مدرسان شریف

فصل اول

« مقدمه‌ای بر سینماتیک ــ مفاهیم اساسی »

یکی از شاخه‌های علم مهندسی مکانیک مطالعه درباره ماشین‌ها و مکانیزم‌های مختلف است. در این شاخه ضمن آشنایی با ماشین‌ها و مکانیزم‌ها به طراحی آن‌ها پرداخته می‌شود. طراحی در این درس مفهوم متفاوتی با طراحی در درس مقاومت مصالح یا طراحی اجزا دارد چرا که قابلیت‌های حرکتی نقش ویژه‌ای در طراحی ماشین یا مکانیزم خواهند داشت. بنابراین شناخت سینماتیک ماشین و مکانیزم‌ها از جمله سرعت‌شناسی و شتاب‌شناسی کمک شایانی به تحلیل مسائل مربوطه خواهد نمود. در این بخش در ابتدا تعاریف و مفاهیم اولیه دینامیک ماشین به اختصار ارائه می‌شود.

به طور کلی دینامیک به دو بخش اساسی سینماتیک و سینتیک تقسیم شده که هدف از مطالعه هریک به شرح ذیل است:

سینماتیک: در سینماتیک هدف حرکت‌شناسی بدون در نظر گرفتن عامل حرکت است. به بیان دیگر سینماتیک ماشین‌ها عبارت از مطالعه و تجزیه و تحلیل مربوط به حرکت نسبی اجزای ماشین‌ها می‌باشد. در این بخش تغییر مکان، سرعت و شتاب اجزای مختلف ماشین بررسی می‌شود.

سینتیک: در سینتیک نیروهای وارد بر اجزای ماشین نیز مورد بررسی قرار گرفته و حرکات ناشی از این نیروها ارزیابی می‌شود.

اولین دستگاه مختصاتی که در دینامیک مورد استفاده قرار گرفت دستگاه مختصات لخت اولیه یا دستگاه مختصات مطلق یا نجومی گالیله‌ای بوده که توسط گالیله ابداع شد. پس از آن نیوتن دستگاه مختصات لخت ثانویه یا دستگاه مختصات اینرسیال را که فاقد هرگونه چرخش بوده و مبدأ آن بدون شتاب انتقالی است، ابداع نمود.

در این حالت سرعت هر نقطه از جسم به صورت مقابل محاسبه می‌شود: $\vec{v}_{XYZ} = \vec{v}_{xyz} + \vec{v}_{\circ} + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{v}_{XYZ}, \vec{v}_{xyz}$ به ترتیب سرعت مطلق و نسبی هر نقطه از جسم بوده و همچنین $\vec{v}_{\circ}$ سرعت خطی مطلق مبدا دستگاه مختصات واسطه (متحرک) می‌باشد. در دستگاه مختصات اینرسیال سرعت زاویه‌ای دستگاه $\vec{\omega}$ صفر می‌باشد بنابراین: $\vec{v}_{XYZ} = \vec{v}_{xyz} + \vec{v}_{\circ}$

$$\vec{a}_{XYZ} = \vec{a}_{xyz} + \vec{a}_{\circ} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\alpha} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz}$$

در دستگاه مختصات اینرسیال: $\vec{\omega} = \vec{\alpha} = \circ \ , \ \vec{a}_{\circ} = \circ \Rightarrow \vec{a}_{XYZ} = \vec{a}_{xyz}$ (مبدأ دستگاه مختصات شتاب انتقالی ندارد)

در دستگاه مختصات اینرسیال (دستگاه مختصات نیوتنی) قانون دوم نیوتن را می‌توان به شکل مقابل نوشت: $\vec{F} = m\vec{a}_{XYZ} = m\vec{a}_{xyz}$

ذره مادی: ذره مادی از نظر هندسی یک نقطه بوده که حجم آن بی‌نهایت کوچک است و دارای جرم نیز می‌باشد. در دینامیک اجسام، آن دسته از مسائلی را که ابعاد جسم در نوع حرکت آن نقشی ندارد می‌توان ذره در نظر گرفت.

جسم صلب: جسم صلب به مجموعه‌ای از ذرات جرم‌دار گفته می‌شود که تحت نیروهای وارده فاصله بین ذرات آن تغییری نمی‌کند. چنین جسمی هیچ‌گاه تغییر شکل نخواهد داد.

دیاگرام سینماتیکی: در مطالعه و بررسی حرکت اجزای تشکیل دهنده یک ماشین از دیاگرامی استفاده می‌شود که به آن دیاگرام سینماتیکی گفته می‌شود. در این دیاگرام اجزای ماشین به گونه‌ای رسم می‌شوند که در رسم آنها از اندازه‌هایی استفاده می‌گردد که در حرکت اجزا مؤثر می‌باشند.

ماشین: ماشین به مجموعه‌ای از قطعات مرتبط به هم گفته می‌شود که کمیت‌های سینتیکی را از یک یا چند ورودی به یک یا چند خروجی منتقل می‌کند. کمیت‌های سینتیکی شامل نیرو، گشتاور، توان، انرژی و ... می‌باشد.

مکانیزم: در مکانیزم مجموعه قطعات مرتبط به هم کمیت‌های سینماتیکی (مانند سرعت، شتاب، ...) را از یک یا چند ورودی به یک یا چند خروجی منتقل می‌کند. با در نظر گرفتن تعاریف فوق می‌توان گفت که ماشین مکانیزمی است که برای انتقال نیرو یا گشتاور مورد استفاده قرار می‌گیرد.

سازه: به مجموعه‌ای از قطعات مرتبط به هم که تشکیل یک جسم صلب می‌دهد، سازه گفته می‌شود.

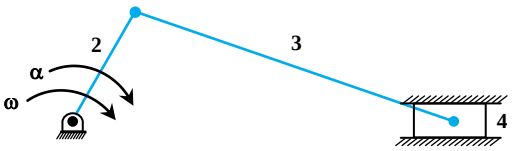
لازم به ذکر است که تمامی ماشین‌ها مکانیزم هستند ولی تمامی مکانیزم‌ها ماشین نمی‌باشند.

جفت شدن: دو قطعه‌ای که مماس بر یکدیگر بوده و بین آنها حرکت نسبی وجود دارد تشکیل یک جفت می‌دهند. هرگاه اتصال یا تماس از طریق دو سطح صورت بپذیرد، اتصال یک درجه آزادی بوده و به اتصال سطحی موسوم و هرگاه تماس دو قطعه در یک نقطه و یا درامتداد یک خط باشد، اتصال دو درجه آزادی و اصطلاحاً اتصال خطی و یا نقطه‌ای می‌نامند.

www.modaresanesharif.ac.ir

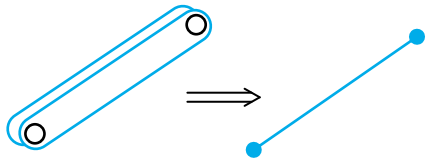
بند (لینک): مجموعه‌ای از قطعات که با هم حرکت کرده و می‌توان آنها را به عنوان یک جسم صلب واحد در نظر گرفت بند گفته می‌شود. به بندی که کمیت‌های مکانیکی وارد آن می‌شود بند ورودی و بندی که کمیت‌های مکانیکی از آن خارج می‌شود بند خروجی می‌گویند.

در شماره‌گذاری بندها، زمین نیز یک بند در نظر گرفته شده که به آن بند ثابت یا بند پایه گفته می‌شود. شکل (۱)، یک مکانیزم چهار میله‌ای لغزنده ـ لنگ را نمایش داده است. این مکانیزم شامل ۴ بند بوده که بند شماره ۲ بند ورودی و بند شماره ۴ بند خروجی می‌باشد. همچنین بند شماره ۱ که یک بند ثابت بوده، زمین در نظر گرفته شده است.



« شکل ۱. مکانیزم چهار میله‌ای لغزنده ـ لنگ »

بند ساده: بند ساده به بندی گفته می‌شود که تنها با دو بند مجاورش در تماس باشد، به این بند بند دوتایی نیز گفته می‌شود. در شکل (۲)، یک میله ساده نمایش داده شده که یک بند دوتایی یا بند ساده است.


« شکل ۲. بند ساده (بند دوتایی) »

بند مرکب: اگر بندی با بیش از دو بند مجاورش در تماس باشد بند مرکب نامیده می‌شود. از انواع بندهای مرکب می‌توان به بندهای سه‌تایی یا چهارتایی اشاره نمود. (شکل ۳)

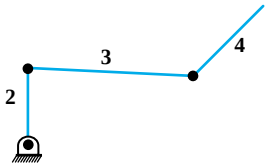
« شکل ۳. بند مرکب سه میله‌ای یا چهار میله‌ای »

زنجیره سینماتیکی: مجموعه‌ای از بندها که توسط تعدادی جفت به هم متصل باشند تشکیل یک زنجیره سینماتیکی می‌دهند. اگر اتصال‌ها به گونه‌ای به هم وصل شده باشند که هیچ حرکتی ممکن نباشد یک زنجیره سینماتیکی قفل شده (سازه) حاصل می‌شود.

زنجیره سینماتیکی ساده: اگر تمامی بندها در زنجیره سینماتیکی بند ساده یا (بند دوتایی) باشند به آن زنجیره سینماتیکی ساده می‌گویند در غیر این صورت زنجیره سینماتیکی، مرکب است .

زنجیره سینماتیکی مقید: اگر در یک زنجیره سینماتیکی با مشخص شدن موقعیت یک بند موقعیت بندهای دیگر نیز تعیین گردد، به آن زنجیره سینماتیکی مقید گفته می‌شود. این تعریف را می‌توان به صورت دیگری نیز بیان نمود؛ هرگاه اتصال بندها به یکدیگر به گونه‌ای باشد که بدون توجه به تعداد دوره‌ای که پیموده شده حرکت نسبی بین اتصال‌ها یکسان باقی بماند، یک زنجیره مقید حاصل می‌شود. مکانیزم چهار میله‌ای شکل (۱) یک زنجیره سینماتیکی مقید است. زیرا با تعیین موقعیت بند ۲ موقعیت بندهای دیگر نیز به طور کامل تعیین می‌شود.

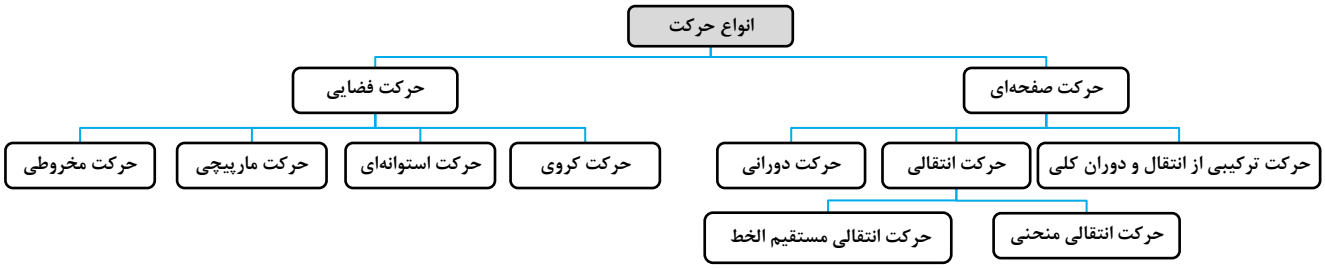
زنجیره سینماتیکی باز: اگر در زنجیره سینماتیکی حداقل یک بند وجود داشته باشد که فقط با یک بند مجاور در تماس باشد به آن زنجیره سینماتیکی باز گفته می‌شود. در شکل (۴) یک زنجیره سینماتیکی باز ترسیم شده زیرا بند ۴ تنها با بند ۳ در تماس است.



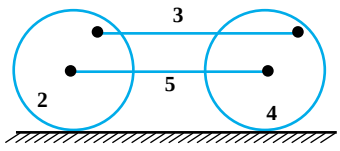
« شکل ۴. زنجیره سینماتیکی باز »

اما در یک زنجیره سینماتیکی بسته، بندها به گونه‌ای به هم متصل شده‌اند که یک حلقه بسته را تشکیل می‌دهند. در شکل فوق اگر بند ۴ به بند ثابت ۱ متصل شود یک زنجیره سینماتیکی بسته ایجاد می‌شود. با تعاریف فوق می‌توان به این نتیجه رسید که مکانیزم یک درجه آزادی یک زنجیره سینماتیکی بسته مقید می‌باشد. اگر زنجیره سینماتیکی بسته مقید نباشد مکانیزم دارای درجات آزادی بالاتری است.

انواع حرکت‌ها: یک جسم صلب می‌تواند انواع حرکت‌ها را در حالت صفحه‌ای و فضایی تجربه کند. تقسیم‌بندی این حرکت‌ها به صورت ذیل می‌باشد:



در حرکت صفحه‌ای مسیر حرکت تمام ذرات جسم صلب در یک صفحه و یا در صفحات موازی با یکدیگر می‌باشد. در حرکت انتقالی مسیر حرکت تمامی ذرات با هم یکسان است، اگر مسیر حرکت ذرات به صورت مستقیم باشد حرکت انتقالی مستقیم الخط بوده و اگر مسیر حرکت ذرات به صورت یک منحنی مشابه باشد، حرکت جسم انتقالی منحنی‌الخط خواهد بود. در شکل (۵) مسیر حرکت میله (عضو) ۳ از مکانیزم چرخهای لوکوموتیو یک مسیر انتقالی منحنی‌الخط بوده در حالی‌که میله (عضو) ۵ دارای حرکت انتقالی مستقیم‌الخط است.



« شکل ۵. مکانیزم چرخهای لوکوموتیو »

www.modaresanesharif.ac.ir

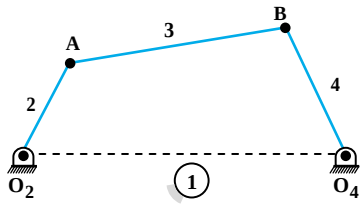
اگر هر یک از نقاط یک جسم صلب که دارای حرکت صفحه‌ای بوده و از یک محور ثابت (که عمود بر صفحه حرکت است) فاصله ثابتی داشته باشند، جسم صلب دارای حرکت دورانی است. در مکانیزم چهار میله‌ای لغزنده ـ لنگ (شکل ۱) عضو ۲ دارای حرکت دورانی بوده و عضو ۴ دارای حرکت انتقالی مستقیم‌الخط است. در بسیاری از حالت‌ها در حرکت صفحه‌ای یا فضایی، جسم صلب دارای ترکیبی از انتقال و دوران می‌باشد. به عنوان مثال در شکل (۵) اعضای ۲ و۴ که چرخ‌های لوکوموتیو هستند دارای حرکت ترکیبی چرخش و انتقال در صفحه می‌باشند.

هرگاه حرکت جسم به گونه‌ای باشد که تمام نقاط جسم در حین حرکت فاصله‌اش از یک نقطه ثابت در فضا (مرکز کره) ثابت باشد حرکت از نوع کروی است.

اگر فاصله ذرات یک جسم در حال حرکت از یک محور ثابت همیشه مقدار ثابت و مشخص باشد، حرکت از نوع استوانه‌ای است. همچنین در حرکت مارپیچ حرکت جسم صلب به گونه‌ای است که هر نقطه از جسم دارای حرکت دورانی حول یک محور ثابت بوده و در همان لحظه دارای حرکت انتقالی به موازات همان محور می‌باشد. حرکت مهره به دور یک پیچ در حال باز یا بسته شدن نمونه‌ای از حرکت مارپیچی است.

دوره، دوره تناوب و فاز حرکت: یک مکانیزم موقعی یک دوره و یا سیکل خود را کامل می‌کند که با حرکت و گذشتن از تمامی مواضع ممکن خود مجدداً به حالت و وضعیت اولیه‌اش برگردد. مدت زمان لازم برای تکمیل یک دوره و یا سیکل را دوره تناوب گفته و موقعیت‌های نسبی اعضای یک مکانیزم در هر لحظه از دوره تناوب را یک فاز می‌گویند.

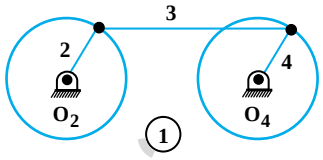
مکانیزم چهار میله‌ای: یکی از متداول‌ترین مکانیزم‌ها، مکانیزم چهار میله‌ای است که در شکل (۷) نمایش داده شده است. در این مکانیزم میله ۱ ثابت بوده و میله‌های ۲ و ۴ به ترتیب لنگ‌های ورودی و خروجی را نشان داده و میله ۳ عضو رابط است.



« شکل ۶. مکانیزم چهارمیله‌ای »

اگر در مکانیزم چهار میله‌ای طول بلندترین و کوتاهترین عضو به ترتیب با S, L و طول دو عضو دیگر با Q, P نمایش داده شود آنگاه در صورت برقراری رابطه $L+S\le P+Q$ ، حداقل عضو ورودی می‌تواند چرخش کامل داشته باشد اما در مقابل عضو خروجی دارای سرعت متغیر بوده و حول نقطه O_4 حرکت دورانی نوسانی دارد. اما اگر رابطه فوق برقرار نباشد هیچ یک از اعضای ورودی یا خروجی نمی‌توانند چرخش کامل داشته باشند. به شرط فوق شرط گراشهف گفته می‌شود.

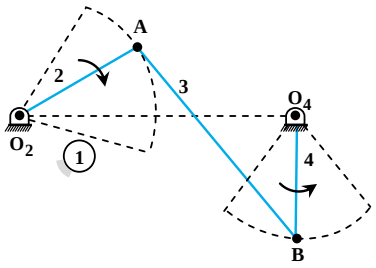
در مکانیزم چهار میله‌ای فوق اگر طول میله‌های ۲ و ۴ مساوی بوده و همچنین این دو میله موازی باشند، یک مکانیزم چهارمیله‌ای با لنگ‌های موازی ایجاد شده که این لنگ‌ها همواره دارای سرعت زاویه‌ای یکسان می‌باشند. این مکانیزم را می‌توان در چرخ‌های لوکوموتیو همانند شکل (۸) مشاهده نمود. در این مکانیزم عضو ۳ حرکت انتقالی منحنی‌الخط خواهد داشت.



« شکل ۷. مکانیزم چهار میله‌ای با لنگهای موازی »

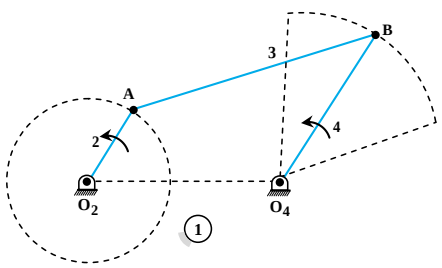
در شکل فوق هرگاه امتداد لنگ ۴ با میله رابط ۳ یکی شود، مکانیزم در یک وضعیت نامقید قرار می‌گیرد که به آن نقطه مرگ گفته می‌شود. در اکثر مکانیزم‌ها ممکن است این اتفاق بیفتد که به دلیل اینرسی اولیه سیستم این نقطه طی می‌شود.

حالت دیگری از این مکانیزم وجود دارد که طول لنگ‌ها مساوی بوده اما دارای امتدادهای غیرموازی می‌باشند. این حالت در مواقعی رخ می‌دهد که طول میله رابط ۳ برابر طول خط المرکزین O_2O_4 باشد. با گردش ساعتگرد و سرعت زاویه‌ای ثابت لنگ ۲، لنگ ۳ گردش پادساعتگرد و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت خواهد داشت. شکل (۹) این مکانیزم را نشان می‌دهد.



« شکل ۸. مکانیزم چهار میله‌ای با لنگ‌های ناموازی »

در مکانیزم چهار میله‌ای هرگاه شرایط ذیل برقرار باشد مکانیزم به حالت لنگ ـ آونگ تبدیل می‌شود. در چنین حالتی با گردش کامل لنگ ۲، لنگ ۴ حول نقطه O_4 حرکت دورانی نوسانی انجام می‌دهد. بنابراین از این مکانیزم می‌توان برای تبدیل حرکت دورانی به حرکت نوسانی آونگ مانند استفاده نمود.



« شکل ۹. مکانیزم چهار میله‌ای لنگ ـ آونگ »

$$O_2A+AB+O_4B>O_2O_4$$

$$AB-O_2A-O_4B<O_2O_4$$

$$O_2A+AB-O_4B<O_2O_4$$

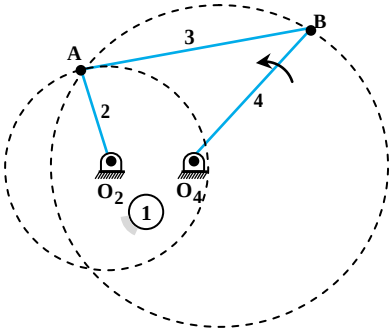
$$AB-O_2A+O_4B>O_2O_4$$

www.modaresanesharif.ac.ir

در شکل فوق هریک از لنگ‌های ۲ یا ۴ می‌توانند به عنوان لنگ محرک به کار برده شوند، اما اگر لنگ ۲ لنگ محرک باشد مکانیزم مدام به کار خود ادامه می‌دهد. در غیر این صورت اگر لنگ ۴ محرک باشد ممکن است مکانیزم در نقاط مرگ دچار توقف شود. برای جلوگیری از این پدیده باید مکانیزم را به وسایل کمکی مانند چرخ لنگر مجهز نمود. پدیده نقطه مرگ مربوط به زمانی است که خط عمل نیروی محرک میله رابط ۳ و لنگ ۲ در یک امتداد قرار گیرند.

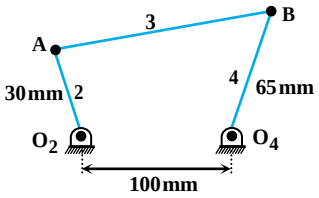
از دیگر حالت‌های مکانیزم چهار میله‌ای مکانیزم با لنگ‌های دورانی دوبل یا لنگ ــ لنگ است. در این حالت طول خط المرکزین O_2O_4 از طول لنگ‌ها و طول میله رابط کوچکتر است. با دوران کامل هر یک از لنگ‌ها، لنگ دیگر نیز دوران کامل خواهد داشت، تنها تفاوت در این است که اگر لنگ محرک دارای سرعت زاویه‌ای ثابت باشد لنگ متحرک دارای سرعت زاویه‌ای متغیر خواهد بود. در این مکانیزم نسبت طول میله‌ها به صورت ذیل خواهد بود.

$$AB > O_2O_4 + O_4B - O_2A$$
$$AB < O_4B - O_2O_4 + O_2A$$



«شکل ۱۰. مکانیزم چهار میله‌ای لنگ ـ لنگ»

مثال ۱: در شکل ذیل لنگ (۲) به طور مدام چرخیده و همراه آن عضو (۴) نوسان می‌کند. حداکثر و حداقل مقدار طول عضو (۳) را که می‌توان مورد استفاده قرار داد به گونه‌ای که مکانیزم از نوع لنگ ــ آونگ باقی بماند برابر کدام یک از گزینه‌ها است؟



۱) $۶۵mm > AB > ۵mm$
۲) $AB < ۱۳۵mm$
۳) $AB > ۵mm$
۴) $۶۵mm < AB < ۱۳۵mm$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» همان‌طور که در متن درس به آن اشاره شده است در مکانیزم چهار میله‌ای برای آنکه مکانیزم به حالت لنگ ـ آونگ تبدیل شود باید شرایط ذیل را همزمان داشته باشد.

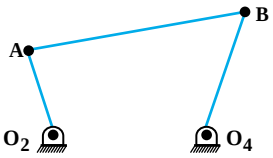
$$\begin{cases} O_2A + AB + O_4B > O_2O_4 \\ AB - O_2A - O_4B < O_2O_4 \\ O_2A + AB - O_4B < O_2O_4 \\ AB - O_2A + O_4B > O_2O_4 \end{cases}$$

از روابط فوق می‌توان حدود مجاز رابط AB را بدست آورد:

$$\begin{cases} AB > O_2O_4 - O_2A - O_4B \\ AB < O_2O_4 + O_2A + O_4B \\ AB < O_2O_4 - O_2A + O_4B \\ AB > O_2O_4 + O_2A - O_4B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB > ۱۰۰ - ۳۰ - ۶۵ \Rightarrow AB > ۵ \\ AB < ۱۰۰ + ۳۰ + ۶۵ \Rightarrow AB < ۱۹۵ \\ AB < ۱۰۰ - ۳۰ + ۶۵ \Rightarrow AB < ۱۳۵ \\ AB > ۱۰۰ + ۳۰ - ۶۵ \Rightarrow AB > ۶۵ \end{cases}$$

با در نظر گرفتن روابط فوق می‌توان نتیجه گرفت که گزینه (۴) صحیح است.

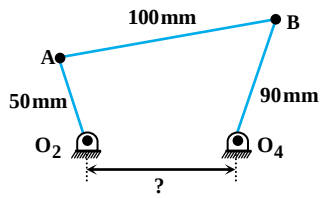
مثال ۲: در مکانیزم‌های چهارمیله‌ای بالنگ‌های دورانی دوبل یا لنگ ــ لنگ طول خط المرکزین O_2O_4 دارای چه شرایطی است؟



۱) از طول لنگ O_2A کوچکتر است.
۲) از طول لنگ O_4B کوچکتر است.
۳) از طول میله رابط AB کوچکتر است.
۴) هر سه گزینه صحیح است.

☑ **پاسخ: گزینه «۴»** صحیح است. در مکانیزم‌های چهارمیله‌ای لنگ ـ لنگ یا لنگ دورانی دوبل، باید طول خط المرکزین O_2O_4 از طول لنگ‌ها و میله رابط کوچکتر باشد. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

مثال ۳: درمکانیزم چهارمیله‌ای لنگ ــ لنگ شکل ذیل طول خط‌المرکزین در چه محدوده‌ای مجاز است؟



۱) $O_2O_4 < ۵۰mm$
۲) $O_2O_4 < ۶۰mm$
۳) $O_2O_4 < ۴۰mm$
۴) $O_2O_4 < ۹۰mm$

www.modaresanesharif.ac.ir

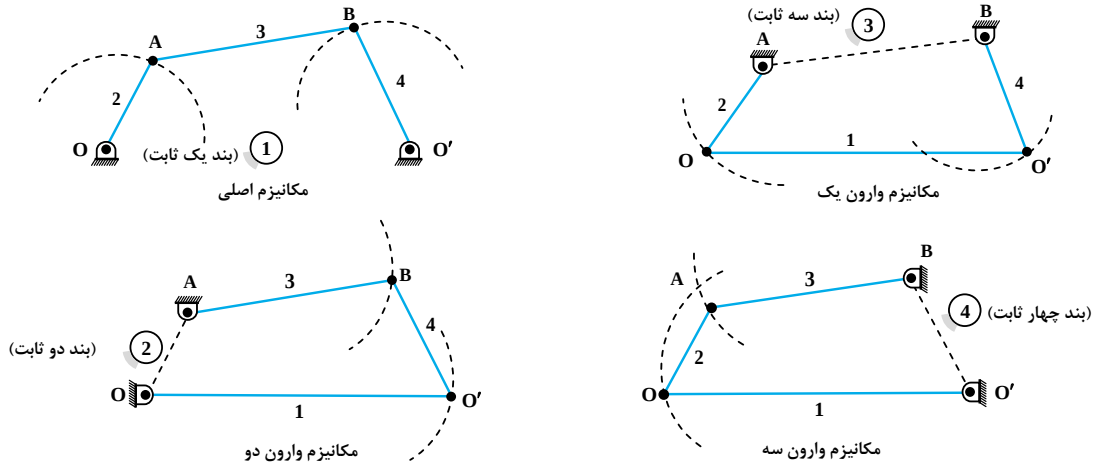
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در مکانیزم چهارمیله‌ای لنگ ـ لنگ باید نسبت طول میله‌ها به صورت ذیل باشد:

$$\begin{cases} AB > O_2O_4 + O_4B - O_2A \\ AB < O_4B - O_2O_4 + O_2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O_2O_4 < AB - O_4B + O_2A \\ O_2O_4 < O_4B + O_2A - AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O_2O_4 < 100 - 90 + 50 \Rightarrow O_2O_4 < 60\,mm \\ O_2O_4 < 90 + 50 - 100 \Rightarrow O_2O_4 < 40\,mm \end{cases}$$

با توجه به نتایج فوق طول خط‌المرکزین باید کوچکتر از $40\,mm$ باشد تا هر دو معیار فوق ارضا شود. از طرفی طول خط‌المرکزین در مکانیزم‌های چهارمیله‌ای لنگ ـ لنگ باید کوچکتر از لنگ‌ها و میله رابط باشد. بنابراین اگر طول خط‌المرکزین کوچکتر از $40\,mm$ در نظر گرفته شود تمامی شروط حاکم بر این مکانیزم را تأمین می‌کند.

مکانیزم وارون: اگر در یک مکانیزم به عضوی که در ابتدا ثابت بوده اجازه حرکت داده شود و عضو دیگری را که نسبت به آن عضو ثابت، دارای حرکت بوده، ثابت فرض شود، به آن مکانیزم وارون گفته می‌شود. نکته حائز اهمیت این است که در وارون یک مکانیزم، حرکت نسبی میله‌ها نسبت به هم تغییری نکرده اما حرکت مطلق آنها (نسبت به زمین) تغییر می‌کند.

به عنوان مثال در مکانیزم چهار میله‌ای شکل ذیل با تغییر عضو ثابت می‌توان مکانیزم‌های وارون را تعیین نمود.



« شکل ۱۱ . وارون‌های یک مکانیزم چهار میله‌ای »

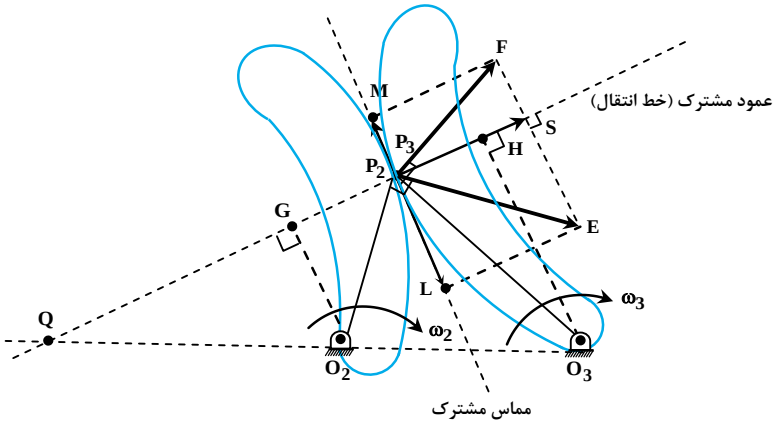
انتقال حرکت : انتقال حرکت در مکانیزم‌ها از یک عضو به عضوی دیگر می‌تواند توسط سه روش ذیل صورت پذیرد:

الف ـ تماس مستقیم بین دو عضو مانند تماس بین بادامک و پیرو یا تماس بین دو چرخدنده

ب ـ انتقال حرکت توسط یک اتصال میانی مانند انتقال حرکت از پیستون به میل لنگ توسط شاتون

ج ـ انتقال حرکت به وسیله یک متصل‌کننده انعطاف‌پذیر مانند یک تسمه یا زنجیر

در حالت (ب) حرکت میل لنگ توسط نیرویی است که از طرف میله رابط (شاتون) به آن وارد می‌شود، بنابراین می‌توان خط انتقال نیرو را در راستای میله رابط (شاتون) در نظر گرفت، همچنین در حالت (ج) حرکت از محرک به پیرو توسط تسمه یا زنجیر صورت می‌گیرد و خط انتقال در راستای تسمه می‌باشد. اما در حالت (الف) که تماس از نوع مستقیم می‌باشد انتقال حرکت در صورتی امکان‌پذیر است که محرک در امتداد قائم مشترک دو سطح تماس (نقطه P) دارای حرکت باشد. در این حالت خط انتقال همان خط قائم مشترک است. در شکل (۱۲) دو عضو ۲ و ۳ در نقطه P با یکدیگر در تماس می‌باشند. عضو ۲ محرک و عضو ۳ در نقطه P با یکدیگر در تماس می‌باشند، عضو ۲ محرک و عضو ۳ متحرک یا پیرو می‌باشد. امتداد عمود مشترک و خط المرکزین O_2O_3 یکدیگر را در نقطه Q قطع می‌کنند. امتداد عمود مشترک در این حالت را می‌توان همان خط انتقال در نظر گرفت.



« شکل ۱۲ . انتقال حرکت از محرک به پیرو در تماس مشترک »

www.modaresanesharif.ac.ir

نقاط P_2, P_3 همان نقطه تماس P بوده که متعلق به دو عضو می‌باشند. بردار سرعت نقطه P_2 برابر P_2E بوده که بر شعاع دوران O_2P_2 عمود می‌باشد. به همین ترتیب بردار سرعت نقطه P_3 برابر P_3F بوده که بر شعاع دوران O_3P_3 عمود می‌باشد. مؤلفه‌های سرعت P_3F, P_2E در امتداد قائم مشترک باید برابر باشد. چرا که اگر مؤلفه سرعت P_3F بر امتداد عمود مشترک بزرگتر از مؤلفه سرعت P_2E بر امتداد عمود مشترک باشد دو عضو از یکدیگر جدا می‌شوند و بر عکس آن نیز باعث می‌شود عضو ۲ در عضو ۳ فرو رود که این خلاف فرض صلب بودن دو عضو است. بنابراین مؤلفه این دو سرعت بر امتداد عمود مشترک برابر و مساوی P_2S یا P_3S می‌باشد. از طرفی با در اختیار داشتن مؤلفه P_2S کافی است یک امتداد عمود بر قائم مشترک رسم نموده تا امتداد عمود بر O_2P_2 را در نقطه F قطع کند در این صورت سرعت نقطهٔ تماس P_3 متعلق به عضو ۳ به دست می‌آید.

اکنون سرعت زاویه‌ای عضوهای ۲ و ۳ به ترتیب ذیل تعیین می‌شوند:

$$\left.\begin{aligned}\omega_2 &= \frac{v_{P2}}{R_2} = \frac{P_2E}{O_2P_2}\\ \omega_3 &= \frac{v_{P3}}{R_3} = \frac{P_3F}{O_3P_3}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{P_2E}{O_2P_2} \times \frac{O_3P_3}{P_3F} \qquad (1)$$

$$GO_2P_2 = SP_2E \Rightarrow G\overset{\Delta}{O_2}P_2 \sim S\overset{\Delta}{P_2}E \Rightarrow \frac{P_2E}{O_2P_2} = \frac{P_2S}{O_2G} \qquad (2)$$

$$HO_3P_3 = SP_3F \Rightarrow H\overset{\Delta}{O_3}P_3 \sim S\overset{\Delta}{P_3}F \Rightarrow \frac{P_3F}{O_3P_3} = \frac{P_3S}{O_3H} \qquad (3)$$

از تقسیم رابطه (۲) بر رابطه (۳) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{P_2E}{O_2P_2} \times \frac{O_3P_3}{P_3F} = \frac{P_2S}{O_2G} \times \frac{O_3H}{P_3S} = \frac{O_3H}{O_2G} \qquad (4)$$

با مقایسه روابط (۱) و (۴) می‌توان نوشت:

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{O_3H}{O_2G} \qquad (5)$$

اما مثلث‌های O_3HQ, O_2GQ متشابه می‌باشند بنابراین می‌توان برای آنها به صورت ذیل نسبت تشابه نوشت:

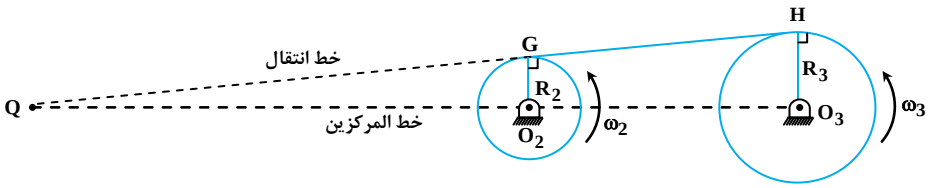
$$\frac{O_3H}{O_2G} = \frac{O_3Q}{O_2Q} \qquad (6)$$

از رابطه فوق می‌توان نتیجه گرفت که نسبت سرعت زاویه‌ای محرک به سرعت زاویه‌ای پیرو با عمودهای رسم شده از مرکز دوران آنها به خط انتقال نسبت عکس دارد. از مقایسه روابط (۵) و (۶) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\boxed{\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{O_3Q}{O_2Q}} \qquad (7)$$

رابطه فوق بیانگر آن است که نسبت سرعت زاویه‌ای محرک به سرعت زاویه‌ای پیرو با فاصله مراکز دوران آنها تا محل برخورد خط انتقال و خط المرکزین نسبت معکوس دارد.

برای حالت خاص که انتقال حرکت از محرک به پیرو توسط تسمه مطابق شکل ذیل صورت می‌پذیرد، عمودهای O_3H, O_2G به ترتیب با شعاع‌های چرخ تسمه‌ها برابر بوده و بنابراین نسبت سرعت زاویه‌ای دو چرخ تسمه با شعاع‌های دو چرخ تسمه نسبت معکوس دارد (شکل ۱۳).



«شکل ۱۳ . انتقال حرکت از محرک به پیرو توسط تسمه»

$$\boxed{\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{R_3}{R_2} = \frac{O_3Q}{O_2Q}} \qquad (8)$$

تذکر۱: برای آنکه نسبت سرعت زاویه‌ای در رابطه (۷) مساوی مقدار ثابتی باشد باید خط انتقال، خط المرکزین را در نقطه ثابتی قطع کند. در مکانیزم چهار میله‌ای برای ثابت بودن نسبت سرعت زاویه‌ای، طول لنگ‌ها باید برابر بوده همچنین طول میله رابط نیز مساوی فاصله خط المرکزین باشد.

تذکر۲: برای آنکه بین دو عضو شکل (۱۲) در هنگام تماس لغزش ایجاد شود باید مؤلفه‌های مماسی سرعت آن، در یک جهت و هم اندازه نباشند. همان طور که در شکل (۱۲) مشاهده می‌شود، مؤلفه‌های مماسی سرعت در نقطه تماس P به ترتیب P_3M, P_2L هستند که در جهت مخالف هم می‌باشند بنابراین سرعت لغزشی بین دو عضو برابر تفاضل این دو مؤلفه است که برابر ML می‌باشد.

نکته۱: در مکانیزم‌های تماس مستقیم هرگاه نقطه تماس بر روی امتداد خط المرکزین واقع نشده باشد، لغزش ایجاد می‌شود.

www.modaresanesharif.ac.ir

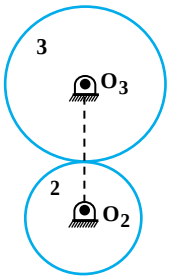
مدرسان شریف

فصل چهارم

«چرخ‌دنده‌ها»

چرخ‌دنده‌ها

یکی از مکانیزم‌های انتقال قدرت در سیستم‌های مکانیکی چرخ‌دنده‌ها می‌باشند. چرخ‌دنده‌ها برای انتقال حرکت دورانی بین محورهایی که در فاصله‌ی معینی از یکدیگر قرار دارند، مورد استفاده قرار می‌گیرند. یکی از ویژگی‌هایی که در اغلب چرخ دنده‌ها بسیار مهم و حائز اهمیت است، داشتن نسبت سرعت زاویه‌ای ورودی به خروجی (نسبت تبدیل) است که همواره ثابت می‌باشد. به عبارت دقیق‌تر یک مکانیزم چرخ‌دنده‌ای که برای ایجاد یک سرعت مشخص در خروجی طراحی می‌گردد (که این تنظیم با طراحی اندازه دندانه‌های چرخ‌دنده‌ها انجام می‌پذیرد) باید در تمام حرکت خود بدون تغییر باقی می‌ماند. اگر بین دو دیسک چرخان فرض غلتش خالص برقرار گردد، نسبت تبدیل ثابت می‌ماند، زیرا در این حالت سرعت نقطه تماس همیشه با هم برابر بوده و در نتیجه فرض ثابت ماندن نسبت تبدیل همیشه برقرار است. ولی اگر مقدار بار از حد مجاز بیشتر گردد، لغزش در سطح تماس رخ داده و نسبت تبدیل تغییر می‌کند.



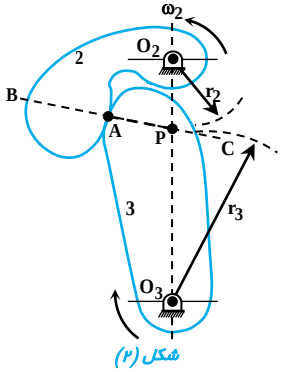
شکل (۱)

بنابراین اگر سرعت زاویه‌ای همواره ثابتی نیاز باشد، استفاده از دیسک‌های چرخان برای انتقال حرکت دورانی مناسب نمی‌باشد. از طرف دیگر می‌دانیم که شرط لازم برای ایجاد داشتن رانش قطعی در یک مکانیزم این است که قائم مشترک گذرنده از نقطه تماس حداکثر یکی از مراکز دوران را قطع کند. رانش قطعی در یک مکانیزم تماس مستقیم هنگامی ایجاد می‌گردد که حرکت میله ورودی سبب حرکت پیرو (میله خروجی) گردد. در مکانیزم‌های چرخ‌دنده‌ای این موضوع را می‌توان این‌گونه تعبیر نمود که حرکت چرخ‌دنده ورودی (چرخ‌دنده ۲ شکل ۱) سبب حرکت چرخ‌دنده خروجی (چرخ‌دنده ۳) گردد. علت داشتن رانش قطعی در یک چرخ‌دنده از آن جهت حائز اهمیت می‌باشد که هدف از سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای انتقال حرکت دورانی بین ورودی و خروجی می‌باشد.

همانطور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، در اتصال دیسک‌های چرخان، قائم مشترک یعنی خط O_2O_3 هر دو مرکز دوران را قطع می‌کند. بنابراین اگر از دیسک‌های چرخان برای انتقال حرکت دورانی بین محورها استفاده کنیم، هیچ انتقال حرکتی ایجاد نمی‌شود. بنابراین برای رفع این مشکل نیاز به معرفی مکانیزم جدید می‌باشد که به این مکانیزم‌ها، **مکانیزم‌های چرخ دنده‌ای** گفته می‌شود.

شرط لازم برای ثابت ماندن نسبت تبدیل

همانگونه که در بالا ذکر گردید مکانیزم‌های انتقال حرکت دورانی باید دارای رانش قطعی و نسبت تبدیل ثابت باشند. حال در ادامه اثبات خواهد شد که چرخ‌دنده‌ها با ویژگی‌های منحصر به فرد، این دو ویژگی را دارا می‌باشند. تماس دو دندانه چرخ دنده را می‌توان به صورت یک مکانیزم تماس مستقیم در نظر گرفت. همانطور که در شکل ۲ نشان داده شده است، خط قائم مشترک گذرنده از نقطه تماس، (خط BC) خط المرکزین (O_2O_3) را در نقطه P قطع می‌کند. بنابراین همین جا می‌توان نتیجه گرفت که در چرخ دنده‌ها رانش قطعی وجود دارد. در مکانیزم تماس مستقیم نسبت سرعت زاویه‌ای اعضای ۲و۳ از رابطه زیر حاصل می‌شود:



شکل (۲)

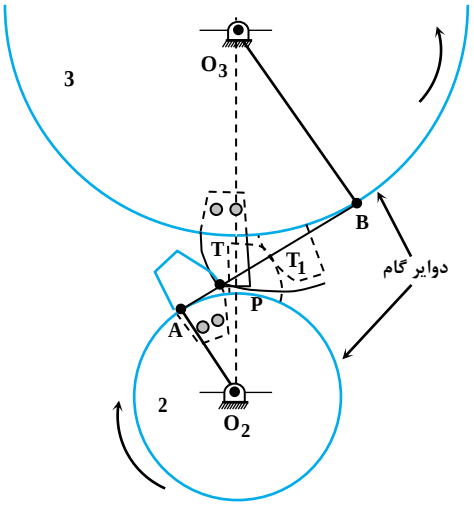
$$\frac{\omega_2}{\omega_3}=\frac{O_3P}{O_2P}$$

بنابراین برای ثابت ماندن سرعت زاویه‌ای دو چرخ دنده با توجه به ثابت بودن نقاط O_3 و O_2 باید نقطه P همواره ثابت بماند. از طرف دیگر می‌توان چرخ دنده را به صورت دو دایره که در نقطه P بر یکدیگر مماس هستند، در نظر گرفت که به این دوایر، دوایر گام گفته می‌شود.

به طور معمول چرخ دنده‌ها را با رسم **دوایر گام** چرخ‌دنده نشان می‌دهند. حال چگونه نقطه P، که نقطه تماس دو دایره گام است، در تمام فاز حرکت ثابت بماند؟

www.modaresanesharif.ac.ir

برای ثابت ماندن نقطه گام باید پروفیل دندانه به گونه‌ای طراحی شود که این ویژگی را در تماس دو چرخ دنده ایجاد نماید. بدین منظور از دندانه‌هایی که سطح آنها به صورت منحنی اینولوتی هستند، استفاده می‌گردد. منحنی اینولوت، مکان هندسی نقطه انتها یک ریسمان کشیده شده‌ای است که از گرد یک استوانه باز می‌گردد.



شکل (۳)

مهمترین ویژگی منحنی اینولوت این است که قائم مشترک گذرنده از نقطه تماس (خط AB در شکل ۳) در چرخ‌دنده‌ها، همواره بر دایره مبنا که ایجادکننده این منحنی‌ها می‌باشد، مماس است. بنابراین قائم مشترک گذرنده از نقطه تماس خط المرکزین چرخ دنده‌ها را همواره در یک نقطه ثابت (P) قطع کرده و نسبت تبدیل چرخ‌دنده‌ها ثابت می‌ماند. همچنین تغییر فاصله مرکز چرخ‌دنده‌ها تأثیری بر نسبت تبدیل ندارد. برای اثبات این موضوع شکل (۴) را در نظر بگیرید. مرکز چرخ‌دنده ۱ از نقطه O_1 به نقطه O'_1 انتقال یافته است. در نتیجه نقطه تماس دو چرخ‌دنده نیز از نقطه Q به Q' منتقل می‌شود. در این حالت خط عمود در دندانه‌ها که از نقطه تماس یعنی Q' می‌گذرد بر دوایر مبنای دو چرخ‌دنده مماس است. از قسمت قبل دیدیم که نسبت سرعت زاویه‌ای دو چرخ‌دنده برابر است با:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{O_1P}{O_2P}$$

فرض کنید که خط $M'N'$ که بر دوایر مبنا مماس است و خط‌المرکزین دو چرخ‌دنده را در نقطه‌ای مانند P' قطع کند. از تشابه دو مثلث $O'_1M'P', O_2N'P'$ داریم:

$$\frac{O'_1M'}{O_2N'}=\frac{O'_1P'}{O_2P'}$$

همچنین از تشابه دو مثلث O_1MP, O_2NP داریم:

$$\frac{O_1M}{O_2N}=\frac{O_1P}{O_2P}$$

از آنجا که دایره مبنای دو چرخ‌دنده تغییر نکرده و تنها فاصله زیاد شده است. داریم:

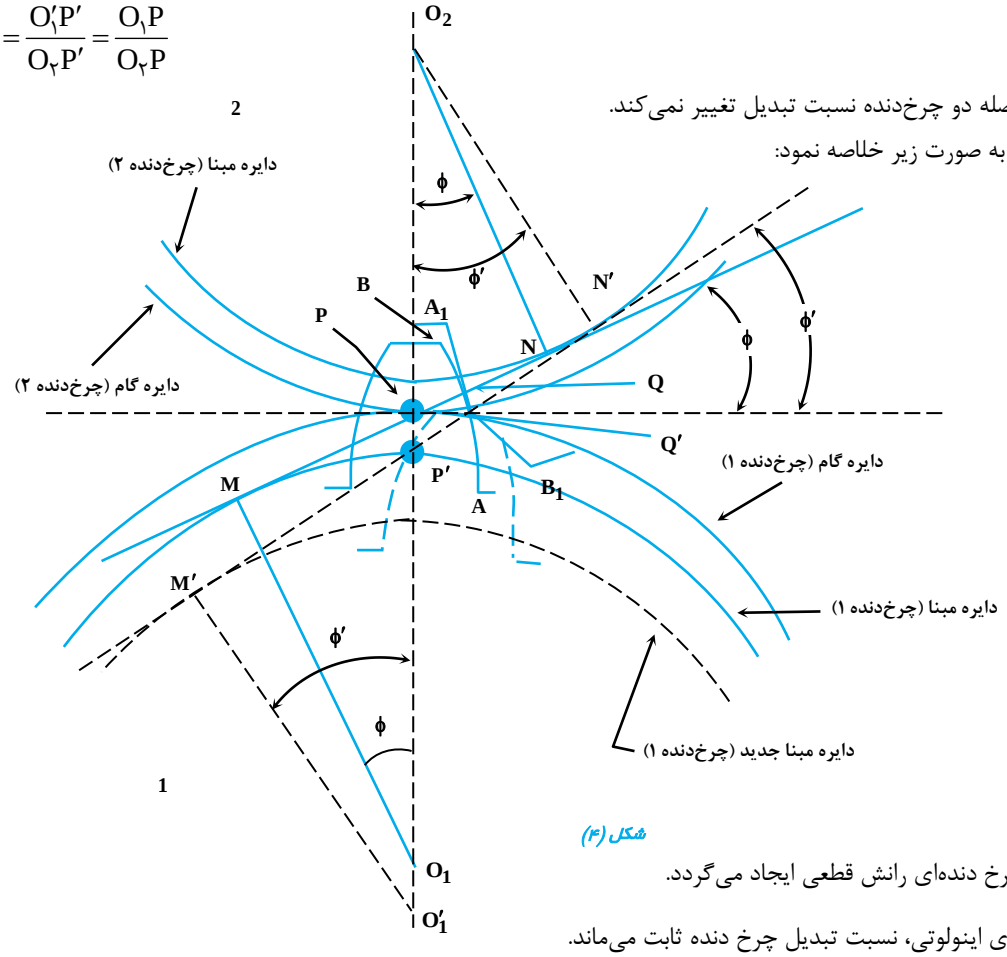
$$O_2N=O_2N', O_2M=O'_1M'$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{O'_1P'}{O_2P'}=\frac{O_1P}{O_2P}$$

بنابراین اثبات گردید که با تغییر فاصله دو چرخ‌دنده نسبت تبدیل تغییر نمی‌کند.

مطالب گفته شده در بالا را می‌توان به صورت زیر خلاصه نمود:



شکل (۴)

نکته۱: در سیستم های چرخ دنده‌ای رانش قطعی ایجاد می‌گردد.

نکته۲: با انتخاب دندانه‌های اینولوتی، نسبت تبدیل چرخ دنده ثابت می‌ماند.

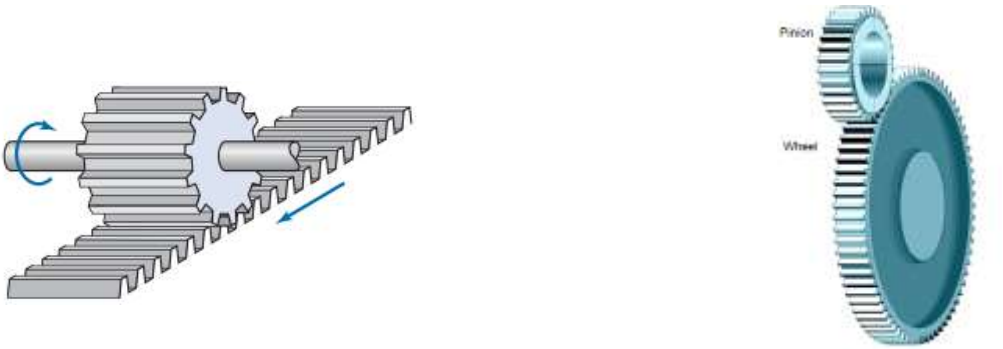
نکته۳: در چرخ‌دنده‌هایی با دندانه‌های اینولوتی، علاوه بر ثابت نگه داشتن نسبت تبدیل با تغییر فاصله مراکز بین دو چرخ دنده، نسبت تبدیل تغییر نمی‌کند.

www.modaresanesharif.ac.ir

انواع چرخ دنده‌ها

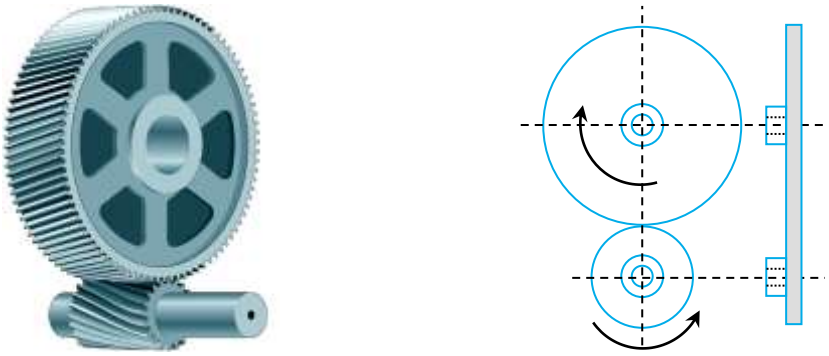
چرخ دنده‌ها معمولاً بر اساس نوع دندانه‌ها و نحوه قرارگیری محورها به چند دسته تقسیم می‌شوند.

۱ـ چرخ دنده‌های ساده: این چرخ دنده‌ها ساده‌ترین نوع چرخ دنده می‌باشند. از این چرخ دنده‌ها برای انتقال حرکت بین محورهای موازی استفاده می‌شود. از طرف دیگر در چرخ دنده‌های ساده راستای دندانه‌ها با محور دوران موازی است (شکل ۵). نوع خاص این چرخ دنده‌ها چرخ‌دنده و شانه است که در این نوع چرخ‌دنده، به جای آن که دندانه‌های یکی از چرخ‌دنده‌ها بر روی یک دایره قرار داشته باشند، بر روی یک سطح صاف قرار دارند. یا به عبارت دقیق‌تر مرکز دوران یکی از چرخ‌دنده‌ها (شانه) در بی‌نهایت می‌باشد.



شکل (۵)

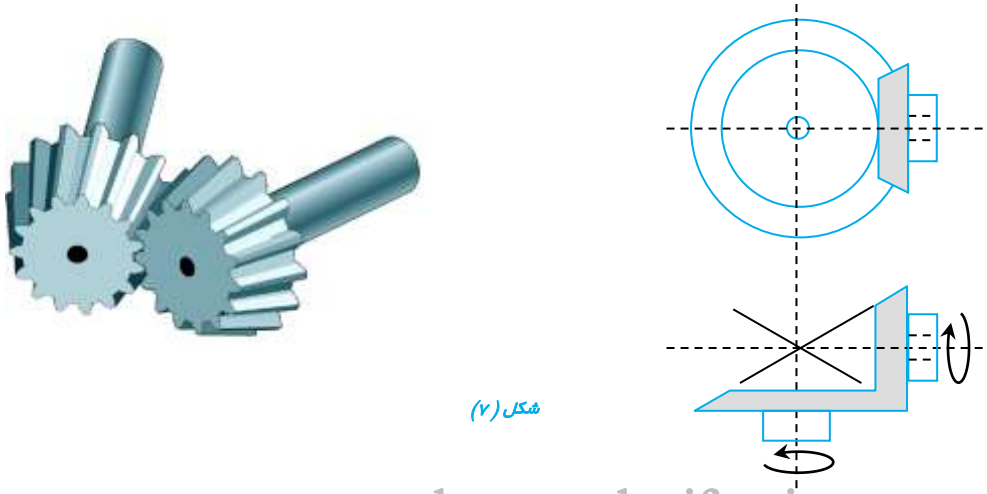
۲ـ چرخ دنده‌های مارپیچ: نحوه قرارگیری محورها در این چرخ دنده‌ها مشابه چرخ دنده‌های ساده می‌باشد ولی تفاوت اصلی در نحوه قرارگیری دندانه‌ها است. در چرخ دنده‌های مارپیچی دندانه‌ها به صورت مورب و یا به صورت منحنی الشکل می‌باشند. مزیت اصلی این چرخ دنده‌ها کاهش ضربه به دندانه‌ها و همچنین کاهش سر و صدا می‌باشد و به طور معمول در سرعت‌های زیاد از این چرخ‌دنده‌ها استفاده می‌شود. زیرا در این چرخ دنده‌ها انتقال بار بین دندانه‌ها به صورت تدریجی صورت می‌پذیرد. عیب اصلی این چرخ دنده‌ها، ایجاد نیروی محوری می‌باشد که معمولاً با قرار دادن دو چرخ دنده مارپیچ در کنار هم این مشکل برطرف می‌گردد. (شکل ۶)



شکل (۶)

۳ـ چرخ‌دنده‌های مخروطی: شکل این چرخ‌دنده‌ها به صورت مخروط می‌باشد. معمولاً برای انتقال حرکت در محورهایی که به صورت موازی قرار ندارند استفاده می‌گردد. چرخ دنده‌های مخروطی خود بر اساس نحوه قرارگیری محورها و دندانه‌ها به صورت زیر تقسیم‌بندی می‌گردند:

۱ـ چرخ دنده‌های مخروطی مستقیم: زاویه بین محورهای این دو چرخ دنده ۹۰° درجه است و همچنین محورهای دو چرخ دنده متقاطع می‌باشند. دندانه‌های این نوع چرخ دنده‌ها، در راستای یال مخروط است. (شکل ۷)



شکل (۷)

www.modaresanesharif.ac.ir

۲ـ چرخ دنده‌های مخروطی مارپیچی: نحوه قرارگیری محورهای این نوع چرخ دنده‌ها مشابه چرخ‌دنده‌های مخروطی مستقیم است. ولی تفاوت اصلی در نوع دندانه‌ها می‌باشد. این نوع چرخ‌دنده‌ها دارای دندانه‌های منحنی الشکل است. مزیت اصلی این نوع چرخ‌دنده‌ها تماس تدریجی و جلوگیری از ایجاد ضربه در دندانه‌ها می‌باشد. (شکل ۸)

شکل (۸)

همچنین چرخ دنده‌های مخروطی با محورهای غیر متعامد و چرخ دنده‌های مخروطی با محورهای متنافر نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۴ـ چرخ‌دنده‌های حلزونی: این نوع چرخ دنده‌ها برای ایجاد نسبت تبدیل‌های زیاد بین محورهای متنافر که به صورت عمود نسبت به یکدیگر قرار دارند، استفاده می‌شود. در این نوع چرخ دنده‌ها پینیون، پیچ حلزون و چرخ دنده درگیر با آن، **چرخ حلزون** نامیده می‌شود. ویژگی مهمی که این نوع چرخ دنده‌ها دارا می‌باشند خاصیت خود قفل‌کنی است. در این نوع چرخ دنده‌ها با حرکت دلخواه پیچ حلزون، حلزون به راحتی حرکت می‌کند. ولی با حرکت چرخ حلزون نمی‌توان حلزون را حرکت داد. بنابراین بدون استفاده از ترمز یا نیروی خارجی سیستم قفل می‌گردد.

(a)

(b)

شکل (۹)

اصطلاحات چرخ دنده‌ها

تعاریف و اصطلاحاتی که در ادامه می‌آید، مربوط به چرخ دنده‌های ساده می‌باشد. اگر چه برخی از تعاریف را می‌توان به چرخ دنده‌های دیگر تعمیم داد.

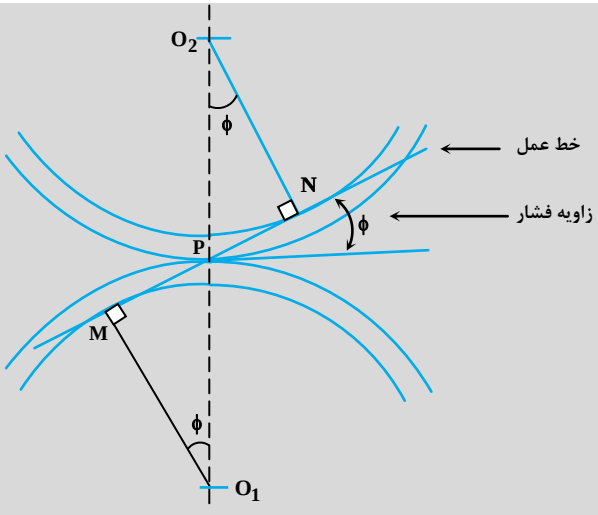
۱ـ خط عمل: به امتداد عمود مشترک دندانه‌ها در نقطه تماس که همان مماس مشترک دایره‌های مبنا می‌باشد، خط عمل گفته می‌شود. (شکل ۱۰)

۲ـ زاویه فشار: زاویه بین خط عمل و امتداد عمود بر خط المرکزین در نقطه گام چرخ‌دنده‌ها را زاویه فشار می‌گویند، که به طور معمول با ϕ نمایش داده می‌شود.

۳ـ دایره گام: یک دایره مجازی می‌باشد که غلتش خالص بر روی آن انجام می‌گیرد و به طور معمول چرخ‌دنده‌ها را با دوایر گام آنها نشان می‌دهند و دوایر گام چرخ‌دنده‌ها در نقطه گام بر یکدیگر مماس هستند.

۴ـ قطر گام: قطر دایره گام چرخ‌دنده‌ها را گویند.

۵ـ نقطه گام: نقطه‌ای بر روی دایره گام می‌باشد که چرخ‌دنده‌ها در آن نقطه بر یکدیگر مماس هستند.



شکل (۱۰)

۶ـ گام قطری P: نسبت تعداد دندانه‌ها بر هر اینچ از قطر دایره را گام گویند. گام قطری در سیستم‌های انگلیسی مورد استفاده قرار می‌گیرد که به صورت روبرو تعریف می‌گردد:

$$P = \frac{N}{D}$$

در معادله بالا، N تعداد دندانه‌های چرخ‌دنده، D قطر دایره گام چرخ‌دنده و P گام قطری می‌باشد. با توجه به رابطه بالا اگر D ثابت باشد، کوچک بودن گام قطری نشان دهنده این موضوع است تعداد دندانه کمتری بر روی دایره گام قرار دارد و یا به عبارت دیگر اندازه دندانه‌ها بزرگتر است.

۷ـ گام دایره‌ای P: فاصله بین نقطه‌ای روی یک دنده با نقطه نظیر آن بر روی دنده مجاور را گویند. این فاصله در راستای دایره گام اندازه‌گیری می‌شود.

$$P_c = \frac{\text{محیط دایره گام}}{\text{تعداد دندانه‌های گام}} = \frac{\pi D}{N} = \frac{\pi}{P} \qquad (۲)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

نکته۴: برای چرخدنده‌های در حال تماس باید گام دو چرخدنده با هم برابر باشند. به عبارت دیگر برای اینکه یک چرخدنده به قطر D_1 و تعداد دندانه N_1 با یک چرخدنده به قطر D و دندانه N_2 به درستی حرکت کنند باید داشته باشیم:

$$P_c = \frac{\pi D_1}{N} \Rightarrow \frac{D_1}{N_1} = \frac{D_2}{N_2}$$

۸ـ فاصله مرکزی: فاصله بین مراکز دو چرخ دنده می‌باشد که از روابط روبرو به دست می‌آید:

$$C = \frac{D_1 + D_2}{2} \qquad (3)$$

از رابطه و نکته بالا داریم:

$$D_1 = \frac{N_1}{P} \text{ و } D_2 = \frac{N_2}{P} \qquad (4)$$

با جایگذاری رابطه ۴ در رابطه ۳ داریم:

$$C = \frac{N_1 + N_2}{2p}$$

۹ـ ادندم: فاصله شعاعی بین دایره گام و سطح بالایی چرخدنده را گویند.

۱۰ـ دی‌دندم: (b) فاصله شعاعی بین دایره گام و سطح پایینی چرخدنده را گویند که در شکل ۱۱ نشان داده شده است.

مقدار ادندم و دی‌دندم برای چرخدنده‌های ساده با زاویه فشار ۲۰ درجه از رابطه روبرو بدست می‌آید.

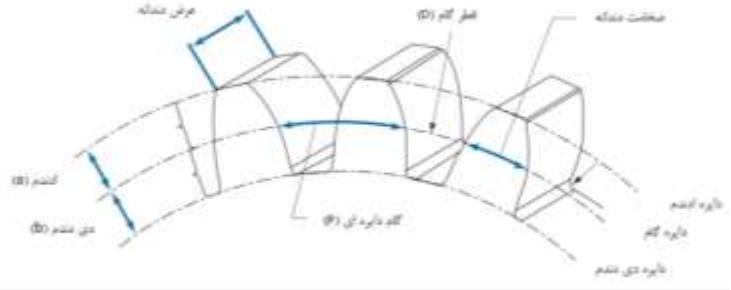
$$a = \frac{1}{P}, b = \frac{1/25}{P}$$

۱۱ـ دایره ادندم: دایره‌ای به مرکز چرخدنده که از سطح بالایی چرخدنده عبور می‌کند.

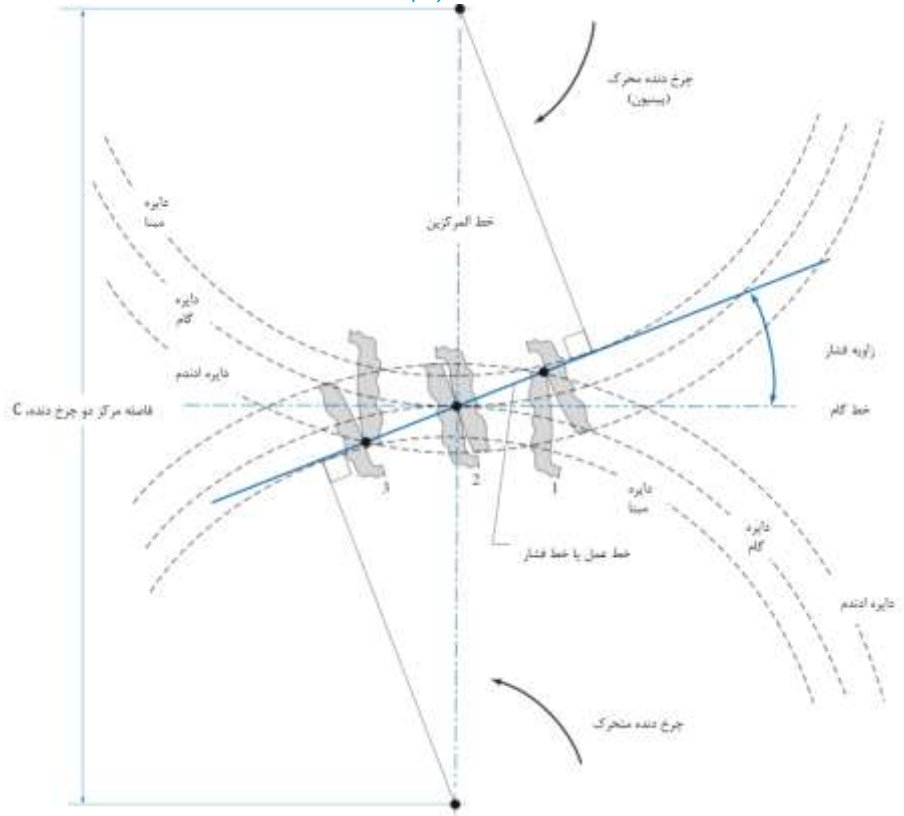
۱۲ـ دایره دی‌دندم: دایره‌ای به مرکز چرخدنده که از سطح پایینی چرخدنده عبور می‌کند. دایره دی‌دندم را **دایره ریشه** نیز می‌گویند که قطر آن از رابطه روبرو بدست می‌آید:

$$d_b = D \times \cos\phi$$

اصطلاحات بیان شده در اشکال زیر مشخص شده است. اکنون که با مفاهیم چرخدنده‌ها آشنا گشتیم در ادامه به بررسی نسبت سرعت در زنجیره چرخدنده‌ها پرداخت می‌شود.



شکل (۱۱)



شکل (۱۲)

www.modaresanesharif.ac.ir

مدرسان شریف

فصل هفتم

«بالانس دینامیکی و استاتیکی»

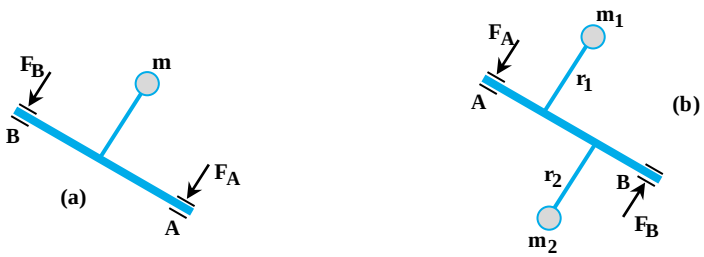
نیروهای اینرسی سبب ایجاد نیروهای لرزشی در یک مکانیزم می‌گردد. مکانیزم‌هایی که با سرعت بالا حرکت می‌کنند امروزه در صنعت بسیار کاربرد دارند، شرط لازم برای عملکرد مطلوب، تعادل کامل می‌باشد. هنگامی که تعادل در یک سیستم مکانیکی برقرار نباشد. نیروهای دینامیکی (مانند: نیروی گریز از مرکز در یک میله دوار) فعال می‌گردند. این نیروها علاوه بر ایجاد نیروهای زیاد در یاتاقان‌ها و ایجاد تنش‌های بالا در اعضا، سبب ایجاد ارتعاشات خطرناک و نامطلوب، در سیستم‌های دینامیکی می‌گردد. از طرف دیگر وجود این نیروها سبب ایجاد نویز و سر و صدای شدید می‌شود. فرآیند طراحی و اصلاح ماشین برای کاهش نامیزانی یا از بین بردن کامل نامیزانی، **میزان‌سازی** گفته می‌شود. یک عضو دوار می‌تواند هم به صورت استاتیکی و هم به صورت دینامیکی در حالت تعادل قرار داشته باشد. تعادل استاتیکی زیر مجموعه تعادل دینامیکی است. به عبارت دیگر اگر یک عضو دوار در حالت تعادل دینامیکی باشد، در حالت تعادل استاتیکی نیز می‌باشد. برای رسیدن به یک تعادل کامل باید تعادل دینامیکی برقرار باشد.

وسایل دوار در هنگام ساخت می‌توانند از نظر هندسی به گونه‌ای ساخته شوند که در تعادل کامل باشند. ولی به دلیل محدودیت‌های ساخت و در نظر گرفتن تلرانس‌های ساخت، (عدم دقت ماشین های تولید و ...) مقداری عدم تعادل در ذات سیستم وجود دارد. متعادل کردن وسایل دوار برای عملکرد مطلوب پس از فرآیند ساخت، یک امر اجتناب ناپذیر است. از آن‌جا که عامل اصلی ایجاد نامیزانی در یک سیستم، نیروهای اینرسی می‌باشد و این نیروها به خاطر حرکت اجرام دوار ایجاد می‌شوند، بنابراین اولین ایده‌ای که برای میزان‌سازی به ذهن خطور می‌کند، توزیع اجرام دوار می‌باشد. مقدار و مکان جرم لازم برای تعادل‌سازی به راحتی محاسبه گشته و با اضافه کردن یا برداشتن آن جرم، جسم دوار در حالت تعادل قرار می‌گیرد. روش‌های دیگری نیز برای میزان‌سازی وجود دارد که از جمله می‌توان به استفاده از فنر و دمپر برای میزان‌سازی، اشاره کرد. به این مکانیزم‌ها، **مکانیزم‌های میزان‌ساز** می‌گویند.

در این فصل به تعادل دینامیکی و استاتیکی اجسام دوار پرداخته می‌شود.

تفاوت تعادل دینامیکی و استاتیکی

در ابتدا با یک مثال تفاوت بین تعادل دینامیکی و استاتیکی بیان می‌شود. شکل زیر را در نظر بگیرید:



شکل (۱)

در شکل a-۱ سیستم در حالت عدم تعادل استاتیکی می‌باشد. زیرا در این حالت تنها یک نیرو وجود دارد که سبب عدم تعادل سیستم شده است. نیروهای تکیه‌گاهی در این حالت اگر فواصل با یکدیگر برابر باشند، در یک جهت و با یکدیگر برابرند؛ بنابراین هیچ گشتاوری در سیستم به وجود نمی‌آید. در نتیجه در سیستم فوق تنها نیروهای ناشی از وزن اجرام دوار است که سبب عدم تعادل گشته است. در تعادل استاتیکی به علت عدم قرارگیری مرکز جرم دوار بر روی خط‌المرکزین یاتاقان‌ها، یک نیروی نامیزان ایجاد می‌شود. نامیزانی استاتیکی را می‌توان به راحتی تشخیص داد. بدین منظور اگر محور بر روی سطح افقی قرار گیرد و مرکز جرم دوار بر روی خطی که مراکز دو یاتاقان را به هم وصل می‌کند، قرار نگیرد، در سیستم نامیزانی استاتیکی وجود دارد. تعادل استاتیکی را «تعادل اجرام صفحه‌ای» نیز می‌گویند. این نام‌گذاری به این خاطر است که برای اجرام قرار داده شده در یک صفحه چون تمام نیروهای اعمالی از یک نقطه عبور (محور دوران) عبور می‌کنند، هیچ گشتاوری که سبب عدم تعادل سیستم شود در سیستم ایجاد نمی‌گردد. بنابراین در این سیستم تنها عدم تعادل استاتیکی می‌تواند وجود داشته باشد. برای تعادل استاتیکی باید نیروهای اینرسی در تعادل قرار گیرد یا به عبارت دقیق‌تر با اضافه کردن یا

www.modaresanesharif.ac.ir

برداشتن جرم، مرکز جرم کلی را بر روی محور دوار قرار می‌دهند. در شکل b-۱ همانطور که مشاهده می‌شود، علاوه بر نیروهای اینرسی که سبب ایجاد عدم تعادل استاتیکی می‌شود، نیروهای اینرسی جرم m_1 و m_2 تشکیل یک کوپل نیز می‌دهند که تمایل به خم کردن محور دارند. این محور در صورتی متعادل می‌شود که کوپل تشکیل شده توسط نیروهای F_A و F_B گشتاور ایجاد شده توسط اجرام دوار را خنثی کند. این نوع تعادل، تعادل اجسام در دو صفحه نیز نامیده می‌شود. نامیزانی دینامیکی به راحتی مانند: نامیزانی استاتیکی قابل تشخیص نیست. هنگامی که داشته باشیم $m_1r_1 = m_2r_2$، مرکز جرم کلی محورهای دوار بر روی محور دوران قرار دارد (بالانس استاتیکی) ولی نامیزانی دینامیکی در سیستم وجود دارد. با توضیحات داده شده می‌توان نتیجه گرفت که:

نکته۱:

۱ـ در تعادل استاتیکی باید نیروهای لرزشی صفر شود.

۲ـ در تعادل دینامیکی باید نیروهای لرزشی و ممان‌های لرزشی صفر شود.

شرایط تعادل دینامیکی و استاتیکی

یک جسم در حالت تعادل استاتیکی است اگر جمع تمام نیروهای وارد بر یک سیستم دوار (شامل نیروهای اینرسی طبق اصل دالامبر) برابر صفر باشد، بنابراین داریم: $\sum F = 0$

حال برای برقراری تعادل دینامیکی اجسام دوار باید هم نیروها و هم گشتاورها حول هر نقطه صفر باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \sum F = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$

حال تعادل اجسام دوار در چهار حالت زیر بررسی می‌شود:

۱ـ تعادل یک جسم دوار که در یک صفحه قرار دارد.

۲ـ تعادل دو جسم دوار که در دو صفحه جداگانه قرار دارند.

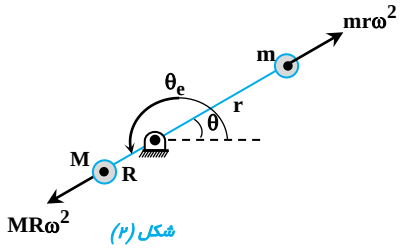
۳ـ تعادل چند جرم متفاوت که در یک صفحه قرار دارند.

۴ـ تعادل چند جرم متفاوت که در صفحات متفاوت قرار دارند.

حال به تفصیل به بررسی هر یک از حالات بالا پرداخته می‌شود:

۱ـ تعادل یک جسم که در یک صفحه قرار دارد.

حال فرض کنید که جرم m در شعاع r با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند.



شکل (۲)

برای متعادل نمودن سیستم بالا جرم M در شعاع R و زاویه θ_e قرار داده می‌شود.

حال برای تعادل استاتیکی در سیستم داریم:

$$\sum F_0 = 0 \qquad (۱)$$

$$m \times r \times \omega^2 \times \cos\theta - M\omega^2 \times R\cos\theta_e = 0 \qquad \text{با فرض وجود فقط نیروهای ثقلی} \qquad (۲)$$

$$\Rightarrow mr\cos\theta = MR\cos\theta_e \qquad (۳)$$

برای تعادل باید زاویه بین θ و θ_e مساوی 180° درجه باشد.

$$\theta_e = \theta + 180^\circ$$

$$\Rightarrow mr = MR \qquad (۴)$$

حال با معلوم بودن r و m می‌توان حاصلضرب MR را محاسبه نمود که معمولاً با انتخاب فاصله زیاد (R بزرگ) سعی می‌شود که جرم کوچکی برای توازن به دست آید.

۲ـ تعادل دو جسم دوار که در دو صفحه جداگانه قرار دارند.

در حالت قبل تنها یک جرم نامیزان وجود داشت و با قرار دادن یک جرم در همان صفحه تعادل برقرار گردید. حال در این قسمت دو جرم نامیزان که در دو صفحه جداگانه قرار دارند، میزان‌سازی می‌شود. تفاوت این قسمت با قسمت قبل در این است که در این حالت یک کوپل نامیزان در محور ایجاد می‌گردد که تمایل دارد محور را حول یاتاقان‌ها، بچرخاند. در این حالت باید یک جرم متعادل‌کننده را در یک صفحه جداگانه به گونه‌ای قرار داد که سیستم در حالت کلی به تعادل برسد. یا به عبارت دقیق‌تر هم تعادل دینامیکی و هم تعادل استاتیکی برقرار شود. برای تعادل باید شرایط زیر ارضا گردد:

۱ـ تمام نیروهای دینامیکی وارد بر سیستم برابر صفر گردد. برای ارضای این شرط، باید مرکز جرم کلی سیستم بر روی محور دوران قرار داشته باشد. (تعادل استاتیکی)

۲ـ جرم متعادل‌کننده در سمت راست یا چپ دو جرم m_1 و m_2 گشتاور نامیزان را خنثی کند. (تعادل دینامیکی)

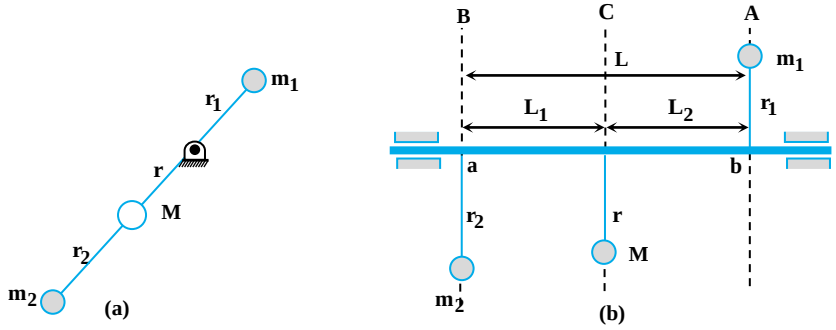
www.modaresanesharif.ac.ir

در ادامه تعادل دو جسم در دو صفحه جداگانه را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:

۱ـ۲ـ جرم متعادل‌کننده بین صفحات دو جرم دوار قرار گیرد:

فرض کنید که جرم m_1, m_2 در دو صفحه A و B مطابق (شکل ۳) دوران می‌کنند. حال برای توازن سیستم دوار، در این حالت جرم M در صفحه C بین صفحات A و B قرار داده می‌شود. شعاع جرم M, m_1, m_2 به ترتیب برابر r, r_1, r_2 می‌باشند.

از طرف دیگر فرض می‌شود که m_1, m_2 در یک صفحه قرار داشته باشند، به عبارت دیگر M در صفحه گذرنده از جرم‌های m_1 و m_2 باشد. یا به عبارت دقیق‌تر اختلاف زاویه بین اجرام دوار صفر یا ۱۸۰ درجه باشد. (شکل a-۳)



شکل (۳)

فاصله بین صفحات B و C $= L_1$

فاصله بین صفحات A و C $= L_2$

فاصله بین صفحات A و B $= L$

ابتدا تعادل استاتیکی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این حالت نیروهای دینامیکی با فرض دوران محور با سرعت ثابت، برابر نیروهای گریز از مرکز می‌باشد که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{F}_C = M\vec{r}\omega^2$$
$$\vec{F}_1 = m_1\vec{r}_1\omega^2 \qquad (۵)$$
$$\vec{F}_2 = m_2\vec{r}_2\omega^2$$

با توجه به این که باید مجموع تمام نیروهای دینامیکی وارد بر سیستم برابر صفر گردد، بنابراین با توجه به شکل باید اندازه‌ی نیروی دینامیکی جرم متعادل کننده با مجموع نیروهای اجسام دوار برابر باشد:

$$\sum F = 0 \Rightarrow \vec{F}_C + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \Rightarrow M\vec{r}\omega^2 + m_1\vec{r}_1\omega^2 + m_2\vec{r}_2\omega^2 = 0 \Rightarrow m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + M\vec{r} = 0 \qquad (۶)$$

شرط بالایی بیان‌کننده تعادل استاتیکی سیستم می‌باشد.

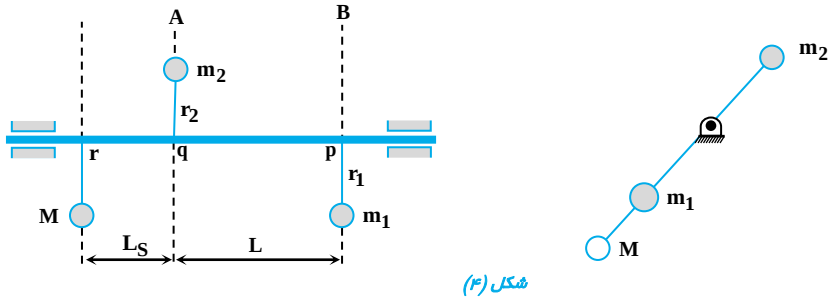
برای این که تعادل کامل در سیستم برقرار باشد، باید گشتاور نیروهای اینرسی حول هر نقطه از جمله a و b برابر صفر گردد:

$$\sum M_a = 0 \Rightarrow \vec{L}_1 \times \vec{F_C} + \vec{L} \times \vec{F}_{C_1} = 0 \qquad (۷)$$
$$\sum M_b = 0 \Rightarrow \vec{L}_2 \times \vec{F}_C + \vec{L} \times \vec{F}_{C_2} = 0$$
$$m_2 r_2 (L_1 + L_2) = MrL_2 \qquad (۸)$$

با تعیین Mr, L_1, L_2 به گونه‌ای که شرایط ۶ تا ۸ ارضا شود، توازن دینامیکی و استاتیکی سیستم کلی تضمین می‌گردد.

۲ـ۲ـ قرارگیری جرم متوازن‌کننده در چپ یا راست دو جرم دوار

جرم متوازن‌کننده M باید در سمت راست یا چپ دو جرم m_1, m_2 مطابق شکل زیر قرار داشته باشد و جرم‌های m_1 و m_2 و M در صفحه گذرنده از محور دوران باشد.



شکل (۴)

حال برای برقراری تعادل استاتیکی سیستم دوار باید مجموع نیروهای دینامیکی برابر صفر گردد:

$$\sum F_C = 0 \Rightarrow \vec{F}_C + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$
$$M\vec{r}\omega^2 + m_1\vec{r}_1\omega^2 + m_2\vec{r}_2\omega^2 = 0 \Rightarrow M\vec{r} + m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0 \qquad (۹)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

از طرف دیگر باید گشتاور نیروهای اینرسی حول هر نقطه از جمله Q و P صفر گردد:

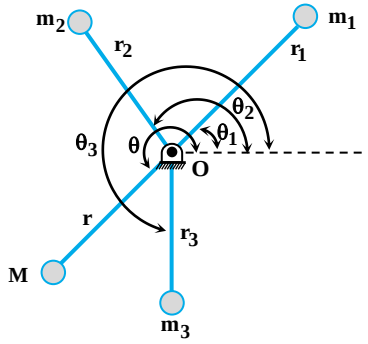
$$\sum M_P = 0 \Rightarrow (L + L_S)(Mr\omega^2) = L(m_2 r_2 \omega^2) \qquad (10)$$

$$\sum M_Q = 0 \Rightarrow (L_S) \times (Mr\omega^2) = L \times (m_1 r_1 \omega^2) \qquad (11)$$

بنابراین می‌توان با تعیین Mr و L_S به گونه‌ای که معادلات بالا ارضا گردند، توازن دینامیکی و استاتیکی سیستم را تضمین نمود.

۳) تعادل چند جرم که در یک صفحه قرار دارند.

در این قسمت به توسعه حالت اول هنگامی که بیش از دو جرم در یک صفحه داشته باشیم، می‌پردازیم. شکل ۵ را در نظر بگیرید. اجرام m_1, m_2, m_3 با شعاع‌های r_1, r_2, r_3 که در موقعیت‌های $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ نسبت به محور قرار گرفته‌اند را در نظر بگیرید.



شکل (۵)

برای این که این سیستم در حالت تعادل استاتیکی قرار داشته باشد باید جمع نیروهای اینرسی صفر گردد. برای جمع نیروها داریم:

$$\sum F = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} m_i \vec{r}_i \omega^2 + M\vec{r}\omega^2 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} m_i \vec{r}_i + M\vec{r} = 0$$

اگر معادلات بالا را در راستای x و y بنویسیم، داریم:

$$\sum_{i=1}^{3} m_i r_i \cos\theta_i + Mr\cos\theta = 0 \qquad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{3} m_i r_i \sin\theta_i + Mr\sin\theta = 0 \qquad (13)$$

از طرف دیگر چون تمام نیروهای اینرسی از یک مرکز O می‌گذرند، بنابراین گشتاورها نیز صفر می‌گردند و هیچ نیرویی در یاتاقان ایجاد نمی‌گردد.

دو راه حل برای حل معادلات (۱۲) و (۱۳) وجود دارد:

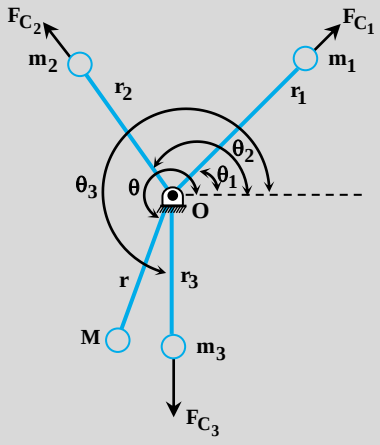
۱ـ حل ترسیمی، ۲ـ حل تحلیلی

حل ترسیمی

اندازه موقعیت جرم توازن به صورت ترسیمی با استفاده از مراحل زیر به دست می‌آید:

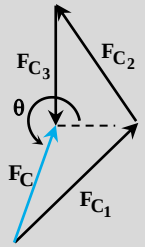
۱ـ ابتدا تمام نیروهای اینرسی را مشخص کنید (شکل ۶)

۲ـ نیروهای اینرسی که توسط هر جرم به محور اعمال می‌شود (ضرب جرم در فاصله تا مرکز دوران) را محاسبه کنید.



شکل (۶)

۳ـ حال دیاگرام نیرو را به وسیله نیروهای اینرسی به دست آمده در قسمت ۲، رسم کنید. در این حالت با انتخاب یک مقیاس، نیروها رسم می‌شوند. (شکل ۷)



www.modaresanesharif.ac.ir

شکل (۷)

۴ـ حال طبق قانون جمع برداری برای تعادل بردارها باید یک چند ضلعی بسته حاصل شود بنابراین ابتدای بردار F_{C_1} را به انتهای بردار F_{C_3} وصل می‌کنیم. بردار F_C حاصل می‌شود که بردار برآیند نامیده می‌شود.

۵ـ نیروی متعادل‌کننده برابر نیروی F_C ولی در جهت مخالف آن می‌باشد.

۶ـ حال با انتخاب یک جرم کوچک می‌توان فاصله جرم توازن تا محور دوران را محاسبه نمود.

$$F_C = mr\omega^2 \Rightarrow r = \frac{F_C}{m\omega^2} \qquad (۱۴)$$

روش تحلیلی

برای به دست آوردن مقدار و موقعیت جرم توازن به روش تحلیلی داریم:

۱) ابتدا نیروهای اینرسی هر جرم که برابر حاصلضرب هر جرم در شعاع دوران آن در مجذور سرعت زاویه‌ای است، محاسبه می‌شود.

۲) هر نیرو را در راستای افقی و عمودی تصویر کرده و با $\sum F_x$ و $\sum F_y$ نمایش داده می‌شود. داریم:

$$\sum F_x = (m_1 r_1 \cos\theta_1 + m_2 r_2 \cos\theta_2 + \cdots)\omega^2 \qquad (۱۵)$$
$$\sum F_y = (m_1 r_1 \sin\theta_1 + m_2 r_2 \sin\theta_2 + \cdots)\omega^2$$

۳) مقدار نیروی برآیند از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$F_C = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \qquad (۱۶)$$

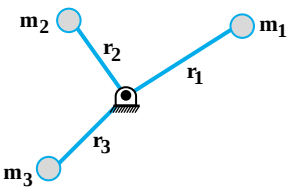
۴) زاویه‌ای که نیروی برآیند با محور مثبت x می‌سازد، برابر است:

$$\tan\theta = \frac{\sum F_y}{\sum F_x} \qquad (۱۷)$$

نکته۲: که در رابطه بالا مقدار زاویه θ با توجه به علامت $\sum F_y$ و $\sum F_x$ تعیین می‌گردد. به عبارت دیگر ناحیه مثلثاتی که زاویه θ در آن قرار می‌گیرد با توجه به علامت $\sum F_x$ و $\sum F_y$ مشخص می‌شود. به عنوان مثال اگر $\sum F_x$ منفی و $\sum F_y$ منفی باشد θ در ناحیه سوم مثلثاتی قرار دارد.

۵) نیروی توازن برابر نیروی برآیند ولی در جهت مخالف این نیرو می‌باشد.

مثال۱: جرم و موقعیت جرم توازن در سیستم زیر را به دست آورید.



$m_1 = 2kg \quad r_1 = 0/1 \quad \theta_1 = 30°$
$m_2 = 5kg \quad r_2 = 0/2 \quad \theta_2 = 120°$
$m_3 = 10kg \quad r_3 = 0/15 \quad \theta_3 = 225° \qquad \omega = 5rad/sec$

پاسخ:

۱ـ ابتدا نیروهای اینرسی را محاسبه می‌کنیم:

$$F_{C_1} = 0/2\omega^2 \qquad F_{C_2} = \omega^2 \qquad F_{C_3} = 1/5\omega^2$$

۲ـ سپس نیروها را در راستای x و y تصویر کرده و با هم جمع می‌کنیم.

$$\sum F_x = 0/2\omega^2 \cos 30 + \omega^2 \cos 120 + 1/5\omega^2 \cos 225$$
$$= 0/2\omega^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \omega^2 \times (-\frac{1}{2}) + 1/5\omega^2 (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \omega^2 (\frac{\sqrt{3}}{10} - \frac{1}{2} - \frac{15\sqrt{2}}{20}) = \frac{(2\sqrt{3} - 10 - 15\sqrt{2})}{20}\omega^2$$

$$\sum F_y = 0/2\omega^2 \sin 30 + \omega^2 \sin 120 + 1/5\omega^2 \sin 225$$
$$= 0/2\omega^2 \times \frac{1}{2} + \omega^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1/5\omega^2 (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \omega^2 (\frac{1}{10} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{15\sqrt{2}}{20}) = \omega^2 (\frac{2 + 10\sqrt{3} - 15\sqrt{2}}{20})$$

برآیند نیروها به صورت روبرو محاسبه می‌گردد:

$$F_C = \omega^2 \sqrt{(\frac{2\sqrt{3} - 10 - 15\sqrt{2}}{10})^2 + (\frac{2 + 10\sqrt{3} - 15\sqrt{2}}{20})^2} = 61/4$$

موقعیت نیروی برآیند به صورت روبرو به دست می‌آید:

$$\tan\theta = \frac{2/0267}{-1/3875} \Rightarrow \theta = 90 + \tan^{-1}(\frac{1/3875}{2/0267}) = 124/4$$

حال می‌توان موقعیت وزنه توازن را محاسبه نمود:

$$\theta = 180 + 124/4 = 304/4°$$

www.modaresanesharif.ac.ir