$ تقریب زد. به منظور درک بهتر به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱۶: فرض کنید احتمال این‌که قطعه تولید شده توسط یک دستگاه معیوب باشد برابر ۰/۱ است. احتمال این‌که یک نمونه ۱۰ تایی حداکثر یک قطعه معیوب داشته باشد چقدر است؟

۱) ۰/۷۴ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۷۶ ۴) ۰/۷۷

پاسخ: گزینه «۱» اگر X را یک متغیر تصادفی که بیانگر تعداد قطعات معیوب باشد در نظر بگیریم در آن صورت X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای $(n=10, p=0/1)$ خواهد بود در نتیجه مقدار احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(X=0)+P(X=1)=\binom{10}{0}(0/1)^0(0/9)^{10}+\binom{10}{1}(0/1)^1(0/9)^9=0/7361$$

حال اگر X را با استفاده از متغیر پواسون تقریب بزنیم خواهیم داشت:

$$\lambda=np=10\times0/1=1$$

$$P(X=0)+P(X=1)=e^{-1}\frac{\lambda^0}{0!}+e^{-1}\frac{\lambda^1}{1!}=e^{-1}+e^{-1}=0/7358$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، تقریب دو جمله‌ای با استفاده از پواسون نتایج قابل قبولی را ارائه می‌دهد.

همواره به یاد داشته باشید که در توزیع پواسون داریم: $P(X \le t) = 1 - P(X > t) = 1 - e^{-\lambda t}$

مثال ۱۷: مقدار $X \le 90$ وقتی X دارای توزیع پواسون با میانگین 100 است را به دست آورید؟

۱) ۰/۱۷ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۲۷

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به توضیحاتی که در بالا اشاره شده داریم: $P(X \le 90) = 1 - e^{-\frac{1}{100} \times 90} = 1 - 0/8286 = 0/1714$

متغیر تصادفی هندسی

فرض کنید تعدادی آزمایش مستقل که هر کدام دارای احتمال موفقیت p باشند را آنقدر تکرار کنیم تا اولین موفقیت حاصل شود. اگر X متغیری باشد که بیانگر تعداد تکرار آزمایش برای رسیدن به اولین موفقیت باشد در آن صورت X دارای توزیع هندسی با پارامتر p خواهد بود و تابع احتمال آن به‌صورت روبرو است: $P(X = n) = (1 - p)^{n-1} p$

اگر X دارای توزیع هندسی با پارامتر p باشد در آن صورت همواره خواهیم داشت: $P(X \ge k) = (1 - p)^{k-1}$

اگر X دارای توزیع هندسی با پارامتر p باشد در آن صورت روابط زیر همواره برقرار است: $E[X] = \frac{1}{p} \qquad Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$

مثال ۱۸: فرض کنید در بین ۲۰ کالای تولیدی توسط یک دستگاه ۵ کالای معیوب وجود داشته باشد. اگر برای یافتن یک کالای معیوب قطعات را یک به یک بررسی کرده و در جمع کل قطعات قرار دهیم. احتمال این‌که در ۳ آزمایش به کالای معیوب برسیم چقدر است؟

۱) $\frac{500}{2000}$ ۲) $\frac{600}{2000}$ ۳) $\frac{225}{2000}$ ۴) $\frac{20}{2000}$

پاسخ: گزینه «۳» اگر X متغیری باشد که بیانگر تعداد آزمایشات لازم برای یافتن اولین قطعه معیوب باشد در آن صورت X یک متغیر هندسی با پارامتر $p = \frac{5}{20}$ خواهد بود. در نتیجه داریم: $P(X = 3) = (1 - \frac{5}{20})^2 \frac{5}{20} = \frac{225}{2000}$

متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی

فرض کنید تعدادی آزمایش مستقل که هر کدام دارای احتمال موفقیت p باشند را آن‌قدر تکرار کنیم تا r موفقیت حاصل شود. اگر X متغیری باشد که بیانگر تعداد تکرار آزمایش‌ها برای رسیدن به r موفقیت باشد در آن صورت X دارای توزیع تصادفی دو جمله‌ای منفی با پارامترهای (r, p) خواهد بود و تابع احتمال آن به صورت زیر است: $P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \qquad n = r, r+1, \ldots$

در واقع متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی همان متغیر تصادفی هندسی است که r مرتبه تکرار شده باشد.

اگر X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی با پارامترهای (r, p) باشد در آن صورت: $E[X] = \frac{r}{p} \qquad Var[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}$

همچنین اگر پیشامدهای ساده مستقل هر کدام با احتمال موفقیت p تکرار شوند. احتمال این که r موفقیت قبل از m شکست حاصل شود به صورت زیر خواهد بود: $\sum_{n=r}^{r+m-1} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$

مثال ۱۹: در ۵ بار پرتاب یک تاس سالم احتمال این‌که عدد ۶، چهار مرتبه ظاهر شود کدام است؟ امید ریاضی تعداد پرتاب‌های لازم برای مشاهده ۴ مرتبه عدد ۴ کدام است؟

۱) $\frac{20}{7776}$ و ۲۴ ۲) $\frac{20}{7776}$ و ۲۵ ۳) $\frac{20}{7777}$ و ۲۴ ۴) $\frac{20}{7777}$ و ۲۵

فصل دوم

«تعاریف و مفاهیم اولیه»

مقدمه

کتاب حاضر درباره‌ی روش‌های آماری و کاربرد این روش‌ها، در زمینه‌ی بهبود کیفیت محصولات بحث می‌کند. در این فصل سعی شده است برخی از مبانی و مفاهیم کیفیت معرفی و توضیح داده شوند و زیربنایی برای فصول آتی کتاب مهیا گردد.
مطالب این فصل به طور کلی به دو قسمت تقسیم شده‌اند، در قسمت اول مقدمه‌ای بر مفاهیم، تعاریف و اصطلاحاتی که در علم کنترل کیفیت آماری مورد بررسی قرار می‌گیرد، ارائه می‌شود. تسلط روی مطالب این قسمت به صورت دقیق و مفهومی به خواننده تأکید می‌شود. در قسمت دیگر فصل به تبیین مبانی علم مدیریت کیفیت به صورت کلی خواهیم پرداخت، آشنایی نسبی بااین مطالب به خواننده توصیه می‌شود، زیرا در اغلب مراجع کنترل کیفیت به مبانی علم مدیریت کیفیت نیز پرداخته شده است، ولی در سؤالات کنکور سراسری به صورت مستقیم مورد توجه طراحان سؤال نبوده است.

تعریف کیفیت

پیش از مطرح کردن هر گونه صحبتی در مورد کیفیت، نیاز به ارائه‌ی تعریفی از مفهوم کیفیت داریم، یک نکته‌ی اصلی را باید همیشه در مورد یک محصول در نظر داشت و آن این است که محصول باید خواسته‌های افرادی را که از آن استفاده می‌کنند برآورده نماید. با توجه به این نکته ما **کیفیت را شایستگی یک محصول جهت استفاده** تعریف می‌کنیم. کیفیت در دنیای امروز مفهومی معادل برآورده کردن نیازهای مشتری و حتی فراتر از آن دارد. به طور کلی می‌توان گفت، تعاریف کیفیت ارائه شده از منظر صاحبنظران با یکدیگر موازی هستند و منافاتی با یکدیگر ندارند، در زیر برخی از تعاریف کیفیت از دیدگاه برخی از بنیانگذاران این علم آورده شده است:

- کیفیت یک محصول، شایستگی آن محصول جهت استفاده است. (مناسب کاربرد)
- کیفیت یک محصول، تطابق بانیازهایی است که به صورت مشخصات طراحی بیان می‌شوند.
- کیفیت یک محصول یا خدمت، به همه‌ی ویژگی‌هایی از محصول اعم از کالا یا خدمات گفته می‌شود که می‌توانند، نیازهای تعریف شده‌ای را برآورده سازند.

به طور کلی، کیفیت دو جنبه‌ی عینی و ذهنی دارد. عینیت یک شی واقعیتی است که شی را به وجود آورده است و ذهنیت در مورد یک شی مطلوبیت یا ارزش خواص فیزیکی آن است، این دو مفهوم رابطه‌ی تنگاتنگی دارند. لازم به ذکر است این تعاریف جهت درک مفهوم کیفیت ارائه شده‌اند و هر کدام از آن‌ها از این منظر بسیار ارزشمند هستند، ولی به خاطر سپاری دقیق این تعاریف مد نظر نمی‌باشد

مثال۱: کدام یک از تعاریف زیر برای مفهوم کیفیت قابل قبول نمی‌باشد؟

۱) کیفیت یک محصول، شایستگی محصول جهت استفاده می‌شود.
۲) کیفیت یک محصول در واقع برآورده‌سازی نیاز مشتریان است.
۳) کیفیت یک محصول در واقع طراحی یک محصول بر پایه نیازهای مشتریان است.
۴) کیفیت یک محصول در واقع انطباق با معیارها، استانداردها و مشخصات طراحی متناسب با نیاز مشتری است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» هر چند در گزینه‌ی ۳، اشاره‌ای به مفهوم کیفیت گردیده است، اما این تعریف ناقص است. پس از طراحی متناسب نیاز است تا بین این طراحی و محصول واقعی انطباق حاصل شود.

کنترل کیفیت

برای آن که بدانیم کنترل کیفیت چه معنایی دارد، ابتدا بهتر است واژه‌های کیفیت و کنترل تشریح شوند. کیفیت میزان شایستگی است که یک محصول یا خدمت باید جهت استفاده‌های به خصوصی دارا باشد و هم چنین معیاری است (کمی و یا کیفی) که به واسطه‌ای آن یک محصول انتظارات مصرف کننده را برآورده می‌سازد و کنترل به معنی اعمال ضوابط و راهنمایی‌هایی در مورد کسی یا چیزی جهت اطمینان از کسب نتایج موردنظر است. در واقع **کنترل کیفت، استفاده از روش‌های آماری و سایر فنون برطرف‌سازی مشکلات جهت بهبود کیفیت یک محصول است.**

نکته۱: تفاوت بازرسی و کنترل کیفیت:

در بازرسی تنها کیفیت محصول مدنظر است. به عنوان مثال بازرس، قطعات یا مواد اولیه‌ای که به کارخانه وارد شده است را بررسی می‌کند، تا از انطباق آن‌ها با استانداردها اطمینان حاصل کند. در صورتی که کالاها استانداردهای لازم را نداشته باشد، آن‌ها را رد می‌کند. بنابراین بازرس هیچ گونه توجه‌ای به فرایند تولیدی کالاها ندارد. اما در کنترل کیفیت به فرایند تولید محصول، توجه می‌شود. در کنترل کیفیت سعی می‌شود، که امکانات تولید به نحوی تنظیم شود که تقریباً همیشه محصول خوب و با کیفیت تولید شود. علی‌رغم تفاوت این دو مفهوم، می‌توان گفت یک کنترلر کیفی می‌تواند از بازرسی به عنوان یک ابزار جهت رسیدن به اهداف کیفیتی خود استفاده کند.

انواع جنبه‌های کیفیت :

مفهوم کیفیت را به صورت کلی می‌توان از چندبعد بررسی نمود، هر کدام از این ابعاد را در زیر توضیح می‌دهیم:

۱ـ کیفیت طراحی: دو محصول ممکن است برای کار مشابه‌ای استفاده شوند، ولی در طراحی آن‌ها اختلاف زیادی وجود داشته باشد. محصول اول ممکن است از قطعاتی ضعیف و محصول دیگر از قطعاتی پرداوم ساخته شده باشد، که مسلماً کیفیت طراحی محصول دوم به مراتب بهتر از کیفیت طراحی محصول اول می‌باشد، ولی از طرفی این برتری در کیفیت سبب افزایش هزینه‌ها می‌شود. به طور کلی در فرایند تولید یک محصول جدید نیاز به امکان‌سنجی کیفی و تعیین کیفیت مورد نیاز سازمان می‌باشد، که می‌توان این پروسه را به عنوان فاز تعیین کیفیت طراحی معرفی نمود.

به عنوان مثال در مورد یک محصول خاص، مثل خودرو، ممکن است سیاست یک تولید کننده، تولید خودروهای ارزان قیمت باشد، و در عین حال سیاست تولید کننده‌ی دیگری تولید خودروهای لوکس و مجهز باشد. این اختلاف در درجه‌بندی یا سطوح کیفیت عمداً به وجود آمده‌اند و با توجه به سیاست و منافع تولید کننده انتخاب می‌شوند. اصطلاح فنی مناسبی که مراجع در رابطه با این بعد از کیفیت به کار برده‌اند کیفیت طراحی می باشد.

مثال۲: تعیین حدود و ابعاد تمامی، یا برخی از خصوصیات و مشخصات محصول مربوط به کدام گزینه است؟

۱) کیفیت انطباق ۲) کیفیت طراحی ۳) کیفیت عملکرد ۴) هر سه مورد

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تعیین مشخصات محصول مستقیماً به کیفیت طراحی محصول بستگی دارد.

نکته۲: کیفیت طراحی، کیفیت مورد نظر طراح برای محصول می‌باشد و سطح کیفیت طراحی شده برای محصول عمداً و با توجه به نیاز سازمان در رابطه با تولید محصول تعیین می‌شود.

۲ـ کیفیت انطباق: بحث اصلی در کیفیت، کیفیت انطباق می‌باشد. کیفیت انطباق درجه‌ی همسویی محصول با مشخصات طراحی، استانداردها و معیارهای تعیین شده برای ساخت آن محصول است. محصولی که طبق مشخصات طراحی و مطابق با حدود کنترل فرایند تولید ساخته می‌شود. چنان‌چه مشخصات آن به نحوی بیانگر نیازهای مصرف کننده باشد، از کیفیت خوبی برخوردار بوده و رضایت مشتری را جلب می‌کند.

مثال۳: کیفیت انطباق به چه معناست؟

۱) تعیین حدود مشخصه‌ی فنی ۲) تعیین میزان انطباق محصول با حدود مشخصه‌ی فنی

۳) سطوح مختلف کیفیت محصول ۴) همه‌ی موارد

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» کیفیت انطباق یعنی این که محصول مورد نظر تا چه اندازه تلرانس‌ها و مشخصات فنی انطباق دارد.

مثال۴: تفاوت کیفیت طراحی و انطباق در کدام گزینه، به درستی بیان گردیده است؟

۱) کیفیت طراحی تفاوت در سطوح مختلف محصول از نظر کیفیت است که عمداً به وجود می‌آید، ولی کیفیت انطباق به میزان تطابق محصول با حدود تلرانس و مشخصات فنی اشاره دارد.

۲) کیفیت انطباق میزان تطابق محصول با حدود مشخصه‌ی فنی و کیفیت طراحی میزان مناسب بودن طراحی محصول از دیدگاه مشتری را مدنظر قرار می‌دهد.

۳) کیفیت طراحی در مرحله‌ی طراحی محصول و کیفیت انطباق در مرحله‌ی تولید محصول مدنظر قرار می‌گیرند.

۴) گزینه‌های ۲ و ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تعاریف ارائه شده در گزینه‌ی ۱ کامل‌تر می‌باشند، در گزینه‌ی ۲ تعریف کیفیت طراحی کامل نمی‌باشد و در گزینه‌ی ۳ هر دو تعریف کیفیت طراحی و کیفیت انطباق نقص دارد.

نکته۳: کیفیت انطباق در واقع درجه‌ی همسویی کیفیت واقعی محصول با کیفیت و مشخصات طراحی تعریف شده توسط طراح در فاز کیفیت طراحی است.

۳ـ کیفیت عملکرد: کیفیت عملکرد یک محصول تابعی از کیفیت طراحی و کیفیت انطباق آن محصول می‌باشد، حفظ سطح بالایی از هر دو کیفیت مذکور، به سطح بالایی از کیفیت عملکرد منجر می‌شود.

تعاریف و مفاهیم اولیه

تعاریف و مفاهیم ارائه شده در این قسمت، در واقع اصول و زیربنای کلی فصول آتی کتاب می‌باشند، لذا، تمرکز برای درک مفهومی این مطالب، به طور اکید به خواننده توصیه می‌شود:

۱ـ مشخصه کیفی: هر محصول از عناصری تشکیل گردیده است که آن‌ها همگی با هم شایستگی جهت استفاده از آن را تعیین می‌نمایند. این پارامترها را معمولاً مشخصه‌های کیفی می‌نامند. مشخصه‌های کیفی ممکن است که چند نوع باشند:

۱ـ فیزیکی: مثل طول، وزن، ولتاژ ، غلظت

۲ـ حسی: مثل مزه، شکل ظاهری ، رنگ

۳ـ وضعیت زمانی: مثل قابلیت اطمینان، قابلیت نگهداری، قابلیت تعمیرپذیری

اگر بخواهیم، تعریفی ملموس‌تر از تعریف ارائه شده در کتاب مونتگومری ارائه دهیم، می‌توان گفت، **هر مشخصه‌ی کیفی، یک ویژگی از محصول است که برای آن در فاز طراحی، سطح کیفیتی تعریف می‌شود، میزان انطباق ویژگی مورد نظر در محصول تولیدی با کیفیت طراحی شده برای آن، کیفیت یا عدم کیفیت محصول را تعیین می‌کند،** به طور مثال، در مورد لوله‌های آب، قطر لوله یک ویژگی خیلی مهم است که مقدار مشخصی با تلرانس معین برای آن تعیین می‌شود، در صورتی که قطر لوله‌ی تولیدی در این تلرانس طراحی شده قرار بگیرد. کیفیت محصول و در نتیجه شایستگی جهت استفاده‌ای آن مناسب خواهد بود، همان‌طور که متوجه شدید، ویژگی قطر لوله در مثال فوق یک مشخصه‌ی کیفی برای محصول لوله‌ی آب تلقی می‌شود.

نکته۴: مشخصه‌های کیفی در واقع ویژگی‌هایی از محصول هستند، که از لحاظ طراحی و کیفیت محصول اهمیت دارند و بسته به تطابق آن‌ها با مشخصات طراحی، کیفیت یا عدم کیفیت محصول را مشخص می‌کنند.

مثال۵: کدام گزینه نمی‌تواند به عنوان یک مشخصه‌ی کیفی در مورد یک تلویزیون مطرح شود؟

۱) طول عمر ۲) قابلیت تعمیرپذیری ۳) عملکرد کلی ۴) پهنای تصویر

☑ **پاسخ:** گزینه ۳» عملکرد کلی تلویزیون یک شاخص کلی است و نمی‌توان آن را به عنوان یک مشخصه‌ی کیفی در نظرگرفت.

نکته۵: مشخصه‌های بحرانی کیفیت ـ مشخصه‌های کیفی مهم‌تر از لحاظ مشتری را مشخصه‌های بحرانی کیفیت تعریف می‌کنند.

۲ـ مقدار نامی یا هدف: این مقدار، در واقع مقدار موردنظر طراح محصول، در فاز تعیین کیفیت طراحی برای محصول می‌باشد، مقدار نامی، مقداری است که به عنوان هدف برای یک مشخصه‌ی کیفی توسط طراح و براساس نظر مشتری تعیین می‌شود.

نکته۶: مقدار نامی یا هدف، توسط طراح تعیین می‌شود و هیچ ارتباطی به فرایند تولید ندارد.

۳ـ حدود مشخصه‌ی فنی: اولین نوع از انواع حدودی که در کنترل کیفیت به آن بر می‌خوریم، حدود مشخصه‌ی فنی می‌باشند، در فاز تعیین کیفیت طراحی، برای هر مشخصه‌ی کیفی علاوه بر مقدار هدف، حدودی تعریف می‌شوند، که میزان تلرانس قابل قبول از مقدار هدف را برای آن مشخصه‌ی کیفی نشان می‌دهند. این حدود نیز توسط طراح و براساس نظرات مشتری تعیین شده و به فرایند تولید محصول بستگی ندارند. در واقع بهتر شدن فرایند تولید، هیچ تأثیری روی حدود مشخصه‌ی فنی نخواهد داشت. بسته به نوع مشخصه‌ی کیفی فقط یک حد بالا یا حد پایین را برای انحراف از مقدار هدف برای مشخصه‌ی کیفی مجاز دانست و گاهی نیز این انحراف می‌تواند دو طرفه باشد و مشخصه‌ی کیفی هم حد بالای حدود مشخصه‌ی فنی را داشته باشد و هم حد پایین آن را دارا باشد.

مثال۶: کدام گزینه در مورد حدود مشخصه‌ی فنی اشتباه است؟

۱) این حدود می‌توانند بنا به مورد یک طرفه یا دو طرفه تعریف شوند.

۲) حدود مشخصه‌ی فنی لزوماً به صورت متقارن در بالا و پایین مقدار هدف قرار می‌گیرد.

۳) این حدود توسط طراح تعیین می‌شوند و به فرایند تولید بستگی ندارند.

۴) حدود مشخصه‌ی فنی از ابزار مورد استفاده در محاسبه‌ی کارایی یک محصول می‌باشند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» لزومی ندارد که حدود فنی حول مقدار نامی متقارن باشند، همچنین در فصول آینده خواهید دید که حدود فنی جزو ابزار مورد استفاده در محاسبه‌ی میزان کارایی یک محصول می‌باشند.

نکته۷: همان‌طور که ذکر شد، حدود مشخصه‌ی فنی نیز توسط طراح تعیین می‌گردند و هیچ ارتباطی به فرایند تولید محصول ندارند.

نکته۸: دقت شود، ماهیت حدود مشخصه‌ی فنی، با سایر حدودی که در این کتاب ارائه خواهند شد، از جمله حدود کنترل، حدود تلرانس طبیعی و حدود احتمال و ... تفاوت دارد و اشتباه گرفتن این حدود با هم، ضربه‌ی بزرگی به یادگیری درس کنترل کیفیت وارد خواهد آورد.

۴ـ نقص در محصول: در واقع انحراف مقدار یک مشخصه‌ی کیفی از حدود مشخصه‌ی فنی طراحی شده برای آن محصول می‌باشد. نیاز به تکرار است، که ممکن است چند مشخصه‌ی کیفی از یک محصول از حدود فنی تجاوز نمایند (محصول چند نقص داشته باشد) ولی ناقص تلقی نشود.

۵ـ محصول معیوب یا نامنطبق: با توجه به تعریفی که طراح یا کارشناس از معیوب بودن محصول ارائه می‌دهد، هر محصولی که یک یا چند مشخصه‌ی کیفی آن، از حدود مشخصه‌ی طراحی شده برای آن تجاوز نماید، یک محصول معیوب یا نامنطبق تلقی می‌گردد.

نکته۹: دقت کنید که یک محصول ممکن است، چندین نقص داشته باشد، ولی اهمیت این نقص‌ها به اندازه‌ای نباشد که محصول معیوب تلقی شود. به عنوان مثال در مورد محصول معیوب، ممکن است چندین نقص در بدنه‌ی یخچال و یا در کیفیت رنگ‌آمیزی یخچال موجود باشد، ولی به دلیل این که این نقص‌ها، اهمیت زیادی ندارند، محصول مورد قبول واقع شود و معیوب تلقی نگردد. از دیدگاه مقابل ممکن است این یخچال تنها یک نقص در سیستم فنی موتور آن داشته باشد، ولی به واسطه‌ی همین یک نقص محصول غیرقابل قبول و در نتیجه معیوب تلقی شود.

مثال۷: در مورد محصول یخچال، دو مورد زیر گزارش شده است:

محصول A : با چند مورد نقص در بدنه   محصول B: یک مورد نقص در عملکرد فنی

در این صورت:

۱) محصول A حتماً ناقص است ولی محصول B می‌تواند ناقص نباشد.

۲) محصول A حتماً ناقص است ولی محصول B هم حتماً ناقص می‌باشد.

۳) محصول A می‌تواند معیوب نباشد ولی محصول B هم حتماً ناقص می‌باشد.

۴) هر دو محصول A و B ممکن است معیوب به حساب نیایند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در مورد سیاست تولید محصول و میزان اهمیت نقص‌ها در صورت سؤال هیچ اطلاعاتی داده نشده است، پس هر دو محصول ممکن است معیوب به شمار بیایند یا معیوب حساب نشوند.

مدیریت کیفیت

مدیریت کیفیت در واقع روش مدیریتی یک سازمان است که براساس محور بودن کیفیت و مشارکت همه‌ی اعضا می‌باشد و هدف آن نیل به موفقیت در دراز مدت از طریق جلب رضایت مشتری و تأمین منافع همه‌ی اعضای سازمان و جامعه می‌باشد. همان طور که در ابتدای فصل نیز بیان کردیم بحث مدیریت کیفیت به صورت مستقیم مورد توجه طراحان سؤال کنکور سراسری نمی‌باشد، ولی آشنایی نسبی با این مطالب در زمینه‌ی ایجاد یک انسجام ذهنی در خواننده خالی از لطف نیست. در این کتاب بحث‌های مربوط به علم مدیریت کیفیت را به چند قسمت مجزا تقسیم نموده‌ایم و سعی شده است مطالبی که آشنایی با آن‌ها موضوعیت بیشتری با درس کنترل کیفیت دارد، به صورت جداگانه و به اختصار توضیح داده شود. بدیهی است سایر مطالب بخش مدیریت کیفیت که از آوردن آن‌ها چشم‌پوشی گردیده، نه تنها در یادگیری مؤثر این درس جهت آمادگی در کنکور سراسری و درس کنترل کیفیت در دانشگاه مفید نمی‌باشد، بلکه، بیشتر سبب اتلاف زمان دانشجویان خواهد گردید، لذا از توضیح آن‌ها صرف‌نظر گردیده است، حال به بررسی هر یک از قسمت‌های بحث مدیریت کیفیت می‌پردازیم:

۱ـ تقسیم‌بندی نیازهای مشتریان:

در تعاریف کیفیت، آوردیم که کیفیت در واقع برآورده کردن نیازهای مشتریان می‌باشد، بی‌ارتباط نیست که در این جا، به بررسی و تحلیل انواع نیازهای مشتریان بپردازیم. در این راستا می‌توان مدل نیازهای انگیزشی کانو را معرفی نمود:

طبق مدل کانو نیازهای مشتریان به ۳ دسته‌ی، **نیازهای اساسی، نیازهای عملکردی و نیازهای انگیزشی** تقسیم می‌شوند:

نیازهای اساسی: این دسته از نیازها، نیازهایی هستند که مشتری آن‌ها را بیان نمی‌کند و وجود آن‌ها را در محصول بدیهی می‌داند. در صورتی که این نیازها برآورده نشوند، رضایت مشتری به شدت کاهش خواهد یافت و در صورتی که برآورده شوند، تأثیری در افزایش رضایت مشتری نخواهد گذاشت. وجود فرمان در خودرو را می‌توان از این قبیل نیازها دانست.

نیازهای عملکردی: نیازهایی هستند که مشتری آن‌ها را بیان می‌کند. در صورتی که این نیازها برآورده شوند رضایت مشتری به صورت خطی افزایش و در صورتی که برآورده نشوند رضایت مشتری به صورت خطی کاهش می‌یابد. مصرف بهینه‌ی سوخت خودرو از این قبیل نیازها می‌باشد.

نیازهای انگیزشی: نیازهایی هستند که مشتری آن‌ها را بیان نمی‌کند. در صورتی که این نیازها برآورده شوند، رضایت مشتری به شدت افزایش می‌یابد، لیکن در صورتی که برآورده نشوند، رضایت مشتری کاهش چندانی نمی‌یابد. از این قبیل نیازها می‌توان وجود سیستم صوتی تصویری پیشرفته در خودرو را مثال زد.

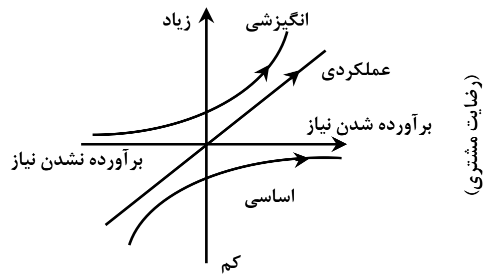
نکته۱۰: جنس نیازهای ذکر شده در فوق در طول زمان تغییر می‌کنند، نیازهای انگیزشی به نیازهای عملکردی و نیازهای عملکردی به نیازهای اساسی تبدیل می‌شوند.

مثال۸: برآورده نکردن کدام نوع نیاز در یک محصول بزرگ‌ترین ضربه را به سازمان می‌زند؟

۱) اساسی ۲) انگیزشی ۳) عملکردی ۴) هر سه مورد

پاسخ: گزینه «۱» همان‌طور که اشاره شد، نیازهای اساسی در واقع نیازهای اولیه هستند و باید حتماً برآورده شوند.

نکته۱۱: در شکل زیر مدل نیازهای انگیزشی کانو به صورت ترسیمی نمایش داده شده است:



(عملکرد محصول)

۲ـ هزینه‌های کیفیت

سازمان‌هایی که به امور کنترل کیفیت اهمیت می‌دهند، با هزینه کردن در بخش کنترل کیفیت، هزینه‌های کل خود را کنترل می‌کنند. هزینه‌های کیفیت در واقع هزینه‌هایی هستند که سازمان برای دستیابی به کیفیت موردنظر خود متحمل می‌شوند، به صورت کلی هزینه‌های کیفیت را می‌توان به ۲ حوزه‌ی عمده تقسیم نمود. در ادامه به توضیح مختصری در رابطه با این هزینه‌ها خواهیم پرداخت:

حوزه نخست:

۱ـ هزینه‌های پیش‌گیری: هزینه‌های پیش‌گیری آن دسته از هزینه‌ها هستند که در ارتباط با طراحی و تولید محصول جهت پیش‌گیری از تولید محصولات معیوب صرف گردیده‌اند.

۲ـ هزینه‌های ارزیابی: هزینه‌های ارزیابی، آن دسته از هزینه‌ها هستند که به دلیل اندازه‌گیری، ارزیابی یا ممیزی محصولات، قطعات و مواد خریداری شده جهت کسب اطمینان از این که آن‌ها با استانداردها (مشخصات طراحی) انطباق دارند به وجود می‌آیند.

حوزه‌ی دوم: (**هزینه‌های خرابی**)

۳ـ هزینه‌های خرابی داخلی: هزینه‌های خرابی داخلی زمانی به وجود می‌آیند که محصولات، قطعات، مواد و خدمات ارائه شده نتواند خواسته‌های کیفی موردنظر را برآورده سازند. این گونه عدم توانایی‌ها قبل از رسیدن به دست مشتری در درون سازمان شناسایی می‌گردند. طبیعتاً اگر صرف هزینه‌ها در حوزه‌ی نخست به میزان کافی باشد، عیب‌های محصول کاهش یافته و هزینه‌های خرابی داخلی کاهش می‌یابند.

۴ـ هزینه‌هی خرابی خارجی:

این هزینه‌ها زمانی به وجود می‌آیند که محصول تولید شده زمانی که به دست مشتری می‌رسد، عملکرد رضایت‌بخشی از خود نشان ندهد. اگر هزینه‌های حوزه‌ی نخست به میزان کافی باشد می‌توان انتظار داشت این هزینه‌ها کاهش بیابند.

در جدول زیر، هر یک از چهار گروه هزینه‌های کیفیت به همراه هزینه‌های زیر مجموعه‌ی آن‌ها آورده شده است:

دسته‌بندی هزینه‌های کیفی به شرح زیر است:	
هزینه‌های پیشگیری	
مهندسی و برنامه‌ریزی کیفیت طراحی محصول / فرایند آزمایش نهایی جمع‌آوری و تجزیه و تحلیل داده‌های مربوط به کیفیت	بازنگری محصول جدید کنترل فرایند آموزش
هزینه‌های ارزیابی	
بازرسی و آزمایش مواد ورودی مواد و خدمات مصرف شده	بازرسی و آزمایش محصول دقیق نگاه داشتن دستگاه‌های آزمایش
هزینه‌های خرابی داخلی	
دور ریز آزمایش مجدد توقف خط تولید مرغوبیت کمتر	دوباره‌کاری تجزیه و تحلیل خرابی بازده از دست رفته
هزینه‌های خرابی خارجی	
تنظیم شکایات هزینه‌های گارانتی هزینه‌های غیرمستقیم	محصول / مواد برگشتی هزینه‌های مسئولیت در قبال محصول

مثال۹: با توجه به جدول فوق، کنترل فرایند جزء کدام دسته از هزینه‌های کیفیت می‌باشد؟

۱) هزینه‌های پیش‌گیری ۲) هزینه‌های ارزیابی ۳) هزینه‌های خرابی داخلی ۴) هزینه‌های خرابی خارجی

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» البته نیاز به تذکر ست که فراگیری پاسخ این تست ارزشی چندانی ندارد، ولی چون در سایر مراجع کنکور نیز به کرّات مورد سؤال واقع گردیده بود، در این کتاب به عنوان نمونه تست گنجانده گردیده است.

مثال۱۰: اثر هزینه‌های کیفیت روی هم چگونه است؟

۱) با افزایش هزینه‌های خرابی، هزینه‌های پیش‌گیری و ارزیابی کنترل می‌شوند.
۲) با افزایش هزینه‌های خرابی، هزینه‌های پیش‌گیری و ارزیابی افزایش می‌یابند.
۳) با افزایش هزینه‌های پیش‌گیری و ارزیابی، هزینه‌ها خرابی را می‌توان کنترل نمود.
۴) با افزایش هزینه‌های پیش‌گیری و ارزیابی، هزینه‌ها خرابی افزایش می‌یابند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با هزینه کردن در حوزه‌ی نخست هزینه‌های کیفیت می‌توان هزینه‌های حوزه‌ی دوم را کنترل نمود.

مثال۱۱: کدام‌یک از هزینه‌های زیر اگر حذف شوند، منجر به بیشترین کاهش هزینه می‌شود؟

۱) هزینه‌ی پیش‌گیری ۲) هزینه‌ی بازرسی ۳) هزینه‌ی خرابی داخلی ۴) هزینه‌ی خرابی خارجی

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» هزینه‌های خرابی خارجی، بیشترین هزینه را بر سازمان تحمیل می‌کنند.

نکته۱۲: هزینه‌های حوزه‌ی نخست روی هزینه‌های حوزه‌ی دوم (هزینه‌های خرابی) اثر زنجیره‌ای معکوس دارند، به این ترتیب که هر اندازه در حوزه‌ی نخست بیشتر هزینه شود. از هزینه‌های حوزه‌ی خرابی کاسته می‌شود.

نکته۱۳: هزینه کردن در حوزه‌ی نخست، مقرون به صرفه‌تر می‌باشد، بدین ترتیب که هزینه‌ها در این حوزه به شدت پایین‌تر از هزینه‌های خرابی می‌باشند. این نکته نمود جمله‌ی معروف پیش‌گیری بهتر از درمان است می‌باشد.

نکته۱۴: مهلک‌ترین هزینه‌ها برای سازمان، هزینه‌ی خرابی خارجی می‌باشد و پیش‌گیری از این هزینه‌ها مهم‌ترین رسالت سازمان است.

۳ـ روش شش سیگما: (6σ)

روش شش سیگما یک روش سیستماتیک جهت کاهش تغییرپذیری در فرایند تولید و در نتیجه کاهش ضایعات، بهبود بازده و افزایش رضایت مشتری می‌باشد.

نکته۱۵: مفهوم سطح سیگما ـ تعداد گام‌ها بر حسب سیگما از میانگین (μ) تا نزدیک‌ترین حد مشخصه‌ی فنی به میانگین (μ) را سطح سیگما می‌گویند. سطح سیگما از طریق رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{سطح سیگما} = \min\{\frac{USL-\mu}{\sigma}, \frac{\mu-LSL}{\sigma}\}$$

نکته۱۶: اصطلاح P.P.M برای هر محصول، در واقع تعداد قطعات معیوب در میلیون برای آن محصول است.

نسبت اقلام معیوب یک فرایند به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{درصد اقلام معیوب} = P(X>USL)+P(X<LSL) = ۱-P(LSL<x<USL)$$

$$= ۱-P(\frac{LSL-\mu}{\sigma}<z<\frac{USL-\mu}{\sigma}) = ۱-\phi(\frac{USL-\mu}{\sigma})+\phi(\frac{LSL-\mu}{\sigma})$$

مثال۱۲: اگر n یک مشخصه‌ی کیفی مهم از یک محصول باشد و براساس فرایند نرمال N(۸,۲) ایجاد شود، با حدود مشخصه‌ی فنی ۱۱ = USL , ۶ = LSL، سطح سیگمای فرایند کدام گزینه است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه «۱» سطح سیگما تعداد گام‌ها بر حسب سیگما از نزدیک‌ترین حد مشخصه‌ی فنی است:

$$\text{سطح سیگما} = \min\{\frac{USL-\mu}{\sigma},\frac{\mu-LSL}{\sigma}\} = \frac{\mu-LSL}{\sigma} = \frac{۸-۶}{۲} = ۱$$

مثال۱۳: تعداد قطعات معیوب در میلیون یک محصول با مشخصه‌های کیفی نرمال، که فقط دارای حدّ مشخصه‌ی فنی پایین می‌باشد و فرایند تولید آن در سطح سیگمای ۳ کار می‌کند را محاسبه کنید.

۱) ۲۷۰۰ ۲) ۰ ۳) ۳/۴ ۴) ۱۳۵۰

پاسخ: گزینه «۴»

$$P.P.M = P(Z<-۳)\times ۱۰^{۶} = ۰/۰۰۱۳۵\times ۱۰^{۶} = ۱۳۵۰$$

۴ـ ابعاد اصلی کیفیت محصول (ابعاد هشت‌گانه):

در توضیح قسمت کیفیت طراحی، گفتیم طراح باید جنبه‌های مختلف محصول را در طراحی در نظر بگیرد. از جمله جنبه‌هایی که طراح باید به آن‌ها توجه داشته باشد و حتی در صورت لزوم مشخصه‌های کیفی با توجه به این جنبه‌ها تعریف شود، موارد هشت‌گانه‌ی کیفیت محصول است که تولیدکنندگان می‌بایست در طراحی یک محصول در نظر بگیرد این جنبه‌ها عبارتند از:

۱ـ شکل محصول: آیا محصول زیبا به نظر می‌رسد؟

۲ـ مواد و ویژگی‌های محصول: چه موادی در محصول به کار گرفته شده است و محصول چه ویژگی‌هایی دارد.

۳ـ کاربرد محصول (عملکرد محصول):

آیا محصول کاری را که باید به درستی انجام می‌دهد؟

۴ـ دوام محصول:

محصول چه مدت دوام می‌آورد؟ طول عمر محصول چقدر است؟

۵ـ قابلیت تعمیرپذیری:

تعمیر این محصول سخت است یا به سادگی صورت می‌پذیرد؟

۶ـ قابلیت اطمینان:

محصول هر چند وقت یک بار خراب می‌شود؟

۷ـ انطباق با استانداردها:

آیا محصول تولیدی با مشخصات طراحی، تعریف شده در فاز طراحی و استانداردها انطباق دارد؟

۸ـ کیفیت درک شده:

شهرت محصول چه میزان است؟ آیا کیفیت محصول شناخته شده است؟

مثال۱۴: کدام یک از موارد زیر، جزو جنبه‌های ۸ گانه‌ی کیفیت نمی‌باشد؟

۱) در دسترس بودن ۲) قابلیت اطمینان ۳) انطباق با معیارها و استانداردها ۴) عملکرد

پاسخ: گزینه «۱»

مثال۱۵: این که «محصول هر چند وقت یک بار خراب می‌شود» در کدام جنبه‌ی ۸ گانه‌ی کیفیت پرداخته شده است؟

۱) قابلیت تعمیرپذیری ۲) قابلیت دوام ۳) انطباق با استانداردها ۴) قابلیت اطمینان

پاسخ: گزینه «۴»

روش‌های آماری بهبود و کنترل فرایند:

در این قسمت روش‌هایی را بررسی می‌کنیم که در حقیقت ابزار نیل به هدف کنترل کیفیت، یعنی بهبود کیفیت محصول می‌باشند. **لازم به تذکر است. این قسمت جزء مطالب کنترل کیفیت می‌باشد و لذا بهتر است تمرکز بیش‌تری روی آن انجام شود.**

در این جا سه روش عمده‌ی بهبود و کنترل فرایند را بررسی خواهیم نمود و میزان اثر بخشی هر کدام از این روش‌ها را با یکدیگر مقایسه خواهیم کرد.

۱ـ روش طراحی آزمایش‌ها:

روش طراحی آزمایش‌ها، یکی از روش‌های مفیدی است که به وسیله‌ی آن می‌توان متغیرهای کلیدی که بر مشخصه‌ی کیفی مورد نظر فرایند اثر می‌گذارند را شناسایی نمود. با به کارگیری این روش می‌توان عامل های ورودی قابل کنترل را به طور سیستماتیک تغییر داد و اثرات آن‌ها را بر روی پارامترهای محصول خروجی ارزیابی نمود. آزمایش‌هایی که به طور آماری تهیه می‌گردند، می‌توانند به مقدار قابل توجهی از میزان تغییرات در مشخصات کیفی بکاهند و هم چنین سطوح متغیرهای قابل کنترل که باعث بهینه‌کردن عملکرد فرایند می‌گردند را تعیین نمایند.

نکته۱۷: طراحی آزمایشی‌ها یکی از عمده‌ترین ابزار کنترل کیفیت قبل از تولید می‌باشد، که غالباً در فعالیت های توسعه‌ای و در مراحل اولیه‌ی تولید به کار می‌روند.

۲ـ نمونه‌گیری به منظور پذیرش:

در این روش با استفاده از کاربرد روش‌های احتمالی، در مورد پذیرش یا رد یک انباشته تصمیم‌گیری می‌شود. روش نمونه‌گیری برای پذیرش تأثیری بر نحوه‌ی تولید و فرایند تولیدی ندارد، بلکه به کنترل مواد اولیه و محصول نهایی می‌پردازد. به عبارت دیگر نمونه‌گیری برای پذیرش عبارت است از: ارزیابی قسمتی از محصولات تولیدی، براساس انطباق آن‌ها با مشخصات طراحی و تعمیم در مورد پذیرش یا رد تمام آن محصولات است. در این رابطه در فصل آخر کتاب بیشتر بحث خواهیم نمود.

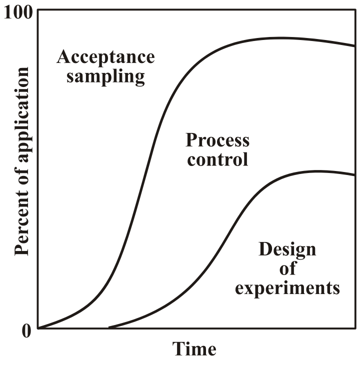
نکته۱۸: طبق نظریه‌های اخیر، نمونه‌گیری به منظور پذیرش یک روش هزینه‌زا و غیرکارا می‌باشد، چرا که این روش باعث بهبود در فرایند نخواهد شد و تنها محصولات معیوب و سالم را از یکدیگر جدا می‌سازد.

۳ـ کنترل فرایند آماری:

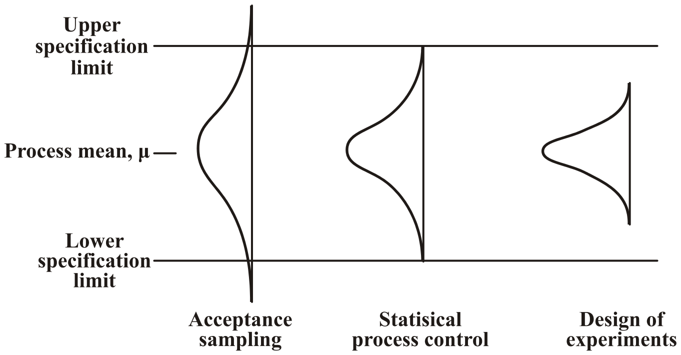
ابزارهای کنترل فرایند آماری، از بهترین و مهم‌ترین ابزارها به منظور بهبود کیفیت محصول و خدمات می‌باشند. **هفت** تکنیک اساسی در این حیطه وجود دارد که، چهار مورد آن علی‌رغم غیرآماری بودن، در این حیطه قرار می‌گیرند.

ابزارهای هفت گانه‌ی کنترل فرایند آماری علاوه بر کاربرد مناسب و وسیع در کنترل فرایند، در بهبود قابلیت فرایندها نیز به خوبی مورد استفاده قرار گرفته و سال‌های متمادی است که در سازمان‌های مختلف از مزایای این تکنیک‌ها استفاده شده است. در ادامه‌ی فصل به معرفی مختصر هر یک از این هفت ابزار خواهیم پرداخت.

در شکل روبرو، مراحل تکامل روش‌های مختلف بهبود فرایند در طول زمان نشان داده شده است. همان‌طور که می‌بینیم در طول زمان توجه به طراحی آزمایش‌ها و کنترل فرایند آماری بیشتر شده و سهم بیشتری از روش‌های بهبود را در سازمان‌ها به خود اختصاص می‌دهد.



در شکل زیر نیز، به مقایسه‌ی اثر بخشی این روش‌ها پرداخته‌ایم. همان گونه که در شکل مشخص است، طراحی آزمایش‌ها با استفاده از بهینه‌سازی نقش بیشتری را در کاهش تغییرپذیری دارد. کنترل فرایند اماری نیز در این راستا کاراست، اما اثر بخشی کمتری نسبت به طراحی آزمایش‌ها دارد. نمونه‌گیری به منظور پذیرش کمترین نقش را نسبت به دو روش دیگر در کاهش تغییرپذیری دارد.



مثال ۱۶: کدام گزینه در مورد روش‌های بهبود و کنترل فرایند صحیح است؟

۱) روش نمونه‌گیری به منظور پذیرش روش غیر کارا است، زیرا نمی‌تواند قطعات سالم و معیوب را از هم جدا کند.

۲) به وسیله‌ی روش طراحی آزمایش‌ها می‌توان متغیرهای کلیدی تأثیرگذار بر مشخصه‌ی کیفی را شناسایی کرد.

۳) روش طراحی آزمایش‌ها یکی از کاراترین روش‌های کنترل فرایند آماری در حین تولید می‌باشد.

۴) روش طراحی آزمایش‌ها کارایی نسبتاً خوبی دارد اما از روش کنترل فرایند ضعیف‌تر است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» روش نمونه‌گیری روشی غیرکارا است زیرا فقط قطعات سالم را از معیوب جدا می‌کند، روش طراحی آزمایش‌ها از جمله روش‌های قبل از تولید می‌باشد و البته کاراترین روش از بین سه روش موجود می‌باشد.

مثال ۱۷: با گذشت زمان سهم کدام روش از روش‌های بهبود فرایند بیشتر گردیده و سهم کدام روش رو به کاهش است؟

۱) طراحی آزمایش‌ها ـ کنترل فرایند آماری

۲) طراحی آزمایش‌ها ـ نمونه‌گیری جهت پذیرش

۳) کنترل فرایند آماری ـ طراحی آزمایش‌ها

۴) نمونه‌گیری جهت پذیرش ـ طراحی آزمایش‌ها

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» همان‌طور که درس نیز توضیح داده شد، سهم نمونه‌گیری به منظور پذیرش به شدت رو به کاهش است.

ابزارهای آماری کنترل کیفیت

در این بخش ابزارهای آماری کنترل کیفیت که به ابزارهای «کنترل کیفیت جامع» نیز مشهور می‌باشند به اختصار معرفی می‌شوند. در بخش پایانی این کتاب ابزارهای فوق بیشتر مورد بحث و بررسی قرار خواهند گرفت. این ابزارها به منظور کشف، تجزیه و تحلیل و ارائه راه حل برای مسائل و مشکلات مرتبط با کیفیت محصولات به مدیران و کارکنان آموزش داده می‌شوند. این ابزارها عبارتند از:

۱- برگه کنترل
۲- هیستوگرام
۳- نمودار پراکندگی
۴ـ نمودار تمرکز نقص‌ها
۵ـ نمودار علت و معلول
۶ـ نمودار پارتو
۷- نمودار کنترل

در ادامه به معرفی مختصر این ابزارها می‌پردازیم:

۱ـ برگه کنترل: به جمع‌آوری دقیق و کامل اطلاعات توسط اپراتورهای تولید و کنترل کیفیت کمک ویژه‌ای می‌کند. به کمک این ابزار داده‌ها به گونه‌ای جمع‌آوری می‌گردد که بتوان به سریع‌ترین شکل ممکن و به راحتی آن‌ها را پردازش نمود.

شکل برگه‌های کنترل متناسب با نوع اطلاعاتی که به کمک آن جمع آوری می‌گردد و با صلاحدید تیم کیفیت سازمان متفاوت خواهد بود. شکل دیگری از برگه کنترل به گونه‌ای است که موقعیت عیب و یا نقص مورد نظر را نیز شامل می‌شود. به عبارتی علاوه بر این‌که اطلاعات مناسبی را می‌توان به کمک برگه کنترل جمع آوری نمود می‌توان مکان یا موقعیت نقص یا عیب مذکور را نیز ثبت نمود. برای مثال فرض کنید مدیر بخش رنگ پاشی در یک کارخانه تولیدکننده دوچرخه تمایل دارد که کیفیت رنگ پاشی را در این بخش بهبود بخشد. در این راستا از برگه کنترل برای تعیین نوع نقص‌های مشاهده شده در

رنگ دوچرخه و موقعیت نقص استفاده کرده است. برای راحتی در فرم مربوطه، طرحی از دوچرخه را نیز رسم کرده تا اپراتور کنترل کیفیت بتواند علاوه بر نوع نقص موقعیت نقص مربوطه را نیز در فرم نمایش دهد. پس از اجرای این فرم توسط اپراتور کنترل کیفی به راحتی و با تحلیل‌های ساده می‌توان نتیجه‌گیری نمود که چه نقایصی بیش از مابقی نقص‌ها در دوچرخه‌های تولیدی وجود دارند و این نقص‌های احتمالی در چه موقعیت‌هایی از دوچرخه بیش از بقیه موقعیت‌ها مشاهده شده است.

نمونه‌ای از برگه کنترل

برگه کنترل

شماره محصول: ۳۲		**تعداد بازرسی شده: ۲۲۱۷**

نوع عدم انطباق	مشاهدات	جمع
نقص ۱		۲۱
نقص ۲		۳۸
نقص ۳		۲۲
نقص ۴		۱۱
نقص ۵		۴۷
نقص‌های دیگر		۵
جمع		۱۴۴

در جدول بالا نمونه‌ای از برگه کنترل به منظور شناسایی میزان هر یک از عیوب مشاهده شده از دوچرخه مدل ۳۲ در یک بازه زمانی نشان می‌دهد. با یک بررسی ساده می‌توان انواع نقص‌ها و فراوانی آن‌ها را در محصولات تولیدی مشاهده کرد.

مثال۱۸: برگهٔ ثبت داده‌های مناسب چه نوع برگه‌ای خواهد بود؟

۱) برگه‌ای که حاوی اطلاعات ضروری از قبیل نام کالا، تاریخ، تعداد و نام بازرس باشد.

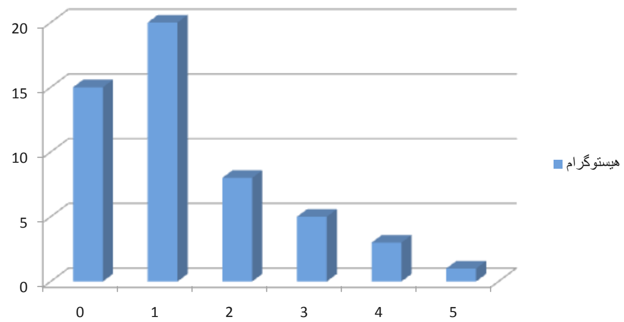
۲) برگه‌ای که با توجه به ماهیت و نوع داده‌ها تنظیم شود.

۳) برگه‌ای اغلب محصولات تولیدی کارخانه را پوشش دهد.

۴) برگه‌ای که مختص به یک کالا یا محصول خاص باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برگه ثبت داده‌ها برگه‌ای است که با توجه به ماهیت و نوع داده‌ها تنظیم شود و براساس نوع داده‌ها برگه ثبت متفاوت خواهیم داشت.

۲ـ هیستوگرام: یکی از ابزارهای آماری مورد استفاده در کنترل کیفیت هیستوگرام است. به کمک این ابزار نحوه توزیع فراوانی، میانگین، پراکندگی و سایر معیارهای آماری برای مشخصه‌های یک فرایند یا محصول را می‌توان تخمین زد. نمودار فراوانی تعداد نقص‌های مشاهده شده در یک محصول را در نمودار زیر می‌توان ملاحظه نمود.



نمونه‌ای از نمودار هیستوگرام

هیستوگرام به صورت تصویری ویژگی‌های کلی داده‌های جمع‌آوری شده، نوع پراکندگی و میزان چولگی به راست یا چپ را نمایان می‌سازد. نمودار و تحلیل‌های مشابه بالا در مورد داده‌های از نوع گسسته است. در حالی‌که در مواردی که داده‌ها پیوسته بوده و حجم آن‌ها زیاد باشد نیاز به گروه‌بندی آن‌ها بوده و لازم است دسته‌بندی مناسبی صورت گیرد. معمولا تعداد دسته‌های بین ۵ تا ۲۰ پیشنهاد می‌گردد و ۵ تا ۹ دسته وقتی تعداد مشاهدات کمتر از ۱۰۰ است و ۸ تا ۱۷ دسته وقتی که تعداد داده‌ها بین ۱۰۰ تا ۵۰۰ باشد و ۱۵ تا ۲۰ دسته وقتی تعداد داده‌ها بیش از ۵۰۰ باشد، مفید خواهد بود.

مدرسان شریف

فصل پنجم

« نمودارهای کنترل برای نمودارهای کنترل وصفی»

مقدمه

در فصل گذشته به بررسی نمودارهای کنترل، برای کنترل فرایندها با مشخصه‌های کیفی متغیر پرداختیم. در این جا به دسته‌ی دیگری از نمودارهای کنترل که به کنترل فرایندها با مشخصه‌های کیفی وصفی می‌پردازند خواهیم پرداخت. تسلط روی این دسته از نمودارها، از لحاظ محاسباتی و مفهومی، بسیار اهمیت دارد و مورد توجه طراحان کنکور سراسری کارشناسی ارشد در سال‌های گذشته قرار گرفته است.

مشخصه‌ی کیفی وصفی: اغلب مشخصه‌های کیفی را نمی‌توان به سادگی اندازه‌گیری نمود و در قالب عدد گزارش کرد. به عنوان مثال، می‌توان تعداد زدگی‌های روی بدنه‌ی یک یخچال را در نظر گرفت. **خاصیت این مشخصه‌ی کیفی و سایر مشخصه‌های کیفی وصفی به این گونه است که غیرقابل اندازه‌گیری هستند، ولی شمارش‌پذیر می‌باشند.** مثلاً در مورد مثال فوق تعداد زدگی‌های روی یخچال می‌تواند مقدار شمارش‌پذیر ۵ زدگی گزارش شود. توزیع احتمال مشخصه‌های کیفی وصفی، توزیع گسسته است. به طور کلی از جمله متغیرهای وصفی می‌توان به تعداد محصولات معیوب در هر نمونه و تعداد نقص‌ها در واحد بازرسی اشاره کرد.

نگاهی به نمودارهای کنترل برای مشخصه‌های کیفی وصفی:

به طور کلی در رابطه با مشخصه‌های کیفی وصفی، محصولات به دو گروه منطبق (معیوب) و یا نامنطبق (نامعیوب) با مشخصات کیفی موردنظر تقسیم می‌شوند. همان‌طور که گفتیم، مشخصه‌های کیفی که با چنین روشی تقسیم‌بندی می‌شوند را مشخصه‌های کیفی وصفی می‌نامند. ابتدا بهتر است مروری به تعریف محصول نامنطبق بپردازیم:

نکته۱: یک محصول نامنطبق، در واقع محصولی است که در آن یک یا چند عدم انطباق اتفاق افتاده باشد. معیار نامنطبق بودن می‌تواند، یک یا مجموعه‌ای از چند مشخصه‌ی کیفی نامنطبق باشد. به عبارت دیگر یک محصول می‌تواند در اثر وقوع یک عدم انطباق (بنا به تعریفی که برای معیار نامنطبق در نظر گرفته می‌شود) نا منطبق محسوب شود و یا نامنطبق تلقی شود. **بنا به این تعریف، که برای یک محصول نامنطبق (معیوب) در برخی منابع ارائه شده است، کامل نمی‌باشد،** هرچند اگر در مسأله‌ای هیچ تعریفی از معیار عدم انطباق ذکر نشده باشد، معیار عدم انطباق را وجود ۱ نقص در نظر می‌گیریم. در ادامه‌ی مباحث این فصل در قسمت توضیح نمودارهای کنترل برای متوسط تعداد نقص، به طبقه‌بندی انواع نقص‌ها خواهیم پرداخت.

اکنون می‌توانیم چهارچوب کلی فصل را، برای نمودارهای کنترل وصفی ارائه دهیم. در این فصل به بررسی دو دسته‌ی اصلی از نمودارهای کنترل وصفی خواهیم پرداخت:

نمودارهای کنترل اقلام معیوب:

این دسته شامل نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب (P) و تعداد اقلام معیوب (nP) می‌شود.

نمودارهای کنترل تعداد نقص:

این دسته شامل نمودارهای کنترل در واحد بازرسی (c) و نمودارهای کنترل متوسط تعداد نقص‌ها واحد بازرسی U خواهد شد.

هم‌چنین در انتهای فصل نیز، اشاره‌ای به برخی از نمودارهای فرعی نظیر نمودار کنترل زمان بین دو خرابی خواهیم پرداخت.

پیاده‌سازی نمودارهای کنترل وصفی برای اقلام معیوب

نمودار کنترل p همان‌گونه که پیش از این توضیح داده شد یکی از پرکاربردترین نمودارها در تعیین میزان عمکرد یک دستگاه، اپراتور، واحد تولیدی و ... است. به عبارتی نسبت واحدهای نامنطبق به کل واحدهای یک نمونه یا زیرگروه به کمک این ابزار کیفی تحت کنترل قرار می‌گیرد. معیار نامنطبق بودن می‌تواند یک یا مجموعه‌ای از چند مشخصه کیفی باشد. به عبارتی یک محصول می‌تواند در اثر وقوع یک عدم انطباق «نامنطبق» محسوب گردد. یا این که اگر چند عدم انطباق با هم در یک محصول رخ دهد آن را نامنطبق می‌کند. به شکل سمبولیک می‌توان p را به کمک معادله روبه‌رو تخمین زد: $p=\frac{np}{n}$ به گونه‌ای که:

p = درصد یا نسبتی از یک نمونه یا زیرگروه

n = اندازه یک زیرگروه یا نمونه

np = میانگین تعداد واحدهای نامنطبق در یک نمونه یا زیرگروه

تعیین اندازه زیر گروه، n، یکی از بخش‌های مهم در پیاده سازی نمودارهای کنترل وصفی است. با وجود این که در این دسته از نمودارهای کنترل تعداد نمونه می‌تواند متغیر باشد ولی تعداد نمونه ثابت کاربرد بیشتری دارد. به عنوان مثال فرض کنید نسبت نامنطبق‌ها در یک فرایند ۰/۰۰۱ باشد و اندازه زیرگروه ۱۰۰۰ درنظر گرفته شود در نتیجه تعداد نامنطبق‌ها، (np)، به صورت میانگین ۱ خواهد شد. این موقعیت نمودار مناسبی را به دنبال نخواهد داشت زیرا نقاط زیادی از چارت، مقدار صفر خواهند داشت. اگر نسبت نامنطبق‌ها ۰/۱۵ باشد و اندازه زیرگروه ۵۰ باشد، میانگین تعداد نامنطبق‌ها ۷/۵ خواهد شد که نمودار کنترلی مناسبی را به همراه خواهد داشت. در ابتدای استفاده از نمودار np با تعداد زیرنمونه ۵۰ پیشنهاد می‌گردد. بازرسی‌های انجام گرفته روی هر زیر نمونه بایستی در شرایط مناسب آزمایشگاهی صورت گیرد.

در گام بعدی جمع آوری اطلاعات برای حداقل ۲۵ زیرگروه صورت می‌گیرد که بایستی به شکل مناسبی جمع آوری شده و تحلیل گردد. برای نمونه جدول زیر یک مثال از نحوه این کار نمایش می‌دهد.

شماره زیرگروه	تعداد بازرسی شده (n)	تعداد بازرسی شده (np)	نسبت نامنطبق‌ها (p)
۱	۳۰۰	۱۲	۰/۰۴۰
۲	۳۰۰	۳	۰/۰۱۰
۳	۳۰۰	۹	۰/۰۳۰
.	۰	۰	.
.	۰	۰	.
.	۰	۰	.
۱۹	۳۰۰	۱۶	۰/۰۵۳
۲۰	۳۰۰	۲	۰/۰۰۷
۲۱	۳۰۰	۵	۰/۰۱۷
۲۲	۳۰۰	۶	۰/۰۲۰
۲۳	۳۰۰	۰	۰/۰
۲۴	۳۰۰	۳	۰/۰۱۰
۲۵	۳۰۰	۲	۰/۰۰۷
جمع	۷۵۰۰	۱۳۸	

جدول تعیین تعداد نامنطبق‌ها

در مرحله بعد حدود کنترلی و خط مرکزی نمودار p محاسبه خواهند شد.

نمودارهای کنترل برای نسبت اقلام معیوب

همان‌طور که گفتیم محصولات براساس استانداردهای از پیش تعیین شده به دو دسته‌ی منطبق یا نامنطبق تقسیم می‌شوند. نسبت اقلام معیوب معمولاً به صورت کسری و در بعضی مواقع به صورت درصد گزارش می‌گردد. اصول آماری نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب بر توزیع بینم استوار است. برای نشان دادن این موضوع فرض کنید فرایند در حالت تحت کنترل و پایدار به سر می‌برد و احتمال معیوب بودن هر محصول P است. هم‌چنین فرض کنید محصولات متوالی تولید شده مستقل از یکدیگر هستند. تحت این شرایط، هر محصول تولید شده به عنوان یک متغیر تصادفی برنولی با پارامتر P عمل می‌کند. اگر یک نمونه تصادفی nتایی انتخاب شود و اگر D تعداد محصولات نامنطبق باشد، آن‌گاه D از یک توزیع بینم با پارامترهای n و P پیروی می‌کند و یا به عبارت دیگر:

$$P\{D=X\}=\binom{n}{X}P^{X}(1-P)^{n-x} \qquad (x=0,1,\ldots,n)$$

مثال۱: در مورد محصولات تولیدی یک سازمان، معیار عدم انطباق وجود ۴ نقص در هر محصول تعریف شده است. اگر احتمال وجود مقدار کمتر از ۴ نقص در هر محصول برابر ۸۰% باشد و محصولات از یکدیگر مستقل باشند، متغیر تصادفی منطبق یا نامنطبق بودن، هر محصول تولید شده از چه توزیعی پیروی می‌کند؟ هم‌چنین با این شرایط میانگین تعداد اقلام معیوب تولید شده از بین n محصول تولیدی را محاسبه کنید.

۱) برنولی، $n(\frac{۲}{۱۰})$ ۲) بینم، $n(\frac{۲}{۱۰})$ ۳) بینم، $(\frac{۲}{۱۰})$ ۴) برنولی، $(\frac{۲}{۱۰})$

پاسخ: گزینه «۱» معیوب بودن هر محصول تولید شده یک متغیر تصادفی برنولی و تعداد اقلام معیوب در جامعه از توزیع بینم پیروی می‌کند، هم‌چنین احتمال معیوب بودن برابر است با:

$$P=۱-\frac{۸}{۱۰}=\frac{۲}{۱۰}\overset{\text{بینم}}{\Rightarrow}\mu=n(\frac{۲}{۱۰})$$

نکته۲: به سادگی می‌توان نسبت اقلام سالم را نیز مورد تجزیه و تحلیل قرار داد، که در این حالت نمودار حاصل بازده فرایند را کنترل می‌کند.

ارائه‌ی حدود کنترلی برای نمودار نسبت اقلام معیوب (P)، وقتی پارامتر فرایند دارای مقادیر استاندارد باشد:

همان‌طور که در فصل پیش نیز بیان کردیم پارامتر فرایند برای نمودارهای کنترل وصفی دیگر μ و σ نمی‌باشد. برای نمودارهای کنترل تعداد اقلام معیوب و نسبت اقلام معیوب پارامتر فرایند برابر P (نسبت اقلام معیوب جامعه) می‌باشد. که مقادیر μ_ω و σ_ω نیز تابعی از این پارامتر می‌باشند.

هم‌چنین آماره‌ی اندازه‌گیری‌کننده نمونه‌ها در این نمودارهای نسبت اقلام معیوب نمونه $(\omega=P_{\text{نمونه}})$ می‌باشد، که بنا به تعریف برابر حاصل تقسیم تعداد اقلام معیوب نمونه به اندازه‌ی نمونه می‌باشد:

$$\omega=P_{\text{نمونه}}=\frac{d}{n}\begin{pmatrix}d=\text{تعداد اقلام معیوب در نمونه}\\ n=\text{اندازه‌ی نمونه}\end{pmatrix}$$

حال اگر مقدار پارامتر فرایند یا همان P (نسبت اقلام معیوب جامعه)، مشخص و استاندارد باشد، مقادیر μ_ω و σ_ω به صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$\mu_\omega=\mu_{P_{\text{نمونه}}}=P$$

$$\sigma_\omega=\sigma_{P_{\text{نمونه}}}=\sqrt{\frac{P(۱-P)}{n}}$$

مثال۲: معیار عدم انطباق برای محصولات بهداشتی وجود حداقل یک نقص در محصول تعریف شده است. احتمال وجود حداقل یک نقص در هر محصول برابر ۰/۵ گزارش شده است. در این صورت، نسبت اقلام معیوب فرایند نسبت اقلام معیوب نمونه و مقدار انحراف معیار آماره‌ی اندازه‌گیری‌کننده‌ی نمونه به ترتیب کدامند؟ $(n=۱۰)$

۱) $\frac{۵}{۱۰۰}$، $\frac{۵}{۱۰۰۰}$، $\sqrt{\frac{۵}{۱۰۰۰}(\frac{۹۵}{۱۰۰})}$ ۲) $\frac{۵}{۱۰۰}$، $\frac{۵}{۱۰۰۰}$، $\sqrt{\frac{۵}{۱۰۰}(\frac{۹۵}{۱۰۰})}$

۳) $\frac{۵}{۱۰۰}$، $\frac{۵}{۱۰۰}$، $\sqrt{\frac{۹۵}{۱۰۰}(\frac{۵}{۱۰۰۰})}$ ۴) $\frac{۵}{۱۰۰}$، $\frac{۵}{۱۰۰}$، $\sqrt{\frac{۵}{۱۰۰}(\frac{۹۵}{۱۰۰})}$

پاسخ: گزینه «۳» زمانی که احتمال معیوب بودن قطعات برابر باشد، نسبت اقلام معیوب جامعه (P) و نسبت اقلام معیوب نمونه $(P_{\text{نمونه}})$ برابر خواهند بود، هم‌چنین؛

$$\sigma_\omega=\sqrt{\frac{P(۱-P)}{n}}=\sqrt{\frac{\frac{۵}{۱۰۰}\times\frac{۹۵}{۱۰۰}}{۱۰}}$$

در نتیجه حدود کنترل، در صورت در اختیار داشتن مقدار استاندارد برای P (جامعه) به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\text{حدود کنترل نمودار P}\begin{cases}UCL=\mu_{P_{\text{نمونه}}}+K(\sigma_{P_{\text{نمونه}}})\\ CL=\mu_{P_{\text{نمونه}}}\\ LCL=\mu_{P_{\text{نمونه}}}-K(\sigma_{P_{\text{نمونه}}})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}UCL=P+K\sqrt{\frac{P(۱-P)}{n}}\\ CL=P\\ LCL=P-K\sqrt{\frac{P(۱-P)}{n}}\end{cases}$$

نکته۳: بین نسبت اقلام معیوب نمونه و نسبت اقلام معیوب جامعه باید تمایز قائل شد، $P_{\text{نمونه}}$ نسبت اقلام معیوب در یک نمونه را می‌سنجد و (در واقع آماره‌ی مورد بررسی در نمودارهای کنترل است)، ولی P، به خودی خود نسبت اقلام معیوب در جامعه می‌باشد و در واقع P فرایند یا همان پارامتری است که مقدار استاندارد برای آن موجود می‌باشد و یا باید آن را تخمین زد.

نکته۴: تعداد اقلام معیوب از توزیع دوجمله‌ای پیروی می‌کند.

مثال۳: اگر در یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب، داشته باشیم؛

$$UCL = ۰/۰۸۶۲$$
$$LCL = ۰/۰۲۱۸$$

فاصله‌ی حدود کنترل چه ضریبی از انحراف معیار P می‌باشد؟ ($P = \frac{۵}{۱۰۰}$)

۱) ۴/۵	۲) ۳/۳	۳) ۲/۵	۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲»

$$UCL - LCL = ۰/۰۸۶۲ - ۰/۰۱۳۸ = ۰/۰۷۲۴$$

$$\sigma_\omega = \sigma_P = \sqrt{\frac{P(۱-P)}{n}} = \sqrt{\frac{(۰/۰۵)(۰/۹۵)}{۱۰۰}} = ۰/۰۲۱۸$$

$$\frac{۰/۰۷۲۴}{۰/۰۲۱۸} = ۳/۳۲$$

ارائه‌ی حدود کنترل برای نمودار نسبت اقلام معیوب (P)، وقتی پارامترهای فرایند دارای مقادیر استانداردی نباشند؛

همان‌طور که در اصول سایر نمودارهای کنترل نیز صحبت شد، برای تعریف حدود کنترل نیاز به مقادیر $\sigma_\omega, \mu_\omega$ می‌باشد و این مقادیر بدون در دست داشتن مقدار استاندارد یا تخمین پارامتر فرایند (P) قابل دستیابی نیستند، برای تخمین پارامتر P، از $\overline{P}$ استفاده می‌نماییم.

$$\hat{P} = \overline{P} = \frac{\sum_{i=1}^{m} d_i}{mn}$$

نکته۵: برای طراحی حدود تخمینی کنترل نمودار نسبت اقلام معیوب، کافی است مقدار P با مقدار تخمینی آن یعنی $\overline{P}$ عوض شود، نحوه‌ی محاسبه‌ی $\overline{P}$ یعنی رابطه‌ی $\frac{\sum_{i=1}^{m} di}{mn}$، برای پاسخ‌گویی به تست‌های مفهومی و تست‌های مشکل محاسباتی ارائه گردیده است.

حال با داشتن تخمینی از P فرایند می‌توان مراحل طراحی حدود کنترل برای نمودارهای نسبت اقلام معیوب را پیاده‌سازی نمود؛

باتوجه به آماره‌ی مورد بررسی، ($\omega = P_{\text{نمونه}}$):

$$\mu_\omega = \mu_{P_{\text{نمونه}}} = \overline{P}$$

$$\sigma_\omega = \sigma_{P_{\text{نمونه}}} = \sqrt{\frac{n\overline{P}(۱-\overline{P})}{n^۲}} = \sqrt{\frac{\overline{P}(۱-\overline{P})}{n}}$$

در نتیجه حدود کنترل با توجه به مدل عمومی به صورت زیر در می‌آیند:

$$\text{حدود کنترل تخمینی } P \begin{cases} UCL = \hat{\mu}_{P_{\text{نمونه}}} + K(\hat{\sigma}_{P_{\text{نمونه}}}) \\ CL = \hat{\mu}_{P_{\text{نمونه}}} \\ LCL = \hat{\mu}_{P_{\text{نمونه}}} - K(\hat{\sigma}_{P_{\text{نمونه}}}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} UCL = \overline{P} + K\sqrt{\frac{\overline{P}(۱-\overline{P})}{n}} \\ CL = \overline{P} \\ LCL = \overline{P} - K\sqrt{\frac{\overline{P}(۱-\overline{P})}{n}} \end{cases}$$

مثال۴: فرض کنید، اعداد زیر تعداد بخاری‌های نمونه گرفته شده و خراب را در ۱۰روز نشان می‌دهد:

روز	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	جمع
n_i (تعداد نمونه)	۸۰	۱۱۰	۹۰	۷۵	۱۳۰	۱۲۰	۷۰	۱۲۵	۱۰۵	۹۵	۱۰۰۰
X_i (تعداد خراب)	۴	۷	۵	۸	۶	۶	۴	۵	۸	۷	۶۰

حد کنترل بالایی برای نسبت اقلام معیوب، براساس متوسط تعداد نمونه‌ها، کدام است؟

۱) ۰/۱۳ ۲) ۰/۰۲۴ ۳) ۰/۰۷۴ ۴) ۰/۱۲۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\overline{P}=\frac{\sum X_i}{\sum n_i}=\frac{۶۰}{۱۰۰۰}=۰/۰۶ \quad , \quad \overline{n}=\frac{\sum n_i}{m}=\frac{۱۰۰۰}{۱۰}=۱۰۰$$

$$UCL=\overline{P}+۳\sqrt{\frac{\overline{P}(۱-\overline{P})}{n}}=۰/۰۶+۳\sqrt{\frac{(۰/۰۶)(۰/۹۴)}{۱۰۰}}=۰/۱۳۲$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۵: **در یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب، اندازه‌ی نمونه‌ی هر زیر گروه برابر ۸، و اطلاعات زیر، در دسترس است:**

$$\sum_{i=۱}^{۱۰} d_i = ۲۰$$

(d_i تعداد محصولات معیوب در هر نمونه)

مقدار انحراف معیار فرایند را محاسبه کنید؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$\overline{P}=\frac{\sum_{i=۱}^{۱۰} di}{mn}=\frac{۲۰}{۱۰\times ۸}=\frac{۱}{۴}$$

$$\hat{\sigma}=\sqrt{n\overline{P}(۱-\overline{P})}=\sqrt{۴\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

دقت کنید که انحراف معیار فرایند (σ)، با انحراف معیار آماره‌ی اندازه‌گیری‌کننده فرایند، (σ_ω)، متفاوت است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۶: **یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب فرایندی را، در نمونه‌های ۵۰ تایی برابر ۰/۰۴ نشان می‌دهد. اگر نسبت اقلام معیوب بــه ۰/۰۷ تغییــر پیدا کند، احتمال آن که روز بعد به وجود این تغییر پی برده شود، کدام است؟**

۱) ۰/۰۶۶ ۲) ۰/۰۹۶ ۳) ۰/۹۳۴ ۴) ۰/۹۰۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\overline{P}=۰/۰۴ \ , \ UCL=۰/۰۴+۳\sqrt{\frac{(۰/۰۴)(۰/۹۶)}{۵۰}}=۰/۱۳۵$$

$LCL=۰$

$۱-\beta=P$ (وقوع تغییر | کشف تغییر در اولین نمونه)

$=P(x>۵۰(۰/۱۳۵)\,|\,P=۰/۰۷)+P(x\le ۰\,|\,P=۰/۰۷)$

باتوجه به تقریب پوآسون برای توزیع دوجمله‌ای و با استفاده از جدول مربوطه داریم:

$=۱-P(x\le ۶/۷۵\,|\,np=\lambda=۳/۵)+P(x\le ۰\,|\,\lambda=۳/۵)$

$=۱-۰/۹۳۴+۰/۰۳=۰/۰۶۶+۰/۰۳=۰/۰۹۶$

◆ ◆ ◆ ◆

نکته۶: در محاسبات حدود کنترل، ممکن است مقدار LCL، مقداری منفی محاسبه شود، ولی چون در عمل، نسبت منفی معنا ندارد، به جای آن مقدار $LCL=۰$ در حدود کنترل در نظر گرفته می‌شود.

نکته۷: اصلاح حدود کنترل و خط مرکز: پس از حذف نقاطی که با رخ دادن علت‌های غیرتصادفی خارج از حدود کنترل قرار گرفته‌اند. خط مرکزی و حدود کنترل مجدداً محاسبه شده و در نمودار کنترل جدید مورد استفاده قرار گیرند.

نکته۸: شاید، این‌گونه استنباط شود که با حذف یک نقطه از بالای نمودار کنترل، حدود کنترل را به هم نزدیک می‌کند. ولی در واقع، به این نکته مربوط است که آیا توانسته است، انحراف معیار نمودار جدید را کاهش دهد یا خیر. یعنی اگر P_1 متوسط، نسبت اقلام معیوب قبل از حذف نقاط خارج از کنترل و P_2 نسبت اقلام معیوب پس از حذف نقاط خارج از کنترل، باشد، دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

اگر: $P_2(1-P_2) > P_1(1-P_1) \Rightarrow$ حدود کنترل بازتر می‌شود

اگر: $P_2(1-P_2) < P_1(1-P_1) \Rightarrow$ حدود کنترل تنگ‌تر می‌شود

نکاتی در رابطه با تعیین اندازه‌ی نمونه در نمودارهای نسبت اقلام معیوب:

از یک منظر، پیشنهاد می‌شود که اندازه‌ی نمونه باید به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، تا تقریباً بتوان با احتمال ٪۵۰ به وجود تغییر خاصی در فرایند پی برد. به عنوان مثال فرض کنید که $P = ۰/۰۱$ است و می‌خواهیم با احتمال ٪۵۰ زمانی که نسبت اقلام معیوب فرایند به $P = ۰/۰۵$ تغییر پیدا می‌کند نمودار به ما هشدار دهد، در این صورت اگر δ را اندازه‌ی تغییر ایجاد شده در فرایند را نشان دهد، (در این جا $(\delta = ۰/۰۴)$)، آن‌گاه اندازه‌ی نمونه به صورت زیر محاسبه می‌شود؛

$$\delta = k\sqrt{\frac{P_\circ(1-P_\circ)}{n}} \Rightarrow n = (\frac{k}{\delta})^2 P_\circ(1-P_\circ)$$

که در رابطه‌ی فوق $P_\circ$ مقدار اولیه‌ی فرض شده برای P است، یعنی در این مثال $(P_\circ = ۰/۰۱)$.

نکته۹: در رابطه‌ی فوق مقدار خطای β برابر ٪۵۰ می‌باشد.

نکته۱۰: روش فوق، تنها روشی است که اندازه‌ی نمونه را، با توجه به میزان تغییر مورد نظر (P_2) تعیین می‌نماید.

مثال۷: اگر در یک نمودار کنترل، با $P = ۰/۰۱$، نسبت اقلام معیوب $P = ۰/۱۵$ شود، n چه باشد که با احتمال $\frac{1}{2}$، به وجود این تغییر پی ببریم؟

۱) ۲۳۴   ۲) ۳۲۴   ۳) ۴۲۳   ۴) ۴۳۲

پاسخ: گزینه «۲»

$$P_1 - P_\circ = ۰/۰۵ = ۳\sqrt{\frac{(۰/۱)(۰/۹)}{n}} \Rightarrow n = (\frac{۳}{۰/۰۵})^2(۰/۱)(۰/۹) = ۳۲۴$$

ـ اگر بخواهیم اندازه‌ی نمونه را به اندازه‌ای در نظر بگیریم که حد کنترل پایین مثبت باشد $(۰ \le LCL)$، مقدار اندازه‌ی نمونه (n) از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$LCL = P - k\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \ge 0 \Rightarrow n \ge \frac{(1-P)}{P}k^2$$

تفسیر نقاط بر روی نمودار نسبت اقلام معیوب:

برای تفسیر انواع نقاط بر روی نمودار، نیاز به ارائه‌ی یک دسته‌بندی داریم:

۱ـ نقاطی که بالای حدود کنترل قرار می‌گیرند و دلایل غیرتصادفی برای این انحراف وجود دارد:

این نقاط باید از نمودار حذف شوند و محاسبات مربوط به حدود کنترل و خط مرکز دوباره انجام شود هم‌چنین کلیه‌ی نقاطی که تحت تأثیر علل غیرتصادفی شناخته شده بوده‌اند، حتی در صورت قرار گرفتن بین حدود کنترل باید حذف شوند.

۲ـ نقاطی که بالای حدود کنترل قرار می‌گیرند و دلایل غیرتصادفی برای انحراف آن‌ها، پیدا نمی‌شود:

برای این نقاط فرض می‌کنیم، انحراف تصادفی بوده است و می‌توان آن‌ها را حذف نکرد.

۳ـ نقاطی که پایین‌تر از LCL قرار می‌گیرند:

این نقاط را باید با دقت خاصی تفسیر نمود، در اغلب موارد این حالت به معنای بهبود واقعی در فرایند نمی‌باشد، بلکه می‌تواند دلایلی نظیر اشتباه اپراتور، تنظیم نبودن دستگاه، گزارش‌های دروغین و ... داشته باشد.

نمودارهای کنترل تعداد اقلام معیوب (np):

دسته‌ی دیگری از نمودارهای مرتبط با اقلام معیوب، نمودارهای تعداد اقلام معیوب (np) می‌باشند. واضح است که تعداد اقلام معیوب برابر است با حاصل‌ضرب نسبت اقلام معیوب در کل تعداد اقلام. از این رو با اشراف داشتن به نمودارهای کنترل نسبت اقلام معیوب (P) به سادگی می‌توان نمودارهای کنترل np را طراحی نمود.

ارائه‌ی حدود کنترل استاندارد، برای نمودارهای کنترل تعداد اقلام معیوب (np):

از قسمت قبل به یاد داریم، میانگین و انحراف معیار متغیر تصادفی $P_{نمونه}$، در صورت معلوم بودن P، به ترتیب برابر P و $\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$ می‌باشد. حال به سادگی با به کارگیری اصول آماری می‌توان، میانگین و انحراف‌معیار متغیر تصادفی نمونهnp را نیز به دست آورد:

$$\mu_\omega = \mu_{np_{نمونه}} = np$$

$$\sigma_\omega = \sigma_{np_{نمونه}} = n^2\sigma_{P_{نمونه}} = n^2\sigma_{P_{نمونه}} = n^2\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \sqrt{nP(1-P)}$$

آماره‌ی مورد بررسی در نمودارهای $(\omega = np)$،μ_ω می‌باشد، حال با داشتن مقدار استاندارد P و محاسبه‌ی مقادیر μ_ω و δ_ω برحسب P، می‌توان با توجه به مدل عمومی، حدود کنترل نمودار تعداد اقلام معیوب (np) را در شرایط استاندارد ارائه داد:

$$\begin{cases} UCL = \mu_{np_{نمونه}} + k(\sigma_{np_{نمونه}}) \\ CL = \mu_{np_{نمونه}} \\ LCL = \mu_{np_{نمونه}} - k(\sigma_{np_{نمونه}}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} UCL = np + k\sqrt{np(1-p)} \\ CL = np \\ LCL = np - k\sqrt{np(1-p)} \end{cases}$$

مثال۸: در یک نمودار کنترل با $P = 0/1$، میانگین فرایند و حد کنترل بالای ۲ انحراف معیار را محاسبه نمایید. $(n = 4)$

۱) $1/6, \frac{4}{10}$ ۲) $1, \frac{1}{10}$ ۳) $1/6, \frac{1}{10}$ ۴) $1, \frac{4}{10}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$UCL = np + k\sqrt{np(1-p)} = \frac{4}{10} + 2\times\sqrt{4\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}} = \frac{4}{10} + 2\times\frac{6}{10} = 1/6$$

نکته۱۱: در صورت تسلط به مراحل تشکیل حدود کنترل نمودارهای p، کافی است با تغییر دادن مقدار (ω)، از p به np و محاسبه‌ی μ_ω و σ_ω جدید با تکنیک‌های ساده‌ی آماری، حدود کنترل np را با توجه به مدل عمومی تشکیل داد.

نکته۱۲: نمودارهای کنترل np تنها زمانی کارایی دارد که اندازه‌ی هر نمونه (n) ثابت باشد. در غیر این صورت باتوجه به متغیر شدن خط مرکز، عملاً نمی‌توان از این نمودار برای پایش فرایند استفاده نمود.

ارائه‌ی حدود کنترل نمودارهای تعداد اقلام معیوب (np)، وقتی پارامترهای فرایند دارای مقادیر استاندارد نباشند:

مراحل تشکیل حدود تخمینی نمودارهای کنترل np، کاملاً مشابه مراحل تشکیل این حدود برای نمودارهای p است. تنها نکته عوض کردن آماره‌ی مورد بررسی ω، از p به np است. محاسبه‌ی مقادیر μ_ω و σ_ω نیزدر قسمت قبل ارائه شد. برای تشکیل حدود تخمینی، تنها کافی است، مقدار p با $\bar{p}$ تخمین زده شود. در نتیجه بنا به مدل عمومی، حدود کنترل به صورت زیرا ارائه می‌شوند:

$$UCL = n\bar{p} + k\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$$

$$CL = n\bar{p}$$

$$LCL = n\bar{p} - k\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$$

مثال۹: در یک فرایند حدود کنترل نمودار np به صورت $UCL_{np} = 58$ و $LCL_{np} = 22$ داده شده است. اگر میانگین فرایند به $np = 45$ تغییر کند، احتمال پی بردن به این تغییر کدام است؟

۱) $0/024$ ۲) $0/042$ ۳) $0/97$ ۴) $0/958$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\beta = p(22 < x < 58 \mid np = 45)$$

$$= p(22/5 \le x \le 57/5) = p(\frac{-22/5}{6/32} \le z \le \frac{12/5}{16/32}) \Rightarrow = 0/97615 - 0/00019 = 0/97596$$

$$1 - \beta = 0/02404$$

مثال۱۰: در سؤال قبل اگر بخواهیم حد پایین نمودار کنترل مثبت باشد، چه تعداد نمونه (n) لازم است؟

۱) ۹　　۲) ۸۱　　۳) ۸۲　　۴) ۱۰

پاسخ: گزینه «۳»

$$LCL > ۰ \Rightarrow np - ۳\sqrt{np(۱-P)} > ۰ \Rightarrow n_۰ > ۸۱$$

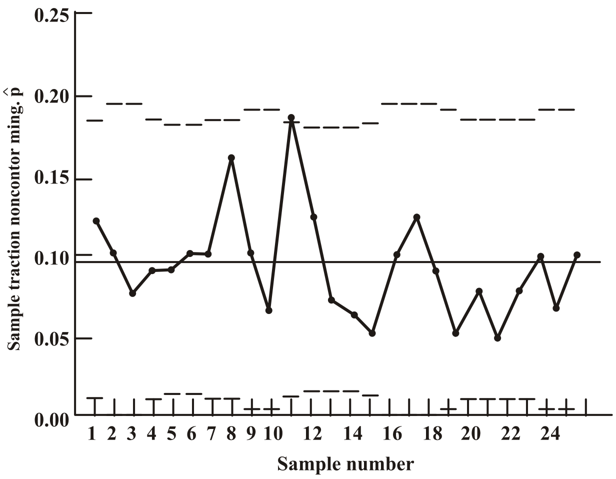
$$(P = \frac{۱}{۱۰})$$

نمودارهای کنترل P، با اندازه‌ی نمونه‌ی متغیر:

اگر فرض کنیم در تعداد m نمونه، اندازه نمونه‌ها (n_i ها) متفاوت باشند، حدود کنترل ارائه شده در بخش نسبت اقلام معیوب این فصل، دیگر معتبر نخواهد بود، با این حال سه روش، برای تهیه و استفاده از نمودار کنترل با اندازه‌ی نمونه‌ی متغیر وجود دارد، که در ادامه به آن‌ها خواهیم پرداخت:

۱ـ استفاده از حدود کنترل متغیر:

شاید ساده‌ترین روش در حالت اندازه نمونه‌ی متغیر، تهیه‌ی حدود کنترل برای هر نمونه باشد، به عبارت دیگر اگر اندازه‌ی نمونه‌ی شماره‌ی I را n_i بنامیم، آن‌گاه حدود کنترل بالا و پایین برابر خواهند بود با: $p \pm k\sqrt{\frac{p(۱-p)}{n_i}}$. نمودارهای کنترل با حدود متغیر در شکل زیر نمایش داده شده‌اند.



نمودار کنترل با حدود متغیر

نکته۱۳: در رابطه با حالتی که اندازه‌ی نمونه از یک نمونه به نمونه‌ی دیگر تغییر می‌نماید، می‌توان روابط زیر را ارائه داد، فرض کنید اندازه‌ی نمونه از n به اندازه‌ی نمونه an تغییر نماید (a یک ضریب می‌باشد):

حدود کنترل جدید	$UCL = P + ۳\sqrt{\frac{P(۱-P)}{an}}$ $CL = P$ $LCL = P - ۳\sqrt{\frac{P(۱-P)}{an}}$
فاصله بین حدود کنترل	$UCL - LCL = ۶\sqrt{\frac{P(۱-P)}{an}} = \frac{۶}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{P(۱-P)}{n}}$

در نتیجه، فاصله‌ی بین حدود کنترل بالا و پایین به نسبت $\frac{۱}{\sqrt{a}}$ کمتر می‌شود.

نکته۱۴: خط مرکز نمودار کنترل در این روش ثابت و برابر مقدار p خواهد ماند، ولی حدود کنترل متغیر هستند.

نکته۱۵: اگر مقدار استانداردی برای p فرایند وجود نداشته باشد، آن‌گاه p با پارامتر $\bar{p}$ به صورت زیر تخمین زده خواهد شد:

$$\hat{p}=\bar{p}=\frac{\sum_{i=1}^{m} d_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

که در این رابطه، d_i تعداد نقص‌های هر نمونه است، در این حالت حدود کنترل بالا و پایین به صورت $\bar{p}\pm k\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$ در می‌آیند و خط مرکز $\bar{p}$ خواهد بود.

۲ـ استفاده از اندازه‌ی نمونه‌ی متوسط:

در این روش از اندازه‌ی نمونه‌ی متوسط، برای تشکیل حدود کنترل تقریبی به صورت مقابل استفاده خواهد شد:

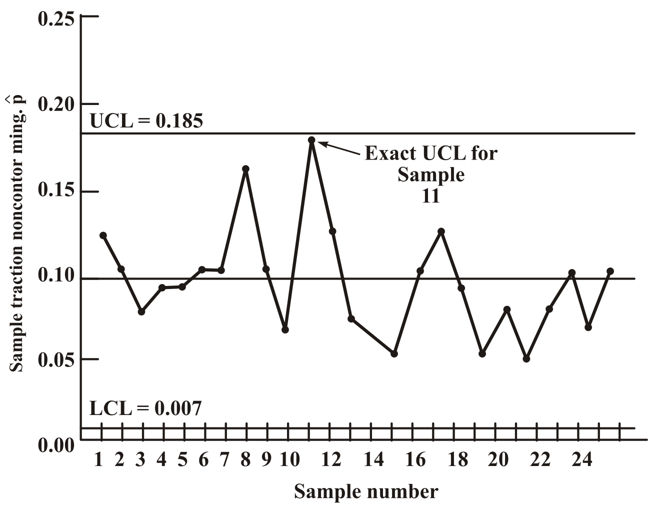
$$\bar{n}=\frac{\sum_{i=1}^{m} n_i}{m}$$

که در این صورت حدود کنترل در حالت استاندارد و تخمینی به صورت زیر تهیه می‌شوند:

حدود کنترل تخمینی
$$\begin{cases} UCL=\bar{P}+k\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{\bar{n}}} \\ CL=\bar{P} \\ LCL=\bar{P}-k\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{\bar{n}}} \end{cases}$$

حدود کنترل در حالت استاندارد
$$\begin{cases} UCL=P+k\sqrt{\frac{P(1-P)}{\bar{n}}} \\ CL=P \\ LCL=P-k\sqrt{\frac{P(1-P)}{\bar{n}}} \end{cases}$$

نمودارهای کنترل با اندازه نمونه‌ی متوسط در شکل زیر نمایش داده شده‌اند:



نمودار کنترل با اندازه نمونه متوسط

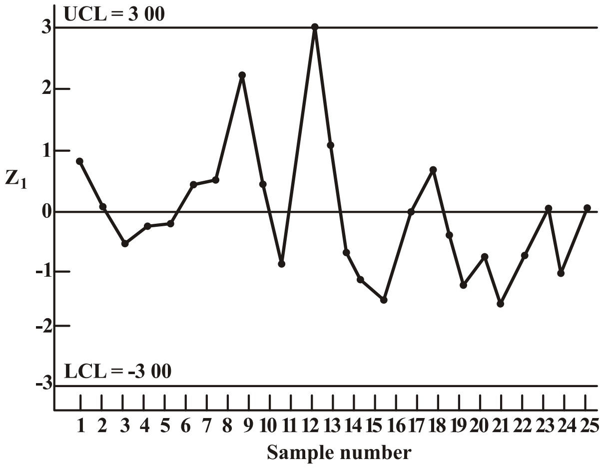
نکته۱۶: خط مرکز حدود کنترل در این حالت ثابت خواهند ماند.

نکته۱۷: حدود کنترل تشکیل شده در این حالت حدود کنترل تقریبی هستند، لذا در تفسیر حالاتی که نقاط نزدیک حدود کنترل (چه در بیرون و چه در داخل حدود کنترل) رسم می‌شوند، باید دقت لازم را به عمل آورد و برای این‌گونه نقاط بهتر است حدود کنترل با اندازه‌ی نمونه‌ی متغیر برای نمونه‌ی مربوطه رسم شود.

نکته۱۸: در برخی مواقع ممکن است $\bar{n}$ تخمین خوبی از اندازه‌ی نمونه‌ی جامعه ارائه ندهد، در این صورت اندازه‌ی نمونه‌ی جامعه، با اندازه نمونه‌ای که بیشترین تکرار را در بین اندازه‌ی نمونه‌ها دارد، (n_{mode})، تخمین زده می‌شود. در این صورت، برای تشکیل حدود کافی است، n_{mode} جای‌گزین $\bar{n}$ شود.

۳ـ استفاده از نمودار کنترل استاندارد شده:

بهترین روش در حالت اندازه‌ی نمونه‌ی متغیر، استفاده از نمودار کنترل استاندارد شده است. در این نمودار خط مرکز منطبق بر صفر خواهد بود، و حدود کنترل بالا و پایین به ترتیب مقادیر ۳+ ,۳− می‌گیرند. آماره مورد بررسی در این نمودار $\omega = z_i = \dfrac{\hat{P}_i - P}{\sqrt{\dfrac{P(1-P)}{n_i}}}$ می‌باشد. که در این رابطه، P، همان P فرایند و $\hat{P}_i$، نسبت اقلام معیوب نمونه‌ی iام است. یک نمونه از نمودار کنترل استاندارد شده، در شکل زیر نمایش داده شده است.



نمودار کنترل استاندارد شده

نکته۱۹: در صورت معلوم نبودن P فرایند، مثل سایر نمودارهای مرتبط با اقلام معیوب، مقدار P را با $\overline{P}$ تخمین می‌زنیم.

مثال۱۱: کدام‌یک از روش‌های زیر در صورت وجود اندازه نمونه‌های متغیر برای استفاده با قوانین حساس‌سازی مناسب‌تر است؟

۱) استفاده از $\overline{n}$

۲) استفاده از حدود $\overline{P} \pm \sqrt{(P\dfrac{(1-P)}{n_i})}$

۳) استانداردسازی

۴) هیچ‌کدام از این روش‌ها در این شرایط مزیت عمده‌ای ندارند.

پاسخ: گزینه «۳»

نکته۲۰: کیفیت نمونه: کیفیت نمونه در کنکور سراسری سال ۹۰ مورد توجه طراحان قرار گرفت.

برای مقایسه کیفیت دو یا چند نمونه طبق اولویت‌های زیر عمل می‌کنیم:

ـ اگر اندازه‌ی نمونه‌ها با هم برابر باشند، نمونه‌ای با کیفیت‌تر است که $P_{\text{نمونه}}$ (نسبت اقلام معیوب نمونه) کمتری داشته باشد.

ـ اگر اندازه‌ی نمونه‌ها با هم برابر نباشد، نمونه‌ای با کیفیت‌تر است که Z_i (آماره‌ی استاندارد آن در نمودار کنترل استاندارد شده) کمتری داشته باشد.

تابع مشخصه‌ی عملکرد و محاسبات مرتبط به متوسط طول دنباله:

تابع مشخصه‌ی عملکرد، نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب یا تعداد اقلام معیوب، تابعی است، که احتمال تحت کنترل اعلام شدن فرایند را براساس مقادیر مختلف P نشان می‌دهد. در صورتی که فرایند در حالت تحت کنترل باشد، احتمال پذیرش برابر $1-\alpha$ و در صورتی که فرایند در حالت خارج از کنترل باشد، احتمال پذیرش برابر β خواهد بود. در صورت رسم احتمالات پذیرش به ازای مقادیر مختلف P، منحنی مشخصه‌ی عملکرد به دست می‌آید.

اگر نسبت اقلام معیوب از مقدار اسمی خود P، به مقدار دیگری نظیر P_1 تغییر کند، آن‌گاه احتمال خطای نوع II از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\beta = P\{\hat{P} \le UCL \mid P_1\} - P\{\hat{P} < LCL \mid P_1\}$$

اگر: $\hat{P} = \dfrac{D}{n}$

$$\beta = P\{D \le nUCL \mid P_1\} - P\{D < nLCL \mid P_1\}$$

نکته۲۱: باتوجه به این که D ازتوزیع دوجمله‌ای پیروی می‌کند. مقدار احتمال رابطه‌ی فوق را می‌توان، از توزیع تجمعی بینم محاسبه نمود. در رابطه‌ی فوق فرض بر این است که اگر نقطه‌ای روی حدود کنترل قرار گیرد، فرایند تحت کنترل اعلام می‌شود.

مدرسان شریف

فصل هفتم

«نمونه‌گیری به منظور پذیرش برای مشخصه‌های کیفی وصفی»

تعریف

نمونه‌گیری جهت پذیرش به این معناست که هنگامی که برای ما انباشته‌ای فرستاده می‌شود ما برای رد یا قبول انباشته تعدادی نمونه از آن می‌گیریم، اگر تعداد معیوب در نمونه‌گیری حدود تعیین شده را برآورد کرد آنگاه کل انباشته را قبول می‌کنیم و در غیر این صورت کل آن را رد می‌کنیم.

شاخص تعیین روش پذیرش یا رد انباشته‌ها

برای پذیرش یا عدم پذیرش انباشته‌ها روش‌های متفاوتی موجود است که به آن‌ها طرح‌های نمونه‌گیری می‌گویند. برای انتخاب یک روش مناسب نیازمند استفاده از شاخص تصمیم‌گیری هستیم، می‌توان این شاخص را «هزینه تصمیم برای پذیرفتن محصول» تعریف کرد:

هزینه‌های پذیرش انباشته

۱ـ هزینه‌های اجرای عمل بازرسی(عمل نمونه‌گیری): اجرای عمل نمونه‌گیری نیازمند صرف منابعی است که هزینه های بکارگیری این منابع بیانگر هزینه های عمل نمونه گیری می‌باشند. این منابع شامل زمان،نیروی انسانی و ... می‌باشند.

۲ـ هزینه ی رد محصول سالم: هنگامی که تصمیم به رد انباشته‌ای می‌گیریم، ممکن است محصولات سالم نیز در این انباشته باشند که بی دلیل رد شده‌اند. این هزینه‌ها معمولاً بیشتر از سایر هزینه‌ها هستند و شامل، هزینه‌های خدمات پس از فروش، از دست دادن مشتری و یا ورود اقلام ناسالم به کارخانه و ....

هزینه هایی که از این طریق به شرکت وارد می شوند را هزینه های رد محصول سالم می گویند.

۳ـ هزینه‌های عبور محصول ناسالم: هنگامی که تصمیم به پذیرش انباشته‌ای می‌گیریم ممکن است در انباشته پذیرفته شده تعدادی محصول ناسالم نیز وجود داشته باشد. هزینه‌هایی را که از این طریق به شرکت وارد می‌شوند را می‌توان هزینه‌های عبور محصول ناسالم در نظر گرفت. این هزینه‌ها شامل هزینه برگشت انباشته به مقصد، تأخیر در رسیدن مواد اولیه، هزینه غربال کل محموله و ... می‌باشند.

با توجه به شاخص هزینه، تصمیمی در مورد روش پذیرش انباشته، بهینه است که هزینه کل کمتری داشته باشد.

روش‌های نمونه‌گیری جهت پذیرش همواره بین دو روش حدی (پذیرش بی بازرسی و بازرسی ۱۰۰٪) قرار دارند:

سایر روش‌های نمونه‌گیری

	«پذیرش بی‌بازرسی»	«بازرسی ۱۰۰٪»
هزینه اجرا:	صفر	بیشترین مقدار
هزینه عبور محصول ناسالم:	بیشترین مقدار	صفر
هزینه جلوگیری از عبور محصول سالم:	صفر	صفر

مقایسه هزینه‌های پذیرش انباشته برای روش‌های فوق‌الذکر:

نوع هزینه / هزینه به ترتیب نزولی	۱	۲	۳
هزینه‌های عمل نمونه‌گیری	بازرسی ۱۰۰٪	نمونه‌گیری به منظور پذیرش	بدون بازرسی
هزینه‌های رد محصول سالم	نمونه گیری به منظور پذیرش	بازرسی ۱۰۰٪ / بدون بازرسی	-
هزینه‌های عبور محصول ناسالم	بدون بازرسی	نمونه‌گیری به منظور پذیرش	بازرسی ۱۰۰٪

به منظور تحلیل و مقایسه هزینه‌های عمل نمونه‌گیری از شاخص ASN استفاده می‌کنیم.

به منظور تحلیل هزینه‌های رد محصول سالم و عبور محصول ناسالم از منحنی OC استفاده می‌کنیم ، بدین صورت که از خطای نوع اول (α) به منظور تحلیل و مقایسه هزینه‌های رد محصول سالم بین روش‌های مختلف و از خطای نوع دوم (β) به منظور تحلیل و مقایسه هزینه‌های عبور محصول ناسالم بین روش‌های مختلف استفاده می‌کنیم.

نکته۱: دو روش پذیرش بدون بازرسی و بازرسی ۱۰۰٪ معمولاً اجراء نمی‌شود ولی هر گاه که از توانایی فرایند در تولید اقلام اطمینان زیادی داشته باشیم و هزینه بازرسی زیاد باشد و هزینه عبور اقلام ناسالم خیلی کم باشد می‌توان از روش پذیرش بی‌بازرسی استفاده کرد. به همین صورت اگر هزینه حتی یک قلم ناسالم بسیار بالا باشد از بازرسی ۱۰۰٪ استفاده می‌کنیم.

دسته‌بندی روش‌های پذیرش با استفاده از نمونه‌گیری

روش‌های پذیرش

- **بدون تشکیل انباشته (پیوسته) continuous**
  - * امکان تشکیل انباشته وجود ندارد یا اقتصادی نیست
  - * بازرسی تک تک محصولات نیازمند منابع زیادی است.
  - * خط تولید پیوسته است مانند تولید مایعات
  - * از خط نمونه‌های معینی در فواصل زمانی معین می‌گیریم اگر نمونه مطلوب نبود بازرسی را افزایش می‌دهیم.
- **انباشته به انباشته**
  - **ویژگی کیفی متغیر variable**
    - * در مورد ویژگی کمی مورد نظر آزمایشاتی انجام می‌شود که نتایج آن کمی است. مانند طول عمر لامپ
  - **ویژگی کیفی وصفی attribute**
    - * ویژگی‌ها به صورت پیوسته نیستند و تنها مطلوب و غیر مطلوب مطرح است.

هدف این فصل، نمونه‌گیری جهت پذیرش برای ویژگی‌های وصفی است که انواع طرح‌های مختلف برای آن وجود دارد. در ادامه درباره‌ی آنها بحث خواهد شد:

نکاتی درباره نمونه‌گیری جهت پذیرش

* نمونه‌گیری تنها روشی برای رد یا قبول یا انباشته است و باعث ایجاد کیفیت نمی‌شود.

* در نمونه‌گیری جهت پذیرش امکان رد انباشته مطلوب و قبول انباشته‌های نامطلوب هست.

* اطلاعات محصول و فرایند تأثیری در نحوه تصمیم‌گیری ندارند.

* نیاز به برنامه‌ریزی و آموزش به کارکنان دارد و نسبت به بازرسی ۱۰۰% افراد کمتری درگیر آن هستند.

* نسبت به بازرسی ۱۰۰٪ دارای هزینه اجرا کمتری است.

* به دلیل برگشت کل انباشته به تأمین کننده (در بازرسی ۱۰۰٪ فقط معیوب‌ها برگردانده می‌شوند) در تأمین کننده انگیزه بهبود کیفیت را ایجاد می‌کند.

* اگر آزمایشی مخرب باشد یا هزینه بازرسی ۱۰۰٪ زیاد باشد یا بازرسی ۱۰۰٪ امکان پذیر نباشد یا تأمین کننده دارای سطح عملکرد خوبی باشد، بهتر است به جای بازرسی ۱۰۰٪ از نمونه‌گیری جهت پذیرش استفاده کنیم.

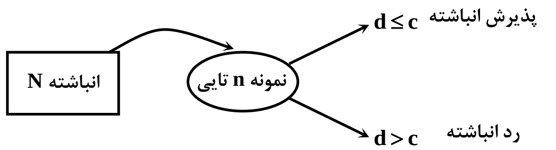
طرح نمونه‌گیری و رویه نمونه‌گیری

طرح نمونه‌گیری به شیوه نمونه‌گیری می‌گویند که شامل تعداد نمونه‌ها، اندازه نمونه‌ها و تعیین معیار رد یا پذیرش انباشته با توجه به نتایج گرفته شده از انباشته است. مانند: طرح یک بار نمونه‌گیری ـ طرح جفت نمونه‌گیری و ...

رویه نمونه‌گیری در واقع مجموعه‌ای از طرح‌های نمونه‌گیری است که با توجه به قواعدی که دارد در هر زمان از یکی از طرح‌ها استفاده می‌کند. مانند طرح‌های داج و رومینگ و استاندارد MIL STD 105E

طرح یک بار نمونه‌گیری (برای مشخصه کیفی وصفی)

اگر انباشته‌ای به اندازه‌ی N داشته باشیم و از آن نمونه‌ای به اندازه n بگیریم هر گاه تعداد معیوب در این نمونه از عدد C بیشتر شد انباشته رد می‌شود و اگر تعداد معیوب کوچکتر مساوی C بود انباشته پذیرفته می‌شود. اگر d تعداد معیوب در نمونه n باشد می‌توان این طرح را به صورت زیر نشان داد.



یک طرح یک بار نمونه‌گیری را با (N , n , C) نشان می‌دهند.

نکته ۲: شاخص مطلوب بودن یا غیر مطلوب بودن یک انباشته در واقع درصد اقلام ناسالم آن است که با p نشان داده می‌شود. ما اگر مقدار p را بخواهیم باید بازرسی ۱۰۰٪ کنیم با این کار می‌توانیم p را به دست آوریم، حال اگر این p از مقدار مطلوب بیشتر بود انباشته را رد کنیم و اگر از مقدار مطلوب کمتر بود انباشته را بپذیریم. ولی می‌دانیم که در اکثر مواقع بازرسی ۱۰۰٪ امکان پذیر یا اقتصادی نیست و به جای آن از نمونه‌گیری جهت پذیرش استفاده می‌کنیم که در نتیجه مقدار p برای ما مجهول است.

تذکر ۱: درست است که، ما مقدار p را نداریم ولی در طرح یک بار نمونه‌گیری با تعیین مقدار c و n می‌توانیم احتمال پذیرش انباشته را در هر سطح p تنظیم کنیم. یعنی می‌توان بیان کرد که اگر نسبت اقلام معیوب انباشته P_0 باشد با احتمال p_a آن را قبول خواهیم کرد. (p_a: احتمال پذیرش انباشته است).

احتمال پذیرش انباشته و منحنی OC

برای یک طرح یکبار نمونه‌گیری (N , n , c) می‌توان احتمال پذیرفتن انباشته (p_a) را برای هر مقدار p مشخص کرد. برای محاسبه مقدار p_a ابتدا نیاز داریم توزیع تعداد معیوب در نمونه یعنی d را بدست آوریم. همان طور که می‌دانید هر عضو انباشته دارای توزیع برنولی با پارامتر p است یعنی یا با احتمال p معیوب است و یا با احتمال $1-p$ سالم است. از طرفی نمونه‌گیری n تایی بی‌جایگذاری از جامعه محدود N تایی برنولی دارای توزیع فوق هندسی است.

احتمال $d \le c$ در توزیع فوق هندسی به صورت زیر است:

تعداد کل سالم‌ها در انباشته: $(1-p)N$

تعداد کل اقلام ناسالم: PN

$$p_a = p(\underset{\text{احتمال پذیرش انباشته برای مقادیر مختلف p}}{d \le c}) = \sum_{d=0}^{c} \frac{\binom{(1-p)N}{n-d}\binom{NP}{d}}{\binom{N}{n}} \qquad (1)$$

مثال۱: به منظور نمونه‌گیری جهت پذیرش از طرح یکبار نمونه‌گیری $n=10$ و $c=1$ برای انباشته‌ای ۲۰۰تایی استفاده می‌کنیم که در آن حدس زده می‌شود درصد معیوب ۰/۱ است. احتمال رد شدن انباشته توسط این طرح چه مقدار است؟

پاسخ:

$$P(\text{نپذیرفتن انباشته}) = P(d>1) = 1 - P(d=0) - P(d=1)$$

اگر از رابطه oc نوع A (توزیع فوق هندسی) استفاده کنیم:

$$\text{تعداد معیوب} = 200 \times 0/1 = 20$$

$$\text{تعداد سالم در انباشته} = 200 \times 0/9 = 180$$

$$P_r = 1 - \frac{\binom{180}{10}\binom{20}{0}}{\binom{200}{10}} - \frac{\binom{180}{9}\binom{20}{1}}{\binom{200}{10}}$$

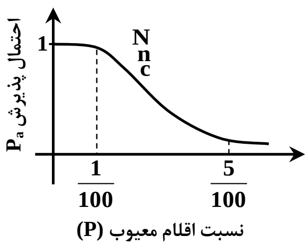
ولی محاسبه ترکیب‌های بالا کار دشواری است از درس احتمال می دانیم که هرگاه $\frac{N}{n} > ۰/۱$ (در توزیع فوق هندسی) باشد می‌توان بـا تقریـب خـوبی از توزیع دوجمله‌ای برای محاسبه احتمالات توزیع فوق هندسی استفاده کرد.

$$P(d>۱)=۱-\binom{۱۰}{۰}(۰/۱)^{۰}(۰/۹)^{۱۰}-\binom{۱۰}{۱}(۰/۱)(۰/۹)^{۹}=۱-۱/۹(۰/۹)^{۹}=۰/۲۶۳$$

و باز هرگاه مقدار n بزرگ باشد و مقدار p کوچک را می‌توان از تقریب پواسون به جای توزیع دوجمله‌ای استفاده کرد، که در آن پارامتر پواسون برابر np است.

$$P(d>۱)=۱-e^{-۱}-e^{-۱}=۱-۲e^{-۱}=۰/۲۶۴$$
$$\lambda=np=۰/۱\times۱۰=۱$$

منحنی OC



نموداری است که احتمال پذیرش را بر حسب نسبت اقلام معیوب (p) نشان می‌دهد. در طرح یکبار نمونـه‌گیری همان طوری که محاسبه کردیم رابطه نمودار oc از رابطه صفحه قبل پیروی می‌کند و به شکل روبرو اسـت. oc ای که از رابطه (۱) پیروی کند را منحنی oc **نوع A** می‌گویند.

با توجه به رابطه احتمال $p(d\le c)$ می‌توان دریافت که نمودار oc به سه پـارامتر (N , n , c) وابسـتگی دارد؛ در نتیجه برای هر طرح با یک بار نمونه‌گیری یک منحنی oc منحصر به فرد وجود دارد.

به طور مثال منحنی مقابل بیان می‌کند که اگر نسبت اقلام معیوب انباشته برابر ۰/۰۱ باشد با احتمال نزدیک به یک طـرح نمونـه‌گیری (N , n , c) آن را می‌پذیرد ولی اگر این نسبت p=۰/۰۵ باشد، احتمال کمی برای پذیرش انباشته وجود دارد.

ریسک تولیدکننده و ریسک مصرف کننده

به طور مثال در نمودار بالا اگر تمام انباشته‌هایی که نسبت اقلام معیوب آن‌ها از ۰/۰۴ بیشتر باشد، نامطلوب در نظر گرفته شوند به وضوح دیده می‌شود که انباشته‌هایی با p بیشتر از ۰/۰۴ هنوز احتمال پذیرش دارند؛ به این خطا، **خطای نوع دوم یا β** می‌گویند و در کنترل کیفیت بـه آن **ریسـک مصـرف کننده** می‌گویند، زیرا پذیرش انباشته نامطلوب به ضرر مصرف‌کننده است؛ به بیان دیگر مصرف کننده مایل است تمـام انباشـته‌های بـد در نمونـه‌گیری رد شوند، ولی این انباشته‌ها با احتمال β پذیرفته می‌شوند.

از طرف دیگر احتمال پذیرفتن انباشته‌هایی با نسبت معیوب کمتر از ۰/۰۴ هم یک نیست. به این معنا که احتمال رد شدن انباشته خوب نیز هست به این خطاء (در آمار) خطاء نوع اول می‌گویند و احتمال آن را با α بیان می‌دارند ولی در بحث نمونه‌گیری کنترل کیفیت به آن **ریسک تولید کننده** می‌گوینـد. زیرا تولید کننده انتظار دارد که انباشته‌های خوب در نمونه‌گیری، پذیرش شوند و اگر رد شوند متحمل ضرر خواهد شد.

منحنی OC نوع A و B

همان‌طور که بیان شد در نمونه‌گیری جهت پذیرش اندازه انباشته، محدود است و نمونه‌گیری بی‌جایگذاری است که این باعث می‌شود تعـداد معیوب‌هـا در نمونه nتایی (d) از توزیع فوق هندسی پیروی کند. اما اگر N نسبت به n بسیار بزرگ باشد می‌توان فرایند نمونه‌گیری، جهت پذیرش را یک نمونـه‌گیری از جامعه نامحدود در نظر گرفت در نتیجه توزیع d یک توزیع دو جمله‌ای خواهد شد و احتمال پذیرش به صورت زیر است:

$$p_a=p(d\le c)=\sum_{d=۰}^{c}\binom{n}{d}p^{d}(۱-p)^{n-d}$$

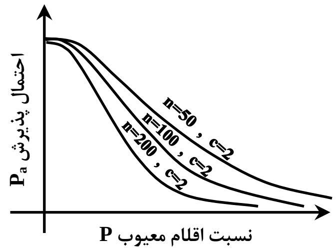
شرط مناسب بودن تقریب دو جمله‌ای: $\frac{n}{N}\le ۰/۱$ است، منحنی ocای که بر مبنای این معادله رسم می‌شود را oc نوع B می‌گویند.

نکته ۳: همان‌طور که از رابطه (۲) بر می‌آید در oc نوع B احتمال پذیرش تنها به c و n وابسته است و نه به N.

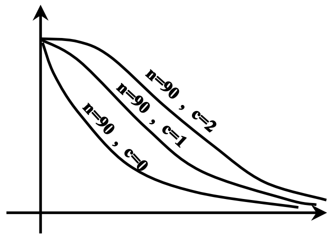
نکته ۴: oc نوع A همواره پایین‌تر از oc نوع B است، یعنی محاسبه تقریبی باعث می‌شود p_a بیشتر از مقدار واقعی نشان داده شود.

تذکر ۲: در محاسبات معمولاً از oc نوع B استفاده می‌شود زیرا محاسبه مقادیر p_a با کمک رابطه توزیع دو جمله‌ای بسیار ساده‌تر است.

تأثیر مقدار n و c بر روی منحنی oc



با افزایش مقدار n دقت طرح‌های یک بار نمونه‌گیری افزوده می‌شود و شیب منحنی oc بیشتر می‌شود در شکل زیر تأثیر افزایشی n را در شکل منحنی oc می‌بینیم افزایش n باعث می‌گردد که شیب منحنی oc بیشتر شود و oc به منحنی ایده‌آل (در بخش بعد توضیح داده می‌شود) نزدیک‌تر گردد.



از طرف دیگر اگر مقدار c را کاهش دهیم منحنی oc به سمت چپ حرکت می‌کند و طول قسمت افقی ابتدای نمودار کمتر می‌شود که در منحنی زیر نمایش داده شده است.

تذکر ۳: کم کردن مقدار c باعث می‌شود که بازرسی سخت‌گیرانه‌تر شود و احتمال رد انباشته‌ها بیشتر می‌شود و احتمال پذیرش کمتر، که این باعث می‌شود اگر مقدار n برای دو طرح ثابت باشد و $c_1 < c_2$ باشد منحنی oc طرح ۱ زیر منحنی oc طرح ۲ باشد.

مثال۲: در طرح یکبار نمونه‌گیری با $n = 30$ و $c = 2$ اگر اندازه انباشته‌ها بزرگ باشد و متوسط سطح درصد معیوب آن‌ها $0/05$ باشد درصورتی که عدد پذیرش از ۲ به ۱ تغییر پیدا کند، احتمال پذیرش چه مقدار تغییر خواهد کرد؟

پاسخ:

$$P_{1a} = p(d \le 2)$$

احتمالات را به کمک توزیع پواسون $\lambda = 1/5$ بدست می‌آوریم (جدول احتمال تجمعی پواسون در پیوست موجود است)

$$P_{1a} = 0/808$$

$$P_{2a} = p(d \le 1) = 0/557$$

همان‌طورکه دیده شد کاهش c باعث کاهش شدید P_a می‌شود.

حال اگر اندازه نمونه را از ۳۰ به ۵۰ افزایش دهیم P_a چه تغییری می‌کند؟

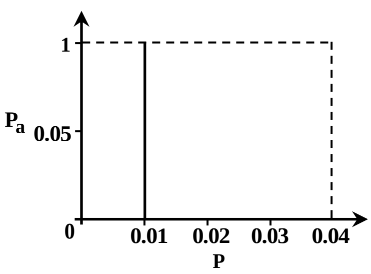
این تغییر باعث می‌شود که پارامتر توزیع پواسون تغییر کند.

$$P_a(\lambda = 1/5) = 0/808$$

$$p_a = (\lambda = 2/5) = 0/543$$

افزایش اندازه نمونه بدون تغییر در عدد پذیرش نیز باعث کاهش احتمال پذیرش خواهدشد.

منحنی OC ایده‌آل



همان طور که گفتیم ما علاقه داریم که تمام انباشته‌هایی را که نسبت اقلام معیوب آن‌ها از حد مشخص مانند p_0 بیشتر است را تشخیص دهیم و رد کنیم (یا به عبارت دیگر با احتمال پذیرش صفر قبول کنیم) و تمام انباشته‌هایی با $p < p_0$ را با احتمال ۱ بپذیریم. که در این صورت نمودار oc آن به صورت روبرو است. دست‌یابی به همچنین طرحی امکان‌پذیر نیست ولی ما باید سعی کنیم که تا حد امکان منحنی oc شبیه این طرح شود که این کار را با کمک تغییرات n و c که بیان شد انجام می‌دهیم.

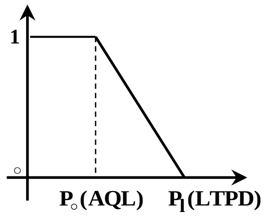
نکته ۵: البته منحنی oc ایده‌آل هنگامی که بازرسی ۱۰۰% باشد و در انجام آن خطاء رخ ندهد امکان پذیر است.

چون منحنی oc ایده‌آل، غیر قابل دستیابی است تعریف یک نسبت معیوب مانند p_0 برای انباشته، مطلوب بسیار ایده‌آل‌گرایی است. در عمل برای اینکه oc مطلوب دست‌یافتنی‌تر باشد، به جای یک سطح p مطلوب دو سطح نسبت اقلام معیوب تعریف می‌کنند مانند p_0, p_1 به صورتی که:

$p \le p_0 \leftarrow$ با احتمال ۱ انباشته پذیرفته شود؛

$p_0 < p < p_1 \leftarrow$ با توجه به مقدار p انباشته، احتمال پذیرش متفاوت است؛

$P_1 < P$ انباشته هرگز پذیرفته نشود؛



در این صورت شکل منحنی oc مطلوب به صورت شکل زیر است.

به نقطه‌ای که ما از آن کمتر را مطلوب می‌دانیم **AQL** می‌گویند. با دید دراز مدت AQL متوسط، حداکثر مقدار نسبت ناسالم برای انباشته‌های پذیرفتنی است.

به نقطه‌ای که از آن بیشتر را به سختی می‌پذیریم **LTPD** می‌گویند. LTPD سطحی از نسبت اقلام معیوب است که به هیچ وجه علاقه‌ای جهت پذیرش انباشته‌ای با $P = LTPD$ را نداریم.

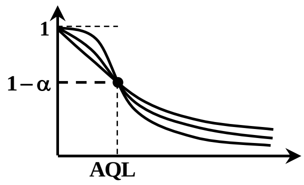
نکته ۶: تولید کننده همواره باید سعی کند که بهتر از AQL تولید کند تا رضایت مصرف کننده جلب شود به همین دلیل بـه آن AQL پـایین‌تـرین سطح کیفیت تأمین کننده نیز می‌گویند.

نکته ۷: AQL در منحنی oc، نقطه‌ای است که شیب منحنی تند می‌شود و از حالت تقریباً افقی در می‌آید.

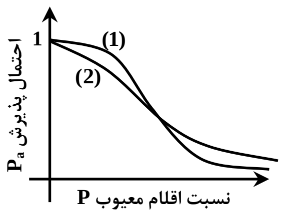
نکته ۸: اسامی دیگر LTPD ، RQL (سطح کیفیت قابل رد) و LQL (سطح کیفیت حدی) می‌باشد.

نکته ۹: AQL و LTPD به طرح نمونه‌گیری وابسته نیستند و تنها به فرایند تولید و خواسته مصرف کننده وابسته‌اند.

نکته ۱۰: افزایش n اثری بر روی α ندارد اما β را کاهش می‌دهد. پس با افـزایش یـا کـاهش n منحنی‌های OC مختلفی که به دست می‌آیند همگی باید از نقطه $(AQL, 1-\alpha)$ عبور کننـد. حال اگر n افزایش یابد باید منحنی قائم‌تر شده و β کاهش یابد. و اگر n کـاهش یابـد منحنـی پهن‌تر می‌شود و β افزایش می‌یابد.



مثال ۳: از دو منحنی oc زیر کدام یک طرح نمونه‌گیری بهتری دارد؟

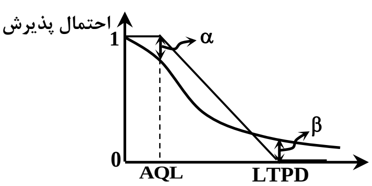


پاسخ: قطعاً منحنی ۱ طرح نمونه‌گیری بهتری از طرح نمونه‌گیری منحنی oc ، ۲ است زیرا برای مقادیر کم p احتمال پذیرش بیشتری دارد (می‌توان گفت $1-\alpha$ بیشتری دارد) و به ازای مقادیر زیاد p احتمال پذیرش آن از طرح ۲ کمتر است (می‌توان گفت β کمتری دارد).

از مثال بالا می‌توان نتیجه گرفت هر چه منحنی oc به منحنی oc ایده‌آل نزدیک‌تر باشد مطلوب‌تر است.

منحنی OC ایده آل و شاخص های AQLوLTPD

همان طور که پیش از این ذکر گردید منحنی OC ایده‌آل منحنی ای است که در آن انباشته‌هایی با نسبت اقلام معیوب کمتر از مقداری خاص(AQL) بـه احتمال ۱ پذیرش می شوند و انباشته های با نسبت اقلام معیوب، بیشتر از مقداری خاص(LTPD) با احتمال ۰ پذیرش می شوند.



AQL = بدترین کیفیت انباشته‌های پذیرفتنی.

LTPD= بهترین کیفیت انباشته‌های نپذیرفتنی.

* با افزایش n منحنی بالا به منحنی OC ایده‌آل نزدیک‌تر می‌شود.
* با کا هش عدد پذیرش، منحنی OC به منحنی OC ایده‌آل نزدیک‌تر می‌شود.
* AQL به فرایند تولید تأمین کننده بستگی دارد و بستگی به طرح نمونه‌گیری بستگی ندارد.

انتخاب طرح نمونه‌گیری یک بار نمونه‌گیری

برای انتخاب بهترین مقدار n و c سه فاکتور باید در نظر گرفته شوند.

۱- منحنی مشخصات عملیاتی (oc) ۲- ریسک تأمین‌کننده و مصرف کننده ۳- هزینه‌های اجرای روش

تذکر ۴: مقدار N در مواقعی که لازم هست معمولاً به ما تحمیل می‌شود و در دست ما نیست.

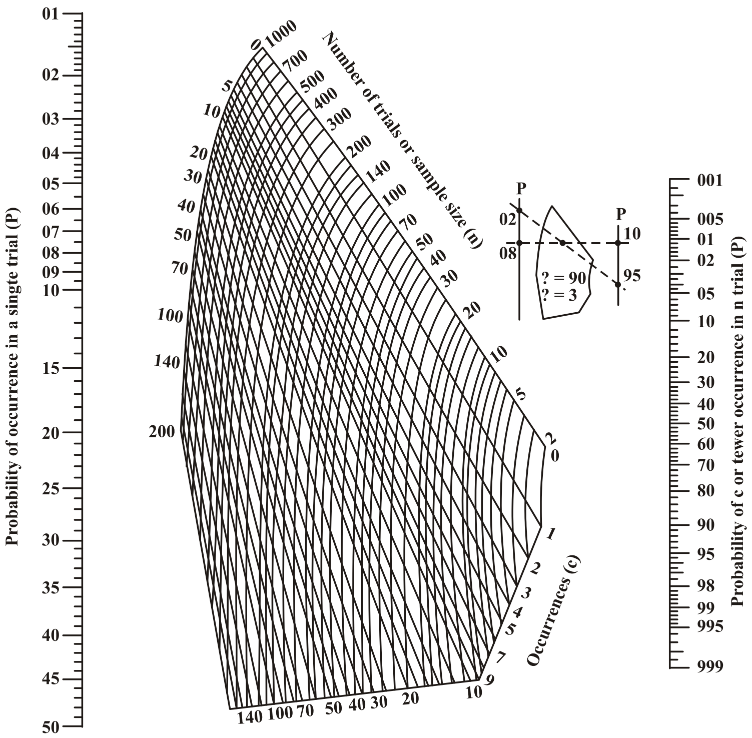
درباره منحنی مشخصه عملکرد (oc) و ارتباط آن با طرح نمونه‌گیری در بخش قبل صحبت شده در این‌جا قصد داریم ارتباط ریسک‌ها و نحوه انتخاب یـک طرح را با کمک آن دریابیم.

همان طور که بیان شد، ریسک تولید کننده در واقع یعنی احتمال رد انباشته با حداقل کیفیت قابل قبول (یعنی AQL) که آن را با α نشان می‌دهند. بـه عبارت دیگر تولید کننده می‌پذیرد که محموله‌ای که با کیفیت AQL تولید کرده با احتمال α رد شود.

از طرفی ریسک مصرف کننده یعنی احتمال پذیرش محموله با کیفیت LTPD که با β نشان داده می‌شود. ایـن یعنـی مصـرف کننـده می‌پـذیرد کـه بـا احتمال β امکان دارد محموله‌ای با کیفیت LTPD پذیرفته شود.

با توجه به این که نمودار oc احتمال پذیرش انباشته به ازای مقادیر مختلف p است می‌توان طرحی را متصور شد که oc آن از دو نقطـه (AQL و $1-\alpha$) و (LTPD و β) عبور کند. c و n با کمک رابطه oc نوع B و دو نقطه از oc به دست می‌آیند ولی به دلیل پیچیدگی محاسبات این کار را انجام نمی‌دهند و به جای آن از نمودار بینم استفاده می‌کنند.

روش کار با این نمودار به این صورت است که ابتدا باید مقادیر $(1-\alpha)$ و β را در محور سمت راست مشخص کرد و آن‌ها را به ترتیب به مقادیر AQL و LTPD در محور سمت چپ وصل نمود، محل تقاطع این دو خط، n و c مناسب برای نمونه‌گیری مطلوب را مشخص می‌کند.



نمودار بینم

عامل بعدی در انتخاب یک طرح نمونه‌گیری، هزینه است. دو مورد قبل را می‌توان در نمودارهای oc مشاهده کرد ولی هزینه‌ها در منحنی oc دیده نمی‌شوند. در ابتدای فصل نیز درباره ۳ دسته اصلی هزینه‌ها صحبت کردیم در این جا تنها به اختصار به نحوه محاسبه آن‌ها اشاره می‌شود.

(متوسط تعداد قطعه آزمایش شده از هر انباشته) × (هزینه هر بار آزمایش) = کل هزینه نمونه‌گیری

$(NP)\times$(هزینه عبور یک قطعه ناسالم)= کل هزینه عبور قطعات ناسالم

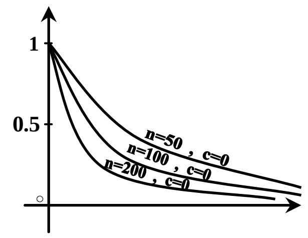
$(N(1-P))\times$(هزینه توقف قطعه سالم) =هزینه توقف قطعات سالم

طرح‌های خاص یکبار نمونه‌گیری

۱ـ عدد پذیرش برابر صفر

در این طرح‌ها انباشته تنها زمانی پذیرفته می‌شود که نمونه دارای هیچ معیوبی نباشد. همان‌طور که گفته شد هرگاه مقدار c کم شود منحنی oc به سمت چپ حرکت می‌کند و قسمت افقی ابتدای آن کم می‌شود، در حالت $c=0$ منحنی oc طرح دارای قسمت افقی نیست و منحنی کاملاً محدب است. به شکل زیر دقت کنید:

نکته ۱۱: تنها طرحی که منحنی oc آن محدب است طرح $c=0$ می‌باشد و بر عکس.



نکته ۱۲: معادله منحنی روبه‌رو به صورت $p_a=(1-p)^n$ می‌باشد که در آن p_a یک تابع نمایی با پایه $(1-p)$ است، که با افزایش عددنما، (n)، شیب آن بیشتر خواهد شد.

۲ـ اندازه نمونه درصد خاصی از اندازه انباشته

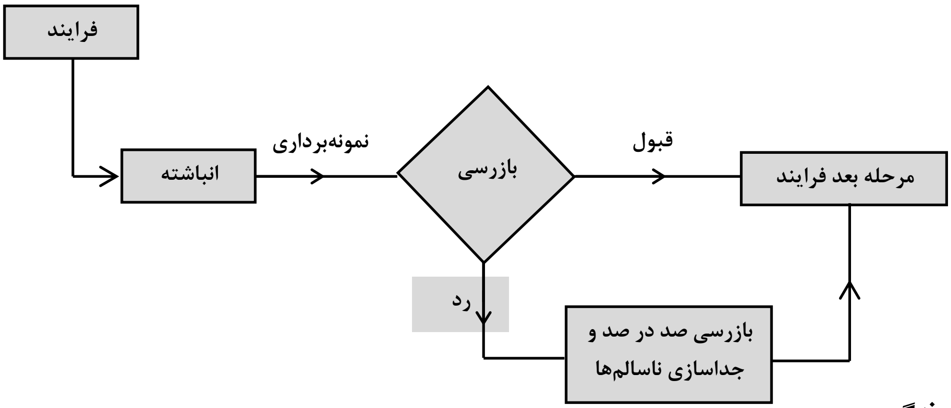
همان‌طور که مشخص است n را در این حالت برابر درصدی از N (مثلاً ۱۰%) فرض می‌کنیم، مشکل این‌گونه طرح‌ها این است که هر طرح یک منحنی oc جداگانه ندارد و با تغییر اندازه انباشته (N) احتمال پذیرش نیز تغییر می‌کند. این روش در گذشته رایج بوده است.

بازرسی اصلاحی (بازرسی غربالی)

تعریف: بازرسی اصلاحی به این معناست که هنگامی که یک انباشته توسط نمونه‌گیری جهت پذیرش رد می‌شود باید مورد بازرسی ۱۰۰% قرار بگیرد و اقلام معیوب آن جدا شود و با محصول سالم جایگزین شود.

نکته ۱۳: هدف برنامه‌های بازرسی اصلاحی در دراز مدت، اصلاح نمودن کیفیت انباشته است.

نکته ۱۴: بازرسی اصلاحی در بازرسی‌های داخل سازمان مرسوم است و برای مبادلات بین سازمانی توصیه نمی‌شود.



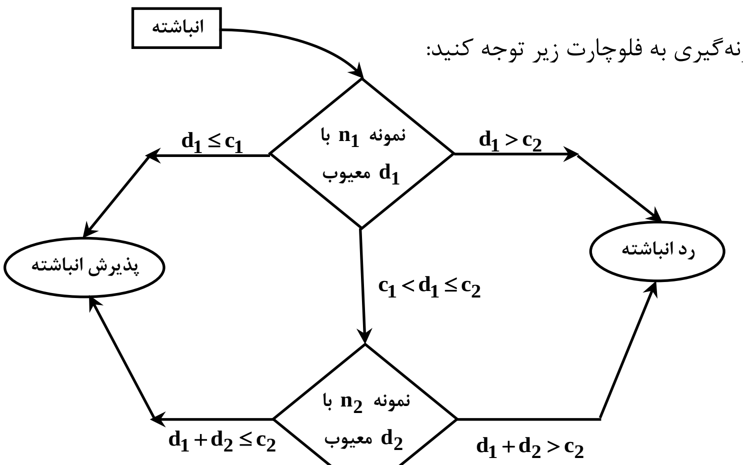
طرح‌های جفت نمونه‌گیری

در این طرح‌ها ابتدا از انباشته، یک نمونه n_1 تایی گرفته می‌شود اگر تعداد معیوب موجود در آن (d_1) از عدد تعیین شده c_1 کوچک‌تر یا مساوی $(d_1 \le c_1)$ بود، انباشته را می‌پذیریم، ولی اگر d_1 از عدد تعیین شده c_2 بزرگ‌تر بود $(d_1 > c_2)$ انباشته رد خواهد شد و اگر $c_1 < d_1 \le c_2$ باشد نمونه دوم که n_2 تایی است را از انباشته می‌گیریم، اگر d_2 تعداد معیوب نمونه دوم باشد آن‌گاه:

$d_1 + d_2 \le c_2$ پذیرش انباشته

$d_1 + d_2 > c_2$ رد انباشته

برای درک بهتر طرح‌های جفت نمونه‌گیری به فلوچارت زیر توجه کنید:



مثال ۴: انباشته‌ای به اندازه $N = 2000$ داریم توسط یه طرح دوبار نمونه‌گیری $n_1 = 10$ و $n_2 = 15$ و $c_2 = 4$ و $c_1 = 1$ قصد تصمیم‌گیری درباره آن را داریم (فرض کنید نسبت معیوب انباشته ۰/۱ باشد).

الف) اگر در نمونه اول ۲معیوب باشد چه تصمیمی می‌گیریم؟

☑ **پاسخ:** چون $c_1 < d_1 \le c_2$ است نمونه دوم باید گرفته شود.

ب) اگر در نمونه دوم ۲ معیوب پیداشود چه تصمیمی باید اخذ شود؟

☑ **پاسخ:** مجموع معیوب‌ها ۴ می‌شود و چون از c_2 بزرگ‌تر نیست انباشته پذیرفته خواهد شد.

ج) با توجه به بزرگ بودن N احتمال پذیرش توسط نمونه اول را محاسبه کنید.

☑ **پاسخ:** باید از توزیع دوجمله‌ای کمک گرفت.

$$P_a^I = P(d_1 \le 1) = P(d_1 = 0) + P(d_1 = 1) = \binom{10}{0}(0/1)^0(0/9)^{10} + \binom{10}{1}(0/1)(0/9)^9 = 0/73$$

د) احتمال تصمیم‌گیری با کمک نمونه اول را بدست آورید.

☑ **پاسخ:**

$$P^I = P_a^I + P_r^I = 1 - P(2 \le d_1 \le 4) = 1 - \left[P(d_1 = 2) + P(d_1 = 3) + P(d_1 = 4)\right] = 1 - \left[\begin{matrix}\binom{10}{2}(0/1)^2(0/9)^8 + \binom{10}{3}(0/1)^3(0/9)^7 + \\ \binom{10}{4}(0/1)^4(0/9)^6\end{matrix}\right] = 0/11$$

ه) احتمال پذیرش توسط نمونه دوم چقدر است؟

☑ **پاسخ:**

$$P_a^{II} = P(d_1 = 2)\times P(d_2 \le 2) + P(d_1 = 3)P(d_2 \le 1) + P(d_1 = 4)P(d_2 \le 0)$$

می‌توان برای احتمال‌های تجمعی از جدول احتمالات تجمعی دوجمله‌ای یا با تقریب خوبی از جدول پواسون استفاده کرد.

توزیع پواسون متناظر با نمونه‌گیری اول دارای پارامتر $\lambda = np = 10\times 0/1 = 1$ است و توزیع پواسون برای نمونه‌گیری دوم دارای پارامتر $\lambda = 15\times 0/1 = 1/5$ است.

$$P_a^{II} = \frac{e^{-1}1^2}{2!}\times(0/8) + \frac{e^{-1}1^3}{3!}(0/93) + \frac{e^{-1}1^4}{4!}(0/98) = 0/21$$

و) اگر $AQL = 0/02$ باشد خطای نوع اول را محاسبه کنید.

☑ **پاسخ:** احتمال رد شدن انباشته در نسبت معیوب $0/02$ مورد نظر است.

$$P_r^{I} = p(d_1 \ge 5) =$$

$$P_r^{II} = P(d_1 = 2)P(d_2 \ge 3) + P(d_1 = 3)P(d_2 \ge 2) + P(d_1 = 4)P(d_2 \ge 1)$$

توزیع پواسون نمونه اول دارای پارامتر $\lambda_1 = 10\times 0/02 = 0/2$ و نمونه دوم $\lambda_2 = 15\times 0/02 = 0/3$ است.

$$P_r^{I} = 1 - 1 \simeq 0$$

$$P_r^{II} = \frac{e^{-0/2}\,0/2^2}{2!}(1 - 0/963) + \frac{e^{-0/2}\,0/2^3}{3!}(1 - 0/74) + \frac{e^{-0/2}\,0/2^4}{4!} + \frac{e^{0/3}\,0/3}{0!} = 0/001$$

ز) اگر $LPTD = 0/25$ باشد خطای نوع دوم را محاسبه کنید.

احتمال پذیرش انباشته با نسبت معیوب $0/25$ مورد سوال است.

☑ **پاسخ:**

$$\lambda_1 = 10\times 0/25 = 2/5\ ,\ \lambda_2 = 15\times 0/25 = 3/75$$

$$P_a^{I} = P(d_1 \le 1) = 0/287$$

$$p_a^{II} = P(d_1 = 2)P(d_2 \le 2) + P(d_1 = 3)P(d_2 \le 1) + P(d_1 = 4)P(d_2 = 0) =$$

$$\frac{e^{-2/5}(2/5)^2}{2!}(0/320) + \frac{e^{-2/5}(2/5)^3}{3!}(0/135) + \frac{e^{-2/5}(2/5)^4}{4!}(0/03) = 0/114$$

منحنی OC طرح های جفت نمونه گیری

برای رسم منحنی oc باید احتمال پذیرش P_a را محاسبه کرد:

P_a^{I} : احتمال پذیرش توسط نمونه اول

$$P_a^{I} = P(d_1 \le c_1)$$

$$P_a = P_a^{I} + P_a^{II}$$

P_a^{II}: احتمال پذیرش توسط نمونه دوم

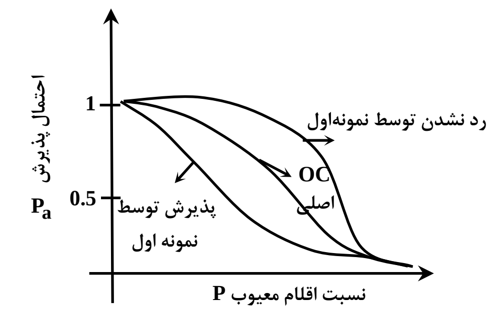
$$P_a^{II} = P(d_1 + d_2 \le c_2 \mid c_1 < d_1 \le c_2)$$

با استفاده از قانون ضرب می‌توان P_a^{II} را به صورت مقابل محاسبه کرد:

$$P_a^{II} = \sum_{i=c_1+1}^{c_2} P(d_1 = i)P(i + d_2 \le c_2)$$

احتمالات بالا از توزیع دو جمله‌ای پیروی می‌کنند ولی می توان برای محاسبه احتمالات مختلف با تقریب خوبی (وقتی n زیاد و p کم) از توزیع پواسون استفاده کرد.

در طرح‌های جفت‌گیری منحنی‌های oc از یک منحنی oc اصلی (P_a) و دو منحنی احتمال رد نشدن بر اساس نمونه اول و پذیرش بر اساس نمونه اول تشکیل شده‌است.



نکته ۱۵: منحنی OC طرح یکبار نمونه‌گیری و طرح جفت نمونه‌گیری را می‌توان طوری تنظیم کرد که مانند همدیگر شوند یعنی خطای نوع اول و دوم برابری داشته باشند. در نتیجه از این لحاظ فرقی با یکدیگر ندارند.

مقایسه طرح‌های یکبار نمونه‌گیری و جفت نمونه‌گیری

۱ـ برترین مزیت یک طرح جفت نمونه‌گیری امکان کاهش تعداد کل بازرسی‌ها است؛ به این معنا که اگر در نمونه اول بتوان برای انباشته تصمیم‌گیری کرد دیگر نیازی به برداشتن نمونه دوم نیست یا از بازرسی کوتاه‌شده استفاده شود به نحوی که قبل از پایان گرفتن، تمام نمونه دوم انباشته رد شود.

۲ـ مزیت دیگر روش جفت نمونه‌گیری، برتری روحی است بدین صورت که اگر انباشته در مرحله اول پذیرفته نشد می‌تواند یک شانس دیگر داشته باشد؛ قابل ذکر است که در واقع هیچ تفاوتی بین طرح یکبار نمونه‌گیری یا جفت نمونه‌گیری از این لحاظ وجود ندارد (یعنی برتری واقعی‌ای وجود ندارد).

۳ـ عیب طرح جفت نمونه‌گیری این است که از لحاظ اجزاء و آموزش به کارکنان پیچیده تر است و هزینه بیشتری دارد و گاهی باعث زیاد شدن خطاهای بازرسی می‌گردد.

۴ـ برخی اوقات این امکان وجود دارد که تعداد واحدهای بازرسی شده در طرح جفت نمونه‌گیری بیشتر از طرح یک‌بار نمونه‌گیری شود.

تذکر۵: در طرح‌های جفت نمونه‌گیری مجموع نمونه‌ها $(n_1 + n_2)$ بزرگ‌تر مساوی اندازه نمونه (n) طرح یکبار نمونه‌گیری با ریسک‌های معادل است.

اکنون می توانیم به معرفی شاخص های انتخاب طرح ها بپردازیم ، ولی پیش از آن نیاز است که خواننده باید با برخی نکات تحلیلی که به صورت کلی برای پاسخ گویی به تست های تمامی بخش هایی که در ادامه معرفی می کنیم آشنایی داشته باشد:

چند نکته اساسی برای پاسخ گفتن به سؤالاتی که اثرات تغییر پارامتری را بر روی پارامترهای دیگر بررسی می‌کند:

ممکن است این موارد مستقیماً سؤال نشوند اما پیش‌زمینه پاسخ‌گویی به سؤالات پارامتری کنکور می‌باشد.

* افزایش اندازه انباشته (N) هیچ تأثیری بر روی P_a ندارد.
* اگر P_a را به α و β تفکیک کنیم ، می‌دانیم برای($P_a = \alpha \Leftarrow P = 0$) و برای سایر مقادیر P $(P_a = \beta)$.
* افزایش اندازه نمونه (n) باعث کاهش β می‌شود.
* افزایش اندازه نمونه (n) هیچ تأثیری بر روی α ندارد.
* افزایش عدد پذیرش (طرح یکبار نمونه‌گیری) P_a را افزایش می‌دهد.

معیار و شاخص های انتخاب طرح ها

برای آنکه بتوان بین طرح‌های مختلف نمونه‌گیری، یک طرح مناسب را انتخاب کرد شاخص‌هایی جهت مقایسه تعریف می‌کنند.

۱ـ متوسط تعداد نمونه ASN

در طرح‌های یک‌بار نمونه گیری همواره اندازه نمونه n ثابت است ولی در طرح جفت نمونه‌گیری اگر توسط نمونه اول تصمیم‌گیری کنیم n_1 تا نمونه گرفته‌ایم و اگر توسط نمونه اول نتوانیم تصمیم بگیریم $n_1 + n_2$ عدد نمونه خواهیم گرفت. پس در طرح جفت نمونه‌گیری داریم:

$$ASN = n_1 P_I + (n_1 + n_2)(1 - P_I)$$

که در این رابطه P_I یعنی احتمال تصمیم‌گیری توسط نمونه اول

$$P_I = P\ (\text{پذیرش انباشته توسط نمونه اول}) + P\ (\text{رد انباشته توسط نمونه اول})$$
$$= P(d_1 > c_2) + P(d_1 \le c_1)$$

که با تقریب مناسبی می توان برای محاسبه احتمال از جدول توزیع تجمعی پواسون بهره گرفت.

در طرح‌های جفت نمونه‌گیری گاهی مفهومی به نام بازرسی کوتاه شده به کار می‌رود که باعث تغییرمقدار ASN می شود. در زیر به این مفهوم اشاره می‌شود.

تعریف بازرسی کوتاه شده:

اگر نمونه دوم را تنها تا جایی ادامه دهیم که تعداد معیوب‌های کل $(d_1 + d_2)$ از c_2 بیشتر شود به آن بازرسی کوتاه شده می‌گویند. یعنی هر عضو نمونه دوم را در هنگام برداشت از انباشته بررسی می‌کنیم و اگر معیوب بود به عدد d_1 یک واحد می‌افزاییم هرگاه تعداد کل معیوب ها بیشتر از c_2 شد از نمونه‌برداری دست می‌کشیم.

نکته ۱۶: رابطه ASN برای طرح جفت نمونه‌گیری با بازرسی کوتاه شده

$$ASN = n_1 + \sum_{j=c_1+1}^{c_2} P(n_1, j)\left[n_1 P_L(n_2, c_2 - j) + \frac{c_2 - j + 1}{p} p_m(n_2 + 1, c_2 - j + 2)\right]$$

$P(n_1, j)$ احتمال مشاهده j واحد معیوب در n_1 واحد نمونه

$P_L(n_2, c_2 - j)$ احتمال $c_2 - j$ واحد یا کمتر معیوب در نمونه n_2 تایی

$P_m(n_2 + 1, c_2 - j + 2)$ احتمال مشاهده $c_2 - j + 2$ واحد معیوب در نمونه به اندازه $n_2 + 1$

مثال۵: اگر طرح جفت نمونه‌گیری $(n_۱ = ۵, n_۲ = ۱۰, c_۱ = ۲, c_۲ = ۴)$ را برای انباشته‌ای پیاده کنیم درصورتی‌که احتمال گرفتن نمونه دوم ۰/۳ باشد مقدار ASN را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$ASN = P^I n_۱ + (۱ - P^I)(n_۱ + n_۲) = ۰/۷ \times ۵ + ۰/۳ \times ۱۵ = ۸$$
$$P^I = ۱ - ۰/۳ = ۰/۷$$

دیده می‌شود که مقادیر $c_۱, c_۲$ کاملاً بلا استفاده‌اند.

در سؤال بالا اگر نسبت اقلام معیوب ۰/۲ باشد ASN چه قدر است؟

پاسخ:

$$P(\text{پذیرش توسط نمونه اول}) + P(\text{رد توسط نمونه اول}) = P(d_۱ \le ۲) + P(d_۱ = ۵)$$
$$= \binom{۵}{۰}(۰/۲)(۰/۸)^۵ \binom{۵}{۱}(۰/۲)^۱(۰/۸)^۴ + \binom{۵}{۲}(۰/۲)^۲(۰/۸)^۳ + \binom{۵}{۵}(۰/۲)^۵ = ۰/۹۴۲$$
$$ASN = ۰/۹۴ \times ۵ + ۰/۰۶ \times ۱۰ = ۵/۳$$

روش دوم استفاده از توزیع پواسون با $\lambda = ۱$ و جدول توزیع تجمعی آن در پیوست است.

$$P(d_۱ \le ۲) + \frac{e^{-۱}۱^۵}{۵!} = ۰/۹۱۹ + ۰/۰۰۳ = ۰/۹۲۲$$
$$ASN = ۰/۹۲ \times ۵ + ۰/۰۸ \times ۱۰ = ۵/۴$$

که تفاوت چندانی در جواب آخر دیده نمی‌شود.

نکته۱۷:

بررسی اثر افزایش یا کاهش متغیرها بر شاخص ASN:

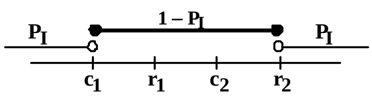
همان‌طور که پیش از این ذکر گردید متوسط تعداد نمونه‌ها (ASN) از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند:

طرح‌های یکبار نمونه‌گیری $\Leftarrow$ $\mathbf{ASN = n}$

طرح‌های جفت نمونه‌گیری $\leftarrow$ $\mathbf{ASN = n_۱ + n_۲ + (۱ - P_I)}$

احتمال تصمیم‌گیری به وسیله نمونه اول

با توجه به رابطه‌ی ASN می‌توان نکات زیر را در رابطه با اثر تغییرات سایر پارامترها بر شاخص ASN ارائه داد:



* زمانی تصمیم‌گیری به وسیله نمونه اول انجام می‌شود که تعداد ناسالم در نمونه اول کوچکتر مساوی $c_۱$ یا بزرگتر مساوی $r_۲$ باشد.
* در یک طرح یکبار نمونه‌گیری با افزایش اندازه نمونه، ASN افزایش می‌یابد .
* در طرح‌های جفت نمونه‌گیری و یکبار نمونه‌گیری افزایش اندازه انباشته هیچ تأثیری بر ASN ندارد.
* می‌توانیم فضای P_I و $(۱ - P_I)$ را به صورت شکل فوق مشخص کنیم. (با فرض $r_۱ < c_۲$).

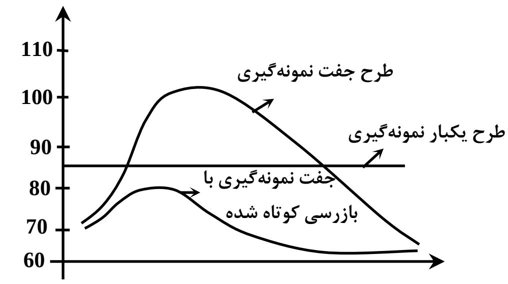
به دلیل داشتن این شکل می‌توان به سؤالات مربوط به اثر تغییرات $c_۱, c_۲, r_۱, r_۲$، بر روی ASN پاسخ داد.

به عنوان مثال همان گونه که از شکل پیداست با افزایش $r_۲$، P_I کاهش می‌یابد و در نتیجه $(۱ - P_I)$ افزایش می‌یابد، با توجه به رابطه ASN می‌توان نتیجه گرفت که ASN افزایش می‌یابد:

$$ASN\uparrow \Leftarrow (۱ - P_I)\uparrow \leftarrow \downarrow P_I \Leftarrow r_۲\uparrow$$
$$r_۲\uparrow \Rightarrow P_I\downarrow \Rightarrow (۱ - P_I)\uparrow \Rightarrow ASN\uparrow$$

مقایسه ASN در طرح‌های مختلف

برای مقایسه طرح‌های مختلف از نمودار ASN بر اساس مقدار P (نسبت اقلام معیوب) استفاده می‌شود. به نمودار مقابل دقت کنید:



توضیحاتی در رابطه با منحنی‌های ASN

ـ همان‌طور که در شکل مشخص است بازرسی کوتاه شده باعث می‌گردد متوسط تعداد نمونه از طرح یکبار نمونه‌گیری و طرح جفت نمونه‌گیری معمولی، کمتر شود.

ـ اگر از بازرسی کوتاه شده استفاده نشود، برای تصمیم‌گیری بین طرح یکبار نمونه‌گیری و جفت نمونه‌گیری باید به مقدار درصد اقلام معیوب توجه کنیم. در درصد معیوب‌های کم و درصدهای بالا طرح یک‌بار نمونه‌گیری دارای متوسط تعداد نمونه بیشتری نسبت به طرح جفت نمونه‌گیری است، ولی دربازه میانی P طرح یک‌بار نمونه‌گیری بهتر است.

تذکر۶: دلیل استفاده شکل منحنی ASN بر حسب P طرح جفت نمونه‌گیری این است که در مقادیر کم P، انباشته با احتمال زیادی در نمونه اول پذیرفته می‌شود و در مقادیر زیاد P، انباشته با احتمال زیادی در نمونه‌گیری اول رد می‌شود که در هر صورت برای انباشته در نمونه اول تصمیم‌گیری می‌شود و نیازی به برداشت نمونه دوم نیست.

مثال۶: اگر یک طرح جفت نمونه‌گیری با مشخصات زیر داشته باشیم که اندازه نمونه طرح یکبار نمونه‌گیری معادل آن $n = 8$ باشد:

$$n_1 = 5 \quad , c_1 = 1$$
$$n_2 = 10 \ , c_2 = 4$$

در چه بازه‌ای از احتمال تصمیم‌گیری توسط نمونه اول، طرح یکبار نمونه‌گیری ارجعیت دارد؟

☑ **پاسخ:**

$$8 < P^I n_1 + (1-P^I)(n_1+n_2) = 5x + 15(1-x)$$
$$\Rightarrow 8 < 15 - 10x \rightarrow 10x \le 7 \rightarrow x \le 0/7 \rightarrow P^I \le 0/7$$

احتمال تصمیم‌گیری توسط نمونه اول باید از $0/7$ کوچک‌تر باشد تا طرح یکبار نمونه‌گیری انتخاب شود. دو معیار بعدی تنها در بازرسی اصلاحی معنا پیدا می‌کنند.

۲ـ متوسط کیفیت خروجی AOQ

AOQ درصد اقلام معیوب، بعد از انجام عمل نمونه‌گیری با بازرسی اصلاحی است، که می‌توان آن را برای انواع طرح‌ها مانند یکبار نمونه‌گیری، جفت نمونه‌گیری و نمونه‌گیری پی در پی محاسبه کرد.

AOQ طرح یکبار نمونه‌گیری

در صورتی که P درصد معیوب انباشته باشد، اگر در نمونه‌گیری انباشته پذیرفته شود، در خروجی آن n تعداد صفر درصد معیوب دارند و N-n تای آن P درصد معیوب دارد ولی اگر انباشته رد شود برای همه N انباشته بازرسی اصلاحی انجام می گیرد و صفر درصد معیوب خواهد داشت پس:

درصد بررسی نشده‌ها — درصد بررسی شده‌ها — درصد بررسی شده‌ها

$$AOQ = \underbrace{P_a\left(P \times \frac{N-n}{N} + 0 \times \frac{n}{N}\right)}_{\text{در صورت پذیرش انباشته}} + \underbrace{(1-P_a)\left(0 \times \frac{N}{N}\right)}_{\text{در صورت رد انباشته و بازرسی اصلاحی}} = P_a P\left(\frac{N-n}{N}\right)$$

نکته ۱۸: اگر در دراز مدت از طرح بازرسی اصلاحی استفاده شود متوسط کیفیت انباشته‌ها پس از بازرسی برابر AOQ است.

مثال۷: با یک طرح یکبارنمونه‌گیری (۲،۱۰) انباشته‌ای که نسبت اقلام معیوب آن $0/2$ است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در صورت وجود بازرسی اصلاحی درصد معیوب مورد انتظار انباشته خروجی چه قدر است؟

☑ **پاسخ:**

$$P = 0/2, n = 10, c = 2$$

$$P_a = P(d_1 \le 2) = \binom{10}{0}(0/8)^{10} + \binom{10}{1}(0/2)(0/8)^9 + \binom{10}{2}(0/2)^2(0/8)^8$$

$$\xrightarrow[\lambda = 2]{\text{تقریب پواسون}} P_a = e^{-2} + 2^{-e} + \frac{2^2}{2!}e^{-2} = 5e^{-2} = 0/67$$

$$AOQ = P_a P \times \frac{N-n}{N} \simeq P_a P = ۰/۶۷ \times ۰/۲ = ۰/۱۳$$

$N \to +\infty$

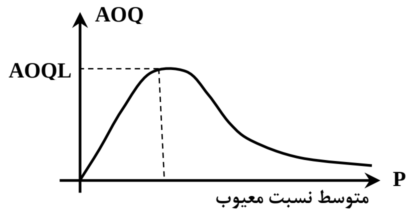
چون مقدار اندازه انباشته داده نشده فرض می‌کنیم که نسبت به n مقدار بسیار بزرگی است و به بی‌نهایت میل می‌کند که در این صورت رابطه AOQ به $P_a P$ تبدیل می‌شود.

✓ تحلیل تغییرات AOQ نسبت به P

اگر نسبت اقلام معیوب انباشته کم باشد، احتمال پذیرش زیاد است در نتیجه مقدار AOQ کم است (اندکی از P بهتر خواهد شد) و اگر نسبت اقلام معیوب (P) زیاد باشد احتمال رد انباشته و وقوع بازرسی اصلاحی زیاد خواهد شد که این نیز باعث می‌شود مقدار AOQ کم باشد (خیلی از مقدار P بهتر باشد).

منحنی AOQ در میان این دو انتها دارای یک نقطه ماکزیمم است که آن را با $AOQL$ نشان می‌دهند. مقدار $AOQL$ از این لحاظ قابل اهمیت است که در یک روش با بازرسی اصلاحی هر چه نسبت اقلام معیوب زیاد شود، متوسط نسبت معیوب خروجی، از این حد بیشتر نمی‌شود. این معیار می‌تواند به راحتی برای مقایسه طرح‌ها استفاده شود.

نکته ۱۹: مقدار $AOQL$ به این معنا نیست که هیچ گاه نسبت اقلام معیوب خروجی از آن بیشتر نمی‌شود بلکه متوسط این نسبت همواره از آن کمتر است.



ب) AOQ در طرح جفت نمونه‌گیری

برای محاسبه AOQ همانند طرح یکبار نمونه‌گیری تحلیل می‌کنیم. ابتدا گزاره‌های زیر را باید بپذیریم:

ـ در هر مرحله که انباشته رد شود به دلیل بازرسی اصلاحی همه‌ی انباشته (N) بازرسی ۱۰۰% می‌شود و معیوب‌ها با نمونه سالم جایگزین می‌گردند. پس نسبت معیوب آن صفر خواهد شد،که در محاسبات آورده نمی‌شود.

ـ اگر انباشته در نمونه‌گیری اول پذیرفته شود $\frac{N-n_1}{N}$ درصد از انباشته دارای نسبت معیوب P است.

ـ اگر انباشته در نمونه‌گیری دوم پذیرفته شود $\frac{N-n_1-n_2}{N}$ درصد از انباشته دارای نسبت معیوب P است و n_1+n_2 که مورد بازرسی قرار گرفته‌اند معیوب ندارند.

$$AOQ = P_a^I\left(\frac{N-n_1}{N}\right)P + P_a^{II}\left(\frac{N-n_1-n_2}{N}\right)P = \frac{P\left(P_a^I(N-n_1)+P_a^{II}(N-n_1-n_2)\right)}{N}$$

نکته ۲۰: همواره در تمام طرح‌ها به دلیل انجام بازرسی $AOQ < P$ است.

نکته ۲۱: اگر مقدار N نسبت به اندازه نمونه زیاد باشد آنگاه $AOQ = P_a P$ (چه در طرح یکبار نمونه‌گیری و چه در طرح جفت نمونه‌گیری یا حتی طرح نمونه‌گیری پی‌درپی).

مثال۸: اگر انباشته‌ای با $N = ۴۰۰$ را با کمک طرح جفت نمونه‌گیری که در آن $n_1 = ۳۰$ و $n_2 = ۵۰$ است مورد بررسی قراردهیم و متوجه شویم منحنی oc اصلی آن از نقطه (۰/۸ ,۰/۱) عبور می‌کند در حالی‌که احتمال پذیرفته‌شدن انباشته توسط نمونه دوم ۰/۳۵ است، آنگاه متوسط کیفیت انباشته خروجی چند است؟

☑ **پاسخ:** احتمال پذیرش انباشته با کیفیت ۰/۱ برابر ۰/۸ است یعنی:

$$P_a^{II} + P_a^{I} = ۰/۸$$

$$P_a^{II} = ۰/۳۵ \Rightarrow P_a^{I} = ۰/۴۵$$

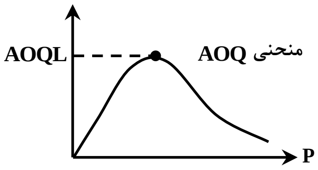
$$AOQ = \frac{P(P_a^I(N-n_1)+P_a^{II}(N-n_1-n_2))}{N} = ۰/۱\frac{(۰/۴۵(۴۰۰-۳۰)+۰/۳۵(۴۰۰-۸۰))}{۴۰۰} = ۰/۰۷$$

نکته۲۲:

بررسی اثر افزایش یا کاهش متغیرها بر شاخص AOQ:

با توجه به رابطه‌ی $AOQ = \frac{PaP(N-n)}{N}$ می‌توان نکات زیر را در رابطه با اثر تغییرات سایر پارامتر ها بر شاخص AOQ ارائه داد:

* با افزایش P ابتدا AOQ افزایش می‌یابد تا به حد بالای خود $(AOQL)$ برسد و سپس کاهش می‌یابد.
* با کاهش P_a ابتدا AOQ افزایش می‌یابد تا به حد بالای خود $(AOQL)$ برسد و سپس کاهش می‌یابد.
* با افزایش $N \rightarrow AOQ \uparrow$
* با افزایش $n \rightarrow AOQ \downarrow$
* $AOQL$ مستقل از P است.



$AOQ: \; N \gg n \Rightarrow AOQ = P_a P$

نسبت اقلام معیوب انباشته‌های ورودی P > نسبت اقلام معیوب انباشته‌های خروجی AOQ

۳ـ متوسط کل بازرسی ATI

متوسط واحدهایی که باید آزمایش شوند تا فرایند بازرسی تمام شود. این معیار تنها زمانی معنا دارد که از بازرسی اصلاحی استفاده شود.

ـ اگر بازرسی اصلاحی وجود نداشته باشد این معیار همان ASN است ولی اگر وجود داشته باشد ATI .

ـ معیار ATI به نوع طرح نمونه‌گیری و احتمال پذیرش . اندازه نمونه‌ها و انباشته بستگی دارد.

✓ **معیار ATI برای طرح یکبار نمونه‌گیری**

اگر محموله پذیرفته شود (با احتمال P_a) فقط nواحد بازرسی می‌شود ولی اگر انباشته با احتمال $(1-P_a)$ رد شود به دلیل وجود بازرسی اصلاحی کل آن (N) بازرسی می‌شود.

$$ATI = P_a n + (1-P_a)N$$

یا

$$ATI = n + (1-P_a)(N-n)$$

مثال۹: فرض کنید انباشته‌هایی به اندازه $N = 3000$ به وسیله طرح یکبار نمونه‌گیری $c = 2, n = 150$ بازرسی می‌شوند، اگر نسبت اقلام معیوب انباشته ۰/۰۲باشد معیار ATI در صورت بازرسی اصلاحی را بدست آورید.

☑ **پاسخ:**

$$ATI = P_a n + (1-P_a)N$$

چون P کوچک و n بزرگ است از توزیع تجمعی پواسون $\lambda = np$ استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} P_a = P(d \le 2) \\ \lambda = np = 0/02 \times 150 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow P_a = 0/42$$

$$ATI = 0/42 \times 150 + 0/58 \times 3000 = 1803$$

معیار ATI برای طرح‌های جفت نمونه‌گیری

به راحتی مانند حالت یکبار نمونه‌گیری می‌توان تحلیل را انجام داد. اتمام فرایند به ۳ طریق زیر می‌باشد:

۱ـ در نمونه اول انباشته پذیرفته شود با احتمال $P_a^I \xrightarrow{\text{تعداد بازرسی شده}} n_1$

۲ـ در نمونه دوم انباشته پذیرفته شود با احتمال $P_a^{II} \xrightarrow{\text{تعداد بازرسی شده}} n_1 + n_2$

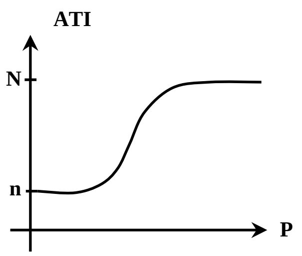
۳ـ انباشته رد شود (چه در نمونه اول و چه در نمونه دوم) با احتمال $1 - p_a^I - p_a^{II} \xrightarrow[\text{به دلیل بازرسی اصلاحی}]{\text{تعداد بازرسی شده}} N$

$$ATI = P_a^I n_1 + P_a^{II}(n_1 + n_2) + (1 - P_a^I - P_a^{II})N$$

نکته ۲۳: منحنی ATI نسبت به P (نسبت اقلام معیوب)

همان‌طور که می‌دانیم هرچه P افزایش یابد احتمال پذیرش P_a کاهش خواهد یافت و با توجه به رابطه ATI طرح‌های جفت نمونه‌گیری و یک‌بار نمونه‌گیری، کاهش P_a باعث افزایش ATI می‌شود.

برای طرح یکبار نمونه‌گیری منحنی $P-ATI$ به صورت روبه‌رو است.



تذکر۷: هنگامی که $P \to ۱$ میل می‌کند ATI بـه سـمت N مـی‌رود در نتیجـه در طـرح یکبـار نمونـه‌گیری $n < ATI < N$ و در طـرح جفـت نمونه‌گیری $n_۱ < ATI < N$

نکته ۲۴: رابطه ATI و AOQ :

می‌توان برای رابطه AOQ تعریف زیر را ارائه داد.

$AOQ =$ (متوسط درصد ناسالم خروجی) درصد معیوب ورودی انباشته × متوسط درصد محصولات بازرسی نشده $= p \times (۱ - \frac{ATI}{N})$

مثال۱۰: در یک طرح جفت نمونه‌گیری وقتی $n_۱ = ۲۰, n_۲ = ۵۰$ است در یک انباشته با $N = ۳۰۰$ احتمال رد انباشته توسط نمونـه اول ۰/۰۵ و احتمال پذیرش توسط آن ۰/۶ می‌باشد اگر انباشته‌هایی که به نمونه دوم می‌رسند با شانس ۰/۷ پذیرفته شوند،آن‌گاه در صورت وجود بازرسی اصلاحی، ATI چه مقدار خواهد بود؟

☑ **پاسخ:** برای محاسبه ATI نیاز به احتمالات پذیرش توسط نمونه اول و پذیرش توسط نمونه دوم داریم.

$$P_a^{II} = P_a^I + P_r^I + P$$

$$P_a^I + P_r^I + P\text{(گرفتن نمونه دوم)} = ۱ \Rightarrow ۱ - ۰/۶ - ۰/۰۵ = ۰/۳۵$$

$$P_a^{II} = P\text{(عدم تصمیم‌گیری نمونه اول)} \times P\text{(احتمال پذیرش در مرحله دوم)} = P\text{(گرفتن نمونه دوم)} \times ۰/۷ = ۰/۲۴$$

$$ATI = P_a^I(n_۱) + P_a^{II}(n_۱ + n_۲) + (۱ - P_a^I - P_a^{II})N = ۰/۶ \times ۲۰ + ۰/۲۴ \times ۷۰ + (۱ - ۰/۸۴) \times ۳۰۰ = ۷۶/۸$$

توجه شود که **(عدم تصمیم‌گیری نمونه اول توسط) P= (گرفتن نمونه دوم)** P برقرار است.

نکته۲۵:

بررسی اثر افزایش یا کاهش متغیرها بر شاخص ATI:

با توجه به روابط ارائه شده برای شاخص ATI می توان نکات زیر را ارائه داد :

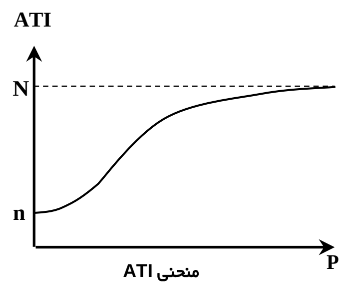
* با افزایش $P \leftarrow P_a \downarrow \leftarrow (۱-P_a) \uparrow \leftarrow ATI \uparrow$
* با افزایش $N \leftarrow ATI \uparrow$
* با افزایش عدد پذیرش $P_a \uparrow \leftarrow ATI \downarrow$

افزایش n چند اثر دارد: $\uparrow$ 　 $\downarrow$ n↔(Nn) ، $(۱-P_a)\uparrow$

پس برای بررسی اثر n روی ATI نمی‌توان نظر قطعی داد.

با توجه به منحنی ATI می‌توان نکات زیر را مطرح کرد:

* با افزایش P، ATI به N میل می‌کند.
* با کاهش P، ATI به n میل می‌کند.



منحنی ATI

طرح‌های چندبار نمونه‌گیری

حالت تعمیم یافته طرح جفت نمونه‌گیری است به این صورت که به جای دو مرحله، چند مرحله دارد (حداکثر ۷ مرحلـه) در مرحلـه i ام، n_i عـدد نمونـه گرفته می‌شود و برای هر مرحله دو عدد پذیرش (c_i) و رد (r_i) انباشته وجود دارد. اگر جمع تمام معیوب‌ها از مرحله اول تا مرحله i ام کمتر از (c_i) شود انباشته پذیرفته می‌شود و اگر این جمع بیشتر از r_i شود انباشته رد خواهد شد. در غیـر اینصـورت نمونـه‌گیری بـه مرحلـه بعـد مـی‌رود. در مرحلـه آخـر $r_n = c_n + ۱$ است که باعث می‌شود در این مرحله حتماً تصمیم‌گیری رخ دهد.