مدرسان شریف

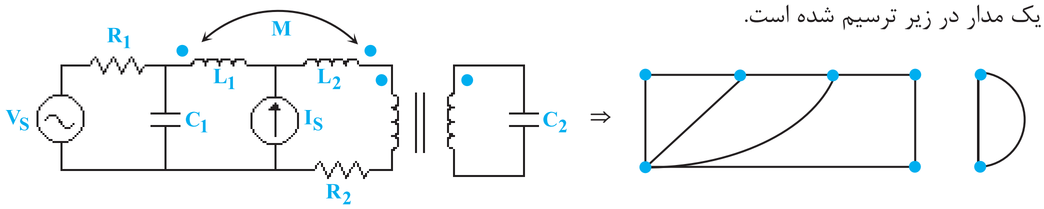
فصل ششم

«گراف‌های شبکه، روش‌های تجزیه و تحلیل مدار و مدار دوگان»

درسنامه (۱): مفاهیم و تعاریف اولیه گراف

تعریف گراف

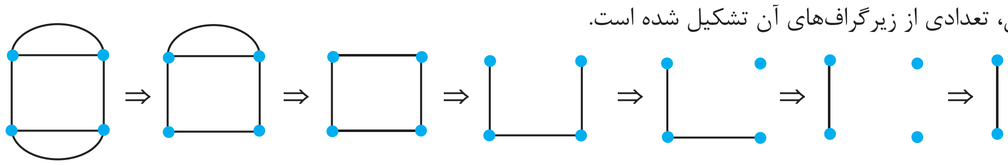
گراف به مجموعه‌ای از گره‌ها و شاخه‌های متصل به آن گفته می‌شود، در صورتی که هر شاخه در ابتدا و انتهایش گره‌ای داشته باشد. برای اینکه گراف معادل یک شبکه را ترسیم کنیم، لازم است که به جای هر المان، یک شاخه به همراه دو گره در انتها و ابتدای شاخه قرار دهیم. لازم به ذکر است که ترسیم گراف‌های مربوط به سلف‌های شامل القای متقابل و یا ترانسفورمر، بدون توجه به القای متقابل آنها صورت می‌گیرد. (یعنی نمایش به صورت گراف، القای متقابل در سلف‌ها را نشان نمی‌دهد، زیرا القای متقابل مربوط به ماهیت شاخه‌های مدار الکتریکی مورد نظر بوده و در تعریف ریاضیاتی گراف بی‌معنا است.) برای مثال، گراف یک مدار در زیر ترسیم شده است.



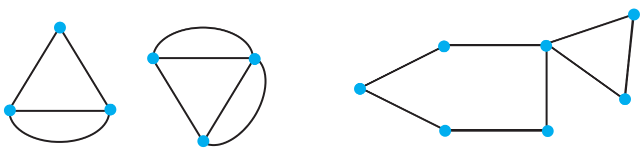
همان‌طور که دیده می‌شود، القای متقابل سلف‌های L_1 و L_2 و تزویج ترانسفورماتور در نمایش گرافی، نشان داده نشده است. لازم به ذکر است که در ترسیم گراف یک مدار، ممکن است گره‌ای وجود داشته باشد که به آن، هیچ شاخه‌ای متصل نباشد و این مورد با تعریف گراف منافاتی ندارد.

تعاریف اولیه در مبحث گراف‌ها

با حذف تعدادی از گره‌ها و شاخه‌های یک گراف، زیرگراف‌های مربوط به آن تشکیل می‌شوند. برای مثال در گراف زیر با حذف مرحله به مرحله گره‌ها و شاخه‌های گراف اصلی، تعدادی از زیرگراف‌های آن تشکیل شده است.

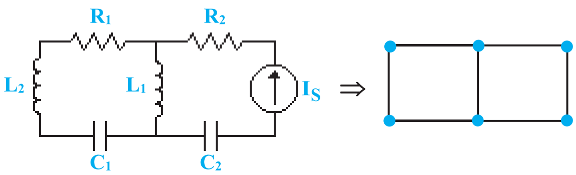


در صورتی که بین هر دو گره دلخواه از یک گراف، حداقل یک شاخه (یا حداقل یک مسیر متصل‌کننده آن دو گره) وجود داشته باشد، گراف مذکور پیوسته بوده و در غیر این صورت گراف ناپیوسته است. برای مثال گراف (الف) یک گراف پیوسته و گراف (ب) یک گراف ناپیوسته است.

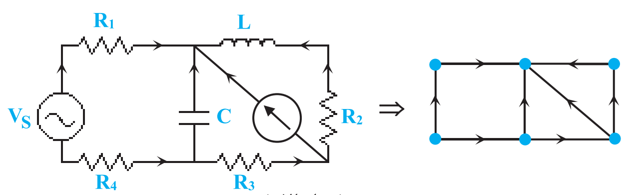


(گراف الف) (گراف ب)

در صورتی که در یک مدار جریان المان‌ها دارای جهت قراردادی باشد، شاخه‌های گراف معادل آن نیز دارای همان جهت‌ها خواهند بود. لذا گرافی را که شامل شاخه‌های جهت‌دار باشد، گراف جهت‌دار و گرافی را که شامل شاخه‌های بدون جهت باشد، گراف بدون جهت می‌نامند. برای مثال گراف معادل مدار (الف) جهت‌دار و گراف معادل مدار (ب) بدون جهت است.



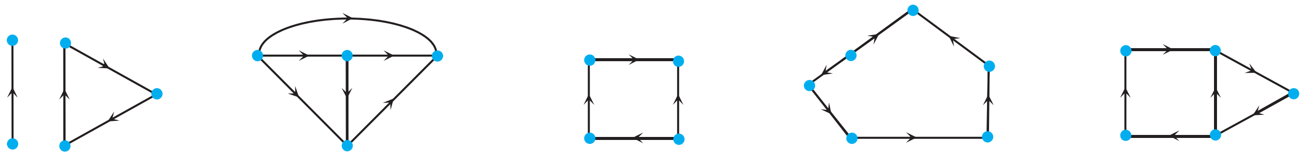
(مدار ب)



(مدار الف)

تعریف حلقه و قانون KVL

اگر زیرگرافی از یک گراف در نظر گرفته شود، به صورتی که اولاً زیرگراف مورد نظر پیوسته بوده و ثانیاً در آن هر گره فقط به دو شاخه متصل باشد، آنگاه زیرگراف مذکور تشکیل یک حلقه خواهد داد. برای مثال، چند زیرگراف زیر را در نظر بگیرید:



(الف) (ب) (ج) (د) (هـ)

گراف‌های (ب) و (ج) هر دو شرط را دارا بوده و حلقه هستند؛ ولی گراف‌های (الف) و (د) شرط دوم را ندارند و حلقه نمی‌باشند. همچنین گراف (هـ) نیز شرط اول و دوم را ندارد (زیرا برخی از گره‌ها تنها به یک شاخه وصلند). لذا گراف‌های (الف)، (د) و (هـ) حلقه نمی‌باشند.

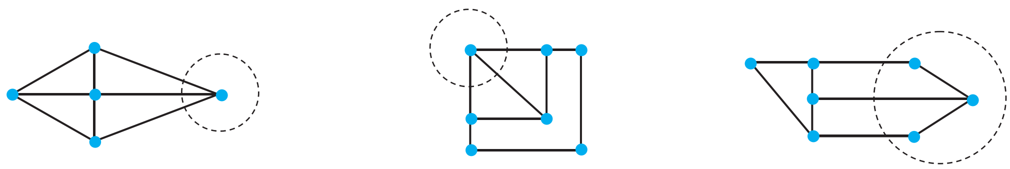
پس از تعریف حلقه به ارائه قانون KVL در هر حلقه می‌پردازیم. قانون ولتاژ کیرشهف یا همان قانون KVL در مورد هر حلقه مطلب زیر را بیان می‌کند:

«برای هر حلقه از یک گراف، حاصل جمع جبری ولتاژ شاخه‌ها برابر صفر است.»

برای نوشتن KVL به این نکته باید دقت شود که اگر جهت شاخه‌ها با جهت حرکت برابر باشد، ولتاژ شاخه با ضریب مثبت و در غیر این صورت با ضریب منفی نوشته می‌شود. لازم به ذکر است که انتخاب جهت حرکت اختیاری است.

تعریف کاتست و قانون KCL

برای مشخص شدن مفهوم کاتست، یک زیرگراف شامل چند شاخه را در نظر بگیرید. اگر با حذف کلیه شاخه‌های این زیرگراف، گراف اصلی به دو قسمت کاملاً جدا از هم و منفصل تبدیل شود، و با بازگرداندن هر یک از شاخه‌های این زیرگراف به گراف اصلی، این قسمت‌های مجزا دوباره متصل گردند، این زیرگراف که مجموعه‌ای از شاخه‌هاست، یک کاتست نامیده می‌شود. برای مثال در شکل‌های زیر چند کاتست از یک گراف ترسیم شده است.

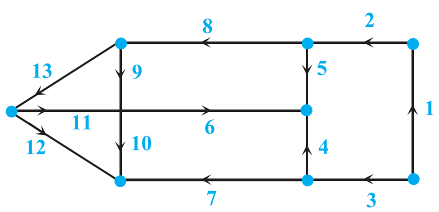


تفسیر قانون جریان کیرشهف یا همان قانون KCL در مورد هر کاتست به این صورت است:

«در هر کاتست مجموع جریان‌های شاخه‌های مختلف کاتست (با در نظر گرفتن جهت مناسب برای جریان‌ها) برابر صفر است.»

برای یافتن جهت مناسب جریان‌ها کافی است زیرمدار یا زیرگراف‌های ایجاد شده با حذف کاتست مورد نظر را در نظر بگیریم. در این صورت جهت جریان‌ها را به شکلی در نظر می‌گیریم که همگی به یکی از این دو زیرگراف خاص وارد شده و یا همگی از آن خارج شوند.

مثال ۱: در گراف زیر کدامیک از دسته معادلات، مربوط به کاتست در گراف است؟



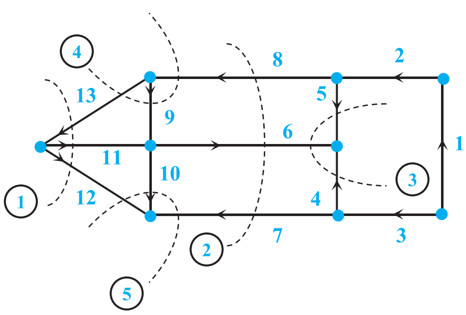
۱) $\begin{cases} I_6 = I_7 + I_8 \\ I_{13} = I_{11} + I_{12} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} I_4 = I_5 + I_6 \\ I_{13} = I_{11} + I_{12} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} I_7 + I_{10} = I_{12} \\ I_7 + I_9 + I_{13} = 0 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} I_4 = I_5 + I_6 \\ I_{10} + I_6 + I_8 = 0 \end{cases}$

پاسخ: گزینه «۱» با نوشتن معادلات کاتست‌های نشان داده شده داریم:



کاتست ۱ : $I_{13} = I_{11} + I_{12}$

کاتست ۲ : $I_6 = I_8 + I_7$

کاتست ۳ : $I_4 + I_5 + I_6 = 0$

کاتست ۴ : $I_8 = I_9 + I_{13}$

کاتست ۵ : $I_7 + I_{10} + I_{12} = 0$

لازم به ذکر است که برای گراف بالا کاتست‌های دیگری را نیز می‌توان در نظر گرفت.

درسنامه (۲): تحلیل مدار یا گراف با استفاده از روش‌های پایه حلقه و گره

برای تحلیل یک گراف با استفاده از روش‌های حلقه و گره ابتدا باید ماتریس‌های تلاقی شاخه با مش و تلاقی شاخه با گره را معرفی کنیم.

ماتریس تلاقی شاخه با مش (M_a)

برای حل مدارها به صورت ساده‌تر با قانون KVL و بیان ارتباط حلقه‌های مدار با شاخه‌های موجود در آن، ماتریس تلاقی شاخه با مش یا در حالت کلی حلقه، M_a را تعریف می‌کنیم. برای نوشتن این ماتریس تمام حلقه‌ها یا مش‌های درونی را ساعتگرد و حلقه بیرونی گراف را پادساعتگرد در نظر می‌گیریم. ماتریس تلاقی شاخه با مش یا M_a مستطیلی بوده و به تعداد شاخه‌های گراف یعنی b، دارای ستون می‌باشد. همچنین تعداد سطرهای آن برابر با مجموع تعداد مش‌های درونی و بیرونی مدار یعنی $L+1$ است. درایه‌های این ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m_{ij}=\begin{cases} 0 & \text{اگر شاخه } j \text{ در مش } i \text{ موجود نباشد.} \\ 1 & \text{اگر شاخه } j \text{ در مش } i \text{ بوده و جهت قراردادی آنها یکی باشد.} \\ -1 & \text{اگر شاخه } j \text{ در مش } i \text{ بوده و جهت قراردادی آنها یکی نباشد.} \end{cases}$$

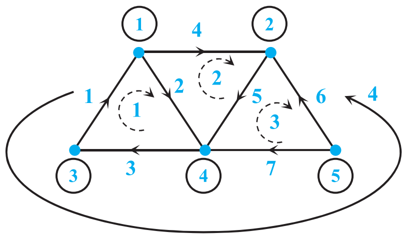
$$\begin{cases} L=b-n_t+1 \\ L: \text{ تعداد مش‌های درونی} \\ b: \text{ تعداد شاخه‌ها} \\ n_t: \text{ تعداد گره‌های گراف} \end{cases}$$

نکته۱: در ماتریس تلاقی شاخه با مش، جمع جبری درایه‌های هر ستون ماتریس M_a باید برابر صفر باشد. همچنین هر سطر از این ماتریس، بیانگر این است که چند شاخه درون مش مورد نظر بوده و چه شاخه‌هایی با مش هم‌جهت و چه شاخه‌هایی با مش غیرهم‌جهت هستند. هر ستون از این ماتریس، بیانگر این است که هر شاخه با چه مش‌هایی تلاقی دارد و آیا با آنها هم‌جهت است یا خیر. بنابراین چون هر شاخه حتماً با یک مش هم‌جهت و حتماً با یکی غیر هم‌جهت است، پس جمع درایه‌های هر ستون حتماً صفر است. (یعنی حتماً یک ۱+ و یک ۱- دارد.)

ماتریس تلاقی شاخه با مش مختصر شده (M)

در صورتی که سطر مربوط به مش بیرونی از ماتریس M_a حذف شود، ماتریس تلاقی شاخه با مش مختصر شده M تشکیل می‌شود.

مثال۲: برای گراف مقابل ماتریس‌های M_a و M را بدست آورید.



پاسخ: طبق نکات گفته شده، برای مش درونی جهت را ساعتگرد و برای مش بیرونی جهت را پادساعتگرد در نظر می‌گیریم. با استفاده از روش ذکر شده برای بدست آوردن ماتریس‌های M_a و M داریم:

$$M_a=\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \\ \underbrace{\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}}_{\text{تعداد شاخه‌ها}} \end{array} \left.\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\right\} L+1= \text{تعداد مش‌ها}$$

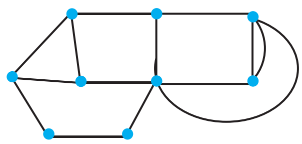
$$M=\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \\ \underbrace{\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}}_{\text{تعداد شاخه‌ها}} \end{array} \left.\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right\} \text{مش‌های درونی}$$

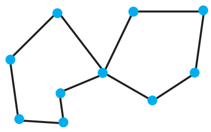
نکته۲: در صورتی که در یک سؤال ماتریس تلاقی شاخه با مش مختصر شده داده شده باشد و در گزینه‌ها ماتریس تلاقی شاخه با مش اصلی خواسته شده باشد، بدین صورت عمل می‌شود که یک سطر در انتهای ماتریس تلاقی شاخه با مش خلاصه شده M به صورتی اضافه می‌شود که جمع جبری درایه‌های هر ستون ماتریس M_a تشکیل شده صفر شود.

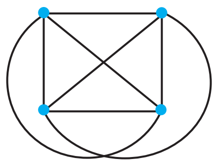
درسنامه (۴): مدارات دوگان

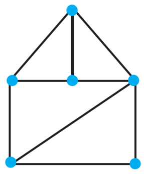
برای بررسی مفهوم مدار دوگان ابتدا باید با چند تعریف جدید در مبحث گراف آشنا شویم. این تعاریف مربوط به گراف مسطح و غیرمسطح و گراف لولادار و گراف بدون لولا خواهد بود.

اگر در یک گراف بتوان گراف را به صورتی به دو قسمت تجزیه کرد که دو قسمت گراف در یک گره مشترک باشند، گراف لولادار و در غیر این صورت گراف بدون لولا خواهد بود. همچنین در صورتی که بتوان گرافی را روی یک صفحه به صورتی نمایش داد که هیچ دو شاخه‌ای یکدیگر را قطع نکنند، گراف مذکور مسطح و در غیر این صورت گراف غیرمسطح است. برای مشخص شدن تعاریف، به اشکال زیر دقت کنید:


گراف بدون لولا


گراف لولادار


گراف غیرمسطح


گراف مسطح

تعریف دو شبکه دوگان

دو گراف یا دو شبکه را در صورتی دوگان می‌نامند که شرایط زیر برای آنها برقرار باشد:

۱ـ هر دو گراف مسطح و بدون لولا باشند.

۲ـ بین گره‌های گراف اول و مش‌های گراف دوم با در نظر گرفتن مش بیرونی یک تناظر یک به یک برقرار باشد.

۳ـ بین شاخه‌های دو گراف یک تناظر یک به یک برقرار باشد به صورتی که اگر در گراف اول بین دو گره یک المان مشترک موجود بود، در گراف دوم نیز مابین حلقه‌های متناظر با گره‌های مذکور، المان متناظری وجود داشته باشد.

۴ـ معادله هر شاخه از این گراف‌ها با جایگزینی زیر در گراف دوگان در شاخه متناظر بدست آید.

$$\boxed{j \to V \quad , \quad V \to j} \qquad \boxed{q \to \phi \quad , \quad \phi \to q}$$

مراحل ترسیم مدار دوگان

برای یک گراف مسطح و بدون لولا، مراحل ترسیم دوگان گراف یا مدار به صورت زیر است:

۱ـ ابتدا درون هر مش از گراف یک گره قرار می‌دهیم و بیرون گراف در زیر آن نیز یک گره مبنا متناظر می‌کنیم.

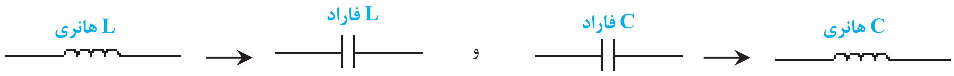
۲ـ به ازای وجود شاخه‌هایی که فقط در یک مش گراف هستند، یک شاخه بین گره درون مش و گره مبنا قرار می‌دهیم.

۳ـ به ازای هر شاخه که بین دو مش درونی در گراف وجود دارد، یک شاخه بین دو گره موجود در مش‌ها قرار می‌دهیم.

۴ـ امپدانس‌ها را به ادمیتانس و ادمیتانس‌ها را به امپدانس تبدیل می‌کنیم. همچنین عناصر سری را به عناصر موازی و عناصر موازی را به عناصر سری تبدیل می‌کنیم.

$$R \to \frac{1}{R} \quad , \quad Z \to \frac{1}{Z}$$

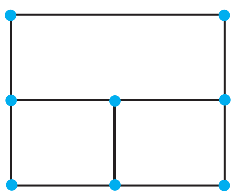
۵ـ سلف‌ها را به خازن و خازن‌ها را به سلف تبدیل می‌کنیم.



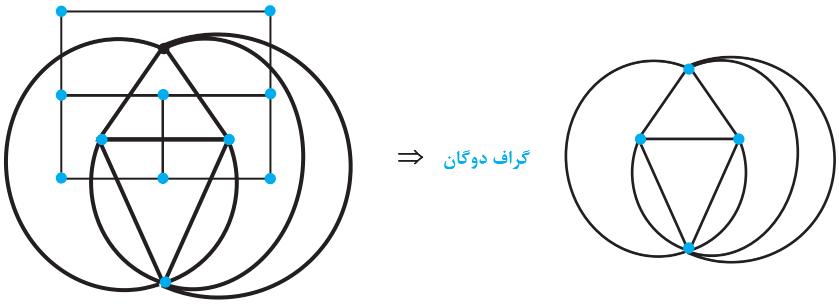
۶ـ منابع جریان را به منابع ولتاژ و منابع ولتاژ را به منابع جریان تبدیل می‌کنیم. (به جای منبع ولتاژ، یک منبع جریان با همان مقدار منبع ولتاژ قرار می‌دهیم و برعکس)

پلاریته منبع ولتاژ و جهت منبع جریان دوگان و همچنین ولتاژ و جریان دوگان سایر شاخه‌ها باید با تحلیل‌های مداری مشخص گردد. در این راستا مهمترین نکته‌ای که باید مدنظر قرار گیرد این است که جریان مش‌ها در مدار اصلی برابر ولتاژ گره‌های متناظر در مدار دوگان است.

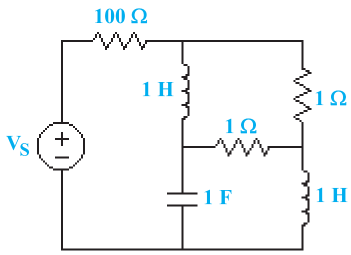
مثال۴۰: دوگان گراف زیر را ترسیم کنید.

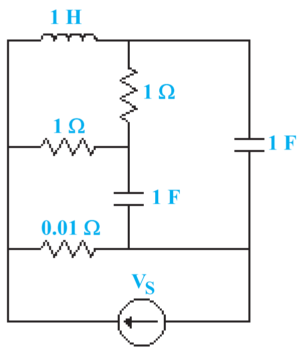


☑ **پاسخ:** برای ترسیم مدار دوگان، درون هر مش یک گره در نظر می‌گیریم و مطابق با مراحل ذکر شده در قبل عمل می‌کنیم.

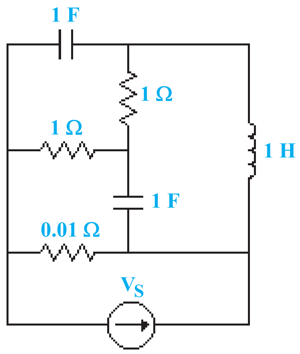


مثال ۴۱: کدامیک از مدارهای زیر، دوگان مدار مقابل است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۰)

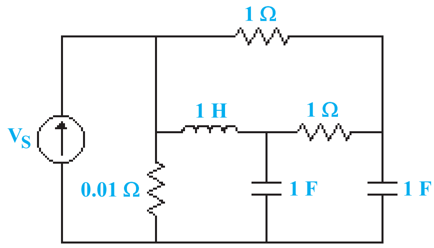




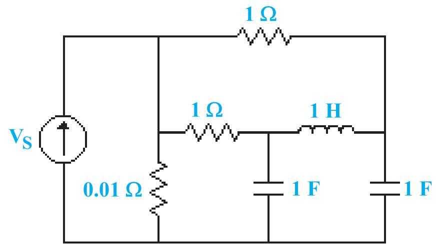
(۱)



(۲)

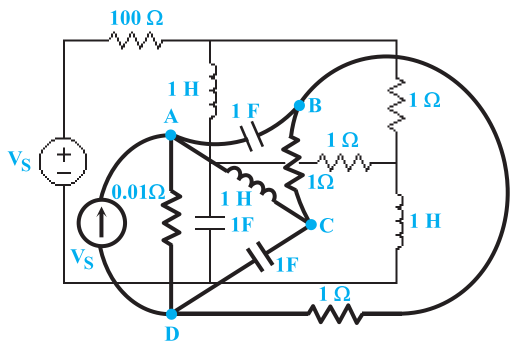


(۳)

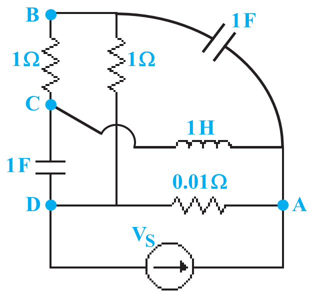


(۴)

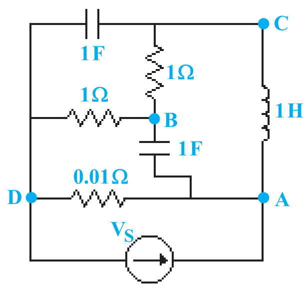
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای بدست آوردن دوگان مدار فوق طبق مراحل ذکر شده به صورت زیر عمل می‌کنیم.



شکل (۱)



شکل (۲)

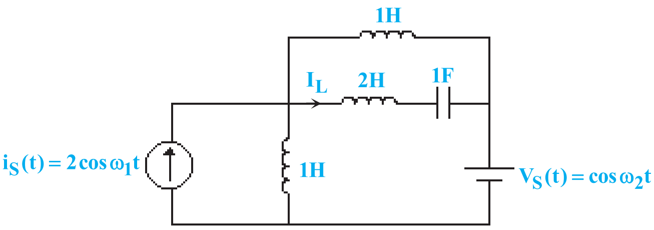


شکل (۳)

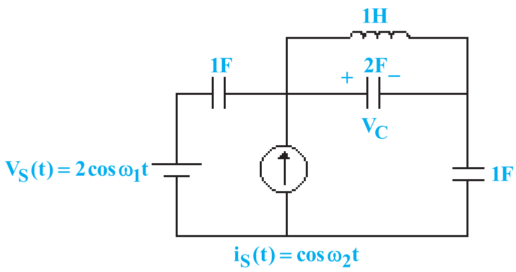
با توجه به گزینه‌ها دیده می‌شود که فقط گزینه (۲) صحیح است.

توجه: برای رسم شکل (۲) از روی شکل (۱) کافی است به تمام گره‌های درونی و نیز گره‌ی بیرونی نام‌هایی را (مثل A و B و C و D) اختصاص دهید. در این صورت شکل (۲) به راحتی رسم می‌شود. حال برای رسم شکل (۳) (شکل مرتب شده‌ی شکل ۲) کافی است گره‌ها را با نگاهی به گزینه‌ها مرتب کنید و هر عنصری را که بین دو گره‌ی معین در شکل (۲) بود، در محل مناسب خود در شکل (۳) قرار دهید. در این صورت شکل (۳) رسم می‌شود.

مثال۴۲: در مدار شکل (۱)، مقدار جریان سلف ۲H در جهت نشان داده شده و در حالت دائمی برابر $2\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t$ است. مقدار ولتاژ خازن ۲F در مدار شکل (۲) در حالت دائمی چقدر خواهد بود؟



(1)



(2)

۱) $V_C=2\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t$

۲) $V_C=-2\cos\omega_2 t+\cos\omega_1 t$

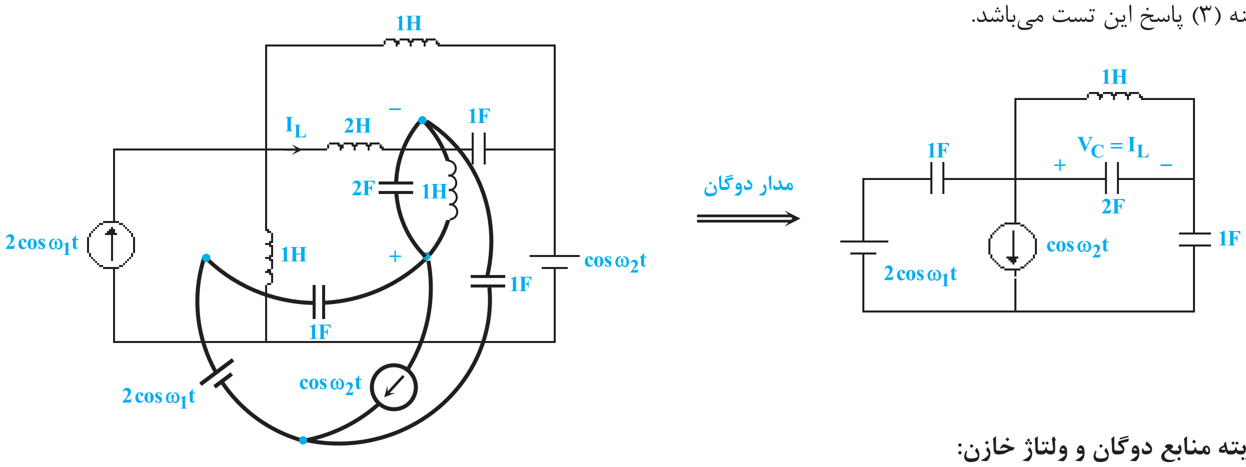
۳) $V_C=2\cos\omega_1 t-\cos\omega_2 t$

۴) $V_C=2\cos\omega_2 t+\cos\omega_1 t$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در مدار اول سه سلف و یک منبع جریان داریم که تشکیل گره داده‌اند و در مدار دوم سه خازن و یک منبع ولتاژ که تشکیل حلقه داده‌اند. همچنین یک خازن و منبع ولتاژ در شکل اول داریم که متعاقباً یک سلف و منبع جریان در شکل دوم نیز قرار گرفته است. اگر مدار دوگان شکل (۱) را رسم کنیم به شکل (۲) خواهیم رسید، لذا نکته سؤال در یافتن رابطه دوگانی دو مدار با یکدیگر است. بر اساس روابط دوگانی ولتاژ خازن در مدار دوگان برابر جریان سلف در مدار اصلی است. همچنین سلف و خازن مطرح شده در سؤال دقیقاً دوگان هم هستند، لذا ولتاژ خازن V_C همان I_L خواهد بود. البته این به معنای صحیح بودن گزینه (۱) نیست، زیرا جهت منبع جریان در مدار دوگان با جهت منبع جریان در مدار مورد سؤال یکسان نیست؛ با این حال به راحتی با در نظر گرفتن قانون جمع آثار می‌توان ولتاژ خازن را محاسبه کرد:

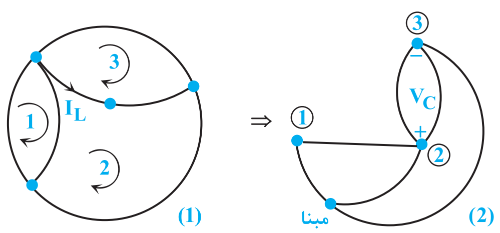
$$V_C=2\cos\omega_1 t-\cos\omega_2 t$$

بنابراین گزینه (۳) پاسخ این تست می‌باشد.



تعیین پلاریته منابع دوگان و ولتاژ خازن:

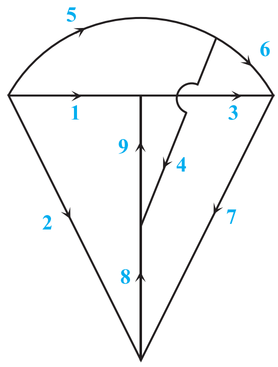
گراف مدار (۱) و دوگان آن را در نظر بگیرید. جریان I_L در این گراف برابر جریان مش (۲) منهای جریان مش (۳) است. ولتاژ V_C نیز برابر ولتاژ گره (۲) منهای ولتاژ گره (۳) در مدار دوگان است، پس $V_C=I_L$. از طرفی منبع ولتاژ موجود در مدار (۱) جریانی در خلاف جهت I_L در سلف ۲ هانری تولید می‌کند؛ بنابراین دوگان آن در مدار (۲) باید ولتاژی با پلاریته مخالف V_C در خازن ۲ فارادی به وجود آورد؛ از این رو منبع جریان در مدار دوگان از پلاریته مثبت V_C خارج شده است. با استدلال مشابهی می‌توان پلاریته درست منبع ولتاژ در مدار دوگان را تعیین کرد.



توجه: داوطلبانی که بعد از مطالعه کل کتاب نیاز به تست بیشتری برای مرور و تمرین دارند، می‌توانند با مراجعه به سایت www.modaresanesharif.ac.ir بانک تست‌های مربوط به همه فصول کتاب را دانلود نمایند.

تست‌های تکمیلی فصل ششم

۱ـ در گراف شکل مقابل، ماتریسی که ولتاژ شاخه‌های V_1، V_2، V_3 و V_4 را برحسب ولتاژ شاخه‌های V_5، V_6، V_7، V_8 و V_9 بیان می‌کند، به چه صورت است؟



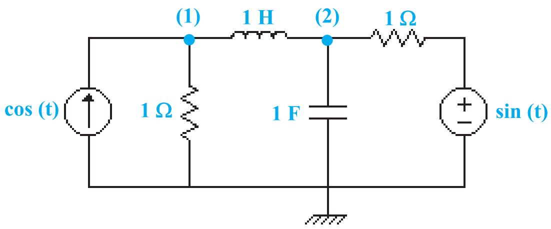
۱) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

۲ـ ماتریس ادمیتانس گره $Y(j\omega)$ برای مدار شکل مقابل کدام است؟



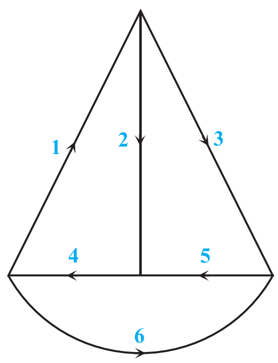
۱) $\begin{bmatrix} 1-j & j \\ j & 1 \end{bmatrix}$

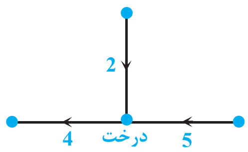
۲) $\begin{bmatrix} 1-j & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 1+j & j \\ j & j \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 1+j & -j \\ -j & j \end{bmatrix}$

۳ـ گراف یک شبکه و درخت مربوط به آن در شکل‌های زیر داده شده‌اند. حلقه‌ها و کاتست‌های اساسی آن کدام است؟





۱) کاتست‌های اساسی {۲,۱,۳} ، {۱,۶,۳} ، {۴,۱,۶}
حلقه‌های اساسی {۲,۴,۱} {۱,۵,۳} {۴,۵,۶}

۲) کاتست‌های اساسی {۳,۵,۶} ، {۵,۶,۴} ، {۴,۵,۲}
حلقه‌های اساسی {۲,۴,۱} {۲,۵,۳} {۴,۵,۶}

۳) کاتست‌های اساسی {۲,۱,۳} ، {۵,۶,۳} ، {۴,۱,۶}
حلقه‌های اساسی {۲,۴,۱} {۲,۵,۳} {۴,۵,۶}

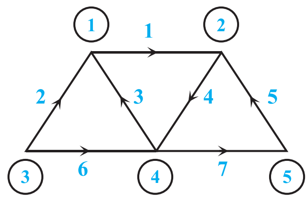
۴) کاتست‌های اساسی {۲,۱,۵,۶} ، {۵,۶,۳} ، {۳,۲,۴,۶}
حلقه‌های اساسی {۲,۴,۳} {۲,۵,۳} {۴,۵,۶}

۴ـ ماتریس تلاقی گره و شاخه شبکه‌ای به صورت زیر داده شده است. کدامیک از مجموعه شاخه‌های زیر، یک درخت برای گراف این شبکه محسوب می‌شود؟

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

۱) {۱,۶}
۲) {۱,۳}
۳) {۱,۲,۶}
۴) {۱,۲,۳,۴}

۵ـ در گراف زیر کدام دسته از معادلات، مربوط به معادلات KCL مستقل می‌باشند؟



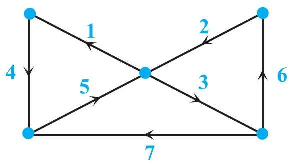
۱) $\begin{cases} j_1 - j_2 - j_3 = 0 \\ j_1 - j_4 + j_5 = 0 \\ j_2 + j_6 = 0 \\ j_5 - j_7 = 0 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} j_1 + j_2 + j_3 = 0 \\ j_1 - j_4 - j_5 = 0 \\ j_2 + j_6 = 0 \\ j_5 + j_7 = 0 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} j_1 - j_2 = j_3 \\ j_1 = j_4 - j_5 \\ j_2 = j_6 \\ j_5 = -j_7 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} j_1 - j_2 - j_3 = 0 \\ -j_1 + j_4 - j_5 = 0 \\ j_2 + j_6 = 0 \\ j_5 - j_7 = 0 \end{cases}$

۶ـ در گراف زیر ماتریس $B_1 = [I \vdots F]$ کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟



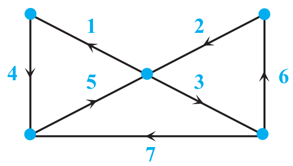
۱) $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

۲) $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

۳) $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

۴) $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

۷ـ در گراف زیر ماتریس $Q_1 = [E \vdots I]$ کدام است؟



۱) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

۸ـ با فرض داشتن ماتریس حلقه‌های اساسی به صورت زیر، تعداد لینک‌ها و شاخه‌های درخت مربوطه کدام است؟

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

۱) ۴ لینک و ۳ شاخه درخت

۲) ۵ لینک و ۳ شاخه درخت

۳) ۳ لینک و ۴ شاخه درخت

۴) ۳ لینک و ۵ شاخه درخت

۹ـ با فرض وجود ماتریس کاتست‌های اساسی Q به صورت زیر، کدامیک از گزینه‌های زیر ماتریس F در ماتریس حلقه‌های اساسی B گراف مذکور است؟

$$Q = \left[\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

۱) $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

۲) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۳) $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۴) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

۱۰ـ در گراف تست قبل کدام دسته از گزینه‌های زیر جزو حلقه‌های اساسی گراف هستند؟

۱) $\{2,3,4,6\},\{1,2\}$

۲) $\{3,5\},\{1,3,4,7\}$

۳) $\{2,3,4,6\},\{3,2\}$

۴) $\{1,2\},\{1,3,4,7\}$

پاسخنامه تست‌های تکمیلی فصل ششم

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۲»

مدرسان شریف

فصل هفتم

«معادلات حالت»

درسنامه (۱): معادلات حالت: انتخاب متغیرهای حالت و نحوه محاسبه معادلات

حالت سیستم بیانگر اطلاعاتی از سیستم در زمان t است که می‌توان از روی آن توصیف کاملی از سیستم شامل اطلاعات مورد ذکر و رفتار دینامیکی در بازه زمانی ۰ تا t به دست آورد، در صورتی‌که ورودی‌های سیستم نیز در این بازه زمانی معلوم باشند. اگر حالت سیستم به عنوان یک بردار در نظر گرفته شود، مؤلفه‌های آن را متغیرهای حالت می‌نامند. در شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، معادلات حالت به فرم زیر نوشته و مرتب می‌شوند:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BW(t)$$
$$Y(t) = CX(t) + DW(t)$$

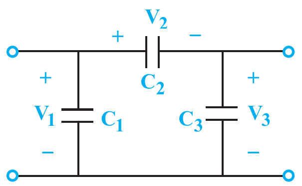
در روابط بالا A ماتریس ضرایب حالت بوده و B ماتریس ضرایب ورودی و $W(t)$ بردار ورودی‌های سیستم می‌باشد. همچنین $X(t)$ بردار حالت و D و C در حالت کلی دو ماتریس ثابت هستند که به توپولوژی شبکه و مقادیر اجزای آن وابسته بوده و $Y(t)$ نیز بردار خروجی‌های سیستم می‌باشد.

نحوه انتخاب متغیرهای حالت و محاسبه تعداد آن‌ها

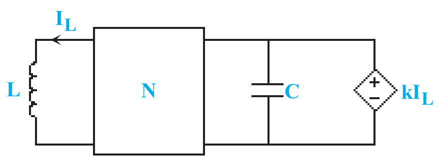
در شبکه‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان، عموماً متغیرهای حالت مربوط به جریان سلف‌ها و ولتاژ خازن‌ها هستند. لذا اگر $X(t)$ بردار حالت مربوط به آنها باشد، $\dot{X}(t)$ مربوط به مشتق جریان سلف‌ها و مشتق ولتاژ خازن‌های شبکه است. لازم به ذکر است که جریان سلف‌های مربوط به ترانسفورمرها به عنوان متغیر حالت انتخاب نمی‌شوند. تعداد متغیرهای حالت یک مدار، برابر تعداد فرکانس‌های طبیعی آن مدار و برابر با مرتبه مدار می‌باشد. برای محاسبه تعداد متغیرهای حالت، ابتدا تعداد سلف‌ها و خازن‌های مدار را شمارش کرده و به ازای وجود هر کاتست سلفی و هر حلقه خازنی، یک عدد از تعداد شمارش شده، کم می‌کنیم. در صورت وجود هر سلف و خازن وابسته به یکدیگر (جریان سلف وابسته به ولتاژ خازن باشد و یا برعکس) نیز یک عدد از تعداد شمارش شده کم می‌شود. با توجه به موارد گفته شده داریم:

(تعداد سلف‌ها و خازن‌های وابسته به هم) − (تعداد حلقه‌های خازنی) − (تعداد کاتست‌های سلفی) − تعداد خازن‌ها + تعداد سلف‌ها = تعداد متغیرهای حالت

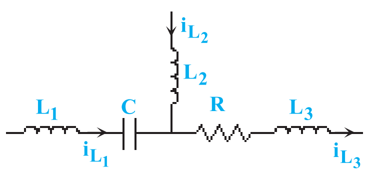
برای درک دقیق‌تر، مثال‌های زیر را در نظر بگیرید.



۱ـ در مدار روبه‌رو خازن‌ها تشکیل حلقه داده و ولتاژشان وابسته است. لذا تنها دو متغیر حالت داریم و از میان V_1، V_2 و V_3، ۲ مورد به‌عنوان متغیرهای حالت انتخاب می‌شود.



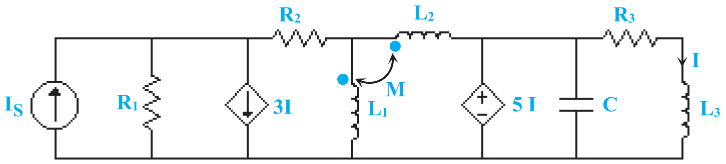
۲ـ در مدار روبه‌رو ولتاژ خازن وابسته به جریان سلف است. لذا یک متغیر حالت بیشتر نداریم که از بین ولتاژ خازن و جریان سلف انتخاب می‌شود.



۳ـ در مدار روبه‌رو، سلف‌ها تشکیل کاتست می‌دهند و جریان آن‌ها وابسته به یکدیگر می‌باشد. در این حالت از میان i_{L_1}، i_{L_2} و i_{L_3} می‌توان ۲ مورد را به‌عنوان متغیرهای حالت برگزید.

روش بدست آوردن مرتبه مدار و تعداد فرکانس‌های طبیعی را در فصل نهم به صورت کامل بررسی خواهیم کرد.

مثال۱: برای نوشتن معادلات حالت در مدار شکل مقابل، چند متغیر حالت می‌توان انتخاب کرد؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

پاسخ: گزینه «۲» با شمارش تعداد سلف‌ها و خازن‌ها تعداد متغیرهای حالت برابر ۴ به دست می‌آید و البته شرط لازم برای آنها، استقلال آن‌ها از یکدیگر می‌باشد. با دقت در مدار دیده می‌شود که ولتاژ خازن برابر $5I$ بوده و I جریان سلف است؛ لذا از تعداد متغیرهای حالت یکی کم می‌شود، بنابراین ۳ متغیر حالت وجود دارد.

مراحل نوشتن معادلات حالت در شبکه‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان

برای نوشتن معادلات حالت در یک شبکه خطی و تغییرناپذیر با زمان ابتدا باید متغیرهای حالت را انتخاب کنیم. در یک مدار عموماً ولتاژ و یا بار خازن‌ها و جریان یا شار سلف‌ها به عنوان متغیر حالت انتخاب می‌شوند. پس از انتخاب متغیرهای حالت، به روش زیر عمل می‌کنیم:

۱) درخت مناسبی را انتخاب می‌کنیم که حداکثر تعداد خازن‌های موجود در مدار را شامل شود و حداقل تعداد سلف در این درخت موجود باشد. بدیهی است که باید خازن‌ها در شاخه‌های درخت باشند و سلف‌ها در لینک‌های آن قرار گیرند. سعی کنید منابع ولتاژ (خواه مستقل و خواه وابسته) را در شاخه‌های درخت قرار دهید و همچنین منابع جریان نیز چه مستقل و چه وابسته در لینک‌ها قرار گیرد.

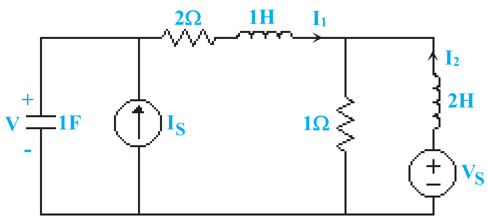
۲) برای تمام خازن‌های موجود در درخت معادلات کاتست‌های اساسی را می‌نویسیم. بدیهی است که معادلات کاتست‌های اساسی، متناظر با هر شاخه درخت که شامل خازن است، نوشته می‌شود.

۳) برای تمام سلف‌های موجود در لینک‌ها، معادلات حلقه‌های اساسی را می‌نویسیم.

۴) برای نوشتن معادلات حالت، باید دقت کنید که مشتق متغیرهای حالت یا به عبارتی $\frac{dV_C}{dt}$ و $\frac{dI_L}{dt}$ یا $\frac{dq}{dt}$ و یا $\frac{d\phi}{dt}$ باید برحسب متغیرهای حالت مرتب شوند و اگر جریان یا ولتاژ المان دیگری در معادلات ظاهر شود، باید پارامتر مربوطه را برحسب متغیرهای حالت با نوشتن KVL یا KCL مناسب به دست آورده و در معادلات حالت جایگزین کرد. بدین منظور اگر المان اضافه در شاخه درخت قرار گیرد، معادلات کاتست همان شاخه نوشته می‌شود و اگر این المان در لینک باشد، معادلات حلقه مربوط به آن نوشته می‌شود.

۵) حال معادلات حالت بدست آمده را مطابق با رابطه روبرو مرتب می‌کنیم. $\dot{X}(t)=AX(t)+BW(t)$

مثال۲: در صورتی‌که معادلات حالت به صورت $\begin{cases}\dot{X}(t)=AX(t)+BW(t)\\ Y(t)=CX(t)+DW(t)\end{cases}$ باشد، برای مدار روبرو معادلات حالت کدام است؟



۱) $$\begin{bmatrix}\frac{dI_1}{dt}\\ \frac{dI_2}{dt}\\ \frac{dV}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\ I_2\\ V\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_S\\ V_S\end{bmatrix}$$

۲) $$\begin{bmatrix}\frac{dI_1}{dt}\\ \frac{dI_2}{dt}\\ \frac{dV}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\ I_2\\ V\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_S\\ V_S\end{bmatrix}$$

۳) $$\begin{bmatrix}\frac{dI_1}{dt}\\ \frac{dI_2}{dt}\\ \frac{dV}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\ I_2\\ V\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_S\\ V_S\end{bmatrix}$$

۴) $$\begin{bmatrix}\frac{dI_1}{dt}\\ \frac{dI_2}{dt}\\ \frac{dV}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -1 & 1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\ I_2\\ V\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_S\\ V_S\end{bmatrix}$$

استفاده از معادله دیفرانسیل مینیمال برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی متغیر شبکه

در صورتی که معادله دیفرانسیل مینیمال به صورت $Q(D).X = 0$ یا $Q(S).X = 0$ بدست آمده باشد، معادله مشخصه متناظر با $Q(S)$ را بدست می‌آوریم و ریشه‌های آن را به عنوان فرکانس‌های طبیعی مربوط به متغیر شبکه معرفی می‌کنیم.

پس از بدست آوردن ریشه‌های این معادله $\{S_i\}_{i=1}^{n}$ پاسخ ورودی صفر متغیر مذکور به صورت زیر است:

$$X(t) = a_1e^{S_1t} + a_2e^{S_2t} + \dots + a_ne^{S_nt} = \sum_{i=0}^{n} a_ie^{S_it}$$

در صورتی که معادله مشخصه بدست آمده دارای ریشه‌های مکرر باشد، آنگاه فرکانس طبیعی بدست آمده از آن را از مرتبه m معرفی کرده و داریم:

$$(S_t + b)^m X(S) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(t) = \sum_{i=0}^{m-1} a_it^ie^{-bt} \quad \Rightarrow \quad X(t) = a_0e^{-bt} + a_1te^{-bt} + a_2t^2e^{-bt} + a_3t^3e^{-bt} + \dots$$

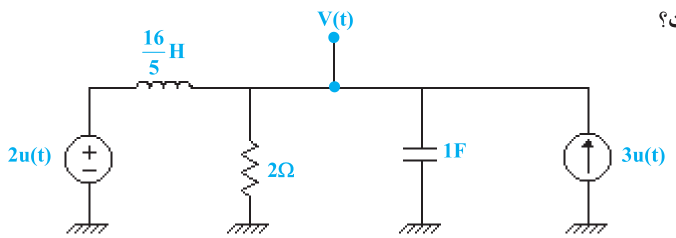
نکته۲: با توجه به معادله دیفرانسیل مینیمال، می‌توان گفت که تعداد فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه، برابر با مرتبه معادله دیفرانسیل مینیمال آن متغیر شبکه بوده و همچنین این تعداد برابر با حداقل تعداد شرایط اولیه برای یکتا بودن پاسخ معادله دیفرانسیل است.

مراحل محاسبه فرکانس‌های طبیعی متغیر شبکه با استفاده از معادله مشخصه مربوط به معادله دیفرانسیل مینیمال:

۱ـ در صورتی که معادله دیفرانسیل مینیمال متغیر شبکه موجود باشد، به جای عبارت $\frac{d}{dt}$ عبارت S را جایگزین کرده و معادله مشخصه مربوط به متغیر شبکه را بدست می‌آوریم. ریشه‌های این معادله مشخصه، همان فرکانس‌های طبیعی متغیر شبکه هستند.

۲ـ در صورتی که معادله دیفرانسیل مینیمال یا معادله مشخصه مربوط به متغیر شبکه موجود نباشد، ابتدا باید معادله مشخصه مربوط به متغیر شبکه محاسبه شود. برای این کار ابتدا منابع مستقل ولتاژ را با اتصال کوتاه و منابع مستقل جریان را با مدار باز معادل‌گذاری می‌کنیم. سپس مدار را در حوزه فرکانس ترسیم کرده و با استفاده از قوانین حلقه یا گره و یا قضایای تونن و نورتن، متغیر خروجی (پاسخ مدار) را محاسبه می‌کنیم. حال با صفر قرار دادن ضریب متغیر خروجی، معادله مشخصه مربوط به متغیر مدار بدست می‌آید. در این حالت ریشه‌های معادله مشخصه مربوط به متغیر مدار، همان فرکانس‌های طبیعی مربوط به متغیر مورد نظر است.

مثال۱: **در مدار زیر فرکانس‌های طبیعی مربوط به متغیر $V(t)$ کدام است؟**



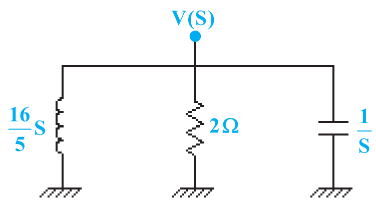
۱) $S_1, S_2 = -\frac{1}{4} \pm j\frac{1}{2}$

۲) $S_1, S_2 = \frac{1}{4} \pm j\frac{1}{2}$

۳) $S_1, S_2 = \frac{1}{4} \pm j\frac{1}{3}$

۴) $S_1, S_2 = -\frac{1}{4} \pm j\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این که معادله مشخصه مربوط به معادله دیفرانسیل مینیمال $V(t)$ موجود نیست، مطابق با روش گفته شده، ابتدا معادله مشخصه مربوط به متغیر V را محاسبه می‌کنیم. بنابراین منابع مستقل مدار را غیرفعال کرده و مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم. با نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:

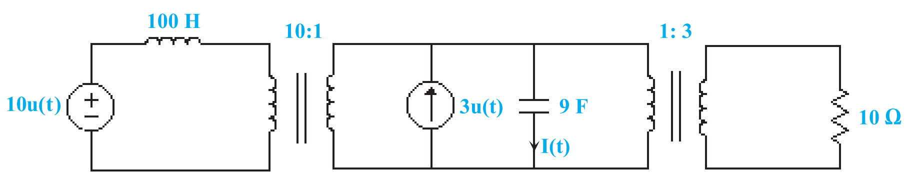


$$\frac{V(S)}{\frac{16}{5}S} + \frac{V(S)}{2} + \frac{V(S)}{\frac{1}{S}} = 0 \quad \Rightarrow \quad V(S)[\frac{5}{16S} + \frac{1}{2} + S] = 0$$

حال ضریب $V(S)$ در معادله بالا، همان معادله مشخصه مربوط به $V(S)$ می‌باشد.

$$\frac{5}{16S} + \frac{1}{2} + S = 0 \quad \Rightarrow \quad S^2 + \frac{1}{2}S + \frac{5}{16} = 0 \quad \Rightarrow S_1, S_2 = -\frac{1}{4} \pm j\frac{1}{2}$$

مثال۲: **در مدار زیر فرکانس‌های طبیعی مربوط به جریان I در مدار کدام است؟**



۱) $\frac{1}{20} \pm j0/33$

۲) $-\frac{1}{20} \pm j0/33$

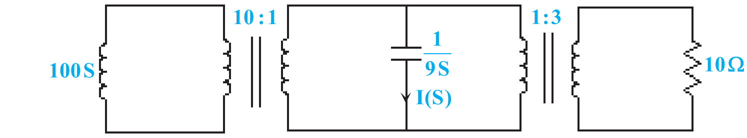
۳) $\frac{1}{10} \pm j0/2$

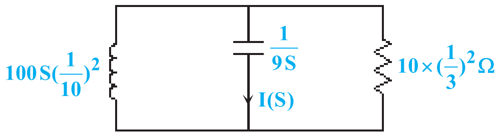
۴) $-\frac{1}{10} \pm j0/2$

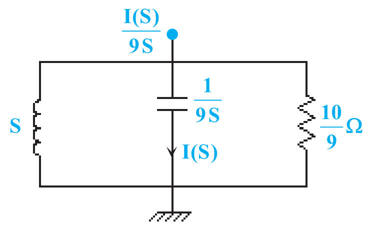
پاسخ: گزینه «۲» برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی مربوط به متغیر I، ابتدا باید معادله مشخصه مربوط به متغیر I را محاسبه کنیم. بنابراین منابع مستقل ولتاژ را با اتصال کوتاه و منابع مستقل جریان را با مدار باز مدل می‌کنیم و مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم.

با استفاده از قانون انعکاس امپدانس، مقاومت ۱۰ اهمی را به سمت اولیه ترانس سمت راست منتقل کرده و سلف ۱۰۰S را نیز به سمت ثانویه ترانس سمت چپ منتقل می‌کنیم.

با نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:





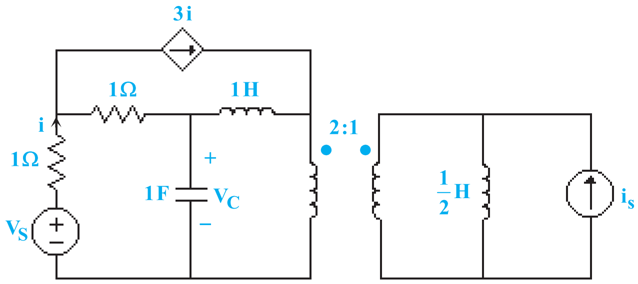


$$\frac{\frac{I(S)}{9S}}{S}+I(S)+\frac{\frac{I(S)}{9S}}{\frac{10}{9}}=0 \Rightarrow I(S)[\frac{1}{9S^2}+1+\frac{1}{10S}]=0$$

حال معادله مشخصه مربوط به متغیر I(S) به صورت زیر است:

$$\frac{1}{9S^2}+1+\frac{1}{10S}=0 \Rightarrow 9S^2+\frac{9}{10}S+1=0 \Rightarrow S^2+\frac{1}{10}S+\frac{1}{9}=0 \Rightarrow S_1 \text{ و } S_2=-\frac{1}{20}\pm j0/33$$

مثال ۳: در مدار شکل زیر فرکانس‌های طبیعی متغیر V_C کدام است؟

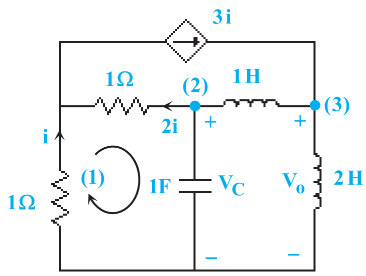


۱) $\frac{-3\pm\sqrt{6}}{2}$ ۲) $\frac{-1\pm j\sqrt{7}}{4}$

۳) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۴) $\pm j\frac{\sqrt{3}}{3}$

پاسخ: گزینه «۴»

در اولین گامِ محاسبه فرکانس‌های طبیعی V_C منابع تغذیه مستقل را صفر می‌کنیم. می‌دانیم که امپدانسی که از سر اول ترانسفورماتور دیده می‌شود، برابر امپدانس معادل ثانویه ترانسفورماتور ضربدر مجذور تعداد دور اولیه به تعداد دور ثانویه است؛ بنابراین در این مدار امپدانس ۲S از سر سمت چپ ترانسفورماتور دیده خواهد شد. اکنون مدار معادل مقابل را در نظر بگیرید که در آن امپدانس دیده شده از سمت چپ ترانسفورماتور جایگزین ترانسفورماتور و سلف سمت راست آن شده است:



با KVL زدن در حلقه (۱) داریم: $i-2i+V_C=0 \Rightarrow i=V_C$

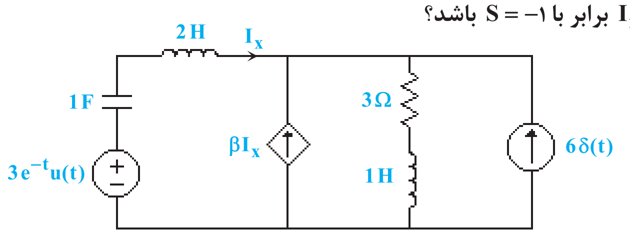
اکنون در گره (۲)، KCL می‌زنیم: $2i+SV_C+\frac{V_C-V_o}{S}=0 \xrightarrow{\times S} V_o=(S^2+2S+1)V_C$

و حالا در گره (۳) می‌توان نوشت: $\frac{V_o-V_C}{S}+\frac{V_o}{2S}-3i=0 \xrightarrow{\times 2S} 3\times(S^2+2S+1)V_C-2V_C-2S\times 3V_C=0 \Rightarrow (3S^2+1)V_C=0$

بنابراین فرکانس‌های طبیعی V_C ریشه‌های معادله مشخصه $3S^2+1=0$ می‌باشند: $S_{1,2}=\pm j\frac{\sqrt{3}}{3}$

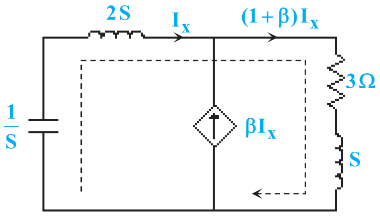
نکته ۳: اگر متغیر x(t) در مداری دارای فرکانس طبیعی $S=\lambda$ باشد، با غیرفعال کردن منابع مستقل مدار و با جایگذاری مقادیر معادل المان‌های مدار در فضای S با فرض $S=\lambda$، چنانچه مدار با روش‌های مختلف تحلیل گردد، در نهایت باید به رابطه $X(\lambda)=0\times0$ برسیم. (اگر منابع را غیرفعال نکنیم باید به رابطه $X(\lambda)=Y(\lambda)\times0$ برسیم که $Y(\lambda)$ وابسته به منابع مستقل مدار است.) رابطه فوق می‌گوید که مقدار X(S) در فرکانس $S=\lambda$ غیرقابل محاسبه است. در حالت خاص اگر λ برابر صفر باشد، مقدار $X(S=0)$ در حالت DC (خازن‌ها مدار باز و سلف‌ها اتصال کوتاه) موجود نیست و این یعنی متغیر x(t) پاسخ حالت ماندگار DC ندارد.

مثال ۴: در مدار زیر مقدار β کدام باشد تا یکی از فرکانس‌های طبیعی متغیر I_x برابر با $S=-1$ باشد؟



۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۱

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» **روش اول:** ابتدا منابع مستقل موجود در مدار را غیرفعال می‌کنیم و در ادامه مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم.

با نوشتن KVL در حلقه مشخص شده در مدار داریم:

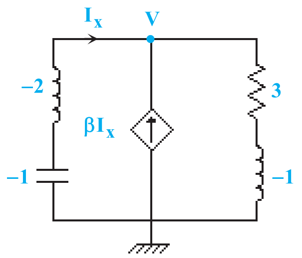
$$I_x[\frac{1}{S}+2S]+(1+\beta)I_x[3+S]=0 \Rightarrow I_x[\frac{1}{S}+2S+3(1+\beta)+S(1+\beta)]=0$$

معادله مشخصه مربوط به متغیر I_x، با صفر قرار دادن ضریب I_x در رابطه بالا به صورت مقابل بدست می‌آید: $\frac{1}{S}+2S+3(1+\beta)+S(1+\beta)=0$

اگر $S=-1$ یکی از فرکانس‌های متغیر I_x باشد، باید در رابطه بالا صادق باشد. بنابراین به جای S عدد ۱- را در معادله مشخصه قرار می‌دهیم.

$$\frac{1}{-1}+2(-1)+3(1+\beta)+(-1)(1+\beta)=0 \Rightarrow \beta=\frac{1}{2}$$

روش دوم: مدار را با فرض $S=-1$ در حوزه فرکانس مدل می‌کنیم و سعی می‌کنیم به رابطه $0\times I_x(S=-1)=0$ برسیم. قبل از آن منابع را نیز غیرفعال می‌کنیم.



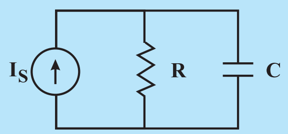
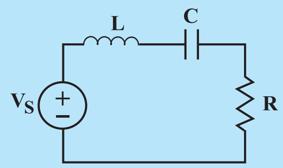
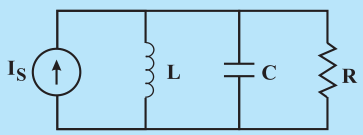
$$V=-3\times(-I_x)=3I_x \qquad (1)$$

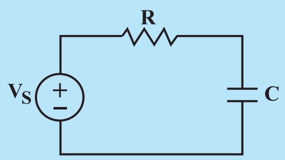
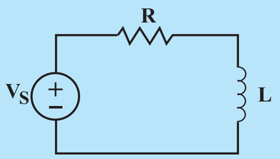
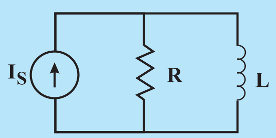
$$KCL: I_x+\beta I_x=\frac{V}{2}\xrightarrow{(1)} I_x+\beta I_x=1.5I_x \Rightarrow (\beta-0.5)I_x=0$$

$$\beta=0.5 \Rightarrow 0\times I_x=0$$

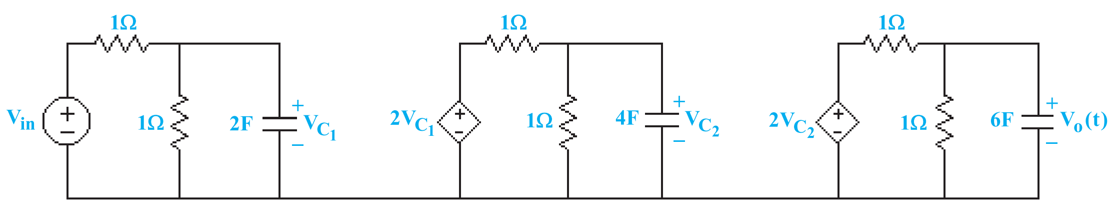
پس مقدار β باید برابر ۰/۵ باشد.

نکته۴: برای محاسبه معادله مشخصه مدارهای ساده مرتبه اول و مرتبه دوم، می‌توان از جدول زیر استفاده کرد. دقت کنید که معادله مشخصه‌های ارائه شده، مربوط به خود مدار و تک‌تک متغیرهای آن می‌باشد. با در ذهن داشتن این معادله‌های مشخصه، یک استراتژی مناسب برای حل تست‌های مربوطه، ساده‌سازی مدار اصلی به صورت یکی از مدارهای زیر و سپس استفاده از معادله مشخصه آن مدار می‌باشد.

معادله مشخصه	ساختار مدار
$S+\frac{1}{RC}=0$	
$S^2+\frac{R}{L}S+\frac{1}{LC}=0$	
$S^2+\frac{1}{RC}S+\frac{1}{LC}=0$	

معادله مشخصه	ساختار مدار
$S+\frac{1}{RC}=0$	
$S+\frac{R}{L}=0$	
$S+\frac{R}{L}=0$	

مثال۵: فرکانس‌های طبیعی متغیر خروجی $V_o(t)$ در مدار شکل زیر کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۷)

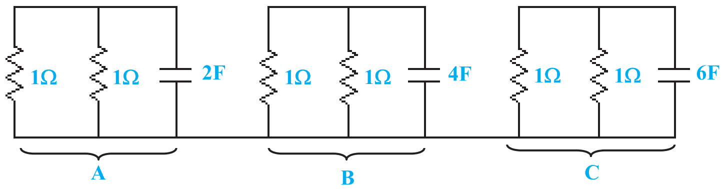


۱) -1 , $-\frac{1}{2}$, -3

۲) -1 , -2 , -3

۳) -1 , $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$

۴) -1 , -2 , $-\frac{1}{3}$

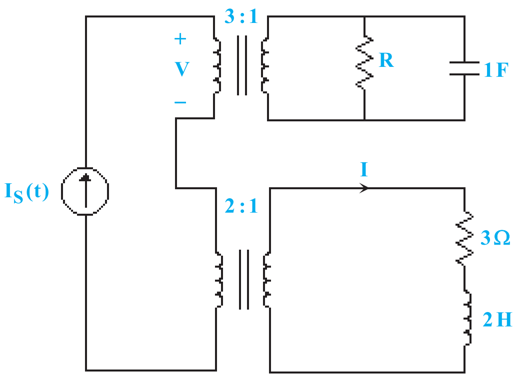


☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی غیرصفر، منبع ولتاژ مستقل را اتصال کوتاه می‌کنیم. در این حالت به علت صفر شدن منبع ولتاژ مستقل، منابع وابسته نیز صفر لذا داریم:

$$\text{B فرکانس طبیعی ناشی از} \Rightarrow S_۲ = \frac{-۱}{RC} = \frac{-۱}{\frac{۱}{۲}\times ۴} = \frac{-۱}{۲} \quad \text{و} \quad \text{A فرکانس طبیعی ناشی از} \Rightarrow S_۱ = \frac{-۱}{RC} = \frac{-۱}{\frac{۱}{۲}\times ۲} = -۱$$

$$\text{C فرکانس طبیعی ناشی از} \Rightarrow S_۳ = \frac{-۱}{RC} = \frac{-۱}{\frac{۱}{۲}\times ۶} = \frac{-۱}{۳}$$

مثال ۶: در مدار زیر R بر حسب اهم کدام باشد تا فرکانس طبیعی متغیر V، ۳ برابر فرکانس طبیعی متغیر I باشد؟

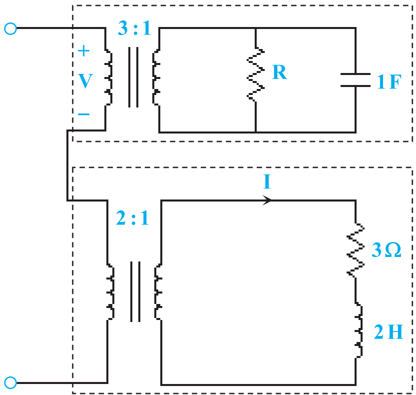


۱) $\frac{۹}{۲}$

۲) $\frac{۲}{۹}$

۳) $\frac{۱۰}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۱۰}$



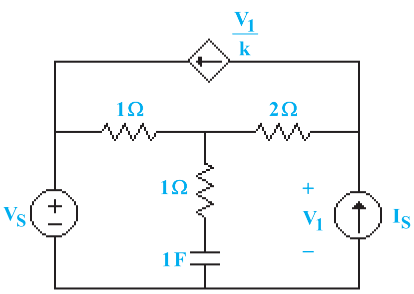
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به اینکه مدار شامل دو قسمت مجزا و مرتبه اول است، می‌توان فرکانس طبیعی مربوط به هر متغیر را در هر قسمت به طور جداگانه محاسبه کرد. در این حالت انتخاب نوع متغیر در هر قسمت تأثیری در فرکانس طبیعی ندارد و فرکانس طبیعی بدست آمده برای هر قسمت، به ازای انتخاب هر نوع متغیر ولتاژ و یا جریان یکسان می‌باشد. حال ابتدا منبع جریان مستقل مدار را غیرفعال می‌کنیم و معادله مشخصه هر قسمت را جداگانه می‌نویسیم. در این حالت با توجه به این که انتخاب متغیر در هر قسمت اختیاری است، نیازی به انتقال المان‌ها به سمت اولیه ترانس‌ها نمی‌باشد.

$$\Rightarrow \begin{cases} S_۱ + \frac{۱}{RC} = ۰ \\ S_۱ + \frac{۱}{R} = ۰ \Rightarrow S_۱ = -\frac{۱}{R} \end{cases} , \quad \begin{cases} S_۲ + \frac{R}{L} = ۰ \\ S_۲ + \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow S_۲ = -\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

با توجه به این که در صورت سؤال گفته شده که فرکانس طبیعی متغیر V، ۳ برابر فرکانس طبیعی متغیر I باشد، داریم: $S_۱ = -\frac{۱}{R} \quad , \quad S_۲ = -\frac{۳}{۲}$

$$S_۱ = ۳S_۲ \Rightarrow -\frac{۱}{R} = ۳\times(-\frac{۳}{۲}) \Rightarrow \mathbf{R = \frac{۲}{۹}\Omega}$$

مثال ۷: فرکانس طبیعی مدار زیر برابر $-\frac{۱}{۳}$ است. وقتی خازن اتصال باز است، چه مقاومتی از دو سر منبع جریان مستقل دیده می‌شود؟ (k ثابت) (مهندسی برق ـ سراسری ۹۲)



۱) -۴Ω ۲) ۳Ω

۳) ۸Ω ۴) ۱۲Ω

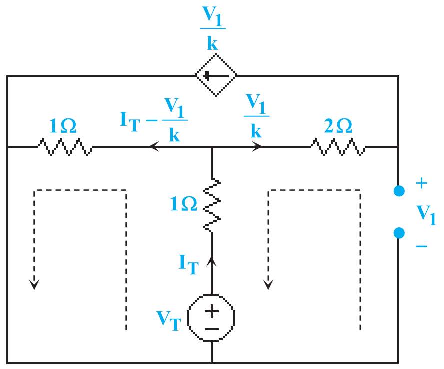
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در یک مدار مرتبه اول، فرکانس طبیعی مدار از فرمول $S = -\frac{۱}{\tau}$ بدست می‌آید. بنابراین می‌توانیم مقدار ثابت زمانی مدار یا همان τ را بدست آوریم.

$$S = -\frac{۱}{۳} = -\frac{۱}{\tau} \Rightarrow \tau = ۳\ (\text{sec})$$

با توجه به اینکه $\tau = R_{th}.C$ است و R_{th} مقاومت دیده شده از دو سر خازن است، می‌توانیم R_{th} را نیز محاسبه کنیم.

$$\tau = R_{th}.C \;\Rightarrow\; 3 = R_{th} \times 1F \;\Rightarrow\; R_{th} = 3\Omega$$

حال با قرار دادن منبع ولتاژ V_T به جای خازن، مقاومت تونن از دو سر خازن را محاسبه کرده و آن را برابر با ۳ اهم قرار می‌دهیم تا مقدار k محاسبه شود. دقت کنید که در این حالت منابع مستقل مدار غیرفعال می‌شوند.



با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ مدار داریم:

$$-V_T + I_T \times 1 + 1 \times (I_T - \frac{V_1}{k}) = 0 \;\Rightarrow\; V_T = 2I_T - \frac{V_1}{k} \qquad (1)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست مدار داریم:

$$-V_1 - 2(\frac{V_1}{k}) - I_T \times 1 + V_T = 0$$

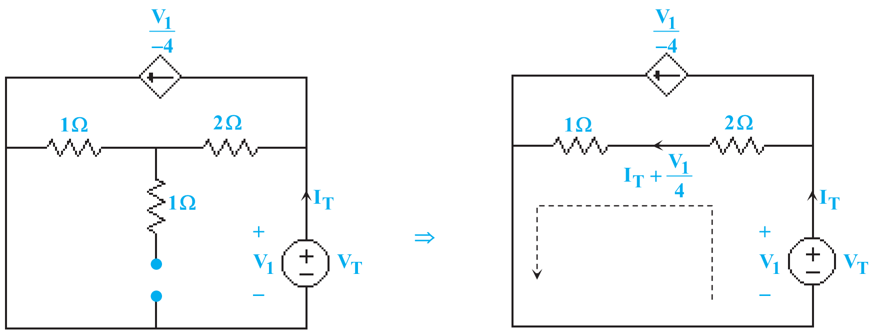
$$\Rightarrow\; V_1(1+\frac{2}{k}) = V_T - I_T \;\Rightarrow\; V_1 = \frac{V_T - I_T}{(1+\frac{2}{k})} \qquad (2)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$V_T = 2I_T - \frac{\frac{V_T - I_T}{(1+\frac{2}{k})}}{k} \;\Rightarrow\; V_T(1+\frac{1}{k(1+\frac{2}{k})}) = I_T(2+\frac{1}{k(1+\frac{2}{k})}) \;\Rightarrow\; \frac{V_T}{I_T} = R_{th} = \frac{2+\frac{1}{k+2}}{1+\frac{1}{k+2}}$$

$$R_{th} = 3\Omega \;\Rightarrow\; \frac{2+\frac{1}{k+2}}{1+\frac{1}{k+2}} = 3 \;\Rightarrow\; 2+\frac{1}{k+2} = 3+\frac{3}{k+2} \;\Rightarrow\; \frac{2}{k+2} = -1 \;\Rightarrow\; k = -4$$

حال با جایگذاری k در مدار، با فرض مدار باز بودن خازن، مقاومت تونن را از دو سر منبع جریان مستقل محاسبه می‌کنیم. بنابراین با اتصال V_T به جای منبع جریان I_S، رابطه V_T را با I_T محاسبه می‌کنیم. در این حالت نیز همه منابع مستقل مدار را غیرفعال می‌کنیم.



در انتها با توجه به برابری V_1 با V_T، در حلقه مدار KVL می‌زنیم و مقاومت معادل از دو سر منبع جریان مستقل را محاسبه می‌کنیم.

$$-V_T + 3(I_T + \frac{V_1}{4}) = 0 \;,\; V_1 = V_T \;\Rightarrow\; -V_T + 3(I_T + \frac{V_T}{4}) = 0 \;\Rightarrow\; -V_T + 3I_T + \frac{3}{4}V_T = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{\frac{V_T}{I_T} = R_{th} = 12\Omega}$$

محاسبه فرکانس‌های طبیعی متغیر شبکه با استفاده از تابع تبدیل

اگر بخواهیم فرکانس طبیعی مربوط به یک متغیر شبکه با نام $X_o(t)$ را محاسبه کنیم، می‌توانیم تابع تبدیل $H(S) = \frac{X_o(S)}{X_{in}(S)}$ را در مدار محاسبه کنیم و مخرج تابع تبدیل بدست آمده را مساوی صفر قرار دهیم. در این حالت ریشه‌های مخرج تابع تبدیل همان فرکانس‌های طبیعی متغیر $X_o(t)$ می‌باشند. دقت کنید که تابع تبدیل باید تا مرحله آخر ساده شود و نباید عبارت مشترکی بین صورت و مخرج وجود داشته باشد.

برای درک علت این مسئله، دقت شود که این روش معادل همان روش قبلی است زیرا:

$$H(S) = \frac{X_o(S)}{X_{in}(S)} = \frac{A(S)}{B(S)} \Rightarrow B(S)X_o(S) = A(S)X_{in}(S)$$

قبلاً ورودی را صفر می‌کردیم. اگر باز هم صفر کنیم داریم $X_{in}(S) = 0$. بنابراین می‌توان نوشت:

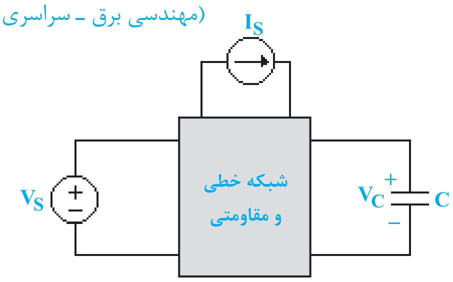
$$B(S)X_o(S) = 0$$

قبلاً ریشه‌های $B(S)$ را برابر با فرکانس‌های طبیعی گرفتیم. $B(S)$ همان مخرج $H(S)$ است. پس فرکانس‌های طبیعی همان ریشه‌های مخرج $H(S)$ (یعنی $B(S)$) می‌شود و به عبارت دیگر همان قطب‌های $H(S)$.

تحلیل مدارهای الکتریکی با استفاده از مدار معادل تونن یا نورتن آنها

استفاده از مدار معادل تونن یا نورتن یک شبکه الکتریکی می‌تواند در تحلیل آن بسیار مثمرثمر باشد، همچنانکه در تست‌ها و مثال‌های بعدی خواهید دید.

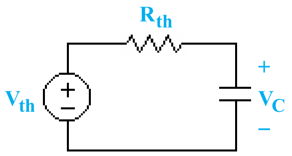
مثال ۱۱: در مدار شکل زیر خازن دارای ولتاژ اولیه V_0 است. اگر $I_S = ۲A$ و $V_S = ۴v$ باشد، $V_C(t) = ۴ + ۲e^{-\frac{t}{\tau}}$ می‌شود. اگر $I_S = ۴A$ و $V_S = ۸v$ شوند، ولتاژ $V_C(t)$ کدام خواهد بود؟
(مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)



۱) $۸ + ۲e^{-\frac{t}{\tau}}$ ۲) $۸ - ۲e^{-\frac{t}{\tau}}$

۳) $۸ - ۴e^{-\frac{t}{\tau}}$ ۴) $۸ + ۴e^{-\frac{t}{\tau}}$

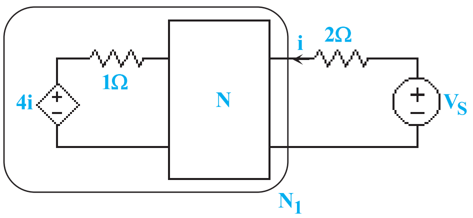
پاسخ: گزینه «۲» اگر مدار معادل تونن شبکه از دو سر خازن را جایگزین این شبکه کنیم، داریم:



$$V_C = ۴ + ۲e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \begin{cases} t = ۰^+ \Rightarrow V_C(۰^+) = ۶V \\ t \to \infty \Rightarrow V_C(t = \infty) = ۴V = V_{th} \end{cases}$$

با دو برابر شدن منابع، V_{th} نیز دو برابر می‌شود و لذا در شرایط جدید، ولتاژ نهایی خازن برابر ۸ ولت است که در تمام گزینه‌ها این‌گونه است. شرایط اولیه تغییری نکرده، لذا در $t = ۰^+$ ولتاژ خازن باید ۶ ولت باشد که فقط گزینه (۲) این ویژگی را دارد.

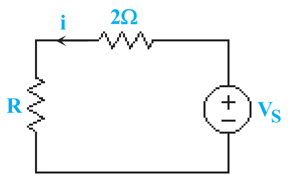
مثال ۱۲: در مدار مقاومتی خطی زیر، $V_S = ۲V$ و جریان i برابر $\frac{۱}{۲}$ آمپر است. با $V_S = ۱ + \cos t$ اندازه‌ی توان متوسط $N_۱$، چند وات است؟
(N بدون منابع مستقل است) (مهندسی برق ـ سراسری ۹۶)



۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$

۳) $\frac{۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ: گزینه «۳» از آنجایی که شبکه $N_۱$ شامل منبع مستقل نیست، می‌توان این شبکه را با یک مقاومت مدل کرد (دقت کنید که وجود منبع وابسته 4i بر این مسئله خدشه‌ای وارد نمی‌کند چرا که i جریان ورودی شبکه $N_۱$ است و یک متغیر داخلی این شبکه به حساب می‌آید) و توان مصرفی این مقاومت همواره با توان مصرفی شبکه $N_۱$ برابر است. اگر این مقاومت را R نام‌گذاری کنیم، می‌توانیم مقدار R را با استفاده از اطلاعات داده شده به راحتی محاسبه نماییم:



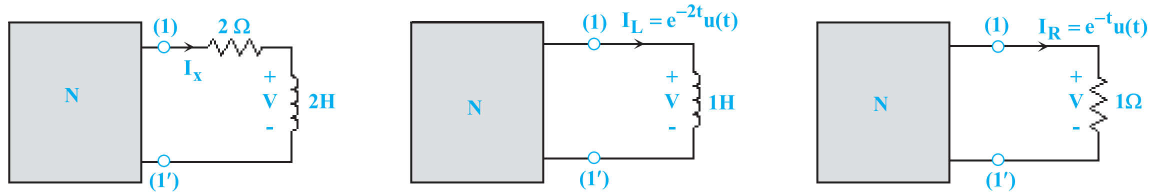
$$i = \frac{V_S}{۲ + R}, \quad \begin{cases} V_S = ۲v \\ i = \frac{۱}{۲}A \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۲ + R} \Rightarrow R = ۲\Omega$$

حال به ازای $V_S = ۱ + \cos t$ داریم:

$$i = \frac{V_S}{۲ + R} = \frac{۱ + \cos t}{۴} \Rightarrow i_{rms} = \sqrt{\frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۱۶}} = \sqrt{\frac{۳}{۳۲}}A$$

$$P_R = Ri_{rms}^۲ = ۲ \times \frac{۳}{۳۲} = \frac{۳}{۱۶}w, \quad P_{N_۱} = P_R = \frac{۳}{۱۶}w$$

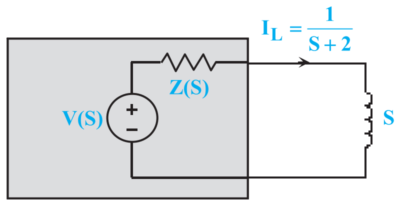
مثال ۱۳: یک‌قطبی N متشکل از عناصر خطی تغییرناپذیر با زمان و منابع وابسته و نابسته می‌باشد. در شکل‌های (الف) و (ب) نتایج دو آزمایش بر روی این یک‌قطبی داده شده است (پاسخ‌های حالت صفر). در آزمایش شکل (پ)، I_x برابر کدام گزینه است؟
(مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)



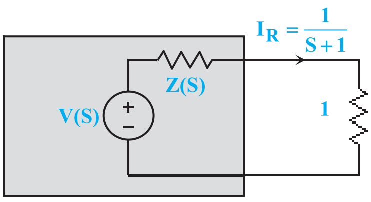
(پ) (ب) (الف)

۱) $\frac{۱}{۲}(۳e^{-۲t} - ۱)u(t)$ ۲) $\frac{۱}{۲}(۳e^{-۲t} + ۱)u(t)$ ۳) $(۳e^{-۲t} - ۲e^{-t})u(t)$ ۴) $(۳e^{-۲t} + ۲e^{-t})u(t)$

پاسخ: گزینه «۱» اگر مدار معادل تونن شبکه N، در حوزه فرکانس با ولتاژ تونن $V(S)$ و امپدانس تونن $Z(S)$ را در نظر بگیریم، داریم:



مدار (ب)



مدار (الف)

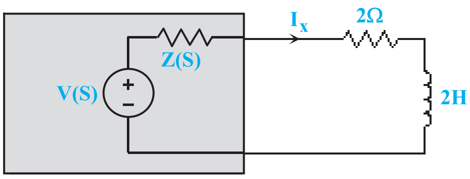
مطابق با شکل‌های فوق می‌توان نوشت:

$$\text{مدار (الف)}: \begin{cases} V(S) = Z(S)I + I\times 1 \\ I(S) = \frac{1}{S+1} \end{cases} \Rightarrow V(S) = (Z(S)+1)(\frac{1}{S+1}) \quad (1)$$

$$\text{مدار (ب)}: \begin{cases} V(S) = Z(S)I + I\times S \\ I(S) = \frac{1}{S+2} \end{cases} \Rightarrow V(S) = \frac{(Z(S)+S)}{S+2} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V(S) = [Z(S)+1]\frac{1}{S+1} \\ V(S) = [Z(S)+S].\frac{1}{S+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{Z(S) = S^2 - 2} \\ \mathbf{V(S) = S - 1} \end{array}$$

حال با جایگذاری مدار معادل تونن و با نوشتن یک KVL در مدار، مقدار I_x بدست می‌آید.



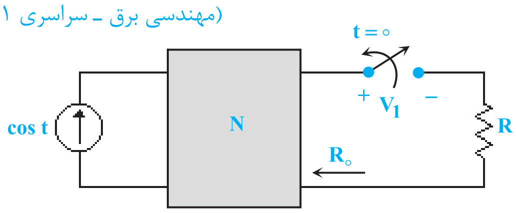
مدار (پ)

$$I_x = \frac{V(S)}{2+Z(S)+2S} \Rightarrow I_x = \frac{S-1}{S(S+2)} = \frac{-1}{2S} + \frac{\frac{3}{2}}{S+2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{I_x = (-\frac{1}{2})u(t) + \frac{3}{2}e^{-2t}u(t) = \frac{1}{2}(3e^{-2t} - 1)u(t)}$$

مثال ۱۴: در مدار زیر N شبکه‌ای مقاومتی، خطی و تغییرناپذیر با زمان است. وقتی کلید بسته است، ماکزیمم توان در مقاومت R برابر $\frac{1}{6}$ وات می‌باشد. اگر ولتاژ دو سر کلید (V_1) در $t = \frac{\pi}{4}$ برابر $\sqrt{2}$ ولت باشد، R_o چند اهم است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)



۱) ۳

۲) $\frac{2}{3}$

۳) ۶

۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» مقدار توان حداکثر از رابطه $P_{(max)} = \frac{V_{th}^2(rms)}{4R_{th}}$ محاسبه می‌شود. لذا ابتدا ولتاژ تونن را محاسبه می‌کنیم. در حالتی که کلید باز باشد، جریان عبوری از مقاومت R برابر صفر بوده و ولتاژ دو سر کلید همان V_{th} است. با توجه به حضور منبع $\cos t$ در ورودی، مقدار ولتاژ تونن ضریبی از تابع $\cos t$ خواهد بود. که این ضریب به شکل زیر قابل محاسبه است:

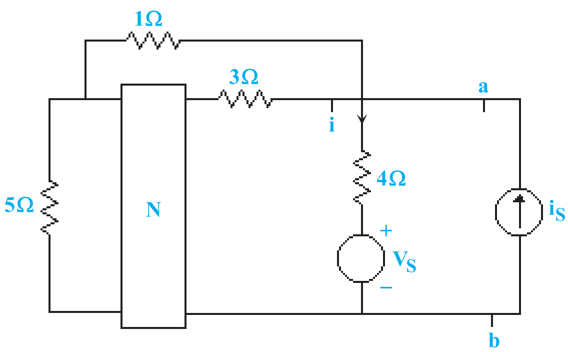
$$V_{th} = A\cos t \quad , \quad V_{th}(t = \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \Rightarrow A\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \Rightarrow A = 2 \quad , \quad V_{th} = 2\cos t \quad , \quad V_{th}(rms) = \frac{2}{\sqrt{2}}(v)$$

حال مقدار R_{th} و R_o از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$p_{(max)} = \frac{V_{th}^2(rms)}{4R_{th}} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{(\frac{2}{\sqrt{2}})^2}{4R_{th}} \Rightarrow \mathbf{R_{th} = R_o = 3\Omega}$$

مثال ۱۵: اگر در مدار مقاومتی خطی زیر $i = \frac{2}{5}i_S - \frac{1}{8}V_S$ باشد، مقاومت معادل از نقاط a و b چند اهم است؟

(مهندسی کامپیوتر «گرایش معماری» ـ سراسری ۹۶)



۱) $\frac{8}{5}$

۲) ۱

۳) $\frac{1}{8}$

۴) $\frac{1}{5}$

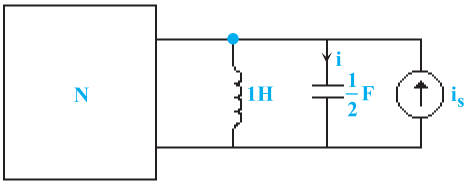
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با فرض $V_S = ۰$، داریم $i = \frac{۲}{۵} i_S$ و ولتاژ دو سر منبع جریان برابر است با:

$$V_{ab} = ۴i = \frac{۸}{۵} i_S$$

حال اگر منبع جریان i_S را به عنوان منبع جریان تست برای محاسبه مقاومت معادل از دو سر a و b در نظر بگیریم، به راحتی داریم:

$$R_{ab} = \frac{V_{ab}}{i_S} = \frac{\frac{۸}{۵} i_S}{i_S} = \frac{۸}{۵}\Omega$$

مثال ۱۶: در مدار زیر، « N » شامل مقاومت‌های خطی و بدون منابع مستقل است. توان N به ازای ورودی $i_s = \cos ۲t$ در شرایط دائمی سینوسی ماکزیمم است. در این مدار با شرایط اولیه‌ی صفر و به ازای ورودی ضربه‌ی $i_s = \delta(t)$، جریان خازن در $t = ۰^+$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ دکتری ۹۵)



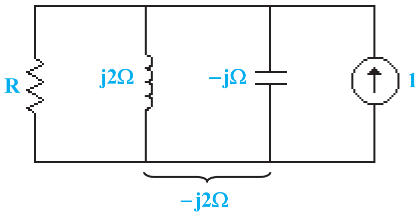
۱) $+۱$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) -۱

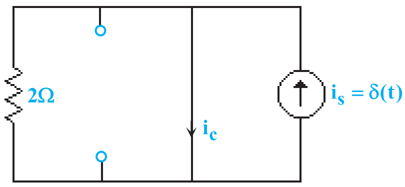
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» صورت این تست کمی ابهام دارد و منظور طراح تست از این‌که توان N به ازای ورودی $i_s = \cos ۲t$ ماکزیمم است دقیقاً مشخص نیست؛ با این برداشت که با فرض ورودی $i_s = \cos ۲t$ شرایط انتقال توان ماکزیمم به N فراهم شده است، می‌توان تست را حل کرد و به جواب رسید.



بدین منظور مدار را در حالت فازوری مطابق شکل مقابل در نظر می‌گیریم. در این شکل شبکه N با مقاومت معادل خود جایگزین شده است. حال باید داشته باشیم:

$$R = |-j۲| = ۲\Omega$$

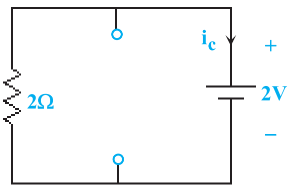
حال به حل تست ادامه می‌دهیم. ابتدا ولتاژ خازن را در لحظه $t = ۰^+$ با فرض $i_s = \delta(t)$ بدست می‌آوریم.



$t = ۰$

$$i_c(t = ۰) = \delta(t)$$

$$V_c(t = ۰^+) = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} \int_{۰^-}^{۰^+} \delta(t)dt = ۲v$$

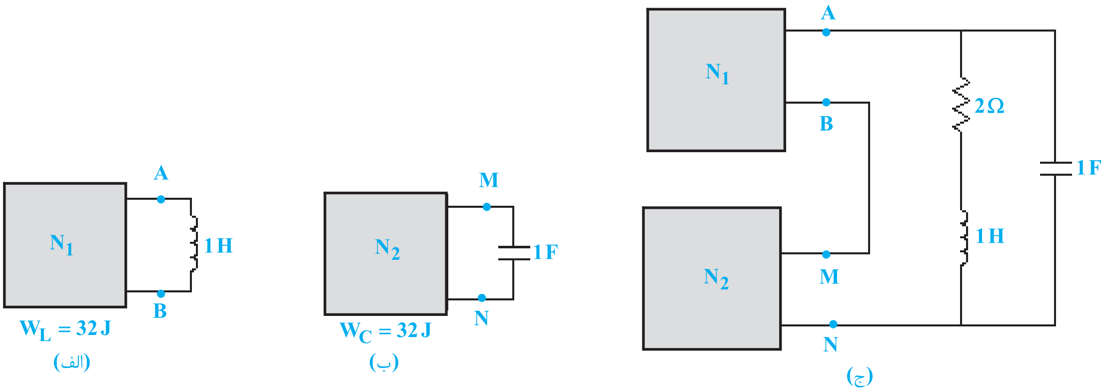


$t = ۰^+$

در ادامه جریان خازن را در لحظه $t = ۰^+$ بدست می‌آوریم:

$$i_c = -\frac{۲}{۲} = -۱A$$

مثال ۱۷: در مدار زیر شبکه‌های $N_۱$ و $N_۲$ از مقاومت‌های خطی و مثبت و منابع مستقل DC تشکیل شده‌اند. در صورتی که مقاومت تونن هر دو شبکه یکسان و برابر با ۲ اهم باشد، در مدار (ج) مقدار انرژی ذخیره‌شده در مدار چند ژول است؟



۱) ۲۰

۲) ۱۰

۳) ۴۰

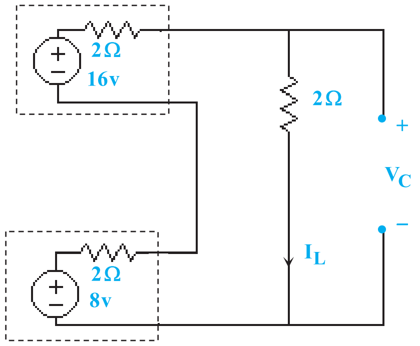
۴) ۳۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» جریان عبوری از سلف ۱ هانری در حالت ماندگار همان جریان نورتن شبکه $N_۱$ و ولتاژ دو سر خازن ۱ فارادی در حالت ماندگار همان ولتاژ تونن شبکه $N_۲$ می‌باشد. حال داریم:

$$\frac{۱}{۲} LI_{SC_۱}^۲ = ۳۲ \Rightarrow I_{SC_۱} = ۸A \quad و \quad R_{th_۱} = ۲\Omega \Rightarrow V_{th_۱} = R_{th_۱} . I_{SC_۱} = ۲ \times ۸ = ۱۶v$$

$$\frac{۱}{۲} CV_{OC_۲}^۲ = ۳۲ \Rightarrow V_{OC_۲} = ۸v \quad و \quad R_{th_۲} = ۲\Omega$$

حال در مدار (ج) مدار معادل شبکه‌ها را قرار می‌دهیم. در حالت ماندگار مدار به شکل مقابل خواهد بود:

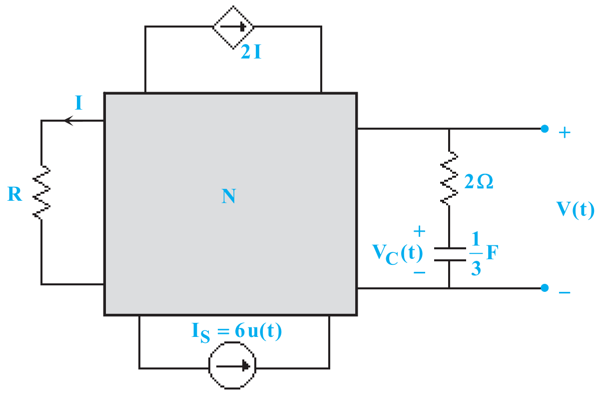


$$I_L = \frac{۱۶+۸}{۲+۲+۲} = ۴\,A$$

$$V_C = I_L \times ۲ = ۴ \times ۲ = ۸\,v$$

$$W_T = \frac{۱}{۲}CV^۲ + \frac{۱}{۲}LI^۲ = \frac{۱}{۲}\times ۱ \times ۸^۲ + \frac{۱}{۲}\times ۱\times ۴^۲ \Rightarrow W_T = ۴۰\,J$$

مثال۱۸: در مدار زیر شبکه N از المان‌های مقاومتی خطی و تغییرناپذیر با زمان تشکیل شده است. در صورتی که مقاومت ۲ اهمی با مقاومت ۴ اهمی جایگزین شود، معادله $V(t)$ مطابق با کدام گزینه است؟ $(V_C(t) = ۴ - ۲e^{-t})$



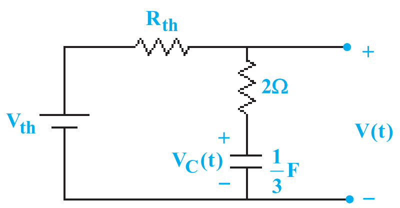
۱) $۴ - \frac{۴}{۱۰}e^{-۳t}$

۲) $۴ - \frac{۴}{۱۰}e^{-\frac{۳}{۵}t}$

۳) $۴ - ۴e^{-۳t}$

۴) $۴ - ۴e^{-\frac{۳}{۵}t}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با تغییر مقاومت ۲ اهمی فقط مقدار τ عوض می‌شود و مقادیر $V_C(\infty)$ و $V_C(۰^-)$ تغییری ندارند. در این مرحله ابتدا τ را در حالت اولیه محاسبه می‌کنیم:



$$\tau_{old} = R_{eq}.C = (۲+R_{th}) \times \frac{۱}{۳} = ۱ \Rightarrow R_{th} = ۱\,\Omega$$

$$\tau_{new} = R_{eq}.C = (۴+۱) \times \frac{۱}{۳} = \frac{۵}{۳}$$

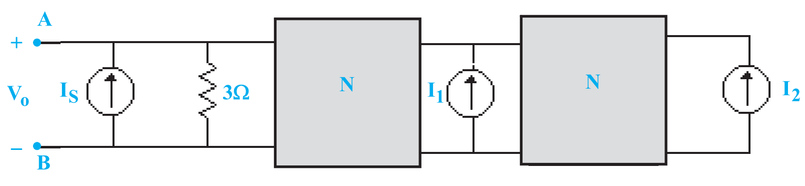
حال در صورت تغییر مقاومت ۲ اهمی به ۴ اهمی داریم:

$$V(t) = ۴I_C + V_C \;,\; I_C = C\frac{dV_C}{dt} \quad \text{و} \quad V_C(t)(new) = ۴ - ۲e^{-\frac{۳}{۵}t}$$

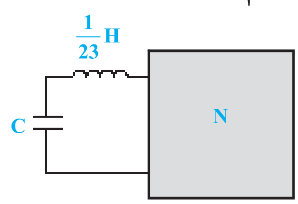
$$\Rightarrow I_C = \frac{۱}{۳}\frac{d\left[۴-۲e^{-\frac{۳}{۵}t}\right]}{dt} = \frac{۱}{۳}\left[\frac{۶}{۵}e^{-\frac{۳}{۵}t}\right] \Rightarrow I_C = \frac{۶}{۱۵}e^{-\frac{۳}{۵}t} \Rightarrow V(t) = ۴I_C + V_C = ۴\times\frac{۶}{۱۵}e^{-\frac{۳}{۵}t} + ۴ - ۲e^{-\frac{۳}{۵}t}$$

$$\Rightarrow V(t) = \frac{۲۴}{۱۵}e^{-\frac{۳}{۵}t} + ۴ - ۲e^{-\frac{۳}{۵}t} = ۴ - \frac{۴}{۱۰}e^{-\frac{۳}{۵}t}$$

مثال۱۹: در مدار (الف) شبکه N فقط شامل مقاومت‌های خطی، موازی با هم، مثبت و تغییرناپذیر با زمان است. در صورتی که معادله ولتاژ V_o به صورت $\frac{۳}{۲}I_۲ + \frac{۴}{۹}I_s + ۲I_۱$ باشد، در مدار (ب) پهنای باند مدار بر حسب رادیان بر ثانیه مطابق با کدام گزینه است؟



مدار (الف)



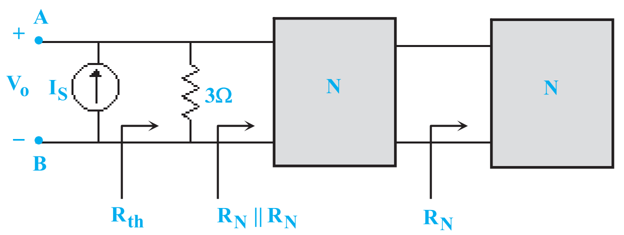
مدار (ب)

۱) ۲۴

۲) ۲۳

۳) $\frac{۲۳}{۲۴}$

۴) $\frac{۲۴}{۲۳}$



پاسخ: گزینه «۱» در صورتی که بخواهیم مقاومت تونن را از پایه‌های A و B بدست آوریم، منابع مستقل $I_۱$ و $I_۲$ را صفر می‌کنیم و ولتاژ دو سر منبع جریان I_S را به مقدار جریان آن تقسیم می‌کنیم.

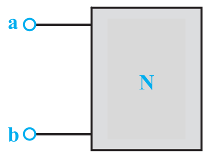
$$V_o=\frac{۴}{۹}I_S \Rightarrow R_{th}=\frac{V_o}{I_S}=\frac{\frac{۴}{۹}I_S}{I_S}=\frac{۴}{۹}\Omega$$

$$R_{th}=\frac{۴}{۹}=۳\|R_N\|R_N \Rightarrow \frac{۴}{۹}=۳\|\frac{R_N}{۲} \Rightarrow \frac{۴}{۹}=\frac{\frac{۳R_N}{۲}}{۳+\frac{R_N}{۲}} \Rightarrow \frac{۲۷}{۲}R_N=۱۲+۲R_N \Rightarrow R_N=\frac{۱۲}{۱۱/۵}=\frac{۲۴}{۲۳}\Omega$$

در مدار (ب) با توجه به اینکه مدار RLC سری است، پهنای باند به صورت روبرو است:

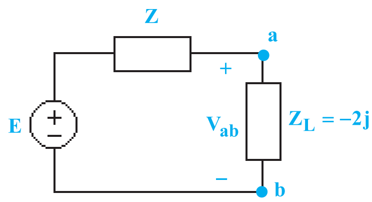
$$BW=\frac{R_N}{L}=\frac{\frac{۲۴}{۲۳}}{\frac{۱}{۲۳}}=۲۴(\frac{rad}{sec})$$

مثال ۲۰: یک‌قطبی N، شامل عناصر RLC خطی تغییرناپذیر با زمان و تعدادی منبع سینوسی با فرکانس یکسان $\omega=۲$ است. اگر یک مدار LC موازی با مقادیر $L=۱H$ و $C=\frac{۱}{۲}F$ را به سرهای a و b وصل کنیم، ولتاژ دو سر a و b به صورت $V_{ab}=۲۰\sin(۲t-۳۰^\circ)$ می‌شود و اگر یک مدار LC موازی با مقادیر $L=\frac{۱}{۲}H$ و $C=۱F$ را به سرهای a و b وصل کنیم، آن‌گاه ولتاژ دو سر a و b به صورت $V_{ab}=۵\sqrt{۲}\sin(۲t-۷۵^\circ)$ می‌شود. حالا اگر یک مقاومت خطی $R=۱\Omega$ را به سرهای a و b وصل کنیم، چه ولتاژی در سرهای a و b مشاهده می‌شود؟

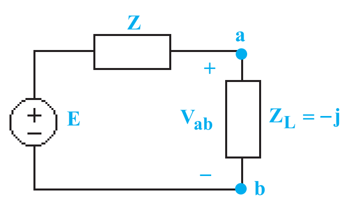


۱) $V_{ab}(t)=۵\sin(۲t+۱۵^\circ)$
۲) $V_{ab}(t)=\frac{۵}{\sqrt{۲}}\sin(۲t+۱۵^\circ)$
۳) $V_{ab}(t)=\frac{۵}{\sqrt{۲}}\sin(۲t-۱۵^\circ)$
۴) $V_{ab}(t)=۵\sin(۲t-۱۵^\circ)$

پاسخ: گزینه «۲» این گونه مثال‌ها را معمولاً می‌توان با یافتن مدار معادل تونن یک‌قطبی حل نمود. در این مدار E و Z مجهول هستند که ما باید با توجه به نتایج دو آزمایش، آن‌ها را پیدا کنیم. مدل مدار در حالت دائمی سینوسی در دو آزمایش، انجام شده بصورت روبرو خواهد بود:



آزمایش ۱



آزمایش ۲

آزمایش اول را در نظر گرفته، سعی می‌کنیم V_{ab} را برحسب E و Z بیان کنیم:

$$V_{ab}=۲۰\angle-۳۰^\circ$$

$$V_{ab}=\frac{-۲j}{-۲j+Z}E=۲۰\angle-۳۰^\circ \Rightarrow E=\frac{Z-۲j}{-۲j}\times۲۰\angle-۳۰^\circ$$

حال همین عملیات را برای آزمایش دوم انجام می‌دهیم:

$$V_{ab}=۵\sqrt{۲}\angle-۷۵^\circ$$

$$V_{ab}=\frac{-j}{-j+Z}E=۵\sqrt{۲}\angle-۷۵^\circ \Rightarrow E=\frac{Z-j}{-j}\times۵\sqrt{۲}\angle-۷۵^\circ$$

با توجه به دو رابطه بدست آمده می‌توان نوشت:

$$\frac{Z-۲j}{-۲j}\times۲۰\angle-۳۰^\circ=\frac{Z-j}{-j}\times۵\sqrt{۲}\angle-۷۵^\circ \Rightarrow Z-۲j=(Z-j)\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\angle-۴۵^\circ \Rightarrow Z=۱+۲j$$

و در ادامه E را نیز می‌توان محاسبه نمود:

$$E=\frac{Z-۲j}{-۲j}\times۲۰\angle-۳۰^\circ=-\frac{۱۰}{j}\angle-۳۰^\circ=۱۰\angle+۶۰^\circ$$

اکنون می‌توانیم ولتاژ خروجی مدار را در حالتی که بار یک مقاومت ۱ اهمی باشد، محاسبه کنیم:

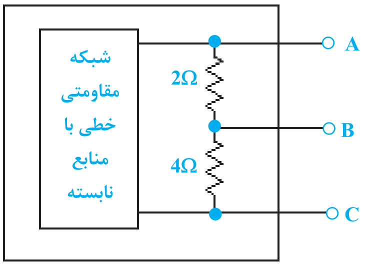
$$V_{ab}=\frac{۱}{۱+Z}E=\frac{۱۰\angle۶۰^\circ}{۱+۱+۲j}=\frac{۱۰\angle۶۰^\circ}{۲\sqrt{۲}\angle۴۵^\circ}=\frac{۵}{\sqrt{۲}}\angle۱۵^\circ$$

پس V_{ab} برابر است با:

$$V_{ab}(t)=\frac{۵}{\sqrt{۲}}\sin(۲t+۱۵^\circ)$$

مثال۲۱: در مدار شکل زیر، اگر بین A و B را اتصال کوتاه کنیم، جریان ۲A از A به B می‌گذرد و اگر بین B و C را اتصال کوتاه کنیم، جریان ۳A از B به C می‌گذرد. شبکه معادل تونن دیده شده (V_{th}, R_{th}) از سرهای A و B به ترتیب از راست به چپ چند اهم و ولت است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۴)



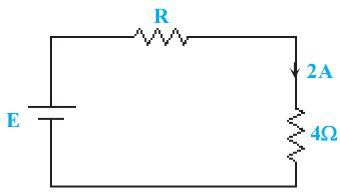
۱) ۲، ۳

۲) ۲، ۱۲

۳) $\frac{۳}{۲}$,۳

۴) ۳، ۴

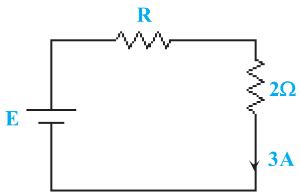
پاسخ: گزینه «۳» هر شبکه مقاومتی خطی با منابع نابسته را می‌توان با یک مدار معادل تونن مدل کرد. در این تست، ابتدا باید از طریق اطلاعات داده شده، پارامترهای این مدار معادل تونن شامل E یا ولتاژ تونن و R یا مقاومت تونن را بدست آوریم. بدین منظور آزمایش اول کـه در آن دو سر A و B اتصال کوتاه شده‌اند را در نظر می‌گیریم:



با یک KVL ساده داریم:

$$\frac{E}{R+۴}=۲ \Rightarrow ۲R-E=-۸$$

در مرحله دوم، حالتی را در نظر می‌گیریم که دو سر B و C اتصال کوتاه شده‌اند:



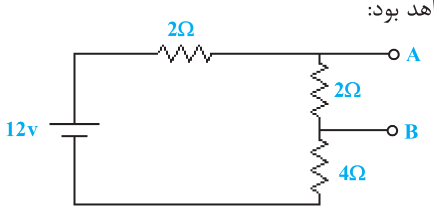
در این جا نیز با یک KVL ساده می‌توان نوشت:

$$\frac{E}{R+۲}=۳ \Rightarrow ۳R-E=-۶$$

حال باید از طریق روابط بدست آمده مقدار E و R را پیدا کنیم:

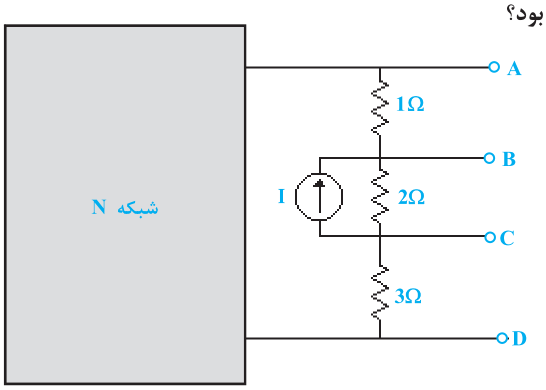
$$\begin{cases}۲R-E=-۸\\ ۳R-E=-۶\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}R=۲\Omega\\ E=۱۲v\end{cases}$$

با پیدا کردن مقادیر پارامترهای E و R، یافتن مدار معادل تونن از دو سر A و B کار چندان سختی نخواهد بود:



$$V_{th}=\frac{۲}{۲+۶}\times۱۲=۳v \quad و \quad R_{th}=۲\|۶=\frac{۲\times۶}{۲+۶}=\frac{۳}{۲}\Omega$$

مثال۲۲: مدار زیر را که در آن شبکه N یک شبکه مقاومتی خطی با منابع مستقل است، در نظر بگیرید. اگر سرهای A و D را اتصال کوتاه کنیم، جریان ۵ آمپر از A به D برقرار می‌شود. اگر سرهای B و C را اتصال کوتاه کنیم، جریان ۱ آمپر از C به B برقرار شده و ولتاژ V_{AD} برابر ۸ ولت خواهد شد. اگر سرهای A و C و سرهای B و D را اتصال کوتاه کنیم، ولتاژ V_{BC} چند ولت خواهد بود؟



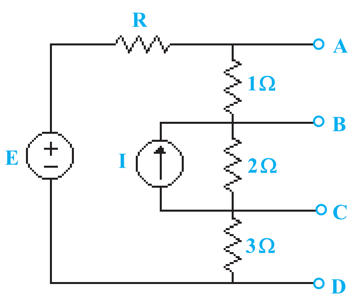
۱) $\frac{۹}{۷}$ ولت

۲) $-\frac{۲۷}{۷}$ ولت

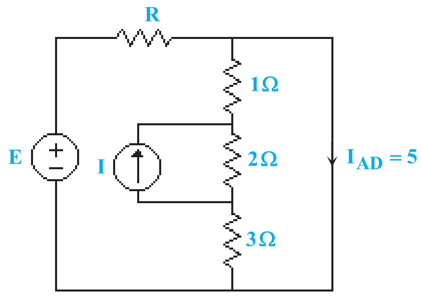
۳) $-\frac{۹}{۷}$ ولت

۴) ۰ ولت

پاسخ: گزینه «۲» اگر مدار معادل تونن شبکه N را در نظر بگیریم، مداری به شکل مقابل خواهیم داشت:



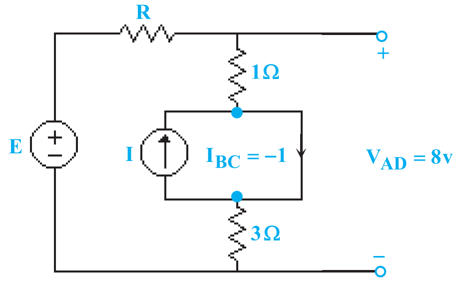
حال باید مقادیر نامعلوم E ،R و I را بر اساس اطلاعات صورت سؤال محاسبه کنیم. در آزمایش اول اگر سرهای A و D را اتصال کوتاه کنیم، با مدار روبرو سروکار خواهیم داشت:



در این حالت داریم:

$$I_{AD} = \frac{E}{R} + \frac{۲}{۲+۴}\times I = ۵ \Rightarrow \frac{E}{R}+\frac{I}{۳}=۵ \qquad (۱)$$

در آزمایش دوم با اتصال کوتاه شدن سرهای B و C مداری به شکل زیر خواهیم داشت:



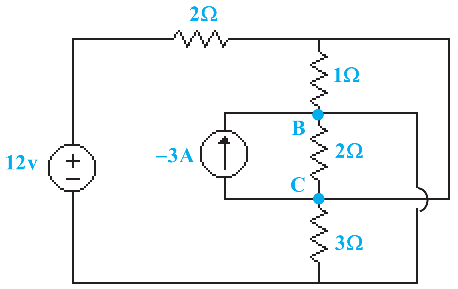
در این حالت I_{BC} و V_{AD} به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

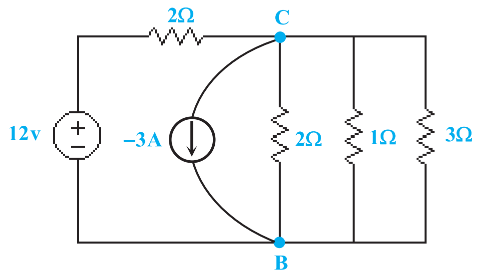
$$\left.\begin{aligned} V_{AD} &= \frac{۱+۳}{۱+۳+R}\times E = \frac{۴E}{۴+R} = ۸ \Rightarrow \frac{E}{۴+R} = ۲ \qquad (۲)\\ I_{BC} &= \frac{E}{R+۱+۳}+I = \frac{E}{R+۴}+I=-۱ \qquad (۳)\end{aligned}\right\} \xrightarrow{(۳),(۲)} ۲+I=-۱ \Rightarrow I=-۳A$$

حال با در نظر گرفتن روابط (۱) و (۲) و با توجه به مقدار بدست آمده برای I داریم:

$$(۱)\Rightarrow \frac{E}{R}+\frac{I}{۳}=۵ \Rightarrow \frac{E}{R}=۶ \Rightarrow E=۶R \qquad (۲)\Rightarrow \frac{E}{۴+R}=\frac{۶R}{۴+R}=۲ \Rightarrow R=۲\Omega \;,\; E=۶R=۱۲v$$

با بدست آمدن مقادیر مجهول مسأله، اکنون به سراغ محاسبه V_{BC} می‌رویم، در حالتی که سرهای A و C و سرهای B و D اتصال کوتاه شده باشند. بدین منظور مدار معادل زیر را در نظر می‌گیریم:

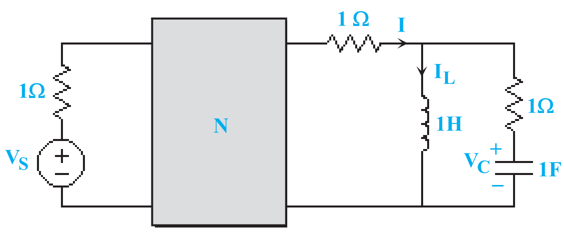




دقت کنید که در این حالت مقاومت‌های ۱، ۲ و ۳ اهمی موازی بوده و می‌توان آنها را با مقاومت معادل $\frac{۶}{۱۱}$ اهم جایگزین کرد. حال با بکارگیری قضیه جمع آثار داریم:

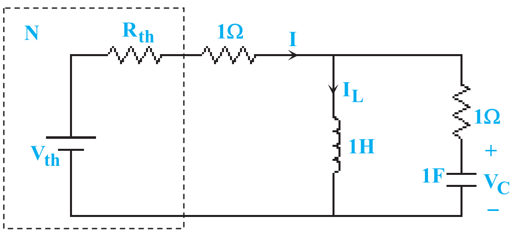
$$V_{BC} = -۱۲\times\frac{\frac{۶}{۱۱}}{\frac{۶}{۱۱}+۲} - ۳\times\frac{۲\times\frac{۶}{۱۱}}{\frac{۶}{۱۱}+۲} = -۱۲\times\frac{۶}{۲۸} - ۳\times\frac{۱۲}{۲۸} = -\frac{۱۰۸}{۲۸} = -\frac{۲۷}{۷}\,v$$

مثال ۲۳: در شکل زیر، N یک مدار مقاومتی خطی و بدون منابع مستقل است. اگر تابع انتقال $\frac{I}{V_S} = \frac{۳(S^۲+S+۱)}{۴S^۲+۴S+۳}$ و شرایط اولیه $I_L(0^-)=۲A$ و $V_C(0^-)=۱V$ را داشته باشیم، شرایط اولیه $I(0^-)$ برابر است با: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)



۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $-\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا مدار معادل تونن برای شبکه N را جایگزین آن می‌کنیم.



مدرسان شریف

فصل دوازدهم

« مدارهای غیرخطی، تقویت‌کننده عملیاتی و انتگرال کانولوشن »

در این فصل، ابتدا تعاریف اولیه مربوط به المان‌های خطی و غیرخطی بیان می‌شود. سپس روش تحلیل مدارهای شامل المان‌های خطی و غیرخطی و دیودها را بررسی کرده و مثال‌هایی را در این زمینه حل خواهیم کرد. در ادامه به بیان مبانی تقویت‌کننده‌های عملیاتی و حل چند مثال کاربردی برای آنها می‌پردازیم. در پایان روش بدست آوردن پاسخ مدار با استفاده از انتگرال کانولوشن را بیان خواهیم کرد.

درسنامه (۱): مدارات و المان‌های غیرخطی

به طور کلی اگر همه عناصر تشکیل‌دهنده مدار خطی باشند، برای تحلیل مدار مذکور از قوانین عادی و ذکر شده در فصل‌های قبل استفاده می‌شود. در صورتی که یکی از عناصر تشکیل‌دهنده مدار به صورت غیرخطی باشد، روش تحلیل مدار باید طبق روش تحلیل مدارهای غیرخطی انجام شود. در این قسمت ابتدا تعاریف اولیه المان‌های خطی و غیرخطی بیان می‌شود و سپس روش تحلیل برخی از مدارهای غیرخطی بررسی خواهد شد.

تعاریف اولیه

مقاومت خطی و غیرخطی (تغییرپذیر با زمان ـ تغییرناپذیر با زمان)

در صورتی که منحنی مشخصه مربوط به یک مقاومت، به صورت خط مستقیم در صفحه مختصات $(V-I)$ باشد، آنگاه مقاومت را خطی می‌نامند. حال اگر مقدار این مقاومت که همان شیب منحنی مشخصه $(V-I)$ است، با گذشت زمان تغییر نکرده و ثابت بماند، به مقاومت مذکور مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان گفته می‌شود. در صورتی که شیب منحنی مشخصه خطی $(V-I)$ یا همان مقاومت با تغییر زمان عوض شود، مقاومت خطی و تغییرپذیر با زمان خواهد بود. روابط موجود برای مقاومت‌های مذکور به صورت زیر است:

مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان: $\boxed{[V(t)=RI(t) \quad , \quad R=\dfrac{V(t)}{I(t)}]}$

مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان: $\boxed{[V(t)=R(t).I(t) \quad , \quad R(t)=\dfrac{V(t)}{I(t)}]}$

در صورتی که منحنی مشخصه مربوط به $(V-I)$ یک مقاومت، به صورت یک خط مستقیم نبوده و مثلاً به صورت منحنی باشد، آنگاه مقاومت مذکور غیرخطی خواهد بود. حال اگر منحنی مربوط به $(V-I)$ عنصر غیرخطی با زمان تغییر نکند، یک المان غیرخطی و تغییرناپذیر با زمان خواهیم داشت. در صورتی که منحنی مربوط به $(V-I)$ عنصر غیرخطی با زمان نیز تغییر کند، یک المان غیرخطی و تغییرپذیر با زمان خواهیم داشت. برای یک مقاومت غیرخطی تغییرناپذیر با زمان $V(t)=F(I(t))$ یا به بیان دیگر $V(t)=R(I(t)).I(t)$ است، با این فرض که $F(\bullet)$ و $R(\bullet)$ چندجمله‌ای‌هایی از مرتبه n یا هر رابطه ریاضی غیرخطی دیگر باشند.

مقاومت اکتیو و پسیو (فعال و غیرفعال)

اگر مشخصه ولتاژ ـ جریان مقاومت در ربع اول و سوم باشد و یا به عبارت دیگر، ولتاژ و جریان مقاومت هم‌علامت باشند، مقاومت پسیو یا غیرفعال نامیده می‌شود. در مقابل اگر مشخصه ولتاژ ـ جریان مقاومت در ربع دوم و چهارم باشد و یا به بیان دیگر، ولتاژ و جریان مقاومت غیر هم‌علامت باشند، مقاومت اکتیو یا فعال نامیده می‌شود.

مقاومت دو طرفه

در صورتی که منحنی مشخصه مربوط به یک مقاومت، دارای تقارن نسبت به مبدأ مختصات باشد، مقاومت مذکور دو طرفه نامیده می‌شود. لازم به ذکر است که همه مقاومت‌های خطی، دو طرفه نیز می‌باشند ولی اغلب مقاومت‌های غیرخطی، دو طرفه نیستند.

مقاومت منفی

اگر یک مقاومت خطی یا غیرخطی در منحنی مشخصه $(V-I)$ خود دارای شیب منفی باشد، مقاومت مذکور به صورت یک مقاومت منفی تعریف می‌شود.

خازن خطی و غیرخطی (تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان)

در صورتی که منحنی مشخصه $(q-V)$ برای یک خازن به صورت یک خط راست گذرنده از مبدأ باشد، خازن مذکور یک خازن خطی است. ولی اگر مشخصه $(q-V)$ خازن به صورت خطی نبوده و به فرم یک منحنی با شیب متغیر باشد، خازن غیرخطی خواهد بود. حال اگر مقدار ظرفیت خازن با زمان تغییر کند، خازن را متغیر با زمان و در غیر این صورت آن را تغییرناپذیر با زمان می‌نامند.

خازن خطی تغییرناپذیر با زمان:

$$[q(t)=C.V(t) \quad , \quad I(t)=C\frac{dV(t)}{dt} \quad , \quad C=\frac{q(t)}{V(t)}]$$

خازن خطی تغییرپذیر با زمان:

$$[q(t)=C(t).V(t) \quad , \quad I(t)=C(t)\frac{dV(t)}{dt}+V(t)\frac{dC(t)}{dt} \quad , \quad C(t)=\frac{q(t)}{V(t)}]$$

سلف خطی و غیرخطی (تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان)

در صورتی که منحنی مشخصه $(\phi-I)$ برای یک سلف به صورت یک خط راست گذرنده از مبدأ باشد، سلف مذکور خطی می‌باشد. حال اگر مشخصه $(\phi-I)$ یک سلف به صورت منحنی و غیرخطی باشد، سلف مذکور غیرخطی خواهد بود. در صورتی که مقدار خودالقایی یک سلف با تغییر زمان عوض شود، سلف مذکور تغییرپذیر با زمان است و اگر مقدار خودالقایی سلف با زمان تغییر نکند، سلف تغییرناپذیر با زمان خواهد بود.

سلف خطی و تغییرناپذیربا زمان:

$$[\phi(t)=L.I(t) \quad , \quad L=\frac{\phi(t)}{I(t)} \quad , \quad V(t)=L\frac{dI(t)}{dt}]$$

سلف خطی و تغییرپذیر با زمان:

$$[\phi(t)=L(t)I(t) \quad , \quad L(t)=\frac{\phi(t)}{I(t)} \quad , \quad V(t)=L(t)\frac{dI(t)}{dt}+I(t)\frac{dL(t)}{dt}]$$

مثال ۱: مشخصه $V-I$ یک مقاومت به صورت $V=2I+Ie^{-t}-\frac{1}{2}V\cos 2t$ است. حال این مقاومت کدام ویژگی را دارا نیست؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

۱) خطی ۲) فعال ۳) دوطرفه ۴) تغییرپذیر با زمان

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای قضاوت در مورد مشخصات یک مقاومت، ابتدا معادله آن را به صورت استاندارد V برحسب I می‌نویسیم. لذا داریم:

$$V=\frac{e^{-t}+2}{\frac{1}{2}\cos 2t+1}\times I$$

با توجه به معادله دیده می‌شود که ارتباط V و I کاملاً خطی است. همچنین دیده می‌شود که شیب منحنی V و I یعنی همان R با تغییر زمان تغییر می‌کند، بنابراین مقاومت، متغیر با زمان است. با توجه به معادله خط V بر حسب I مقاومت مذکور دو طرفه نیز می‌باشد. لازم به ذکر است که مقاومتی فعال است که نسبت $\frac{V}{I}$ آن منفی باشد، اما کسر $\frac{e^{-t}+2}{\frac{1}{2}\cos 2t+1}$ هیچگاه منفی نخواهد شد؛ بنابراین مقاومت مذکور فعال نیست.

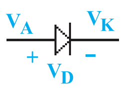
تعریف دیود

دیود یک قطعه نیمه‌هادی دو لایه است که از کنار هم قرار دادن نیمه‌هادی‌های p و n ساخته می‌شود. تعریف و نماد ظاهری یک دیود به صورت زیر است:

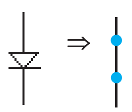
$$V_D=V_A-V_K$$

هر دیود در مدار با توجه به پلاریته ولتاژ دو سرش و جهت جریان عبوری آن، دارای دو نوع بایاسینگ تغذیه می‌باشد که در زیر بررسی خواهد شد. به این نکته توجه داشته باشید که دیود المانی است که فقط اجازه عبور جریان را در یک جهت (جهت فلش خود) می‌دهد و جریان در خلاف جهت فلش خود را عبور نمی‌دهد.

الف) بایاس مستقیم: در صورتی که ولتاژ آند دیود بزرگتر از یا مساوی با ولتاژ کاتد دیود باشد، دیود در بایاس مستقیم خواهد بود. در این حالت دیود هدایت کرده و با اتصال کوتاه مدل می‌شود.

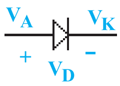


$$\begin{cases} V_A \geq V_K \\ V_D \geq 0 \end{cases} \Rightarrow D(on)$$



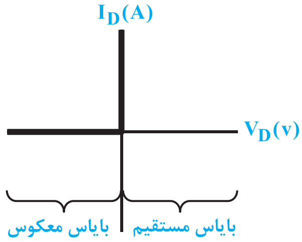
لازم به ذکر است که در حالت بایاس مستقیم جهت جریان عبوری از دیود در جهت فلش آن است.

ب) بایاس معکوس: در صورتی که ولتاژ کاتد دیود زیادتر از ولتاژ آند آن باشد، دیود در بایاس معکوس قرار دارد. در این حالت دیود خاموش بوده و حاوی جریان صفر است و با مدار باز مدل می‌شود.



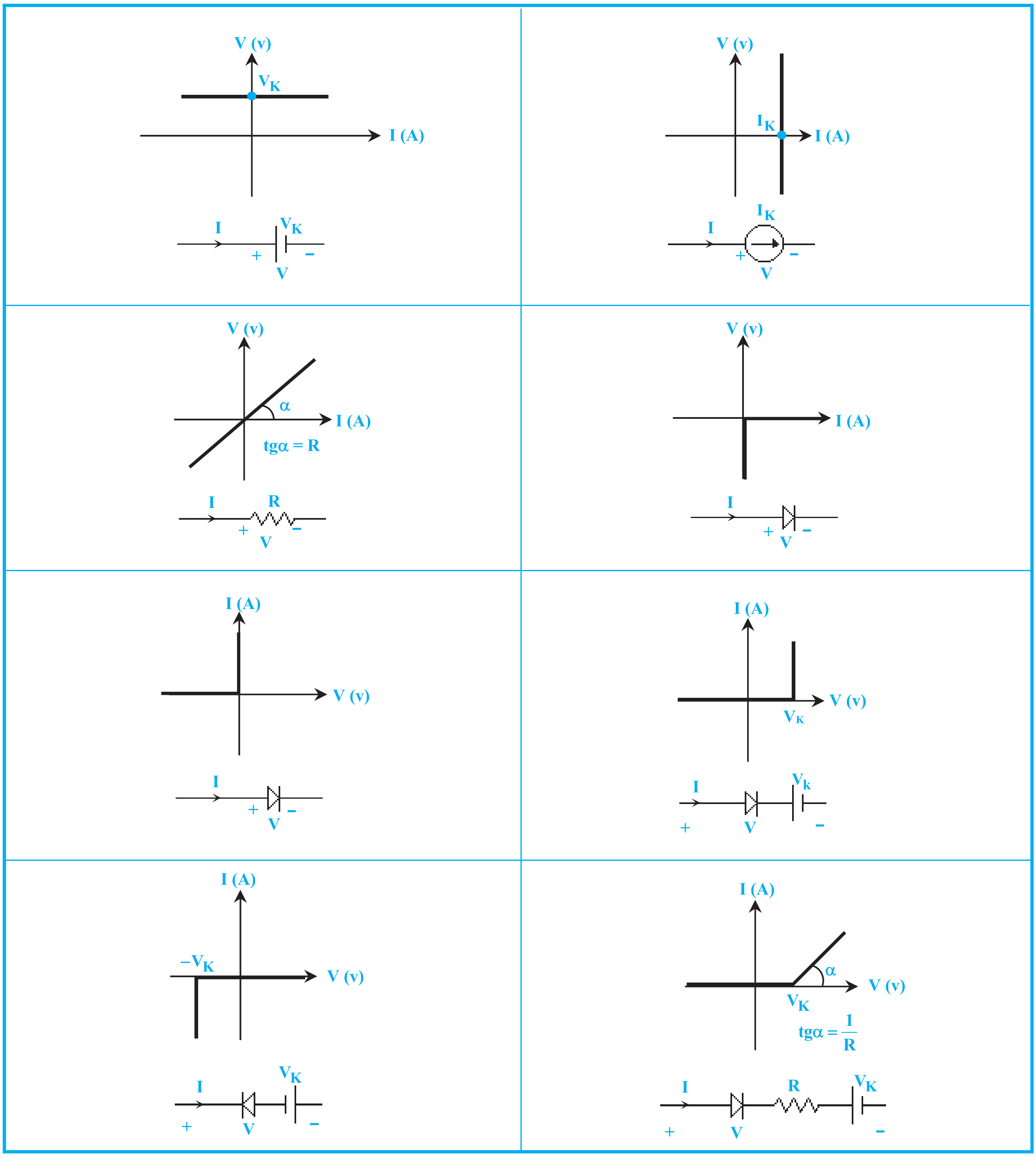
$\begin{cases} V_A < V_K \\ V_D < 0 \end{cases} \Rightarrow D(off) \Rightarrow$  $\Rightarrow$ 

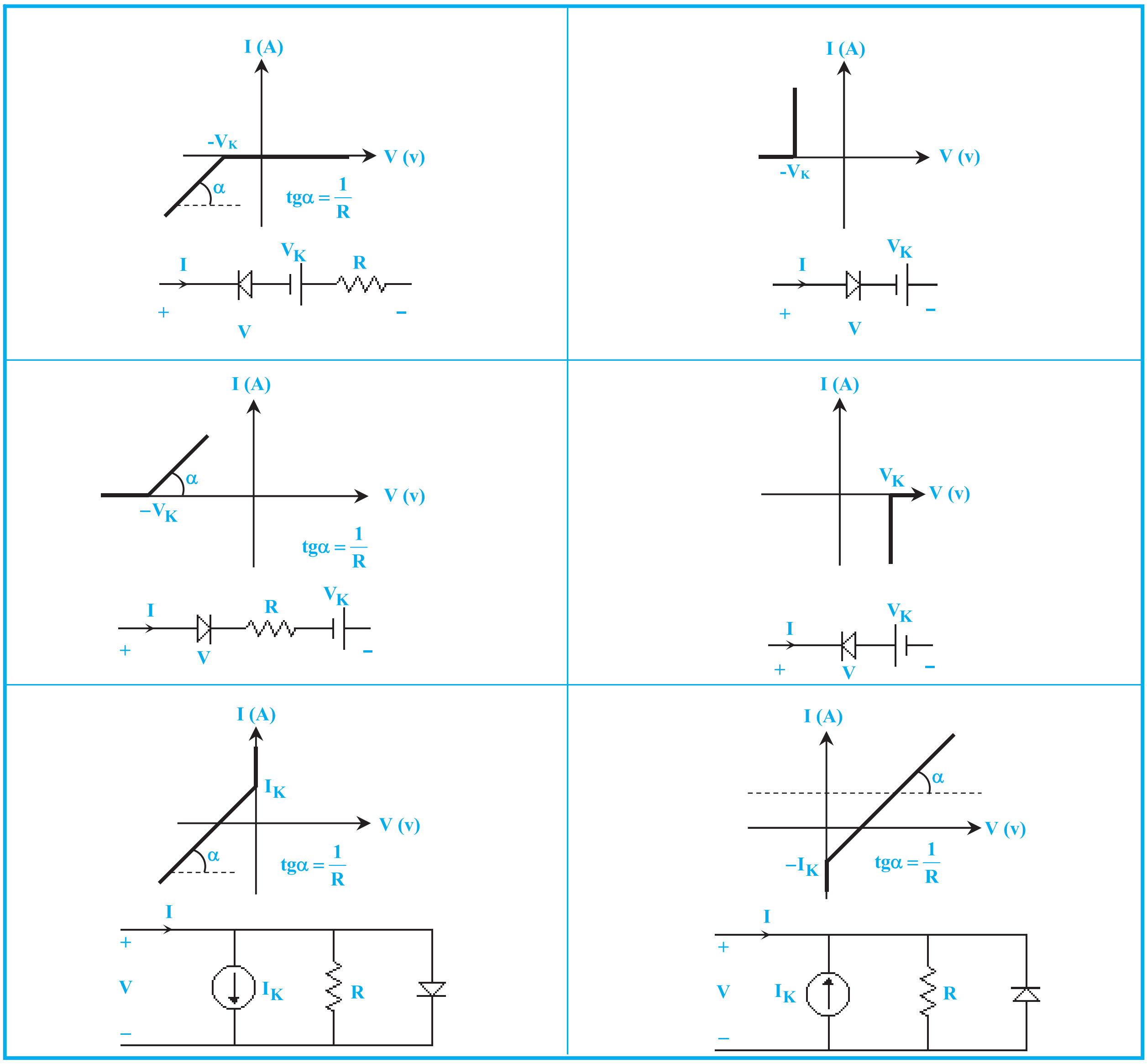
با توجه به توضیحات ارائه شده در قسمت‌های (الف) و (ب) منحنی مشخصه دیود ایده‌آل به صورت زیر است:



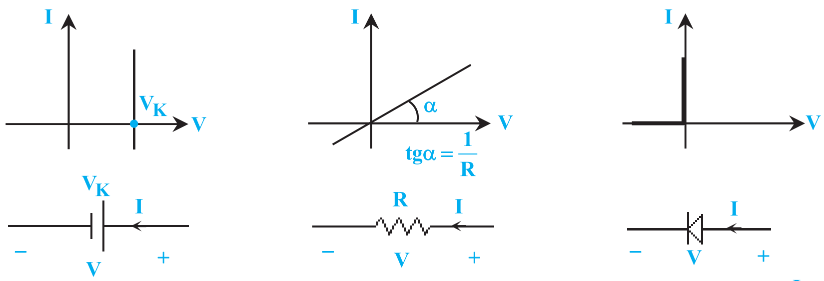
مدارهای تغییر شکل‌دهنده دیودی

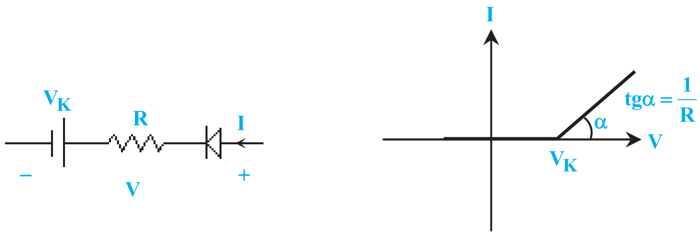
در این قسمت منحنی مشخصه‌های مربوط به $(V-I)$ یا $(V_o - V_{in})$ مدارهای تشکیل شده از منابع مستقل جریان و ولتاژ، مقاومت و دیود را بررسی می‌کنیم. ابتدا منحنی مشخصه $(V-I)$ یا $(I-V)$ را برای تعدادی المان مداری پایه به صورت زیر نشان می‌دهیم: (دیودها ایده‌آل هستند)



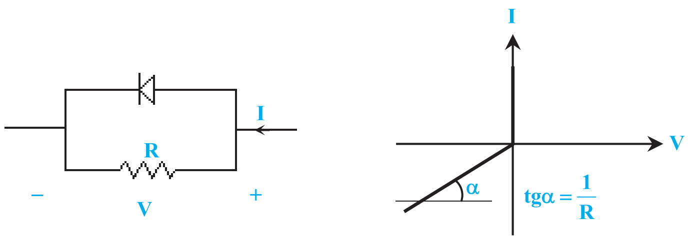


نکته۱: اگر بخواهیم منحنی مشخصه‌ی یک مدار حاصل از المان‌های مختلف را به دست آوریم، باید پله‌پله حرکت کنیم. بدین صورت که اگر دو المان با یکدیگر سری باشند، ولتاژ آن‌ها با هم جمع می‌شود و بدین صورت منحنی مشخصه آن‌ها به دست می‌آید.

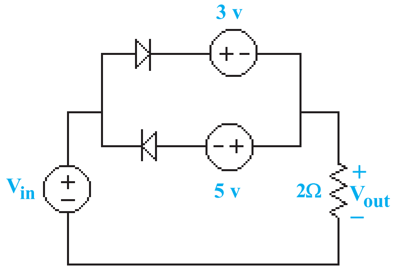


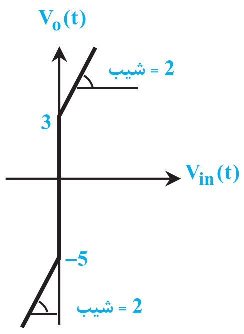


اما اگر المان‌ها موازی باشند یعنی ولتاژ آن‌ها با یکدیگر برابر بوده و جریان آن‌ها با یکدیگر جمع می‌شود.

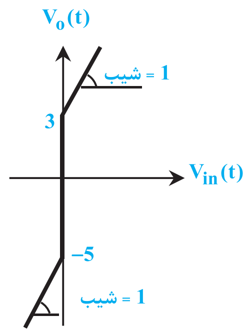


مثال ۲: در مدار شکل مقابل اگر دیودها ایده‌آل فرض شوند، آنگاه مشخصه $(V_{out} - V_{in})$ مدار به کدام صورت خواهد بود؟

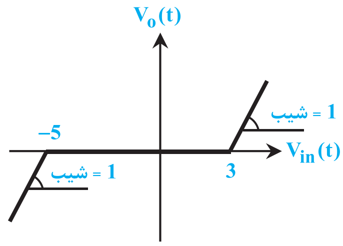




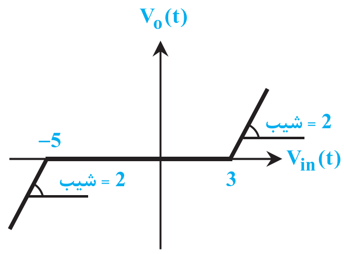
(۱)



(۲)

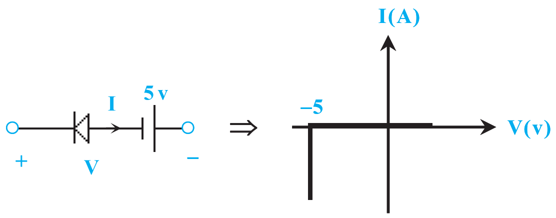


(۳)

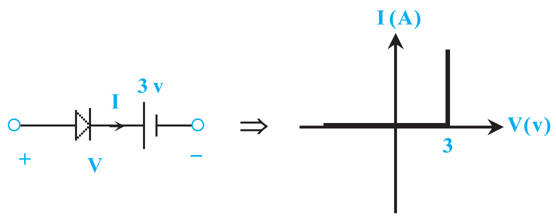


(۴)

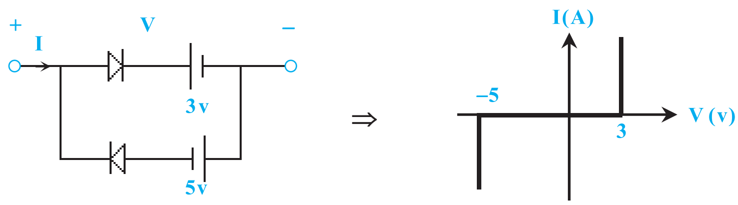
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا منحنی مشخصه یک دیود با منبع ولتاژ سری را ترسیم می‌کنیم.



و

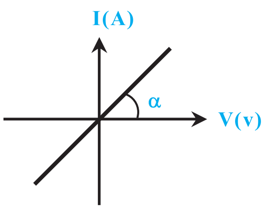


حال با توجه به این که دو شاخه بالا موازی هستند، دارای ولتاژهای برابر می‌باشند. بنابراین جریان آنها با هم جمع می‌شود.



منحنی (۱)

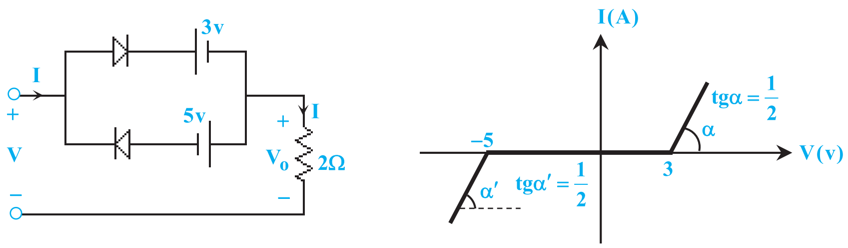
حال اگر مدار بالا با یک مقاومت با منحنی مشخصه‌ای به صورت زیر سری شود، جریان‌ها برابر و ولتاژها با هم جمع می‌شوند.



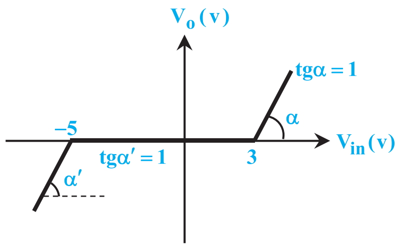
منحنی (۲)

$$tg\alpha = \frac{۱}{R} = \frac{۱}{۲} \mho$$

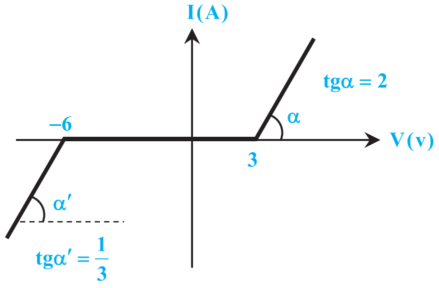
با جمع شدن منحنی‌های (۱) و (۲) در راستای محور افقی یا V داریم:

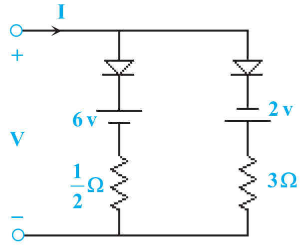


با توجه به رابطه $V_o = ۲I$ به جای محور Iها، محور V_o را جایگزین کرده و شیب خطوط را در عدد دو ضرب می‌کنیم. حال داریم:

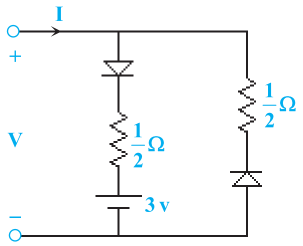


مثال ۳: نمودار $(I-V)$ زیر مربوط به کدام مدار در گزینه‌ها است؟

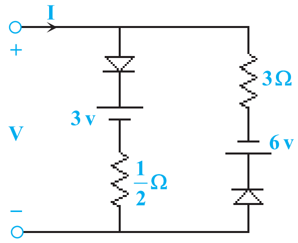




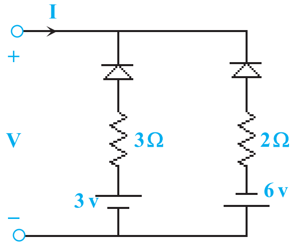
(۱)



(۲)



(۳)

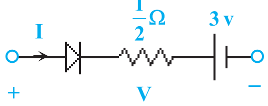


(۴)

پاسخ: گزینه «۳» با دقت در منحنی $(I-V)$ دیده می‌شود که اگر $I>0$ باشد، داریم:

$$I>0 \Rightarrow V=\frac{1}{2}I+3 \quad , \quad tg\alpha=\frac{I}{V}=\frac{1}{R}=2 \Rightarrow R=\frac{1}{2}\Omega$$

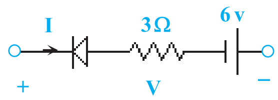
با توجه به معادله بدست آمده، این قسمت از منحنی می‌تواند توسط مدار روبرو ایجاد شود.



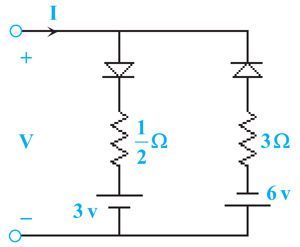
حال حالتی را بررسی می‌کنیم که $I<0$ باشد. در این حالت داریم:

$$I<0 \Rightarrow V=-6+3I \quad , \quad tg\alpha=\frac{I}{V}=\frac{1}{R}=\frac{1}{3} \Rightarrow R=3\Omega$$

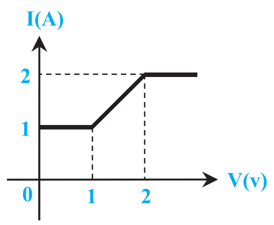
با توجه به معادله بدست آمده، این قسمت از منحنی نیز توسط مدار زیر ایجاد می‌شود.

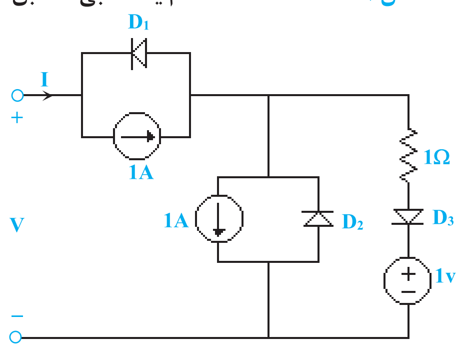


با توجه به موارد فوق، مداری که هر دو قسمت از منحنی $(I-V)$ را بسازد، بصورت مقابل است:

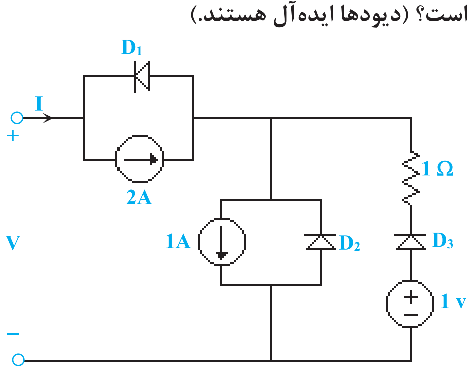


مثال ۴: مشخصه $V-I$ کدام یک‌قطبی، مطابق شکل مقابل است؟ (دیودها ایده‌آل هستند.) (مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

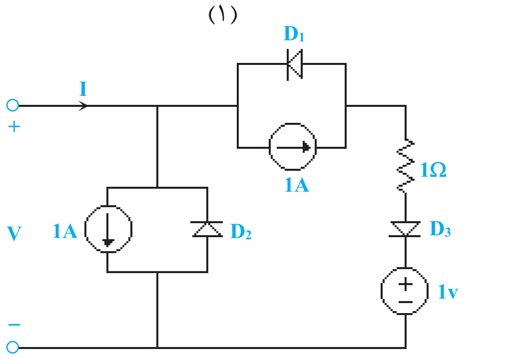




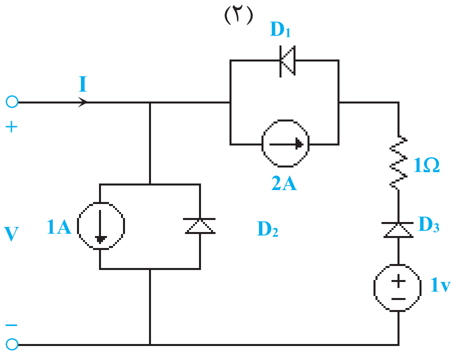
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

پاسخ: گزینه «۳» برای حل این تست می‌توان با تحلیل‌های مداری تک تک گزینه‌های غلط را حذف کرد. برای مدار گزینه (۱) با یک KCL ساده داریم:

$$I = ۱ - I_{D۱}$$

از آنجایی که همواره $I_{D۱} \geq ۰$ است، پس مقدار I حداکثر ۱ آمپر می‌باشد و بنابراین، این گزینه غلط است. در مدار گزینه (۲) نیز با نوشتن KCL در گره مرکزی مدار داریم:

$$I = ۱ - I_{D۲} - I_{D۳}$$

با توجه به رابطه فوق، در این مدار نیز حداکثر مقدار I برابر ۱ آمپر است. پس این گزینه نیز غلط است. به شکل مشابه برای مدار گزینه (۴) داریم:

$$I = ۱ - I_{D۲} - I_{D۳}$$

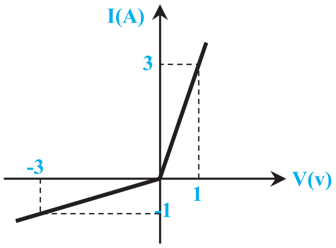
با استدلالی مشابه، گزینه (۴) نیز غلط می‌باشد. بنابراین تنها گزینه (۳) می‌تواند پاسخ تست باشد. دقت کنید که در این گزینه داریم:

$$I = ۲ - I_{D۲} - I_{D۳} = ۱ + I_{D۳} - I_{D۲}$$

با توجه به این روابط مقدار I می‌تواند به ۲ آمپر نیز برسد.

مثال ۵: **در مورد حداقل تعداد مقاومت‌ها و دیودهای ایده‌آل که می‌تواند مشخصه $V - I$ زیر را بسازد، کدام عبارت درست است؟**

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)



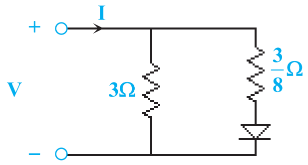
۱) دو مقاومت مختلف و دو دیود

۲) دو مقاومت یکسان و یک دیود

۳) دو مقاومت مختلف و یک دیود

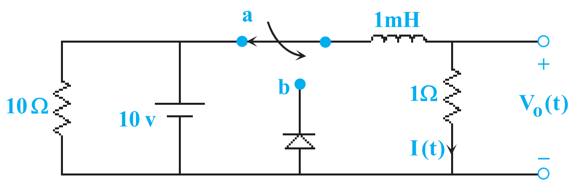
۴) دو مقاومت یکسان و دو دیود

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اینکه در ربع اول منحنی دارای معادله $V = \frac{۱}{۳}I$ است، لذا این قسمت از منحنی توسط یک مقاومت $\frac{۱}{۳}\Omega$ ساخته شده است. در ربع سوم معادله به صورت $V = ۳I$ بوده و این قسمت از منحنی توسط یک مقاومت ۳ اهم تشکیل شده است. همچنین با توجه به اینکه به ازای $V > ۰$ یک مقاومت وارد مدار شده و به ازای $V < ۰$ مقاومت دیگری وارد مدار می‌شود، بنابراین حضور یک دیود به صورت سری با یکی از مقاومت‌ها الزامی است. حال مداری به صورت زیر برای منحنی ذکر شده پیشنهاد می‌شود.



با توجه به شکل روبرو حضور حداقل دو مقاومت و یک دیود الزامی است.

مثال ۶: **در مدار زیر به مدت $۱m\sec$ کلید در وضعیت a قرار داشته و سپس به وضعیت b منتقل می‌شود. حال مقدار $V_o(t = ۱/۵m\sec)$ برحسب ولت کدام است؟ $(I_L(۰) = ۰)$**



۱) ۲/۶

۲) ۳/۸

۳) ۴/۲

۴) ۴/۸

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا مدار در بازه زمانی $۰ < t < ۱m\sec$ تحلیل می‌شود. در این زمان دیود قطع بوده و پاسخ مدار RL از طریق حل مدار مرتبه اول به صورت زیر خواهد بود:

$$۰ < t < ۱\,m\sec \quad \Rightarrow \quad I_L(t) = I_L(\infty') + [I_L(۰^+) - I_L(\infty')]e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (\infty': \text{بینهایت فرضی})$$

$$I_L(\infty') = \frac{۱۰}{۱} = ۱۰A \quad , \quad I_L(۰^\pm) = ۰ \quad , \quad \tau = \frac{L}{R} \Rightarrow \tau = \frac{۱mH}{۱} = ۱m\sec$$

$$\Rightarrow \quad I_L(t) = ۱۰ + [۰ - ۱۰]e^{-۱۰۰۰t}(۰ < t < ۱m\sec) \Rightarrow I_L(t = ۱m\sec^\pm) = ۱۰(۱ - e^{-۱}) = ۶/۳۲A$$

در زمان $t = ۱m\sec$ منبع ولتاژ ۱۰ ولت از مدار قطع شده و دیود هدایت می‌کند تا مسیر عبور جریان سلف باز شود. حال معادله جریان $I_L(t)$ به صورت زیر است:

$$I_L(t) = I_L(\infty) + [I_L(t = ۱ms^+) - I_L(\infty)]e^{-\frac{t - ۱ms}{\tau}} \qquad I_L(\infty) = ۰ \quad , \quad I_L(t = ۱ms^+) = ۶/۳۲A$$

$$\Rightarrow \quad I_L(t) = ۶/۳۲e^{-۱۰^۳(t - ۱۰^{-۳})} \quad \Rightarrow \quad I_L(t = ۱/۵m\sec) = ۶/۳۲e^{-۱۰^۳(۱/۵\times۱۰^{-۳} - ۱۰^{-۳})} = ۶/۳۲ \times ۰/۶ \simeq ۳/۸A$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{V_o(t = ۱/۵m\sec) = I_L(t = ۱/۵m\sec) \times ۱\Omega = ۳/۸v}$$

منابع و مراجع

۱) Electric circuits Joseph A. Edminister schaum's outline series, McGraw – Hill company, 1983.

۲) Engineering circuits analysis, W. H. Hayt and J. E. Kemmerly, McGraw – Hill company, 1986.

۳) Electric circuits, Charles K – Alexander Matthew N.O. Sadi KU, McGraw. Hill company, (2004)

۴) Electric circuits analysis, R. K. Mehta, A. K. Mal C. B.S. (2002)

۵) نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها (قسمت اول و قسمت دوم) . تألیف : چارلز دسور ، ارنست کوه ـ ترجمه و تکمیل : پرویز جبه‌دار مارالانی، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷۹.

۶) نظریه اصولی مدارهای الکتریکی (خطی و غیرخطی). تألیف: قوشه، عابد هدتنی، انتشارات بنفشه، دانش‌نگار ۱۳۸۷.

۷) مجموعه سؤالات آزمون‌های سازمان سنجش تا سال ۱۴۰۲