فصل اول

« معرفی برنامه‌ریزی خطی، مدل‌سازی و حل هندسی »

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل اول

۱ـ اگر A ناحیه امکان‌پذیر مربوط به یک مسأله برنامه‌ریزی ریاضی باشد و بیشترین مقدار تابع f بر روی A برابر ۷ و بیشترین مقدار تابع g بر روی A، ۵ باشد، بیشترین مقدار تابع (f+g) بر روی ناحیه A : (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۷۵)

۱) حتماً کوچکتر یا مساوی ۱۲ است.
۲) حتماً بزرگتر یا مساوی ۵ است.
۳) حتماً بزرگتر یا مساوی ۷ است.
۴) حداقل ۱۲ است.

۲ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\text{Max } Z = {}&100x_1 + 200x_2 + 150x_3\\ \text{s.t.}\quad &5x_1 + 20x_2 + 30x_3 \le 60\\ &10x_1 + 20x_2 + 50x_3 \le 100\\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0\end{aligned}$$

نقطه $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1$: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۷۷)

۱) یک نقطه گوشه موجه شدنی است.
۲) یک نقطه گوشه غیر موجه است.
۳) یک نقطه در داخل منطقه موجه است.
۴) یک نقطه در خارج منطقه موجه است.

۳ـ مسأله مقابل را در نظر بگیرید:

$$\text{Minimize}\left\{\text{Maximum}(|3x_1 - 2x_2 + 4x_3|, |x_1 + x_2 + 2x_3|)\right\}$$

این مسأله قابل تبدیل به یک مسأله برنامه ریزی .... (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۷۸)

۱) خطی با متغیرهای صحیح می‌باشد.
۲) غیر خطی با متغیرهای صحیح می‌باشد.
۳) خطی نمی‌باشد.
۴) خطی می‌باشد.

۴ـ محدودیت غیر خطی $XYZ = 0$ که در آن Z, Y, X متغیرهای صفر و یک هستند، به محدودیت‌های یک مسأله برنامه‌ریزی شمار خطی (عدد صحیح) با متغیرهای صفر و یک اضافه شده است. برای ریختن مسأله حاصل در قالب برنامه‌ریزی خطی صفر ـ یک، این محدودیت را: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۷۸)

۱) می‌توان با یک محدودیت با ساختار خطی جایگزین کرد.
۲) نمی‌توان با یک محدودیت با ساختار خطی جایگزین کرد.
۳) می‌توان حذف کرد، چون تأثیری در حل بهینه مسأله ندارد
۴) می‌توان با محدودیت $x + y + z \ge 0$ جایگزین کرد.

۵ـ مسأله بهینه‌یابی $\underset{\text{s.t.}\ Ax=b}{\text{Max}\, z} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |x_i|$ را با کدام شیوه می‌توان به یک مسأله خطی تبدیل و با الگوریتم سیمپلکس جواب بهینه را به دست آورد؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۷۹)

۱) جایگزینی x_i با $(u_i + v_i)$ در معادله هدف و $(u_i - v_i)$ در محدودیت‌ها مشروط بر اینکه u_i و v_i آزاد در علامت باشند.
۲) جایگزینی x_i با $(u_i - v_i)$ در کل مسأله مشروط بر اینکه $v_i \ge 0$ و u_i باشند.
۳) جایگزینی x_i با $(u_i - v_i)$ در تابع هدف و $(u_i + v_i)$ در محدودیت‌ها مشروط بر اینکه $v_i \ge 0$ و u_i باشند.
۴) جایگزینی x_i با $(u_i + v_i)$ در تابع هدف و $(u_i - v_i)$ در محدودیت‌ها مشروط بر اینکه $v_i \ge 0$ و u_i باشند.

۶ـ در یک مدل خطی با منطقه قابل قبول غیر تهی اگر تابع هدف موازی یکی از محدودیت‌ها باشد، آنگاه: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۷۹)

۱) مسأله جواب بهینه یگانه دارد.
۲) مسأله قابل قبول محدود است.
۳) مسأله جواب بهینه تباهیده دارد.
۴) ممکن است جواب بهینه یگانه یا چندگانه باشد.

۷ـ در یک مدل خطی اگر مقدار بهینه تابع هدف یک مقدار محدود باشد، آنگاه .... (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۷۹)

۱) x^* مقادیر محدود دارد.
۲) منطقه قابل محدود است.
۳) x^* می‌تواند مقادیر نامحدود داشته باشد.
۴) منطقه قابل قبول نامحدود است.

۸ـ مدل زیر را در نظر بگیرید :

$$\text{Maximiz} = \{\text{Minimum}\,(۲۰, |۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳|, |x_۱ + x_۲ - ۲x_۳|\}$$
$$\text{s.t.}$$
$$Ax \le b$$
$$x \ge ۰$$

با توجه به مسأله فوق چه می‌توان گفت؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) یک مسأله برنامه‌ریزی نیست.

۲) قابل تبدیل به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی می‌باشد.

۳) فقط قابل تبدیل به یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی می‌باشد.

۴) فقط قابل تبدیل به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای صحیح می‌باشد.

۹ـ در مسأله برنامه‌ریزی خطی $\text{Min } Z = x_۱$ **:** (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

$$\text{s.t.} \quad x_۱ > ۰$$

۱) مسأله جواب شدنی ندارد پس جواب بهینه نیز نخواهد داشت.

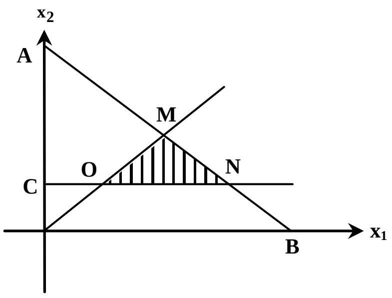
۲) مسأله دارای جواب شدنی است ولی دارای جواب بهینه نمی‌باشد.

۳) مسأله دارای جواب بهینه است چون دارای جواب شدنی است.

۴) مسأله دارای حد پایین است ولی جواب شدنی ندارد.

۱۰ـ فضای موجه هاشور خورده در شکل زیر مفروض است. کدام گزینه معادلات مربوطه را نشان می‌دهد؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)



۱) $x_۲ \ge$ ، $x_۱ \le x_۲$ ، $x_۱ + x_۲ \le$

۲) $x_۲ \ge$ ، $x_۱ \ge x_۲$ ، $x_۱ + x_۲ \le$

۳) $x_۲ \ge$ ، $x_۱ = x_۲$ ، $x_۱ + x_۲ \le$

۴) $x_۲ \le$ ، $x_۱ \ge x_۲$ ، $x_۱ + x_۲ \le$

۱۱ـ اگر $A_۱ = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ **و** $A_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$ **و** $X = (X_۱, X_۲)$ **بوده و داشته باشیم:** $A_۱X = ۱$ **و** $A_۲X = ۳$ **، در این صورت مقدار** X **کدام است؟**

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

۱) $X_۱ = \frac{۴}{۳}\ ,\ X_۲ = -\frac{۵}{۳}$

۲) $X_۱ = ۲\frac{۲}{۳}\ ,\ X_۲ = -\frac{۴}{۳}$

۳) $X_۱ = \frac{۵}{۳}\ ,\ X_۲ = -\frac{۴}{۳}$

۴) $X_۱ = -\frac{۴}{۳}\ ,\ X_۲ = \frac{۵}{۳}$

۱۲ـ مسأله برنامه‌ریزی ریاضی $\text{Min } Z = |۳x + ۱|$ **مفروض است، کدام مسأله برنامه‌ریزی خطی، هم ارز مسأله بالا می‌باشد؟**

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\text{Min } Z \quad \text{s.t} \begin{cases} ۳x + ۱ \ge z \\ ۳x + ۱ \ge -z \end{cases}$

۲) $\text{Min } Z \quad \text{s.t.} \begin{cases} ۳x + ۱ \le z \\ ۳x + ۱ \ge -z \end{cases}$

۳) $\text{Min } Z \quad \text{s.t.} \begin{cases} ۳x + ۱ \le z \\ -۳x + ۱ \le z \end{cases}$

۴) $\text{Min } Z \quad \text{s.t.} \begin{cases} ۳x - ۱ \ge z \\ -۳x + ۱ \le -z \end{cases}$

۱۳ـ در مسأله‌ای ذکر شده است که تولید محصول ۱ ($x_۱$) تنها زمانی مقرون به صرفه است که حداقل ۲۰۰۰ واحد از آن تولید شود. البته امکان تولید نشدن آن نیز وجود دارد. برای نشان دادن چنین قیدی کدام مورد صحیح است؟

(مهندسی صنایع گرایش‌های صنایع و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۱)

۱) $۰ \le x_۱ \le ۲۰۰۰$

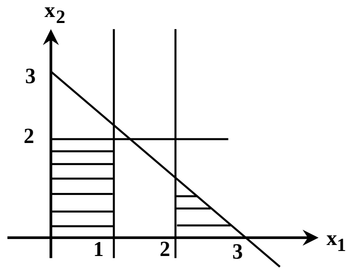
۲) $y \in \{۰,۱\}, x_۱ \le ۲۰۰۰y$

۳) $y \in \{۰,۱\}, x_۱ \le My, x_۱ \ge ۲۰۰۰y$

۴) $x_۱ = ۰,\ x_۱ \ge ۲۰۰۰$

۱۴ــ با توجه به نمودار، محدودیت مشخص‌کننده فضای سایه خورده کدام است؟

(مهندسی صنایع گرایش‌های صنایع و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۱)



۱) $(x_1 \le 2, x_1 + x_2 \le 3), (x_1 \le 1, x_2 \le 2)$

۲) $(x_1 \ge 2, x_1 + x_2 \ge 3), (x_1 \le 1, x_2 \ge 2)$

۳) $(x_1 \le 2, x_1 + x_2 \le 3), (x_1 \ge 1, x_2 \le 2)$

۴) $(x_1 \ge 2, x_1 + x_2 \le 3), (x_1 \le 1, x_2 \le 2)$

۱۵ــ مدل برنامه‌ریزی غیرخطی زیر مفروض است. نقطه بهینه این مسأله کدام است؟

(مهندسی صنایع گرایش‌های صنایع و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۱)

$$\begin{aligned} \text{Min}\, f(x) &= -(x_1-4)^2 + (x_2-4)^2 - 4x_1 + 5x_2 - 13 \\ \text{s.t}\quad & x_1 + x_2 - 4 \le 0 \\ & -x_1 \le 0 \\ & -x_2 \le 0 \end{aligned}$$

۱) هر دو نقطه $(0,0)$ و $(0,4)$

۲) هر دو نقطه $(0,0)$ و $(4,0)$

۳) فقط نقطه $(4,0)$

۴) فقط نقطه $(0,4)$

۱۶ــ مجموعهٔ $X = \{(x_1,x_2) : -x_1 + x_2 \le 2 \,,\, x_1 + 2x_2 \le 8 \,,\, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}$ را در نظر بگیرید. کوچکترین فاصله نقطه $A(-2,3)$ از این مجموعه چقدر است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) $\sqrt{5}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{6}$ ۴) ۳

۱۷ــ در یک مسأله برنامه‌ریزی خطی تابع هدف به صورت $\text{Max}\, z = |2x_1 - 3x_2|$ می‌باشد برای خطی کردن تابع هدف، کدام مجموعه زیر را پیشنهاد می‌کنید؟ فرض کنید $x_1, x_2 \ge 0$.

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) $\begin{cases} \text{Max}\, z = y_1 - y_2 \\ 2x_1 - 3x_2 = y_1 - y_2 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} \text{Max}\, z = y_1 + y_2 \\ 2x_1 - 3x_2 = y_1 + y_2 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} \text{Max}\, z = y_1 - y_2 \\ 2x_1 - 3x_2 = y_1 + y_2 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} \text{Max}\, z = y_1 + y_2 \\ 2x_1 - 3x_2 = y_1 - y_2 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$

۱۸ــ

دپارتمان	ظرفیت (ساعت)	سرعت تولید ($\frac{\text{تعداد}}{\text{ساعت}}$)	
		تکه۱	تکه۲
۱	۱۵۰	۱۰	۱۵
۲	۳۰۰	۱۵	۱۳

محصولی از دو تکه ۱ و۲ تشکیل شده است. چنانچه دو دپارتمان ۱ و ۲ مایل به تولید حداکثر محصول بوده و در عین حال، مایل به داشتن حداقل قطعات اضافی باشند، در این صورت مسأله دارای ....

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) چهار متغیر و چهار محدودیت (بدون در نظر گرفتن شرط مثبت بودن) می‌باشد.

۲) دو متغیر و دو محدودیت (بدون در نظر گرفتن شرط مثبت بودن) می‌باشد.

۳) پنج متغیر و چهار محدودیت (بدون در نظر گرفتن شرط مثبت بودن) می‌باشد.

۴) چهار متغیر و دو محدودیت (بدون در نظر گرفتن شرط مثبت بودن) می‌باشد.

۱۹ــ در مدل‌سازی یک مسأله که در آن تمام متغیرها صفر و یک هستند، به این محدودیت برخورده‌ایم که اگر متغیر x_1 یک شود، آنگاه باید متغیرهای x_2, x_3, x_4 صفر شوند. رابطه فوق، معادل کدام دسته از محدودیت‌های زیر است که در آن y یک متغیر صفر و یک است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۲)

۱) $x_1 \le 3(1-y)\,,\, x_2 + x_3 + x_4 \le 3y$

۲) $x_1 \ge 3(1-y)\,,\, x_2 + x_3 + x_4 \le 3y$

۳) $x_1 \le 2(1-y)\,,\, x_2 + x_3 + x_4 \ge 2y$

۴) $x_1 \ge 2(1-y)\,,\, x_2 + x_3 + x_4 \ge 2y$

۲۰ـ در یک کارگاه دو نوع محصول ۱ و ۲ تولید می‌شود. میزان تولید محصول اول حداقل دو برابر محصول دوم است. توان بازار برای محصول دوم بیش از ۲۰ واحد نمی‌باشد ولیکن براساس قراردادی حداقل باید ۱۵ واحد از این محصول تولید شود. اگر x_1 و x_2 به ترتیب میزان تولید این دو محصول باشد، محدودیت معادل این شرایط کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش‌های صنایع و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۲)

۱) $x_1 - 2x_2 \geq 0, x_2 = 15, x_2 \leq 20$

۲) $x_1 - 2x_2 = 0, 15 \leq x_2 \leq 20$

۳) $x_1 - 2x_2 \geq 0, 15 \leq x_2 \leq 20$

۴) $\frac{1}{2}x_1 - x_2 \leq 0\ , x_2 \geq 15\ ,\ x_2 \leq 20$

۲۱ـ مدل برنامه‌ریزی خطی مقابل مفروض است:

$$\begin{aligned} \text{Max}\ \ & Z = 5000x_1 + 4000x_2 \\ \text{s.t.}\ \ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 - 3x_2 \leq 0 \\ & 10x_1 + 15x_2 \leq 150 \\ & 20x_1 + 10x_2 \leq 160 \\ & 30x_1 + 10x_2 \geq 135 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

کدام یک از عبارات زیر در مورد فضای جواب این مسأله صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش‌های صنایع و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۲)

۱) این مسأله فضای جواب قابل قبول ندارد.

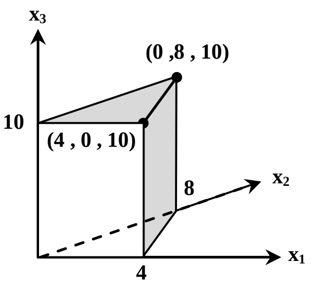
۲) فضای جواب این مسأله متناهی و محدود است.

۳) فضای جواب این مسأله نامتناهی است.

۴) فضای جواب این مسأله دارای هفت گوشه قابل قبول است.

۲۲ـ هرم زیر را در نظر بگیرید. در این صورت محدودیت‌هایی که می‌تواند این هرم را نشان دهد، کدام است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰ و مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۲)



۱) $x_3 \leq 10, 2x_1 + x_2 \leq 8$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

۲) $x_3 \leq 10, x_2 \leq 8, x_1 \leq 4$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

۳) $x_2 \leq 8, x_1 \leq 4, 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 320$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

۴) $x_2 \leq 8, x_1 \leq 4, x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 10$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

۲۳ـ مسأله برنامه‌ریزی به صورت قدر مطلق مقابل مفروض است. مدل برنامه‌ریزی خطی این مسأله کدام است؟ $\{\text{Max}\, z = \sum \alpha_i\, |x_i| \,/\, Ax = b\}$

(مهندسی صنایع گرایش‌های صنایع و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۲)

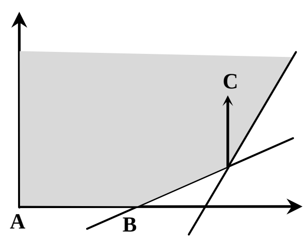
۱) $\{\text{Max}\, z = \sum \alpha_i (u_i - v_i) / A(u_i - v_i) = b; u_i, v_i \geq 0\}$

۲) $\{\text{Max}\, z = \sum \alpha_i (u_i - v_i) / A(u_i + v_i) = b; u_i, v_i \geq 0\}$

۳) $\{\text{Max}\, z = \sum \alpha_i (u_i + v_i) / A(u_i + v_i) = b; u_i, v_i \geq 0\}$

۴) $\{\text{Max}\, z = \sum \alpha_i (u_i + v_i) / A(u_i - v_i) = b; u_i, v_i \geq 0\}$

۲۴ـ فرض کنید شکل مقابل ناحیهٔ شدنی یک برنامه‌ریزی خطی را نشان می‌دهد و C بردار گرادیان تابع هدفی از نوع مینیمم کـردن اسـت. در ایـن صـورت کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۳)



۱) مسأله دارای جواب بهینهٔ کراندار نیست.

۲) مسأله دارای جواب‌های بهینهٔ چندگانه است.

۳) فقط مبدأ با مقدار تابع هدف صفر جواب بهینهٔ مسأله است.

۴) در مورد جواب بهینهٔ مسأله چیزی نمی‌توان گفت.

۲۵ـ مسأله داده شده $\begin{cases}\text{Minimize} & 2|x_1|+x_2 \\ \text{s.t} & \\ & x_1+x_2\ge 4\end{cases}$ **معادل کدام مسأله زیر است؟** (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) $\begin{cases}\text{Minimize} & 2z_1+x_2 \\ \text{s.t.} & \\ & x_1+x_2\ge 4 \\ & x_1\le z_1 \\ & -x_1\le z_1\end{cases}$

۲) $\begin{cases}\text{Minimize} & 2z_1+x_2 \\ \text{s.t.} & \\ & x_1+x_2\ge 4 \\ & x_1\le z_1 \\ & x_1\le -z_1\end{cases}$

۳) $\begin{cases}\text{Minimize} & -2z_1+x_2 \\ \text{s.t.} & \\ & x_1+x_2\ge 4 \\ & x_1\ge z_1 \\ & x_1\ge -z_1\end{cases}$

۴) $\begin{cases}\text{Minimize} & 2z_1+x_2 \\ \text{s.t.} & \\ & -x_1+x_2\ge 4 \\ & -x_1\ge z_1 \\ & -x_1\ge -z_1\end{cases}$

۲۶ـ برای مدل‌سازی مسأله دو گزینه وجود دارد کدامیک از نظر حجم محاسبات بهتر است؟ گزینه ۱ دارای ۵۰۰۰ متغیر و ۱۰۰۰ محدودیت و گزینه ۲ دارای ۱۰۰۰ متغیر تصمیم و ۵۰۰۰ محدودیت (با فرض شرایط مساوی در بقیه موارد) است.

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۶)

۱) گزینه ۱　　۲) گزینه ۲

۳) همواره حل مسأله ثانویه (دوگان) از نظر حجم محاسباتی بهتر است.　　۴) هیچکدام از سه گزینه فوق

۲۷ـ مدل برنامه‌ریزی خطی مقابل مفروض است:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1+x_2 \\ \text{s.t}\quad & x_1+2x_2\le 4 \\ & x_2\le 1 \\ & x_1,x_2\ge 0 \end{aligned}$$

اگر x_3, x_4 به ترتیب متغیرهای کمکی محدودیت‌های اول و دوم باشند، مدل فوق با کدامیک از مدل‌های زیر معادل است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع - آزاد ۸۷)

۱) $\begin{aligned} \min z &= 3-x_3+x_4 \\ & x_3-2x_4\le 2 \\ & x_4\le 1 \\ & x_3,x_4\ge 0\end{aligned}$

۲) $\begin{aligned} \min z &= -x_3+x_4 \\ & x_3-2x_4= 2 \\ & x_4= 1 \\ & x_3,x_4\ge 0\end{aligned}$

۳) $\begin{aligned} \min z &= 3+x_3-x_4 \\ & x_3-2x_4\le 2 \\ & x_4\le 1 \\ & x_3,x_4\ge 0\end{aligned}$

۴) $\begin{aligned} \min z &= -3-x_3+x_4 \\ & x_3-2x_4= 2 \\ & x_4= 1 \\ & x_3,x_4\ge 0\end{aligned}$

۲۸ـ زمان تولید محصول (۱) نصف زمان تولید محصول (۲) و $\frac{2}{3}$ زمان تولید محصول (۳) است. اگر مؤسسه‌ای تمام زمان خود را صرف تولید محصول (۲) کند، قادر به تولید حداکثر ۵۰۰ واحد از این محصول خواهد بود. محدودیتی که مسأله فوق را بیان می‌کند عبارت است از:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۷)

۱) $2x_1+x_2+3x_3\le 2000$　　۲) $x_1+2x_2+x_3\le 1500$　　۳) $2x_1+4x_2+3x_3\le 2000$　　۴) $x_1+4x_2+2x_3\le 1500$

۲۹ـ یک محصول از مونتاژ سه قطعه A، B و C ساخته می‌شود. جهت محصول مونتاژ شده به ۲ قطعه از نوع A یک قطعه از نوع B و ۳ قطعه از نوع C نیاز است. اگر x_A، x_B و x_C به‌ترتیب مقدار تولید هر یک از این سه قطعه بوده و هدف افزایش محصول تکمیل شده باشد، تابع هدف مدل عبارت است از:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\text{Max}\, z=\text{Min}\{x_A, x_B, x_C\}$　　۲) $\text{Max}\, z=\text{Min}\{2x_A, x_B, 3x_C\}$

۳) $\text{Max}\, z=\text{Min}\{x_A+x_B+x_C\}$　　۴) $\text{Max}\, z=\text{Min}\{\frac{x_A}{2}, x_B, \frac{x_C}{3}\}$

۳۰ـ منطقه موجه یک LP به‌صورت یک پاره‌خط است. این مسأله دارای: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۷)

۱) دو محدودیت بزرگ‌تر یا مساوی است.

۲) دو محدودیت کوچک‌تر یا مساوی است.

۳) یک محدودیت کوچک‌تر یا مساوی و یک محدودیت بزرگ‌تر یا مساوی با ضرایب مختلف است.

۴) یک محدودیت کوچک‌تر یا مساوی و یک محدودیت تساوی است.

۳۱ـ مسأله برنامه ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید، در این صورت کدام مورد صحیح می‌باشد؟

$$\text{Max} \quad Z = X_1 + 4X_2 + X_3$$

$$\begin{cases} 2X_1 - 2X_2 + X_3 = 2 \\ X_1 \qquad\quad - X_3 = 1 \\ X_2 \geq 0 \;,\; X_3 \geq 0 \end{cases}$$

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۸)

۱) این مسأله دارای جواب بهینه محدودی نیست و مقدار تابع هدف آن بینهایت است.

۲) جواب بهینه عبارت است از: $X_1 = 1 , X_2 = X_3 = 0$

۳) جواب بهینه عبارت است از: $X_1 = X_2 = 3 , X_3 = 2$

۴) این مسأله دارای جواب موجهی نیست.

۳۲ـ در چه صورت یک مسأله برنامه‌ریزی خطی دارای دو جواب بهینه متمایز است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۸)

۱) تحت هیچ شرایطی چنین موردی پیش نمی‌آید.

۲) فقط در صورتی که مسأله دارای جواب تبهگن باشد.

۳) در صورتی که از نظر هندسی تابع هدف موازی حداقل یکی از محدودیت‌ها باشد.

۴) در صورتی که در سطر مربوط به تابع هدف جدول بهینه ضریب یکی از متغیرهای غیر اساسی صفر باشد.

۳۳ـ برای تهیه یک کالا از دو قطعه (۱) و سه قطعه (۲) استفاده می‌شود، تابع هدف مسأله جهت بیشترین تولید از این کالا کدام است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۹)

۱) $\max z = 3x_1 + 2x_2$　　۲) $\max z = 2x_1 + 3x_2$　　۳) $\max z = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3}$　　۴) $\max z = \min [\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}]$

۳۴ـ فضای جواب با مشخصات زیر را در نظر بگیرید. شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای که به مرکز $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ می‌تواند بر فضای جواب محیط بوده و تنها در یک نقطه با آن مشترک باشد، چقدر است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۹)

$$\begin{aligned} & x_2 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

۱) ۲

۲) ۳/۱

۳) ۲/۵۵

۴) ۲/۱۲

۳۵ـ در یک فروشگاه زنجیره‌ای با توجه به تعداد مشتریان در روزهای مختلف هفته نیاز به صندوقدار، مطابق جدول روبرو دارد. برحسب قانون کار هر صندوقدار در ازای ۵ روز کار متوالی ۲ روز به مرخصی می‌رود. اگر متغیر x_i تعداد افرادی باشد که در روز i مشغول به کار می‌شوند، در این صورت محدودیت تعداد افرادی که در روز شنبه مشغول به کار هستند، عبارت است از:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۹)

روز	i	تعداد صندوقدار مورد نیاز
شنبه	۱	۱۵
یکشنبه	۲	۱۱
دوشنبه	۳	۱۲
سه‌شنبه	۴	۱۷
چهارشنبه	۵	۱۳
پنج‌شنبه	۶	۱۴
جمعه	۷	۹

۱) $x_1 \geq 15$

۲) $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 15$

۳) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 15$

۴) $x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 15$

۳۶ـ فرم خطی مسأله $\max |3x_1 + 2x_2|$ کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۹)

۱) $\max z$ s.t. $3x_1 + 2x_2 \le z$, $3x_1 + 2x_2 \ge -z$

۲) $\max z$ s.t. $3x_1 + 2x_2 \ge z$, $3x_1 + 2x_2 \le -z$

۳) $\max z_1 + z_2$ s.t. $3x_1 + 2x_2 = z_1 - z_2$, $z_1, z_2 \ge 0$

۴) $\max z_1 + z_2$ s.t. $3x_1 + 2x_2 \ge z$, $3x_1 + 2x_2 \ge -z$, $z_1, z_2 \ge 0$

۳۷ـ در مسأله برنامه ریزی خطی زیر، در چه صورت نقطه $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ جواب بهینه است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۹)

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.t} \quad & x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

۱) $\frac{c_1}{c_2} \le 1$ ۲) $\frac{c_1}{c_2} \le 0$ ۳) $\frac{c_1}{c_2} \ge 1$ ۴) $0 \le \frac{c_1}{c_2} \le 1$

۳۸ـ در دو میدان نفتی در خلیج فارس نسبت گاز به نفت به ترتیب $1000 \frac{scf}{stb}$ و $4000 \frac{scf}{stb}$ بوده و سود خالص آنها به ترتیب ۱۰ و ۱۲ دلار در هر بشکه می‌باشد. اگر حداکثر نسبت گاز به نفت قابل عبور از لوله‌ها $2000 \frac{scf}{stb}$ و حداقل خوراک پالایشگاه $60000 \frac{stb}{d}$ باشد، مدل برنامه‌ریزی خطی استخراج بهینه نفت کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۹)

۱)
$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 10x_1 + 12x_2 \\ & x_1 + x_2 \ge 60000 \\ & 1000x_1 + 4000x_2 \le 2000 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

۲)
$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 10x_1 + 12x_2 \\ & x_1 + x_2 \ge 60000 \\ & 1000x_1 + 4000x_2 \le 2000(x_1 + x_2) \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

۳)
$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 10x_1 + 12x_2 \\ & 0/5x_1 + 2x_2 \ge 60000 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

۴)
$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 10x_1 + 12x_2 \\ & x_1 + x_2 \ge 2000 \\ & 1000x_1 + 4000x_2 \ge 6000 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

۳۹ـ ریشه‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر چگونه است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۹)

$$\begin{aligned} \textbf{Max}\, z = & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 \le 10 \\ & 2x_1 - x_2 \le 40 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

۱) جواب ناتباهیده است.

۲) فضای جواب بی‌کران است.

۳) جواب بهینه دگرین است.

۴) جواب بهینه بی‌کران است.

۴۰ـ برای محاسبهٔ هزینهٔ برق مصرفی تا ۴۰ کیلووات هزینهٔ a_1، بین ۴۰ تا ۶۰ کیلووات برای مازاد ۲۰ کیلووات a_2 که $(a_2 > a_1)$ و برای مقادیر بیشتر از ۶۰ کیلووات a_3 که $(a_3 > a_2)$ است در نظر گرفته می‌شود. برای مینیمم سازی چنانچه $i = 1, 2, 3$ و x_i میزان برق مصرفی در هر یک از بازه‌ها باشد و y_i نیز متغیر صفر و یک، مقدار یک را تنها زمانی که x_i به حد بالای خود برسد بگیرد. فرم مناسب مدل‌سازی کدام گزینه زیر است؟ (M عدد بزرگ مثبت است.) (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۹۰)

۱) $\min \sum_{i=1}^{3} a_i x_i$ s.t. $x_1 \le 40$, $x_2 \le 20$, $x_3 \ge 60$

۲) $\min \sum_{i=1}^{3} a_i x_i$ s.t. $40y_1 \le x_1 \le 40$, $20y_1 \le x_2 \le 20y_2$, $x_3 \le My_3$

۳) $\min \sum_{i=1}^{3} a_i x_i$ s.t. $0 \le x_1 \le 40y_1$, $20y_2 \le x_2 \le 20y_1$, $x_3 \le My_3$

۴) $\min a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ s.t. $40y_1 \le x_1 \le 40$, $20y_2 \le x_2 \le 20y_1$, $x_3 \le My_3$

۴۱ـ فرض کنید y_A، y_B و y_C متغیرهای صفر و یک نمایندهٔ انجام یا عدم انجام آلترناتیوهای A، B و C باشند ($y_i=۱$ انجام و $y_i=۰$ عدم انجام) اگر A یا B انتخاب شود C نباید انتخاب شود با کدام گزینه زیر هم ارز است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۹۰)

۱) $y_A+y_B\le ۲y_C$
۲) $y_A+y_B\le ۲(۱-y_C)$
۳) $y_A-y_B\le ۲(۱-y_C)$
۴) $y_A+y_B\le ۲(۱+y_C)$

۴۲ـ دو مسأله برنامه‌ریزی ریاضی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{lll} z_۱=\text{Min } cx & & z_۲=\text{Min } cx \\ \text{s.t. } f(x)=b & \text{و} & \text{s.t. } f(x)=tb \\ (۱)\quad x\ge ۰ & & (۲)\quad x\ge ۰ \end{array}$$

اگر تابع f خطی باشد آنگاه چه نتیجه‌ای گرفته می‌شود؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۹۰)

۱) $z_۲\le tz_۱$
۲) $z_۲=tz_۱$
۳) $z_۲\ge tz_۱$
۴) هیچ‌کدام

۴۳ـ مجموعه‌ی $S=(x\in R^۳\,|\,x_i\le ۱, i=۱,۲,۳)$ دارای چند نقطه گوشه موجه است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۹۰)

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۵
۴) ۸

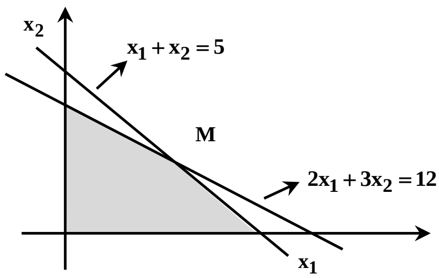
۴۴ـ در یک مسأله برنامه‌ریزی ریاضی که در آن تمام متغیرها صفر و یک هستند به محدودیت زیر برخوردیم که حداقل یکی از متغیرهای $x_۲, x_۳, x_۴$ نیز صفر شود $x_۱=۰ \Rightarrow$

در این صورت کدام‌یک از دسته محدودیت‌های زیر معادل رابطه‌ی منطقی فوق است که در آن y نیز یک متغیر صفر و یک است:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\begin{array}{l} x_۲+x_۳+x_۴\le ۲y \\ x_۱\ge ۳(۱-y) \end{array}$
۲) $\begin{array}{l} x_۲+x_۳+x_۴\ge ۲y \\ x_۱\ge ۳(۱-y) \end{array}$
۳) $\begin{array}{l} x_۲+x_۳+x_۴\le ۳y \\ x_۱\le ۳(۱-y) \end{array}$
۴) $\begin{array}{l} x_۲+x_۳+x_۴\ge ۲y \\ x_۱\le ۳(۱-y) \end{array}$

۴۵ـ در مسأله زیر هدف $\max z=ax_۱+۲x_۲$ است. به ازای چه مقادیری از a نقطه M جواب بهینه است. (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۰)



۱) $\frac{۲}{۳}\le a\le ۱$
۲) $۱\le a\le \frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۴}{۳}\le a\le ۲$
۴) $۱\le a\le ۲$

۴۶ـ در یک مسأله برنامه‌ریزی ریاضی برای برنامه تولید یک شرکت باید محدودیت جدیدی به مسأله اضافه کرد تا تعداد کل محصولات تولید شده مضربی از ۵۰۰ بوده و ضمناً از ۲۶۰۰ نیز کمتر باشد. جهت در نظر گرفتن این شرط به مسأله کدام عبارت صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۰)

۱) یک محدودیت و بیش از ۲ متغیر باید به مسأله اضافه شود.
۲) دو محدودیت و بیش از ۳ متغیر باید به مسأله اضافه شود.
۳) فقط یک محدودیت به مسأله اضافه شود.
۴) فقط ۶ محدودیت به مسأله اضافه شود.

۴۷ـ یک شرکت تولیدی کلاً ۴۰ ساعت وقت جهت تولید محصولات زیر دارد:

تولید هر واحد محصول A نیازمند یک ساعت کار

تولید هر محصول B نیازمند دو ساعت کار و دو واحد محصول A است.

تولید هر واحد محصول C نیازمند سه ساعت کار و یک واحد محصول B است.

محصولاتی که در تولید محصولات دیگر استفاده می‌شوند جزئی از آنها شده و قابل تفکیک نیستند. اگر میزان تولید اولیه محصولات A، B و C را به ترتیب با X_A، X_B و X_C نشان دهیم، کدام گزینه محدودیت ساعت کار به‌صورت زیر خواهد بود؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۹۰)

۱) $X_A+۴X_B+۷X_C\le ۴۰$
۲) $X_A+۷X_B+۴X_C\le ۴۰$
۳) $۴X_A+۷X_B+X_C\le ۴۰$
۴) $۷X_A+۴X_B+X_C\le ۴۰$

۴۸ـ جواب بهینه مسأله صفر و یک زیر چقدر است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۹۰)

$$\begin{aligned}&\text{Min } 3x_1+4x_2+5x_3+7x_4\\&\text{s.t.}\\&\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3+x_4\ge 6\\x_1+4x_2+2x_3+x_4\ge 6\\3x_1+x_2+x_3+4x_4\ge 6\end{cases}\\&x_j=(0,1)\end{aligned}$$

۱) ۷

۲) ۱۲

۳) ۱۴

۴) ۱۵

۴۹ـ اگر در یک مسأله برنامه‌ریزی عدد صحیح امکان انتخاب یکی از دو محدودیت $x_1 \ge 100$ یا $x_1 \le 0$ باشد، کدام‌یک از حالت‌های زیر بیانگر این وضعیت است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\begin{cases}x_1\le My\\100+x_1\le M(1-y)\\y=0 \text{ یا } (1)\end{cases}$

۲) $\begin{cases}x_1\ge My\\100+x_1\le M(1-y)\\y=0 \text{ یا } (1)\end{cases}$

۳) $\begin{cases}x_1\le My\\100-x_1\le M(1-y)\\y=0 \text{ یا } (1)\end{cases}$

۴) $\begin{cases}x_1\le My\\100-x_1\ge M(1-y)\\y=0 \text{ یا } (1)\end{cases}$

۵۰ـ ایستگاه اورژانس تهران در چهار شیفت روزانه خود به حداقل افراد زیر نیازمند است. افراد این ایستگاه می‌توانند ۱۲ ساعت و یا ۱۸ ساعت متوالی کار کنند. اگر x_i, y_i را تعداد افرادی بدانیم که قرار است به ترتیب۱۲ ساعت و یا ۱۸ساعت کار کرده و کار خود را از شیفت ۱ شروع کنند. در این صورت کدام محدودیت زیر در مدل‌سازی مسأله موجود است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۹۰)

نفرات مورد نیاز	ساعت کاری	شیفت
۱۲	۱۲ شب ـ ۶ صبح	۱
۸	۶ صبح ـ ۱۲ ظهر	۲
۶	۱۲ ظهر ـ ۶ عصر	۳
۱۵	۶ عصر ـ ۱۲ شب	۴

۱) $x_3+x_2+y_3+y_1+y_2\ge 6$

۲) $x_1+x_3+y_1+y_2+y_4\ge 8$

۳) $x_1+x_2+x_3+y_2+y_3\ge 12$

۴) $x_2+x_4+y_1+y_4+y_3\ge 15$

۵۱ـ Z^* مطلوب است (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۱)

$$\begin{aligned}&Z=\text{Max}\{\text{Min}\{f(y_1),f(y_2),f(y_3)\}\}\\&f(y_1)=y_1+2\\&f(y_2)=-3y_2+4\\&f(y_3)=y_3-4\\&y_1+y_2+y_3=5 \qquad y_i\ge 0 \qquad i=1,2,3\end{aligned}$$

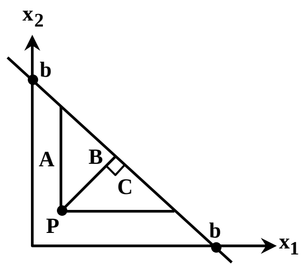
۱) $Z^*=1$

۲) $Z^*=3$

۳) $Z^*=2$

۴) $Z^*=4$

۵۲ـ محدودیت خطی $x_1+x_2\le b$ را در نظر بگیرید. اگر نقطهٔ $P=(P_1,P_2)$ یک نقطه شدنی به ازای محدودیت مذکور باشد، کدامیک از فواصل نشان داده شده، معرف مقدار متغیر کمکی (کمبود) این محدودیت است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۱)



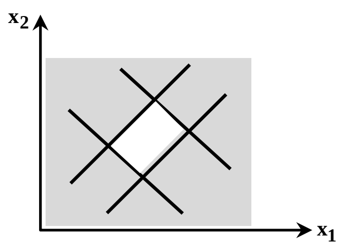
۱) A

۲) B

۳) C

۴) هیچ‌کدام

۵۳ـ در شکل زیر، ناحیه هاشورخورده ناحیه موجه محسوب می‌شود. اگر y_1 متغیر صفر و یک مسأله و M نشان‌دهنده عـدد بسـیار بـزرگ باشـد، کدامیک از گزینه‌ها به عنوان تعدادی از محدودیت‌های مسأله محسوب می‌شوند؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۱)



۱) $\begin{matrix} x_1 + x_2 \ge 10 - M(1-y_1) \\ x_1 + x_2 \le 8 + My_1 \end{matrix}$

۲) $\begin{matrix} x_1 + x_2 \le 10 - M(1-y_1) \\ x_1 + x_2 \ge 8 + My_1 \end{matrix}$

۳) $\begin{matrix} x_1 + x_2 \ge 10 + My_1 \\ x_1 + x_2 \le 8 + My_1 \end{matrix}$

۴) $\begin{matrix} x_1 + x_2 \ge 10 - My_1 \\ x_1 + x_2 \le 8 + My_1 \end{matrix}$

۵۴ـ چنانچه فضای موجه یک مسأله برنامه‌ریزی خطی نامحدود باشد، در این صورت: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۱)

۱) مسأله جواب بهینه ندارد.
۲) مسأله اصلاً جواب قابل قبول ندارد.
۳) لزوماً جواب‌های مسأله نامحدود هستند.
۴) ممکن است جواب بهینه نیز نامحدود باشد.

۵۵ـ بر افزایش مهارت کارگران، زمان ساخت یک قطعه رو به کاهش است. مسأله‌ای با این محدودیت، چه نوع برنامه‌ریزی محسوب می‌شود؟
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۱)

۱) برنامه‌ریزی غیرقطعی
۲) برنامه‌ریزی خطی
۳) برنامه‌ریزی غیرخطی
۴) هیچ‌کدام

۵۶ـ در ساخت محصول الف دو قطعه ۱و ۲ استفاده می‌شود به طوری‌که هر واحد محصول الف از سه قطعه ۱ و دو قطعه ۲ ساخته می‌شود این قطعـات می‌بایست از بیرون تهیه شود اگر میزان تولید محصول الف در دوره برنامه‌ریزی A و میزان خرید قطعات ۱ و ۲ به ترتیب x_1 و x_2 و قیمت فروش هر واحد محصول الف ۱۰۰ تومان باشد، مدل برنامه‌ریزی خطی برای تهیه قطعات و ساخت محصول با مصرف بیشینه‌سازی درآمد عبارتند از:
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۹۱)

۱) $\max(z) = 100A \quad s.t \begin{cases} A - 3x_1 \le 0 \\ A - 2x_2 \le 0 \\ A, x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

۲) $\max(z) = 100A \quad s.t \begin{cases} A = Max\{\frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{2}\} \\ A, x_1 x_2 \ge 0 \end{cases}$

۳) $\max(z) = 100A \quad s.t \begin{cases} A = Min\{\frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{2}\} \\ A, x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

۴) $\max(z) = 100A \quad s.t \begin{cases} 3A - x_1 \le 0 \\ 2A - x_2 \le 0 \\ A, x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

۵۷ـ اگر A، B و C سه آلترناتیو باشند که می‌توانند انجام شوند و یا انجام نشوند و y_A، y_B و y_C متغیرهای صفر و یک مربوط به انجام و یا عدم انجام آنها باشد. اگر قرار باشد که اگر A یا B انتخاب شود C حتماً انتخاب نشود، کدام‌یک از موارد زیر صحیح است؟
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری۹۱)

۱) $y_A + y_B \le 1 + y_C$
۲) $y_A + y_B \le 2(1 - y_C)$
۳) $y_A - y_B \le 2(1 + y_C)$
۴) $y_A + y_B \le 2(1 + y_C)$

۵۸ـ یک مجتمع صنعتی تصمیم دارد به منظور توسعه فعالیت‌های خود، کارخانه‌ای جدید را تنها در یکـی از دو شـهر (الـف) (x_A) یـا شـهر (ب) (x_B) تأسیس نماید. این مجتمع معتقد است در شهری که به این منظور انتخاب می‌شود، می‌توان انبار جدیدی نیز احداث کرد (y_A, y_B). برای تـأمین شرایط این مجتمع کدام‌یک از مجموعه روابط صفر ـ یک زیر مناسب می‌باشد؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری۹۱)

۱) $x_A + x_B \le 1 \;,\; y_A + y_B = 1 \;,\; y_A - x_A \le 1 \;,\; y_B - x_B \le 1$
۲) $x_A + x_B = 1 \;,\; y_A + y_B = 1 \;,\; y_A - x_A = 0 \;,\; y_B - x_B = 0$
۳) $x_A + x_B \ge 1 \;,\; y_A + y_B \le 1 \;,\; y_A - x_A \ge 0 \;,\; y_B - x_B \ge 0$
۴) $x_A + x_B = 1 \;,\; y_A + y_B \le 1 \;,\; y_A - x_A \le 0 \;,\; y_B - x_B \le 0$

۵۹ـ شرکتی تصمیم دارد امکان سرمایه‌گذاری در ۴ پروژه را بررسی نماید. بر این اساس و پس از بررسی‌های اولیه سیاست زیر را به عنوان یکی از سیاست‌های خود اتخاذ نموده است.

«اگر در پروژه شماره ۲ سرمایه‌گذاری کند در پروژه شماره یک نیز سرمایه‌گذاری کند و بر عکس» با استفاده از متغیرهای صفر ــ یک کدام یک از حالات زیر سیاست مورد نظر این شرکت تأمین می‌گردد؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۹۱)

۱) $x_1 - x_2 \le 0$ ۲) $x_1 + x_2 \ge 1$ ۳) $x_1 + x_2 = 1$ ۴) $x_2 - x_1 = 0$

۶۰ـ مدل ریاضی یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف کمینه‌سازی داده شده است. جواب بهینه این مسأله چگونه است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۹۱)

$$\begin{aligned}&\textbf{Min}\quad Z = 2x_1 + x_2\\ &\text{s.t.}\\ &\begin{cases}2x_1 + x_2 \le 4\\ x_2 \ge 1\\ x_1, x_2 \ge 0\end{cases}\end{aligned}$$

۱) تبهگن
۲) نامحدود
۳) منحصر به فرد
۴) چندگانه

۶۱ـ مسأله برنامه‌ریزی زیر کدامیک از حالات خاص است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۱)

$$\begin{aligned}&\textbf{Max}\ z = 3x_1 + 4x_2\\ &-x_1 + x_2 \le -3\\ &6x_1 + 8x_2 \le 2\\ &x_1 - x_2 \le 2 \qquad x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$

۱) بی‌کران
۲) بدون جواب
۳) جواب متعدد
۴) هیچ‌کدام

۶۲ـ یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با ۳ متغیر تصمیم را در نظر بگیرد. فرض کنید این مسأله دارای حالت خاص جواب متعدد (چندگانه) در موقعیت بهینه است.در این صورت حداکثر نقاط گوشه‌ای بهینه که این مسأله می‌تواند داشته باشد، چه تعداد است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۱)

۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) هیچ‌کدام از گزینه‌های فوق صحیح نیست

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل اول

۱ـ گزینه «۱» ترکیب دو تابع هدف، جوابی بهتر از مجموع جواب آن‌ها نمی‌دهد.

$$\underset{A}{\mathrm{Max}}(f+g) \le \underset{A}{\mathrm{Max}}\, f + \underset{A}{\mathrm{Max}}\, g = ۷+۵ = ۱۲$$

۲ـ گزینه «۳» نقطه $x_۱ = ۲ > ۰\ ;\ x_۲ = \frac{۱}{۲} > ۰\ ;\ x_۳ = ۱ > ۰$ را در محدودیت‌ها قرار می‌دهیم:

$$۱۰(۲) + ۲۰(\frac{۱}{۲}) + ۵۰(۱) = ۸۰ < ۱۰۰ \qquad ۵(۲) + ۲۰(\frac{۱}{۲}) + ۳۰(۱) = ۵۰ < ۶۰$$

نقطه موردنظر کاملاً داخل ناحیه‌ی شدنی واقع شده است.

۳ـ گزینه «۴» اگر $\max(|۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳|, |x_۱ + x_۲ + ۲x_۳|)$ را برابر Z در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} |۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳| \le Z \\ |x_۱ + x_۲ + ۲x_۳| \le Z \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min}\ Z \\ &\quad s.t \\ &\quad ۳x_۱ - ۲x_۱ + ۴x_۳ \le Z \\ &\quad ۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳ \ge -Z \\ &\quad x_۱ + x_۲ + ۲x_۲ \le Z \\ &\quad x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ \ge -Z \end{aligned}$$

که یک مدل برنامه‌ریزی خطی می‌باشد.

نکته: اگر مدل به صورت $\max\{\min(|۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳|, |x_۱ + x_۲ + ۲x_۳|)\}$ می‌بود، در این صورت:

$$Z = \min(|۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳|, |x_۱ + x_۲ + ۲x_۳|) \Rightarrow \begin{cases} Z \le |۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳| \\ Z \le |x_۱ + x_۲ + ۲x_۳| \end{cases}$$

برای حذف قدر مطلق از محدودیت اول داریم:

$$Z \le ۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳ \quad \text{یا} \quad -Z \ge ۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳$$

که معادل است با:

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳ \le -Z + My \\ ۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳ \ge Z - M(۱-y) \end{cases}$$

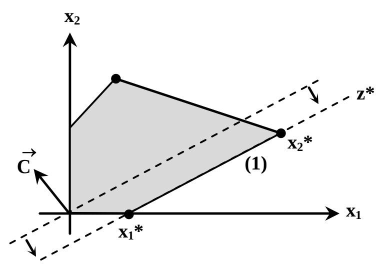
که $y \in \{۰,۱\}$ است. پس به یک مدل برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای صحیح تبدیل می‌شود.

۴ـ گزینه «۱» اگر $x.y.z = ۰$، باید حداقل یکی از متغیرهای z, y, x صفر باشد. پس می‌توان قید خطی $x + y + z \le ۲$ را جایگزین $x.y.z = ۰$ کرد که x و y و z متغیر صفر ـ یک هستند.

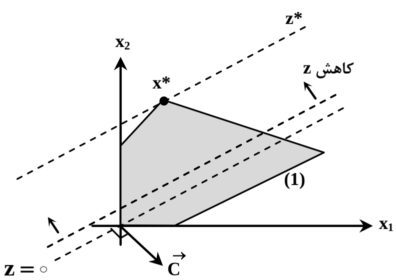
۵ـ گزینه «۴» در تابع هدف به جای $|x_i|$ عبارت $u_i + v_i$ و در محدودیت‌ها به جای x_i عبارت $u_i - v_i$ را جایگزین می‌کنیم و $v_i \ge ۰, u_i \ge ۰$.

نکته: الگوریتم سیمپلکس با صورت استاندارد LP آغاز به حل می‌کند (استاندارد LP: $\underset{\substack{Ax=b \\ x\ge ۰}}{\min/\max}\ Cx$)

۶ـ گزینه «۴» در دو حالت زیر تابع هدف Min سازی فرض شده است.



تابع هدف موازی محدودیت (۱) است
و جواب بهینه چندگانه داریم.



تابع هدف موازی محدودیت (۱) است
ولی جواب بهینه یگانه است.

۷ـ گزینه «۳» اگر مقدار Z^* متناهی باشد، منطقه قابل قبول مسأله می‌تواند محدود یا نامحدود باشد و مؤلفه‌های نقطه بهینه x^* می‌توانند مقادیر محدود یا نامحدود داشته باشند. به عنوان مثال در حالتی که شعاع بهینه داریم، مقدار Z^* متناهی است ولی مقادیر x^* روی شعاع بهینه می‌توانند مقادیر نامحدود به خود بگیرند.

◆ ◆ ◆ ◆

۸ـ گزینه «۴» با تعریف متغیر Z به صورت مقابل داریم:

$$Z = \text{Min}\{۲۰, |۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳|, |x_۱ + x_۲ - ۲x_۳|\} \Rightarrow \begin{cases} z \le ۲۰ \\ z \le |۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳| \\ z \le |x_۱ + x_۲ - ۲x_۳| \end{cases}$$

می‌توان مسأله را به صورت زیر تبدیل کرد.

$$\begin{array}{l} \text{Max } z \\ \text{s.t.} \\ AX \le b \\ z \le ۲۰ \\ \left.\begin{cases} (۱)\, ۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳ \ge z \\ (۲)\, ۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳ \le -z \end{cases}\right. \text{یا} \\ \left.\begin{cases} (۳)\, x_۱ + x_۲ - ۲x_۳ \ge z \\ (۴)\, x_۱ + x_۲ - ۲x_۳ \le -z \end{cases}\right. \text{یا} \\ (۵)\, x \ge ۰ \end{array} \xrightarrow[\text{ILP}]{\text{تبدیل به}} \begin{array}{l} \text{Max } z \\ \text{s.t.} \\ AX \le b \\ z \le ۲۰ \\ (۱)\, ۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳ \ge z - My_۱ \\ (۲)\, ۳x_۱ - ۲x_۲ + ۴x_۳ \le -z + M(۱ - y_۱) \\ (۳)\, x_۱ + x_۲ - ۲x_۳ \ge z - My_۲ \\ (۴)\, x_۱ + x_۲ - ۲x_۳ \le -z + M(۱ - y_۲) \\ (۵)\, x \ge ۰,\ y_۱, y_۲ = ۰ \text{ یا } ۱ \quad \text{و} \quad Z: \text{نامقید} \end{array}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۹ـ گزینه «۲» فضای شدنی به صورت $\xrightarrow[\;0\quad x_1>0\quad x_1\;]{}$ است که نمی‌توان کمترین مقدار $x_۱$ را یافت.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰ـ گزینه «۲» معادله AB به فرم $x_۱ + x_۲ \le b_۱$ ، محدودیت OM به شکل $x_۱ \ge x_۲$ و محدودیت ON به صورت $x_۲ \ge b_۳$ می‌باشد.

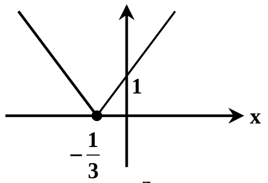
◆ ◆ ◆ ◆

۱۱ـ گزینه «۱» با انجام ضرب ماتریسی AX یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ به شکل زیر خواهیم داشت:

$$X(x_۱, x_۲)\ , \quad \begin{array}{l} A_۱ = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix};\ A_۱x = ۱ \\ A_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix};\ A_۲X = ۳ \end{array} \Rightarrow \begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ = ۱ \\ x_۱ - x_۲ = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۴}{۳} \\ x_۲ = -\frac{۵}{۳} \end{cases}$$

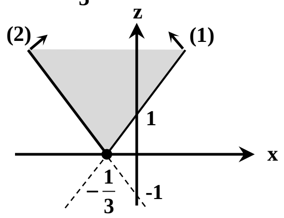
◆ ◆ ◆ ◆

۱۲ـ گزینه «۲» راه‌حل اول: نمایش هندسی تابع هدف $Z = |۳x + ۱|$ به صورت زیر است:



با توجه به شکل بالا، کمترین مقدار Z عبارت است از $Z = ۰$ که به ازای $x = -\frac{۱}{۳}$ حاصل می‌شود.

نمایش هندسی قیود موجود در گزینه (۲) یعنی $\begin{cases} ۳x + ۱ \le Z & (۱) \\ ۳x + ۱ \ge -Z & (۲) \end{cases}$ به صورت زیر است:



با توجه به شکل روبه‌رو کمترین مقدار Z عبارت است از $Z = ۰$ که به ازای $x = -\frac{۱}{۳}$ حاصل می‌شود.

راه حل دوم:

با تعریف متغیر Z به صورت زیر داریم:

$$\text{Min}\, |۳x + ۱| = Z$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \text{Min} Z \\ |۳x + ۱| \le Z \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Min} Z \\ ۳x + ۱ \le Z \\ ۳x + ۱ \ge -Z \end{array}$$

با بررسی دو حالت مختلف متغیر ($y = ۰$ یا ۱) فقط گزینه «۲» در شرایط گفته شده صدق می‌کند.

۱۳ــ گزینه «۳» با بررسی دو حالت مختلف متغیر y (صفر یا یک) فقط گزینه «۳» در شرایط صدق می‌کند.

$$y=\begin{cases}۱ & \text{تولید محصول}\\ ۰ & \text{عدم تولید محصول}\end{cases}$$

$$\text{تولید محصول} \Rightarrow \begin{cases} y=۱ \Rightarrow x_۱ \geq ۲۰۰۰y \rightarrow x_۱ \geq ۲۰۰۰ \Rightarrow & x_۱ \text{ حداقل } ۲۰۰۰ \text{ واحد} \\ x_۱ \leq My \rightarrow x_۱ \leq M \Rightarrow & x_۱ \text{ حداکثر } (M) \text{ واحد}\end{cases}$$

$$\text{عدم تولید محصول} \Rightarrow \{y=۰ \Rightarrow X_۱=۰$$

◆◆◆◆

۱۴ــ گزینه «۴» با توجه به شکل، مستطیل سمت چپ دارای محدودیت $x_۲ \geq ۲$ و $x_۱ \leq ۱$ است. همچنین مثلث سمت راست دارای محدودیت $x_۱ \geq ۲$ می‌باشد. برای نمایش کل محدوده با استفاده از نقاط $\begin{Bmatrix}۰\\۳\end{Bmatrix}$ و $\begin{Bmatrix}۳\\۰\end{Bmatrix}$ معادله $x_۱+x_۲ \leq ۳$ حاکم خواهد شد. با توجه به این توضیحات، گزینه ۴ پاسخ درست است.

◆◆◆◆

۱۵ــ گزینه «۲» از آن‌جایی که نقاط $(۰,۰)$ و $(۰,۴)$ و $(۴,۰)$ در تمامی محدودیت‌ها صدق می‌کنند، با قرار دادن آن‌ها در تابع هدف داریم:

$$(۰,۰) \rightarrow \text{Min} f(x) = -(۰-۴)^۲ + (۰-۴)^۲ - ۱۳ = -۱۳$$

$$(۰,۴) \rightarrow \text{Min} f(x) = -(۰-۴)^۲ + ۰ + ۵ \times ۴ - ۱۳ = -۹$$

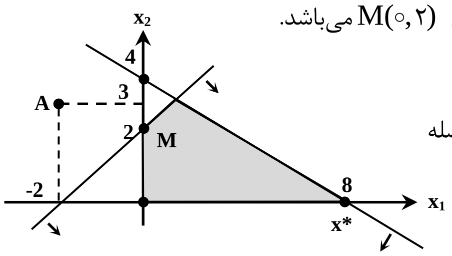
$$(۴,۰) \rightarrow \text{Min} f(x) = ۰ + (۰-۴)^۲ - ۴ \times ۴ + ۰ - ۱۳ = -۱۳$$

پس از بین گزینه‌های موجود، $(۰,۰)$ و $(۴,۰)$ کم‌ترین مقدار تابع هدف را دارند و جواب بهینه مسأله هستند.

◆◆◆◆

۱۶ــ گزینه «۱» مطابق شکل، کم‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی A از مجموعه، برابر فاصله‌ی $A(-۲,۳)$ تا نقطه‌ی $M(۰,۲)$ می‌باشد.

$$\text{کمترین فاصله} = AM = \sqrt{(۳-۲)^۲ + (-۲-۰)^۲} = \sqrt{۵}$$



◆◆◆◆

۱۷ــ گزینه «۴» با تعریف متغیر y به صورت $y = ۲x_۱ - ۳x_۲$ داریم:

$$\begin{aligned} &\text{Max} Z = |y| \\ &y = ۲x_۱ - ۳x_۲ \\ &x_۱ \geq ۰ ,\ x_۲ \geq ۰ ,\ y: \text{نامقید}\end{aligned}$$

حال قرار می‌دهیم: $|y| = y_۱ + y_۲$ و $y = y_۱ - y_۲$، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\text{Max} Z = y_۱ + y_۲ \\ &y_۱ - y_۲ = ۲x_۱ - ۳x_۲ \\ &x_۱, x_۲, y_۱, y_۲ \geq ۰\end{aligned}$$

◆◆◆◆

۱۸ــ گزینه «۳» ابتدا متغیرهای تصمیم‌گیری را تعریف می‌کنیم. x_{ij} را مدت زمانی فرض می‌کنیم که در دپارتمان i صرف تولید تکه j می‌شود. پس مقدار تولیدی تکه ۱ در دپارتمان ۱و۲ برابر $۱۰x_{۱۱} + ۱۵x_{۲۱}$ است و مقدار تولیدی تکه ۲ در دپارتمان ۱و۲ برابر $۱۵x_{۱۲} + ۱۳x_{۲۲}$ است. چون محصول مورد نظر از ترکیب تکه ۱و۲ ساخته می‌شود پس مقدار محصول تولیدی $z = \text{Min}\{۱۰x_{۱۱} + ۱۵x_{۲۱}, ۱۵x_{۱۲} + ۱۳x_{۲۲}\}$ است که باید مقدار محصول تولیدی ماکزیمم شود:

$$\text{Max } Z = \text{Min}\{۱۰x_{۱۱} + ۱۵x_{۲۱}, ۱۵x_{۱۲} + ۱۳x_{۲۲}\}$$

s.t.

$$x_{۱۱} + x_{۱۲} \leq ۱۵۰ \rightarrow \text{محدودیت زمانی دپارتمان ۱}$$

$$x_{۲۱} + x_{۲۲} \leq ۳۰۰ \rightarrow \text{محدودیت زمانی دپارتمان ۲}$$

$$x_{۱۱}, x_{۲۲}, x_{۲۱}, x_{۲۲} \geq ۰$$

مدل اخیر را خطی می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } Z\\
&\text{s.t.}\\
&\quad 10x_{11}+15x_{21}\ge Z\\
&\quad 15x_{12}+13x_{22}\ge Z\\
&\quad x_{11}+x_{21}\le 150\\
&\quad x_{21}+x_{22}\le 300\\
&\quad x_{11},x_{12},x_{21},x_{22}\ge 0
\end{aligned}
$$

مدل خطی شده دارای ۵ متغیر و ۴ محدودیت می‌باشد.

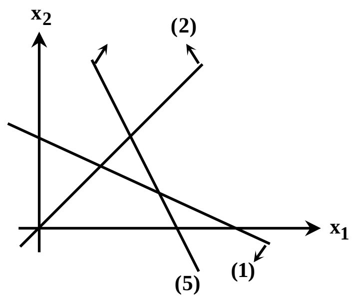
۱۹ـ گزینه «۱» در گزینه (۱) اگر $y=0$ باشد، در این صورت $x_1 \ge 3$ خواهد بود. پس ۱ یا $x_1 = 0$ و نیز $x_2+x_3+x_4 \le 0$ پس $x_2+x_3+x_4=0$ و در نتیجه $x_2=x_3=x_4=0$. اگر $y=1$ باشد در این صورت $x_1 \le 0$ است پس $x_1=0$ و نیز خواهیم داشت: $x_2+x_3+x_4 \ge 3$. از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که x_2 و x_3 و x_4 می‌توانند هر کدام مقادیر ۰ یا ۱ را اختیار نمایند. در صورت تست نیز برای حالت $x_1=0$ شرایط خاصی روی x_2 و x_3 و x_4 ذکر نشده است.

۲۰ـ گزینه «۳»

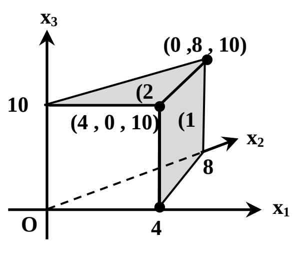
$$
\text{فرضیات مسأله}\begin{cases}
(1)\quad x_1 \ge 2x_2 & \text{میزان تولید محصول ۱ حداقل دو برابر محصول ۲}\\
(2)\quad x_2 \le 20 & \text{حداکثر توان تولید برای محصول ۲}\\
(3)\quad x_2 \ge 15 & \text{حداقل درخواست برای تولید محصول ۲}
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{aligned}
&x_1-2x_2\ge 0\\
&15\le x_2\le 20
\end{aligned}
$$

۲۱ـ گزینه «۱»

با رسم محدودیت ۱و۲ و ۵ متوجه می‌شویم که این سه، فضای موجه مشترک ندارند پس کل محدودیت‌ها فضای موجه ندارند.



۲۲ـ گزینه «۱»



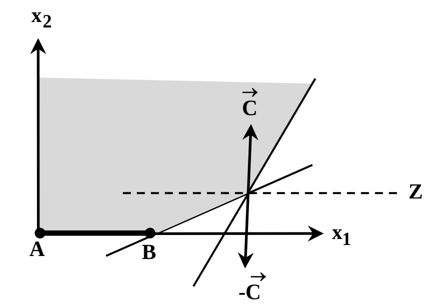
وجه (۱) این هرم موازی محور x_3 است و محدودیت بیان‌کننده نیم‌فضای متناظر این وجه عبارت است از $2x_1+x_2\le 8$.

وجه (۲) موازی صفحه x_1ox_2 است و محدودیت بیان‌کننده نیم‌فضای متناظر این وجه عبارت است از $x_3 \le 10$. همچنین داریم: $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$

۲۳ـ گزینه «۴» با توجه به قسمت ۶ مربوط به روش‌های مدل برنامه‌ریزی خطی، برای حذف قدر مطلق از تابع هدف داریم:

$$
\left.\begin{aligned}
&|x_i| = U_i+V_j\\
&x_i = U_i - V_j\\
&U_i.V_j \ge 0
\end{aligned}\right\}
\Rightarrow
\begin{aligned}
&\max z=\sum a_i(U_i+V_j)\\
&A(u_i-v_j)=b\\
&u_i,v_i\ge 0
\end{aligned}
$$

۲۴ـ گزینه «۲»



چون تابع هدف مینیمم‌سازی است، باید خط Z را در راستای بردار گرادیـان در جهت $-\vec{C}$ حرکت دهیم. در این صورت تمام نقاط روی پـاره‌خـط AB جـواب بهینه هستند و در نتیجه مسأله جواب بهینه چندگانه دارد.

نکته: باید توجه داشت که بردار گرادیان $\vec{C}$ عمود بر پاره‌خـط AB اسـت، در نتیجـه خط Z موازی محور $x_۱$ می‌باشد.

۲۵ـ گزینه «۱» با نوشتن مسأله به فرم

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & ۲z_۱ + x_۲ \\ \text{s.t} & x_۱ + x_۲ \geq ۴ \\ & |x_۱| \leq z_۱ \end{array}$$

خواهید دید که گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۲۶ـ گزینه «۱» هرچه تعداد محدودیت‌ها در مقایسه با تعداد متغیرها کمتر باشد، مدل از نظر محاسباتی بهتر است.

۲۷ـ گزینه «۱» ابتدا مسأله را استاندارد می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} \text{Min } Z = x_۱ + x_۲ \\ \text{s.t} \\ \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ = ۴ \\ x_۲ + x_۴ = ۱ \\ x_۱, x_۲, x_۳, x_۴ \geq ۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_۲ = ۱ - x_۴ \\ x_۱ = ۴ - x_۳ - ۲(۱ - x_۴) \end{cases} \end{array}$$

اکنون به جای $x_۲$ و $x_۱$ در تابع هدف مسأله جایگذاری می‌کنیم.

$$\begin{array}{l} \text{Min } ۳ - x_۳ + x_۴ \\ \text{s.t} \\ \begin{cases} -۲x_۴ + x_۳ \leq ۲ \\ x_۴ \leq ۱ \\ x_۳, x_۴ \geq ۰ \end{cases} \end{array}$$

۲۸ـ گزینه «۳» اگر تمام زمان صرف محصول دوم شود، حداکثر ۵۰۰ واحد آن تولید می‌شود یعنی: $x_۱ = x_۳ = ۰ \Rightarrow x_۲ \leq ۵۰۰$

از آن‌جایی که زمان تولید محصول اول نصف محصول دوم است پس اگر تمام زمان صرف محصول $x_۱$ شود، دو برابر $x_۲$ (۱۰۰۰ واحد) تولید می‌شود یعنی:

$x_۲ = x_۳ = ۰ \Rightarrow x_۱ \leq ۱۰۰۰$

زمان تولید محصول اول $\frac{۲}{۳}$ زمان تولید محصول سوم می‌باشد پس اگر تمام زمان صرف تولید محصول ۳ شود، به مقدار $\frac{۲}{۳}$ برابر $x_۱$ ($\frac{۲۰۰۰}{۳}$واحد) تولید می‌شود، یعنی: $x_۱ = x_۲ = ۰ \Rightarrow x_۳ \leq \frac{۲۰۰۰}{۳}$

تنها گزینه‌ای که در این روابط صدق می‌کند، گزینه‌ی ۳ است.

۲۹ـ گزینه «۴» قطعه‌های A باید دو تا دو تا و قطعه‌های C سه‌تا سه‌تا بسته‌بندی شـوند و سـپس مینـیمم تعـداد بسـته‌هـا یعنـی $Z = \min\{\frac{x_A}{۲}, x_B, \frac{x_C}{۳}\}$ تعداد محصولات تولیدی است که باید max شود، یعنی $\text{Max } Z = \text{Min}\{\frac{x_A}{۲}, x_B, \frac{x_C}{۳}\}$.

۳۰ـ گزینه «۴» ناحیه موجه $\begin{cases} x_۱ + x_۲ \leq ۴ \\ x_۱ - x_۲ = ۰ \end{cases}$ که $x_۱, x_۲ \geq ۰$ به صورت یک پاره‌خط است.

۳۱ـ گزینه «۱» چون x_1 آزاد است، x_1 را از محدودیت دوم یافته و در مسأله جایگذاری می‌کنیم یعنی $x_1 = x_3 + 1$ را در مسأله قرار می‌دهیم.

$$\text{Max } Z = 2x_3 + 4x_2 + 1 \quad\quad \text{Max } Z = 8x_3 + 1$$

$$\text{s.t.} \quad \xrightarrow{2x_2=3x_3} x_3 \ge 0 \quad\quad x_3 \ge 0$$

$$-2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_2 \ge 0 \,,\, x_3 \ge 0$$

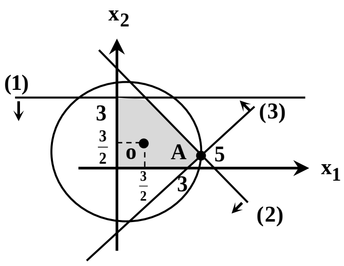
پس $z^* = +\infty$ است.

۳۲ـ گزینه «۱» یک مسأله LP یا نقطه بهینه ندارد یا نقطه بهینه منحصر به فرد دارد و یا بی‌شمار نقطه بهینه دارد.

۳۳ـ گزینه «۴» چون برای تولید A از دو قطعه x_1 و سه قطعه x_2 استفاده می‌شود. پس میزان تولید A برابر است با حداقل $\frac{x_1}{2}$ و $\frac{x_2}{3}$ یعنی:

$$\text{Max } Z = \text{Min}\{\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}\}$$

۳۴ـ گزینه «۳» فضای جواب را رسم می‌کنیم. نقطه $A(x_1 = 4, x_2 = 1)$ که محل تلاقی محدودیت‌های ۲و۳ است، دورترین نقطه فضای جواب تا نقطه $O(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ است. پس شعاع دایره مورد نظر، همان OA است.



$$r = OA = \sqrt{(\frac{3}{2} - 4)^2 + (\frac{3}{2} - 1)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2} \simeq 2/55$$

۳۵ـ گزینه «۲» چون هر صندوق‌دار پس از ۵ روز کار متوالی، ۲ روز به مرخصی می‌رود، پس صندوق‌دارانی که روز یکشنبه و دوشنبه مشغول به کار شده‌اند روز شنبه هفته بعد در مرخصی خواهند بود، ولی بقیه صندوقداران که در روزهای دیگر مشغول به کار شده‌اند، روز شنبه در حال کار هستند؛ پس:

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \ge 15$$

۳۶ـ گزینه «۳» با تغییر متغیر $3x_1 + 2x_2 = z$ داریم:

$$\underset{\text{s.t}}{\text{Max}} \ |z|$$

$$3x_1 + 2x_2 = z$$

$$x_1, x_2, z: \text{آزاد}$$

اکنون در مسأله بالا قرار می‌دهیم: $z = z_1 - z_2$ و $|z| = z_1 + z_2$ به طوری که $z_1 \ge 0$ و $z_2 \ge 0$، بنابراین داریم:

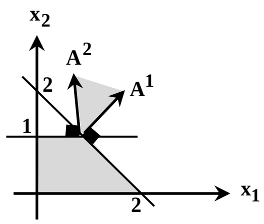
$$\underset{\text{s.t}}{\text{Max}} \ z_1 + z_2$$

$$3x_1 + 2x_2 = z_1 - z_2$$

$$z_1, z_2 \ge 0$$

۳۷ـ گزینه «۴» فضای موجه مسأله به صورت زیر است:

برای اینکه نقطه (۱و۱) جواب بهینه باشد. باید بردار ضرایب هزینه $\vec{C} = (C_1, C_2)$ در مخروط حاصل از بردارهای گرادیان $A^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $A^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ واقع شود. در نتیجه داریم:



$$\vec{C} \,||\, A' \Rightarrow \frac{C_1}{1} = \frac{C_2}{1} \Rightarrow C_1 = C_2 \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = 1$$

$$\vec{C} \,||\, A^2 \Rightarrow \frac{C_1}{0} = \frac{C_2}{1} \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = 0$$

بنابراین باید $1 \le \frac{C_1}{C_2} \le 0$ باشد.

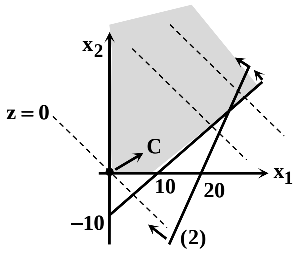
۳۸ـ گزینه «۲» ابتدا متغیرهای تصمیم‌گیری را تعریف می‌کنیم:

تعداد بشکه نفت که باید از میدان $4000\frac{scf}{stb}$ استخراج شود: x_2 تعداد بشکه نفت که باید از میدان $1000\frac{scf}{stb}$ استخراج شود: x_1

در نتیجه مدل LP گزینه (۲) صحیح است.

۳۹ـ گزینه «۴» فضای جواب بی‌کران و جواب بهینه نیز بی‌کران است.

کاملترین گزینه، گزینهٔ «۴» است؛ زیرا جواب بهینه بی‌کران، فضای جواب بی‌کران را نیز نتیجه می‌دهد.



۴۰ـ گزینه «۴» این سؤال در کتاب تحقیق ۲ حل شده است.

$$\text{Min}\sum_{i=1}^{3}a_i x_i$$
$$40y_1 \le x_1 \le 40$$
$$20y_2 \le x_2 \le 20y_1$$
$$x_3 \le My_3$$

البته در این سوال بهتر است $x_3 \ge 0$ در نظر گرفته شود.

۴۱ـ گزینه «۲»

$$y_A = 1,\ y_B = 0 \Rightarrow y_C = 0 \quad ; \quad y_A = 0, y_B = 1 \Rightarrow y_C = 0\ ; \quad y_A = y_B = 1 \Rightarrow y_C = 0$$

اگر $y_A = y_B = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_C = 0 \\ y_C = 1 \end{cases}$

۴۲ـ گزینه «۲» چون علامت t مشخص نیست مثال‌هایی می‌توان آورد که هر سه گزینه ۱، ۲ و ۳ صحیح باشند. در صورتی گزینه ۲ صحیح است که علامت t مثبت باشد. کلید سنجش نیز گزینه ۲ بوده است.

۴۳ـ گزینه «۲» چون علامت x_i ها نامعلوم است، فقط نقطه (۱و۱و۱) گوشه‌ای می‌باشد. پس فقط یک نقطه گوشه‌ای وجود دارد.

۴۴ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. محدودیت موردنظر با دو رابطه روبرو مدل می‌گردد:

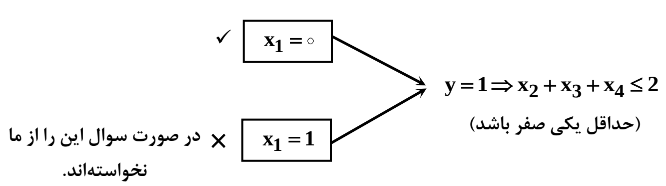
$$x_2 + x_3 + x_4 \le 2y + 3(1-y)$$
$$x_1 = 1 - y$$

از محدودیت دوم اگر $x_1 = 0$ شود، آنگاه $y = 1$ می‌گردد و محدودیت اول به صورت $x_2 + x_3 + x_4 \le 2$ می‌شود. چون متغیرهای x_2 و x_3 و x_4 متغیرهای صفر و یک هستند، بنابراین حداقل یکی از آنها باید صفر باشد. حال اگر $x_1 = 1$ شود، $y = 0$ می‌شود و محدودیت اول به صورت $x_2 + x_3 + x_4 \le 3$ می‌شود. در این صورت هر سه گزینه متغیر x_2، x_3 و x_4 می‌توانند مقدار صفر یا یک بگیرند.

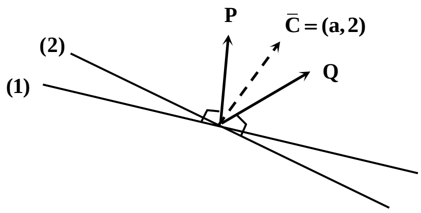
※ جواب سنجش گزینه ۱ بوده است که به تحلیل آن می‌پردازیم:

$$x_2 + x_3 + x_4 \le 2y$$
$$x_1 \ge 3(1-y)$$

از محدودیت دوم x_1 هر مقداری بگیرد (x_1 می‌توانند مقادیر صفر یا یک بگیرد)، $y = 1$ می‌گردد و محدودیت اول به صورت $x_2 + x_3 + x_4 \le 2$ می‌شود. در حالی که صورت سؤال برای $x_1 = 1$ هیچ محدودیتی گذاشته نشده ولی با این مدل‌سازی، $x_1 = 1$ را محدودیت کردیم. که به ازای $x_1 = 1$ هم باید حداقل یکی از x_2, x_3, x_4 صفر شود.



۴۵ـ گزینه «۴» برای این که نقطه M بهینـه شـود بایـد بـردار گرادیـان سـطر تـابع هـدف $\bar{c}=(c_1,c_2)=(a,2)$ در مخـروط حاصـل از بـردار گرادیـان محدودیت‌های کارکردی $\begin{pmatrix} (1)\ 2x_1+3x_2=12 \\ (2)\ \ x_1+x_2=5 \end{pmatrix}$ قرار گیرد:



$$\left.\begin{array}{l} P=(2,3) \text{ گرادیان محدودیت } (1) \\ Q=(1,1) \text{ گرادیان محدودیت } (2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 1\le a\le 2 \\ 1\le 2\le 3 \end{array}$$

تذکر: چون مسأله max سازی است بردار گرادیان $\bar{C}$ باید در مخروط حاصل از بردار گرادیان محدودیت‌های کاراکردی قرار گیرد ولی اگـر min سـازی بود باید بردار گرادیان $-\bar{c}$ در مخروط حاصل از بردار گرادیان محدودیت‌های کارکردی قرار گیرند.

۴۶ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

فرض کنید محصولات تولیدی $x_1,\dots,x_n$ باشد. در این صورت می‌توان محدودیت‌های جدید را به صورت زیر مدل‌سازی کرد:

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n \le 2600 \\ x_1+x_2+\dots+x_n = 500y \\ y: \text{ عدد صحیح} \end{cases}$$

بنابراین دو محدودیت و یک متغیر عدد صحیح به مسأله اضافه می‌شود که در بین گزینه‌ها وجود ندارد.

۴۷ـ گزینه «۱»

* هر واحد A یک واحد زمان مصرف می‌کند.
* هر واحد B ۴ ساعت زمان مصرف می‌کند؛ چون ۲ ساعت خودش ۲ ساعت برای دو واحد A مصرف می‌کند.
* هر واحد C ۷ ساعت زمان مصرف می‌کند؛ چون ۳ ساعت خودش ۴ ساعت برای A پس:

$$x_A+4x_B+7x_c \le 40$$

۴۸ـ گزینه «۳» جواب بهینه و موجه مسأله‌ی صفر و یک خواسته شده برابر است با:

$$x=(1,1,0,1) \Rightarrow z=14$$

۴۹ـ گزینه «۳» برای مدل‌سازی باید یک متغیر y تعریف کنیم که یک متغیر صفر و یک است. حال $x_1 \le my$ قرار می‌دهیم در ایـن صـورت اگـر $y=0$ شود، محدودیت $x_1 \ge 0$ وجود دارد و اگر $y=1$ شود این محدودیت عملاً حذف می‌شود. در محدودیت $x_1 \ge 100$ باید برعکس باشـد؛ یعنـی اگـر $y=0$ شد، محدودیت برداشته شود و بالعکس می‌توان به صورت مقابل مدل‌سازی کرد:

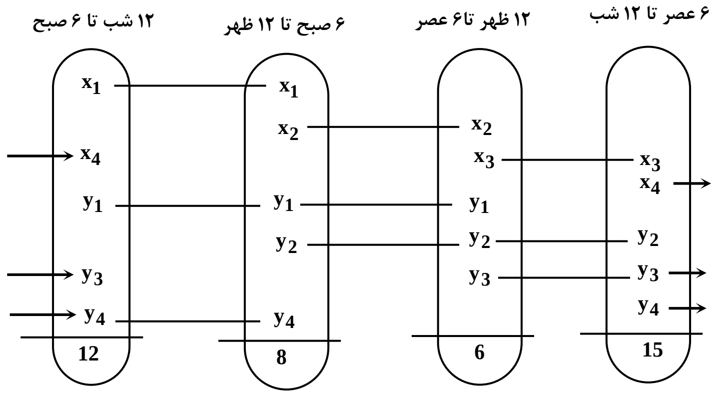
$$x_1 \le my$$
$$x_1 \ge 100(1-y)m$$

یا این‌که محدودیت دوم را به صورت $x_1-100\ge 0$ قرار داده و به صورت زیر مدل‌سازی کنیم:

$$x_1 \le my$$
$$X_1-100 \ge -M(1-y) \Rightarrow 100-x \le M(1-y)$$

۵۰ـ گزینه «۱» برای درک بهتر سوال می‌توان از این دیاگرام کمک گرفت:

x_i : تعداد افرادی که قرار است ۱۲ ساعت متوالی در سرکار باشند. y_i : تعداد افرادی که قرار است ۱۸ ساعت متوالی در سرکار باشند.



پس محدودیت‌ها به فرم زیر می‌باشند:

$$x_1+x_4+y_1+y_3+y_4 \ge 12 \qquad x_1+x_2+y_1+y_2+y_4 \ge 8$$
$$x_2+x_3+y_1+y_2+y_3 \ge 6 \qquad x_3+x_4+y_2+y_3+y_4 \ge 15$$

۵۱ـ گزینه «۱» حداکثر مقداری که متغیر y_3 می‌تواند به خود بگیرید، مقدار ۵ است. پس حداکثر مقدار $f(y_3)$ برابر $f(y_3)=5-4=1$ می‌باشد که این مقدار Min مقدار بین $f(y_2=0)$ و $f(y_1=0)$ می‌باشد. پس $\text{Max } z=1$ خواهد بود. به ازای سایر مقادیر y_3 مقدار z کمتر خواهد بود.

◆ ◆ ◆ ◆

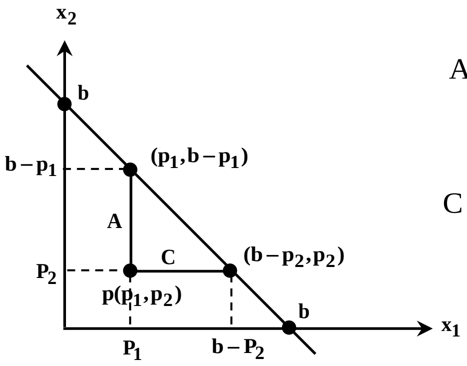
۵۲ـ گزینه «۱و۳» فرض کنیم که متغیر کمکی این محدودیت باشد پس داریم:

$$x_1+x_2+s=b \xrightarrow[\ ]{\text{به ازای } p=(p_1,p_2)} P_1+P_2+S=b \rightarrow S=b-P_1-P_2$$

حال به محاسبه مقادیر A و C می‌پردازیم:

$$A=\sqrt{(P_1-P_1)^2+(b-P_1-P_2)^2}=b-P_1-P_2$$

$$C=\sqrt{(b-P_2-P_1)^2+(P_2-P_2)^2}=b-P_1-P_2$$



پس $S=A=C$ می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۵۳ـ گزینه «۱» با توجه به محدودیت‌های گزینه (۱) اگر $y_1=1$ باشد، $\begin{cases} x_1+x_2\geq 10 \\ x_1+x_2\leq 8+M \end{cases}$ خواهد شد؛ یعنی محدودیت اول به تنهایی فعال است و اگر $y_1=0$ باشد، $\begin{cases} x_1+x_2\geq 10-M \\ x_1+x_2\leq 8 \end{cases}$ خواهد شد؛ یعنی محدودیت دوم فعال می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۵۴ـ گزینه «۴» اگر فضای موجه نامحدود باشد، مسأله ممکن است جواب بهینه محدود یا نامحدود داشته باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۵۵ـ گزینه «۳» از آنجایی‌که با افزایش مهارت زمان ساخت قطعه کاهش می‌یابد پس فرض تناسب برقرار نیست و مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی خواهد بود.

◆ ◆ ◆ ◆

۵۶ـ گزینه «۳» هر محصول A نیاز به سه قطعه یک و دو قطعه ۲ دارد پس $\text{Min}\{\frac{x_1}{3},\frac{x_2}{2}\}$ تعداد قابل تولید محصول A می‌باشد و با توجه به اینکه هدف حداکثرسازی فروش محصول A است تابع هدف به صورت $\text{Max} z=100A$ می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۵۷ـ گزینه «۲» با توجه به فرض مسأله y_A، y_B، y_C، متغیرهای صفر و یک مربوط به انجام یا عدم انجام هستند، با انتخاب **A** یا **B ,C** انتخاب نمی‌شود. این بدان معنا است که: ۱ـ اگر $y_A=1$، آن‌گاه $y_C=0$. ۲ـ اگر $y_B=1$، آن‌گاه $y_C=0$.

گزینه «۱» صحیح نیست. زیرا اگر $y_A=y_B=1$، آن‌گاه $2\leq 1+y_C$. بنابراین $y_C=1$ و این تناقض است.

$$y_A=y_B=1 \Rightarrow 2\leq 1+y_C \Rightarrow y_C=1 \Rightarrow y_C\neq 0 \quad ※$$

گزینه «۳» صحیح نیست. اگر $y_A=y_B=1$، آن‌گاه $0\leq 2(1+y_C)$. بنابراین y_C می‌تواند هم مقدار صفر و هم مقدار یک را داشته باشد و این تناقض است.

$$y_A=y_B=1 \Rightarrow 0\leq 2(1+y_C) \Rightarrow y_C=1 \quad ※$$

گزینه «۴» صحیح نیست، زیرا اگر $y_A=y_B=1$، آن‌گاه $2\leq 2(1+y_C)$.

$$y_A=y_B=1 \Rightarrow 2\leq 2(1+y_C) \Rightarrow y_C=0,1 \quad ※$$

۵۸ـ گزینه «۴» با توجه به این که کارخانه جدید باید تنها در یکی از دو شهر (الف) (x_A) یا شهر (ب) (x_B) تأسیس شود. داریم:

$$x_A + x_B = 1$$

همچنین با توجه به تأسیس کارخانه در یکی از دو شهر، می‌توان انبار جدیدی نیز احداث کرد یا هیچ انباری احداث نکرد. بنابراین داریم:

$$y_A + y_B \le 1$$

به علاوه اگر شهر (الف) (x_A) برای تأسیس کارخانه انتخاب شود و انبار جدید را در آن شهر احداث کرد یا نکرد. داریم:

$$y_A - x_A \le 0$$

همچنین اگر شهر (ب) (x_B) برای تأسیس انتخاب شود و انبار جدید را در آن شهر احداث کنیم یا نکنیم، داریم:

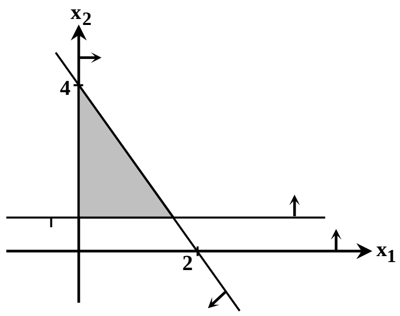
$$y_B - x_B \le 0$$

بنابراین گزینه‌ی «۴» درست است.

۵۹ـ گزینه «۴» با توجه به فرض مسأله، اگر سرمایه‌گذار در پروژه‌ی ۲ سرمایه‌گذاری کند، در پروژه‌ی ۱ نیز سرمایه‌گذاری می‌کند و برعکس $(x_2 - x_1 = 0)$. همچنین اگر در پروژه‌ی ۱ سرمایه‌گذاری نکند، آن‌گاه در پروژه‌ی ۲ نیز سرمایه‌گذاری نمی‌کند $(x_1 - x_2 = 0)$. بنابراین گزینه «۴» درست است.

۶۰ـ گزینه «۳» براساس روش ترسیمی برای حل مسأله داریم:

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & z = 2x_1 + x_2 & \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \le 4 & (1) \\ & x_2 \ge 1 & (2) \\ & x_1, x_2 \ge 0 & \end{array}$$



با توجه به شکل، نقطه $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ جواب بهینه‌ی مسأله با مقدار بهینه‌ی $z^* = 1$ است. که یک نقطه‌ی بهینه و منحصر به فرد می‌باشد.

۶۱ـ گزینه «۲» با ضرب کردن طرفین محدودیت اول در (۱-) داریم: $x_1 - x_2 \ge 3$ با مقایسه این محدودیت و محدودیت سوم $(x_1 - x_2 \le 2)$ مشخص است که این دو محدودیت متناقض هستند و در نتیجه مسأله، جواب شدنی ندارد.

۶۲ـ گزینه «۱» در حالت جواب بهینه چندگانه یک یا دو نقطه گوشه‌ای بهینه و بی‌نهایت نقطه گوشه‌ای غیر بهینه داریم.

فصل دوم

«جبر خطی»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل دوم

۱ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید $\{Max\ Z = CX / AX \le b ; b > 0, x \ge 0\}$ که در آن کلیه مقادیر سمت راست محدودیت‌ها مثبت بوده و جهت علامت محدودیت‌ها، کوچکتر یا مساوی می‌باشند. (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۷۵)

۱) شرط لازم و کافی برای اینکه مسأله بالا نامحدود نشود، این است که $a_{ij} > 0$ محدود باشد (برای تمام j,i).

۲) همواره جواب بهینه محدود دارد.

۳) شرط لازم برای اینکه مسأله بالا نامحدود نشود، این است که $a_{ij} > 0$ محدود باشد (برای تمام j,i).

۴) شرط کافی برای اینکه مسأله بالا نامحدود نشود، این است که $a_{ij} > 0$ محدود باشد (برای تمام j,i).

۲ـ در چه صورتی بردار $\bar{X}$ یک جواب پایه برای مدل $\begin{array}{l} Max\ Z = CX \\ s.t. \\ AX = b \\ X \ge 0 \end{array}$ است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۷۷)

۱) $\bar{X}$ هر نقطه قابل قبول باشد. ۲) $\bar{X}$ هر نقطه گوشه‌ای باشد. ۳) $\bar{X}$ هر نقطه غیرقابل قبول باشد. ۴) $\bar{X}$ هر نقطه بهینه باشد.

۳ـ در صورتی که Z نشان دهنده مقدار تابع هدف بهینه مسأله زیر باشد. مقدار آن برابر خواهد شد با: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۷۷)

$$\begin{array}{l} Max\ Z = x_1 + 2x_2 \\ s.t. \\ \quad x_1 + x_2 \ge 0 \\ \quad 2x_1 - x_2 \le 0 \\ \quad 4x_1 + x_2 \le 0 \\ \quad x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

۱) ۸

۲) ۶

۳) ۴

۴) ۰

۴ـ یک مسأله برنامه‌ریزی خطی می‌تواند دارای بی‌نهایت: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۷۷)

۱) جواب اساسی باشد. ۲) جواب اساسی بهینه باشد. ۳) جواب بهینه باشد. ۴) نقطه گوشه‌ای باشد.

۵ـ کدام مورد علت وجودی یک جواب نامحدود برای مسأله LP است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) محدودیت‌های زائد وجود دارد.

۲) محدودیت‌ها استقلال خطی ندارند.

۳) تناقض در بین نامعادلات وجود دارد.

۴) دستگاه همگن حاصل از محدودیت‌های مسأله دارای جواب غیر صفر است.

۶ـ برای دستگاه معادلات زیر کدام مورد یک جواب پایه است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \quad ; \quad x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3$$

۱) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 1, 1)$ ۲) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 0)$

۳) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 0, 0, 0)$ ۴) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, -1, -1)$

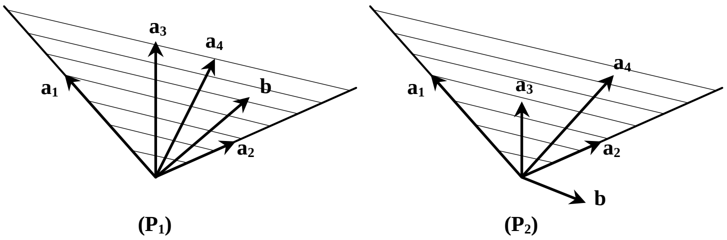
۷ـ در هر مدل خطی با منطقه قابل قبول (موجه) غیرتهی، هر نقطه متعلق به منطقه مذکور را .... گوشه‌ای آن نوشت. (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) می‌توان از ترکیب غیربدیهی در نقطه ۲) می‌توان از ترکیب غیربدیهی نقاط غیر

۳) می‌توان از ترکیب غیربدیهی همه نقاط ۴) نمی‌توان به صورت ترکیب غیربدیهی خطی از نقاط

۸ـ فضای ایجاب برای دو دستگاه معادله خطی نشان داده شده است که در آن منظور از a_j بردار ستونی ضرایب مربوط به b, x_j بردار ستونی مقدار سمت راست است. در این صورت :
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) هیچ یک دارای جواب موجه نیستند.
۲) P_1 دارای جواب موجه نیست. اما P_2 دارای جواب موجه است.
۳) P_1 دارای جواب موجه است اما P_2 دارای جواب موجه نیست.
۴) با استفاده از فضای ایجاب نمی‌توان اظهارنظر کرد.



۹ـ سیستم معادلات $Ax = b$ که در آن A یک ماتریس $m \times n$ و b یک بردار ستونی $m \times 1$ و x یک بردار ستونی $n \times 1$ است را در نظر بگیرید. در این صورت اگر $k < n$ برابر رتبه ماتریس (A) و رتبه ماتریس (A, b) باشد، کدام اظهارنظر در مورد جواب‌های این دستگاه معادلات صحیح است؟
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

۱) جواب موجه ندارد. ۲) جواب منحصر به فرد دارد. ۳) بی‌شمار جواب دارد. ۴) نمی‌توان اظهارنظر قطعی کرد.

۱۰ـ در ماتریس:
(مهندسی صنایع گرایش‌های صنایع و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۱)

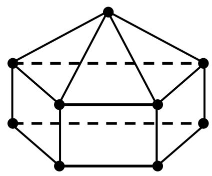
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -7 & 0 & 3 & -4 & 6 \\ 4 & 0 & 5 & 9 & 10 \\ 6 & 0 & 7 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

۱) اگر ستون‌های دوم و چهارم آن حذف شوند، آنگاه ستون‌های باقیمانده مستقل خطی می‌شوند.
۲) اگر ستون دوم آن حذف گردد، آنگاه ستون‌های باقیمانده مستقل خطی می‌شوند.
۳) ستون‌های ماتریس A مستقل خطی هستند.
۴) اگر ستون‌های دوم و پنجم آن حذف شوند، آنگاه ستون‌های باقیمانده مستقل خطی می‌شوند.

۱۱ـ در مجموعه نقاط $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \text{ آزاد در علامت} \end{cases}$ تعداد نقاط گوشه برابر است با:
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌نهایت

۱۲ـ چند وجهی محدود را در شکل روبرو در نظر بگیرید. در این چند وجهی اگر تعداد نقاط گوشه تباهیده (Degenerate Extreme points) را با X و تعداد محدودیت‌های زائد (Redundant constraints) را با Y نشان دهیم، مقادیر X و Y چقدر است؟
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۲)



۱) $X = 3, Y = 1$
۲) $X = 1, Y = 0$
۳) $X = 5, Y = 0$
۴) $X = 0, Y = 1$

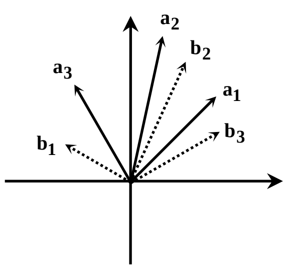
۱۳ـ فرض کنید بردارهای a_1 , a_2 , a_3 تشکیل یک پایه برای E^3 بدهند. در این صورت برای $a_4 \in E^3$ داریم: $a_4 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۲)

۱) a_2, a_3, a_4 یک پایه برای E^3 است اگر $\lambda_1 \neq 0$ باشد.
۲) a_1, a_2, a_4 یک پایه برای E^3 است اگر $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ باشد.
۳) a_1, a_3, a_4 یک پایه برای E^3 است اگر $\lambda_1 \neq 0, \lambda_3 \neq 0, \lambda_2 = 0$ باشد.
۴) a_1, a_2, a_4 یک پایه برای E^3 است اگر و فقط اگر $\lambda_3 \neq 0$ باشد و $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ باشد.

۱۴ـ فرض کنید ناحیهٔ شدنی یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر تعریف شده باشد، با توجه به شکل کدام جواب صحیح است؟

$$X = \{x \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \leq b \ , \ x \geq 0\}$$

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۲)



۱) به ازای $b = b_1$ و $b = b_3$ مسأله جواب شدنی ندارد.
۲) به ازای $b = b_2$ و $b = b_3$ مسأله جواب شدنی دارد.
۳) به ازای $b = b_2$ مسأله جواب شدنی دارد و به ازای $b = b_1$ و $b = b_3$ مسأله جواب شدنی ندارد.
۴) به ازای $b = b_2$ مسأله جواب شدنی ندارد و به ازای $b = b_1$ و $b = b_3$ مسأله جواب شدنی دارد.

۱۵ـ فرض کنید که دو نقطه $x_1 = (4,4,0,0)$ و $x_2 = (0,12,20,0)$ دو گوشه مجاور از فضای جواب یک مدل برنامه‌ریزی خطی باشد، در آن صورت نقطه $x_3 = (1,10,15,0)$:
(مهندسی صنایع گرایش‌های صنایع و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۲)

۱) یک نقطه داخلی فضای جواب است.
۲) یک گوشه دیگر می‌باشد.
۳) نقطه‌ای روی یال می‌باشد.
۴) یک نقطه خارج از فضای جواب است.

۱۶ـ مجموعهٔ $S = \{x | A_{m\times n}x \le b, x \ge 0\}$ مفروض است و x° یک نقطهٔ رأسی S است. کدام عبارت زیر غلط است؟ (مرتبهٔ ماتریس A برابر با n است)
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۳)

۱) $S-\left\{x^\circ\right\}$ یک مجموعهٔ محدب است.
۲) x° را نمی‌توان از ترکیب محدب دو نقطهٔ متمایز از S نوشت.
۳) n ابرصفحه مستقل خطی که S را تعریف می‌کند از x° می‌گذرد.
۴) ستون‌های A که متناظر مؤلفه‌های غیرصفر x° می‌باشند از هم مستقل خطی هستند.

۱۷ـ برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۳)

$$\begin{aligned}\text{Max } z &= cx\\ Ax &= b\\ x &\ge 0\end{aligned}$$

۱) در هر صورت مسأله دارای جواب بهینه محدود است.
۲) اگر بردار d وجود داشته باشد به گونه‌ای که $Ad = 0$ و $d \ge 0$ و $cd > 0$ آنگاه جواب بهینه مسأله نامتناهی است.
۳) اگر بردار d وجود داشته باشد به گونه‌ای که $Ad = 0$ و $d \ge 0$ آنگاه ناحیه شدنی مسأله نامتناهی است.
۴) موارد ۲ و ۳ صحیح است.

۱۸ـ فرض کنید x° یک نقطهٔ گوشه‌ای از ناحیهٔ شدنی یک مسأله برنامه‌ریزی خطی باشد، اگر نقاط رأس مجاور آن $x^1, x^2, \dots, x^k$ باشد، آنگاه هر نقطه‌ای مانند x متعلق به ناحیهٔ شدنی را می‌توان به صورت زیر نوشت.
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\forall_j : \mu_j \le 0 \Rightarrow x = x^\circ + \sum_{j=1}^{k}\mu_j(x^\circ - x^j)$
۲) $\forall_j : \mu_j \le 0 \Rightarrow x = x^\circ + \sum_{j=0}^{k}\mu_j(x^\circ - x^j)$
۳) $\forall_j : \mu_j \ge 0 \Rightarrow x = x^\circ + \sum_{j=1}^{k}\mu_j(x^\circ - x^j)$
۴) $\forall_j : \mu_j \ge 0 \Rightarrow x = x^\circ - \sum_{j=1}^{k}\mu_j(x^\circ - x^j)$

۱۹ـ فرض کنید x° جواب بهینه یک مسأله ماکزیمم کردن به صورت زیر باشد که به ازای آن محدودیت‌های اول و سوم به حد خود رسیده‌اند: $(\max z = Cx, Ax \le b, x \ge 0)$. اگر A^i معرف ضرایب سطر i ام ماتریس A باشد:
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) باید داشته باشیم $CA^3 > 0, CA^1 < 0$
۲) باید داشته باشیم $CA^3 < 0, CA^1 < 0$
۳) باید داشته باشیم $CA^i < 0$ برای تمام iها
۴) باید داشته باشیم $CA^3 > 0, CA^1 > 0$

۲۰ـ مجموعه‌ای از معادلات خطی $AX = b$ را در کلاس N گویند، اگر که این مجموعه دارای جواب نباشد. اگر این مجموعه دارای جواب یگانه باشد، آن را در کلاس U و اگر دارای بی‌نهایت جواب باشد آن را درکلاس I گویند. فرض کنید که در مجموعه معادلات فوق، بردار b را با یک بردار دیگر نظیر b' جایگزین نماییم. مجموعهٔ جدید ممکن است به یکی از سه کلاس فوق تعلق داشته باشد. کدام یک از تغییرات کلاس زیر غیرممکن خواهند بود؟
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۴)

۱) $N \to U$
۲) $I \to U$
۳) $N \to I$
۴) $U \to N$

۲۱ـ مجموعه $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2 - 4x_3 = 24\right\}$ از چه نوع است؟
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) محدب
۲) مقعر
۳) غیرمحدب
۴) محدب به ازای تمام ضرایب مثبت تابع

۲۲ـ مجموعه قابل قبول تعریف شده به وسیله محدودیت‌های مقابل را در نظر بگیرید:

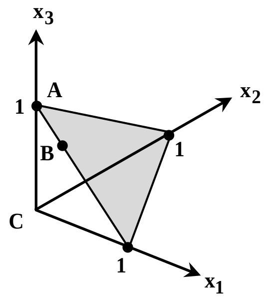
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

تعداد نقاط فرین (Extreme points) این مجموعه برابر کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۶)

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۲۳ـ در ناحیه مشخص شده در شکل زیر، در هر کدام از نقاط C,B, A به ترتیب چه تعداد محدودیت فعالند؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۶)



۱) ۲ و ۲ و ۲

۲) ۲ و ۳ و ۲

۳) ۳ و ۲ و ۳

۴) ۳و ۳ و ۳

۲۴ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\{\text{Max } z = cx / \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \; ; \; x_j \geq 0\} \Rightarrow \{\max z = cx / \ldots\}$$

a_j ستون j ام ماتریس ضرایب تکنولوژی است. در چه صورت این مسأله جواب موجه دارد؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۷)

۱) بردار b ترکیب خطی غیرمنفی از بردارهای a_j باشد.

۲) بردار b مستقل خطی از بردارهای a_j باشد.

۳) متغیرهای تصمیم‌گیری مستقل خطی باشند.

۴) تعداد متغیرها کمتر از تعداد محدودیت‌ها باشد.

۲۵ـ بردارهای a_1 و a_2 و a_3 در فضای E^3 تشکیل یک مجموعه پایه به شرح زیر می‌دهند:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

چنانچه بردار $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ را بخواهیم با یکی از بردارهای فوق جایگزین کنیم به شرطی که مجموعه جدید همچنان پایه باشد، مشخص کنید که بردار b جایگزین کدام یک از بردارهای فوق می‌تواند گردد؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۷)

۱) فقط با بردار a_1

۲) بردارهای a_1 و a_2 و a_3

۳) بردارهای a_3 و a_1

۴) بردارهای a_3 و a_2

۲۶ـ محدودیت زائد محدودیتی است که: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۷)

۱) ایجاد تباهیدگی می‌کند.

۲) مقدار تابع هدف مسأله را با حذفش، تغییر ندهد.

۳) از ترکیب محدودیت‌های دیگر حاصل نشده باشد.

۴) هیچ کدام

۲۷ـ اگر A یک ماتریس m×n و b یک بردار m بُعدی باشد کدام عبارت صحیح است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۷)

۱) یک جواب برای سیستم $Ax \leq b$ به‌دست آوریم، معادل این است که یک جواب غیرمنفی برای سیستم $Ax = b$ به‌دست آوریم.

۲) یک جواب غیرمنفی برای سیستم $Ax \leq b$ به‌دست آوریم، معادل این است که یک جواب برای سیستم $Ax = b$ به‌دست آوریم.

۳) یک جواب برای سیستم $Ax \leq b$ به‌دست آوریم، معادل این است که یک جواب سیستم $Ax = b$ به‌دست آوریم.

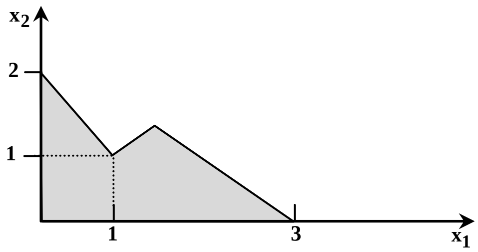
۴) یک جواب صحیح غیرمنفی برای سیستم $Ax \leq b$ به‌دست آوریم، معادل این است که یک جواب غیرمنفی برای سیستم $Ax = b$ به‌دست آوریم.

۲۸ـ دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید. نقطه $(۱۲,۴,۰,۰,۰)$ یک گوشهٔ قابل قبول برای دستگاه فوق می‌باشد. گوشهٔ مجاور این گوشه چقدر است؟
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۹)

$$\begin{aligned} &x_۱ + x_۲ + ۴x_۳ + ۱۲x_۴ + ۲x_۵ = ۱۶ \\ &x_۲ + x_۳ + ۳x_۴ - ۴x_۵ = ۴ \\ &x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵ \geq ۰ \end{aligned}$$

۱) $(۰,۰,۴,۰,۰)$
۲) $(۰,۰,۰,۱,۲)$
۳) $(۰,۰,۰,\frac{۴}{۳},۰)$
۴) $(۰,۰,۱,۱,۰)$

۲۹ـ جواب بهینه در شکل زیر کدام نقطه نمایی می‌تواند باشد؟
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۹)



۱) $(۱,۱)$
۲) $(۰,۲)$
۳) $(۳,۰)$
۴) چون جواب بهینه ندارد و نمی‌توان محاسبه نمود.

۳۰ـ در کدام گزینه شرط لازم و کافی روی S و t به طوری که مسأله زیر یک جواب بهینه متناهی داشته باشد، صحیح است؟
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۹)

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = x_۱ + x_۲ \\ &\text{s.t.} \quad sx_۱ + tx_۲ \leq ۱ \\ &\qquad\quad x_۲, x_۲ \geq ۰ \end{aligned}$$

۱) $st < ۰$
۲) $s \geq ۰, t \geq ۰$
۳) $s > ۰, t > ۰$
۴) $st \leq ۰$

۳۱ـ مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید. کدام یک از جملات ذیل صحیح می‌باشند؟
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۹)

$$\begin{aligned} &\text{Max } x_۰ = \sum_{j=۱}^{n} c_j . x_j \\ &\text{s.t} \quad \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} x_j \leq ۰ \qquad (i = ۱, \ldots, m) \\ &\qquad\quad x_j \geq ۰ \qquad (j = ۱, \ldots, n) \end{aligned}$$

۱) حل مدل همواره unbounded می‌باشد.
۲) مدل یا دارای جواب بهینه $x_j = ۰$ است و یا آنکه حل unbounded می‌باشد.
۳) مدل تنها دارای جواب بهینه $x_j = ۰$ است $j = ۱, \ldots, n$
۴) مدل می‌تواند دارای یک حل بهینه محدود غیرصفر باشد.

۳۲ـ در مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر، کدام یک از گزینه‌ها یک جواب پایه است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۹)

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = ۲x_۱ + x_۲ - x_۳ \\ &\text{s.t.} \quad x_۱ - x_۲ - ۶x_۳ - ۲x_۴ + ۳x_۵ = -۶ \\ &\qquad\quad ۴x_۱ - ۵x_۲ + ۴x_۳ - ۸x_۴ - ۲x_۵ = ۴ \\ &\qquad\quad x_j \geq ۰, \forall_j \end{aligned}$$

۱) $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵) = (۰,۰,۰,۰,-۲)$
۲) $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵) = (۳۴,۲۸,۲,۰,۰)$
۳) $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵) = (۰,۰,\frac{۱}{۲},۰,-۱)$
۴) $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵) = (۰,۰,۱,۰,۲)$

۳۳ـ در مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر:
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۹۰)

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = x_۱ + x_۲ \\ &\text{s.t.} \quad x_۱ + ۳x_۲ \leq ۹ \\ &\qquad\quad ۲x_۱ + x_۲ \leq ۸ \\ &\qquad\quad -x_۱ \leq -۱ \\ &\qquad\quad -x_۲ \leq -۱ \\ &\qquad\quad x_۱, x_۲ \geq ۰ \end{aligned}$$

در نقطه بهینه، گرادیان تابع هدف، در مخروط گرادیان حاصل از کدام‌یک از محدودیت‌های فعال واقع می‌شود؟

۱) محدودیت ۱ و ۲
۲) محدودیت ۱ و ۳
۳) محدودیت ۲ و ۴
۴) محدودیت ۳ و ۴

۳۴ـ ماتریس $B=[\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\tilde{a}_3]$ را در نظر گرفته و تعیین کنید کدام‌یک از موارد زیر پایه نیست؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۹۰)

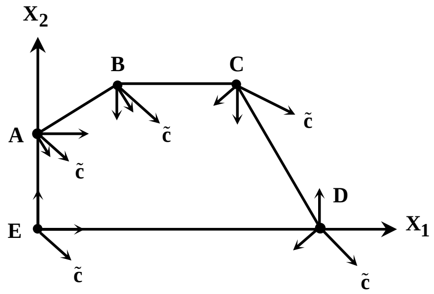
۱) $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

۲) $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

۳) $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

۴) $B=\begin{bmatrix} 2/5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

۳۵ـ در شکل زیر کدام پاسخ، نقطه‌ی بهینه یک مسأله حداکثرسازی است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۹۰)



۱) A

۲) B

۳) C

۴) D

۳۶ـ اگر m تعداد محدودیت‌ها و n تعداد متغیرها باشد. یک حل شدنی پایه‌ای (Basic Feasible solution) برای یک مسأله LP حلی است که محدودیت‌های مسأله را ارضا کند و محدودیت‌های مربوط به غیرمنفی بودن متغیرها را نیز ارضا کند و... (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۰)

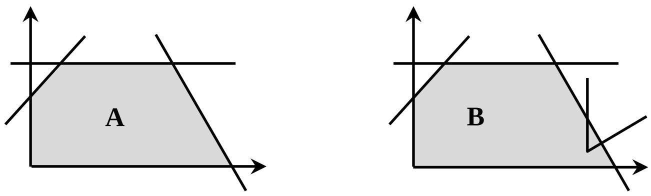
۱) تعداد متغیرهای غیرمنفی آن دقیقاً m باشد.

۲) تعداد متغیرهای مثبت آن دقیقاً m باشد.

۳) تعداد متغیرهای مثبت آن دقیقاً n باشد.

۴) تعداد متغیرهای مثبت آن برابر حداقل m و n باشد.

۳۷ـ پس از مدل‌سازی فضای جواب یک مسأله به صورت شکل A است. با توجه به شرایط فضای مسأله باید به صورت شکل B در بیاید. جهت اصلاح مدل کدام عبارت صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۰)



۱) با اضافه شدن فقط سه محدودیت و دو متغیر مدل اصلاح می‌شود.

۲) این مسأله محدب نیست و نمی‌توان آن را مدل کرد.

۳) با اضافه شدن فقط دو محدودیت مدل اصلاح می‌شود.

۴) با اضافه شدن دو محدودیت و دو متغیر مدل اصلاح می‌شود.

۳۸ـ در یک سیستم خطی $Ax=b$ یک ماتریس با دترمینان غیر صفر است. اگر $A(j\leftarrow b)$ ماتریسی باشد که ستون jام آن با ستون b عوض شده باشد؛ جواب متغیر j ام به چه صورت است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۰)

۱) $x_j=\dfrac{\det(A(j\leftarrow b))}{\det A}$

۲) $x_j=\dfrac{|\det(A(j\leftarrow b))|}{|\det A|}$

۳) $x_j=\dfrac{|\det(A(j\leftarrow b))|}{|\det A|}$

۴) $x_j=\dfrac{\det(A(j\leftarrow b))}{|\det A|}$

۳۹ـ اگر یک مسأله بهینه‌سازی تابع هدف غیرخطی داشته باشد و از طرفی ناحیه موجه آن خطی و محدب باشد در این صورت:

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۱)

۱) مسأله تنها یک نقطه بهینه خواهد داشت.

۲) مسأله چندین نقطه بهینه محلی دارد.

۳) قطعاً نقطه بهینهٔ کلی مسأله روی نقاط مرزی فضای موجه است.

۴) حتماً یکی از گوشه‌های ناحیه موجه، نقطهٔ بهینه کلی مسأله است.

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل دوم

۱ـ گزینه «۴» در مسأله $Ax \le b$ و $x \ge 0$ و $b > 0$ اگر $\forall i, j; a_{ij} > 0$ در این صورت مسأله محدود است، پس شرط کافی برای محدود بودن مسأله آن است که $\forall i, j; a_{ij} > 0$ ولی این شرط برای محدود بودن مسأله شرط لازم نیست. یعنی ممکن است مسأله داده شده محدود باشد در حالی که برای بعضی از a_{ij}ها داشته باشیم $a_{ij} \le 0$. مسأله زیر فضای شدنی محدود دارد در حالی که $a_{12} = -1$.

$$\begin{aligned} \text{Max } & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & \\ & x_1 - x_2 \le 1 \\ & x_1 + x_2 \le 2 \end{aligned}$$

شرط کافی: p شرط کافی برای q است. این بدان معنی است که اگر شرط p برقرار باشد آن‌گاه حتماً q برقرار است پس p برای برقراری q کافی است به عنوان مثال:

$$\underset{p}{x = 2} \Rightarrow \underset{q}{x^2 = 4}$$

این بدان معنی است که اگر $x = 2$ باشد کافی است تا $x^2 = 4$ شود در حالی که ممکن است مقداری دیگری هم یافت شود که $x^2 = 4$ شود در حالی که $x = 2$ نباشد.

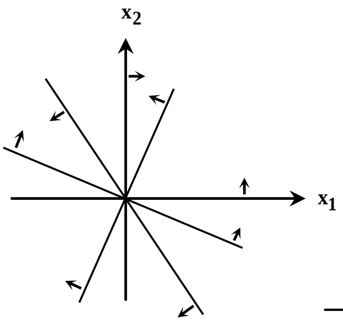
شرط لازم: q شرط لازم p است این بدان معنا است که اگر q برقرار باشد آن‌گاه p می‌تواند برقرار باشد یا نباشد چون نتیجه آن $(p \Rightarrow q)$ راست است به عنوان مثال: $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

پس اگر q برقرار باشد یعنی $x^2 = 4$ آن‌گاه $x = \mp 2$ خواهد بود پس اگر $x = 2$ باشد p راست و اگر $x = -2$ باشد p دروغ است پس q فقط یک شرط لازم برای p است زیرا اگر $x^2 \neq 4$ باشد دیگر $x = 2$ نخواهد بود.

۲ـ گزینه «۲» می‌دانیم که بین نقاط گوشه‌ای و جواب‌های پایه‌ای تناظر یک‌به‌یک برقرار است (البته در عدم تباهیدگی).

۳ـ گزینه «۴» تنها نقطه شدنی مساله $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ است.

پس همین نقطه بهینه خواهد بود و $Z^* = 0$.



۴ـ گزینه «۳» در حالت بهینه چندگانه می‌توانیم بی‌نهایت نقطه بهینه داشته باشیم ولی تعداد نقاط گوشه‌ای و BFS ها محدود است.

۵ـ گزینه «۴» دستگاه (۱) $\begin{cases} AX = b \\ x \ge 0 \end{cases}$ مفروض است. اگر دستگاه همگن نظیر، یعنی: $\begin{cases} AX = 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$ دارای جواب $X^\circ \neq 0$ باشد. یعنی $\begin{cases} AX^\circ = 0 \\ x^\circ \ge 0 \ , \ x^\circ \neq 0 \end{cases}$ و دستگاه ۱ نیز دارای جواب x_1 باشد. در این صورت $x_2 = x_1 + \lambda x^\circ$ که $\lambda > 0$ عدد حقیقی است یک جواب دستگاه ۱ است زیرا:

$$Ax_2 = A(x_1 + \lambda x^\circ) = Ax_1 + \lambda(\underbrace{\cancel{Ax^\circ}}_{0}) = Ax_1 = b$$

$$x_1 \ge 0, \ x^\circ \ge 0, \ \lambda > 0 \Rightarrow x_2 = x_1 + \lambda x^\circ \ge 0$$

چون $\lambda > 0$ می‌باشد با افزایش λ، x_2 همچنان جواب دستگاه ۱ است. با فرض $\lambda \to +\infty$ درمی‌یابیم که فضای شدنی دستگاه ۱ نامحدود است.

۶ـ گزینه «۳» رتبه ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ برابر ۲ است پس تعداد مؤلفه‌های غیرصفر در هر جواب پایه حداکثر ۲ تا است همچنین می‌بایست بردار ضرایب مؤلفه‌های غیرصفر مستقل خطی باشند. گزینه‌های ۱ و ۴ دارای بیش ازدو مؤلفه غیرصفر هستند پس جواب پایه‌ای نیستند. در گزینه ۲ بردار ضرایب مؤلفه‌های غیرصفر یعنی $a_۱=\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$ و $a_۲=\begin{pmatrix} ۲ \\ ۲ \end{pmatrix}$ وابسته خطی هستند چون $a_۲=۲a_۱$ پس گزینه ۲ نیز جواب پایه‌ای نیست. گزینه ۳ یک جواب پایه‌ای تباهیده را نمایش می‌دهد.

۷ـ گزینه «۴» **قضیه نمایش:** اگر $X=\{x\,|\,Ax=b, x\geq ۰\}\neq \phi$ و $x_۱,\dots,x_n$ نقاط رأسی X و $d_۱,\dots,d_\ell$ جهت‌های رأسی دور شونده (در صورت وجود) باشند، در این صورت هر نقطه از مجموعه X را می‌توان به صورت ترکیب محدب (غیر بدیهی) نقاط رأسی به اضافه ترکیب خطی نامنفی جهت‌های رأسی دور شونده X نوشت.

$$\forall x\in X \;;\; x=\sum_{j=۱}^{n}\lambda_j x_j+\sum_{i=۱}^{\ell}\mu_i d_i \quad ; \quad \sum_{j=۱}^{n}\lambda_i=۱ \;;\; \mu_i\geq ۰\,,\,\lambda_j\geq ۰$$

بنابراین هر نقطه شدنی را نمی‌توان فقط با ترکیب محدب (غیر بدیهی) نقاط گوشه‌ای نوشت.

۸ـ گزینه «۳» در $P_۱$، بردار سمت راست b در مخروط حادث از ستونهای ماتریس A واقع شده پس $P_۱$ دارای جواب موجه است ولی $P_۲$ خیر.

۹ـ گزینه «۴» در دستگاه $A_{m\times n}X=b$ داریم $\text{Rank}(A\,|\,b)=\text{Rank}(A)=k<n$. بسته به این که چه رابطه‌ای بین k و m است می‌توان در مورد جواب‌های آن نظر داد. اگر $k=m$ باشد بی‌شمار جواب داریم:

$$[A\,|\,b]\xrightarrow{\text{تحویل‌شده}}[R\,|\,b']\Rightarrow[I \quad Q]=R$$

$$[I \quad Q]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}=b'$$

اگر $k<m$ باشد می‌تواند بی‌شمار جواب داشته باشد و می‌تواند بی‌جواب باشد:

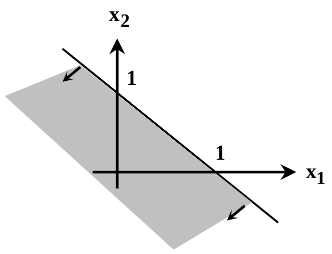
$$[A\,|\,b]\xrightarrow{\text{تحویل‌شده}}[R\,|\,b']\Rightarrow\begin{bmatrix} I & Q \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b'_۱ \\ b'_۲ \end{bmatrix} \begin{array}{l} \nearrow b'_۲=۰ \;\; \text{بی‌شمار جواب} \\ \searrow b'_۲\neq ۰ \;\; \text{بدون‌جواب} \end{array}$$

پس نمی‌توان جواب قطعی دارد.

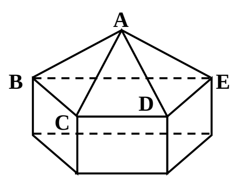
در حالی که گزینه ۳ به عنوان جواب درست اعلام شده است.

۱۰ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. چون $a_۴=a_۱+a_۳$ و $a_۵=۲a_۳$ پس باید ستون دوم و سوم حذف شوند تا ستون‌های باقی مانده مستقل باشند و گزینه صحیح وجود ندارد.

۱۱ـ گزینه «۱» با رسم هندسی ناحیه موجه مشخص است که مسأله دارای نقطه گوشه‌ای نمی‌باشد.

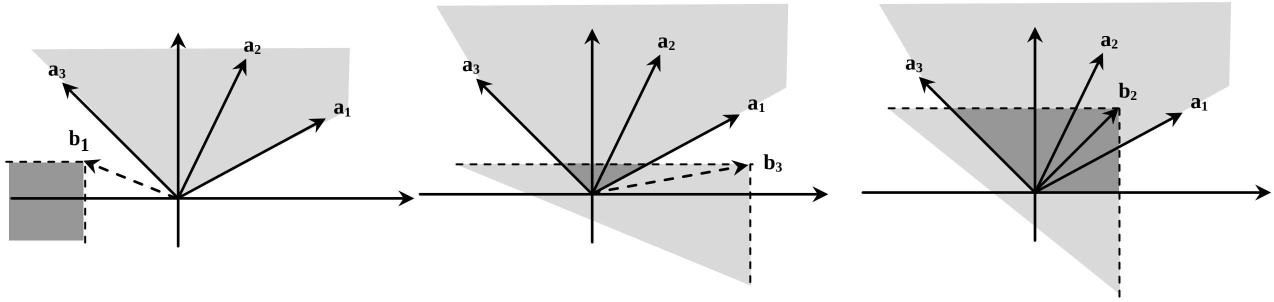


۱۲ـ گزینه «۳» در فضای سه بعدی اگر از یک گوشه بیش از سه محدودیت عبور نماید، آن گوشه تباهیده است. گوشه‌های A,B,C,D,E تباهیده هستند، پس $X=۵$ ولی با حذف هر کدام از محدودیت‌ها فضا تغییر می‌کند پس محدودیت زائد نداریم $y=۰$.



۱۳ـ گزینه «۱» در حالت کلی اگر a_1 و a_2 و .... و a_j و ... و a_n یک پایه در فضای E^n باشند و $b=\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_j a_j+\ldots+\lambda_n a_n$ و $\lambda_j \neq 0$ در این صورت a_1 و a_2 و...... و b و.... و a_n یک پایه دیگر برای E^n است.

۱۴ـ گزینه «۲» به ازای بردارهای ستونی b_2 و b_3 مسأله دارای جواب شدنی است.



۱۵ـ گزینه «۳»
$$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2=x_3 \Rightarrow \lambda_1\begin{bmatrix}4\\4\\0\\0\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}0\\12\\20\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\10\\15\\0\end{bmatrix} \quad ; \quad \lambda_1=\frac{1}{4} \qquad \lambda_2=\frac{3}{4}$$

نقطه x_3 ترکیب محدب اکید نقاط x_1 و x_2 است، پس x_3 بین پاره‌خط واصل x_1 و x_2 است.

۱۶ـ گزینه «۳» از هر نقطه رأسی مانند x^0 در فضای n بعدی حداقل n ابر صفحه مستقل خطی عبور می‌کند. اگر نقطه رأسی غیرتباهیده باشد، دقیقاً n ابرصفحه مستقل خطی از آن می‌گذرد. اما اگر تباهیده باشد، بیشتر از n ابرصفحه از آن می‌گذرد. همچنین گزینه «۲» نیز غلط است زیرا نقطه رأسی را نمی‌توان به صورت ترکیب محدب دو نقطه متمایز دیگر از S نوشت ولی در گزینه «۲» کلمه «دیگر» ذکر نشده است.

۱۷ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه $Ad=0$ و $d\geq 0$، پس، بردار d یک جواب دستگاه همگن است و چون $Cd>0$ پس، d غیرصفر است و در نتیجه d یک جهت دور شونده برای سیستم $\begin{cases}Ax=b\\x\geq 0\end{cases}$ است. از طرفی $Cd>0$ و مسأله max سازی است پس $Z^*=+\infty$. در گزینه (۳) ناصفر بودن d ذکر نشده پس نادرست است.

۱۸ـ گزینه «۴» اگر x یک نقطه از فضای شدنی یک LP باشد و فضای جواب نیز محدود و غیرتهی باشد (که در صورت سؤال ذکر نشده و سؤال را غلط می‌کند)، آنگاه x را می‌توان به صورت ترکیب محدب نقاط گوشه‌ای مسأله نوشت.

$$x=\sum_{j=0}^{k}\mu_j x^j \quad , \quad \sum_{j=0}^{k}\mu_j=1 \quad , \quad \mu_j\geq 0 \qquad \forall j\in 0,\cdots,k$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\mu_0 x^0+\sum_{j=0}^{k}\mu_j x^j\\ \sum_{j=0}^{k}\mu_j=1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{k}\mu_j\ x^0=x^0 \Rightarrow \mu_0 x^0=x^0-\sum_{j=1}^{k}\mu_j\ x^0\end{cases} \Rightarrow \quad \forall_j:\mu_j\geq 0 \Rightarrow x=x^0-\sum_{j=1}^{k}\mu_j(x^0-x^j)$$

۱۹ـ گزینه «۴ و ۱» مثال مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{matrix}-x_1+2x_2\leq 2\\2x_1-x_2\leq 2\\x_1,x_2\geq 0\end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix}C=(3,1)\\A^1=(-1,2)\\A^2=(2,-1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}C.A^1=-1<0\\C.A^2=5>0\end{matrix}$$

نقطه $x^*(x_1=2,x_2=2)$ نقطه بهینه مسأله فوق است و هر دو محدودیت در این نقطه فعالند.

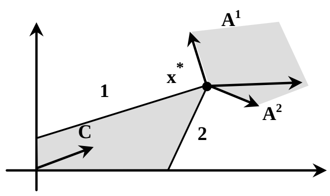
اکنون به مثال مقابل توجه کنید:

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = x_۱ + x_۲ \\ &\text{s.t.} \\ &x_۱ + ۲x_۲ \le ۴ \\ &۲x_۱ + x_۲ \le ۴ \\ &x_۱, x_۲ \ge ۰ \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} C &= (۱,۱) \\ A^۱ &= (۱,۲) \\ A^۲ &= (۲,۱) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} CA^۱ &= ۳ > ۰ \\ CA^۲ &= ۳ > ۰ \end{aligned}$$

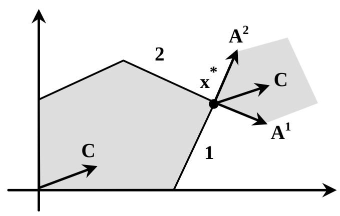
نقطه $x^*(\frac{۴}{۳},\frac{۴}{۳})$ نقطه بهینه است و هر دو محدودیت در این نقطه فعالند. گزینه‌های (۱) و (۴) می‌توانند صحیح باشند.

در حقیقت در نقطه بهینه مسأله ماکزیمم‌سازی بردار گرادیان تابع هدف یعنی $\vec{C}$ در مخروط حاصل از بردارهای گرادیـان محـدودیت‌هـای فعـال در نقطـه بهینه واقع می‌شود، ولی زاویه بردار C با همه بردارهای گرادیان محدودیت‌های فعال نمی‌تواند منفرجه باشـد و در نتیجـه ضـرب داخلـی بـردار C و بـردار گرادیان محدودیت‌های فعال نمی‌توانند همگی منفی باشند، یعنی گزینه «۲» و «۳» غلط است.



$CA^2 > ۰, CA^1 < ۰$

زاویه C با A^1 منفرجه و با A^2 حاده است.



$CA^2 > ۰, CA^1 > ۰$

زاویه C با A^2, A^1 حاده است.

۲۰ــ گزینه «۲» با تغییر مقادیر سمت راست نمی‌توان دستگاهی را که بی نهایت جواب دارد به دستگاهی با جواب یگانه تبدیل کرد زیرا:

در دستگاه $\underset{m\times n}{Ax = b}$ با فرض $RANK(A) = m$ می‌توان دستگاه را به صورت مقابل افراز کرد: $[A_۱, A_۲]\begin{bmatrix} x_B \\ X_N \end{bmatrix} = b$

که درآن $(A_۱)_{m\times m}, (A_۲)_{m\times(n-m)}, RANK(A_۱) = m$ و داریم: $A_۱x_B + A_۲x_N = b \Rightarrow x_B = b' - Qx_N$

با تغییر مقادیر متغیرهای x_N مقادیر جدیدی برای x_B به دست می‌آید و تغییر b فقط روی b' تأثیر می‌گذارد.

۲۱ــ گزینه «۳» مجموعه S نشانگر پوسته یک کره است و معادله کره $x_۱^۲ + (x_۲ - ۱)^۲ + (x_۳ - ۲)^۲ = ۲۹$ است، که مجموعه‌ای غیر محدب است.

۲۲ــ گزینه «۳» شکل حاصل یک خط راست است که در ناحیه اول فضای ۳ بعدی از دو طرف به صفحه‌های سازنده ناحیه اول برخورد می‌کند و دو نقطـه فرین ایجاد می‌شود.

۲۳ــ گزینه «۳» ناحیه هاشورخورده نمایش هندسی سیستم : $\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱ \\ x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰ \end{cases}$ است. محدودیت‌های فعال در هر نقطه به صورت زیر هستند:

$$A: \begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱ \\ x_۱ = ۰ \\ x_۲ = ۰ \end{cases} \qquad B: \begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱ \\ x_۲ = ۰ \end{cases} \qquad C: \begin{cases} x_۱ = ۰ \\ x_۲ = ۰ \\ x_۳ = ۰ \end{cases}$$

۲۴ــ گزینه «۱» در مسأله برنامه‌ریزی خطی $\{\text{Max } z = cx \mid \sum_{j=۱}^{n} a_j x_j = b \,;\, x_j \ge ۰\}$ اگر b ترکیب خطـی غیرمنفـی از بردارهـای a_j باشـد در ایـن صورت مسأله دارای جواب موجه می‌باشد.

۲۵ـ گزینه «۳» با محاسبه $\det|A|$ در حالتهای مختلف نتایج زیر حاصل شد.

اگر بردار b با بردار a_1 جایگزین گردد:
$$\det|A|=\begin{vmatrix}4 & 2 & 4\\ 5 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{vmatrix}\neq 0$$

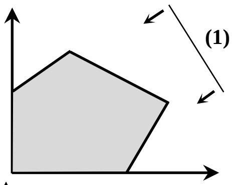
اگر بردار b با بردار a_2 جایگزین گردد:
$$\det|A|=\begin{vmatrix}4 & 4 & 4\\ 3 & 5 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=0$$

اگر بردار b با بردار a_3 جایگزین گردد:
$$\det|A|=\begin{vmatrix}4 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 5\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}\neq 0$$

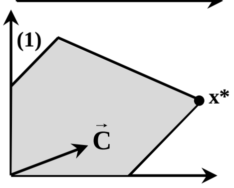
با توجه به اینکه بردارهای ماتریس A در جایگزینی b با a_1 و a_3 مستقل می‌باشد گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۲۶ـ گزینه «۴» در شکل زیر محدودیت (۱) زائد است (زائد هندسی) ولی ایجاد تباهیدگی نمی‌کند، پس گزینه (۱) غلط است.



در شکل زیر نقطه x^* بهینه است و با حذف محدودیت (۱) نقطه بهینه x^* و در نتیجه z^* تغییر نمی‌کند، ولی محدودیت (۱) زائد نیست و گزینه (۲) غلط است.



(Max سازی)

همچنین محدودیت زائد از ترکیب سایر محدودیت‌ها به‌دست می‌آید. پس گزینه (۳) نیز غلط است.

◆ ◆ ◆ ◆

۲۷ـ گزینه «۳ و ۱» اگر A یک ماتریس $m\times n$ و b یک بردار m بُعدی باشد، یک جواب برای سیستم $Ax\leq b$ به‌دست می‌آوریم، که معادل این است که یک جواب غیرمنفی برای سیستم $Ax=b$ به‌دست آورده‌ایم.

◆ ◆ ◆ ◆

۲۸ـ گزینه «۳ و ۱» می‌دانیم که دو گوشه مجاور در یک متغیر پایه‌ای با هم تفاوت دارند. متغیرهای پایه‌ای گوشه $(12,4,0,0,0)$ عبارتند از: $x_B=(x_1,x_2)$. گوشه $(0,0,4,0,0)$ یک گوشه موجه و تباهیده است و یک دسته متغیر پایه‌ای متناظر با آن $x_B=(x_2,x_3)$ می‌باشد، پس گزینه (۱) صحیح است.
در گزینه (۲) نقطه‌ی $(0,0,0,1,2)$ در محدودیت دوم صدق نمی‌کند پس نقطه‌ی گوشه‌ای نیست.

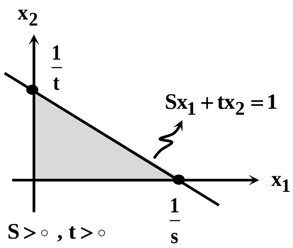
در گزینه (۳) نقطه‌ی $(0,0,0,\frac{4}{3},0)$ در محدودیت‌ها صدق کرده و یک نقطه‌ای گوشه‌ای تباهیده از درجه یک می‌باشد ولی با توجه به تعریف پایه‌ی مجاور، که هر پایه حداکثر در یک متغیر پایه‌ای می‌تواند متفاوت باشد، می‌تواند پایه‌های متناسب با آن $[a_1,a_4]$، $[a_2,a_4]$، $[a_4,a_5]$ باشد ($[a_3,a_4]$ به علت صفر شدن دترمینان پایه در نظر گرفته نمی‌شود) پس چون ممکن است یکی از پایه‌های $[a_1,a_4]$ یا $[a_2,a_4]$ باشد می‌تواند نقطه گوشه‌ای مجاور نقطه بالا باشد پس گزینه (۳) صحیح است.
در گزینه (۴) به علت وابسته بودن ستون a_3 و a_4 این نقطه، نقطه گوشه‌ای نیست.

◆ ◆ ◆ ◆

۲۹ـ سؤال ناقص است. چون تابع هدف داده نشده نمی‌توان گفت کدام نقطه بهینه است؛ اما اگر منظور طراح این بوده که کدام نقطه بهینه نمی‌تواند باشد در این صورت گزینه «۱» می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

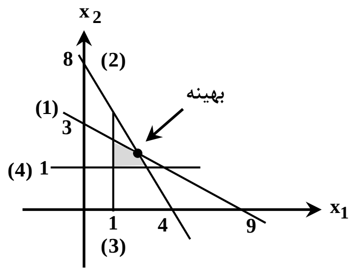
۳۰ـ گزینه «۳» با فرض $S>0$ و $t>0$ فضای جواب یک مثلث است و جواب بهینه متناهی داریم.



۳۱ـ گزینه «۲» فضای جواب یا مبدأ مختصات است که در این صورت جواب بهینه همان مبدأ مختصات $(\forall_j \ , \ x_j = 0)$ است و یا فضای حل یک مخروط نامحدود است که در این صورت جواب بهینه نامحدود است.

۳۲ـ گزینه «۱» نقطه‌ی $(0,0,0,0,-2)$ یک جواب پایه‌ای تباهیده است؛ هر چند که چون $x_5 = -2 < 0$ است، نشدنی است. گزینه «۲» دارای سه متغیر غیرصفر است، پس غیرپایه‌ای است. گزینه «۳» غیرپایه‌ای است، چون دترمینان ضرایب x_5 , x_3 برابر صفر است. همچنین گزینه «۴» در محدودیت‌ها صدق نمی‌کند؛ پس غیرپایه‌ای است.

۳۳ـ گزینه «۱» با رسم ناحیه موجه مشاهده می‌شود که نقطه بهینه از برخورد محدودیت‌های یک و دو حاصل شده است؛ پس گرادیان تابع هدف در مخروط گرادیان حاصل از محدودیت ۱ و ۲ قرار دارد.



$$(1) \quad x_1 + 3x_2 = 9$$
$$(2) \quad 2x_1 + x_2 = 8$$
$$(3) \quad -x_1 = -1$$
$$(4) \quad -x_2 = -1$$

۳۴ـ گزینه «۴» برای اینکه یک ماتریس بخواهد پایه‌ای باشد، باید $|A| \neq 0$ باشد. در این‌جا فقط دترمینان ماتریس گزینه ۴ برابر صفر است و دترمینان سایر ماتریس‌ها مخالف صفر می‌باشد.

۳۵ـ گزینه «۴» اگر در جهت C حرکت کنیم با توجه به این‌که مسأله maxسازی است، به جواب بهینه می‌رسیم. با حرکت در جهت C به نقطه گوشه‌ای D می‌رسیم. پس نقطه D بهینه است.

۳۶ـ گزینه «۲» در یک جواب پایه‌ای که تعداد محدودیت‌های مسأله m باشد، حداکثر m متغیر مثبت وجود دارد. اما با توجه به اینکه این گزینه وجود ندارد، می‌توانیم فرض کنیم که حل موجود تباهیده نباشد، بنابراین دقیقاً m متغیر پایه‌ای مثبت وجود دارد.

۳۷ـ گزینه «۲» شکل B محدب نبوده و قابل مدل‌سازی نمی‌باشد.

۳۸ـ گزینه «۱» در روش کرامر مقدار متغیر jام با استفاده از رابطه $x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$ به دست می‌آید. یعنی مقدار حاصل از دترمینانی که مقادیر سمت راست(b) جایگزین ستون jام آن در ماتریسA شده، تقسیم بر مقدار دترمینان A.

۳۹ـ گزینه «۳» اگر ناحیه موجه خطی و محدب باشد، در صورت غیر خطی بودن تابع، هدف، جواب بهینه روی نقاط مرزی ناحیه موجه قرار خواهد گرفت.

فصل سوم

«روش سیمپلکس»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل سوم

۱ـ قضیه پایه‌ای (اصلی) برنامه‌ریزی خطی چه مطلبی را بیان می‌کند؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) الگوریتم سیمپلکس، هر مسأله برنامه‌ریزی خطی را در تعداد معینی تکرار حل می‌کند.

۲) هر مسأله برنامه‌ریزی خطی قابل حل توسط الگوریتم با تابع زمانی چند جمله‌ای است.

۳) هر مسأله برنامه‌ریزی خطی یا جواب موجه ندارد یا نامحدود است و یا جواب بهینه محدود است.

۴) هر مسأله برنامه‌ریزی خطی، جواب بهینه داشته باشد، مسأله ثانویه آن نیز دارای جواب است و مقدار تابع اولیه و تابع هدف ثانویه با هم مساوی است.

۲ـ کدام یک از مطالب زیر در مورد حداکثر تعداد تکرارهای لازم برای حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی در بدترین شرایط (Worst-Case) توسط الگوریتم سیمپلکس صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) متناسب با تعداد سطرهای مسأله m است.

۲) از درجه یک تابع نمایی از ابعاد مسأله است.

۳) از درجه یک تابع چند جمله‌ای از ابعاد مسأله است.

۴) متناسب با حاصل‌ضرب تعداد متغیرها در تعداد سطرها $(m \times n)$ است.

۳ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر و جدول بهینه آن داده شده است. x_4, x_5, x_6 متغیرهای لنگی اضافه شده به محدودیت‌ها هستند. مقدار پارامتر b کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$
s.t.
$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \le 1$$
$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 \le 3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

متغیرهای پایه	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	مقدار سمت راست
z	۰	۰	b	۳	۰	۱	d
x_1	۱	۰	۱	۶	۰	۱-	۲
x_5	۰	۰	۲	a	۱	۱-	۱
x_2	۰	۱	۰	۳-	۰	۱	۱

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴ـ در جدول بهینه داده شده مسأله بالا، مقدار پارامتر a چقدر است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) $a = 1$ ۲) $a = 2$ ۳) $a = -\frac{1}{3}$ ۴) $a = 4$

۵ـ اگر فعالیت جدید x_7 به مسأله داده شده در سوال فوق اضافه شود و میزان مصرف این فعالیت از منابع به ترتیب برابر ۱و۲و۲ باشد، شرط آنکه این فعالیت در برنامه تولید شرکت قرار گیرد آن است که: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) $C_7 \ge 5$ ۲) $C_7 < 5$ ۴) $C_7 \ge 3$ ۴) $C_7 < 3$

۶ـ کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد برنامه‌ریزی خطی درست است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی با حذف محدودیت‌های غیرفعال تغییر نمی‌کند.

۲) تمام مسائل برنامه‌ریزی خطی دارای جواب‌های بهینه‌ای هستند که حداقل یکی از آنها نقطه گوشه‌ای است.

۳) فرض قطعیت (Certainty) در برنامه‌ریزی خطی به معنی آن است که متغیرها می‌توانند مقادیر غیرصحیح نیز قبول کنند.

۴) فرض تناسب (Proportionality) به معنی آن است که مقدار متغیرهای برنامه‌ریزی خطی مستقل از هم تعیین می‌شود.

۷ـ پس از چند تکرار، تابلوی سیمپلکس مقابل داده شده است. اگر x_2 به عنوان متغیر ورودی انتخاب شود، تعیین کنید که با استفاده از قاعده ضدتسلسل (Lexicographical rule) متغیر خروجی کدام است؟ توجه کنید متغیرهای x_4, x_5, x_6 متغیرهای کمبود (Slack) و تشکیل دهنده اولین پایه برای جدول سیمپلکس هستند. (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z	۰	−۲	۲	۰	−۳	۰	۵
x_6	۰	۲	۱	۰	−۱	۱	۴
x_4	۰	۱	−۱	۱	۲	۰	۲
x_1	۰	۳	۲	۰	۳	۰	۶

۱) x_1 متغیر خروجی است.
۲) x_4 متغیر خروجی است.
۳) x_6 متغیر خروجی است.
۴) هریک از متغیرهای x_1 یا x_4 یا x_6 می‌توانند به عنوان خروجی انتخاب شوند.

۸ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی روبرو را در نظر بگیرید:

$$\underset{s.t.}{\text{Min}}\ z = 4x_1 + 6x_1$$
$$x_1 + x_2 \geq 0$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$x_2 = 6 \quad \text{آزاد}\ x_1$$

این مسأله : (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) جواب ندارد.
۲) دارای جواب بهینه چندگانه می‌باشد.
۳) جواب بهینه منحصر به فرد ندارد و راستای آن بی‌کران است.
۴) دارای جواب بهینه منحصر به فرد و در حالت منحط (Degenerate) است.

۹ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی مورد نظر است:

$$\underset{s.t.}{\text{Min}}\ z = C^T x$$
$$AX \leq b$$
$$x \geq 0$$

که در آن A یک ماتریس $(m \times n)$ با رتبه m می‌باشد. در یکی از مراحل حل ، اگر بتوان b را به صورت ترکیب خطی از $m-1$ ستون ماتریس A نوشت، می‌توان نتیجه‌گرفت که: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) حل در آن مرحله، منحط (Degenerate) است.
۲) تعداد $m-1$ متغیر در پایه هستند.
۳) حل در آن مرحله، غیرمنحط (no degenerate) است.
۴) تعداد بردارهای مستقل از هم در ماتریس A ، کمتر از m می‌باشند.

۱۰ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\underset{s.t.}{\text{Min}}\ Z = C_B X_B + C_N X_N$$
$$Bx_B + NX_N = b$$
$$X_B, X_N \geq 0$$

که در آن X_B متغیرهای اساسی، X_N متغیرهای غیراساسی و C_N, C_B به ترتیب ضرایب وابسته به آنها در تابع هدف می‌باشند. در گذار از یک مرحله سیمپلکس به مرحله بعدی $B^{-1}b - B^{-1}NX_N < 0$ گردیده است. در مرحله بعدی سیمپلکس، چه اتفاقی رخ خواهد داد؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) حل منحط (Degenerate) خواهد بود.
۲) حل غیرمنحط (NoDegenerate) خواهد بود.
۳) حل نامحدود (Unbounded) خواهد بود.
۴) یکی از مقادیر سمت راست در جدول سیمپلکس منفی خواهد بود.

۱۱ـ متغیر X_1 در یک تکرار روش سیمپلکس به عنوان متغیر پایه در سطر اول جدول سیمپلکس ظاهر شده است. در این صورت راجع به ضریب متغیر X_1 در اولین محدودیت اصلی می‌توان گفت؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) هر عددی می‌تواند باشد.
۲) عددی غیر مثبت است.
۳) عدد مثبتی است.
۴) عددی غیر منفی است.

۱۲ـ در یک مرحله از حل مسأله برنامه‌ریزی خطی به فرم $\underset{s.t.}{\text{Min } c'x}$ $Ax=b$ $x\geq 0$ چنانچه متغیر x_1 کاندید ورودی به حل باشد، برای آن که مشکل حلقه تکـرار پیش نیاید بهترین متغیر خارج شونده به چه صورت است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	۱	۱	۰	۲	۱	۴
x_3	۱	۰	۱	۱	۲	۴
$-z$	۵−	۰	۰	۴−	۳−	

۱) متغیر x_1 قادر به واردشدن به حل نمی‌باشد.

۲) متغیر x_2 بهترین کاندید جهت خروج از پایه است.

۳) متغیر x_3 بهترین کاندید جهت خروج از پایه است.

۴) هر دو متغیر x_3, x_2 بدون ایجاد هیچ مشکل احتمالی می‌توانند، کاندید خروج از حل گردند.

۱۳ـ فرض کنید در یک مسأله LP یک متغیر آزاد نظیر x_k به وسیله $X_k^+ - X_k^-$ در آن $X_k^+, X_k^- \geq 0$ هستند جایگزین شده باشد. در ایـن صـورت کدام نتیجه <u>غلط</u> است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) در هر تکرار روش سیمپلکس $X_k^+ \times X_k^- = 0$

۲) در یک تکرار روش سیمپلکس هر دو متغیر X_k^-, X_k^+ می‌توانند همزمان در پایه باشند.

۳) بردارهای ستونی وابسته به متغیرهای X_k^-, X_k^+ در هر جدول سیمپلکس قرینه یکدیگرند.

۴) اگر مسأله دارای جواب بهینه چندگانه به نحوی که X_k^+ در یکی از این جواب‌ها در پایه قرار داشته باشد در هیچ جواب بهینه دیگر X_k^- نمی‌تواند جایگزین X_k^+ شود.

۱۴ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\underset{s.t}{\text{Min}}\, Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 - x_6 = 3$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

در آن صورت بردار $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) و بردار $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$ یک پایه ولی $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ یک حل اساسی برای مسأله است.

۲) حل اساسی، $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ حل غیراساسی و $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$ حل قابل قبول است.

۳) حل قابل قبول منحط، $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ حل اساسی ولی $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$ حل اساسی نمی‌باشد.

۴) و $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ هر دو حل قابل قبول بوده ولی $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$ حل قابل قبول نمی‌باشد.

۱۵ـ در مسأله زیر A یک درایه (ماتریس) دلخواه $m\times n, m \leq n$ و x یک بردار n بعدی است. مسأله زیر چه وقت جواب قابل قبولی دارد؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

$$\underset{s.t.}{\text{Min}}\ Z = C^T X$$
$$Ax = b$$

۱) بردار b غیرمنفی باشد.

۲) ستون‌های ماتریس A از هم مستقل نباشند.

۳) رتبه ماتریس A برابر n باشد و بردار b یک بردار غیرمنفی باشد.

۴) بردار b یک ترکیب خطی با ضرایب خطی غیرمنفی از بردارهای ستونی ماتریس A باشد.

۱۶ـ اگر دریکی از مراحل روش سیمپلکس به جواب منحط (Degenerate) رسیدیم، در مرحله بعدی جواب چگونه است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) حتماً منحط (Degenerate) است.

۲) ممکن است منحط (Degenerate) نباشد.

۳) حتماً منحط (Degenerate) است و مقدار تابع هدف تغییر نمی‌کند.

۴) ممکن است منحط (Degenerate) نباشد، ولی مقدار تابع هدف تغییر نکند.

۱۷ـ تعداد متغیرهای پایه با مقادیر بزرگتر از صفر در حل بهینه مسأله که غیر منحط هم باشد، با کدام گزینه برابر است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

۱) حداقل به تعداد محدودیت‌ها می‌باشد.

۲) حتماً به اندازه تعداد محدودیت‌ها می‌باشد.

۳) بیشتر از تعداد محدودیت‌ها می‌باشد.

۴) حداکثر به اندازه تعداد محدودیت‌ها می‌باشد.

۱۸ـ مسائل برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

(۱)

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t} \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 \le 10 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 25 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 15 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

(۲)

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t} \quad & 2x_1 - x_2 \le 10 \\ & 3x_1 + 2x_2 \ge 25 \\ & 2x_1 + x_2 \ge 15 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

اگر Z_1^* و Z_2^* به ترتیب جوابهای بهینه مسائل ۱ و ۲ باشند، آنگاه داریم:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

۱) $Z_1^* = Z_2^*$ ‏ ۲) $Z_1^* = 45$ ‏ ۳) $Z_1^* \ge Z_2^*$ ‏ ۴) $Z_1^* \le Z_2^*$

۱۹ـ اگر داشته باشیم:

$$\text{Min}\, z = 2x_1 - 6x_2 - x_3 + 3x_4 + 8x_5 - 4x_6$$

$$\text{s.t} \quad -5 \le x_j \le 10 \quad j = 1, \dots, 6$$

در این حالت مقدار بهینه تابع هدف چقدر می‌باشد؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

۱) ۳۰۰ ‏ ۲) ۱۶۵− ‏ ۳) ۳۲۰− ‏ ۴) ۴۸۰

۲۰ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max} \quad z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \le b_i \\ \vdots \\ x_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_j \ge 0, \ j = 1, \dots, n \end{cases}$$

که در آن کلیه مقادیر سمت راست محدودیت‌ها مثبت بوده و جهت محدودیت‌ها کوچکتر یا مساوی می‌باشد. این مسأله....................... .

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

۱) حتماً نامحدود است. ‏ ۲) امکان‌ناپذیر است.

۳) حتماً امکان‌پذیر است. ‏ ۴) ممکن است امکان‌پذیر باشد.

۲۱ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min}\quad & x_{۱}+x_{۲}-۴x_{۳} \\ \text{s.t.}\quad & x_{۱}+x_{۲}+۲x_{۳}+x_{۴}=۹ \\ & x_{۱}+x_{۲}-x_{۳}+x_{۵}=۲ \\ & -x_{۱}+x_{۲}+x_{۳}+x_{۶}=۴ \\ & x_{۱},x_{۲},x_{۳},x_{۴},x_{۵},x_{۶}\geq ۰ \end{aligned}$$

که در آن متغیرهای $(x_{۴},x_{۵},x_{۶})$ از نوع شناوری (slack) می‌باشند و حل بهینهٔ آن مطابق جدول زیر است، مقدار β چقدر است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

$x_{۱}$	$x_{۲}$	$x_{۳}$	$x_{۴}$	$x_{۵}$	$x_{۶}$	RHS
۱	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	۰	$-\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$
۰	α	۰	۰	۱	β	γ
۰	$\frac{۲}{۳}$	۱	$\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱۳}{۳}$
۰	۴	۰	۱	۰	۰	۲

۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) ۱

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $-\frac{۱}{۳}$

۲۲ـ در مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل:

$$\begin{aligned} \text{Min}\quad & x_{۱}+x_{۲}-۴x_{۳} \\ \text{s.t}\quad & x_{۱}+x_{۲}+۲x_{۳}+x_{۴}=۹ \\ & x_{۱}+x_{۲}-x_{۳}+x_{۵}=۲ \\ & -x_{۱}+x_{۲}+x_{۳}+x_{۶}=۴ \\ & x_i\geq ۰ \qquad i=۱,\dots,۶ \end{aligned}$$

چنانچه $(x_{۴},x_{۵},x_{۶})$ متغیرهای شناوری (slack) باشند و حل بهینه آن به صورت زیر باشد، مقدار α چقدر است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

$x_{۱}$	$x_{۲}$	$x_{۳}$	$x_{۴}$	$x_{۵}$	$x_{۶}$	RHS
۱	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	۰	$-\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$
۰	۲	۰	۰	۱	β	γ
۰	α	۱	$\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱۳}{۳}$
۰	۴	۰	۱	۰	۲	

۱) $-\frac{۲}{۳}$

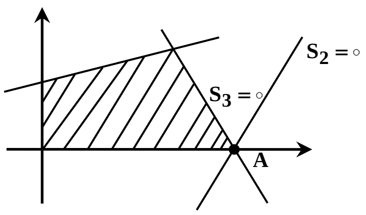
۲) $-\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۱}{۳}$

۲۳ـ در شکل زیر، نقطهٔ A یکی از گوشه‌های فضای جواب یک مسأله برنامه‌ریزی خطی می‌باشد. حل متناظر با این نقطه، یک حل منحط است. بخش هاشور خورده، نشانگر فضای جواب می‌باشد. $S_{۲}$ و $S_{۳}$ متغیرهای خفیف متناظر با محدودیت‌های رسم شده هستند. اگر در جدول سیمپلکس، به‌ازای حل نقطه A، متغیر $S_{۲}$ برای خروج از پایه انتخاب شود و نیز اگر گوشه بهینه، گوشه‌ای به غیر از A باشد، مرحله بعدی جدول چگونه خواهد شد؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)



۱) یک حل منحط (Degenerat) خواهد بود.

۲) یک حل غیرمنحط (non – degenerate) خواهد بود.

۳) $S_{۳}$ یک متغیر غیراساسی است.

۴) $S_{۳}$ یک متغیر اساسی با مقدار مثبت است.

۲۴ـ در حل مسأله صفر و یک زیر، کدام یک از متغیرها را برای انشعاب بایستی انتخاب کرد؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع و گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۱)

$$\begin{aligned} \text{Max}\, z &= -8x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 - 5x_5 \\ \text{s.t}\quad & -3x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 \geq -2 \\ & -5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 \geq -4 \\ & x_j \in \{0,1\};\ j = 1 \text{ تا } 5 \end{aligned}$$

۱) x_1

۲) x_2

۳) x_3

۴) x_5

۲۵ـ در یک مسأله LP با تابع هدف Max جدول بهینه به صورت زیر است:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	۱	۰	۰	۰	۲	۱۰
x_1	۰	۱	۰	۲	۱	۲
x_2	۰	۰	۱	۳	۲	۰

در این صورت این مسأله : (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) دارای بی‌شمار نقطه گوشه بهینه است.

۲) دارای تنها یک گوشه بهینه منحصر به فرد است.

۳) دارای یک نقطه گوشه بهینه و بی‌شمار نقطه غیرگوشه بهینه است.

۴) دارای چند گوشه متفاوت و بی‌شمار نقطه غیرگوشه بهینه است.

۲۶ـ در مسأله روبرو:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ -1 \leq x_2 \leq 4 \end{cases}$$

جوابی که در آن $x_1 = 4$ و $x_2 = -1$ و $x_3 = 2$ و $x_4 = 10$ باشد یک جواب: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) پایه‌ای موجه است.

۲) غیرپایه‌ای غیرموجه است.

۳) غیرپایه‌ای موجه است.

۴) پایه‌ای غیرموجه است.

۲۷ـ چنانچه فضای موجه یک مسأله برنامه ریزی خطی نامحدود باشد در این صورت: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) مسأله جواب بهینه ندارد.

۲) مسأله اصلاً جواب قابل قبول ندارد.

۳) لزوماً جواب‌های مسأله نیز نامحدود هستند.

۴) ممکن است جواب بهینه نیز نامحدود باشد.

۲۸ـ مسأله برنامه ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min}\quad & c'x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

چنانچه در یک مرحله از تکرار سیمپلکس در موقع انتخاب عنصر خارج شونده از تقسیم سمت راست بر ستون کاندید شده (ستون لولا) مقدار مینیمم در بیشتر از یک مورد اتفاق بیافتد در این صورت: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) مسأله جواب ندارد.

۲) حل در مرحلهٔ بعد حتماً بهینه است.

۳) فضای جواب موجه لزوماً نامحدود می‌گردد.

۴) حل در مرحله بعد منحط (Degenerate) است.

۲۹ـ مدل برنامه ریزی خطی را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max}\, z &= 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ \text{S.t}\quad & \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{aligned}$$

جدول زیر حل بهینهٔ نهایی مسأله برنامه ریزی خطی را نشان می‌دهد.

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	r_1	RHS
z		۰	۰	α	$\frac{29}{5}$	$0/4+M$	
x_2		۰	۱	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$
x_1		۱	۰	۵	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	b

در این صورت مقدار b در سمت راست جدول بهینه برابر است با: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{9}{5}$

۲) $\frac{8}{5}$

۳) $\frac{11}{5}$

۴) $\frac{4}{5}$

۳۰ـ مسأله برنامه ریزی خطی روبرو را در نظر بگیرید:

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4$$
$$\text{s.t} \quad -x_1 - x_2 + x_4 = 1$$
$$x_2 - x_3 + x_4 = 3$$
$$x_i \geq 0$$

در این صورت: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) بردار $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$ تنها یک پایه قابل قبول است.

۲) بردار $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$ تنها یک حل قابل قبول بوده و بهینه نمی‌باشد.

۳) بردار $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$ حل اساسی قابل قبول و شرایط بهینه را احراز می‌نماید.

۴) بردار $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$ یک حل منحط (Degenerate) بوده و شرط بهینه را احراز می‌کند.

۳۱ـ مسأله برنامه ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\text{Max} z = -4x_1 - 14x_2$$
$$\text{s.t} \quad 2x_1 + 7x_2 \leq 21$$
$$7x_1 + 2x_2 \leq 21$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

حل بهینهٔ مسأله برنامه ریزی خطی به شکل زیر است:

	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
x_2	$\frac{2}{7}$	۱	$\frac{1}{7}$	۰	۳
S_2	$\frac{45}{7}$	۰	$-\frac{2}{7}$	۱	۱۵
z	۰	۰	۲	۰	۴۲

حال چنانچه متغیر S_2 از پایه خارج شود و متغیر x_1 به جای آن وارد گردد: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) حل جدید نیز بهینه است.
۲) حل جدید غیرممکن است.
۳) حل جدید یک حل منحط بوده و غیربهینه است.
۴) حل جدید یک حل قابل قبول اساسی بوده ولی بهینه نمی‌باشد.

۳۲ـ مقدار بهینه تابع هدف مسأله زیر کدام مقدار است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۲)

$$\text{Min} z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 - 6x_6$$
$$\text{s.t} \quad 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 10x_6 \geq 100$$
$$0 \leq x_j \leq 6 \quad j = 1, 2, \ldots, 6$$

۱) ۴۸-
۲) ϕ
۳) ۵۴/۸-
۴) ۳۲

۳۳ـ فرض کنید وارون ماتریس پایه در یک تکرار روش سیمپلکس، ماتریس یکه باشد. حال اگر بردار ستونی متغیر وارد شونده به پایه $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ بوده و این متغیر به جای دومین متغیر موجود در پایه وارد شود، وارون ماتریس پایه در تکرار جدید برابر است با:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی واجتماعی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

۲) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

۴) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

۳۴ـ جدول بهینه یک مسأله LP در زیر نشان داده شده است. در این صورت این مسأله دارای:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی واجتماعی ـ سراسری ۸۲)

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
Z	۱	۰	۰	۰	۲	۲
x_1	۰	۱	۰	۱−	۱	۲
x_2	۰	۰	۱	۲−	۳	۳

۱) یک نقطه گوشه بهینه و یک نقطه غیرگوشه بهینه است.

۲) یک نقطه گوشه بهینه و بی‌شمار نقطه غیرگوشه بهینه است.

۳) نقاط گوشه بهینه چندگانه و بی‌شمار نقاط غیرگوشه بهینه است.

۴) تنها یک گوشه بهینه منحصر به فرد دارد، بدون آنکه نقطه غیرگوشه‌ای بهینه باشد.

۳۵ـ استفاده از روش تک متغیر مصنوعی (Single Artificial variable Technique) برای هنگامی است که:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۲)

۱) تمام محدودیت‌های موجود در مسأله اصلی به شکل $\geq$ باشد.

۲) نخواهیم از روشهای M بزرگ و دو فازی استفاده کنیم.

۳) با استفاده از روش M بزرگ یا دو فازی به یک جواب پایه‌ای موجه نرسیده باشیم.

۴) با استفاده از تنها یک متغیر مصنوعی بخواهیم یک جواب پایه‌ای موجه برای مسأله اصلی به دست آوریم.

۳۶ـ دو مسأله زیر را در نظر بگیرید که در آنها α و β اعداد مثبت هستند.

(۱)
$$\begin{aligned} \text{Max } W &= \alpha cx \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

(۲)
$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= cx \\ Ax &= \beta b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

اگر Z^* و W^* مقادیر بهینه تابع هدف دو مسأله باشند، رابطه این مقادیر عبارت است از:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۲)

۱) $Z^* = W^*$

۲) $W^* = \alpha Z^*$

۳) $W^* = \alpha\beta Z^*$

۴) $W^* = \dfrac{\alpha}{\beta} Z^*$

۳۷ـ اگر مسأله $\underset{s.t}{\text{Min}}\ z = cx$, $Ax \leq b$, $x \geq 0$ را داشته باشیم: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۲)

۱) اگر $Ad \leq 0$ و $d \geq 0$ جواب داشته باشد، ناحیه شدنی بی‌کران است.

۲) اگر $Ad = 0$ و $d \geq 0$ جواب مخالف صفر داشته باشد، ناحیه شدنی بی‌کران است.

۳) اگر ناحیه شدنی بی‌کران باشد، مسأله دارای یک شعاع بهینه خواهد بود.

۴) شرط کافی برای بی‌کران بودن مسأله این است که یک جهت دور شونده مانند d جواب داشته باشد به طوری که داشته باشیم $cd < 0$.

۳۸ـ کدام عبارت صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۲)

۱) هر مجموعه محدب غیر تهی حداقل یک نقطه رأسی دارد.

۲) درجه تبهگنی در یک مجموعه محدب n بعدی حداقل n است.

۳) در یک مجموعه محدب n بعدی حداکثر n جهت دور شونده رأسی وجود دارد.

۴) اگر $\bar{x}$ یک نقطهٔ رأسی یک چند وجهی محدب در E^n باشد، حداقل $n-m$ یال از آن می‌گذرد.

۳۹ـ مسأله $\underset{s.t}{\text{Min}}\ z = cx$, $Ax \geq b$, $x \geq 0$ را در نظر بگیرید، در جواب بهینه مسأله: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی واجتماعی ـ سراسری ۸۲)

۱) اگر فقط C_j کاهش پیدا کند، x_j نیز کاهش پیدا خواهد کرد.

۲) اگر b_j کاهش پیدا کند، مقدار بهینه تابع هدف افزایش پیدا خواهد کرد.

۳) اگر a_{ij} افزایش پیدا کند، مقدار بهینه تابع هدف افزایش پیدا نخواهد کرد.

۴) اگر C_j کاهش پیدا کند و a_{ij} افزایش پیدا کند، x_j افزایش پیدا نخواهد کرد.

۴۰ـ مدل برنامه‌ریزی خطی روبرو مفروض است:

$$\text{Max}\, z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$
$$\text{s.t.}\quad 8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 48$$
$$8x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 40$$
$$4x_1 + 3x_2 + x_3 \le 16$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

اگر بدانیم که در حل بهینه متغیرهای x_1 و x_3 پایه بوده و متغیر x_2 غیرپایه است، در آن صورت مقدار بهینه z کدام است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع و گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۲)

۱) $z = 380$
۲) $z = 280$
۳) $z = 400$
۴) $z = 360$

۴۱ـ مسائل I و II را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\text{(I)}\quad \underset{\text{s.t}}{\text{Max}}\, z = cx \qquad Ax = b \qquad x \ge 0 \quad ; \quad \text{(II)}\quad \underset{\text{s.t}}{\text{Min}}\, w = \alpha cx \qquad Ax = \beta b \qquad x \ge 0$$

چه رابطه‌ای بین w^* و z^* وجود دارد؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع و گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۲)

۱) $w^* = z^*$
۲) $w^* = \dfrac{\beta}{\alpha} z^*$
۳) $z^* = \dfrac{\alpha}{\beta} w^*$
۴) $z^* = \dfrac{w^*}{\alpha\beta}$

۴۲ـ برنامه‌ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\underset{\text{s.t.}}{\text{Min}}\quad x_0 = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 3$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

نقاط زیر همگی به شکل (x_1, x_2, x_3) می‌باشند. کدام یک از این نقاط می‌توانند یک حل اساسی قابل قبول غیرمنحط (non-degenerate) باشند؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) $(1, 1, 0)$
۲) $(0, 1, 1)$
۳) $(0, 0, 1/5)$
۴) $(1, 0, 1)$

۴۳ـ دو مسأله برنامه‌ریزی ریاضی ۱و۲ را در نظر بگیرید:

$$(1): Z = \underset{\text{s.t.}}{\text{Min}}\, c_1x_1 + \dots + c_nx_n \qquad \{g_i(x_1, \dots, x_n) \ge b_i \qquad i = 1, \dots, m\}$$

$$(2): Z' = \underset{\text{s.t.}}{\text{Min}}\, c'_1x_1 + \dots + c'_nx_n \qquad \{g_i(x_1, \dots, x_n) \ge b_i \qquad i = 1, \dots, m\}$$

این دو مسأله دارای محدودیت‌هایی غیرخطی و یکسان می‌باشند. اگر $c'_j > c_j \ge 0$ باشد و $x^\circ = \begin{cases} x_1^\circ \\ \vdots \\ x_n^\circ \end{cases}$ جواب بهینه مسأله ۱ و $x^{\circ\circ} = \begin{cases} x_1^{\circ\circ} \\ \vdots \\ x_n^{\circ\circ} \end{cases}$ جواب بهینه مسأله ۲ باشد، آنگاه :

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) $c'_1x_1^\circ + \dots + c'_nx_n^\circ \ge c'_1x_1^{\circ\circ} + \dots + c'_nx_n^{\circ\circ}$
۲) $c'_1x_1^{\circ\circ} + \dots + c'_nx_n^{\circ\circ} \le c'_1x_1^\circ + \dots + c'_nx_n^\circ$
۳) $c'_1x_1^{\circ\circ} + \dots + c'_nx_n^{\circ\circ} \ge c'_1x_1^\circ + \dots + c'_nx_n^\circ$
۴) هیچ‌کدام

۴۴ـ جدول زیر مربوط به مرحله‌ای از حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به فرم ماکزیمم کردن وقتی که متغیرها کراندار هستند، است. اگر داشته باشیم $0 \le x_1 \le 15$ ، $0 \le x_2 \le 15$ ، $0 \le x_3 \le 15$ ، $5 \le x_4 \le 10$ ، $0 \le x_5 \le 1$ و $0 \le x_6 \le 8$ آنگاه مقدار تابع هدف در مرحله بعد چقدر خواهد بود؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۳)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z	۰	۰	۰	۰	−۲	−۱	۰
x_1	۱	۰	۰	۰	۴	۱	۱۵
x_2	۰	۱	۰	۰	۶	۲	۸
x_3	۰	۰	۱	۰	−۷	−۲	۴
x_4	۰	۰	۰	۱	−۱	−۱	۲

۱) ۰
۲) ۲
۳) $\dfrac{8}{3}$
۴) ۴

۴۵ـ اگر جواب بهینه یک مسأله ماکزیمم کردن با ضرایب c' برابر x' و جواب بهینه همان مسأله با ضرایب c'' برابر x'' باشد خواهیم داشت:

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) $(c'-c'')(x''-x') \geq 0$
۲) $(c'-c'')(x''-x') \leq 0$
۳) $(c'-c'')(x'-x'') \geq 0$
۴) $(c'-c'')(x''-x') \leq 0$

۴۶ـ دستگاه معادلات خطی به فرم $AX=b$ را در نظر بگیرید (X بردار متغیر، A ماتریس ضرایب و b بردار سمت راست می‌باشد) در این دستگاه فرض کنید داشته باشیم: $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۶ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ و ماتریس افزوده $[A\vdots b]$ عبارت است از : $[A\vdots B]=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۱۰ \\ ۱ & ۶ & ۱۲ \\ ۳ & ۵ & ۸ \end{bmatrix}$ در خصوص جواب‌های این دستگاه چه اظهارنظری می‌توان نمود؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) دارای سه جواب است.
۲) دارای جواب یگانه است.
۳) دارای جواب نمی‌باشد.
۴) دارای بی‌نهایت جواب است.

۴۷ـ محدودیت‌های نامساوی مسأله برنامه‌ریزی خطی P_1 را با اضافه کردن متغیرهای کمکی کمبود و یا مازاد، به محدودیت‌های مساوی تبدیل کرده و مسأله حاصل را P_2 می‌نامیم. فضای شدنی مسأله P_1 را با مجموعه نقاط S_1 و فضای شدنی P_2 را با مجموعه نقاط S_2 نمایش می‌دهیم. در ارتباط با تعداد نقاط گوشه مجموعه‌های S_1 و S_2 کدام گزینه درست است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) تعداد نقاط گوشه شدنی در S_1 و S_2 ارتباطی به یکدیگر ندارند.
۲) تعداد نقاط گوشه‌شدنی در S_2 برابر با تعداد نقاط گوشه شدنی در S_1 است.
۳) تعداد نقاط گوشه‌شدنی در S_2 بیشتر از تعداد نقاط گوشه شدنی در S_1 است.
۴) تعداد نقاط گوشه‌شدنی در S_2 ممکن است بیشتر از تعداد نقاط گوشه شدنی در S_1 باشد.

۴۸ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را که در آن ماتریس A دارای ابعاد $m\times n$ $(m<n)$ بوده و از ستون‌های a_1 الی a_n تشکیل شده است را مسأله p می‌نامیم:

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = c^T x \\ &\text{s.t.} \\ &\quad Ax \leq b \quad , x \geq 0 \end{aligned}$$

اگر در ماتریس A ستون a_j مضربی از ستون a_k باشد، آنگاه در ارتباط با جواب بهینه مسأله p کدام گزینه درست است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) جواب بهینه چندگانه خواهیم داشت.
۲) حاصل‌ضرب x_j در x_k صفر خواهد بود.
۳) مقادیر x_j و x_k یکسان خواهند بود.
۴) مقدار x_j مضربی از مقدار x_k خواهد بود.

۴۹ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل به طریق سیمپلکس حل شده است:

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = ۴x_1 - ۲x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \\ &\text{s.t.} \\ &\quad x_1 + \alpha x_3 + \beta x_4 = b_1 \\ &\quad x_2 + \gamma x_3 + \eta x_4 = b_2 \\ &\quad x_i \geq 0 \quad i = ۱, \dots, ۴ \end{aligned}$$

از تابلوی نهایی مسأله فوق اطلاعات روبرو در دست است: $z_2 - c_2 = ۴,\ z_1 - c_1 = ۵$ **و ماتریس مبنا** $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \eta \end{vmatrix}$

در ارتباط با z^* مقدار بهینه تابع هدف، کدام گزینه درست است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) $z^* = ۵b_1 + ۴b_2$
۲) $z^* = ۴b_1 + ۵b_2$
۳) $z^* = ۹b_1 + ۲b_2$
۴) $z^* = c_3b_1 + c_4b_2$

۵۰ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر مفروض است : $\{\text{Min } z = cx \mid Ax \leq b;\ x \geq 0\}$ که در آن $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ و $c = (۰, ۰, \dots, ۰, \alpha)$ و $b = (۱, ۱, \dots, ۱)^T$ و A یک ماتریس $n\times n$ با عناصر $A = (a_{ij})$ به شرح مقابل است؟

$$a_{ij} = \begin{cases} ۱ & i = j \\ -۲ & i = j+۱ \\ ۰ & \end{cases}$$

در مورد یک جواب داده شده به شکل $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ کدام گزینه صحیح است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) با اطلاعات داده شده قابل محاسبه نیست.
۲) $x = (۳, ۳, \dots, ۳)^T$ یک حل قابل قبول است.
۳) $x = (۱, ۳, ۳, \dots, ۳)^T$ یک حل اساسی و قابل قبول است.
۴) $x = (۱, ۲, ۲, \dots, ۲)^T$ یک حل اساسی و قابل قبول است.

۵۱ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر مفروض است: $\{\text{Min } z = cx \mid Ax \geq b;\ x \geq 0\}$ فرض کنید که x^* یک جواب بهینه این مسأله باشد. فرض کنید که $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ به طوری که $A_1x^* = b_1, A_2x^* > b_2$ در آن صورت x^* جواب بهینه کدام مسأله است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) $\{\text{Min } cx \mid A_1x_1 \leq b_1;\ x \geq 0\}$

۲) $\{\text{Min } cx \mid A_2x_2 = b_2;\ x \geq 0\}$

۳) $\{\text{Min } cx \mid A_2x_2 \geq b_2;\ x \geq 0\}$

۴) $\{\text{Min } cx \mid A_1x_1 \geq b_1;\ x \geq 0\}$

۵۲ـ یک مدل برنامه‌ریزی خطی به صورت: $\{\text{Min } z = cx \mid Ax = b;\ x \geq 0\}$ مفروض است که فضای جواب شدنی S به شکل: $S = \{x : Ax = b; x \geq 0\}$ موجود است. کدام گزینه صحیح است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) هر جواب شدنی اساسی است.

۲) هر جواب اساسی شدنی، جواب بهینه است.

۳) هر جواب شدنی متناظر یک رأس S است.

۴) هر جواب اساسی شدنی متناظر یک رأس S است.

۵۳ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی روبرو مفروض است:

$$\begin{aligned}
\text{Min } Z = -2x_1 + 13x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 + 5x_6 + 10x_7 \\
\text{s.t.} \\
x_1 - x_2 + 4x_4 - x_5 + x_6 - 4x_7 = 5 \\
x_1 + 7x_4 - 2x_5 + 3x_6 - 3x_7 \geq -1 \\
5x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 - 2x_7 \leq 5 \\
3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - x_7 = 2 \\
x_j \geq 0 \qquad j = 1 \text{ تا } 7
\end{aligned}$$

در مورد نقطه $(0,0,1,0,1,0,6)$ کدام گزینه صحیح است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) حتی یک نقطه هم قابل قبول نیست.

۲) فقط یک حل قابل قبول است و بهینه نیست.

۳) بهینه است و حل بهینه مزدوج آن $(3,0,0,2)$ است.

۴) بهینه است و حل بهینه مزدوج آن $(3,0,0,-2)$ است.

■ مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\text{Min } Z = -2x_1 + x_2 - x_3 \\
\text{s.t} \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\
-x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

اگر جدول نهایی حل به روش سیمپلکس به صورت زیر باشد،

متغیرهای اساسی	B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2
x_1	۶	۱	a	c	۱	۰
s_2	۱۰	۰	b	d	۱	۱
	-۱۲	۰	-۳	f	h	۰

۵۴ـ مقدار $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ برابر است با:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

۲) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

۴) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

۵۵ـ مقدار $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ برابر است با:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

۲) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

۴) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

۵۶ـ مقدار f، برابر است با:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱

۲) -۳

۳) -۲

۴) -۱

۵۷ـ مقدار h برابر است با: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) ۱

۵۸ـ اگر مقدار سمت راست مسأله از $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ به $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ تغییر یابد، مقدار سمت راست در جدول نهایی عبارت است از:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ۳) $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

۵۹ـ اگر $c_2 = 1$ به مقدار $c_2 = -3$ تغییر یابد، مقدار $z_2 - c_2$ عبارت است از: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱- ۲) ۱+ ۳) ۲+ ۴) ۳+

۶۰ـ دو مسأله برنامه‌ریزی ریاضی (۱) و (۲) را در نظر بگیرید. در صورتی که هر دو مسأله دارای جواب قابل قبول باشند، در این صورت، خواهیم داشت:

$$Z = \text{Min} f(x_1,\dots,x_n)$$
$$\text{s.t.}\ g_i(x_1,\dots,x_n) \ge b_i \qquad i = 1,\dots,m \qquad (1)$$

$$Z' = \text{Min} f(x_1,\dots,x_n) + dx_{n+1}$$
$$\text{s.t.}\ g_i(x_1,\dots,x_n) + K_i x_{n+1} \ge b_i \qquad i = 1,\dots,m \qquad (2)$$

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۳)

۱) $Z' \le Z$ ۲) $Z' < Z$ ۳) $Z' > Z$ ۴) مشخص نیست.

۶۱ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۳)

$$\text{Max} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ge 0 & , \quad i = 1,2,3,\dots,m \\ x_j \ge 0 & , \quad j = 1,\dots,n \end{cases}$$

۱) این مسأله حتماً امکان‌پذیر است.

۲) این مسأله ممکن است امکان‌پذیر باشد.

۳) اگر یکی از مقادیر سمت راست محدودیت‌ها، مثلاً b_K یک واحد افزایش یابد، ناحیه امکان‌پذیر تغییری نخواهد کرد.

۴) اگر یکی از مقادیر سمت راست محدودیت‌ها، مثلاً b_K یک واحد افزایش یابد، ناحیه امکان‌پذیر حتماً بزرگتر می‌شود.

۶۲ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی به شکل مقابل را در نظر بگیرید:

$$\text{Min}\ x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{s.t} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_i \quad (i = 1,2,\dots,m)$$
$$x_j \ge 0 \qquad (j = 1,\dots,n)$$

در یک مرحله از جدول سیمپلکس دو متغیر اساسی با مقدار صفر در پایه ظاهر شده‌اند. به ازای حل این مرحله در جدول می‌توان گفت که: (رتبه ماتریس A را برابر با n فرض کنید) (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۳)

۱) تعداد m محدودیت به شکل تساوی ارضاء شده‌اند.

۲) تعداد $m-2$ محدودیت به شکل تساوی ارضاء شده‌اند.

۳) تعداد n محدودیت به شکل تساوی ارضاء شده‌اند.

۴) تعداد $n+2$ محدودیت به شکل تساوی ارضاء شده‌اند.

۶۳ـ معکوس پایهٔ بهینهٔ یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به صورت $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ است. اگر جواب بهینهٔ دوگان به صورت $w_1 = w_2 = w_3 = 1$ باشد، ضرایب متغیرهای پایه در صورت مسأله چیست؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۳)

۱) $C_{B_1} = 1$ ، $C_{B_2} = 1$ ، $C_{B_3} = 0$

۲) $C_{B_1} = 0$ ، $C_{B_2} = 0$ ، $C_{B_3} = 1$

۳) $C_{B_1} = 1$ ، $C_{B_2} = 1$ ، $C_{B_3} = 0$

۴) $C_{B_1} = 1$ ، $C_{B_2} = 0$ ، $C_{B_3} = 1$

۶۴ـ کدام یک از عبارتهای زیر صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۳)

۱) افزایش بعد فقط با یک متغیر اصلی، ممکن است باعث بی‌کرانی ناحیه شدنی شود.

۲) افزایش بعد با متغیرهای مصنوعی ممکن است باعث بی‌کرانی ناحیه شدنی شود ولی با متغیرهای کمکی نه.

۳) افزایش بعد با متغیرهای مصنوعی و کمکی باعث گسترش ناحیه شدنی می‌شود پس در هر صورت ممکن است باعث بی‌کرانی شود.

۴) افزایش بعد در هر صورت از موارد فوق ممکن است باعث بهبود مقدار بهینه تابع هدف شود.

۶۵ـ در یک مسأله LP با سه متغیر تصمیم‌گیری و دو محدودیت با تابع هدف Max، در جواب بهینه x_3, x_2 در پایه می‌باشند. چنانچه مدیریت بخواهد از محصول x_1 هم تولید نماید، آنگاه: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) تأثیری بر x_3, x_2 بهینه ندارد.

۲) تولید x_1 حتماً باعث کاهش x_3, x_2 بهینه می‌گردد.

۳) حتماً باید x_1 وارد پایه گردد و جانشین x_2 یا x_3 گردد.

۴) تولید x_1 ممکن است باعث افزایش x_3, x_2 بهینه گردد.

۶۶ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل مفروض است:

$$\text{Max } Z = -x_1 + 4x_2 = c_1x_1 + c_2x_2$$

S.t.

$$x_1 + x_2 \le 3 = b_1$$
$$x_1 + 3x_2 \le 6 = b_2$$
$$x_1 \le 2 = b_3$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

با اضافه کردن متغیرهای کمکی x_6, x_5, x_4 به محدودیت‌های ۱ الی ۳ مسأله فوق را حل کرده و در جدول نهایی سیمپلکس به ماتریس مبنای B برابر: $[a_3, a_2, a_5]$ رسیده‌ایم که برگردان آن B^{-1} به قرار زیر می‌باشد:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در کدام محدوده برای پارامترهای b_3, b_2, b_1 ماتریس مبنا در جدول نهایی تغییر نخواهد کرد؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) $b_1 = \frac{1}{3}, b_2 = b_3 \ge 0$

۲) $3b_1 \ge b_2 \ge 0, b_3 \ge 0$

۳) $b_1 \ge 3, b_2 \ge 6, b_3 \ge 2$

۴) $b_1 \ge \frac{1}{3}b_2, b_2 \le 8, b_3 \le 4$

۶۷ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } x_0 = 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$$

s.t.

$$2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 \le 8$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 \le 10$$
$$x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 \le 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

در کدام‌یک از مجموعه جواب‌های زیر که به صورت $x(\theta)$ تعریف شده‌اند، با $\theta \to \infty$ مقدار x_0 به سمت بی‌نهایت میل خواهد نمود: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) $(\theta, 10, 0, \theta)$

۲) $(\theta, 0, 8+\theta, 0)$

۳) $(10+2\theta, 0, \theta, 0)$

۴) $(0, 10+3\theta, 0, \theta)$

۶۸ـ مجموعه‌ای از m معادله خطی با n متغیر را در نظر بگیرید. این مجموعه را به صورت مقابل نشان می‌دهیم: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j = b_i \quad (i = 1, 2, ..., m)$

فرض کنید که این مجموعه معادلات با همدیگر ناسازگار باشند. مسأله حداقل خطا مقادیری برای $x_1, x_2, ..., x_n$ تعیین می‌کند تا بزرگ‌ترین اختلاف مابین سمت راست و چپ معادلات حداقل گردند. یک متغیر به نام x_0 در نظر بگیرید. $(x_0 \ge 0)$. برای اینکه برای هر معادله، اختلاف میان دو طرف معادله کمتر از x_0 باشد می‌توان مسأله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله نمود. کدام‌یک از مدل‌های زیر برای این منظور مناسب می‌باشند؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) $\text{Min } x_0 \quad st: \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j = x_0 \quad (i = 1, ..., m)$

۲) $\text{Min } x_0 \quad st: \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j \le x_0 \quad (i = 1, ..., m)$

۳) $\text{Min } x_0 \quad st: x_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j \ge b_i \quad (i = 1, ..., m)$

$x_0 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j \ge -b_i \quad (i = 1, ..., m)$

۴) $\text{Min } x_0 \quad st: x_0 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j \ge b_i \quad (i = 1, ..., m)$

$x_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j \ge -b_i \quad (i = 1, ..., m)$

۶۹ـ فرض کنید جدول بهینه یک مسأله ماکزیمم کردن به صورت زیر است. به ازای $x_1 = ۲۴$ جواب بهینه مسأله چیست؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	۰	۰	۰	۰	۲	۵۳
x_3	۰	۰	۱	−۵	−۱	۱۷
x_1	۱	۰	۰	−۳	−۱	۱۸
x_2	۰	۱	۰	۰	−۱	۱۱

۱) $x_1 = ۲۴, x_2 = ۱۱, x_3 = ۲۷, x_4 = ۲, x_5 = ۰$

۲) $x_1 = ۲۴, x_2 = ۱۷, x_3 = ۲۳, x_4 = ۶, x_5 = ۰$

۳) $x_1 = ۲۴, x_2 = ۱۱, x_3 = ۱۷, x_4 = ۰, x_5 = ۰$

۴) $x_1 = ۲۴, x_2 = ۱۷, x_3 = ۲۳, x_4 = ۰, x_5 = ۰$

■ **الگوریتم سیمپلکس را برای حل برنامه‌ریزی خطی مسأله p به شرح روبرو به کار گرفته‌ایم:**

$$\begin{aligned}&\text{Max}\ z = \tilde{C}^T\tilde{x}\\ &\text{s.t}\\ &A\tilde{x} = \tilde{b} \qquad A = m\times n\\ &\tilde{x} \geq ۰ \qquad \tilde{x} \in E^n\end{aligned}$$

۷۰ـ در مرحله i ام (مرحله غیر نهایی) از الگوریتم کدام گزینه صادق است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) الگوریتم در مراحل کمتری به جواب بهینه می‌رسد.

۲) مقدار تابع هدف حداکثر افزایش خود را در مرحله i خواهد داشت.

۳) فقط جواب مسأله در مرحله $(i+1)$ام شدنی (feasible) باقی می‌ماند.

۴) با انتخاب بردار خروجی براساس منفی‌ترین $(z_j - c_j)$. لزوماً مقدار تابع هدف بیشترین افزایش را در مرحله i نخواهد داشت.

■ **برنامه‌ریزی خطی زیر را برای ۳ سؤال زیر در نظر بگیرید :**

$$\begin{aligned}&\text{Max}\ \ z = ۳x_1 + ۲x_2 - x_3\\ &\text{s.t.}\\ &۲x_1 + x_2 + x_3 \leq ۸\\ &x_1 + ۳x_2 - x_3 \leq ۱۵\\ &x_1, x_2, x_3 \geq ۰\end{aligned}$$

		z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	
z	۰	۱	۰	۰	۲/۲	۱/۴	۰/۲	۱۴/۲
x_1	۱	۰	۱	۰	۰/۸	۰/۶	−۰/۲	۱/۸
x_2	۲	۰	۰	۱	−۰/۶	−۰/۲	۰/۴	۴/۴

در ضمن حل با روش سیمپلکس به جدول بالا رسیده‌ایم که S_2, S_1 متغیرهای لنگی (Slack variables) هستند. معادله شماره صفر مربوط به تابع هدف است.

۷۱ـ اگر X_1 از پایه خارج شود به چند جواب اساسی (پایه)مجاور (اعم از موجه (Feasible) یا غیر موجه) می‌توانیم برسیم؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) چهار　　۲) سه　　۳) دو　　۴) یک

۷۲ـ چنانچه X_1 از پایه خارج و X_3 وارد شود جواب اساسی (پایه) حاصل:

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) موجه نیست.　　۲) نامتناهی است.

۳) موجه است و تابع هدف بهتر می‌شود.　　۴) موجه است ولی تابع هدف بدتر می‌شود.

۷۳ـ با تغییر کدام پارامتر محدودیت دوم مسأله، یعنی $X_1 + ۳X_2 - X_3 \leq ۱۵$ مسأله می‌تواند دارای جواب‌های بهینه چندگانه شود. ضمن این که مقدار بهینه تابع هدف فعلی تغییر نکند؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) ضریب X_1　　۲) ضریب X_2　　۳) ضریب X_3　　۴) ضریب سمت راست

۷۴ـ برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&\text{Max}\ \ z = x_1 + ۳x_2 + ۲x_3\\ &\text{s.t.}\\ &x_1 + x_2 + x_3 \leq ۳\\ &۵x_1 + ۳x_2 + +x_3 \leq ۷\\ &x_1, x_2, x_3 \geq ۰\end{aligned}$$

متغیر اساسی	شماره معادله	z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	سمت راست
z	۰	۱	۳	۰	۰	۱/۵	۰/۵	۸
x_3	۱	۰	−۱	۰	۱	۱/۵	−۰/۵	۱
x_2	۲	۰	۲	۱	۰	−۰/۵	۰/۵	۲

این مسأله را با روش سیمپلکس حل کرده‌ایم. آخرین جدول آن (مربوط به جواب بهینه) به شرح جدول فوق است که S_2،S_1 متغیرهای لنگی (Slack variables) هستند. اگر x_1 به عنوان متغیر اساسی ورودی انتخاب شود کدام یک از مطالب زیر صحیح است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) اگر X_3, X_1 متغیرهای اساسی تکرار بعدی باشند، جواب اساسی به دست آمده موجه است ولی بهینه نیست.

۲) اگر X_3, X_1 متغیرهای اساسی تکرار بعدی باشند، جواب اساسی به دست آمده بهینه است.

۳) اگر X_2, X_1 متغیرهای اساسی تکرار بعدی باشند، جواب اساسی به دست آمده موجه است ولی بهینه نیست.

۴) اگر X_2, X_1 متغیرهای اساسی تکرار بعدی باشند، جواب اساسی به دست آمده بهینه است.

۷۵ـ در یک جدول سیمپلکس با بردارهای پایه‌ای $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر چنانچه بردار دوم پایه B، یعنی بردار $\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}$ را برداریم و به جای آن $a_۴ = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$ را قرار دهیم، بردارهای $\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} = (a_۱, a_۲, a_۳)$

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۴)

۱) تشکیل یک پایه بهینه می‌دهند.
۲) یک پایه قابل قبول ولی غیر بهینه هستند.
۳) یک پایه قابل قبول هستند.
۴) تشکیل پایه نمی‌دهند.

۷۶ـ اگر جدول زیر مربوط به یکی از مراحل روش سیمپلکس برای مسأله ماکزیمم کردن باشد:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۴)

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	
z						
$x_۳$	۰	−۱	۱	−۲	−۱	
$x_۱$	۱	−۲	۰	−۱	۶	

۱) تابع هدف $\max z = -x_۱ + ۳x_۳ - ۴x_۵$ روی ناحیهٔ شدنی مسألهٔ مورد نظر نامتناهی است.
۲) تابع هدف $\max z = x_۱ + x_۵$ روی ناحیه شدنی مسألهٔ مورد نظر متناهی است.
۳) تابع هدف $\max z = -۴x_۱ + x_۲ + x_۴ + ۵x_۵$ روی ناحیهٔ شدنی مسأله مورد نظر نامتناهی است.
۴) هیچ کدام صحیح نیست.

مسأله برنامه‌ریزی خطی P به شرح روبرو مفروض است:

$$\text{Max } z = ۱۰x_۱ + ۵x_۲ - ۸x_۳$$
$$\text{s.t}$$
$$x \in S \equiv \begin{cases} x_۱ - ۲x_۲ + ۳x_۳ \le ۱۰ \\ ۲x_۱ - ۳x_۲ + ۴x_۳ \le ۲۰ \\ ۴x_۱ - ۹x_۲ + ۱۰x_۳ \le ۳۰ \\ x_۱ \ge ۲ \,,\, x_۲ \ge ۶ \,,\, x_۳ \ge ۴ \end{cases}$$

می‌دانیم فضای شدنی مسأله P غیرتهی است. در ارتباط با مسأله P به سؤالات ۸۸ تا ۹۰ مستقل از هم زیر پاسخ دهید.

۷۷ـ کدام گزینه در مورد نقاط شدنی (feasible points) مسأله P صادق است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۴)

۱) تعداد نقاط شدنی مسأله P بی‌نهایت است.
۲) حداکثر تعداد نقاط شدنی مسأله P برابر $\frac{۹!}{(۳!)(۶!)}$ می‌باشد.
۳) حداکثر تعداد نقاط شدنی مسأله P برابر $\frac{۶!}{(۳!)(۳!)}$ می‌باشد.
۴) حداکثر تعداد نقاط شدنی مسأله P برابر $\frac{۱۲!}{(۶!)(۶!)}$ می‌باشد.

۷۸ـ کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد ابعاد ماتریس مبنا (پایه) در حل مسأله P صادق است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۴)

۱) برای حل مسأله P باید از ماتریس مبنا با ابعاد (۶×۶) استفاده کرد.
۲) می‌شود مسأله P را با استفاده از ماتریس مبنا با ابعاد (۲×۲) حل کرد.
۳) می‌شود مسأله P را با استفاده از ماتریس مبنا با ابعاد (۳×۳) حل کرد.
۴) با ترکیب خطی محدودیت‌های مسأله P، می‌توان ابعاد ماتریس مبنا را کاهش داد.

۷۹ـ اگر بخواهیم مسأله P را با الگوریتم سیمپلکس حل کنیم، کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۴)

۱) مسأله P بهتر است از الگوریتم سیمپلکس دوگان حل شود.
۲) مسأله P را می‌توان فقط با استفاده از روش M بزرگ حل کرد.
۳) مسأله P را می‌توان فقط با استفاده از روش دو فازی حل کرد.
۴) مسأله P را می‌توان بدون استفاده از روش M بزرگ یا دو فازی حل کرد.

۸۰ـ مدل برنامه‌ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max } x_0 &= x_1 + 8x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t} \quad x_1 + 3x_2 &\le 18 \\ 2x_2 + x_3 &\le 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

در جدول بهینهٔ زیر مقادیر a و b چه باید باشند؟

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R.H.S
x_0	۰	۰	a	-1	$-\frac{5}{2}$	۳۸
x_1	۱	۰	$-\frac{3}{2}$	۱	$-\frac{3}{2}$	۶
x_2	۰	۱	$\frac{1}{2}$	۰	b	۴

S_1 و S_2 متغیرهای خفیف می‌باشند. (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۴)

۱) $a = -\frac{9}{2}, b = 1$
۲) $a = -1, b = \frac{3}{2}$
۳) $a = -\frac{11}{2}, b = \frac{1}{2}$
۴) $a = -\frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$

۸۱ـ در یک مسأله برنامه‌ریزی خطی، در یکی از مراحل سیمپلکس، حلّ اساسی قابل قبول بهینه می‌باشد ولی برخی از ضرایب تابع هدف در این جدول، هنوز نشان دهندهٔ رسیدن به حلّ بهینه نیستند. در کدام یک از حالات زیر، پدیدهٔ فوق ممکن است مشاهده گردد؟
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۴)

۱) حلّ منحط است.
۲) حلّ نامحدود است.
۳) مسأله نشدنی است.
۴) مسأله دارای بی‌نهایت جواب بهینه است.

۸۲ـ فرض کنید که X یک حل بهینه غیر منحط در سیمپلکس باشد. فرض کنید که یک متغیر غیراساسی با ضریب تابع هدف برابر با صفر در این جدول وجود داشته باشد. اگر تمام مقادیر ستون این متغیر غیراساسی در جدول، مقادیر منفی باشند، کدام یک از جملات زیر صحیح خواهند بود؟
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۴)

۱) مسأله دارای حل نامحدود می‌باشد.
۲) مسأله فقط دارای همان حل قبلی است و حل جدیدی ندارد.
۳) مسأله دارای یک حل بهینه دیگر غیر از حل بهینه موجود می‌باشد ولی مقدار تابع هدف به ازای حل جدید با تابع هدف قبلی برابر است.
۴) مسأله دارای یک حل بهینه دیگر غیر از حل بهینه موجود می‌باشد ولی مقدار تابع هدف به ازای حل جدید نامحدود خواهد بود.

۸۳ـ فرض کنید که یک حل اساسی قابل قبول منحط (Degenerate) در یکی از مراحل سیمپلکس داشته باشیم. متغیری برای ورود به پایه انتخاب شده است. اگر r امین متغیر اساسی دارای مقدار صفر باشد و r امین عنصر ستون متغیر کاندید شده برای ورود به پایه را با a نشان دهیم، شرط لازم برای آنکه حل اساسی قابل قبول بعدی منحط نباشد عبارت است از: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی واجتماعی ـ سراسری ۸۴)

۱) a غیرمنفی باشد.
۲) a منفی باشد.
۳) بدون توجه به علامت a، حل بعدی منحط خواهد بود.
۴) بدون توجه به علامت a، حل بعدی غیرمنحط خواهد بود.

۸۴ـ اگر در پایان فاز یک از روش دو فازی سیمپلکس برای حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به یک پایه تبهگن (Degenerate) مانند جدول زیر برسیم، به طوری که $x_a = 0$ (x_a متغیر مصنوعی است) و در سطری که x_a متغیر پایه است، هیچ یک از متغیرهای اصلی مسأله حضور نداشته باشند. برای به دست آوردن یک پایه مناسب برای آغاز دوم فاز چه می‌توان کرد؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۵)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_a	
w	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_2	۰	۱	۰	۱	۰	۲
x_a	۰	۰	۰	۰	۱	۰
x_1	۱	۰	۲	۱	۰	۰

۱) مسأله جواب موجه ندارد، زیرا یک متغیر مصنوعی در آخرین مرحله از فاز یک در پایه حضور دارد.
۲) با حفظ x_a در پایه، از آنجایی که مقدار صفر دارد، می‌توان به همان صورت جدول فوق با استفاده از آخرین پایه به دست آمده، فاز دوم را آغاز کرد.
۳) از آنجایی که با حذف متغیر مصنوعی x_a از مسأله، یک سطر صفر در جدول ایجاد می‌شود، به راحتی می‌توان x_a و سطر مربوط به آن را از مسأله حذف نموده و با پایه باقیمانده، فاز دوم را آغاز کرد.
۴) با حذف متغیر مصنوعی از پایه، یک سطر صفر در جدول ایجاد می‌شود که این نشان‌دهنده آن است که نمی‌توان با حذف سطر مربوطه فاز دوم را آغاز نمود، چون نیاز به حداقل ۳ سطر در جدول داریم.

۸۵ـ در ستون لولای روش سیمپلکس برای متغیرهای کراندار: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) تنها ضرایب منفی در محاسبات منظور می‌شوند.
۲) همه ضرایب غیرصفر در محاسبات منظور می‌شوند.
۳) ضرایب مثبت در محاسبات منظور نمی‌شوند.
۴) تنها ضرایب مثبت در محاسبات منظور می‌شوند.

۸۶ـ مسأله برنامه‌ریزی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\underset{s.t}{\text{Min}} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = b \\ x_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

با افزایش تنها a_i در مسأله بالا، در جواب بهینه: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) x_i افزایش نمی‌یابد.
۲) x_i افزایش می‌یابد.
۳) x_i کاهش می‌یابد.
۴) جهت تغییرات x_i مشخص نیست.

۸۷ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی $\{\text{Min } z = cx : Ax = b, x \geq 0\}$ که در آن A یک ماتریس 3×5 است را در نظر بگیرید. a_j ستون jام ماتریس A است. ماتریس $B = (a_1, a_2, a_3)$ یک پایه برای این مسأله می‌باشد و وارون آن $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ است. اگر $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ و $c = (1, 2, 1, 3, 5)$ باشند، مقدار z برای جواب پایه مربوط به پایه B کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱۲
۲) ۱۳
۳) ۱۵
۴) ۲۰

۸۸ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی $\{\text{Min } z = cx : Ax = b, x \geq 0\}$ که در آن A یک ماتریس 3×5 است را در نظر بگیرید. a_j ستون jام ماتریس A است. ماتریس $B = (a_1, a_2, a_3)$ یک پایه برای این مسأله می‌باشد و وارون آن $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ است. اگر B یک پایه شدنی (feasible basic)، $a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, c = (1 \quad 1 \quad 1 \quad c_4 \quad c_5)$ باشند. تمام مقدارهای c_4, c_5 که برای آنها پایه B بهینه است کدام‌اند؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) $c_5 \geq 3, c_4 \geq 2$
۲) $c_5 \geq 4, c_4 \geq 3$
۳) $c_5 \geq 3, c_4 \geq -1$
۴) $c_5 \geq 1, c_4 \geq 2$

۸۹ـ وقتی متغیر x_1 آزاد است، می‌توان آن را با دو متغیر $u_1 - v_1$ جابه‌جا کرد به نحوی که $u_1 \geq 0$، $v_1 \geq 0$، در این صورت: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) u_1 و v_1 هر دو نمی‌توانند صفر شوند.
۲) u_1 و v_1 هرگز هر دو در پایه در سطح غیر صفر ظاهر نخواهند شد.
۳) نمی‌توان تضمین کرد که u_1 و v_1 هر دو در پایه ظاهر نشوند.
۴) u_1 و v_1 می‌توانند همانند هر متغیر دیگری در پایه حضور داشته باشند.

۹۰ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر مفروض است:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= -5x_1 + 5x_2 + 13x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20 \\ & 13x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 90 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

اگر S_1, S_2 به ترتیب متغیرهای کمکی محدودیت‌های اول و دوم این مسأله باشند و جواب بهینه این مسأله $x_2 = 20$ و $S_2 = 10$ باشد، اگر ضریب تابع هدف x_2 که در حال حاضر $C_2 = 5$ است، به $C_2 = 4$ تغییر دهیم، مقدار $\bar{C}_2$ در این تغییر برابر کدام یک از مقادیر زیر خواهد شد؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع - آزاد ۸۵)

۱) $\bar{C}_2 = -1$
۲) $\bar{C}_2 = 1$
۳) $\bar{C}_2 = 0$
۴) $\bar{C}_2 = -2$

۹۱ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی روبرو مفروض است:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 15x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 21 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 12 \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1 \text{ تا } 4 \end{aligned}$$

کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۵)

۱) مسأله جواب قابل قبول ندارد.

۲) مسأله بی‌نهایت جواب بهینه دارد.

۳) مقادیر $\overline{C}_j$ این مسأله در جدول نهایی: $\overline{C}_1 = -15, \overline{C}_2 = -10, \overline{C}_3 = 0, \overline{C}_4 = 0$

۴) مقادیر $\overline{C}_j$ این مسأله در جدول نهایی: $\overline{C}_1 = 0, \overline{C}_2 = 0, \overline{C}_3 = 10, \overline{C}_4 = 15$

۹۲ـ یک مسأله برنامه‌ریزی خطی که تابع هدف آن از نوع مینیمم کردن است در نظر بگیرید. جدول یکی از مراحل تکرار سیمپلکس آن به شکل زیر است:

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۵)

	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_2	۰	۰	۱	$-0/5$	$0/5$	$0/5$
x_1	۰	۱	۰	$-0/5$	$-0/5$	$0/5$
$-z$	۱	۰	۰	-1	۰	۱

۱) مقدار تابع هدف بهینه بوده و برابر (-1) است.

۲) مقدار تابع هدف نامتناهی و جواب بهینه یگانه است.

۳) مقدار تابع هدف نامتناهی و جواب بهینه یگانه نیست.

۴) مقدار تابع هدف متناهی و جواب بهینه یگانه نیست.

۹۳ـ در مسأله قبل (سوال ۱۱۰) (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۵)

۱) جدول فعلی، جدول نهایی سیمپلکس است.

۲) جدول فعلی، جدول نهایی سیمپلکس نیست.

۳) جدول فعلی در صورتی جدول نهایی سیمپلکس است که متغیر x_3 وارد پایه گردد.

۴) جدول فعلی، در صورتی جدول نهایی سیمپلکس است که متغیر x_4 وارد پایه گردد.

۹۴ـ در(سوال ۱۱۰)، اگر نقطه $x^T = (1,0,0,0)$ یک جواب پایه دیگر از این مسأله باشد. در آن صورت نقطه $x^T = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0)$:

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۵)

۱) یک نقطه غایی(گوشه) قابل قبول است.

۲) یک جواب پایه غیرقابل قبول است.

۳) یک نقطه داخلی است.

۴) یک نقطه مرزی قابل قبول است.

توجه کنید که سه سؤال بعد در رابطه با مسأله کلی زیر است:

۹۵ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی روبرو مفروض است:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= x_1 + x_2 - 4x_3 \\ \text{s.t} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید که برای پایه $B = (a_1, a_5, a_3)$ ماتریس معکوس آن به صورت: $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ باشد. پس از تشکیل سیمپلکس به سه سؤال زیر پاسخ دهید.

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۵)

۱) پایه پیشنهادی بهینه است.

۲) پایه پیشنهادی نمی‌تواند حتی یک جواب قابل قبول هم ایجاد کند.

۳) مسأله نامحدود می‌باشد.

۴) پایه پیشنهادی یک پایه میانی سیمپلکس است و برای رسیدن به جواب بهینه باید ادامه داده شود.

۹۶ـ از جدول سیمپلکس مسأله قبل (سوال۱۱۳) برای پایه پیشنهادی می‌توان نتیجه گرفت که اگـر $x_2 = x_6 = 0$ و $x_4 = \theta$ انتخـاب شـود، مقـدار سایر متغیرها به قرار زیر خواهد بود؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۵)

۱) $(x_1, x_5, x_3) = (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\theta, 6-\theta, \frac{13}{3} - \frac{1}{3}\theta)$

۲) $(x_1, x_5, x_3) = (\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\theta, 6, \frac{13}{3} - \frac{1}{3}\theta)$

۳) $(x_1, x_5, x_3) = (\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\theta, 6-\theta, \frac{13}{2} - \frac{2}{3}\theta)$

۴) $(x_1, x_5, x_3) = (\frac{1}{3}, 6, \frac{13}{3} - \theta)$

۹۷ـ از جـدول سـیمپلکس مسـأله قبل(سـوال ۱۱۳)، مـی‌تـوان نتیجـه گرفـت کـه اگـر بـه جـای بـردار دوم در پایـه پیشـنهادی، یعنـی $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ پایه‌جدید $a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ را قرار دهیم بردارهای $(a_1, a_4, a_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۵)

۱) تشکیل یک پایه می‌دهند.

۲) یک پایه قابل قبول ولی غیربهینه هستند.

۳) یک پایه غیرقابل قبول هستند.

۴) تشکیل پایه نمی‌دهند.

۹۸ـ عبارت نادرست را مشخص کنید. (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) $L-P$ یک مدل تصمیم‌گیری است.

۲) $L-P$ یک وضعیت خاص از N.L.P است.

۳) روش M بزرگ یکی از روش‌های حل $L-P$ است.

۴) جواب تابع هدف برای یک برنامه‌ریزی با اعداد صحیح بهتر از جواب آن به صورت یک $L-P$ است.

۹۹ـ در یک مسأله برنامه‌ریزی خطی، حداکثر تعداد جواب‌های پایه‌ای ممکن برابر است با:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) تعداد متغیرها

۲) تعداد محدودیت‌ها

۳) حاصل‌ضرب تعداد محدودیت‌ها در تعداد متغیرها

۴) هیچ‌کدام

۱۰۰ـ در حل مسأله با روش سیمپلکس، در هر تکرار عنصر لولا باید: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) محدودیتی نداشته باشد.

۲) حتماً مثبت باشد.

۳) مثبت و یا صفر باشد.

۴) با توجه به Max یا Min کردن تابع هدف، می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

۱۰۱ـ در یک برنامه‌ریزی خطی که همه نقطه‌ها دارای تعداد حد فوقانی (کران‌دار) هستند:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) فقط در صورتی از روش سیمپلکس مخصوص حدفوقانی استفاده می‌شود که به سطرهای مصنوعی نیاز نباشد.

۲) از روش سیمپلکس مخصوص حدفوقانی استفاده می‌شود زیرا نسبت به روش سیمپلکس معمولی دارای متغیرهای کمتری است.

۳) فقط در صورتی از روش سیمپلکس مخصوص حدفوقانی استفاده می‌شود که تعداد سطرهای آن نسبت به محدودیت‌ها زیاد نباشد.

۴) از روش سیمپلکس مخصوص حدفوقانی استفاده می‌شود زیرا نسبت به روش سیمپلکس معمولی دارای محدودیت‌های کمتری است.

۱۰۲ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\text{Max}\, Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad ; \quad \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & i = 1, \dots, m \\ x_j \ge 0 & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

که درآن مقادیر سمت راست محدودیت‌ها مثبت بوده و جهت علامت محدودیت‌ها، کوچکتر یا مساوی می‌باشند.

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) این مسأله حتماً امکان‌پذیر است.

۲) این مسأله ممکن است امکان‌پذیر باشد یا نباشد.

۳) اگر یکی از مقادیر سمت راست محدودیت‌ها، مثلاً b_k یک واحد افزایش یابد، ناحیه امکان‌پذیر تغییری نخواهد کرد.

۴) اگر یکی از مقادیر سمت راست محدودیت‌ها، مثلاً b_k یک واحد افزایش یابد، ناحیه امکان‌پذیر حتماً بزرگ‌تر می‌شود.

۱۰۳ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی روبرو را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max } & Z = c_۱x_۱ + c_۲x_۲ \\ \text{s.t.} & \\ & a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ \le b_۱ \\ & a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ \le b_۲ \\ & x_۱, x_۲ \ge ۰ \end{aligned}$$

اگر جدول بهینه مسأله به صورت زیر باشد که در آن $s_۲, s_۱$ متغیرهای کمکی محدودیت‌های اول و دوم باشند مقادیر $b_۲, c_۱$ چقدر هستند؟

	z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	RHS
z	۱	۰	۰	۲	۳	$\frac{۵}{۲}$
$x_۱$	۰	۱	۰	۳	۲	$\frac{۵}{۲}$
$x_۲$	۰	۰	۱	۱	۱	۱

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) $c_۱ = -۱\ ,\ b_۲ = \frac{۱}{۴}$
۲) $c_۱ = ۱\ ,\ b_۲ = \frac{۱}{۴}$
۳) $c_۱ = ۱\ ,\ b_۲ = \frac{۱}{۲}$
۴) $c_۱ = -۱\ ,\ b_۲ = \frac{۱}{۲}$

۱۰۴ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min } & Z = -x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ \\ \text{s.t.} & \\ & ۲x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۶ \\ & ۲x_۲ - x_۳ + x_۵ = ۳ \\ & x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵ \ge ۰ \end{aligned}$$

جدول بهینه مسأله به صورت زیر داده شده است:

	Z	$X_۳$	$X_۴$	$X_۵$	RHS
Z	۱	$-\frac{۳}{۴}$	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۴}{۳}$	$-\frac{۲۱}{۴}$
$X_۱$	۰	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۹}{۴}$
$X_۲$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$

در این جدول اگر $a = \frac{\partial x_۱}{\partial x_۳}, b = \frac{\partial z}{\partial x_۵}$ باشد مقادیر b,a برابرند با :

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) $a = \frac{۳}{۴}\ ,\ b = \frac{۳}{۴}$
۲) $a = \frac{۳}{۴}\ ,\ b = -\frac{۳}{۴}$
۳) $a = -\frac{۳}{۴}\ ,\ b = \frac{۳}{۴}$
۴) $a = -\frac{۳}{۴}\ ,\ b = -\frac{۳}{۴}$

۱۰۵ـ منطقه موجه یک مسأله برنامه‌ریزی خطی در محدوده چهار ضلعی A, B, C, D (شکل زیر) است. جواب بهینه طبق جدول زیر به دست آمده است (مربوط به نقطه B). $S_۴, S_۳, S_۲, S_۱$ متغیرهای لنگی (Slack) مربوط به محدودیت شماره‌های ۱و۲و۳و۴ هستند. نقطه B روی کدام محدودیت های زیر قرار دارد.

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۶)

		z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	$s_۴$	
	۰	۱	۰	۰	۶	۰	۰	۲	۳۲
	۱	۰	۱	۰	۱/۳	۰	۰	۱/۳	۶
	۲	۰	۰	۰	۸/۳	۱	۰	−۱/۳	۱۲
	۳	۰	۰	۱	−۲/۳	۰	۰	۱/۳	۲
	۴	۰	۰	۰	−۱/۳	۰	۱	۲/۳	۳

۱) اول و دوم
۲) اول و سوم
۳) دوم و سوم
۴) سوم و چهارم

۱۰۶ـ در مسأله ۱۲۹، می‌خواهیم با استفاده از جدول سیمپلکس به نقطه A برویم. در تکرار بعدی متغیرهـای اساسـی(بـدون در نظـر گـرفتن ترتیـب آنهـا) عبارتند از: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) (x_1, x_2, s_2, s_4) ۲) (x_1, x_2, s_2, s_3) ۳) (s_1, s_2, s_3, s_4) ۴) (x_1, x_2, s_1, s_3)

۱۰۷ـ برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید. جدول سیمپلکس زیر مربوط به یکی از تکرارهای حل این مسأله است (a_1, a_2, a_3, a_4) برابر است با:

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \\ &\text{s.t.} \\ &\quad a_1x_1 + x_2 + a_2x_3 \le 15 \\ &\quad a_3x_1 + 3x_2 + a_4x_3 \le 25 \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 2, 1)$ ۲) $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 2, 1, 1)$

۳) $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (-1, 1, 2, -1)$ ۴) $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (2, -1, -2, 1)$

۱۰۸ـ در مسأله ۱۳۱، مقدار a_5 برابر است با: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۰۹ـ دو مدل برنامه‌ریزی ریاضی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z_2 = 2x_1 + 3x_2 \qquad \text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ \end{cases} \qquad x_2, x_1$$

$$\text{Max } Z_1 = 2x_1 + 3x_2 \qquad \text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

بین مقادیر بهینه z_1 و z_2 چه رابطه‌ای برقرار است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۶)

۱) $\text{Max}Z_1 = \text{Max}Z_2$ ۲) $\text{Max}Z_1 > \text{Max}Z_2$ ۳) $\text{Max}Z_1 < \text{Max}Z_2$ ۴) هیچ رابطه‌ای برقرار نیست.

۱۱۰ـ اگر تمام ضرایب یکی از متغیرها در محدودیت‌های اصلی مدل موردنظر غیر مثبت باشند، کدام عبارت صحیح است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۷)

۱) در ارتباط با فضای جواب نمی‌توان بحث کرد.

۲) فضای جواب بی‌کران و لزوماً جواب بهینه کراندار است.

۳) فضای جواب بی‌کران و لزوماً جواب بهینه بی‌کران است.

۴) فضای جواب بی‌کران است ولی ممکن است جواب بهینه کراندار باشد.

۱۱۱ـ مدل برنامه‌ریزی خطی روبرو داده شده است:

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = 6x_1 + 2x_2 + 12x_3 \\ &\text{s.t} \quad 4x_1 + x_2 + 3x_3 \le 24 \\ &\qquad 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 30 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

جدول بهینه کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۷)

۱)

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
x_3	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	8
s_2	0	-2	5	0	-1	1	6
z	1	2	10	0	4	0	96

۲)

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
x_3	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	8
s_2	0	-2	5	0	-1	1	6
z	1	10	2	0	4	0	96

۳)

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
x_3	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	8
s_2	0	2	5	0	-1	1	6
z	1	2	10	0	2	0	96

۴)

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
x_3	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	8
s_2	0	2	-5	0	-1	1	6
z	1	10	2	0	4	0	96

۱۱۲ـ در یک مسأله LP با سه متغیر تصمیم‌گیری و دو محدودیت با تابع هدف Max، در جواب بهینه x_2 و x_3 در پایه می‌باشند. چنانچه مدیریت بخواهد از محصول x_1 هم تولید نماید، آنگاه: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۷)

۱) تولید x_1 ممکن است باعث افزایش یا کاهش x_2 و x_3 بهینه گردد و لیکن از سود بهینه ضرر خواهد کرد.

۲) حتماً باید x_1 وارد پایه شود و جانشین x_2 و x_3 گردد.

۳) تولید x_1 حتماً باعث کاهش x_2 و x_3 بهینه می‌گردد و سود بهینه را هم کاهش خواهد داد.

۴) تأثیری بر x_2 و x_3 بهینه ندارد. ولیکن از سود بهینه ضرر خواهد کرد.

۱۱۳ـ حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با استفاده از روش سیمپلکس نیازمند یک متغیر کمکی از نوع کمبود، یک متغیر کمکی از نوع مازاد و دو متغیر مصنوعی است. در این صورت این مسأله دارای: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۷)

۱) یک محدودیت کوچکتر یا مساوی و دو محدودیت تساوی است.

۲) یک محدودیت تساوی و دو محدودیت بزرگتر یا مساوی است.

۳) یک محدودیت کوچکتر یا مساوی و دو محدودیت بزرگتر یا مساوی است.

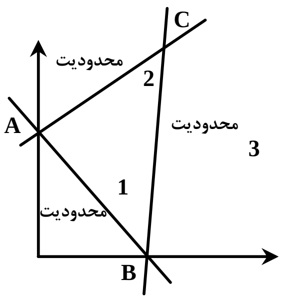
۴) یک محدودیت تساوی، یک محدودیت کوچکتر یا مساوی و یک محدودیت بزرگتر یا مساوی است.

۱۱۴ـ اگر در طی مراحل الگوریتم سیمپلکس تا رسیدن به جواب بهینه همواره جواب در حال بهتر شدن باشد:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۷)

۱) مسأله جواب بی‌کران دارد.
۲) مسأله پایه تباهیده نخواهد داشت.
۳) مسأله پایه شدنی تباهیده نخواهد داشت.
۴) هیچ‌کدام

۱۱۵ـ در مراحل حل یک مسأله خطی که فضای حل آن به‌صورت شکل زیر است، اگر در نقطه B قرار داشته باشیم (در پایه (s_2, x_1, s_3)) حداقل چند تکرار برای رفتن به پایه C لازم است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۷)



۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۱۱۶ـ در مسأله زیر مقدار تابع هدف چقدر است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۷)

$$\text{Max } z = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$$
s.t
$$x_1 + 2x_2 \le 2$$
$$2x_2 - x_3 \le 2$$
$$-x_1 + x_3 \le 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۰

۱۱۷ـ جواب بهینه LP زیر کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۷)

$$\text{Max } z = 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 6x_4$$
s.t
$$9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 270$$
$x_i \ge 0$ برای تمامی i ها

۱) ۲۲۰
۲) ۵۴۰
۳) ۹۰۰
۴) هیچ کدام

۱۱۸ـ در یکی از مراحل حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی، جدول زیر به دست آمده است (برخی از مقادیر در جدول پر نشده است). جواب اساسی در این مرحله جدول کدام است؟
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۸)

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	سمت راست
...	z	۱	...	...	...	...	...	...	...
...	۱	۰	۰	۰	۱	۱-	۱	۴	۶
...	۲	۰	۰	۱	۰	۲	۲	۱-	۴
...	۳	۰	۱	۰	۰	۱	۱-	۱	۳

۱) $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(0,0,0,6,4,3)$
۲) $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(3,4,6,0,0,0)$
۳) $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(4,3,6,0,0,0)$
۴) $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(6,4,3,0,0,0)$

۱۱۹ـ در مسأله ۱۴۸، جواب این مرحله جدول چند جواب مجاور دارد؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۸)

۱) دو جواب موجه
۲) شش جواب (اعم از موجه یا غیرموجه)
۳) سه جواب (اعم از موجه یا غیرموجه)
۴) نه جواب (اعم از موجه یا غیرموجه)

۱۲۰ـ در مسأله ۱۴۸، فرض کنید که تابع هدف آن $\mathrm{Min}Z=3X_1-2X_2-10X_3+11X_4+18X_5-10X_6$ باشد، کدام عبارت صحیح است؟
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۸)

۱) جواب جدول مسأله ۱ بهینه است.
۲) از جدول مسأله ۱ بهینه بودن جواب را نمی‌توان به دست آورد.
۳) جواب جدول مسأله ۱ بهینه نیست ولی با ادامه روش سیمپلکس می‌توان آن را به دست آورد.
۴) جواب جدول مسأله ۱ بهینه نیست ولی با ادامه روش سیمپلکس دوگان می‌توان آن را به دست آورد.

۱۲۱ـ در مسأله ۱۴۸، اگر X_6 را به عنوان متغیر ورودی و X_1 را به عنوان متغیر خروجی انتخاب کنیم در این صورت جواب اساسی بعدی، چگونه خواهد بود؟
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۸)

۱) غیرموجه است. ۲) موجه است. ۳) تبهگن است. ۴) نامتناهی است.

۱۲۲ـ با فرض اینکه B ماتریسی $m\times m$ و غیر منفرد باشد، جدول سیمپلکس $T=[I,B]$ را وقتی که I ماتریسی واحد $m\times m$ است را تشکیل می‌دهیم. فرض کنید پس از k بار انجام عملیات لولایی روی این تابلو، آن را به فرم $[C,I]$ در آورده‌ایم. در این صورت، نتیجه می‌شود:
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۸)

۱) با هر تعداد از عملیات لولایی نمی‌توان تابلوی T را به فرم $[C,I]$ تبدیل کرد.
۲) $C=B$
۳) $C=B^{-1}$
۴) تعداد عملیات لولایی برای تبدیل تابلوی T به فرم $[C,I]$ یعنی k حتماً باید برابر m باشد.

۱۲۳ـ بخشی از یک جدول بهینه به صورت زیر است.

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	
Z	۱			۳	۰	
s_2	۰			۲-	۱	۵
x_2	۰			۱	۰	۶

(Max سازی)

فرض کنید می‌خواهیم محصول جدیدی مانند x_3 را تولید نماییم به طوری که برای تولید یک واحد آن به ترتیب ۴ و ۵ واحد از منابع اول و دوم مورد استفاده قرار می‌گیرد. حداقل مقدار c_3 در تابع هدف را طوری بیابید که تولید این محصول سودآور باشد.
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۸)

۱) $c_3>9$ ۲) $c_3>12$ ۳) $c_3>13$ ۴) $c_3>14$

۱۲۴ـ در مسأله ۱۵۴، بردار ضرایب سمت راست مسأله اصلی کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۸)

۱) $b_1=3,b_2=0$ ۲) $b_1=6,b_2=5$ ۳) $b_1=5,b_2=6$ ۴) $b_1=6,b_2=17$

۱۲۵ــ مسأله برنامه‌ریزی خطی روبرو را در نظر بگیرید.

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.t

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i , i = 1,\dots,n$$

$$x_j \ge 0, j = 1,\dots,n$$

تحت چه شرایطی منطقه موجه شامل مبدأ مختصات است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۸)

۱) در صورتی که تابع هدف از نوع مینیمم‌سازی باشد.
۲) در صورتی که تابع هدف از نوع ماکسیمم‌سازی باشد.
۳) منطقه موجه همواره مبدأ مختصات را شامل می‌شود.
۴) در صورتی که $b_i \ge 0, i = 1,\dots,n$

۱۲۶ــ مسأله برنامه‌ریزی خطی روبرو را در نظر بگیرید.

$$\{Max z = Cx / Ax \le b \ ; \ x \ge 0\}$$

کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۸)

۱) شرط لازم جواب بهینه منحصر به فرد آن است که تمام $Z_j - C_j$ ها در جدول بهینه مثبت أکید باشد.
۲) شرط کافی جواب بهینه منحصر به فرد آن است که تمام $Z_j - C_j$ ها در جدول بهینه مثبت أکید باشد.
۳) شرط لازم و کافی جواب بهینه منحصر به فرد آن است که تمام $Z_j - C_j$ ها در جدول بهینه مثبت أکید باشد.
۴) شرط لازم و کافی جواب بهینه منحصر به فرد آن است که تمام $Z_j - C_j$ ها در جدول بهینه صفر باشند.

۱۲۷ــ در یک جدول سیمپلکس که به صورت کانونی می‌باشد، می‌دانیم که $\sum_{j=1}^{n} x_j \le \alpha$ می‌باشد که در آن α یک عدد حقیقی و مثبت است. اگر جدول جاری متناظر بهینه نباشد، فرض کنید.

$$c_k - z_k = \min(c_1 - z_1 , c_2 - z_2 , \dots , c_n - z_n)$$

اگر $\overline{z}$ مقدار تابع هدف جدول جاری باشد، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۸)

۱) $\overline{z} + \alpha(c_k - z_k)$ یک کران بالای تابع مقصود است.
۲) $\overline{z} + \alpha(c_k - z_k)$ یک کران پایین تابع مقصود است.
۳) $\overline{z} + \alpha(c_k - z_k)$ برابر مقدار تابع مقصود بهینه است.
۴) مقدار تابع مقصود بهینه برابر $\frac{1}{2}(\overline{z} + \alpha(c_k - z_k))$ است.

۱۲۸ــ برنامه‌ریزی ریاضی مقابل را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} Min f(x) &= 4x_1 + 6x_2 - x_1^3 - 2x_2^2 \\ s.t \quad & x_1 + 3x_2 \le 8 \\ & 5x_1 + 2x_2 \le 14 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

کدام گزینه در رابطه با نقطه $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1 = \frac{2}{3}$ صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۸)

۱) نقطه مینیمم است.
۲) نقطه داخلی است و نمی‌تواند بهینه باشد.
۳) بهینه است.
۴) نقطه مرزی است و بهینه است.

۱۲۹ــ برنامه‌ریزی ریاضی با محدودیت‌های خطی مقابل را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} Max f(x) &= 8x_1 - x_1^2 + 2x_2 + x_3 \\ s.t \quad & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 12 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

نقطه داده شده $x_1 = x_2 = x_3 = 2$. (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۸)

۱) مرزی و بهینه نیست.
۲) مرزی و بهینه است.
۳) نقطه مینیمم است.
۴) نقطه داخلی و بهینه است.

۱۳۰ــ جدول مسأله مینیمم‌سازی را در نظر بگیرید، اگر $a = 3$ باشد، یک جواب شدنی با $z = -200$ کدام است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۹)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1		-2		1		c
x_3		-1		2		d
x_5		0		3		e
		a		b		-8

۱) $x_1 = c + 64$, $x_2 = 64$, $x_3 = d + 128$, $x_4 = 0$, $x_5 = e$
۲) $x_1 = c$, $x_2 = 0$, $x_3 = d$, $x_4 = 0$, $x_5 = e$
۳) $x_1 = c + 128$, $x_2 = 64$, $x_3 = d + 64$, $x_4 = 0$, $x_5 = e$
۴) $x_1 = c + 128$, $x_2 = 0$, $x_3 = d + 64$, $x_4 = 0$, $x_5 = e$

۱۳۱ـ جدول آغازین و جدول بهینه مسأله مفروضی به صورت زیر است. در کدام گزینه مقادیر واقعی مجهول‌ها در جدول‌ها صحیح است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۹)

(جدول آغازین)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ضرایب سمت راست
z	a	۱	-3	۰	۰	۰
x_4	۳	b	۲	۱	۰	۶
x_5	-1	۲	-1	۰	۱	۱

(جدول بهینه)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ضرایب سمت راست
z	۰	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{13}{3}$	c	۰	-4
x_1	۱	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	۰	۲
x_5	۰	d	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	۱	۳

۱) $a=1\ ,\ b=4\ ,\ c=-\frac{4}{3}\ ,\ d=\frac{2}{3}$

۲) $a=3\ ,\ b=1,\ c=-\frac{1}{3}\ ,\ d=\frac{5}{3}$

۳) $a=0\ ,\ b=3\ ,\ c=-\frac{5}{3}\ ,\ d=\frac{4}{3}$

۴) $a=2\ ,\ b=2\ ,\ c=-\frac{2}{3}\ ,\ d=\frac{8}{3}$

۱۳۲ـ در سوال ۱۶۳ مقادیر ارزش منبع اول برابر .... و ارزش منبع دوم برابر .... است. (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۹)

۱) $-\frac{1}{3}$، صفر
۲) صفر، $-\frac{4}{3}$
۳) $-\frac{13}{3}$ ، $-\frac{5}{3}$
۴) $-\frac{2}{3}$، صفر

۱۳۳ـ مقدار بهینه تابع هدف زیر برابر .... و جواب بهینه .... می‌باشد. (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۹)

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= x_1+x_2 \\ \text{s.t.}\quad & x_1+x_2+x_3=2 \\ & x_1+x_4=1 \\ & x_2+x_5=1 \\ & x_1,x_2,\dots,x_5\ge 0 \end{aligned}$$

۱) ۲، منحصر به فرد
۲) ۳، نشدنی
۳) ۳، چندگانه
۴) ۲، نامتناهی

۱۳۴ـ اگر A یک ماتریس با ۴ سطر و ۵ ستون باشد، حد بالای مقدار بهینه تابع هدف مسأله زیر کدام گزینه می‌باشد؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۹)

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 5x_1-3x_2+4x_3-4x_4+x_5 \\ \text{s.t.}\quad & Ax\ge \bar{b} \\ & 1\le x_j\le 8,\ j=1,2,3,4,5 \end{aligned}$$

۱) ۱۰
۲) ۱۳۶
۳) ۸۰
۴) ۷۳

۱۳۵ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید. در جواب بهینه مسأله مذکور $B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$، اگر مقادیر سمت راست بـه $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ تغییـر یابـد. مقایدر سمت راست در جدول بهینه چه تغییری خواهد کرد؟

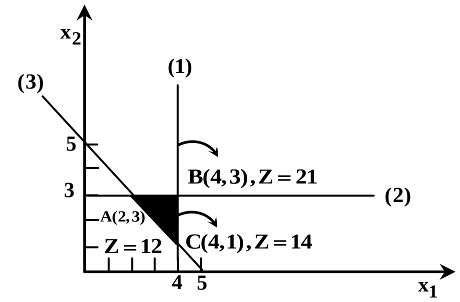
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۹)

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= -2x_1+x_2-x_3 \\ \text{s.t.}\quad & x_1+x_2+x_3\le 6 \\ & -x_1+2x_2\le 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3\ge 0 \end{aligned}$$

۱) به $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ تغییر می‌یابد
۲) به $\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ تغییر می‌یابد.
۳) به $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ تغییر می‌یابد.
۴) به $\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ تغییر می‌یابد.

۱۳۶ـ نمایش ترسیمی مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید. این مساله در صورتی جواب بهینه تبهگن (منحط) دارد که محدودیت .... به صورت .... تعریف شود.

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۹)



۱) اول و $x_1 \le ۳$

۲) سوم و $x_1 + x_2 \le ۷$

۳) دوم و $x_1 + x_2 \le ۷$

۴) دوم و $x_1 \le ۳$

۱۳۷ـ مسأله بهینه‌سازی $\{\text{Min}\, Cx \mid Ax \le b, x \ge 0\}$ را در نظر بگیرد. اگر به ازاء $C = C_1$، جواب بهینه مسـأله x_1 و بـه ازاء $C = C_2$ جـواب بهینه مسأله x_2 باشد، آنگاه:

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۱)

۱) $(C_1 - C_2)(X_1 - X_2) \le 0$　　۲) $(C_1 - C_2)(X_1 - X_1) \ge 0$　　۳) $(C_1 - C_2)(X_1 - X_2) = 0$　　۴) $(C_2 - C_1)(X_1X_2) \ge 0$

۱۳۸ـ اگر در مسأله برنامه‌ریزی خطی، در آخرین جدول سیمپلکس یکی از متغیرهای مصنوعی در پایه با مقدار صفر باقی مانده باشد:

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۱)

۱) مسأله فاقد ناحیه جواب موجه است.

۲) ناحیه جواب موجه تنها یک نقطه است.

۳) ناحیه جواب می‌تواند شامل بی‌شمار نقطه باشد که برای حرکت در آن بایستی به نحوی متغیر مصنوعی را از پایه خارج کنیم.

۴) ناحیه جواب بی‌کران است.

۱۳۹ـ مسأله زیر داده شده است. در این صورت:

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۱)

$$\text{Max}Z = ۲x_1 + ۶x_2 - x_3 - ۳x_4 + ۸x_5 - ۴x_6 + ۵x_7 + ۷x_8$$

s.t {محدودیت داده شده است **m**}

$$-۵ \le x_i \le ۵ \qquad i = ۱, ۲, \cdots, ۸$$

۱) $Z^* \le ۱۸۰$

۲) $Z^* \le ۳۰۰$

۳) $Z^* \le ۲۲۰$

۴) $Z^* \le ۱۴۰$

۱۴۰ـ محدویت‌های یـک مسـأله برنامـه‌ریـزی خطـی بـه صـورت روبـرو معرفـی شـده اسـت، معـادلات معـرف نقطـه گوشـه $(-۷, ۵)$ کـدام است؟ $A = \begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۱ & -۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} ۹ \\ ۶ \\ ۳ \end{bmatrix}$

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۹۱)

۱) معادلات حدی محدودیت‌های اول و دوم

۲) معادلات حدی محدودیت‌های اول و سوم

۳) معادلات حدی محدودیت‌های اول و دوم و سوم

۴) معادلات حدی محدودیت‌های دوم و سوم

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل سوم

۱ـ گزینه «۳» هر مسأله برنامه‌ریزی خطی یا جواب موجه ندارد، یا نامحدود است و یا جواب بهینه محدود است.

۲ـ گزینه «۳» از درجه یک تابع چند جمله‌ای از ابعاد مسأله است.

۳ـ گزینه «۱» ضریب سطر تابع هدف متغیر x_j در هر مرحله از جدول سیمپلکس با استفاده از رابطه $Z_j - C_j = C_B B^{-۱} a_j - C_j$ محاسبه می‌شود پس داریم:

$$b = Z_۳ - C_۳ = C_B \bar{a}_۳ - C_۳ = (۲,۰,۳)\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \end{pmatrix} - ۱ = ۲ - ۱ = ۱$$

۴ـ گزینه «۲» با استفاده از مقادیر سمت راست اولیه و جدول نهایی مقدار a به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{b} = B^{-۱}b \Rightarrow \begin{pmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۶ & ۰ & -۱ \\ a & ۱ & -۱ \\ -۳ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۴ \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ \\ a-۱ \\ ۱ \end{pmatrix} \Rightarrow a - ۱ = ۱ \Rightarrow a = ۲$$

۵ـ گزینه «۱» برای اینکه فعالیت جدید در برنامه تولید قرار گیرد، باید متغیر $x_۷$ وارد پایه شود، یعنی لازم است که $Z_۷ - C_۷ \leq ۰$ شود. پس داریم:

$$Z_۷ - C_۷ = \underbrace{C_B B^{-۱}}_{\text{قیمت سایه}} a_۷ - C_۷ = (۳,۰,۱)\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۲ \end{pmatrix} - C_۷ = ۵ - C_۷ \leq ۰$$

در نتیجه: $C_۷ \geq ۵$.

۶ـ گزینه «۴» گزینه (۱) نیز می‌تواند صحیح باشد. گزینه «۲» نادرست است، زیرا برخی از مسائل برنامه‌ریزی خطی فاقد نقطه بهینه هستند.

۷ـ گزینه «۳» طبق قاعده لکزیکوگراف اگر متغیر خروجی منحصر به فرد نباشد از ستون اول ماتریس $B^{-۱}$ به جای ستون R.H.S در قاعده مینیمم نسبت استفاده می‌کنیم و اگر باز هم متغیر خروجی منحصر به فرد نباشد، از ستون دوم ماتریس $B^{-۱}$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{array}{cc} \bar{a}_۲ & \bar{b} \\ \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \\ ۶ \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \theta = \text{Min}\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i۲}} \mid ۱ \leq i \leq ۳\} = \text{Min}\{\frac{۴}{۲}, \frac{۲}{۱}, \frac{۶}{۳}\} = ۲ \Rightarrow$$

متغیرهای $x_۱, x_۴, x_۶$ می‌توانند متغیر خروجی باشند.

متغیر خروجی منحصر به فرد نیست. پس آزمون مینیمم نسبت را با ستون اول $B^{-۱}$ اجرا می‌کنیم:

$$\begin{array}{cc} \bar{a}_۲ & B^{-۱}\ \text{ستون اول} \\ \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \theta = \text{Min}\{\frac{۰}{۲}, \frac{۱}{۱}, \frac{۰}{۳}\} = ۰ \Rightarrow$$

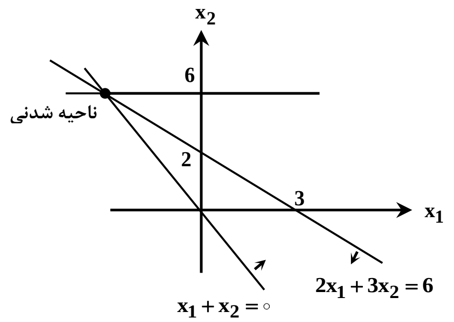
متغیرهای $x_۱, x_۶$ می‌توانند خروجی از پایه باشند.

آزمون مینیمم نسبت را با ستون دوم $B^{-۱}$ و مؤلفه‌های $\bar{a}_{۱۲}$ و $\bar{a}_{۳۲}$ اجرا می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccc} & \bar{a}_۲ & B^{-۱}\ \text{ستون دوم} \\ \begin{array}{c} \bar{a}_{۱۲} \\ \\ \bar{a}_{۳۲} \end{array} & \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \theta = \text{Min}\{-\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۳}\} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow$$

متغیر $x_۶$ خروجی است.

۸ـ گزینه «۴»



ناحیه شدنی فقط شامل نقطه $(x_1 = -۶, x_2 = ۶)$ است. پس این نقطه، نقطه بهینه نیز می‌باشد که تباهیده است، چون در فضای ۲ بعدی سه قید از آن عبور می‌کند.

۹ـ گزینه «۱» رتبه ماتریس $A_{m\times n}$ برابر m است پس در هر جواب باید m متغیر پایه‌ای داشته باشیم. در حقیقت مقادیر این m متغیر پایه‌ای ضرایبی هستند که با آنها می‌توان b را برحسب ترکیب خطی m تا، از ستون‌های ماتریس A بیان کرد. حال اگر b را بتوان بر حسب ترکیب خطی $m-۱$ ستون از ماتریس A نوشت، یعنی یکی از متغیرهای پایه‌ای مقدار صفر دارد بنابراین حل منحط است.

۱۰ـ گزینه «۴» مقادیر سمت راست در جدول سیمپلکس در حقیقت مقادیر متغیرهای پایه‌ای X_B در آن مرحله هستند و چون $X_B = B^{-۱}b - B^{-۱}NX_N < ۰$ پس در مقادیر سمت راست این جدول مقدار منفی وجود دارد.

۱۱ـ گزینه «۱» ضریب x_1 می‌تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد.

۱۲ـ گزینه «۲» متغیر x_1 متغیر ورودی است و با توجه به تست مینیمم نسبت، متغیر خروجی منحصر به فرد نمی‌باشد و هر یک از متغیرهای x_2 و x_3 می‌توانند متغیر خروجی باشند. برای جلوگیری از ایجاد حلقه (دور) از قاعده بلاند (Beland) برای تعیین متغیر خروجی استفاده می‌کنیم، یعنی از بین x_2 و x_3 متغیر با اندیس کوچکتر، یعنی x_2 را برای خروج از پایه انتخاب می‌کنیم. البته برای جلوگیری از ایجاد حلقه می‌توان از قاعده لکزیکوگراف نیز استفاده کرد ولی در این سؤال ماتریس B^{-1} در دسترس نمی‌باشد و هیچ دلیلی وجود ندارد که ماتریس زیر متغیرهای x_5 و x_4 را در جدول بهینه به عنوان B^{-1} فرض کنیم.

در مورد گزینه ۱، باید حواسمان باشد که سطر هدف جدول سیمپلکس به جای z و $-z$ را قرار داده است پس متغیر خروجی طبق قاعده سیمپلکس به صورت $(z_1 - c_1 = ۵)$ $\max\{۵,۴,۳\} = ۵$ انتخاب می‌شود (مسأله min سازی است)

۱۳ـ گزینه «۲» چون با جایگزینی $x_k = x_k^+ - x_k^-$ در معادلات ستون ضرایب x_k^-, x_k^+ قرینه یکدیگر می‌شود و وابسته خطی هستند، پس x_k^-, x_k^+ همزمان در پایه نیستند.

در مورد گزینه ۴ می‌توان گفت چون x_k^+ در پایه است با توجه به محل قرارگیری آن در بردار پایه (فرض کنیم در محل t ام واقع شده باشد) دارای بردار ستونی $e_t = \begin{bmatrix} ۰ \\ \vdots \\ ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ ($\leftarrow t$ ام) و با $z_k - c_k = ۰$ می‌باشد و با توجه به قرینه بودن x_k^-، بردار ستونی آن در جدول $-e_t$ و $z_{k+۱} - c_{k+۱} = ۰$ پس در حالت جواب بهینه چندگانه که x_k^+ در پایه است x_k^- شرط ورود به پایه را به جای x_k^+ دارا می‌باشد. به شرطی که جدول تباهیده باشد یعنی $b_t = ۰$، چون عنصر لولا (۱-) می‌باشد و محورگیری روی عنصر منفی انجام می‌شود و برای حفظ شدنی بودن (مثبت بودن سمت راست) باید جدول تباهیده باشد که در این حالت به نقطه‌ی جدیدی با توابع هدف یکسان حرکت نمی‌کنیم و شرط چندگانگی جواب را به جواب منحصر به فرد تباهیده تغییر می‌دهیم (این در صورتی است که $z_j - c_j = ۰$ برای متغیر غیرپایه‌ای، تنها برای x_k^- رخ داده باشد ولی اگر برای متغیر غیر پایه‌ای دیگر هم رخ دهد که مقدار آزمون min کسر مخالف صفر باشد جدول حاصل چندگانه تباهیده می‌باشد) پس در شرایطی خاص می‌توان x_k^- جایگزین x_k^+ شود پس گزینه ۴ هم می‌توان اشتباه باشد (به علت قطعیت در حکم)

۱۴ـ گزینه «۳» با در نظر گرفتن متغیرهای $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ به عنوان متغیرهای پایه‌ای و متغیرهای x_4, x_3, x_5, x_6 به عنوان متغیر غیرپایه‌ای داریم:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1 \Rightarrow (0,1,0,0,0,0)$$

که یک جواب پایه‌ای شدنی تباهیده است.

با در نظر گرفتن متغیرهای $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ به عنوان متغیر پایه‌ای داریم:

$$\begin{cases} 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_3 = \frac{4}{3}, x_4 = \frac{1}{3} \Rightarrow (0,0,\frac{4}{3},\frac{1}{3},0,0)$$

که یک جواب پایه‌ای شدنی است. ولی متغیرهای $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$ نمی‌توانند پایه‌ای باشند چون دترمینان ضرایب آنها صفر است.

۱۵ـ گزینه «۴» اگر بردار b ترکیب خطی نامنفی از ستون‌های A باشد، داریم: $a_1x_1^\circ + \dots + a_nx_n^\circ = b$ که: $x_j^\circ \geq 0$ و در نتیجه: $[a_1,\dots,a_n]\begin{bmatrix} x_1^\circ \\ \vdots \\ x_n^\circ \end{bmatrix} = b$

که $x_j^\circ \geq 0$ و مسأله مورد نظر دارای جواب شدنی است. البته در این سوال x_j ها نامقید هستند و هرگاه b ترکیب خطی از ستون‌های A باشد، کافی است ولی ترکیب خطی نامنفی (pos) زیرمجموعه از ترکیب خطی می‌باشد و بهترین جواب بین گزینه‌ها ۴ است.

$b \in pos\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$ ترکیب‌خطی بردارهای

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = b \qquad \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = b$$
$$\lambda_i \geq 0 \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

۱۶ـ گزینه «۲» اگر متغیری که با مقدار صفر در پایه حضور دارد جهت خروج از پایه انتخاب نشود جواب در مرحله تباهیده (منحط) نخواهد بود.

۱۷ـ گزینه «۲» تعداد متغیرهای پایه با مقدار مثبت در هر BFS غیرتباهیده مسأله $\underset{\substack{AX\leq b \\ x\geq 0}}{\text{Max}}\ cx$ دقیقاً برابر تعداد محدودیت‌هاست. در مسأله $\underset{\substack{s.t. \\ AX=b \\ x\geq 0}}{\text{Max}}\ cx$ که $A_{m\times n}$، اگر $R(A) = m$ در این صورت تعداد متغیر پایه‌ای با مقدار مثبت در هر BFS غیرتباهیده دقیقاً m (تعداد محدودیت‌ها) است، اما اگر $R(A) < m$، در این حالت مسأله دارای محدودیت زائد (وابسته) می‌باشد و این محدودیت زائد در همه جواب‌های پایه‌ای شدنی فعال است (چرا؟)، بنابراین همه BFSهای مسأله تباهیده هستند.

۱۸ـ گزینه «۴» هر تغییری در مدل LP که باعث بزرگ‌تر شدن فضای موجه شود ممکن است موجب بهبود مقدار بهینه هدف (Z^*) گردد و یا ممکن است ثابت بماند. ولی مقدار بهینه بدتر نخواهد شد. افزودن متغیر جدید به مدل ۲ موجب افزایش ابعاد فضای موجه و گسترش آن می‌شود، در نتیجه مقدار بهینه مدل ۱ از مدل ۲ بدتر نخواهد بود و از آنجایی که مسأله Min سازی است $Z_2^* \geq Z_1^*$ خواهد بود.

توجه: مواردی چون افزودن متغیر جدید به مسأله، حذف یک محدودیت از مسأله، اضافه کردن به مقدار سمت راست محدودیت کوچکتر مساوی و ... موجب بزرگتر شدن فضای موجه و حذف یک متغیر از مدل، اضافه کردن محدودیت و کاهش مقدار سمت راست یک محدودیت کوچکتر مساوی و ... موجب کوچک شدن فضای موجه می‌شود.

۱۹ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. هر متغیری که در تابع هدف دارای ضریب مثبت است (مانند x_1 و x_4 و x_5) به آن مقدار ۵- را اختصاص می‌دهیم و هر متغیر که در تابع هدف دارای ضریب منفی است (مانند x_2 و x_3 و x_6) به آن مقدار ۱۰ را اختصاص می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^* = x_4^* = x_5^* = -5 \Rightarrow (2+3+8)\times(-5) = -65 \\ x_2^* = x_3^* = x_6^* = 10 \Rightarrow (-6-1-4)\times 10 = -110 \end{array}\right. \Rightarrow Z^* = -175$$

۲۰ـ گزینه «۳» یک جواب شدنی برای این مسأله $x_1=0$ و $x_2=0$ و .... و $x_n=0$ است.

۲۱ـ گزینه «۲» **راه حل اول:** با توجه به جدول، پایه بهینه عبارت است از: $B=[a_1\; a_5\; a_3]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ و نیز با توجه به جدول

$B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 1 & \beta\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$ و چون $B^{-1}B=I$ پس $\beta=1$.

راه حل دوم: برای متغیر x_3 داریم:

$$\bar{a}_3=B^{-1}a_3 \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 1 & \beta\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow \beta=1$$

جدول این مسأله کلاً مشکل دارد و جدول اصلی به شکل زیر است:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_1	۱	$-\frac{1}{3}$	۰	$\frac{1}{3}$	۰	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	۰	۲	۰	۰	۱	۱	۶
x_3	۰	$\frac{2}{3}$	۱	$\frac{1}{3}$	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
z	۰	۴−	۰	۱−	۰	۲−	۱۷−

و اگر در بدست آوردن B از متغیرهای سطر تابع هدف استفاده می‌کردیم به مشکل برخورد می‌کردیم.

۲۲ـ گزینه «۳» جدول داده شده بهینه است و چون تابع هدف Min سازی است و اعداد موجود در سطر تابع هدف نامنفی هستند پس، اعداد موجود در سطر تابع هدف به صورت C_j-Z_j بیان شده‌اند.

$$C_2-Z_2=4\Rightarrow C_2-C_B\bar{a}_2=4\Rightarrow 1-(1,0,-4)\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ 2\\ \alpha\end{pmatrix}=4\Rightarrow 1-(-\frac{1}{3}+0-4\alpha)=4\Rightarrow \alpha=\frac{2}{3}$$

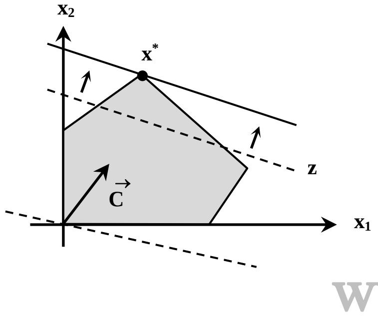
توجه: با کمی دقت به سؤال قبل ملاحظه می شود که بدون حل می‌توان گفت: $\alpha=\frac{2}{3}$.

۲۳ـ گزینه «۱» طبق گفته مسأله متغیر S_2 برای خروج از پایه انتخاب شده است پس، در حل متناظر با نقطه A متغیر کمکی S_2 در پایه قرار دارد و در نقطه A داریم $S_2=0$. چون $S_2=0$ برای خروج از پایه انتخاب شده مقدار تست مینیمم نسبت، صفر است و متغیری که به‌جای S_2 وارد پایه می‌شود در جدول بعدی مقدار صفر را اختیار می‌کند یعنی، در جدول بعدی نیز یک حل منحط را داریم و مجدداً در نقطه A قرار می‌گیریم.

۲۴ـ گزینه «۳» از آنجایی که متغیر x_3 دارای بیشترین ضریب در تابع هدف است به همین دلیل به عنوان انشعاب انتخاب می‌شود.

۲۵ـ گزینه «۲»

نقطه بهینه تباهیده متناظر با جدول داده شده عبارت است از: $(2,0,0,0)$ با ورود x_3 و خروج x_2 از پایه باز هم به این نقطه می‌رسیم. از نظر هندسی حالت زیر رخ داده است.



۲۶ـ گزینه «۱» راه‌حل اول: با تغییر متغیر $x_2 = x_2' - 1$ و استفاده از متغیرهای کمکی داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2' + x_3 = 6 \\ -x_1 + 2x_2' + x_4 = 6 \\ x_1 + S_1 = 4 \\ x_2' + S_2 = 5 \\ x_1, x_2', S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

$(x_1 = 4, x_2' = 0, x_3 = 2, x_4 = 10, S_1 = 0, S_2 = 5)$ یک جواب پایه‌ای شدنی برای این دستگاه است زیرا در همه معادله‌ها صدق کرده و ستون‌های متناظر با مؤلفه‌های غیرصفر مستقل خطی‌اند.

راه‌حل دوم: طبق سیمپلکس کراندار برای این مسأله ۲ متغیر پایه (x_3, x_4) نیاز است و دو متغیر (x_1, x_2) که x_1 در کران بالا و x_2 در کران پایین قرار گرفته است، غیرپایه‌ای می‌باشند و با صدق در محدودیت‌ها و بررسی مستقل بودن (x_3, x_4) این جواب، پایه‌ای موجه می‌باشد.

۲۷ـ گزینه «۴» در صورت نامحدود بودن فضای موجه مسأله ممکن است جواب بهینه محدود یا نامحدود داشته باشد.

۲۸ـ گزینه «۴» اگر متغیر خروجی منحصر به فرد نباشد در مرحله بعد تباهیدگی رخ می‌دهد.

۲۹ـ گزینه «۳» با توجه به $\bar{b} = B^{-1}b$ داریم:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow b = \frac{11}{5}$$

۳۰ـ گزینه «۳»

راه حل اول: اگر متغیرهای $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$ را پایه‌ای فرض کنیم و متغیرهای x_1, x_3 را غیرپایه‌ای $(x_1 = x_3 = 0)$ داریم :

$$\begin{cases} -x_2 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 5$$

بنابراین به نقطه پایه‌ای شدنی ناتباهیده $(0, 1, 0, 2)$ می‌رسیم

با نوشتن دوگان داریم :

$$\begin{aligned} &\text{Max } w = y_1 + 3y_2 \\ &\text{s.t.} \\ &\quad -y_1 \leq 2 \\ &\quad -y_1 + y_2 \leq 3 \\ &\quad -y_2 \leq -1 \\ &\quad y_1 + y_2 \leq 1 \end{aligned}$$

چون $x_4 = 2, x_2 = 1$ با در نظر گرفتن قضیه مکمل زائد $x_4 \times v_4 = 0, x_2 \times v_2 = 0$. پس: $v_2 = v_4 = 0$، یعنی قید ۲ و ۴ دوگان به صورت تساوی هستند:

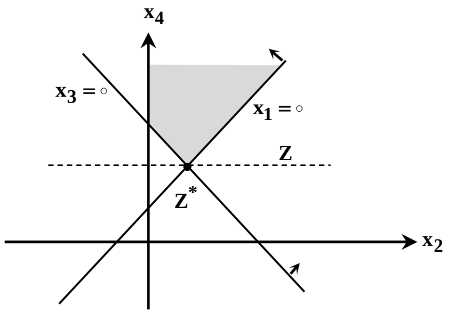
$$\begin{cases} -y_1 + y_2 = 3 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \rightarrow y_1 = -1, y_2 = 2 \rightarrow w = 5$$

چون مقادیر تابع هدف اولیه و دوگان برابر شدند پس پایه $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$ بهینه است.

راه حل دوم: اگر متغیرهای x_1 و x_3 را به ترتیب متغیرهای مازاد محدودیت‌های اول و دوم در نظر بگیریم داریم:

$$\begin{aligned} &\text{Min } Z = 2x_4 + 1 \\ &\text{s.t} \\ &\quad -x_2 + x_4 \geq 1 \\ &\quad x_2 + x_4 \geq 3 \\ &\quad x_i \geq 0 \end{aligned}$$

دقت شود که برای حذف متغیرهای x_1 و x_3 از سطر هدف، محدودیت اول در ۲ و محدودیت دوم در ۱- ضرب شده و با سطر هدف جمع می‌شوند. همانطور که از نمودار مشخص است جواب بهینه $(x_2 = 1, x_4 = 2, x_1 = 0, x_3 = 0)$ می‌باشد.



۳۱ـ گزینه «۱» با ورود x_1 به پایه و خروج S_2 به نقطه بهینه جدیدی می‌رسیم، ولی مقدار بهینه تابع هدف عوض نمی‌شود.

	x_1	x_2	S_1	S_2	
Z	0	0	2	0	42
x_2	0	1	$\frac{49}{315}$	$-\frac{2}{45}$	$\frac{7}{3}$
x_1	1	0	$-\frac{2}{45}$	$\frac{7}{45}$	$\frac{7}{3}$

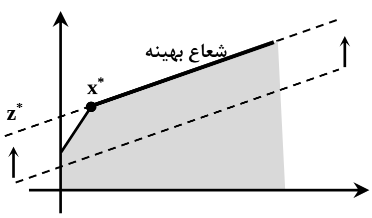
۳۲ـ گزینه «۳» چون تابع هدف مینیمم سازی است و ضرایب x_6, x_5 در تابع هدف منفی است پس، $x_5 = x_6 = 6$ در نتیجه، محدودیت اول به صورت $2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 28$ در می‌آید. حال از بین سایر متغیرها، متغیری را انتخاب می‌کنیم که نسبت ضریب تابع هدف آن به ضریب محدودیتش کم‌ترین مقدار را داشته باشد.

$$\text{Min}\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}\right\} = \frac{2}{5} \Rightarrow x_2 \text{ انتخاب می‌شود} \qquad x_2 = \frac{28}{5} \Rightarrow Z = -54/8$$

۳۳ـ گزینه «۳» در بردار ستونی $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ عنصر لولا ۲ است زیرا متغیر خروجی از پایه دومین متغیر پایه‌ای است. باید این ستون به $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ تبدیل گردد و این تغییرات روی پایه $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ نیز اعمال گردد.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

۳۴ـ گزینه «۲» متغیر x_3 در سطر هدف با مقدار صفر، شرایط ورود به پایه را دارد اما متغیر خروجی نداریم. پس مسأله دارای شعاع بهینه مانند شکل روبه‌رو است.



۳۵ـ گزینه «۴» در این روش فقط از یک متغیر مصنوعی استفاده می‌کنیم و یک جواب پایه‌ای موجه برای مسأله اصلی می‌یابیم.

۳۶ـ گزینه «۴» مقدار بهینه تابع هدف در مسأله (۱) و (۲) به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} W^* = (\alpha C_B)B^{-1}b = \alpha C_B B^{-1}b \\ Z^* = C_B B^{-1}(\beta b) = \beta C_B B^{-1}b \end{cases} \Rightarrow \frac{W^*}{Z^*} = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow W^* = \frac{\alpha}{\beta} Z^*$$

۳۷ـ گزینه «۲» **قضیه:** فضای موجه سیستم $\begin{cases} AX \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$ بی‌کران است $\Leftrightarrow$ سیستم همگن نظیر آن یعنی $\begin{cases} Ad \le 0 \\ d \ge 0 \end{cases}$ جواب غیرصفر داشته باشد.

گزینه (۱) چون نگفته جواب غیرصفر، پس غلط است.

در گزینه (۲) می‌دانیم که مجموعه جواب‌های سیستم $\begin{cases} Ad = 0 \\ d \ge 0 \end{cases}$ زیرمجموعه جواب‌های شدنی سیستم $\begin{cases} Ad \le 0 \\ d \ge 0 \end{cases}$ است، بنابراین از آنجا که سیستم $\begin{cases} Ad = 0 \\ d \ge 0 \end{cases}$ جواب غیرصفر دارد، می‌توان گفت سیستم $\begin{cases} Ad \le 0 \\ d \ge 0 \end{cases}$ نیز جواب غیرصفر دارد.

گزینه (۳): با توجه به این جمله می‌توان به نادرست بودنش پی برد:

اگر ناحیه شدنی بی‌کران باشد می‌تواند دارای جواب بهینه محدود و یا نامحدود داشته باشد. پس حتماً دارای شعاع بهینه نمی‌باشد.

گزینه (۴) : با توجه به این که اگر وجود داشت متغیر غیرپایه‌ای که شرط ورود به پایه را داشته باشد و خارج شونده‌ای موجود نباشد مسأله بی‌کران می‌باشد. (فرض کنید متغیر غیرپایه‌ای x_k باشد)

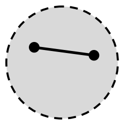
$$d = \begin{pmatrix} -y_k \\ e_k \end{pmatrix} \;,\; C = (C_B, C_N) \Rightarrow Cd = C_B(-y_k) + C_N(e_k) = -z_k + c_k = -(z_k - c_k)$$

برای مسأله minسازی شرط ورود $z_k - c_k > 0$ پس $cd = -(z_k - c_k) < 0$ می‌باشد.

برای مسأله max سازی شرط ورود $z_k - c_k < 0$ پس $cd = -(z_k - c_k) > 0$ می‌باشد.

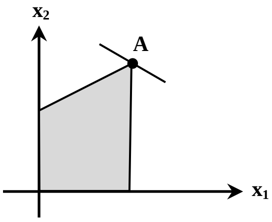
۳۸ـ گزینه «۴»

گزینه «۱» غلط است زیرا مجموعه زیر محدب است ولی هیچ نقطه رأسی ندارد:



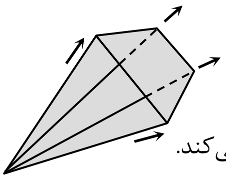
مجموعه محدب فاقد نقطه رأسی

گزینه «۲» غلط است زیرا در شکل مقابل نقطه A تبهگن با درجه تباهیدگی ۱ است. در حالی که مجموعه محدب داده شده ۲ بعدی است. $(n = 2)$



۱= تعداد قید اضافی گذرنده از نقطه A = درجه تباهیدگی نقطه A

گزینه «۳» غلط است زیرا در شکل زیر ۴ جهت دور شونده رأسی وجود دارد در حالی که مجموعه محدب داده شده ۳ بعدی است. $(n = 3)$



نکته: هر نقطه رأسی چند وجهی $\begin{cases} A_{m\times n}X = b \\ x \ge 0 \end{cases}$ که $R(A) = m$، حداقل به تعداد بعد فضای جواب $(n-m)$ یال عبور می‌کند.

۳۹ـ گزینه «۳» مسأله $\underset{\substack{s.t.\\ x_1+x_2\ge 1 \quad (*) \\ x_1,x_2 \ge 0}}{\text{Min}}\; Z = 2x_1 + x_2$ مفروض است. جواب بهینهٔ این مسأله $x^*(x_1^* = 0, x_2^* = 1)$ و $z^* = 1$ است.

اگر C_1 از ۲ به ۰ کاهش یابد، در این صورت جواب بهینه مسأله جدید $x^*(x_1'^* = 1, x_2'^* = 0)$ خواهد بود و $x_1'^* = 1$ که در مقایسه با $x_1^* = 0$، ملاحظه می‌شود که با کاهش C_1 مقدار x_1^* افزایش یافته پس گزینه (۱) غلط است.

گزینه (۲) نیز غلط است زیرا با کاهش b_j ناحیه شدنی بزرگتر می‌شود و در نتیجه مقدار بهینه تابع هدف بدتر نمی‌شود، یعنی Z^* افزایش نمی‌یابد.

گزینه (۴) نیز غلط است زیرا اگر در مسأله $(*)$ مقدار C_1 از ۲ به ۰ کاهش یابد و مقدار a_{11} از ۱ به ۲ افزایش یابد، جواب بهینه مسأله جدید $x^*(x_1^* = \frac{1}{2}, x_2^* = 0)$ خواهد بود که مقدار x_1^* از ۰ به $\frac{1}{2}$ افزایش یافته است.

۴۰ـ گزینه «۲» متغیر x_2 غیرپایه‌ای است بنابراین داریم: $x_2 = 0$

با مقایسه محدودیت اول و دوم مشخص است که محدودیت اول زائد بوده و محدودیت ۲ و ۳ فعال می‌باشند.

$$\begin{cases} 8x_1 + x_3 \le 48 \\ 8x_1 + 3x_3 \le 40 \\ 4x_1 + x_3 \le 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x_1 + 3x_3 = 40 \\ 4x_1 + x_3 = 16 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2\ ,\ \ x_3 = 8\ ,\ \ S_1 = 24 \Rightarrow Z^* = 280$$

۴۱ـ گزینه «۴» اگر $x^* = B^{-1}b$ جواب بهینه مسأله I باشد در این صورت جواب بهینه مسأله II به صورت $y^* = \beta.B^{-1}b$ است و در نتیجه داریم:

$$w^* = C_B(\alpha.\beta.B^{-1}b) = \alpha\beta(\underbrace{C_B B^{-1}b}_{z^*} = \alpha\beta.z^* \Rightarrow z^* = \frac{w^*}{\alpha\beta}$$

۴۲ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. ابتدا با استفاده از متغیرهای کمکی داریم :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - S_1 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + S_2 = 6 \\ \quad x_i, S_i \ge 0 \end{cases}$$

اکنون هر گزینه را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱ : $(x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, s_1 = 0, s_2 = 1)$ نقطه‌ای شدنی است، ولی BFS(نقطه گوشه‌ای) نیست چون تعداد مؤلفه غیرصفر آن بیشتر از رتبه ماتریس ضرایب (یعنی ۲) است.

گزینه ۲: $(x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, s_1 = 1, s_2 = -1)$ نقطه نشدنی است.

گزینه ۳: $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1/5, s_1 = 0, s_2 = 0)$ نقطه شدنی است و ستون متناظر با مؤلفه غیرصفر مستقل خطی است ولی تعداد مؤلفه غیرصفرآن کمتر از رتبه ماتریس ضرایب است. پس، BFS تباهیده است.

گزینه ۴: $(x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, s_1 = 0, s_2 = 0)$ یک نقطه شدنی است ولی چون ستون‌های متناظر مؤلفه‌های غیرصفر وابسته خطی‌اند و همچنین $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ بنابراین پایه‌ای نمی‌باشد و هیچ‌کدام ازگزینه‌ها صحیح نیست.

۴۳ـ گزینه «۲» فضای شدنی هر دو مسأله ۱و۲ یکسان است. X° نقطه بهینه مسأله ۱ می‌باشد پس، یک نقطه شدنی برای مسأله ۲ است. اما ازطرفی $X^{\circ\circ}$ نقطه بهینه مسأله ۲ است پس: $C'X^{\circ\circ} \le C'X^{\circ}$ یعنی خواهیم داشت: $C'_1X_1^{\circ\circ} + \dots + C'_nX_n^{\circ\circ} \le C'_1X_1^{\circ} + \dots C'_nX_n^{\circ}$

۴۴ـ گزینه «۳» متغیر x_5 منفی‌ترین ضریب در سطر هدف را داشته و متغیر ورودی است. برای تعیین متغیر خروجی نیز داریم:

$$\gamma_1 = \min\left\{\frac{15-0}{4}, \frac{8-0}{6}\right\} = \frac{4}{3} \qquad \gamma_2 = \min\left\{\frac{15-4}{-(-7)}, \frac{5-2}{-(-1)}\right\} = \frac{11}{7} \qquad \Delta = \min\left\{\frac{4}{3}, \frac{11}{7}\right\} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$ x_2 متغیر خروجی است

مقدار تابع هدف در جدول بعد عبارت است از: $Z = 0 - (Z_5 - C_5)\Delta = 0 - (-2) \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

۴۵ـ گزینه «۲و۳و۴» اگر x' را جواب بهینه مسأله (۱) $\underset{\substack{s.t \\ AX \le b \\ x \ge 0}}{\text{Max}}\ Z_1 = C'X$ فرض کنیم و جواب بهینه مسأله (۲) $\underset{\substack{s.t \\ AX \le b \\ x \ge 0}}{\text{Max}}\ Z_2 = C''X$ را x'' می‌نامیم.

x' یک نقطه شدنی مسأله (۲) و x'' یک نقطه شدنی مسأله (۱) است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} Z_1(X'') \le Z_1(X') \\ Z_2(X') \le Z_2(X'') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C'X'' \le C'X' \quad (1) \\ C''X' \le C''X'' \xrightarrow{\text{در ۱- ضرب}} -C''X'' \le -C''X' \quad (2) \end{cases}$$

$$(1)+(2) \to C'X'' - C''X'' \le C'X' - C''X' \Rightarrow C'X'' - C''X'' - C'X' + C''X' \le 0 \to (C' - C'')(X'' - X') \le 0$$

پس هر سه گزینه ۲و۳و۴ صحیح می‌باشند.

۴۶ـ گزینه «۳» رتبه را با استفاده از اعمال سطری مقدماتی می‌یابیم، بنابراین می‌توان نوشت:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۵ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{سطری مقدماتی}]{\text{با استفاده از اعمال}} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(A)=۲$$

$$[A \vdots b]=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۱۰ \\ ۱ & ۶ & ۱۲ \\ ۳ & ۵ & ۸ \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{سطری مقدماتی}]{\text{با استفاده از اعمال}} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(A \vdots b)=۳$$

$\Rightarrow R(A\,|\,b) \neq R(A) \Rightarrow AX=b$ دستگاه فاقد جواب است.

راه دیگر تشخیص رتبه $[A \vdots b]$ آن است که دترمینان این ماتریس مخالف صفراست پس هر ۳ ستون مستقل خطی هستند، بنابراین رتبه آن ۳ است.

۴۷ـ گزینه «۲» افزودن متغیرهای کمکی تعداد نقاط گوشه فضای شدنی را تغییر نمی‌دهد.

۴۸ـ گزینه «۲» چون ستون a_j مضربی از a_k است پس این دو ستون وابسته خطی‌اند و همزمان در یک پایه حضور ندارند. بنابراین متغیرهای نظیر آنها یعنی x_k, x_j نیز همزمان نمی‌توانند متغیر پایه‌ای باشند و در هر BFS حداقل یکی از آنها غیرپایه‌ای است و مقدار صفر دارد. پس در هر BFS ازجمله جواب بهینه $x_j.x_k=۰$.

۴۹ـ گزینه «۳» با توجه به صورت سؤال می‌دانیم: $a_۱=\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}, a_۲=\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}$ و همچنین اگر B پایه بهینه باشد، جواب بهینه مسأله ثانویه عبارت است از: $y^*=(y_۱^*, y_۲^*)=C_B B^{-۱}$. از آنجا که $Z_۱-C_۱=۵$ ، $Z_۲-C_۲=۴$ بنابراین:

$$Z_۱-C_۱=C_B B^{-۱}a_۱-c_۱ \to ۵=(y_۱^*, y_۲^*)\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}-۴ \to y_۱^*=۹$$

$$Z_۲-C_۲=C_B B^{-۱}a_۲-c_۲ \to ۴=(y_۱^*, y_۲^*)\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}-(-۲) \to y_۲^*=۲$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$z^*=w^*=C_B B^{-۱}b=y^*b \Rightarrow z^*=(۹,۲)\begin{pmatrix} b_۱ \\ b_۲ \end{pmatrix} \Rightarrow z^*=۹b_۱+۲b_۲$$

۵۰ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. برای $n=۳$ مسأله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\underset{s.t}{\text{Min}}\, Z=(۰,۰,\alpha)\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{pmatrix} \\ &\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \\ &x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰ \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} &\underset{s.t}{\text{Min}}\ \ Z=\alpha x_۳ \\ &x_۱ \le ۱ \\ &-۲x_۱+x_۲ \le ۱ \\ &-۲x_۲+x_۳ \le ۱ \\ &x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰ \end{aligned}$$

حل داده شده در گزینه (۲)، یعنی: $x=(x_۱=۳, x_۲=۳, x_۳=۳)$، حل شدنی نمی‌باشد. حل داده شده در گزینه (۳)، یعنی: $x=(x_۱=۱, x_۲=۳, x_۳=۳)$ حل شدنی است ولی غیراساسی است. زیرا با فرض اینکه $S_۱, S_۲, S_۳$ متغیرهای کمکی قیود هستند داریم: $x=(x_۱=۱, x_۲=۳, x_۳=۳, S_۱=۰, S_۲=۰, S_۳=۴)$ که تعداد مؤلفه‌های مثبت آن ۴ تا می‌باشد، بنابراین یک حل شدنی غیراساسی است. حل داده شده در گزینه (۴)، یعنی: $x=(x_۱=۱, x_۲=۲, x_۳=۲)$ حل شدنی ولی غیراساسی است. (چرا؟)

گزینه (۱) نیز غلط است، زیرا با همین اطلاعات داده شده می‌توان جواب شدنی اساسی $x=(x_۱=۳, x_۲=۳, x_۳=۷)$ را برای مسأله پیشنهاد کرد. پس هر ۴ گزینه غلط می‌باشند.

۵۱ـ گزینه «۴» چون $A_۲X^* > b_۲$ پس محدودیت‌های $A_۲X > b_۲$ در نقطه x^* غیرفعال هستند و با حذف محدودیت‌های غیرفعال، جواب بهینه عوض نمی‌شود. پس جواب بهینه مسأله $\underset{\substack{A_۱X\ge b_۱\\ x\ge ۰}}{\mathrm{Min}\,Cx}$ همان نقطه x^* است.

۵۲ـ گزینه «۴» هر جواب اساسی شدنی (BFS) متناظر یک رأس S است. باید توجه داشت که هر رأس S ممکن است متناظر چند جواب پایه‌ای باشد. (در حالت تباهیدگی)

۵۳ـ گزینه «۴» اگر $S_۲$ و $S_۳$ را متغیرهای کمکی محدودیت‌های دوم و سوم درنظر بگیریم، با قراردادن مقادیر $x_۱ = ۶$ ، $x_۲ = ۰$ ، $x_۳ = ۱$ ، $x_۴ = ۰$ ، $x_۵ = ۱$ ، $x_۶ = ۰$ و $x_۷ = ۰$ در دستگاه داریم: $S_۲ = ۳$ و $S_۳ = ۲$.

پس این جواب دارای ۵ مؤلفه غیرصفر است و در نتیجه جواب پایه‌ای نمی‌باشد و به ازای این جواب مقدار تابع هدف $Z = -۴$ است. با نوشتن قیود مسأله دوگان ملاحظه می‌شود که نقطه داده شده در گزینه (۴) یعنی: $y_۱ = -۲, y_۲ = ۰, y_۳ = ۰, y_۴ = ۳$ در قیود دوگان صدق می‌کند و همچنین مقدار تابع دوگان برابر:

$$w = yb = (-۲,۰,۰,۳)\begin{pmatrix} ۵ \\ -۱ \\ ۵ \\ ۲ \end{pmatrix} = -۴$$

می‌باشد. بنابراین جواب غیرپایه‌ای $x_۱ = ۶, x_۲ = ۰, x_۳ = ۱, x_۴ = ۰, x_۵ = ۱, x_۶ = ۰, x_۷ = ۰$ جواب بهینه مسأله اولیه است، می‌توان نتیجه گرفت که مسأله اولیه، جواب بهینه چندگانه دارد و دوگان جواب بهینه تباهیده دارد.

۵۴ـ گزینه «۳» متغیرهای $S_۱$ و $S_۲$ کمکی هستند و ماتریس زیر آنها در هر جدول سیمپلکس همان $B^{-۱}$ است. پس $B^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و داریم: $\bar{a}_۲ = B^{-۱}a_۲$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۳ \end{pmatrix}$$

۵۵ـ گزینه «۲» با استفاده از ماتریس $B^{-۱}$ داریم:

$$\bar{a}_۳ = B^{-۱}a_۳ \Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

۵۶ـ گزینه «۴»

$$Z_۳ - C_۳ = f \Rightarrow C_B\bar{a}_۳ - C_۳ = f \Rightarrow (-۲,۰)\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} - (-۱) = f \Rightarrow f = -۱$$

۵۷ـ گزینه «۳» ضریب سطر هدف متغیر $s_۱$ با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$Z_{s_۱} - C_{s_۱} = h \Rightarrow C_B\bar{a}_{s_۱} - C_{s_۱} = (-۲,۰)\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} - ۰ = h \Rightarrow h = -۲$$

۵۸ـ گزینه «۳» با استفاده از ماتریس $B^{-۱}$ داریم:

$$\bar{b}' = B^{-۱}b' = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۳ \\ ۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳ \\ ۷ \end{pmatrix}$$

۵۹ـ گزینه «۲» می‌دانیم $(Z_۲ - C_۲)_{new} = (Z_۲ - C_۲)_{old} - \Delta C_۲$ بنابراین داریم:

$$(Z_۲ - C_۲)_{new} = -۳ - (-۳ - ۱) = -۳ + ۴ = ۱$$

۶۰ـ گزینه «۱» با اضافه کردن متغیر جدید ناحیه شدنی کوچکتر نشده و در نتیجه مقدار بهینه تابع هدف بدتر نخواهد شد.

۶۱ـ گزینه «۱» چون اعداد سمت راست نامنفی هستند، جواب $x_۱ = x_۲ = \ldots = x_n = ۰$ در همه قیود صدق می‌کند.

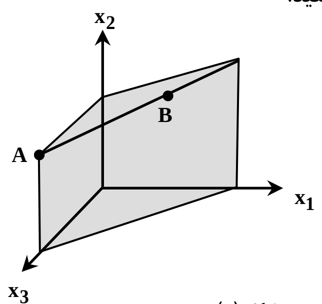
۶۲ـ گزینه «۴» چون بعد فضای جواب n است پس، در حل مربوط به هر مرحله سیمپلکس حداقل n تا از محدودیت‌ها به شکل تساوی در می‌آیند. همچنین چون دوتا از متغیرهای اساسی مقدار صفر دارند پس، جواب مربوط تباهیده است. بنابراین در گوشه متناظر با این جواب بیش از n محدودیت فعال (به صورت تساوی) وجود دارد. همچنین دو متغیر اساسی با مقدار صفر وجود دارد و درجه تباهیدگی ۲ است یعنی، $n + ۲$ محدودیت، به صورت تساوی هستند.

۶۳ـ گزینه «۴» می‌دانیم مقادیر متغیرهای دوگان C_BB^{-1} است. یعنی $w = C_BB^{-1}$ بنابراین خواهیم داشت:

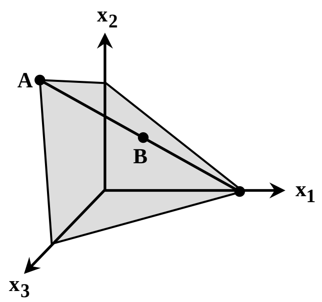
$$\left(C_{B_1}, C_{B_2}, C_{B_3}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,1,1) \Rightarrow \begin{cases} C_{B_1} = 1 \\ C_{B_1} + C_{B_2} = 1 \Rightarrow C_{B_2} = 0 \\ C_{B_2} + C_{B_3} = 1 \Rightarrow C_{B_3} = 1 \end{cases}$$

۶۴ـ گزینه «۲» هیچگاه افزودن متغیر کمکی به یک مسأله باعث بزرگتر شدن ناحیه شدنی نخواهد شد. ولی با افزودن یک متغیر مصنوعی یا یک متغیر اصلی به مسأله ممکن است ناحیه شدنی بی‌کران شود. گزینه (۱) غلط است زیرا کلمه «فقط» ذکر شده است.

۶۵ـ گزینه «۴» می‌خواهیم همزمان با تولید محصولات x_3, x_2 از محصول x_1 هم تولید کنیم. یعنی مقدار x_1 را از صفر به مقداری مثبت افزایش دهیم. به شکل‌های زیر توجه کنید:



شکل (۱)



شکل (۲)

در شکل (۱) و (۲) در نقطه A متغیرهای x_3, x_2 مقدار مثبت دارند (پایه‌ای هستند) و متغیر x_1 مقدار صفر دارد (غیرپایه‌ای است). در شکل (۱) اگر از نقطه A به نقطه B حرکت کنیم در نقطه B داریم $x_3 > 0, x_2 > 0, x_1 > 0$ و با تولید محصول x_1 مقدار x_3 کاهش می‌یابد و مقدار x_2 افزایش یافته است.

در شکل (۲) در نقطه B داریم $x_1 > 0$ و $x_2 > 0$ و $x_3 > 0$ یعنی هر سه محصول تولید می‌شوند و با تولید x_1 مقدار x_2 و x_3 کاهش یافته است. در هر دو شکل مقدار تابع هدف در نقطه B کمتر از مقدار تابع هدف در نقطه A است یعنی با تولید محصل x_1 مقدار تابع هدف بهتر نمی‌شود. همچنین می‌توان شکل را به گونه‌ای طرح کرد که تولید x_1 باعث افزایش تولید x_2 و x_3 شود.

۶۶ـ گزینه «۲» برای اینکه جواب جدول نهایی ثابت بماند باید به ازای مقادیر سمت راست جدول شدنی باقی بماند یعنی:

$$\bar{b} = B^{-1}b \geq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - \frac{b_2}{3} \geq 0 \\ \frac{b_2}{3} \geq 0 \\ b_3 \geq 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} b_1 \geq \frac{b_2}{3} \\ b_2 \geq 0 \\ b_3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow 3b_1 \geq b_2 \geq 0 \ , \ b_3 \geq 0$$

۶۷ـ گزینه «۴» جواب داده شده در هر کدام از گزینه‌ها را در محدودیت‌های مسأله قرار می‌دهیم:

اگر $\theta \rightarrow +\infty$ این جواب نشدنی است (قید ۱ و ۳ نقض می‌شوند).

$$\text{گزینه ۱} : X(\theta) = (\theta, 10, 0, \theta) \rightarrow \begin{cases} 3\theta \leq 48 \\ -2\theta \leq 0 \\ 2\theta \leq 13 \end{cases}$$

اگر $\theta \rightarrow +\infty$ این جواب نشدنی است (قید ۱ و ۲ نقض می‌شوند).

$$\text{گزینه ۲} : X(\theta) = (\theta, 0, 8 + \theta, 0) \rightarrow \begin{cases} \theta \leq 16 \\ 3\theta \leq -6 \\ -3\theta \leq 35 \end{cases}$$

اگر $\theta \to +\infty$ این جواب نشدنی است (قید ۱ و ۲ نقض می‌شوند).

$$\text{گزینه ۳}: X(\theta) = (10+2\theta, 0, \theta, 0) \to \begin{cases} 3\theta \le -12 \\ 4\theta \le 0 \\ -2\theta \le -7 \end{cases}$$

$$\text{گزینه ۴}: X(\theta) = (0, 10+3\theta, 0, \theta) \to \begin{cases} -11\theta \le 48 \\ 10 \le 10 \\ -2\theta \le 13 \end{cases}$$

اگر $\theta \to +\infty$، هر سه قید برقرارند و مقدار تابع هدف $X_0(\theta) = 7\theta + 20$ که اگر $\theta \to +\infty$، در این صورت $X_0(\theta) \to +\infty$.

۶۸ـ گزینه «۳» بزرگترین اختلاف سمت راست و چپ معادلات را x_0 می‌نامیم: $|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i| \le x_0$ for $i = 1,\dots,m$ می‌خواهیم x_0 را مینیمم کنیم:

$$\begin{aligned} &\text{Min } x_0 \\ &\text{s.t} \end{aligned}$$

$$|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i| \le x_0 \equiv -x_0 \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \le x_0 \equiv \begin{cases} x_0 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge -b_i \\ x_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \end{cases} \quad \text{for} \quad i = 1,\dots,m$$

۶۹ـ گزینه «۱» راه‌حل اول: با توجه به جدول داده شده، معادلات زیر را داریم:

$$\begin{cases} x_3 - 5x_4 - x_5 = 17 \\ x_1 - 3x_4 - x_5 = 18 \\ x_2 - x_5 = 11 \end{cases}$$

فقط گزینه (۱) در معادلات اخیر صدق می‌کند.

راه‌حل دوم: متغیر x_4 شرط ورود را با مقدار صفر دارا بوده ولی متغیر خروجی نداریم، پس شعاع بهینه داریم. جهت دور شونده برای x_4 عبارت است از:

$$d_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} \Rightarrow \text{شعاع متناظر } x_4 \text{، } \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{pmatrix} + d_4.x_4 = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 17 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 18 + 3x_4 \\ x_2 = 11 \\ x_3 = 17 + 5x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

برای اینکه $x_1 = 24$ شود، باید $x_4 = 2$ باشد. پس با فرض $x_4 = 2$ داریم:

$$x_1 = 24 \ , \ x_2 = 11 \ , \ x_3 = 27 \ , \ x_4 = 2 \ , \ x_5 = 0$$

پس جواب درست گزینه (۱) است که یک نقطه روی شعاع بهینه مسأله می‌باشد.

۷۰ـ گزینه «۴» اگر $Z_k - C_k$ منفی‌ترین مقدار در بین $Z_j - C_j$ ها باشد (در مسأله Max سازی) و θ مقدار حاصل از آزمون مینیمم نسبت باشد، در این صورت مقدار افزایش تابع هدف $\Delta z = -(z_k - c_k) \times \theta$ خواهد بود که بسته به مقدار θ ممکن است این افزایش بیشترین نباشد.

۷۱ـ گزینه «۲» اگر x_1 از پایه خارج شود و S_1 یا x_3 به جای آن وارد پایه شوند، طبق تست مینیمم نسبت، x_1 شرط خروج از پایه را دارد و به دو جواب پایه‌ای شدنی مجاور می‌رسیم و اگر x_1 از پایه خارج و S_2 به جای آن وارد شود به یک جواب پایه‌ای نشدنی مجاور می‌رسیم.

۷۲ـ گزینه «۴» اگر x_3 ورودی باشد، چون عنصر متناظر با سطر متغیر خروجی x_1 در ستون x_3 یعنی $0/8$ مثبت است و طبق تست مینیمم نسبت به‌عنوان متغیر خروجی انتخاب می‌شود پس به گوشه مجاور شدنی می‌رسیم. ولی این گوشه غیربهینه است پس مقدار تابع هدف بدتر می‌شود.

۷۳ـ گزینه «۳» برای این منظور باید $Z_۳ - C_۳ = ۰$ باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$Z_۳ - C_۳ = (۳,۲)\begin{pmatrix} ۰/۶ & -۰/۲ \\ -۰/۲ & ۰/۴ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ \\ a_{۲۳} \end{pmatrix} - (-۱) = (۱/۴,۰/۲)\begin{pmatrix} ۱ \\ a_{۲۳} \end{pmatrix} + ۱ = ۲/۴ + ۰/۲a_{۲۳} = ۰ \rightarrow a_{۲۳} = -۱۲$$

یعنی اگر ضریب $x_۳$ در محدودیت $۱۵ \le x_۱ + ۳x_۲ - x_۳$ از ۱- به ۱۲- تغییر یابد، داریم $Z_۳ - C_۳ = ۰$ و جواب بهینه چندگانه خواهیم داشت.

۷۴ـ گزینه «۱» اگر $x_۱$ وارد پایه شود، طبق آزمون مینیمم نسبت، $x_۲$ از پایه خارج می‌شود. در تکرار بعدی متغیرهای پایه‌ای $x_۳, x_۱$ هستند ولی چنین جوابی بهینه نیست، زیرا $x_۱$ شرط ورود به پایه را دارا نیست.

۷۵ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه دترمینان ماتریس بردارهای پایه‌ای غیرصفر نمی‌باشد. بنابراین نمی‌تواند تشکیل یک پایه بهینه را بدهد.

۷۶ـ گزینه «۱» تابع هدف ارائه شده در گزینه (۱) را در سطر تابع هدف جدول قرار می‌دهیم و جدول را به روز می‌کنیم:

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	
z	۱	۰	−۳	۰	۴	
$x_۳$	۰	−۱	۱	−۲	−۱	
$x_۱$	۱	−۲	۰	−۱	۶	

$\longrightarrow$

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	
z	۰	−۱	۰	−۵	−۵	
$x_۳$	۰	−۱	۱	−۲	−۱	
$x_۱$	۱	−۲	۰	−۱	۶	

در جدول به روز شده متغیر $x_۴$ شرط ورود به پایه را داراست ولی متغیر خروجی نداریم. پس فضای شدنی بی‌کران و مقدار بهینه تابع هدف نامتناهی است.

۷۷ـ گزینه «۱» نقاط شدنی مسأله LP یا تهی یا یک نقطه یا بی‌نهایت نقطه است. در این مسأله با توجه بـه اینکـه ضـرایب $x_۲$ در محـدودیت‌هـای کـوچکتر مساوی، منفی می‌باشد و ضریب تابع هدف آن مثبت است پس با افزایش بی‌کران $x_۲$ تابع هدف نیز بی‌نهایت می‌شود. پس فضای جواب نامحدود است.

۷۸ـ گزینه «۳» با تغییر متغیر و افزودن متغیرهای کمکی یک پایه همانی ۳×۳ به دست می‌آید.

۷۹ـ گزینه «۴» با تغییر متغیرهای $x'_۱ = x_۱ - ۲$ و $x'_۲ = x_۲ - ۶$ و $x'_۳ = x_۳ - ۴$ مسأله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z' = ۱۰x'_۱ + ۵x'_۲ - ۸x'_۳ - ۱۸ \\
&\text{S.t.} \\
&\quad x'_۱ - ۲x'_۲ + ۳x'_۳ \le ۸ \\
&\quad ۲x'_۱ - ۳x'_۲ + ۴x'_۳ \le ۱۸ \\
&\quad ۴x'_۱ - ۹x'_۲ + ۱۰x'_۳ \le ۳۶ \\
&\quad x'_۱, x'_۲, x'_۳ \ge ۰
\end{aligned}$$

با استفاده از روش سیمپلکس، مسأله اخیر قابل حل است.

۸۰ـ گزینه «۳» با توجه به جدول، پایه بهینه $B = [a_۱, a_۲] = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ است:

$$B = \begin{pmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۲ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{-۳}{۲} \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

تابع هدف مسأله ماکزیمم‌سازی است و در سطر تابع هدف جدول بهینه اعداد منفی وجود دارد. پس سطر تابع هدف جدول بهینه به صورت $C_j - Z_j$ است:

$$a = C_۳ - Z_۳ \Rightarrow a = C_۳ - C_B B^{-۱} a_۳ \Rightarrow a = -۳ - (۱,۸)\begin{pmatrix} -\frac{۳}{۲} \\ \frac{۱}{۲} \end{pmatrix} = -۳ - \frac{۵}{۲} = \frac{-۱۱}{۲} \Rightarrow a = \frac{-۱۱}{۲}$$

۸۱ـ گزینه «۱» جدول سیمپلکس زیر در یکی از مراحل یک مسأله مینیمم سازی مفروض است:

	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
z	0	-2	1	0	-5
x_1	1	3	-1	0	5
S_2	0	1	2	1	0

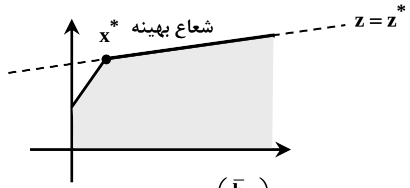
جواب پایه‌ای شدنی متناظر این جـدول $x(x_1=5, x_2=0, S_1=0, S_2=0)$ اسـت. S_1 شرط ورود به پایه را دارد و با ورود آن به جدول زیر می‌رسیم:

	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
z	0	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-5
x_1	1	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	5
S_1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0

که جواب پایه‌ای شدنی متناظر جدول اخیر $x(x_1=5, x_2=0, S_1=0, S_2=0)$ است و نقطه بهینه می‌باشد که در جدول قبل هم به دست آمد. ولـی در جـدول قبـل شـرایط بهینگی در جدول مشاهده نمی‌شد زیرا $z_3 - c_3 = 1 > 0$.

نکته: اگر گوشه بهینه تباهیده باشد و گوشه تباهیده دارای چند پایه متعدد باشد، حداقل یکی از این پایه‌ها شرایط بهینگی را داراست و ممکن است برخی از پایه‌ها شرایط بهینگی را دارا نباشد.

۸۲ـ گزینه «۳» جدول بهینه سیمپلکس به صورت زیر است:



$$x^* = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

	x_1	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n	
z	0	$\cdots$	0			0			
x_1	1	$\cdots$	0			$y_{1j} < 0$			$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$
x_m	0	$\cdots$	1			$y_{mj} < 0$			$\bar{b}_m$

در این حالت مسأله دارای جواب‌های بهینه دیگری نیز است و مقدار z در آنها تغییری نخواهد کرد.

۸۳ـ گزینه «۲» اگر a منفی باشد، بنابراین تست مینیمم نسبت، مخالف صفر است و نقطه تباهیده را ترک کنیم.

۸۴ـ گزینه «۳» سطر مربوط به متغیر x_a در جدول داده شده دارای ضریب صفر برای تمامی متغیرهای اصلی مسأله است. پس ایـن محـدودیت، قیـدی زائد بوده و می‌تواند از جدول حذف شود.

۸۵ـ گزینه «۲» در روش سیمپلکس کران‌دار علاوه بر متغیرهای مثبت، متغیرهای منفی هم می‌توانند به عنوان عنصر لولا در نظر گرفته شوند.

۸۶ـ گزینه «۱» هزینه تولید محصول i زیاد شده پس مقدار تولید آن (x_i) زیاد نمی‌شود.

۸۷ـ گزینه «۳» مقدار تابع هدف با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$Z = C_B B^{-1} b \rightarrow Z = (1,2,1)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = (1,2,1)\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 15$$

۸۸ـ گزینه «۲» چون مسأله Min سازی است، پس پایه B وقتی بهینه است که: $Z_4 - C_4 \le 0$ و $Z_5 - C_5 \le 0$.

$$Z_4 - C_4 = (1,1,1)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - C_4 = 3 - C_4 \le 0 \rightarrow C_4 \ge 3$$

پس فقط گزینه «۲» می‌تواند درست باشد.

۸۹ـ گزینه «۲» چون ستون ضرایب u_1 و v_1 در محدودیت‌ها وابسته خطی‌اند، پس u_1 و v_1 هم‌زمان نمی‌توانند پایه‌ای باشند.

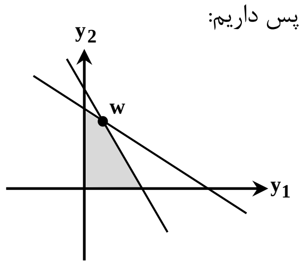
۹۰ـ گزینه «۳» چون x_2 یک متغیر پایه‌ای است مقدار c_2 هرچه باشد همواره $\bar{C}_2 = z_2 - c_2 = 0$ خواهد بود.

۹۱ـ گزینه «۳» با نوشتن مسأله دوگان داریم:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } W = 21y_1 + 12y_2\\
&\text{s.t}\\
&\begin{cases}
2y_1 + y_2 \le 30 & (1)\\
y_1 + y_2 \le 20 & (2)\\
y_1 + y_2 \le 10 & (3)\\
2y_1 + y_2 \le 15 & (4)\\
y_1, y_2 \ge 0
\end{cases}
\end{aligned}$$

با مقایسه محدودیت (۱) و (۴) و همچنین محدودیت (۲) و (۳) مشخص است که محدودیت‌های (۱) و (۲) زائد هستند. پس داریم:

$$\begin{aligned}
&\max w = 21y_1 + 12y_2\\
&\begin{cases}
y_1 + y_2 + s'_1 = 10\\
2y_1 + y_2 + s'_2 = 15
\end{cases}\\
&y_1, y_2 \ge 0
\end{aligned}$$



با رسم شکل متوجه می‌شویم که نقطه‌ی بهینه از برخورد محدودیت اول و دوم به دست می‌آید. پس $y_1 = 5$ و $y_2 = 5$. همچنین y_1 و y_2 شبه قیمت‌های محدودیت اول و دوم هستند و داریم:

$$C_B B^{-1} = (y_1, y_2) = (5,5) \qquad \bar{C}_1 = Z_1 - C_1 = C_B B^{-1} a_1 - C_1 = (5,5)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - 30 = 15 - 30 = -15$$

$$\bar{C}_2 = Z_2 - C_2 = C_B B^{-1} a_2 - C_2 = (5,5)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 20 = 10 - 20 = -10$$

پس گزینه ۳ درست است. باید توجه داشت برای حل تستی این سؤال، نیاز به حل دوگان نمی‌باشد. با کمی دقت در مسأله مشخص است که گزینه ۱ و ۲ صحیح نیست. همچنین چون منظور از C_j همان $Z_j - C_j$ است و در سطر بهینه تابع هدف Min سازی $\bar{C}_j$ها باید منفی باشند، پس گزینه ۳ درست است.

دقت شود که مسأله اولیه (p) دارای متغیرهای کمکی مازاد بوده و برای حل با سیمپلکس نیاز به اضافه کردن متغیر مصنوعی می‌باشد و $C_B B^{-1}$ که با متغیرهای دوگان برابر می‌باشد زیر متغیرهای مصنوعی در مسأله می‌باشند یعنی $Z_{R_1} - C_{R_1} = 5 \ , \ Z_{R_2} - C_{R_2} = 5$ و متغیرهای کمکی قرینه‌ی متغیرهای مصنوعی در مسأله هستند پس داریم $Z_{S_1} - C_{S_1} = -5 \ , \ Z_{S_2} - C_{S_2} = -5$ پس حواسمان باشد که $C_B B^{-1} = (5,5)$ می‌باشد و همچنین B^{-1} اصلی زیر متغیرهای مصنوعی R_1, R_2 می‌باشد که ستون‌های آن‌ها در ادامه مسأله حذف می‌شود و $-B^{-1}$ در زیر ستون‌های S_1, S_2 باقی می‌ماند.

کمکی محدودیت ۱ — مصنوعی محدودیت ۱

	S_1	S_2	R_1	R_2
سطر تابع هدف	$-y_1$	$-y_2$	y_1	y_2
	$-B^{-1}$		B^{-1}	

۹۲ـ گزینه «۳» x_3 ورودی است ولی خروجی نداریم، پس z^* نامحدود است. (دقت شود که در سطر هدف مقادیر $-Z$ آورده شده است)

۹۳ـ گزینه «۱» با توجه به توضیحات جواب سؤال قبل، گزینه ۱صحیح می‌باشد.

۹۴ـ گزینه «۴» نقطه فوق ترکیب محدبی از دو نقطه $(۱,۰,۰,۰)$ و $(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲},۰,۰)$ است. $\frac{۱}{۲}(۱,۰,۰,۰)+\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲},۰,۰)=(\frac{۳}{۴},\frac{۱}{۴},۰,۰)$

گوشه $(۱,۰,۰,۰)$ با ورود $x_۴$ به پایه و خروج $x_۲$ به دست می‌آید و با گوشه $(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲},۰,۰)$ مجاور است و ترکیب محدب دو گوشه مجاور روی مرز فضای موجه است.

۹۵ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه $B^{-۱}b\geq ۰$ می‌باشد، مسأله موجه است. برای بهینگی نیز باید $z_j-c_j\leq ۰$ باشد.

$$z_۴-c_۴=[۱,۰,-۴]\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & ۰ & -\frac{۲}{۳}\\ ۰ & ۱ & ۱\\ \frac{۱}{۳} & ۰ & \frac{۱}{۳}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۰\\۰\end{bmatrix}-۰=-۱\leq ۰ \quad ; \quad z_۲-c_۲=[۱,۰,-۴]\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & ۰ & -\frac{۲}{۳}\\ ۰ & ۱ & ۱\\ \frac{۱}{۳} & ۰ & \frac{۱}{۳}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\end{bmatrix}-۱=-۴\leq ۰$$

$$z_۶-c_۶=C_BB^{-۱}a_۶-C_۶=[۱,۰,-۴]\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & ۰ & -\frac{۲}{۳}\\ ۰ & ۱ & ۱\\ \frac{۱}{۳} & ۰ & \frac{۱}{۳}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\۰\\۱\end{bmatrix}-۰=-۲\leq ۰$$

هیچ متغیر مثبتی در سطر هدف جدول نهایی Simplex وجود ندارد. پس پایه پیشنهادی بهینه است.

۹۶ـ گزینه «۲» با توجه به اطلاعات مسأله محدودیت‌های مسأله به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases}x_۱+۲x_۳+\theta=۹\\ x_۱-x_۳+x_۵=۲\\ -x_۱+x_۳=۴\end{cases}\Rightarrow \begin{array}{l}x_۱=-\frac{۱}{۳}\theta+\frac{۱}{۳}\\ x_۳=-\frac{\theta}{۳}+\frac{۱۳}{۳}\\ x_۵=۶\end{array}$$

۹۷ـ گزینه «۴» دترمینان ماتریس پایه‌ای جدید مخالف صفر نیست، بنابراین تشکیل یک جواب پایه‌ای را نمی‌دهند.

$$|A|=\begin{vmatrix}۱ & ۱ & ۲\\ ۱ & ۰ & -۱\\ -۱ & ۰ & ۱\end{vmatrix}=۰\Rightarrow ۱(۰)-۱(۱-۱)+۲(۰)=۰ \Leftarrow$$ به روش بسط روی سطر اول A دترمینان $=\sum_{j=۱}^{۳}a_{۱j}$ (دترمینان حاصل از حذف سطر اول و ستون jام)

۹۸ـ گزینه «۴» برای یک مسأله LP و مسأله I.L.P نظیر آن، هیچگاه $Z^*_{L.P}$ بدتر از $Z^*_{I.L.P}$ نیست.

۹۹ـ گزینه «۴» حداکثر تعداد حالات برابر است با تعداد حالات انتخاب m متغیر (تعداد متغیرهای پایه‌ای = تعداد محدودیت‌ها) از بین n متغیر (تعداد کل متغیرها)

$$\begin{array}{l}\text{Max } z=Cx\\ \text{s.t}\quad A_{m\times n}\ X=b\ ;\ R(A)=m\\ \qquad x\geq ۰\end{array}$$

$\rightarrow$ حداکثر جواب پایه‌ای ممکن $=\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$

۱۰۰ـ گزینه «۲» اگر عنصر لولا منفی باشد، در این صورت جواب در مرحله بعد ممکن است نشدنی گردد.

۱۰۱ـ گزینه «۴» روش سیمپلکس حد فوقانی نسبت به سیمپلکس معمولی، محدودیت‌های کمتری دارد.

۱۰۲ـ گزینه «۱» نقطه $(x_۱=۰,x_۲=۰,\ldots,x_n=۰)$ یک جواب شدنی برای مسأله است، چون $b_i\geq ۰$ ، $i=۱,\ldots,m$.

۱۰۳ـ گزینه «۴»

$$\left.\begin{array}{l} Z_۳ - C_۳ = ۲ \rightarrow (C_۱, C_۲)\begin{pmatrix}۳\\۱\end{pmatrix} - ۰ = ۲ \rightarrow ۳C_۱ + C_۲ = ۲ \\ Z_۴ - C_۴ = ۳ \rightarrow (C_۱, C_۲)\begin{pmatrix}۲\\۱\end{pmatrix} - ۰ = ۳ \rightarrow ۲C_۱ + C_۲ = ۳ \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \boxed{C_۱ = -۱} \\ C_۲ = ۵ \end{cases}$$

۱۰۴ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. فرض کنیم x_j متغیر غیرپایه‌ای باشد، در این صورت داریم:

$$\begin{cases} Z = C_B B^{-۱} b - \sum_{j \in R} (Z_j - C_j) x_j \rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x_j} = -(Z_j - C_j) \quad \text{یا} \quad Z - \frac{۳}{۴}x_۳ - \frac{۱}{۲}x_۴ - \frac{۴}{۳}x_۵ = -\frac{۲۱}{۴} \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x_۵} = \frac{۴}{۳} \\ x_B = B^{-۱} b - \sum_{j = R} \bar{a}_j x_j \rightarrow \dfrac{\partial x_B}{\partial x_j} = -\bar{a}_j \end{cases}$$

و ستون متناظر با متغیر غیرپایه x_j در جدول $\bar{a}_j = \begin{pmatrix} \bar{a}_{۱j} \\ \vdots \\ \bar{a}_{ij} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mj} \end{pmatrix}$ است، پس: $\dfrac{\partial x_{Bi}}{\partial x_j} = -\bar{a}_{ij}$

بنابراین: $\dfrac{\partial z}{\partial x_۵} = \dfrac{۴}{۳}, \dfrac{\partial x_۱}{\partial x_۳} = -\dfrac{۳}{۴}$ که در بین گزینه‌ها وجود ندارد.

۱۰۵ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با استفاده از ستون‌های یکه، می‌توان جدول بهینه را به صورت زیر تکمیل کرد.

	z	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	$S_۴$	۳۲
		۰	۰	۶	۰	۰	۲	
متغیرهای اساسی	$x_۱$	۱	۰	$\frac{۱}{۳}$	۰	۰	$\frac{۱}{۳}$	۶
	$S_۲$	۰	۰	$\frac{۸}{۳}$	۱	۰	$-\frac{۱}{۳}$	۱۲
	$x_۲$	۰	۱	$-\frac{۲}{۳}$	۰	۰	$\frac{۱}{۳}$	۲
	$S_۳$	۰	۰	$-\frac{۱}{۳}$	۰	۱	$\frac{۲}{۳}$	۳

مختصات نقطه بهینه B متناظر با جدول فوق عبارت است از : $B(x_۱ = ۶, x_۲ = ۲, S_۱ = ۰, S_۲ = ۱۲, S_۳ = ۳, S_۴ = ۰)$

در این نقطه متغیرهای Slack قیدهای ۱و۴ صفر هستند، یعنی: $S_۴ = ۰, S_۱ = ۰$. اگر در یک نقطه متغیر Slack صفر باشد، یعنی محدودیت متناظر با آن متغیر Slack از نقطه مورد نظر عبور می‌کند. پس نقطه B روی محدودیت‌های ۱و۴ قرار دارد، که در گزینه‌ها نیست.

۱۰۶ـ گزینه «۴» متغیرهای پایه‌ای در نقطه B عبارتند از: $(x_۱, x_۲, S_۲, S_۳)$. اگر بخواهیم با استفاده از جدول سیمپلکس از نقطه B به نقطه A حرکت کنیم، باید مقدار $x_۱$ کاهش و مقدار $x_۲$ افزایش یابد. با خروج $S_۲$ از پایه و ورود $S_۱$ به پایه در جدول بعد به نقطه A می‌رسیم. زیرا:

$$\frac{\partial x_۱}{\partial s_۱} = -\frac{۱}{۳} \quad , \quad \frac{\partial x_۲}{\partial s_۱} = \frac{۲}{۳}$$

ولی در صورتی که متغیر $S_۴$ بخواهد وارد پایه شود، متغیر $S_۳$ خروجی است و از آنجایی که $\dfrac{\partial x_۱}{\partial S_۴} = -\dfrac{۱}{۳}$ و $\dfrac{\partial x_۲}{\partial S_۴} = -\dfrac{۱}{۳}$، پس هر دو متغیر $x_۱$ و $x_۲$ با ورود $S_۴$ به پایه کاهش می‌یابند. یعنی از نقطه‌ی B به نقطه‌ی C حرکت خواهیم کرد.

۱۰۷ـ گزینه «۱» با توجه به جدول، متغیرهای x_1 و x_3 پایه‌ای هستند پس پایه متناظر با این جدول $B=[A_1,A_3]=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ است و معکوس آن $B^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و چون $(B^{-1})^{-1}=B$ بنابراین خواهیم داشت:

$$(B^{-1})^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\to(a_1,a_2,a_3,a_4)=(1,1,2,1)$$

۱۰۸ـ گزینه «۴»

$$a_5=Z_{s_1}-C_{s_1}=(3,5)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}-0\to a_5=7$$

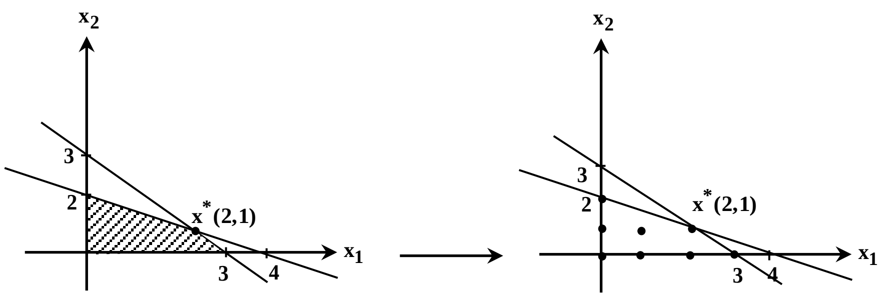
۱۰۹ـ گزینه «۱»

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z_1=2x_1+3x_2 \\ &\text{S.t.}\quad x_1+2x_2\le 4 \\ &\qquad\; x_1+x_2=3 \\ &\qquad\; x_1\ ,\ x_2\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(*)\text{Max } Z_2=2x_1+3x_2 \\ &\text{S.t.}\quad x_1+2x_2\le 4 \\ &\qquad\; x_1+x_2=3 \\ &\qquad\; x_2\ ,\ x_1\ \text{اعداد صحیح نامنفی} \end{aligned}$$

نقطه بهینه هر دو مسأله $x^*(2,1)$ است. پس: $\text{Max}Z_1=\text{Max}Z_2=7$

نکته: مسأله (*) را برنامه‌ریزی عدد صحیح (ILP) گویند که ناحیه شدنی را رسم کرده و نقاطی جزء ناحیه شدنی قابل قبول است که x_i های صحیح داشته باشد بنابراین ناحیه شدنی مجموعه‌ای از نقاط می‌باشد و ناحیه شدنی گسسته می‌باشد نقاطی BFS (گوشه‌ای موجه) می‌باشد که از ترکیب محدب دو نقطه متمایز نوشته نشود. برای مثال:



$$\begin{aligned} \text{LP}:\max\ &2x_1+3x_2 \\ &x_1+2x_2\le 4 \\ &x_1+x_2\le 3 \\ &x_1,x_2\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ILP}:\max\ &2x_1+3x_2 \\ &x_1+2x_2\le 4 \\ &x_1+x_2\le 3 \\ &x_1,x_2\ \text{اعداد صحیح نامنفی} \end{aligned}$$

ناحیه شدنی= $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(2,0),(3,0),(1,1),(2,1)\}$ نقاط گوشه موجه= $\{(0,0),(0,2),(2,1),(3,0)\}$

البته در این سوال ناحیه شدنی ILP و LP فقط شامل یک نقطه $(x(2,1))$ می‌باشند که چون x_i های صحیح دارد پس نقطه‌ی $X^*(2,1)$، ناحیه شدنی و بهینه هر دو مسأله می‌باشد.

۱۱۰ـ گزینه «۱» اگر در مسأله‌ای با محدودیت‌های $\begin{cases} Ax\le b \\ x\ge 0 \end{cases}$ و $b\ge 0$، ضرایب متغیری در تمام محدودیت‌ها همگی صفر یا منفی باشد، فضای جواب بی‌کران است. اما اگر محدودیت‌ها به صورت $\begin{cases} Ax=b \\ x\ge 0 \end{cases}$ باشند، مطلب بالا ممکن است صحیح نباشد به مثال روبرو توجه کنید:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2=30 \\ x_1\qquad\ =20 \end{cases}\qquad x_1\ ,\ x_2\ge 0$$

ملاحظه می‌شود که ضرایب متغیر x_2 یعنی $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ نامثبت هستند، ولی فضای جواب فقط یک نقطه است.

۱۱۱ـ گزینه «۲»

$$\bar{a}_j = B^{-۱}a_j \Rightarrow \bar{a}_۱ = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۴}{۳} \\ -۲ \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_۲ = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} \\ ۵ \end{bmatrix}$$

گزینه‌های ۳ و ۴ غلط هستند.

$$Z_۱ - C_۱ = C_B B^{-۱} a_۱ - C_۱ = (۱۲,۰)\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix} - ۶ = ۱۰$$

$$Z_۲ - C_۲ = C_B B^{-۱} a_۲ - C_۲ = (۱۲,۰)\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۶ \end{bmatrix} - ۲ = ۲$$

۱۱۲ـ گزینه «۱»

$$x_B = \bar{b} - \bar{a}_۱ x_۱ \Rightarrow \begin{bmatrix} x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \bar{b} - \begin{bmatrix} \bar{a}_{۱۱} \\ \bar{a}_{۲۱} \end{bmatrix} x_۱$$

با افزایش $x_۱$، بسته به مقدار $\bar{a}_{۱۱}$ و $\bar{a}_{۲۱}$ و علامت آنها، مقدار $x_۲$ و $x_۳$ می‌تواند کاهش یا افزایش یابد.

۱۱۳ـ گزینه «۴» محدودیتی که به متغیر کمکی کمبود نیاز دارد از نوع $\leq$ است. محدودیتی که به متغیر کمکی مازاد نیاز دارد از نوع $\geq$ است که این محدودیت به یک متغیر مصنوعی نیز نیاز دارد. یک متغیر مصنوعی دیگر نیز مربوط به یک محدودیت از نوع = می‌باشد.

۱۱۴ـ گزینه «۴» مسأله می‌تواند دارای پایه تباهیده باشد، ولی در مسیر حرکت سیمپلکس قرار نداشته باشد.

۱۱۵ـ گزینه «۳» در نقطه B متغیرهای پایه‌ای عبارتند از: $(s_۲, x_۱, s_۳)$ و در نقطه C متغیرهای پایه‌ای $(x_۱, x_۲, s_۱)$ می‌باشند. برای رفتن از گوشه B به گوشه C باید متغیرهای $S_۲$ و $S_۳$ از پایه خارج و متغیرهای $x_۲$ و $s_۱$ وارد پایه شوند که حداقل ۲ تکرار سیمپلکس مورد نیاز است.

۱۱۶ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. نقطه $(x_۱ = ۲, x_۲ = ۰, x_۳ = ۴)$ یک نقطه شدنی است و با قرار دادن آن در تابع هدف $z = ۱۲$ است که از مقدار z در همه گزینه‌ها بیشتر است. پس مقدار z^* در بین گزینه‌ها موجود نیست.

۱۱۷ـ گزینه «۲» فضای موجه مسأله محدود است (چرا؟)، پس حتماً گوشه بهینه یافت می‌شود. از طرفی مسأله دارای یک محدودیت است، پس در جدول بهینه SP فقط یک متغیر پایه‌ای خواهیم داشت. ضرایب $x_۲$ و $x_۳$ در تابع هدف منفی هستند، بنابراین در جواب بهینه $x_۲ = x_۳ = ۰$ و غیرپایه‌ای هستند و برای $x_۱$ و $x_۴$ داریم.

اگر $x_۱$ در جواب بهینه پایه‌ای باشد. $\Rightarrow ۹x_۱ = ۲۷۰ \Rightarrow x_۱ = ۳۰ \Rightarrow Z = ۹۰$

اگر $x_۴$ در جواب بهینه پایه‌ای باشد $\Rightarrow ۳x_۴ = ۲۷۰ \Rightarrow x_۴ = ۹۰ \Rightarrow Z^* = ۵۴۰$

۱۱۸ـ گزینه «۲» با توجه به ستون ضرایب متغیرها، متغیرهای ($x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$) به صورت بردار یکه می‌باشند، پس متغیرهای پایه‌ای جدول بهینه هستند. با توجه به اینکه متغیر $x_۳$ در سطر اول دارای ضریب ۱ می‌باشد پس اولین متغیر پایه‌ای است و مقدار ۶ دارد. به همین ترتیب متغیرهای $x_۲$ و $x_۱$ به ترتیب دومین و سومین متغیرهای پایه‌ای با مقدار ۴ و ۳ می‌باشند. $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵, x_۶) = (۳, ۴, ۶, ۰, ۰, ۰)$

۱۱۹ـ گزینه «۴» با ورود $x_۴$ و خروج $x_۱$ یا $x_۲$ یا $x_۳$ به سه جواب پایه مجاور، با ورود $x_۵$ و خروج $x_۱$ یا $x_۲$ یا $x_۳$ به سه جواب پایه مجاور و با ورود $x_۶$ و خروج $x_۱$ یا $x_۲$ یا $x_۳$ به سه جواب پایه مجاور می‌رسیم.

۱۲۰ـ گزینه «۱» راه حل اول: تابع هدف را در سطر هدف جایگزین می‌کنیم:

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	$x_۶$		
Z	-۳	۲	۱۰	-۱۱	-۱۸	۱۰	۰	+ + +
$x_۳$	۰	۰	۱	-۱	۱	۴	۶	×−۱۰
$x_۲$	۰	۱	۰	۲	۲	-۱	۴	×−۲
$x_۱$	۱	۰	۰	۱	-۱	۱	۳	×۳

بعد از به‌روزآوری جدول داریم

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
Z	۰	۰	۰	−۲	−۳۵	−۲۵	−۵۹
x_3	۰	۰	۱	−۱	۱	۴	۶
x_2	۰	۱	۰	۲	۲	−۱	۴
x_1	۱	۰	۰	۱	−۱	۱	۳

ملاحظه می‌شود که جدول فوق، بهینه است.

راه حل دوم: در صورتی که x_4 و x_5 و x_6 را پایه‌ی جدول اولیه سیمپلکس در نظر بگیریم، داریم: $(Z_4, Z_5, Z_6) = C_B B^{-1} a_j - C_j$

$$(Z_4, Z_5, Z_6) = (-10, -2, 3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (11 \;\; 18 \;\; -10) = (-2 \;\; -35 \;\; -25)$$

با توجه به اینکه $Z_4, Z_5, Z_6 \leq 0$ ، پس جدول بهینه است.

۱۲۱ـ گزینه «۱» با این کار محدودیتی وابسته ایجاد می‌شود و فضای موجه مسأله اولیه را تغییر نمی‌دهد، پس جواب بهینه مسأله اولیه عوض نمی‌شود. مسأله اولیه جواب بهینه تباهیده پیدا می‌کند و مسأله دوگان جواب بهینه چندگانه خواهد داشت. هر چند مختصات نقطه بهینه در مسأله دوگان می‌تواند تغییر کند اما z^* و w^* یکسان هستند.

۱۲۲ـ گزینه «۳» اگر یک ماتریس (B) با اعمال سطری مقدماتی به ماتریس همانی (I) تبدیل شود و همان عملیات سطری مقدماتی بر روی ماتریس همانی انجام شود ماتریس B^{-1} به دست می‌آید.

همانی	ماتریس	معکوس ماتریس	همانی
I	B	$\rightarrow B^{-1}$	I

۱۲۳ـ گزینه «۲» برای محصول X_3 داریم: $a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. برای محصول X_3 باید $Z_3 - C_3 < 0$ باشد تا تولید این محصول سودآور شود. (شرط ورود به پایه را داشته باشد)

$$Z_3 - C_3 = \underbrace{C_B B^{-1}}_{\text{قیمت سایه}} a_3 - C_3 = (3, 0)\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - C_3 = 12 - C_3 < 0 \Rightarrow C_3 > 12$$

۱۲۴ـ گزینه «۴» با توجه به $\bar{b} = B^{-1} b$ داریم:

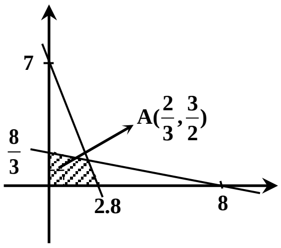
$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b_1 + b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = 17 \\ b_1 = 6 \end{cases}$$

۱۲۵ـ گزینه «۴» اگر برای $i = 1, \ldots, n$ داشته باشیم $b_i \geq 0$ همه محدودیت‌ها و در نتیجه فضای موجه شامل مبدأ مختصات است.

۱۲۶ـ گزینه «۳» شرط بهینگی در تابع هدف Max ، $Z_j - C_j \geq 0$ و شرط جواب منحصر به فرد بهینه $Z_j - C_j > 0$ می‌باشد.

۱۲۷ـ گزینه «۱» طبق صورت سؤال جدول بهینه نبوده و متغیر x_k دارای کمترین مقدار $Z_j - C_j$ می‌باشد. پس x_k ورودی به پایه است. اما حداکثر مقداری که متغیر x_k می‌تواند داشته باشد، مقدار α می‌باشد. پس یک کران بالا برای مقدار تابع هدف در مرحله‌ی بعد $\bar{Z} + \alpha(Z_k - C_k)$ می‌باشد.

۱۲۸ـ گزینه «۲» نقطه در محدودیت‌ها صدق می‌کند پس یـک نقطـه از فضای حل مسأله است؛ اما با توجـه بـه شـکل چـون نقطـه A گوشـه‌ای نمی‌باشد، نمی‌تواند یک نقطه مینیمم باشد.



۱۲۹ـ گزینه «۱» نقطه مرزی است $\Leftarrow x_1, x_2, x_3 = 2 \Rightarrow x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 12 \Rightarrow 2+6+4 \le 12 \Rightarrow S = 0 \Rightarrow$

این نقطه بهینه نیست، زیرا به ازای $x_1 = 12$ و $x_3 = x_2 = 0$ داریم $f = 96$.

۱۳۰ـ گزینه «۳» اگر متغیر غیرپایه x_k ورودی به پایه باشد، داریم:

$$\begin{cases} z = z_0 - (z_k - c_k)x_k \\ x_B = \bar{b} - \bar{a}_k x_k \end{cases}$$

با فرض $z = -200$ داریم: $-200 = -8 - (3)x_2$ و در نتیجه $x_2 = 64$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}(64) = \begin{bmatrix} c+128 \\ d+64 \\ e \end{bmatrix}$$

و خواهیم داشت: $x_1 = c+128$ و $x_2 = 64$ و $x_3 = d+64$ و $x_4 = 0$ و $x_5 = e$.

۱۳۱ـ گزینه «۴» با توجه به جدول بهینه داریم: $z^* = -4$ پس به دست می‌آوریم:

$$Z = C_B\bar{b} \Rightarrow -4 = (-a, 0)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow -4 = -2a \Rightarrow a = 2$$

دقت کنید که در سطر هدف جدول آغازین $a = -c_1$ است.

۱۳۲ـ گزینه «۴» ارزش منابع همان قیمت‌های سایه‌ای هستند که با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$y^* = C_B B^{-1} \Rightarrow (y_1^*, y_2^*) = (\overset{c_1}{-2}, \overset{c_5}{0})\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = (-\frac{2}{3}, 0)$$

پس $y_1^* = -\frac{2}{3}$ و $y_2^* = 0$

۱۳۳ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. می‌توان متغیرهای x_3 و x_4 و x_5 را متغیر کمکی فرض کرد و با حذف آنها داریم:

$$\begin{aligned} &\underset{\text{s.t}}{\text{Min}}\ Z = x_1 + x_2 \\ &x_1 + x_2 \le 2 \quad :(1) \\ &x_1 \le 1 \quad :(2) \\ &x_2 \le 1 \quad :(3) \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

پس نقطه $x^*(x_1 = 0\ ,\ x_2 = 0)$ گوشه بهینه منحصر به فرد است و $z^* = 0$.

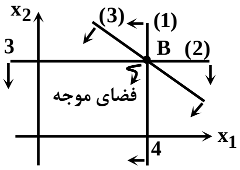
گزینه صحیح وجود ندارد. اگر تابع هدف را Max فرض کنیم، گوشه $A(x_1 = 1\ , x_2 = 1)$ گوشه بهینه است و $z^* = 2$.

۱۳۴ـ گزینه «۴» برای متغیرهایی که ضریب تابع هدف منفی دارند حد پایین و متغیرهایی که ضریب هدف دارند حـد بالایشـان را در نظر مـی‌گیـریم در نتیجه با فرض: $x_1 = x_3 = x_5 = 8$ و $x_2 = x_4 = 1$ داریم $z = 73$.

۱۳۵ـ گزینه «۲» با استفاده از ماتریس بهینه جدید را به دست می‌آوریم:

$$\bar{b} = B^{-1}b \Rightarrow \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

۱۳۶ـ گزینه «۲» اگر محدودیت سوم به صورت $x_۱ + x_۲ \le ۷$ درآید، فضای موجه به شکل زیر خواهد بود.
فضای جواب و جواب بهینه نقطه تباهیده B هستند.



۱۳۷ـ گزینه «۱» با تغییر ضریب تابع هدف ناحیه موجه ثابت می‌ماند؛ بنابراین به ازای $C = C_۱$ جواب $x_۱$ جواب بهینه و $x_۲$ یک جواب شدنی و به ازای $C = C_۲$ جواب $x_۲$ جواب بهینه و $x_۱$ یک جواب شدنی برای مسأله خواهد بود. بنابراین داریم:

$C = C_۱ \to C_۱x_۱ \le C_۱x_۲$: جواب بهینه و $C_۱x_۲$ یک جواب شدنی $C_۱x_۱$

$C = C_۲ \to C_۲x_۲ \le C_۲x_۱$: جواب بهینه و $C_۲x_۱$ یک جواب شدنی $C_۲x_۲$

$$\to \begin{cases} C_۱(x_۲ - x_۱) \ge ۰ \\ C_۲(x_۱ - x_۲) \ge ۰ \end{cases} \Rightarrow C_۱(x_۲ - x_۱) + C_۲(x_۱ - x_۲) \ge ۰$$

۱۳۸ـ گزینه «۳» اگر در جدول نهایی متغیر مصنوعی در پایه باشد، می‌توان با خارج کردن آن و ورود یک متغیر پایه‌ای آن را حـذف کـرد. در ایـن صـورت جواب بهینه تباهیده است و مسأله می‌تواند بی‌شمار جواب موجه نیز داشته باشد.

۱۳۹ـ گزینه «۱» برای متغیرهایی که ضریب منفی در تابع هدف دارند، حداقل مقدار ممکن یعنی ۵- و برای متغیرهای بـا ضـریب مثبـت بیشـترین مقـدار ممکن یعنی ۵+ را قرار می‌دهیم. در نتیجه:

$$\text{Max}z = ۲\times۵ + ۶\times۵ - (-۵) - ۳\times(-۵) + ۸\times۵ - ۴\times(-۵) + ۵\times۵ + ۷\times۵ = ۱۸۰$$

اما چون سایر محدودیت‌های مسأله در نظر گرفته نشده است، پس $Z^* \le ۱۸۰$ می‌باشد.

۱۴۰ـ گزینه «۲»

$$Ax = \begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۱ & -۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۷ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ \\ -۲۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

پس محدودیت اول و سوم به صورت تساوی برقرار می‌باشد.

فصل چهارم

«دوگان و تحلیل حساسیت»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل چهارم

۱ـ اگر داشته باشیم $c^T x \ge b^T y$ که x متغیرهای اولیه (Primal) و y متغیرهای همزاد (Dual)، c بردار ضرایب هدف اولیه و b بردار موجودی منابع باشد، آنگاه می‌توان $d = c^T x - b^T y$ را به عنوان شکاف دوگانگی (Duality Gap) تعریف کرد. در این صورت چه می‌توان گفت؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) رفتار تابع d بستگی به تعداد محدودیت‌ها و تعداد متغیرها دارد.

۲) پس از رسیدن به حل بهینه اندازه تابع d صفر است اما قبل از آن نمی‌توان روی رفتار تابع d قضاوت کرد.

۳) اگرچه تابع d معیاری برای نزدیک شدن به حل بهینه است اما رفتار تابع d بستگی به مورد دارد.

۴) در تکرارهای مختلف الگوریتم سیمپلکس تابع d تابعی همیشه غیرصعودی است و در حالت بهینه صفر است.

۲ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل مفروض است:

$$\begin{aligned} &\text{Min } cx \\ &\text{s.t} \\ &\quad Ax \ge b \\ &\quad x \ge 0 \end{aligned}$$

فرض کنید y^* جواب بهینه دوگان این مسأله باشد. بردار سمت راست b را با بردار $\bar{b}$ جایگزین می‌کنیم و بقیه مسأله را به همان حالت قبل نگه می‌داریم. $\bar{x}$ جواب بهینه مسأله جدید است. در این صورت کدام رابطه درست است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) $c\bar{x} > y^*\bar{b}$ ۲) $c\bar{x} = y^*\bar{b}$ ۳) $c\bar{x} \le y^*\bar{b}$ ۴) $c\bar{x} \ge y^*\bar{b}$

۳ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\text{s.t} \\ &\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i = 1,\dots,m \\ &\quad x_j \ge 0 \qquad j = 1,\dots,n \end{aligned}$$

فرض کنید ارزش (قیمت) سایه محدودیت‌های مسأله فوق به ترتیب $y_1,\dots,y_m$ باشد. اگر اولین محدودیت مسأله فوق در عدد ۲ ضرب شده و به صورت زیر نوشته شود و در این حالت $\hat{y}_1$ قیمت سایه این محدودیت باشد، آنگاه گزینه صحیح کدام است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

$$\sum_{j=1}^{n} (2a_{1j}) x_j \le 2b_1$$

۱) $\hat{y}_1$ برابر y_1 می‌باشد. ۲) $\hat{y}_1$ نصف y_1 می‌باشد.

۳) $\hat{y}_1$ دو برابر y_1 می‌باشد. ۴) هیچ‌کدام

۴ـ مسأله همزاد برنامه‌ریزی خطی زیر با فرض $A^T = -A$ با کدام گزینه برابر است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

$$\begin{aligned} &\text{Min } C^T x \\ &\text{s.t} \\ &\quad Ax \le c \\ &\quad x \ge 0 \end{aligned}$$

۱) $\text{Min } C^T x$ S.t. $Ax \le c$, $x \ge 0$

۲) $\text{Min } C^T y$ S.t. $A^T y \le c$, $y \ge 0$

۳) $\text{Min } C^T x$ S.t. $A^T x \le c$, $x \ge 0$

۴) $\text{Min } C^T y$ S.t. $A^T y \ge c$, $y \le 0$

۵ـ اگر پس از یافتن جواب بهینه یک مسأله برنامه‌ریزی خطی محدودیت اول آن فعال نباشد، چه نتیجه‌ای می‌گیرد؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) متغیر ثانویه نظیر آن یعنی y_1 صفر است.

۲) مسأله دارای جواب‌های بهینه چندگانه است.

۳) مسأله همزاد (Dual) آن تبهگن است. (degenerate)

۴) مسأله دارای یک محدودیت اضافی (Redundant) است که می‌توان آن را از ابتدا حذف نمود.

۶ـ اگر یک مسأله برنامه‌ریزی خطی دارای جواب بهینه غیرتبهگن باشد، در مورد جواب مسأله همزاد آن (Dual) چه می‌توان گفت؟ (بهترین گزینه را که حاوی بیشترین اطلاعات صحیح در مورد مسأله همزاد باشد، انتخاب کنید.) (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) دارای جواب بهینه منحصر به فرد است.

۲) دارای جواب بهینه غیرتبهگن است.

۳) دارای جواب‌های بهینه چندگانه است.

۴) حتماً دارای جواب بهینه است و مقدار تابع هدف آن نیز مساوی تابع هدف مسأله اولیه است.

۷ـ جدول اولیه و نهایی یک مدل برنامه‌ریزی خطی با هدف حداقل کردن تابع هدف در زیر آمده است که S_1 متغیر کمبود محدودیت اول و S_2 متغیر مازاد محدودیت دوم و a متغیر مصنوعی آن است؟

جدول نهایی

متغیرهای پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	a	مقدار سمت راست
$-z$	۱	۰	۰	$2M-2$	۲	-4
S_1	۲	۰	۱	۱	-1	۲
x_2	-1	۱	۰	-1	۱	۲

جدول اولیه

متغیرهای پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	a	مقدار سمت راست
$-z$	-1	۲	۰	۰	M	۰
S_1	۱	۱	۱	۰	۰	۴
a	-1	۱	۰	-1	۱	۲

دامنه تغییرات b_2، مقدار سمت راست محدودیت۲، بدون اینکه پایه بهینه تغییر کند، کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) $1 \le b_2 \le 3$ ۲) $0 \le b_2 \le 4$ ۳) $2 \le b_2 \le 4$ ۴) $0 \le b_2 \le 6$

۸ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} &\text{Min } 5x_1 + 2x_2 + x_3 \\ &x_1 + 4x_2 + x_3 \le 6 \\ &2x_1 + x_2 + x_3 \ge 2 \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

چنانچه S_1 متغیر شناوری مربوط به محدودیت اول و S_2 متغیر مازاد مربوط به محدودیت دوم باشد، در این صورت حل بهینه مسأله فوق به قرار زیر است:

	X_1	X_2	X_3	S_2	S_1	
S_1	-1	۳	۰	۱	۱	۴
x_3	۲	۱	۱	-1	۰	۲
	۳	۱	۰	۱	۰	

حال چنانچه محدودیت جدیدی به صورت $x_3 \ge 3$ به مسأله اضافه شود. (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) حل بهینه به صورت $(s_1^*, x_3^*, s_2^*) = (3,3,1)$ تغییر می‌کند.

۲) حل بهینه به صورت $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, \frac{1}{2}, 3)$ تغییر می‌کند.

۳) حل بهینه به صورت $(x_1^*, x_3^*, x_2^*) = (0, 0, 3)$ تغییر نموده و حل مزبور منحط است.

۴) مسأله به صورت مسأله غیرممکن تبدیل می‌شود.

۹ـ در روش دوال سیمپلکس تعیین متغیر ورودی به پایه مشخص کننده: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) حداکثر مقداری است که متغیر غیرپایه به خود می‌گیرد.

۲) حداقل مقداری است که متغیر غیرپایه به خود می‌گیرد.

۳) متغیری است که مقدار $Z_j - C_j$ مربوط آن به صفر می‌رسد.

۴) متغیری است که مسأله را از حالت شدنی خارج نسازد.

۱۰ـ با توجه به مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل:

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = C_1x_1 + C_2x_2 \\ &\text{s.t.} \\ &x_1 + \frac{5}{2}x_2 \le 14 \\ &3x_1 + 2x_2 \le 32 \\ &x_1 - \frac{1}{2}x_2 \le 8 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

چنانچه جواب بهینه مسأله همزاد مسأله بالا $(y_1, y_2, y_3) = (2, 0, 3)$ باشد، مقدار جواب بهینه (x_1, x_2) برابر است با:

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) (۳ و ۸) ۲) (۲ و ۹) ۳) (۴ و ۹) ۴) (۴ و ۴)

۱۱ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید :

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = Cx \\ &\text{s.t.} \\ &AX \le b \\ &x \ge 0 \end{aligned}$$

اگر اختلالی در سمت راست محدودیت‌ها ایجاد شده و مقدار آن به $b + \Delta b$ تغییر نماید، چه اختلالی در تابع هدف مسأله مزدوج ایجاد خواهد شد؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) $C_B \Delta b$
۲) $C_B B^{-1} \Delta b$
۳) $B^{-1} C_B \Delta b$
۴) $C_N B^{-1} \Delta b$

۱۲ـ فرض کنید $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 4$ یک گوشه از فضای حل قابل قبول مسأله زیر باشد و آن را A بنامیم، متناظر این نقطه در مـزدوج (Dual) دارای چه مختصاتی است: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \\ &\text{s.t.} \\ &x_1 + 4x_2 + x_3 \le 8 \\ &2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

۱) $y_1 = 0 \,,\ y_2 = 1$
۲) $y_1 = 1, y_2 = 0$
۳) $y_1 = 3, y_2 = 1$
۴) $y_1 = 0, y_2 = 3$

۱۳ـ اگر در یک مسأله LP کلیه ضرایب تابع هدف و مقادیر ماتریس K, A برابر گردند $(k > 0)$ آنگاه مقادیر جدید متغیرها در مسأله اولیه و ثانویـه با این فرض که x^* و y^* مقادیر بهینه در دو مسأله اولیه و ثانویه قبل از تغییر فوق باشند، همچنین w^*, z^* مقادیر تابع هدف مربوطه به این متغیرها در دو مسأله اولیه و ثانویه باشند. مقادیر بهینه مسأله اولیه و دوگان چه تغییری خواهند کرد؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) $y^*, \frac{x^*}{k}$ تغییر نمی‌کند.
۲) $kz^*, kx^*, \frac{y^*}{k}$ تغییر نمی‌کند.
۳) $z^*, \frac{x^*}{k}, ky^*$ تغییر نمی‌کند.
۴) $y^*, \frac{x^*}{k}$ تغییر نمی‌کند و یا $z^*, \frac{x^*}{k}, ky^*$ تغییر نمی‌کند.

۱۴ـ اگر در روش سیمپلکس مزدوج (Dual Simplex) ، پس از انتخاب متغیر خارج شونده از پایه نتوانیم هیچ متغیـری را بـه عنـوان متغیـر وارد شونده به پایه انتخاب کنیم در این صورت مسأله چگونه خواهد بود؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) مسأله مزدوج غیرموجه و اولیه بی‌کران است.
۲) هر دو مسأله اولیه و مزدوج غیرموجه هستند.
۳) هر دو مسأله اولیه و مزدوج بی‌کران هستند.
۴) مزدوج بی‌کران و اولیه غیرموجه است.

۱۵ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

$$\begin{aligned} &\text{Min } x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ &\text{s.t.} \\ &2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 6 \\ &x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

دارای:

۱) بی‌نهایت جواب بهینه است.
۲) جواب بهینه یگانه بوده و متغیر خنثی (nall variable) در آن وجود ندارد.
۳) دو متغیر خنثی (nall variable) بوده و در نتیجه با حذف آن دو متغیر، مسأله به فرم ساده‌تری تبدیل می‌گردد.
۴) یک متغیر خنثی(nall variable) x_1 بوده که با عملیات جبری از سیستم حذف شده و مسأله را به فرم ساده‌تری تبدیل می‌کند.

۱۶ـ اگر یک مسأله LP دارای جواب بهینه غیرمنحط (non – degenerate) باشد، در مورد مسأله ثانویه آن (Dual) چه می‌توان گفت؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

۱) دارای جوابهای بهینه چندگانه است.
۲) حتماً جواب موجه دارد.
۳) دارای جواب بهینه غیرتبهگن است.
۴) حتماً دارای یک جواب بهینه منحصر به فرد است.

۱۷ـ عبارت $Z_j - C_j \ge 0$ در جدول نهایی یک مسأله LP از نوع MAX با محدودیت‌های کوچکتر یا مساوی................... . (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

۱) شرط شدنی بودن مسأله است.
۲) همان محدودیت‌ها در مسأله ثانویه (Dual) است.
۳) نشان دهندهٔ شرایط وجود جوابهای بهینه چندگانه است.
۴) به منظور بررسی منحط بودن (Degeneracy) است.

۱۸ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل مفروض است:

$$\text{Min } z = c^T x \quad \text{s.t} \begin{cases} Ax \ge b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

فرض کنید که y^* جواب بهینه همزاد (dual) این مسأله باشد. بردار سمت راست b را با بردار $\overline{b}$ جایگزین می‌کنیم و بقیه مسأله را به همان حالت قبل نگه می‌داریم. اگر $\overline{x}$ جواب بهینه مسأله جدید باشد. کدام رابطه درست است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

۱) $c\overline{x} \ge y^*\overline{b}$ ۲) $c\overline{x} \le y^* b$ ۳) $c\overline{x} \ge y^* b$ ۴) $c\overline{x} \le y^*\overline{b}$

۱۹ـ تحت چه شرایطی مسأله زیر از طریق سیمپلکس دوگان حل می‌گردد: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

$$\text{Max } X = 6x_1 - 4x_2 \quad \text{s.t} \quad 3x_1 + 2x_2 \le 50,\quad x_1 + 5x_2 \ge -2,\quad x_1, x_2 \ge 0$$

۱) تابع هدف به Min تبدیل گردد.
۲) اولین محدودیت به بزرگتر یا مساوی تبدیل گردد.
۳) امکان حل از طریق سیمپلکس دوگان وجود ندارد.
۴) اولین محدودیت از نوع بزرگتر یا مساوی و تابع هدف از نوع Min باشد.

۲۰ـ اگر فضای حل قابل قبول دو مسأله اولیه و ثانویه موجود باشد، در این صورت می‌توان گفت:
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

۱) این دو مسأله دارای جواب بهینه می‌باشند.
۲) هر دو مسأله دارای فضای حل قابل قبول و محدود می‌باشند، لذا هر دو دارای جواب بهینه می‌باشند.
۳) ممکن است یکی از این دو مسأله دارای فضای حل قابل قبول بی‌کران با مقدار تابع هدف بیکران باشد.
۴) چنین حالتی دارای جواب بهینه برای مسأله اولیه و حتماً حالت منحط (degenerate) برای مسألهٔ ثانویه (Dual) است.

۲۱ـ مسأله اولیه را به شکل $\begin{cases} \text{Min } z = CX \\ AX = b \\ l \le X \le u \end{cases}$ که در آن l و u مقادیر محدود هستند در نظر بگیرید. فرض کنید که این مسأله دارای جواب موجه (feasible) باشد، در این صورت می‌توان گفت: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

۱) هر دو مسأله اولیه و دوگان نظیر آن بی‌کران هستند.
۲) مسأله اولیه بی‌کران است و مسأله دوگان آن جواب موجه ندارد.
۳) هم مسأله اولیه و هم مسأله دوگان آن دارای جواب بهینه محدود هستند.
۴) مسأله اولیه بی‌کران است اما مسأله دوگان نظیر آن یا جواب موجه ندارد و یا بی‌کران است.

۲۲ـ اگر مسأله P به صورت $\begin{cases} \text{Max } \omega b \\ \omega A \le 0 \\ \omega \text{ آزاد در علامت} \end{cases}$ تعریف شود، محدودیت‌های مسأله دوگان (Dual problem) کدام است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

۱) $AX = b$، $X \ge 0$ ۲) $AX \ge b$، $X \ge 0$ ۳) $AX \le b$، X آزاد در علامت ۴) $AX = b$، X آزاد در علامت

۲۳ـ اگر S_i^* متغیر کمبود (Slack) بهینه مربوط به محدودیت i ام مسأله همزاد مدل LP بوده و X_i^* متغیر i ام بهینه مدل LP باشد، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

۱) $X_i^* S_i^* = 0$
۲) اگر $X_i^* > 0$ باشد، آنگاه $S_i^* > 0$
۳) اگر $X_i^* = 0$ باشد، آنگاه $S_i^* = 0$
۴) مقدار $X_i^* S_i^*$ همواره بزرگتر از صفر است.

۲۴ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } z = c^T x \quad \text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

اگر یکی از محدودیت‌های مسأله بالا را حذف کنیم، مقدار تابع هدف............ . (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

۱) و ناحیه امکان‌پذیر بزرگتر می‌شود.
۲) و ناحیه امکان‌پذیر کوچکتر نمی‌شود.
۳) بزرگتر و ناحیه امکان‌پذیر کوچکتر می‌شود.
۴) کوچکتر نمی‌شود و ناحیه امکان‌پذیر بزرگتر نمی‌شود.

۲۵ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & x_1 + x_2 - 4x_3 \\ \text{s.t} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

چنانچه حل بهینهٔ مسأله فوق به صورت $x_1^* = \frac{1}{3}, x_2^* = 0, x_3^* = \frac{13}{3}$ باشد، در آن صورت حل بهینه مسأله مزدوج آن چگونه است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

۱) $y_1^* = 0$ ، $y_2^* = 1$ ، $y_3^* = 2$

۲) $y_1^* = -1$ ، $y_2^* = 0$ ، $y_3^* = 2$

۳) $y_1^* = -1$ ، $y_2^* = 0$ ، $y_3^* = -2$

۴) $y_1^* = 1$ ، $y_2^* = 0$ ، $y_3^* = 2$

۲۶ـ مدل برنامه‌ریزی خطی زیر مفروض است. اگر فضای جواب این مسأله را با k نشان دهیم، محک بهینه بودن جدول نهایی سیمپلکس برای این مدل برنامه‌ریزی خطی عبارت است از: $\{\text{Min}\, z(x) / Ax = b ; x \ge 0\}$

(مهندسی صنایع گرایش‌های صنایع و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۱)

۱) مسأله مزدوج آن دارای جواب متناهی می‌باشد.

۲) فضای جواب k متناهی باشد.

۳) فضای جواب k نامتناهی ولیکن مقدار تابع هدف آن متناهی باشد.

۴) جواب مسأله مزدوج آن قابل قبول باشد.

۲۷ـ برای به دست‌آوردن جواب بهینه یک مسأله برنامه‌ریزی خطی اولیه به روش سیمپلکس تجدید نظر شده با m محدودیت و n متغیر که در آن $n > m$ می‌باشد، با استفاده از کامپیوتر پیرامون حجم محاسبات این مسأله و مسأله ثانویه آن چه می‌توان گفت؟

(مهندسی صنایع گرایش‌های صنایع و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۱)

۱) حل مسأله ثانویه حافظه کمتری از کامپیوتر را اشغال می‌کند.

۲) میزان حافظه اشغال شده توسط هر دو مسأله یکسان است.

۳) حل مسأله اولیه حافظه کمتری از کامپیوتر را اشغال می‌کند.

۴) با اطلاعات موجود نمی‌توان در مورد پاسخ قطعی اظهار نظر نمود.

۲۸ـ اگر یک مسأله برنامه‌ریزی خطی دارای جواب موجه نامحدود باشد، مسأله ثانویه آن:

(مهندسی صنایع گرایش‌های صنایع و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۱)

۱) ممکن است منطقه موجه نامحدود داشته باشد.

۲) بدون منطقه موجه باشد.

۳) دارای منطقه موجه محدود باشد.

۴) (۱) یا (۲) یا (۳)

■ **یک مسأله برنامه‌ریزی خطی و جدول بهینه آن در کادر زیر داده شده است. حال به سؤالات مستقل از هم زیر پاسخ دهید.**

قطعه / ماشین	A	B	C	D
a	۵	۹	–	۴
b	۶	۱۰	۳	–
c	۴	۲	۵	۷

```
MAX 1.416  A+1.433   B+1.85    C+ 2.183  D+1.7 E
SUBJECT  TO
        1) 12 A+ 7 B + 8 C + 10 D + 7 E < = 7680
        2) 8 A+ 9 B + 4 C + 11 E < = 7680
        2) 5 A+ 10 B + 7 C + 3 D + 2 E < = 7680
              OBJECTIVE  FUNCTION VALUE
                     1817.56
VARIABLE          VALUE             REDUCED    COST
    A              0.00                1.38
    B              0.00                0.24
    C            512.00                0.00
    D              0.00                0.75
    E            512.00                0.00
   ROW        SLACK OR SURPLUS      DUAL   PRICES
    1              0.00                0.22
    2              0.00                0.01
    3           3072.00                0.00

              SENSITIVITY  ANALYSIS
             OBJ COEFFICIENT RANCES
VARIABLE     CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
               COEF          INCREASE         DECREASE
    A          1.41            1.38           INFINITY
    B          1.43            0.24           INFINITY
    C          1.58            0.09             0.04
    D          2.18            0.07           INFINITY
    E          1.70            0.11             0.08
             RIGHTHAND  SIDE  RANGES
   ROW       CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
               RHS           INCREASE         DECREASE
    1        7680.00         2671.30          2792.72
    2        7680.00         4388.57          3840.00
    3        7680.00         INFINITY         3072.00
```

۲۹ـ در مسأله برنامه‌ریزی خطی و حل کامپیوتری آن اگر می‌خواستید ۲۵۰۰ واحد به سمت راست یکی از محدودیت‌ها اضافه کنید که بیشترین تغییر را در تابع هدف به‌وجود آورد، کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح بود؟ (مهندسی صنایع گرایش‌های صنایع و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۱)

۱) به سمت راست محدودیت اول اضافه می‌کردیم تا ۵۵۰ واحد به مقدار بهینه فعلی تابع هدف اضافه کند.

۲) از سمت راست محدودیت دوم کم می‌کردیم تا ۲۵۰۰ واحد از مقدار بهینه فعلی تابع هدف کم کند.

۳) مجاز نبودیم.

۴) به سمت راست محدودیت سوم اضافه می‌کردیم.

۳۰ـ در مسأله برنامه‌ریزی خطی و حل بهینه آن توسط کامپیوتر اگر ضریب متغیرهای A و B و E در تابع هدف را به ترتیب از ۱/۴۱ و ۱/۴۳۳ و ۱/۷ به ۱/۵ و ۱/۵ و ۱/۷۵ برسانیم، کدام گزینه صحیح خواهد بود؟ (مهندسی صنایع گرایش‌های صنایع و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۱)

۱) ترکیب حل بهینه به کلی عوض می‌شود.

۲) ۲۵/۶ به مقدار تابع هدف اضافه می‌شود.

۳) ترکیب حل بهینه عوض نمی‌شود ولیکن مقادیر حل بهینه عوض می‌شود.

۴) مقدار متغیرهای مزدوج هم‌زمان با مقدار متغیرهای مسأله اصلی عوض می‌شوند.

۳۱ـ کدام یک از موارد زیر جزء اهداف و مراحل سیمپلکس همزاد نیست؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) حفظ شرط تعلق جواب

۲) شروع از یک نقطه ناشدنی گوشه‌ای

۳) حفظ شرط بهینگی جدول سیمپلکس

۴) عدم استفاده از متغیرهای مصنوعی برای محدودیتهای به صورت بزرگتر یا مساوی

۳۲ـ مدل برنامه‌ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max } & Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t } & \\ & 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 2 \\ & 3x_1 - x_2 + 6x_3 \ge 1 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 \ge 1 ,\ x_2 \le 0 ,\ x_3 \text{ آزاد} \end{aligned}$$

اگر $x_1^* = 0$ و $x_2^* = 0$ و $x_3^* = 4$ حل بهینه مسأله فوق باشد، حل بهینه مسأله مزدوج آن عبارت است از: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) $y_3^* = 0 , y_2^* = 0 , y_1^* = 3$
۲) $y_3^* = 3 , y_2^* = 0 , y_1^* = 0$
۳) $y_3^* = 0 , y_2^* = 1 , y_1^* = 1$
۴) $y_3^* = 0 , y_2^* = 3 , y_1^* = 0$

۳۳ـ مسأله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۲)

$$\begin{aligned} \text{Max } & z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t } & 2x_2 + x_3 \ge 50 \\ & x_1 + x_3 \ge 10 \\ & x_1 + x_2 \ge 10 \\ & x_1 \ge 0 , x_2 \ge 0 , x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

۱) مسأله همزاد آن غیرممکن است.

۲) مسأله همزاد آن جواب بهینه محدود دارد.

۳) بهینه محدود ولی X نامحدود است.

۴) هر دو مسأله اولیه و همزاد جواب بهینه محدود دارند.

۳۴ـ مسأله اولیه و مزدوج را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max\ & N \\ \text{s.t } & \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge N \\ & x_i \ge 0 ,\ i = 1 \text{ و } 2 \text{ و } \dots \text{ و } m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & M \\ \text{s.t } & \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le M \\ & y_j \ge 0 ,\ j = 1 \text{ و } 2 \text{ و } \dots \text{ و } n \end{aligned}$$

در این صورت: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) $M \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j \le N$
۲) $-N \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j \le M$
۳) $2N \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j \le 2M$
۴) $N \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j \le M$

۳۵ـ اگر مسأله اولیه به صورت زیر تعریف شود:

$$\underset{s.t}{\text{Min}}\ W = ۴y_1 + ۲y_2 - y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + ۲y_2 \le ۶ \\ y_1 - y_2 + ۲y_3 = ۸ \\ y_1, y_2 \ge ۰,\ y_3 \ \text{با علامت نامحدود} \end{cases}$$

در این صورت مقادیر بهینه متغیرهای دوگان چقدر است؟ فرض کنید متغیرهای دوگان وابسته به محدودیت‌های اول و دوم به ترتیب x_1 و x_2 باشد.

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۲)

۱) $x_1 = -\frac{۱}{۲}\ ,\ x_2 = ۰$
۲) $x_1 = ۰\ ,\ x_2 = -\frac{۱}{۲}$
۳) $x_1 = ۲\ ,\ x_2 = -۱$
۴) $x_1 = -۱\ ,\ x_2 = ۲$

۳۶ـ در روش سیمپلکس دوگان (ثانویه): (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۲)

۱) اگر تمام عناصر یک سطر منفی باشد، مسأله دوگان نامتناهی است.
۲) اگر تمام عناصر یک سطر منفی باشد، مسأله اولیه جواب شدنی ندارد.
۳) اگر تمام عناصر یک سطر مثبت و فقط سمت راست منفی باشد، دوگان نامتناهی و اولیه نشدنی است.
۴) اگر تمام عناصر یک سطر به جزء سمت راست منفی باشد، اولیه نشدنی است و دوگان نیز نشدنی است.

۳۷ـ فرض کنید برای یک مسأله برنامه‌ریزی خطی B پایه بهینه باشد، اگر دامنه تغییرات ضرایب تابع هدف به صورت:

$$C_1 \in [۵,۷],\ C_2 \in [۲,۶],\ C_3 \in [۱,۷]$$

باشد و مقادیر فعلی ضرایب $C_1 = ۶\ ,\ C_2 = ۳\ ,\ C_3 = ۵,...$ باشد و اگر فقط مقادیر C_1 و C_2 و C_3 از مقدار فعلی تغییر کنند:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۲)

۱) به ازای $C_1 = ۵/۷\quad C_2 = ۲/۸\quad C_3 = ۵/۵$ ، B پایه بهینه مسأله خواهد بود.
۲) به ازای $C_1 = ۴\quad C_2 = ۶\quad C_3 = ۲$ ، B پایه بهینه مسأله خواهد بود.
۳) به ازای $C_1 = ۵/۶\quad C_2 = ۵/۸\quad C_3 = ۵/۵$ ، B پایه بهینه مسأله خواهد بود.
۴) به ازای $C_1 = ۵/۵\quad C_2 = ۵\quad C_3 = ۲$ ، B پایه بهینه مسأله خواهد بود.

۳۸ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی $\underset{\substack{Ax \ge b \\ x \ge ۰}}{\text{Min}}\ Z = cx$ را در نظر بگیرید. اگر این مسأله جواب بی‌کران داشته باشد:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۲)

۱) با تغییر b مسأله دوگان ممکن است نشدنی یا بی‌کران شود.
۲) هرگز با تغییر b مسأله دارای جواب بهینه متناهی نخواهد شد.
۳) با تغییر b می‌توان مسأله را به یک مسأله با جواب بهینه متناهی تبدیل کرد.
۴) با تغییر b ممکن است ناحیه شدنی تهی شود و دوگان جواب بهینه متناهی داشته باشد.

۳۹ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید. در جواب بهینه این مسأله: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۲)

$$\underset{s.t.}{\text{Min}}\ Z = y$$

$$\begin{cases} y - Cx = ۰ \\ Ax = b \\ x \ge ۰ \end{cases}$$

۱) متغیر دوگان محدودیت اول یک است.
۲) متغیر دوگان محدودیت اول مثبت و بقیه محدودیت‌ها منفی است.
۳) متغیر دوگان تمام محدویت‌های مسأله می‌توانند مقادیر مثبت یا منفی داشته باشند.
۴) متغیر دوگان اول منفی و بقیه محدودیت‌ها می‌توانند مثبت یا منفی باشند.

■ توجه کنید که دو سؤال بعدی در رابطه با مسأله کلی زیر است.

مدل برنامه‌ریزی خطی که به نام مدل (LP) نامیده می‌شود، جدول بهینه آن در زیر داده شده است:

$$\underset{s.t}{\text{Max}}\ z = ۳۰x_1 + ۲۰x_2 + ۵۰x_3$$

$$\begin{aligned} & ۳x_1 + \frac{۳}{۲}x_2 + x_3 \le ۴۵۰۰ \\ & ۲x_1 - ۳x_2 \ge ۰ \\ & ۵x_2 - ۲x_3 \ge ۰ \\ & ۵x_1 - ۳x_3 \ge ۰ \\ & ۲x_1 + ۳x_2 + ۵x_3 \le ۴۰۰۰ \\ & ۴x_1 + ۲x_2 + ۷x_3 \le ۶۰۰۰ \\ & x_1 \ge ۲۰۰ \\ & x_2 \ge ۲۰۰ \\ & x_3 \ge ۱۵۰ \\ & x_j \ge ۰\ ,\ \ j = ۱,۲,۳ \end{aligned}$$

جدول بهینه مسأله فوق به صورت زیر است:

Varlable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
x۱	۳۲۴/۳۲۴۳	۰	۳۰	۱۸/۷۰۹۶۸	∞
x۲	۲۱۶/۲۱۶۲	۰	۲۰	−۱۷۰	۳۲/۹۰۳۲۳
x۳	۵۴۰/۵۴۰۵	۰	۵۰	۲۳/۳۳۳۳۳	۸۵
Constraint	Dual Value	Slock / Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
Constraint ۱	۰	۲۶۶۲/۱۶۲	۴۵۰۰	۱۸۳۷/۸۳۸	∞
Constraint ۲	۰	۰	۰	−∞	۰
Constraint ۳	−۲/۱۶۲۱۶۲	۰	۰	−۹۶/۷۷۴۲	۰
Constraint ۴	۱/۸۹۱۸۹۲	۰	۰	۰	۷۵۰
Constraint ۵	۱۰/۲۷۰۲۷	۰	۴۰۰۰	۳۷۰۰	۴۳۵۲/۹۴۱
Constraint ۶	۰	۴۸۶/۴۸۶۳	۶۰۰۰	۵۵۱۳/۵۱۳	∞
Constraint ۷	۰	۱۲۴/۳۲۴۳	۲۰۰	−∞	۳۲۴/۳۲۴۳
Constraint ۸	۰	۱۶/۲۱۶۲۲	۲۰۰	−∞	۲۱۶/۲۱۶۲
Constraint ۹	۰	۳۹۰/۵۴۰۵	۱۵۰	−∞	۵۴۰/۵۴۰۵

۴۰ـ در مدل (LP) که از ۹ محدودیت و سه متغیر ساخته شده است، حل بهینه این مسأله با توجه به کدام گزینه زیر حاصل می‌شود؟

(مهندسی صنایع گرایش‌های صنایع و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۲)

۱) محدودیت‌های (۱) و (۲) و (۳) به شکل مساوی باشند و بقیه محدودیت‌ها نادیده گرفته شوند.

۲) محدودیت‌های (۱) و (۲) و (۶) و (۷) و (۸) و (۹) به شکل مساوی در نظر گرفته شوند و بقیه محدودیت‌ها نادیده گرفته شوند.

۳) حل بهینه فقط از طریق جدول نهایی سیمپلکس حاصل می‌شود و با مساوی قرار دادن محدودیت‌ها به دست نمی‌آید.

۴) محدودیت‌های (۳) و (۴) و (۵) را به شکل مساوی قرار دهیم و بقیه محدودیت‌ها را نادیده بگیریم.

۴۱ـ برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید، مقدار بهینه تابع هدف آن چقدر است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۳)

$$\underset{s.t}{\text{Max}}\ z = ۲x_۱ + ۲x_۲ + ۲x_۳$$

$$x_۱ + ۲x_۲ \le ۲$$
$$۲x_۱ - x_۳ \le ۲$$
$$-x_۲ + x_۳ \le ۲$$
$$x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰$$

۱) مقدار بهینه تابع هدف برابر ۱۰ است.

۲) مقدار بهینه تابع هدف برابر ۸ است.

۳) مقدار بهینه تابع هدف برابر ۶ است.

۴) مقدار بهینه تابع هدف برابر ۴ است.

۴۲ـ اگر مؤلفه‌های بردار a_j همگی منفی و مؤلفه c_j در بردار c^T مثبت باشد. کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) مقدار بهینه تابع هدف محدود نیست.　　۲) فضای شدنی مسأله P محدود است.

۳) مسأله D دارای فضای شدنی بی‌کران است.　　۴) مسأله D دارای فضای شدنی محدود است.

۴۳ـ اگر محدودیت جدید $-x_۱ + ۲x_۳ \ge ۲$ به مسأله اضافه شود، مسأله نهایی: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۳)

۱) بهینه می‌ماند.　　۲) تغییر می‌کند.　　۳) مقادیر جواب زیاد می‌شود.　　۴) هیچ‌کدام

۴۴ـ مدل برنامه‌ریزی خطی مقابل مفروض است. $\{\text{Min}\, z = cx / Ax \ge c^T : x \ge ۰\}$

که در آن A یک ماتریس $n\times n$ و متقارن است. اگر $\bar{x}$ در رابطه $A\bar{x} = c^T$ صدق کند و $\bar{x} \ge ۰$ باشد. کدام گزینه است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۳)

۱) $\bar{x}$ حل قابل قبول برای مسأله اولیه است و لیکن مساله مزدوج آن جواب ندارد.

۲) $\bar{x}$ جواب بهینه این مسأله و مسأله مزدوج آن است.

۳) $\bar{x}$ در محدودیت‌های مسأله مزدوج صدق نمی‌کند.

۴) مقدار تابع هدف مسأله مزدوج حتماً نامتناهی است چون به شکل ماکزیمم است.

۴۵ـ مدل برنامه‌ریزی خطی $\{\text{Min}\, c^T x \,/\, Ax \le b\ ;\ x \ge 0\}$ مفروض است که در آن $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $c = (-2, 1, 0)$ است. جدول نهایی سیمپلکس که در آن s_1, s_2, s_3 متغیرهای کمکی هستند به صورت زیر است. جواب بهینه مسأله مزدوج آن کدام است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۳)

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
۱	۰	۱-	۰	۰	۰	۲-	۴-
۰	۰	۳-	۰	۱	۴	۲	۲
۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۲
۰	۰	۱-	۱	۰	۱	۱	۱

۱) $y^* = (-1, 0, -2)$ ۲) $y^* = (0, -1, 0)$ ۳) $y^* = (0, 0, -2)$ ۴) $y^* = (0, 0, 2)$

۴۶ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = CX \\ &\text{s.t.} \\ &\quad AX = b \\ &\quad x \ge 0 \end{aligned}$$

در حل مزدوج مربوط به مرحله اول سیمپلکس، مقادیر تمام متغیرهای مزدوج باید: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) منفی باشند. ۲) برابر با عدد ۱ باشند. ۳) بزرگ‌تر یا مساوی عدد ۱ باشند. ۴) کوچکتر یا مساوی عدد ۱ باشند.

۴۷ـ با کدام شیوه نمی‌توان منطقه قابل قبول (Feasible region) یک مسأله برنامه‌ریزی خطی را افزایش داد؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) افزایش تعداد محدودیت‌ها ۲) تغییر در اعداد سمت راست

۳) با تغییر در ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در محدودیت‌ها ۴) با تبدیل علامت محدودیت‌های کوچکتر یا مساوی با بزرگتر یا مساوی

۴۸ـ A یک ماتریس $(m \times n)$، b یک ماتریس $(m \times 1)$، C یک ماتریس $(1 \times n)$ می‌باشد. مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\text{Min}\, CX - b^T Y \\ &\text{s.t} \\ &\quad AX \ge b \\ &\quad -A^T Y \ge -C^T \\ &\quad X, Y \ge 0 \end{aligned}$$

C^T, b^T ترانهاده‌های c,b هستند. کدام یک از جملات زیر درست می‌باشند: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) مدل فوق نشدنی می‌باشد.

۲) مدل فوق نشدنی است یا دارای جواب نامحدود است.

۳) مدل فوق نشدنی است یا دارای جواب بهینه با مقدار تابع هدف صفر است.

۴) مدل فوق نشدنی است یا دارای جواب بهینه با مقدار تابع هدف غیر صفر است.

۴۹ـ برنامه‌ریزی خطی را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = 5x_1 + 3x_2 \\ &\text{s.t.} \\ &\quad x_2 \le 25 \\ &\quad 4x_1 + 5x_2 \le 200 \\ &\quad 2x_1 + x_2 \le 70 \\ &\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

متغیر اساسی	شماره معادله	z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	سمت راست
z	۰	۱	۰	۰	۰	$\frac{1}{6}$	$\frac{13}{6}$	۱۸/۵
x_2	۱	۰	۰	۱	۰	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	۲۰
s_1	۲	۰	۰	۰	۱	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	۵
x_1	۳	۰	۱	۰	۰	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	۲۵

جدول بهینه روش سیمپلکس به دست آمده مطابق شکل است که S_1, S_2, S_3 متغیرهای لنگی و معادله صفر مربوط به تابع هدف است، چنانچه ضریب X_1 در تابع هدف (یعنی ۵) به $(5+a)$ تغییرکند، به ازای چه مقادیری از a جواب بهینه تغییر نمی‌کند؟ (a می‌تواند مثبت یا منفی باشد)

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) $a \le 1$
۲) $a \ge -1$
۳) $a \le 2/6$
۴) $-1 \le a \le 1$

■ مسأله برنامه‌ریزی خطی P به شرح زیر مفروض است:

$$\underset{s.t.}{\text{Min}}\ z = x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = b_1 = 20$$
$$-x_1 + x_2 - x_4 = b_2 = 10$$
$$x_2 + x_5 = b_3 = 30$$
$$x_1 \text{ تا } x_5 \ge 0$$

می‌دانیم در جدول نهایی سیمپلکس ماتریس مبنا (B) و برگردان آن B^{-1} به قرار مقابل است:

$$B = (a_4, a_2, a_3),\ B^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

۵۰ـ اگر محدودیت $-3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \ge b_4$ به مسأله p اضافه شود، در ازای چه مقادیری از مقدار پارامتر b_4، بردارهای a_3, a_2, a_4 در ماتریس مبنای حل بهینه مسأله جدید باقی خواهند ماند؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) $b_4 \ge 10$
۲) $b_4 \le 70$
۳) $0 \le b_4 \le 50$
۴) $70 \le b_4 \le 100$

۵۱ـ حساسیت تابع هدف مسأله p نسبت به تغییرات جزئی در پارامتر b_3 چیست؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) ۱
۲) ۲-
۳) ۲-
۴) ۶-

۵۲ـ اگر در مسأله p ضریب x_3 در معادله هدف از ۱- به $(-1+\alpha)$ تغییر کند، محدوده پارامتر α برای اینکه ماتریس مبنای بهینه تغییر نکند چیست؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) $\alpha \le -3$
۲) $\alpha \ge 8$
۳) $-3 \le \alpha \le 8$
۴) $-8 \le \alpha \le 3$

۵۳ـ کدام گزینه در مورد $\underset{\sim}{v}^{*T}$ یعنی نقطه بهینه دوگان (Dual) مسأله p صادق است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) $\underset{\sim}{v}^{*T} = (4, 0, 1)$
۲) $\underset{\sim}{v}^{*T} = (1, 3, -6)$
۳) $\underset{\sim}{v}^{*T} = (1, -1, -2)$
۴) $\underset{\sim}{v}^{*T} = (-8, 12, -3)$

۵۴ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\underset{s.t}{\text{Min}}\ z = CX$$
$$AX = b$$

A یک ماتریس $(m \times n)$ می‌باشد. اگر مسأله دارای حل قابل قبول باشد، کدام یک از جملات زیر صحت دارند؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) مدل فوق دارای حل بهینه محدود است اگر و تنها اگر بتوان C را به صورت ترکیب خطی از بردارهای ستونی A نوشت.
۲) مدل فوق دارای حل بهینه محدود است اگر و تنها اگر امکان نوشتن C به صورت ترکیب خطی از سطرهای A وجود نداشته باشد.
۳) مدل فوق دارای حل بهینه محدود است اگر و تنها اگر بتوان C را به صورت ترکیب خطی از بردارهای سطری A نوشت.
۴) مدل فوق دارای حل بهینه محدود است اگر و تنها اگر بتوان C را به صورت ترکیب خطی از بردارهای سطری و ستونی A نوشت.

۵۵ـ اگر بردار $\underset{\sim}{a}_k$ در مرحله‌ای از الگوریتم، کاندید ورود به مبنا بوده و برداری برای خروج از مبنا وجود نداشته باشد، کدام گزینه صحیح است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

۱) دوگان مسأله p حل شدنی ندارد.
۲) دوگان مسأله p جواب لایتناهی دارد.
۳) مسأله p دارای جواب شدنی (Feasible) نیست.
۴) مسأله p دارای جواب بهینه تبهگن (Degenerate) است.

■ فرض کنید در یک مسأله رژیم غذایی، هدف مینیمم کردن هزینه خرید غذا است به طوری که در ترکیب غذایی که خریده می‌شود، حداقل ۲۱ واحد ویتامین A و ۱۲ واحد ویتامین B وجود داشته باشد. ۵ نوع غذا موجود است که خصوصیات هر کدام در زیر آمده است. مسأله به صورت زیر فرموله شده است:

غذا	۱	۲	۳	۴	۵
محتویات ویتامین A هر واحد غذا	۱	۰	۱	۱	۲
محتویات ویتامین B هر واحد غذا	۰	۱	۲	۱	۱
هزینه هر واحد غذا برحسب تومان	۲۰	۲۰	۳۱	۱۱	۱۲

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= 20x_1 + 20x_2 + 31x_3 + 11x_4 + 12x_5 \\ \text{s.t} \quad & x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5 \ge 21 \\ & x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \ge 12 \\ & x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

که در آن x_j میزان غذای خریداری شده نوع j است. حل مسأله فوق به کمک کامپیوتر، جواب‌های زیر را به دست داده است:

جواب بهینه $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 3$, $x_5 = 9$

مقدار بهینه $\text{Min } z = 141$

هزینه‌های تقلیل یافته (reduced costs) =
$$\begin{cases} x_1 & \text{هزینه تقلیل یافته} = 19 \\ x_2 & \text{هزینه تقلیل یافته} = 10 \\ x_3 & \text{هزینه تقلیل یافته} = 10 \\ x_4 & \text{هزینه تقلیل یافته} = 0 \\ x_5 & \text{هزینه تقلیل یافته} = 0 \end{cases}$$

شبه قیمت‌ها (shadow price) $y_1 = 1$ $y_2 = 10$

حدود ضرایب سمت راست

محدودیت	حد پایین	مقدار فعلی	حد بالا
۱	۱۲	۲۱	۲۴
۲	۱۰/۵	۱۲	۲۱

حدود ضرایب تابع هدف

متغیر	حد پایین	مقدار فعلی	حد بالا
x_1	۱	۲۰	∞
x_2	۱۰	۲۰	∞
x_3	۲۱	۳۱	∞
x_4	۶	۱۱	۱۲
x_5	۱۱	۱۲	۲۲

۵۶ـ جواب بهینه هنگامی که هزینه خرید هر واحد غذای نوع ۱، ۵ تومان شود کدام است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۴)

۱) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 3$, $x_5 = 9$

۲) $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 9$

۳) $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 3$, $x_5 = 7$

۴) هیچ‌کدام

■ مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل را مسأله P و دوگان آن را مسأله D می‌نامیم:

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = \tilde{C}^T \tilde{x} \\ &\text{s.t} \\ &\quad A\tilde{x} = \tilde{b} \qquad \tilde{x} \ge 0 \\ &\quad A = (m \times n) \quad \tilde{x} \in E^n \end{aligned}$$

در ارتباط با این مسأله به ۵ سؤال مستقل از هم زیر پاسخ دهید.

۵۷ـ برای حل مسأله P به روش سیمپلکس برداری کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۴)

۱) ماتریس A باید حاوی یک ماتریس واحد (یکّه) باشد.

۲) لزومی ندارد که ماتریس A حاوی ماتریس واحد (یکّه) باشد.

۳) با اضافه کردن متغیرهای مصنوعی (Artificial) باید ماتریس واحد (یکّه) ایجاد کرد.

۴) هر مجموعه m تایی از ستون‌های ماتریس A می‌تواند یک ماتریس مبنا برای حل مسأله به دست دهد.

۵۸ـ اگر مقدار بهینه z در مسأله P عددی مثبت باشد کدام گزینه صحیح است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۴)

۱) متغیرهای مسأله D همواره مقادیری مثبت خواهند بود.

۲) مقدار معادله هدف مسأله D در ازای نقاط شدنی آن مقداری مثبت است.

۳) مقدار معادله هدف مسأله D در ازای نقاط شدنی آن می‌تواند عددی مثبت و یا منفی باشد.

۴) علامت متغیرهای مسأله D در ازای نقاط شدنی آن بستگی به علامت مؤلفه‌های بردار $\underset{\sim}{c}$ در مسأله P دارد.

۵۹ـ اگر در مسأله P ، $m > n$ باشد کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۴)

۱) مسأله ممکن است جواب شدنی داشته باشد.
۲) مسأله فقط یک نقطه شدنی خواهد داشت.
۳) مسأله نمی‌تواند جواب شدنی داشته باشد.
۴) مسأله حداکثر به تعداد $\frac{m!}{(n!)(m-n)!}$ نقطه شدنی خواهد داشت.

۶۰ـ در مورد تعداد مؤلفه‌های مثبت هر نقطه شدنی (feasible) مسأله P کدام گزینه صحیح است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۴)

۱) بستگی به رتبه ماتریس A دارد.
۲) می‌تواند حداکثر m عدد باشد.
۳) می‌تواند حداکثر n عدد باشد.
۴) می‌تواند حداکثر $m+1$ عدد باشد.

۶۱ـ اگر در مسأله P رتبه ماتریس $(A,\underset{\sim}{b})$ بزرگتر از رتبه ماتریس (A) باشد، کدام گزینه صحیح است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۴)

۱) مسأله D نیز جواب شدنی نخواهد داشت.
۲) مسأله D جواب بهینه محدود خواهد داشت.
۳) مسأله D ممکن است جواب بی‌کران داشته باشد.
۴) در مسأله D نیز رتبه ماتریس (A^T, c) بزرگتر از رتبه ماتریس A خواهد بود.

■ **مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل مفروض است:**

$$\begin{aligned}
\text{Max}\, z &= x_1 + 4x_2 = c_1x_1 + c_2x_2 \\
\text{s.t}\quad & x_1 + x_2 \le 3 = b_1 \\
& x_1 + 3x_2 \le 6 = b_2 \\
& x_1 \le 2 = b_3 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

با اضافه کردن متغیرهای کمکی x_3، x_4 و x_5 به محدودیت‌های ۱ الی ۳ مسأله فوق را حل کرده و در تابلوی نهایی به ماتریس مبنای B برابر $[\tilde{a}_3, \tilde{a}_2, \tilde{a}_5]$ رسیده‌ایم که برگردان آن B^{-1} به قرار زیر می‌باشد:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در ارتباط با این مسأله به دو سؤال بعد پاسخ دهید.

۶۲ـ در کدام محدوده برای پارامترهای b_1, b_2, b_3 ماتریس مبنا در تابلوی نهایی تغییر نخواهد کرد؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۴)

۱) $b_1 = \frac{1}{3}, b_2 = b_3 \ge 0$
۲) $3b_1 \ge b_2 \ge 0\ ,\ b_3 \ge 0$
۳) $b_1 \ge \frac{1}{3}b_2, b_2 \ge 8, b_3 \ge 4$
۴) $b_1 \ge 3, b_2 \ge 6, b_3 \ge 2$

۶۳ـ در کدام محدوده برای پارامترهای c_1 و c_2 نقطه بهینه مسأله تغییر نخواهد کرد؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۴)

۱) $c_2 \ge 0\ ,\ c_2 = 3c_1$
۲) $c_1 \ge 0\ ,\ \frac{1}{3}c_2 \le c_1$
۳) $c_1 \ge 0\ ,\ c_1 \ge 3c_2$
۴) $c_2 \ge 0\ ,\ c_2 \ge 3c_1$

۶۴ـ اگر در یک مسأله برنامه‌ریزی خطی، مقدار بهینه متغیر خفیف (Slack) محدودیت i ام که با S_i نشان داده می‌شود، برابر با صفر باشد، در این صورت کدام یک از جملات زیر صحیح می‌باشند.(B^{-1} معکوس ماتریس تشکیل شده از ستون‌های متغیرهای اساسی در حل بهینه و C_B بردار ضرایب تابع هدف متغیرهای اساسی در حل بهینه هستند.)

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۴)

۱) تمام مقادیر بردار C_BB^{-1} غیرصفر هستند.
۲) در بردار C_BB^{-1} تمام مقادیر صفر خواهند بود.
۳) در بردار C_BB^{-1} حداقل یک مقدار غیرصفر وجود دارد.
۴) در بردار C_BB^{-1} حداکثر یک مقدار غیرصفر وجود دارد.

۶۵ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی اولیه و مزدوج آن به ترتیب زیر در نظر بگیرید. تفاوت مابین حداکثر مقدار z^* و حداقل مقدار w^* برابر است با:

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۴)

مسأله اول:

$$\text{Max } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{s.t} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i ; i = 1 \text{ تا } m$$
$$x_j \ge 0$$

و مسأله مزدوج:

$$\text{Min } w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$
$$\text{s.t} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j ; j = 1 \text{ تا } n$$
$$y_i \ge 0$$

۱) یا صفر یا بی‌نهایت
۲) یا صفر یا یک مقدار عددی منفی
۳) یا صفر یا مقدار عددی مثبت
۴) یا بینهایت یا یک مقدار عددی مثبت

۶۶ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را که در آن ماتریس A دارای ابعاد $m \times n$ $(m < n)$ بوده و از ستون‌های $a^1, \dots, a^n$ تشکیل شده است را مسأله P می‌نامیم.

$$(\text{مسأله } p) \ \text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a^j x_j \le b_i \quad i = 1, \dots, m \quad ; \ x_j \ge 0$$

و مزدوج مسأله P را با D نشان می‌دهیم. در ارتباط با مسائل P و D به سه سؤال مستقل از هم زیر پاسخ دهید: اگر در ماتریس A ستون a^j مضربی از ستون a^k باشد، آنگاه در ارتباط با جواب بهینه مسأله P کدام گزینه درست است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۴)

۱) مسأله P دارای جواب بهینه چند گانه است.
۲) حاصل‌ضرب x_j در x_k صفر خواهد بود.
۳) مقدار x_j و x_k فرقی با هم ندارند.
۴) مقدار x_j مصرفی از مقدار x_k خواهد بود.

۶۷ـ در مسأله ۷۱ (مسأله P) اگر مؤلفه‌های بردار a^j همگی منفی بوده و مؤلفه c_j در تابع هدف مثبت باشد، کدام گزینه صحیح است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۴)

۱) مقدار بهینه تابع هدف محدود نیست.
۲) فضای جواب مسأله P محدود است.
۳) مسأله D دارای فضای جواب بی‌کران است.
۴) مسأله D دارای فضای جواب شدنی و محدود است.

۶۸ـ اگر فضای جواب مسأله قبل (مسأله P) تهی باشد، کدام گزینه درست است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۴)

۱) فضای شدنی مسأله D حتماً محدود است.
۲) فضای شدنی مسأله D حتماً بی‌کران است.
۳) فضای شدنی مسأله D ممکن است تهی باشد.
۴) مسأله شدنی مسأله D حتماً تهی است.

۶۹ـ اگر محدودیت‌های همزاد یک مسأله برنامه‌ریزی خطی ناسازگار باشند، آن‌گاه: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۴)

۱) محدودیت‌های مسأله اولیه نیز ناسازگاراند.
۲) محدودیت‌های مسأله اولیه می‌توانند سازگار باشند.
۳) فضای جواب قابل قبول مسأله اولیه نامحدود است.
۴) فضای جواب قابل قبول مسأله اولیه محدود است.

۷۰ـ با توجه به مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر چنانچه جواب بهینه مسأله مزدوج آن برابر $(y_1, y_2, y_3) = (2, 0, 3)$ باشد، مقدار جواب بهینه (x_1, x_2) برابر خواهد بود با:

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۴)

$$\text{Max } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$
$$\text{s.t}$$
$$2x_1 + 5x_2 \le 28$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 31$$
$$2x_1 - x_2 \le 16$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

۱) $(8, 3)$
۲) $(9, 2)$
۳) $(9, 4)$
۴) $(4, 4)$

۷۱ـ فرض کنید که $y_1=1, y_2=4, y_3=0$ یک گوشه از فضای حل قابل قبول مسأله زیر باشد و آن را A بنامیم. تناظر این نقطه در مسأله مزدوج دارای چه مختصاتی است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۴)

$$\underset{s.t}{\text{Max}}\ z = 3y_1 + 4y_2 + y_3$$

$$y_1 + 4y_2 + y_3 \le 8$$

$$2y_1 - y_2 + 4y_3 = 15$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

۱) $(x_1 = 0, x_2 = 1)$

۲) $(x_1 = 1, x_2 = 0)$

۳) $(x_1 = 3, x_2 = 1)$

۴) $(x_1 = 0, x_2 = 3)$

۷۲ـ کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۴)

۱) محک بهینه بودن جدول نهایی سیمپلکس برای مدل برنامه‌ریزی خطی آن است که مسأله مزدوج دارای جواب متناهی باشد.

۲) محک بهینه بودن جدول نهایی سیمپلکس برای مدل برنامه‌ریزی خطی آن است که فضای جواب متناهی باشد.

۳) محک بهینه بودن جدول نهایی سیمپلکس برای مدل برنامه‌ریزی خطی آن است که فضای جواب نامتناهی بوده ولیکن مقدار تابع هدف متناهی باشد.

۴) محک بهینه بودن در جدول نهایی سیمپلکس برای مدل برنامه‌ریزی خطی آن است که فقط جواب مسأله مزدوج آن قابل قبول باشد.

۷۳ـ قضیه اصلی برنامه‌ریزی خطی چه مطلبی را بیان می‌کند؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۴)

۱) الگوریتم سیمپلکس هر مسأله برنامه‌ریزی خطی را در تعداد معینی از مراحل تکرار حل می‌کنند.

۲) هر مسأله برنامه‌ریزی خطی قابل حل توسط یک الگوریتم با تابع زمانی چند جمله‌ای است.

۳) هر مسأله برنامه‌ریزی خطی یا جواب موجه ندارد یا محدود است و یا جواب بهینه نامحدود دارد.

۴) اگر هر مسأله برنامه‌ریزی خطی جواب بهینه داشته باشد، مسأله ثانویه آن نیز دارای جواب است و مقدار تابع هدف اولیه و تابع هدف ثانویه آنها با هم مساوی است.

۷۴ـ اگر B یک پایه قابل قبول برای مسأله اولیه P باشد و $W^T = C_B B^{-1}$ یک جواب قابل قبول برای مسأله مزدوج آن یعنی D باشد در این صورت: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۴)

۱) B یک پایه قابل قبول برای مسأله D است.

۲) B پایه بهینه برای مسأله P است.

۳) مسأله P نامحدود است.

۴) مسأله D نامحدود است.

۷۵ـ مسأله اولیه (P) و مسأله مزدوج آن به نام (D) مفروض است. اگر مسأله اولیه (P) را توسط الگوریتم سیمپلکس مزدوج (Dual Simplex) حل کنیم، آنگاه: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۴)

۱) در هر یک از جداول سیمپلکس مزدوج مسأله P یک جواب قابل قبول برای مساله P به دست می‌آید.

۲) فقط جدولی که در آن متغیرهای پایه مسأله P غیرمنفی هستند، یک جواب قابل قبول برای مسأله D حاصل می‌شود.

۳) هر یک از جداول سیمپلکس مزدوج مسأله P یک جواب قابل قبول برای مسأله D حاصل می‌کنند.

۴) هر جدول سیمپلکس مزدوج مسأله P، مقداری به تابع هدف مسأله D می‌دهد که با مقدار تابع هدف حل متناظر آن در مسأله P متفاوت است.

۷۶ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی P به شرح مقابل مفروض است: $\underset{s.t.}{\text{Max}}\ z = \tilde{C}^T\tilde{x} \quad A\tilde{x} = \tilde{b}\ ,\ \tilde{x} \ge 0\ ,\ \tilde{b} \ge 0\ ,\ A = m\times n$

سیستم $A\tilde{x} = \tilde{b}$ با اضافه کردن متغیرهای کمکی (slack) به سیستم $D\tilde{x} \le \tilde{b}$ که در آن $D = m\times k\ (k < m)$ می‌باشد، به دست آمده است. (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) متغیرهای دوگان مسأله P ممکن است منفی نیز باشند.

۲) متغیرهای دوگان مسأله P همواره غیرمنفی خواهند بود.

۳) علامت متغیرهای دوگان مسأله P بستگی به علامت مؤلفه‌های بردار C دارد.

۴) با اطلاعات موجود نمی‌توان در مورد علامت متغیرهای دوگان مسأله P اظهارنظر کرد.

۷۷ـ در ارتباط با مسأله P کدام گزینه درست است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) مسأله P همواره دارای جواب شدنی می‌باشد.

۲) مسأله P ممکن است فاقد جواب شدنی باشد.

۳) مسأله P همواره دارای جواب بهینه محدود می‌باشد.

۴) وجود حل شدنی در مسائل P بستگی به علامت مؤلفه‌های ماتریس A دارد.

۷۸ـ در مسأله P اگر رتبه ماتریس D کمتر از m باشد آنگاه : (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) رتبه ماتریس A برابر m خواهد بود.

۲) رتبه ماتریس A نیز کمتر از m خواهد بود.

۳) رتبه ماتریس A برابر رتبه ماتریس D خواهد بود.

۴) ماتریس مبنا (پایه) در هر مرحله از الگوریتم سیمپلکس می‌تواند متشکل از ستون‌های ماتریس D باشد.

۷۹ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$(P)\quad \begin{aligned} \text{Max}\quad & Z = c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad (D)\quad \begin{aligned} \text{Max}\quad & w = b^T y \\ & A^T y \geq c \end{aligned}$$

فرض کنید جواب بهینه (P) با x^* و جواب بهینه (D) با y^* مشخص شده و داده شده باشند. حال اگر محـدودیت اول مسـأله (P) را در ۲ ضـرب کنـیم و مسأله جدیدی بسازیم (هیچ چیز دیگر در (P) تغییر نمی‌کند). راجع به جواب بهینه مسأله جدید X^{**} و مسأله ثانویه آن y^{**} چه می‌توان گفت؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) هیچ تغییری در جواب‌های مسأله اولیه و ثانویه و مقادیر تابع هدف ایجاد نمی‌شود.
$z^* = z^{**}, w^* = w^{**}, y^{**} = y^*, x^{**} = x^*$

۲) برای $z^{**} = c^T x^{**} = c^T x^* = z^*, x'^* = x^*, b'^T y^{**} = b^T y^*, y_j^{**} = y_j^*, y_1^{**} = \frac{1}{2} y_1^*, j = 2,3,\dots,m$

۳) $x_j^{**} = x_j^*, j = 2,3,\dots,n \;,\; x_1^{**} = \frac{x_1^*}{2}, z^{**} = c^T x^{**} = b'^T y^{**}, y^* = y^{**}$

۴) هیچ یک از جواب‌های داده شده درست نیست.

۸۰ـ مسأله زیر را همراه با جدول نهایی آن در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \underset{\text{s.t}}{\text{Max}}\ & Z = 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 13 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z	۶	۰	۲	۰	$\frac{5}{2}$	۰	۲۵
x_4	۲	۰	۱	۱	$-\frac{1}{2}$	۰	۷
x_2	۰	۱	۰	۰	$\frac{1}{2}$	۰	۵
x_6	۱-	۰	۱	۰	$-\frac{1}{2}$	۱	۰

b_2 در چه محدوده‌ای می‌تواند قرار داشته باشد، تا مجموعه پایه فعلی همچنان جواب بهینه را تشکیل دهد. (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) $b_2 \geq 5$ ۲) $b_2 \geq 10$ ۳) $0 \leq b_2 \leq 10$ ۴) $5 \leq b_2 \leq 15$

۸۱ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \underset{\text{s.t}}{\text{Max}}\ & Z = cX \\ & AX \leq b \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

منطقه قابل قبول محدود و X^* جواب بهینه آن باشد و ما به جای بردار c بردار c' را قرار دهیم، آنگاه در مورد مقدار بهینه جدید مسـأله همـزاد کـه آن را w' می‌نامیم کدام رابطه همواره برقرار است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) $w' \geq c'x^*$ ۲) $w' = c'x^*$ ۳) $w' \leq c'x^*$ ۴) هیچ‌کدام

۸۲ـ با فرض $A = A^T$ همزاد مدل زیر عبارت است از : (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۵)

$$\begin{aligned} \underset{\text{s.t}}{\text{Max}}\ & (-z) = c^T X \\ & AX \leq -c \\ & X \leq 0 \end{aligned}$$

۱) $\underset{\text{s.t.}}{\text{Min}}\, w = c^T Y \;;\; AY = c, Y \geq 0$

۲) $\underset{\text{s.t.}}{\text{Max}}\, w = c^T Y \;;\; AY \leq c, Y \geq 0$

۳) $\underset{\text{s.t.}}{\text{Min}}\, w = -c^T Y \;;\; AY \leq -c, Y \geq 0$

۴) $\underset{\text{s.t.}}{\text{Max}}\, w = c^T Y \;;\; AY \leq c, Y \leq 0$

۸۹ـ در روش سیمپلکس همزاد (Dual simplex) هدف از آزمون تست نسبت چیست؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) تضمین بهبود تابع هدف.
۲) تضمین پرهیز از تباهیدگی.
۳) تضمین طی کردن کوتاه‌ترین مسیر به جواب بهینه.
۴) تضمین حفظ شرط بهینگی در جدول بعدی.

۹۰ـ در مدل :

$$\text{Maximize } z = CX$$
$$\text{s.t.}$$
$$AX \ge b \ (I)$$
$$DX \le d \ (II)$$
$$X \ge 0$$

اگر در محدودیت‌های (I)، (II) به جای $\ge$، $\le$ علامت مساوی قرار دهیم، آنگاه مقدار بهینه تابع هدف: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) بهتر نمی‌شود.
۲) بدتر نمی‌شود.
۳) بهتر می‌شود.
۴) بدتر می‌شود.

۹۱ـ مسأله مقابل را در نظر بگیرید :

$$\text{Min } z = -2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$
$$\text{s.t} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \le 15 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) بهینه دوگان برابر ۴۵ است.
۲) دوگان این مسأله نشدنی است.
۳) دوگان این مسأله نامحدود است.
۴) دوگان این مسأله جواب بهینه محدود دارد.

۹۲ـ دو مسأله برنامه‌ریزی ریاضی را در نظر بگیرید:

$$Z_1 = \underset{\text{s.t}}{\text{Max}}\, u(x_1, \dots, x_n) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p'_i x_i \le E \\ x_i \ge 0 \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$Z_2 = \underset{\text{s.t}}{\text{Max}}\, u(x_1, \dots, x_n) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le E \\ x_i \ge 0 \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

اگر $i = 1, \dots, n \quad p'_i \ge p_i \ge 0$ باشد، آنگاه : (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) $z_2 > z_1$
۲) $z_1 > z_2$
۳) $z_1 \ge z_2$
۴) هیچ ارتباطی مشخصی بین z_1, z_2 وجود ندارد.

۹۳ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی $\min.\{z = cx : Ax = b, x \ge 0\}$ که در آن A یک ماتریس 3×5 است را در نظر بگیرید. a_j ستون j ام ماتریس A است. ماتریس $B = (a_1, a_2, a_3)$ یک پایه برای این مسأله می‌باشد و وارون آن $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ است. اگر B پایه بهینه مسأله و غیرتباهیده (no degenerate) باشد. هر جواب بهینه مسأله دوگان (dual) این مسأله، کدام دسته از محدودیت‌های مسأله دوگان را حتماً به صورت تساوی راضی می‌کند؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۵)

۱) رابطه‌های ۴، ۵
۲) رابطه‌های ۱، ۲، ۳
۳) رابطه‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵
۴) دوگان می‌تواند جواب بهینه‌ای داشته باشد که برای آن همه رابطه‌های دوگان به صورت نامساوی راضی شوند.

۹۴ـ $\tilde{a}_4^T = (1, 0, 0)$، $\tilde{b}^T = (20, 10, 5)$ و از تابلوی نهائی مسأله اطلاعات ناقص زیر در دست است: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۵)

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	0	–	–	0	−3	0	–
x_4	0	0	–	1	−1	0	–
x_1	1	1	–	0	1	0	–
x_6	0	2	–	0	1	1	–

پارامتر b_1 در چه فاصله‌ای می‌تواند تغییر کند تا پایه بهینه ثابت بماند؟

۱) $b_1 \ge -10$
۲) $b_1 \ge 0$
۳) $b_1 \ge 10$
۴) $-10 \le b_1 \le 20$

۹۵ـ مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&\text{Min } cx\\&\text{s.t}\\&\begin{cases}Ax\begin{Bmatrix}\le\\=\\\ge\end{Bmatrix}b\\x\ge 0\end{cases}\end{aligned}$$

کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) هر جواب قابل قبول دوگان جواب بهینه مسأله فوق است.

۲) هر جواب قابل قبول اولیه حد پایین برای مسأله فوق است.

۳) هر جواب قابل قبول دوگان حد پایین برای جواب بهینه مسأله فوق است.

۴) هر جواب قابل قبول دوگان حد بالایی برای جواب بهینه مسأله فوق است.

۹۶ـ اگر مسأله خطی A دارای جواب بهینه محدود و مسأله B امکان‌پذیر باشد.

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

$$\begin{aligned}&\text{Max } cx\\&\text{s.t}:\begin{cases}Ax\le d\\x\ge 0\end{cases}\end{aligned}$$

مسأله B

$$\begin{aligned}&\text{Max } cx\\&\text{s.t}:\begin{cases}Ax\le b\\x\ge 0\end{cases}\end{aligned}$$

مسأله A

۱) مسأله B نامحدود است.

۲) مسأله B هم دارای جواب بهینه محدود است.

۳) مسأله A و B دارای جواب بهینه یکسان هستند.

۴) مسأله B ممکن است دارای جواب بهینه محدود باشد و ممکن است نامحدود باشد.

۹۷ـ یک مسأله برنامه‌ریزی خطی که تابع هدف آن به شکل Max است را در صورتی می‌توان با روش سیمپلکس ثانویه یا دوگان حل کرد که در جدول اولیه آن: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) بعضی از ضرایب سمت راست منفی باشند.

۲) تمام ضرایب سمت راست غیرمنفی باشند.

۳) بعضی از ضرایب سطر صفر (مربوط به تابع هدف) منفی باشند.

۴) تمام ضرایب سطر صفر (مربوط به تابع هدف) غیرمنفی باشند.

۹۸ـ اگر مسأله همزاد (dual) یک مسأله برنامه‌ریزی خطی غیرموجه باشد، در مورد جواب مسأله اولیه (primal) چه می‌توان گفت؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) حتماً مسأله اولیه نظیر آن غیرموجه است.

۲) حتماً مسأله اولیه نظیر آن نامحدود است.

۳) ممکن است مسأله اولیه نظیر آن نامحدود یا غیرموجه باشد.

۴) ممکن است مسأله اولیه نظیر آن جواب بهینه محدود داشته باشد.

۹۹ـ برنامه خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&\text{Min}\quad Z=2x_1+2x_2+4x_3\\&\text{s.t}\\&\begin{cases}-x_1+x_2+x_3\ge 2\\x_1-2x_2+x_3\ge 3\\x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}\end{aligned}$$

اگر قیمت‌های سایه بهینه محدودیت‌ها به ترتیب $y_1^*=1$ ، $y_2^*=3$ باشد، مقدار بهینه x_2 عبارت است از:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) $x_2^*=0$

۲) $x_2^*=\frac{1}{2}$

۳) $x_2^*=1$

۴) $x_2^*=2$

۱۰۰ـ اگر جواب دوگان از یک مسأله بیشینه به صورت (۰, ۱, ۳, ۹) باشد و مجبور باشیم فقط یک واحد از یکی از چهار منبع را نسبت به قبل اضافه‌تر تهیه نمائیم، مناسب‌ترین تصمیم کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) تهیه از منبع دوم

۲) تهیه از منبع چهارم

۳) تهیه از منبع یکم

۴) تهیه از منبع سوم

۱۰۱ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی‌ای به شکل $\{\max z = cx : Ax = b\ ,\ x \geq 0\}$ را در نظر بگیرید، A یک ماتریس ۵×۳ و a_j ستون j ام ماتریس A می‌باشد. $B = (a_1, a_2, a_3)$ یک پایه برای این مسأله با وارون $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ است.فرض کنید B پایه بهینه مسأله بالا است. دوگان (dual) این مسأله پنج محدودیت دارد. متغیر کمبود (slack) یا مازاد (Surplus) رابطه دوم مسأله دوگان را w_{s2} می‌نامیم. در جواب بهینه مسأله دوگان مقدار w_{s2} کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) $C_B B^{-1} a_2$
۲) صفر است.
۳) $C_B B^{-1} a_2 + c_2$
۴) مثبت است.

۱۰۲ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی‌ای به شکل $\{\max z = cx : Ax = b, x \geq 0\}$ را در نظر بگیرید: A یک ماتریس ۵×۳ و a_j ستون j ام ماتریس A می‌باشد. $B = (a_1, a_2, a_3)$ یک پایه برای این مسأله با وارون $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ است.فرض کنید B پایه بهینه مسأله بالا است. اگر فعالیت ششم با $a_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $c_6 = B$ به مسأله اضافه شود، تمام مقدارهای B به طوری که B پایه بهینه باقی بماند کدام است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) $B \leq c_1 - 3c_2 + 3c_3$
۲) $B \leq \min\{c_j, j = 1, ..., 5\}$
۳) $B \geq c_1 - c_2 + 2c_3$
۴) $B \geq \max\{c_j, j = 1, ..., 5\}$

۱۰۳ـ ضمن حل مسأله‌ای با الگوریتم سیمپلکس دوگان، در مرحله‌ای بردار خروجی موجود است ولی بردار ورودی وجود ندارد. در مورد این مسأله کدام گزینه درست است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) دوگان مسأله فاقد جواب شدنی است.
۲) مسأله فاقد جواب شدنی است.
۳) مسأله دارای جواب بی‌کران است.
۴) دوگان مسأله دارای جواب بی‌کران است.

۱۰۴ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی $\min.\{cx : Ax = b\ ,\ x \geq 0\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنیدکه دارای جواب بهینه است. این مسأله یک بار توسط روش سیمپلکس و یک بار توسط روش سیمپلکس دوگان حل شده است. هر جدول سیمپلکس مقداری به تابع هدف مسأله می‌دهد که آن را با z نشان می‌دهیم و هر جدول سیمپلکس دوگان نیز مقداری به تابع هدف می‌دهد که آن را z' می‌نامیم. ارتباط بین z', z برای هر جفت جدول کدام است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) $z \geq z'$
۲) $z = z'$
۳) $z \leq z'$
۴) $z \neq z'$

۱۰۵ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر مفروض است:

$$\begin{aligned}
&\text{Max}\, z = 12x_1 + 20x_2 + 18x_3 + 40x_4 \\
&\text{s.t.} \quad 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 10x_4 \leq 59{,}800 \\
&\qquad\ \ x_1 + x_2 + 4/2x_3 + 4x_4 \leq 18{,}200 \\
&\qquad\ \ x_j \geq 0\ ;\ j = 1 \text{ تا } 4
\end{aligned}$$

اگر بدانیم که متغیرهای x_4, x_2 در حل بهینه هستند و سپس محدودیت‌های جدید $x_j \geq 1000$ برای $j = 1$ تا ۴ را به آن اضافه کنیم، کدام گزینه صحیح خواهد بود؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۵)

۱) مسأله جدید جواب بهینه نخواهد داشت.
۲) در حل بهینه مسأله جدید، متغیرهای x_3, x_1 دارای مقداری به مراتب بیشتر از ۱۰۰۰ خواهند داشت.
۳) در حل بهینه مسأله جدید، همانند مسأله قبل $x_1 = x_3 = 0$ خواهد بود.
۴) در حل بهینه مسأله جدید، x_3 و x_1 حتماً برابر ۱۰۰۰خواهند بود.

۱۰۶ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر مفروض است:

$$\text{Max } z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$\text{s.t} \quad x_1 + x_2 + x_3 \le 8$$
$$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

فرض کنید که در این مسأله متغیرهای x_1 و x_2 جزء متغیرهای پایه بهینه باشند. حال فرض کنید که سه محدودیت $j = 1,2,3$ $x_j \ge 1$ به این مسأله اضافه کنیم. کدام گزینه درست است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۵)

۱) متغیرهای بهینه مزدوج مسأله جدید با اطلاعات داده شده قابل محاسبه نیستند.
۲) متغیرهای بهینه مزدوج مربوط به محدودیت اول و دوم عوض می‌شوند.
۳) متغیرهای بهینه مزدوج مربوط به محدودیت اول و دوم عوض نمی‌شوند.
۴) مسأله جدید جواب بهینه بهتری خواهد داشت.

۱۰۷ـ معکوس پایه بهینه یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به صورت $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ است. اگر جواب بهینه مسأله دوگان به صورت $y_1 = y_2 = y_3 = 1$ باشد. ضرایب متغیرهای پایه در صورت مسأله کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۵)

۱) $C_{B_1} = 1, C_{B_2} = 1, C_{B_3} = 0$
۲) $C_{B_1} = 1, C_{B_2} = 0, C_{B_3} = 1$
۳) $C_{B_1} = 1, C_{B_2} = 1, C_{B_3} = -1$
۴) $C_{B_1} = 0, C_{B_2} = 0, C_{B_3} = 1$

۱۰۸ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر مفروض است:

$$\text{Max } z = x_1 + 3x_2 + 2x_3$$
$$\text{s.t} \quad x_1 + x_2 + x_3 \le 3$$
$$5x_1 + 3x_2 + x_3 \le 7$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

اگر بدانیم که متغیرهای (x_3, x_2) در پایه هستند مقادیر متغیرهای مزدوج و مقدار تابع هدف بهینه آن کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۵)

۱) $y_2 = 1, y_1 = 2$ با تابع هدفی برابر عدد,۱۳
۲) $y_2 = 0, y_1 = 0$ با تابع هدف صفر.
۳) $y_2 = 0/5, y_1 = 1/5$ با تابع هدف محدود و مثبت.
۴) $y_2 = 1/5, y_1 = 0/5$ با تابع هدف هشت.

۱۰۹ـ در جدول زیر ترکیب‌های مختلف از جواب‌های مسأله اولیه و دوگان مربوط به آن آمده است:

جواب مسأله دوگان

جواب مسأله اولیه		بهینه محدود	بی‌کران	غیرموجه
	بهینه محدود	A	B	C
	بی‌کران	D	E	F
	غیر موجه	G	H	I

در کدام حالات زیر، هر سه مورد امکان‌پذیر نمی‌باشد؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) E, D, H
۲) D, C, B
۳) I, E, G
۴) F, B, G

۱۱۰ـ از بین ۹ حالت ذکر شده در جدول مسأله قبل، تعداد کل حالات امکان‌پذیر چند است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۱۱ـ در یک مسأله برنامه‌ریزی خطی سه محدودیت $\le$ وجود دارد و مقادیر سمت راست محدودیت‌ها در مسأله اصلی به ترتیب ۲۰,۱۵,۱۰ می‌باشد. در جواب بهینه مسأله، متغیر کمکی محدودیت دوم در پایه بهینه با مقدار بهینه ۱۲ موجود است. اگر بخواهیم مقدار سمت راست محدودیت دوم را از مقدار فعلی ۱۵ به $15+\Delta$ تغییر دهیم، در چه بازه‌ای از Δ پایه بهینه فعلی تغییر نمی‌کند؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) $\Delta \ge 12$
۲) $\Delta \le 12$
۳) $\Delta \le -12$
۴) $\Delta \ge -12$

۱۱۲ـ مقدار بهینه Z در مدل مقابل عبارت است از :

$$\text{Maximize } Z = 50x_1 + 40x_2 + 20x_3$$
s.t.
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 300$$
$$x_2 + x_3 \geq 100$$
$$x_3 \geq 10$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) ۷۴۰۰ ۲) ۷۸۰۰ ۳) ۸۲۰۰ ۴) ۱۲۶۰۰

۱۱۳ـ در مدل سوال ۱۱۷، چنانچه محدودیت سوم حذف گردد، آنگاه مقدار بهینه Z : (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) افزایش می‌یابد. ۲) کاهش می‌یابد. ۳) نمی‌توان تعیین کرد. ۴) تغییر نمی‌کند.

۱۱۴ـ جواب بهینه مسأله ثانویه برنامه‌ریزی خطی زیر برابر با (۴و۳) و متغیرهای لنگی (Slack) مربوط به محدودیت‌های شماره ۱ و ۲ به ترتیب s_1, s_2 است. مقادیر s_1, s_2 برابر است با:

$$\text{Max } z = 27x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 21x_4 + 16x_5$$
s.t
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \leq 25$$
$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_5 \leq 80$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) $(s_1, s_2) = (4, 3)$ ۲) $(s_1, s_2) = (0, 0)$ ۳) $(s_1, s_2) = (3, 4)$ ۴) $(s_1, s_2) = (27, 25)$

۱۱۵ـ در مسأله ۱۲۰ با فرض اینکه جواب بهینه مسأله ثانویه برنامه‌ریزی خطی برابر با (۴و۳) باشد. تعیین کنید در جواب بهینه کدام یک از متغیرهای اصلی مسأله مثبت هستند؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) x_1, x_3 ۲) x_1, x_2, x_4 ۳) x_1, x_2, x_3 ۴) x_2, x_3, x_4, x_5

۱۱۶ـ در مسأله ۱۲۰، مقدار تابع هدف برابر است با : (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) ۱۶۱ ۲) ۳۹۵ ۳) نامتناهی است. ۴) هیچ‌کدام

۱۱۷ـ جدول بهینهٔ سیمپلکس یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف Max و سه محدودیت به فرم (≤) و دو متغیر اصلی x_1 و x_2 عبارت است از:

پایه	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	جواب
Z	۰	۰	۰	۳	۲	
s_1	۰	۰	۱	۱	۱-	۲
x_2	۰	۱	۰	۱	۰	۶
x_1	۱	۰	۰	۱-	۱	۲

s_1، s_2 و s_3 متغیرهای کمبود مربوط به سه محدودیت هستند. حداکثر مقدار تابع هدف کدامیک از مقادیر زیر است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۶)

۱) ۱۰ ۲) ۲۲

۳) ۳۴ ۴) با اطلاعات داده شده قابل محاسبه نیست.

۱۱۸ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی روبرو را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = 3x_1 - 2x_2 + 6x_3$$
s.t.
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$
$$2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 10$$
$x_1, x_2 \geq 0$, x_3 نامقید

مقدار بهینه z عبارت است از: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۶)

۱) ۰ ۲) ۹

۳) ۱۶/۰۸ ۴) مسأله جواب موجهی (Feasible) ندارد.

۱۱۹ـ در مسأله برنامه‌ریزی خطی سؤال ۱۲۴، (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۶)

۱) قیمت سایه برابر با ۲- است. ۲) قیمت سایه برابر با صفر است. ۳) قیمت سایه برابر با ۳ است. ۴) مسأله دوگان نامحدود است.

۱۲۰ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی روبرو را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } y_0 = y_1 - 5y_2 + 6y_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 2y_1 + 4y_3 \ge 50 \\ y_1 + 2y_2 \ge 30 \\ y_3 \ge 10 \end{cases}$$

پس از حل مسأله، حداقل مقدار y_0 برابر است با: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۶)

۱) ۲/۵- ۲) ۰ ۳) ۲/۵ ۴) مقداری نامحدود

۱۲۱ـ مقدار بهینه تابع هدف دوگان (Dual) مسأله سؤال ۱۲۶ عبارت است از:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۶)

۱) ۲/۵- ۲) ۰ ۳) ۲/۵ ۳) دوگان جواب قابل قبول ندارد.

۱۲۲ـ برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید، جدول بهینه سیمپلکس نشان داده شده است. اگر ضریب محدودیت دوم در سمت راست از عدد ۲ به $(2+a)$ تغییر کند، تحت چه شرایطی متغیرهای اساسی و غیراساسی تغییر نمی‌کنند؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۶)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3$$
$$\text{s.t } x_1 + x_2 + x_3 \le 1$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

متغیر اساسی	شماره معادله	z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	سمت راست
Z	۰	۱	۳	۰	۰	۴	۱	۶
x_3	۱	۰	۰/۵	۰	۱	۱/۵	۰/۵−	۰/۵
x_2	۲	۰	۰/۵	۱	۰	۰/۵−	۰/۵	۰/۵

۱) $a \le 0/5$ ۲) $-1 \le a \le 1$ ۳) $a \ge 0/5$ ۴) $-0/5 \le a \le 0/5$

۱۲۳ـ در مسأله ۱۲۸، اگر x_1 را به عنوان متغیر ورودی و x_2 را به عنوان متغیر خروجی انتخاب کنیم در جدول بعدی سیمپلکس:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۶)

۱) جواب بهینه تبهگن خواهد شد. ۲) جواب اساسی تبهگن و غیرموجه خواهد شد.

۳) مقدار تابع هدف بدتر و جواب اساسی غیر موجه خواهد شد. ۴) مقدار تابع هدف بدتر و جواب اساسی تبهگن خواهد شد.

۱۲۴ـ در مسأله۱۲۸، تعداد جواب‌های اساسی (Basic Solution) مجاور به جواب بهینه (صرف‌نظر از این که موجه باشند یا نباشند) برابر است با: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۲۵ـ در مسأله۱۲۸، پارامتر a در محدوده‌ای انتخاب شده است که متغیرهای اساسی و غیراساسی تغییر نمی‌کنند. در این صورت، مقدار بهینه تابع هدف: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۶)

۱) تغییر نمی‌کند. ۲) به ازای مقادیر مثبت a کاهش و به ازای مقادیر منفی آن افزایش می‌یابد.

۳) به ازای مقادیر مثبت a افزایش و به ازای مقادیر منفی آن کاهش می‌یابد. ۴) هیچکدام

۱۲۶ـ در مسأله۱۲۸، اگر امکان خرید مقداری محدود از ماده اولیه ۱ موجود باشد برای هر واحد آن پرداخت حداکثر چه مبلغی مقرون به صرفه است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۶)

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۲۷ـ در مسأله۱۲۸، جواب بهینه متغیرهای ثانویه (دوگان) عبارت است از: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۶)

۱) (۴,۱) ۲) (۳,۰,۰) ۳) (۳,۷,۵) ۴) (۰/۵,۰/۵)

۱۲۸ـ مسأله برنامه ریزی خطی روبرو مفروض است: $\{\text{Max } z = Cx / Ax \le b \;;\; x \ge 0\}$

اگر اختلالی در سمت راست محدودیت‌ها ایجاد شده و مقدار آن از b به $b + \Delta b$ تغییر نماید. چه اختلالی در تابع هدف مسأله مزدوج ایجاد خواهد شد؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۶)

۱) $C_B \Delta b$ ۲) $C_B B^{-1} \Delta b$ ۳) $B^{-1} C_B \Delta b$ ۴) $C_N B^{-1} \Delta b$

۱۲۹ـ مسأله ثانویه برنامه‌ریزی خطی زیر از طریق کدام روش قابل حل می‌باشد؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۷)

$$\text{Max } z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 9x_5$$
$$\text{s.t } x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 30$$
$$2x_1 - 5x_2 - 2x_4 + x_5 \le 40$$
$$x_i \ge 0 \quad \text{برای تمامی } i \text{ ها}$$

۱) سیمپلکس معمولی

۲) از روش M بزرگ

۳) ترسیمی و یا سیمپلکس

۴) از طریق سیمپلکس ثانویه

۱۳۰ـ به ازای هر جواب قابل قبول پایه در مسأله اولیه حداکثرسازی، مقادیر تابع هدف متناظر با این نقطه، در مسأله ثانویه کدام حالت زیر را داراست؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۷)

۱) $Z < W$ ۲) $Z = W$ ۳) $Z > W$ ۴) در تمام حالات $Z = W$

۱۳۱ـ اگر دو مسأله ۱ و ۲ را در نظر بگیریم کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۷)

$$(1)\ \text{Max}\ \lambda \quad \text{s.t.}\quad Ax - b\lambda \le 0,\quad -\lambda \le 0,\quad \lambda \le 1$$

$$(2)\ \text{Max}\ c^T x \quad \text{s.t.}\quad Ax \le b$$

۱) اگر جواب بهینه مسأله ۱ برابر با صفر باشد آنگاه مسأله ۲ جواب ندارد.
۲) اگر جواب بهینه مسأله ۲ برابر با صفر باشد آنگاه مسأله ۱ جواب ندارد.
۳) اگر جواب بهینه مسأله ۱ برابر با یک باشد آنگاه جواب مسأله ۲، برابر با صفر است.
۴) اگر جواب بهینه مسأله ۲ برابر با یک باشد آنگاه جواب مسأله ۱، برابر با صفر است.

۱۳۲ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل و جدول بهینه آن داده شده است:

$$\begin{aligned} \text{Max}\ \ & z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s.t.}\ \ & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4 \\ & \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 \le 1 \\ & \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{4}{3}x_2 + \tfrac{7}{3}x_3 \le 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_1			۱	۶		−۱	A
x_2			۰	−۳		۱	B
x_5			۲	۲		−۱	C
$-z$			−۱	−۳		−۱	d

در این مسأله منبع سوم در چه محدوده‌ای باشد تا قیمت سایه آن همچنان مقدار ۱ باقی بماند؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۷)

۱) بیشتر از ۳ ۲) کمتر از ۱۰ ۳) بین ۳ و ۱۰ ۴) بین ۲ و ۱۰

۱۳۳ـ دو مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

LP_1

$$\begin{aligned} \text{Max}\ \ & Z_1 = c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.t.}\ \ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

LP_2

$$\begin{aligned} \text{Max}\ \ & Z_2 = 100c_1x_1 + 100c_2x_2 \\ \text{s.t.}\ \ & 100a_{11}x_1 + 100a_{12}x_2 \le b_1 \\ & 100a_{21}x_1 + 100a_{22}x_2 \le b_2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

فرض کنید جواب پایه $B\cdot V = \{x_1, x_2\}$، یک جواب پایه بهینه برای هر دو مسأله باشد. و جواب بهینه برای LP_1 عبارت است از: $x_1 = 50$ و $x_2 = 500$ و $z = 550$، و همچنین فرض کنید برای LP_1ـ قیمت سایه برای محدودیت اول، $\frac{100}{3}$ و قیمت سایه برای محدودیت دوم نیز $\frac{100}{3}$ باشد، جواب بهینه LP_2 عبارت است از: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۷)

۱) $x_2 = x_1 = 5, z = 550$ ۲) $x_2 = x_1 = 1, z = 550$ ۳) $x_1 = 0/5, x_2 = 5, z = 550$ ۴) هیچ کدام

۱۳۴ـ جواب بهینه مسأله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Max}\ \ & Z = 4x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ \ & x_1 + 2x_2 = 6 \\ & x_1 - x_2 \ge 3 \\ & 2x_1 + x_2 \le 10 \\ & x_1 \ge 0\ \ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

z	x_1	x_2	s_2	s_3	a_1	a_2	RHS
۱	۰	۰	۰	$\frac{7}{3}$	$M-\frac{2}{3}$	M	$\frac{58}{3}$
۰	۰	۱	۰	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	۰	$\frac{2}{3}$
۰	۱	۰	۰	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	۰	$\frac{14}{3}$
۰	۰	۰	۱	۱	−۱	−۱	۱

محدوده ارزش b_3 که جدول بهینه همچنان بهینه باقی بماند عبارت است از: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۷)

۱) $0 \le b_3 \le 12$ ۲) $9 \le b_3 \le 12$ ۳) $4 \le b_3 \le 9$ ۴) $9 \le b_3 \le +\infty$

۱۳۵ـ جدول نهایی مسأله برنامه‌ریزی خطی که تابع هدف آن حداکثر کردن می‌باشد. به صورت زیر است:

متغیر پایه	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
x_2	۰	۱	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	۲
x_1	۱	۰	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	۰	$\frac{3}{2}$
s_3	۰	۰	۱	-2	۱	۴
$z_j - c_j$	۰	۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	۰	۵

اگر تصمیم به افزایش سمت راست یکی از محدودیت‌های مسأله داشته باشیم (افزایش منبع)، کدام منبع را پیشنهاد می‌کنید؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۷)

۱) منبع ۱و۲و۳ ۲) منبع ۳و۲ ۳) منبع ۱و۳ ۴) منبع ۱و۲

۱۳۶ـ کدام گزینه یک جواب پایه قابل قبول برای مسأله زیر است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۷)

$$\begin{aligned} &\text{Min} z = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ &\text{s.t} \quad x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\ &\qquad x_1 - 2x_2 \ge 1 \\ &\qquad -x_1 + 2x_3 \ge 2 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

۱) $(1,0,2)$

۲) $(1,0,1)$

۳) $(2,0,1)$

۴) $(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2})$

۱۳۷ـ اگر جدول نهایی حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی که تابع هدف آن حداکثر باشد، به صورت جدول زیر باشد، مقادیر c_1, c_2 ضرایب تابع هدف، چه مقدار است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۷)

x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
x_2	۰	۱	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	۲
x_1	۱	۰	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	۰	$\frac{3}{2}$
s_3	۰	۰	۱	-2	۱	۴
	۰	۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	۰	۵

۱) $c_2 = 2, c_1 = 0$ ۲) $c_2 = 2, c_1 = 1$ ۳) $c_2 = 0, c_1 = 1$ ۴) $c_2 = 1, c_1 = 2$

۱۳۸ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی P را به صورت زیر درنظر بگیرید که در آن A یک ماتریس $m \times n$ با رتبه m است. فرض کنید که جواب بهینه مسأله P به‌صورت پایه B است. اگر مسأله P' به نحوی تشکیل شود که بردار b با $(b+\lambda d)$ جایگزین شده که در آن λ یک اسکالر و $\lambda \ge 0$ و d یک بردار ناصفر از بعد m است. شرط لازم و کافی برای این که پایه B جهت مسأله P' به‌ازای تمام مقادیر بهینه باشد:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۷)

$$\begin{aligned} &P: \text{Min } cx \qquad P': \text{Min } cx \\ &\text{s.t} \qquad\qquad\quad \text{s.t} \\ &\quad Ax = b \qquad\qquad Ax = b + \lambda d \\ &\quad x \ge 0 \qquad\qquad\quad x \ge 0 \end{aligned}$$

۱) $B^{-1}.b \ge \lambda.B^{-1}.d$

۲) $B^{-1}d \ge 0$

۳) $B^{-1}.b \le -\lambda.B^{-1}.d$

۴) $B^{-1}.d \le 0$

۱۳۹ـ کدام عبارت در ارتباط با مفهوم قیمت سایه‌ای (Shadow price) صحیح نیست؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۷)

۱) قیمت سایه‌ای همان هزینه فرصت از دست رفته است.

۲) بین قیمت سایه‌ای در مدل اولیه و مقادیر متغیرهای دوگان ارتباطی وجود ندارد.

۳) قیمت سایه‌ای هر محدودیت نشان دهنده ارزش منبع موردنظر است.

۴) قیمت سایه‌ای متناظر با هر محدودیت عبارت است از، میزان تغییر در تابع هدف به ازای افزایش یک واحد به سمت راست محدودیت موردنظر (در صورت ثابت بودن سایر پارامترها)

۱۴۰ـ اگر سطر صفر جدول بهینه مسأله زیر، به شکل زیر باشد، مقادیر متغیرهای دوال (دوگان) آن عبارت است از:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۷)

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 4x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \\ \text{s.t} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 + x_4 = 7 \\ & \ell_3 x_1 + \ell_4 x_2 + x_5 = 9 \\ & x_i \geq 0 \quad \text{برای تمامی } i \text{ ها} \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
۰	۰	۰	۳	۱

۱) $(2,1,0)^T$ ۲) $(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$ ۳) $(-1,1,2)^T$ ۴) $(0,3,1)^T$

۱۴۱ـ مدل برنامه‌ریزی خطی زیر و جدول بهینه آن داده شده است:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= -2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s.t} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

پایه	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
x_1	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۶
s_2	۰	۰	۳	۱	۱	۱	۱۰
z	۱	۰	۳−	۱−	۲−	۰	۱۲−

در این مسأله اگر ضریب تابع هدف x_1 که در حال حاضر (۲−) است با صفر عوض کنیم، کدام گزاره صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۷)

۱) x_3 وارد پایه می‌شود و s_2 از پایه خارج می‌شود.

۲) تغییری در مسأله حاصل نمی‌شود.

۳) x_3 وارد پایه می‌شود و x_1 از پایه خارج می‌شود.

۴) متغیرهای پایه عوض نمی‌شوند ولیکن مقدار تابع هدف از ۱۲− به صفر تبدیل می‌شود.

۱۴۲ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل مفروض است. $\{\min z = Cx / Ax \geq b \ ; \ x \geq 0\}$

اگر به سمت راست محدودیت i ام یعنی b_i یک واحد اضافه کنیم، کدام گزاره صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۷)

۱) ناحیه شدنی بزرگتر نمی‌شود و مقدار تابع هدف بهینه نیز بهتر نخواهد شد.

۲) ناحیه شدنی بزرگتر می‌شود و تابع هدف بهینه نیز بهتر خواهد شد.

۳) ناحیه شدنی کوچکتر می‌شود و تابع هدف بهینه نیز بهتر خواهد شد.

۴) ناحیه شدنی کوچکتر نمی‌شود و تابع هدف بهینه نیز بهتر نخواهد شد.

۱۴۳ـ برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید. جدول سیمپلکس زیر مربوط به جدول بهینه این مسأله است.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad Z &= 3X_1 + X_2 + 5X_3 \\ \text{s.t.} \quad & a_1 X_1 + 3X_2 + a_2 X_3 \leq 45 \\ & a_3 X_1 + 4X_4 + a_4 X_3 \leq 35 \\ & X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	سمت راست
Z	۰	۱	۰	۳	۰	a_5	۱	۳۰
	۱	۰	۱	$-\frac{1}{3}$	۰	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	۵
	۲	۰	۰	۱	۱	۰/۲−	۰/۴	۳

ضرایب a_1, a_2, a_3, a_4 در مسأله اصلی برابر کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۸)

۱) $(a_1,a_2,a_3,a_4) = (3,5,6,5)$ ۲) $(a_1,a_2,a_3,a_4) = (1,0,0,1)$

۳) $(a_1,a_2,a_3,a_4) = (6,5,3,5)$ ۴) $(a_1,a_2,a_3,a_4) = (1/3,-1/3,0/2,0/4)$

۱۴۴ـ در مسأله ۱۶۰، مقدار a_5 چقدر است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۸)

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۳۰

۱۴۵ـ در مسأله ۱۶۰، مقدار بهینه متغیرهای ثانویه (دوگان) به ترتیب (از چپ به راست) کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۸)

۱) (۳,۲,۵) ۲) (۰,۳,۰) ۳) (۵,۳) ۴) $(a_5,1)$

۱۴۶ـ در مسأله ۱۶۰، اگر A_j بیانگر متغیر لنگی (Slack) بهینه محدودیت شماره j مدل ثانویه (دوگان) باشد، .... صفر هستند.

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۸)

۱) A_1 و A_2 ۲) A_1 و A_3 ۳) A_2 و A_3 ۴) A_1، A_2 و A_3

۱۴۷ـ در مسأله ۱۶۰، می‌توان جواب موجهی (Feasible) برای مسأله ثانویه (دوگان) آن یافت که مقدار تابع هدف آن برابر باشد با:

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۸)

۱) صفر ۲) ۲۰ ۳) ۹۵ ۴) منهای بینهایت

۱۴۸ـ در مسأله ۱۶۰، جواب بهینه ، .... است. (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۸)

۱) نامحدود ۲) چندگانه ۳) منحصر به فرد و تبهگن ۴) منحصر به فرد و غیرتبهگن

۱۴۹ـ در مسأله ۱۶۰، کدام عبارت صحیح می‌باشد؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۸)

۱) تعداد جواب‌های اساسی موجه (Basic Feasible Solution) هر دو مسأله اولیه و ثانویه برابر است.

۲) تعداد جواب‌های اساسی (Basic Solution) (اعم از موجه و غیرموجه) مسأله ثانویه بیش از مسأله اولیه است.

۳) تعداد جواب‌های اساسی (Basic Solution) (اعم از موجه و غیرموجه) مسأله اولیه بیش از مسأله ثانویه است.

۴) تعداد جواب‌های اساسی (Basic Solution) (اعم از موجه و غیرموجه) هر دو مسأله اولیه و ثانویه برابر است.

۱۵۰ـ در مسأله ۱۶۰، بردار ....، می‌تواند یک جواب اساسی موجه باشد. (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۸)

۱) (۳,۶,۰,۰,۰) ۲) (۶,۳,۰,۰,۰) ۳) (۶,۰,۰,۹,۱۲) ۴) (۱۷/۳,۲,۱,۰,۰)

۱۵۱ـ در مسأله ۱۶۰، اگر ضریب محدودیت اول در سمت راست از عدد ۴۵ به (۴۵+a) و در محدودیت دوم از عدد ۳۰ به (۳۰−a) تغییر کند بدون این که متغیرهای اساسی و غیراساسی تغییر کنند، a در چه محدوده‌ای می‌تواند تغییر کند؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۸)

۱) مقادیر منفی a ۲) در فاصله [−۷/۵,۵] ۳) مقادیر مثبت a ۴) در فاصله [۳,۵]

۱۵۲ـ در مسأله ۱۶۰، محدودیت دوم را در عدد ۲ ضرب و به محدودیت اول اضافه می‌کنیم. در این صورت کدام عبارت صحیح است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۸)

۱) جواب بهینه مسأله اولیه تغییر نمی‌کند ولی جواب بهینه مسأله ثانویه (دوگان) تغییر می‌کند.

۲) جواب بهینه مسأله اولیه تغییر می‌کند ولی جواب بهینه مسأله ثانویه (دوگان) تغییر نمی‌کند.

۳) هیچ کدام از جواب‌های مسأله اولیه و ثانویه تغییر نمی‌کنند.

۴) هر دو جواب مسأله‌های اولیه و ثانویه تغییر می‌کنند.

۱۵۳ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی روبرو را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \le 3 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

یک جواب پایه موجه با فرض متغیرهای پایه x_1, x_2 و x_3 کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۸)

۱) $x_4 = 0, x_3 = \frac{1}{2}, x_2 = 1, x_1 = 1$

۲) $x_4 = 0, x_3 = 3, x_2 = 3, x_1 = 4$

۳) $x_4 = 0, x_3 = 16, x_2 = 15, x_1 = 10$

۴) با اطلاعات داده شده نمی‌توان یک جواب پایه موجه به دست آورد.

۱۵۴ـ جواب بهینه مسأله برنامه‌ریزی خطی سؤال ۱۷۰ کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۸)

۱) $x_4 = 0, x_3 = 3, x_2 = 3, x_1 = 4$

۲) $x_4 = 0, x_3 = \frac{1}{2}, x_2 = 1, x_1 = 1$

۳) $x_4 = 0, x_3 = 16, x_2 = 15, x_1 = 10$

۴) این مسأله دارای جواب بهینه نامحدود است.

۱۵۵ـ در مسأله برنامه‌ریزی خطی سؤال ۱۷۰، مقدار سمت راست محدودیت اول یعنی $b_۱ = ۴$ بدون آن که متغیرهای پایه بهینه مسأله عوض شود چقدر می‌تواند تغییر کند؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۸)

۱) $۰ \le b_۱ \le ۸$
۲) $۳ \le b_۱ \le ۵$
۳) $\frac{۳}{۲} \le b_۱ \le ۹$
۴) مقدار $b_۱$ هر تغییری کند متغیرهای پایه بهینه مسأله عوض می‌شوند.

۱۵۶ـ در مسأله برنامه‌ریزی خطی سؤال ۱۷۰، ضریب متغیر $x_۱$ در تابع هدف یعنی $c_۱ = ۲$ بدون آنکه جواب بهینه مسأله عوض شود، چقدر می‌تواند تغییر کند؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۸)

۱) $۰ \le c_۱ \le ۴$
۲) $\frac{۵}{۴} \le c_۱ \le \frac{۱۵}{۴}$
۳) $۱ \le c_۱ \le ۳$
۴) مقدار $c_۱$ هر تغییری کند جواب بهینه مسأله عوض می‌شود.

۱۵۷ـ در مسأله برنامه‌ریزی خطی سؤال ۱۷۰، اگر سمت راست هر محدودیت یک واحد اضافه شود، حداکثر مقدار تابع هدف چه تغییری خواهد کرد؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{۹}{۵}$ اضافه خواهد شد.
۲) $\frac{۱۳}{۲}$ اضافه خواهد شد.
۳) ۳ واحد اضافه خواهد شد.
۴) حداکثر مقدار تابع هدف تغییری نخواهد کرد.

۱۵۸ـ اگر در مسأله برنامه‌ریزی خطی سؤال ۱۷۰، ضرایب متغیرهای $x_۲,x_۱$ و $x_۳$ در تابع هدف هر یک به اندازه یک واحد افزایش یابند، حداکثر مقدار تابع هدف چه تغییری خواهد کرد؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۸)

$$\text{Max } Z = ۲x_۱ + ۴x_۲ + x_۳ + x_۴$$
$$\text{s.t} \begin{cases} x_۱ + ۳x_۲ + x_۴ \le ۴ \\ ۲x_۱ + x_۲ \le ۳ \\ x_۲ + ۴x_۳ + x_۴ \le ۳ \\ x_i \ge ۰ \ , \ i = ۱,۲,۳,۴ \end{cases}$$

۱) ۳ واحد اضافه خواهد شد.
۲) $\frac{۱۳}{۲}$ واحد اضافه خواهد شد.
۳) $\frac{۵}{۲}$ واحد اضافه خواهد شد.
۴) حداکثر مقدار تابع هدف تغییری نخواهد کرد.

۱۵۹ـ یک مسأله برنامه‌ریزی خطی را با روش سیمپلکس ثانویه (با تابع هدف ماکزیمم) حل کرده‌ایم. در یکی از مراحل به جدول زیر رسیده‌ایم. در این صورت: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۸)

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$S_۱$	$S_۲$	سمت راست
Z	۰	۱	۰	۳	۰	۲	۱	۳۰
	۱	۰	۱	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	۵
	۲	۰	۰	۱	۱	۰/۲	۰/۴	−۲

۱) مسأله فاقد جواب موجه هست.
۲) مسأله دارای جواب بی‌کران است.
۳) برای به دست آوردن جواب بهینه باید متغیر $x_۳$ را از پایه خارج کرد.
۴) برای به دست آوردن جواب بهینه باید یکی از متغیرهای $x_۲$ یا $s_۱$ یا $s_۲$ را وارد کرد.

۱۶۰ـ در مسأله ۱۷۶، اگر ضرایب سطر ۲ زیر متغیرهای $s_۱,s_۲$ به جای ۰/۲ و ۰/۴ ضرایب ۰/۲− و ۰/۴− باشد، در این صورت متغیرهای اساسی (Basic Variables) بعدی عبارتند از: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۸)

۱) $x_۱ , x_۲$
۲) $x_۲ , x_۳$
۳) $x_۱ , x_۳$
۴) $x_۱ , s_۲$

۱۶۱ـ در مسأله ۱۷۶، مقدار تابع هدف چقدر است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۸)

۱) ۲۵
۲) ۳۰
۳) ۳۵
۴) بی‌نهایت

۱۶۲ـ جدول بهینه یک برنامه‌ریزی خطی به شرح زیر است. از نظر هندسی جواب گوشه متناظر با جواب روی کدام یک از محدودیت‌ها قرار می‌گیرد؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۸)

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	$s_۴$	سمت راست
	۰	۱	۰	۰	۶	۰	۰	۲	۳۲
	۱	۰	۱	۰	۱/۳	۰	۰	۱/۳	۶
	۲	۰	۰	۰	۸/۳	۱	۰	−۱/۳	۱۲
	۳	۰	۰	۱	−۲/۳	۰	۰	۱/۳	۲
	۴	۰	۰	۰	−۱/۳	۰	۱	۲/۳	۳

۱) اول و دوم ۲) دوم و سوم ۳) اول و سوم ۴) اول و چهارم

۱۶۳ـ در مسأله ۱۷۹، بردار مقادیر بهینه متغیرهای ثانویه (دوگان) عبارت است از:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۸)

۱) (۶,۱۲,۲,۳) ۲) (۳۲,۶,۱۲) ۳) (۶,۱۲,۳۲) ۴) (۶,۰,۰,۲)

۱۶۴ـ یک جواب موجه مسأله ثانویه متناظر با مسأله ۱۷۹ را در نظر بگیرید. مقدار تابع هدف آن می‌تواند چه مقدار باشد؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۸)

۱) صفر ۲) ۲۵ ۳) ۳۵ ۴) منهای بی‌نهایت

۱۶۵ـ در مسأله ۱۷۹حداکثر هزینه‌ای که بابت خرید یک واحد منبع شماره ۱ می‌توان پرداخت چقدر است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۸)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۱۶۶ـ یک برنامه‌ریزی ریاضی (با هدف ماکسیمم‌سازی) را در نظر بگیرید. مقدار بهینه تابع هدف این مسأله برابر با z است. سپس یک محدودیت جدید به این مسأله اضافه شده است. مقدار بهینه تابع هدف جدید z^* است، کدام مورد صحیح است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۸)

۱) $z \le z^*$ ۲) $z^* \le z$ ۳) $z^* < z$ ۴) $z < z^*$

توجه فرمائید که پنج سؤال بعدی در رابطه با مسأله کلی ذیل است:

خانواده‌ای را در نظر بگیرید که برای تأمین ویتامین‌های A و C هر یک از افراد خانواده خود در هفته بتواند از چهار نوع میوه استفاده کند. فرض کنید که قیمت هرکیلو میوه و میزان ویتامین موجود در هر کیلو میوه و حداقل ویتامین موردنیاز هر فرد در هفته مطابق جدول زیر باشد.

ویتامین	میوه				حداقل
	۱	۲	۳	۴	
A	۲	۲	۱	۲	۹
C	۳	۱	۳	۲	۱۹
قیمت هر کیلو	۴۰	۳۰	۲۷	۲۲	

۱۶۷ـ اگر بدانیم $x_۴$ و $x_۳$ در حل پایه بهینه هستند. حل بهینه مسأله کلی و مزدوج آن کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۸)

۱) $y_۲=۸ , y_۱=۳ , x_۴=۲ , x_۳=۵ , x_۲=۰ , x_۱=۰$

۲) $y_۲=۳ , y_۱=۸ , x_۴=۵ , x_۳=۲ , x_۲=۰ , x_۱=۰$

۳) $y_۲=۳ , y_۱=۸ , x_۴=۲ , x_۳=۵ , x_۲=۰ , x_۱=۰$

۴) $y_۲=۸ , y_۱=۳ , x_۴=۵ , x_۳=۲ , x_۲=۰ , x_۱=۰$

۱۶۸ـ قیمت واقعی میوه‌های ۱ و ۲ باید حداکثر مساوی کدام یک از اعداد زیر باشد تا خرید یکی از آنها به صرفه باشد؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۸)

۱) $c_۲=۱۶ , c_۱=۱۰$ ۲) $c_۲=۱۴ , c_۱=۳۰$ ۳) $c_۲=۵۰ , c_۱=۴۶$ ۴) $c_۲=۲۴ , c_۱=۲۰$

۱۶۹ـ اگر قیمت میوه یک را به ۲۵ واحد پول تقلیل دهیم، (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۸)

۱) تولید محصول ۱ و۲ بهینه است.

۲) تولید محصول ۱ و ۳ بهینه است.

۳) فقط تولید محصول ۱ بهینه است.

۴) تولید محصول ۱ و۴ بهینه است.

۱۷۰ـ اگر قیمت میوه دو را به ۱۴ برسانیم، (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۸)

۱) خرید محصولات ۳ و ۴ بهینه است.
۲) خرید محصولات ۲ و ۳ بهینه است.
۳) حل بهینه مسأله مزدوج تغییری نخواهد کرد.
۴) هر سه مورد درست است.

۱۷۱ـ مسائل P و D به شرح زیر مفروض است:

$$\begin{array}{lll} \max z = Cx & & \min w = Yb \\ \text{s.t} \quad Ax \le b & (P) \Leftrightarrow & \text{s.t} \quad YA \ge C \quad (D) \\ \quad\quad x \ge 0 & & \quad\quad Y \ge 0 \end{array}$$

تعداد جواب‌های پایه: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۸)

۱) در مدل P بیشتر است.
۲) در مدل D بیشتر است.
۳) در مسائل P و D با هم برابرند.
۴) بستگی به تعداد محدودیت مدل (P) یعنی m و تعداد متغیر مدل (D) یعنی n دارد. هر کدام کوچکتر باشند تعداد جواب‌های پایه آن بزرگتر است.

۱۷۲ـ مسأله زیر و جدول بهینه آن را در نظر بگیرید،

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s.t} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 \le 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

پایه	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_1	۱	۲	۱	۱	۰	۸
x_5	۰	۳	−۱	۱	۱	۱۲
z	۰	۳	۳	۲	۰	۱۶

اگر ضریب x_2 در اولین محدودیت از ۲ به $\frac{1}{4}$ تغییر کند. (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۸)

۱) جدول بهینه نیست و مقدار بهینه تابع هدف برابر ۱۵ خواهد شد.
۲) جدول بهینه نیست و مقدار بهینه تابع هدف برابر $\frac{104}{5}$ خواهد شد.
۳) جدول بهینه نیست و مقدار بهینه تابع هدف برابر $\frac{140}{5}$ خواهد شد.
۴) جدول همچنان بهینه باقی می‌ماند.

۱۷۳ـ در سؤال قبلی اگر فعالیت جدید $x_6 \ge 0$ با ۴ واحد سود و بردار $a_6 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ پیشنهاد شده باشد، تولید هر واحد محصول x_6 چقدر سود خالص در برخواهد داشت؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۸)

۱) ۲ واحد پول
۲) ۴ واحد پول
۳) $\frac{1}{2}$ واحد پول
۴) تولید x_6 صرفه اقتصادی ندارد.

۱۷۴ـ مدل برنامه‌ریزی خطی روبرو را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t} \quad & -x_2 + x_3 \ge a \\ & x_1 - x_3 \ge b \\ & dx_1 + x_2 \ge c \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

مسأله فوق تحت چه شرایطی به یک مسأله Self-Dual تبدیل خواهد شد؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۸)

۱) $a = b = c = d = 1$
۲) $-a = -b = -c = -d = 1$
۳) $a = b = 1 \ ; \ -c = -d = 1$
۴) $-a = -b = 1 \ ; \ c = d = 1$

۱۷۵ـ اگر دو مسأله برنامه‌ریزی ریاضی یکی با هدف $\max f(x)$ و دیگری با هدف $\max g(x)$ که ناحیه امکان‌پذیر آنها یکی باشد آن‌گاه تابع هدف $\max h(x) = f(x) + g(x)$ بر روی همان ناحیه امکان‌پذیر باشد کدام شرط زیر برقرار است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۸)

۱) $\max h(x) = \max f(x) + \max g(x)$
۲) $\max h(x) \le \max g(x)$
۳) $\max h(x) \le \max f(x)$
۴) $\max h(x) \le \max f(x) + \max g(x)$

۱۷۶ـ دستگاه $\{AX = 0 \ ; \ X \le 0 \ , \ CX > 0\}$ جواب ندارد، کدام یک از دستگاه‌های زیر حتماً جواب دارد؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۸)

۱) $\begin{array}{c} -YA + VA = C \\ Y \ge 0 \end{array}$
۲) $\begin{array}{c} YI + VA = C \\ V \ge 0 \end{array}$
۳) $\begin{array}{c} -YI + VA = C \\ V \ge 0 \end{array}$
۴) $\begin{array}{c} YI + VA = C \\ Y \ge 0 \end{array}$

۱۷۷ـ اگر در مسأله دوگان، ضریب تابع هدف متغیر y_i که در پایه می‌باشد، از b_i به $b_i+\Delta b_i$ تغییر نماید، چه تغییری در مقادیر متغیرهای بهینه در مسأله اولیه حاصل خواهد شد؟
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۹)

$$\begin{array}{ll} \text{Max } x_0 = Cx & \text{Min } y_0 = yb \\ \text{s.t.} \quad Ax \le b & \text{s.t.} \quad yA \ge c \\ x \ge 0 & y \ge 0 \end{array}$$

$A(m\times n)$

۱) به اندازهٔ حاصل ضرب سطر مربوطه در ماتریس B^{-1} ، در مقدار Δb_i، افزایش خواهند یافت.

۲) به اندازهٔ حاصل ضرب ستون مربوطه در ماتریس B^{-1} ، در مقدار Δb_i، افزایش خواهند یافت.

۳) همگی به اندازهٔ Δb_i افزایش خواهند یافت.

۴) تغییری نخواهند کرد.

۱۷۸ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید. در جواب بهینهٔ این مسأله، متغیرهای s_1, x_1 (متغیر کمبود محدودیت اول) و s_3 (متغیر کمبود محدودیت سوم) متغیرهای اساسی (پایه) هستند. در این صورت، کدام گزینه نادرست است؟ (فرض می‌شود $a_{21}, a_{22}, a_{23} > 0$)
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۹)

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ge b_2 \\ & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

۱) $\frac{b_2}{a_{21}} \ge 0$

۲) $\frac{c_1}{a_{21}} \le 0$

۳) $\frac{c_1}{a_{21}} \le \frac{c_3}{a_{23}}$

۴) $\frac{c_1}{a_{21}} \ge \frac{c_2}{a_{22}}$

۱۷۹ـ مسأله زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید این مسأله دارای فضای حل باشد. دوگان این مسأله چگونه است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۹)

$$\begin{aligned} \text{Max} &= C_1x_1 + C_2x_2 \\ \text{s.t} \quad & ax_1 + bx_2 = b_1 \\ & cx_1 + dx_2 = b_2 \qquad ; \qquad \frac{a}{b} \ne \frac{c}{d} \ne \frac{k}{m} \\ & kx_1 + mx_2 = b_3 \\ & b_1, b_2, b_3, x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

۱) حتماً تباهیده است.

۲) ممکن است جواب نداشته باشد.

۳) دارای جواب بیکران است.

۴) جواب بهینه چندگانه دارد.

۱۸۰ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید. در جواب بهینهٔ مسأله مذکور، متغیرهای x_5, x_1 متغیرهای پایه هستند، و مقدار $z_2 - c_2 = -3$ است. در صورتی که ضریب متغیر x_2 در تابع هدف از $(c_2 = 1)$ به $(c_2 = -3)$ تغییر یابد، در جدول بهینه مقدار $z_2 - c_2$ چقدر است؟
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۹)

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= -2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

۱) ۱

۲) ۲-

۳) ۲

۴) ۱-

۱۸۱ـ مساله برنامه‌ریزی خطی روبرو مفروض است:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \le 8 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

با فرض اینکه جواب بهینه مسأله دوگان آن به صورت $(y_1, y_2, t_1, t_2, t_3, t_4) = (1, 1, 0, 1, 1, 0)$ باشد، در کدام گزینه زیر حل بهینه مسأله اولیه صحیح است؟
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۹)

۱) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 0, 2)$

۲) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 1, 2)$

۳) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 3, 0)$

۴) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 0, 2)$

۱۸۲ـ اگر در یک مساله برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف Max و محدودیت‌های کوچک‌تر یا مساوی، y_i ها متغیرهای مزدوج (دوگان) باشند، کدام یک از روابط ذیل صحیح خواهد بود: (مدل $m \times n$ می‌باشد)

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

۲) $\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \right) \ge \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

۳) $\sum_{i=1}^{m} x_j \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right) \ge \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

۴) $\sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \ge \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

۱۸۳ـ در یک جدول سیمپلکس، علامت نامحدود بودن مشاهده شده است. این جدول به کدام یک از الگوریتم‌های زیر می‌تواند تعلق داشته باشد؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۹)

۱) سیمپلکس دوگان
۲) فاز ۱ از روش دو فاز
۳) سیمپلکس معمولی
۴) سیمپلکس دوگان و معمولی

۱۸۴ـ دو مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

مسأله (۱)
$$z_1 = \text{Min} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le E_1$$

مسأله (۲)
$$z_2 = \text{Min} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le E_2$$

فرض کنید مسأله (۳) به صورت:
$$z_3 = \text{Min} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le E_1 + E_2$$
، تعریف شده است. آنگاه چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۹)

۱) $Z_1 + Z_2 \ge Z_3$
۲) $Z_1 + Z_2 \le Z_3$
۳) $Z_1 + Z_2 = Z_3$
۴) هیچ ارتباطی بین Z_1 و Z_2 و Z_3 وجود ندارد.

۱۸۵ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی $\begin{array}{l} \text{Min}\, cx \\ \text{s.t} \begin{cases} Ax \ge b \\ x \ge 0 \end{cases} \end{array}$ **را درنظر بگیرید، فرض کنید که y^* جواب بهینه دوگان این مسأله باشد. بردار سمت راست b را با بردار $\bar{b}$ جایگزین می‌کنیم و بقیه مسأله را به همان حالت قبل نگه می‌داریم. اگر $\bar{x}$ جواب بهینه مسأله جدید باشد. کدام رابطه درست است؟**

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۹)

۱) $c\bar{x} \le y^* \bar{b}$
۲) $c\bar{x} > y^* b$
۳) $c\bar{x} \ge y^* \bar{b}$
۴) $c\bar{x} = y^* \bar{b}$

۱۸۶ـ در مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۹۰)

$$\begin{array}{l} \max(x_1 + x_2) \\ \text{s.t. } kx_1 + x_2 \le p \\ \quad x_1, x_2 > 0 \end{array}$$

به ازای کدام مقادیر زیر مسأله دارای جواب بی‌کران است؟

۱) $k = 0 , p = -1$
۲) $k = 1 , p = -1$
۳) $k = -1 , p = 0$
۴) $k = 1 , p = 1$

۱۸۷ـ دو مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$P_1 \;\; \text{Min}\{c'x \mid Ax \ge b , x \ge 0\} \quad ; \quad P_2 \;\; \text{Max}\{b'u \mid A'u \le c , u \ge 0\}$$

و فرض کنید $b \le 0$, $c \ge 0$ بوده و علامت i' به معنی ترانهاده بردار یا ماتریس مربوطه است. در این صورت: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۹۰)

۱) P_1 بی‌کران و P_2 غیر موجه است.
۲) P_1 غیر موجه و P_2 بی‌کران است.
۳) P_1 و P_2 هر دو دارای جواب بهینه محدود هستند.
۴) P_1 و P_2 هر دو دارای جواب موجه نیستند.

۱۸۸ــ دو مدل برنامه‌ریزی ریاضی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max}\, z_1 = 2x_1 + 3x_2 \quad \text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

و

$$\text{Max}\, z_2 = 2x_1 + 3x_2 \quad \text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_1, x_2 \text{ اعداد صحیح غیر منفی هستند} \end{cases}$$

بین مقادیر بهینه z_1 و z_2 چه رابطه‌ای برقرار است؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۹۰)

۱) $\text{Max}\, z_1 < \text{Max}\, z_2$ ۲) $\text{Max}\, z_1 = \text{Max}\, z_2$ ۳) $\text{Max}\, z_1 > \text{Max}\, z_2$ ۴) هیچ‌رابطه‌ای برقرار نیست.

۱۸۹ــ دو مسأله برنامه‌ریزی ریاضی زیر را در نظر بگیرید:

$$z_1 = \text{Min} f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le E_1 \quad (1)$$

$$z_2 = \text{Min} f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le E_2 \quad (2)$$

اگر $E_2 > E_1$ باشد، آنگاه: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۹۰)

۱) $z_2 < z_1$ ۲) $z_2 \le z_1$ ۳) $z_2 > z_1$ ۴) $z_2 \ge z_1$

۱۹۰ــ مسأله برنامه‌ریزی خطی روبرو را در نظر بگیرید:

$$\text{Min}\, cx \quad \text{s.t.}\ Ax \le b, \quad x \ge 0$$

اگر برای $c = c_1$، x_1 جواب بهینه مسأله بالا باشد و برای $c = c_2$، x_2 جواب بهینه مسأله بالا باشد، آنگاه:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۹۰)

۱) $(c_1 - c_2)(x_1 - x_2) \le 0$ ۲) $(c_1 - c_2)(x_1 - x_2) = 0$ ۳) $(c_1 - c_2)(x_1 - x_2) \ge 0$ ۴) $(c_2 - c_1)(x_1 - x_2) \ge 0$

۱۹۱ــ مسأله

$$\begin{aligned} \text{Max}\, x_0 &= 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

که جدول بهینه‌ی آن به صورت زیر است:

	x_0	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	RHS
x_0	1	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5}+M$	$\frac{281}{5}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
x_1	0	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$

در صورتی که مقادیر سمت راست از $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ به $\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$ تغییر یابند. در جواب بهینه چه تغییری به وجود می‌آید؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۹۰)

۱) پایه بهینه و مقادیر بهینه تغییر نمی‌کند.

۲) پایه بهینه تغییر می‌کند و به $\begin{pmatrix}x_3\\x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{12}{5}\\\frac{11}{5}\end{pmatrix}$ تغییر می‌یابد.

۳) پایه بهینه تغییر نمی‌کند، ولی مقادیر بهینه به $\begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{10}{5}\\\frac{9}{5}\end{pmatrix}$ تغییر می‌یابد.

۴) پایه بهینه تغییر نمی‌کند، ولی مقادیر بهینه به $\begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{12}{5}\\\frac{11}{5}\end{pmatrix}$ تغییر می‌یابد.

۱۹۲ـ اگر مقادیر بهینه متغیرهای دوگان (dual variables) از یک مسأله بیشینه‌سازی به ترتیب از چپ به راست به صورت (۰،۱،۳،۹) باشد و مجبور باشیم فقط یک واحد از یکی از چهار منبع را نسبت به قبل اضافه‌تر نماییم، مناسب‌ترین تصمیم کدام است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۹۰)

۱) تهیه از منبع یکم ۲) تهیه از منبع دوم ۳) تهیه از منبع سوم ۴) تهیه از منبع چهارم

۱۹۳ـ برنامه خطی مقابل را در نظر بگیرید:

$$\text{Max}z = ۵۰۰x_۱ + ۴۵۰x_۲$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} ۶x_۱ + ۵x_۲ \le ۶۰ \\ ۱۰x_۱ + ۲۰x_۲ \le ۱۵۰ \\ x_۱ \le ۸ \\ x_i \ge ۰, i = ۱,۲,۳ \end{cases}$$

شبه قیمت‌ها (shadow-prices) محدودیت اول و سوم چیست؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۹۰)

۱) $۰/۵, ۱۰$ ۲) $۱۰, ۷۸\frac{۴}{۷}$ ۳) $۷۸\frac{۴}{۷}, ۱۰$ ۴) $۰, ۷۸\frac{۴}{۷}$

۱۹۴ـ در مسأله ۲۱۶ هزینه‌های تقلیل یافته (Reduced Costs) متغیرهای $x_۱, x_۲$ چقدر است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۹۰)

۱) $۰, ۰$ ۲) $۱۰, ۰$ ۳) $۰, ۲\frac{۶}{۷}$ ۴) $۲\frac{۶}{۷}, ۱۰$

۱۹۵ـ در مسأله ۲۱۶ حدود تغییرات ضرایب تابع هدف چیست؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\begin{cases} ۲۰۰ \le c_۲ \le ۵۰۰ \\ ۴۱۶\frac{۲}{۳} \le c_۲ \le ۱۰۰۰ \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} ۳۰۰ \le c_۱ \le ۶۰۰ \\ ۱۰۰ \le c_۲ \le ۷۰۰ \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} ۲۲۵ \le c_۱ \le ۵۴۰ \\ ۴۱۶\frac{۲}{۳} \le c_۲ \le ۱۰۰۰ \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} ۲۰۰ \le c_۱ \le ۷۰۰ \\ ۱۰۰ \le c_۲ \le ۷۰۰ \end{cases}$

۱۹۶ـ تلاش در جهت حل مسأله از طریق دوگان به دنبال بهینه‌سازی استفاده از منابع است با توجه به اینکه: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۰)

۱) حاشیه هزینه فرصت برای یک منبع بیشتر از حاشیه سود آن شود.
۲) حاشیه هزینه فرصت برای یک منبع برابر حاشیه سود آن شود.
۳) حاشیه هزینه فرصت برای یک منبع کوچکتر از حاشیه سود آن شود.
۴) اظهار نظر در مورد این مسأله با توجه به max یا min بودن مسأله است و نمی‌توان در آن به طور کلی نظر داد.

۱۹۷ـ مسأله برنامه‌ریزی خطی به فرم $\underset{\substack{Ax \le b \\ x \ge ۰}}{\text{Max } Z = Cx}$ موجود است. که $A_{m \times n}$ است. نامعادله جدید $۰ \le L_i \le X_i$ به مسأله اضافه می‌شود. اگر از تغییر متغیر برای کم کردن نامعادلات استفاده شود. اطلاعات مربوط به Shadow Price این نامعادلات در خروجی نرم‌افزار در کجا یافت می‌شود؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۰)

۱) در قسمت Reduce Cost متغیر x_i
۲) چنین اطلاعاتی در گزارش وجود ندارد.
۳) در Shadow Price نامعادله آخر
۴) در قسمت حدود مجاز جهت ضرایب x_i در تابع هدف

۱۹۸ـ در جواب بهینه مسأله زیر متغیر کمکی محدودیت دوم در پایه قرار دارد، مقدار بهینه تابع هدف چقدر است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۱)

$$\underset{\text{s.t}}{\text{Max } Z} = x_۱ + ۲x_۲ - ۳x_۳ + ۴x_۴ + ۶x_۵$$

$$x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ + ۳x_۴ + ۲x_۵ \le ۳۰$$

$$x_۱ + x_۲ - x_۳ - x_۴ - x_۵ \le ۷۰$$

$$x_i \ge ۰ \quad i = ۱,۲,\cdots,۵$$

۱) $Z^* = ۹۰$
۲) $Z^* = ۱۴۰$
۳) $Z^* = ۳۰$
۴) $Z^* = ۴۰$

۱۹۹ـ در جواب بهینه مسأله زیر x_1 متغیر پایه‌ای و x_2 و x_3 متغیرهای غیرپایه‌ای هستند. مقدار بهینه Z چقدر است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۱)

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = 5x_1 + 4x_2 + x_3 \\ &\text{s.t} \\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 4 \\ &2x_1 - x_2 + 5x_3 \le 9 \\ &5x_1 + 9x_2 + x_3 \le 22 \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

۱) ۲۲/۵

۲) ۲۰

۳) ۱۸

۴) ۲۴

۲۰۰ـ اگر مقادیر بهینه متغیرهای دوگان از یک مسأله بیشینه‌سازی به ترتیب از چپ به راست به صورت (۱۲,۳,۵,۲) باشد و مجبور باشیم فقط یک واحد از یکی از چهار منبع را نسبت به قبل اضافه‌تر نماییم در صورتی که قیمت منابع به صورت (۱۰,۰,۴,۱) باشد، مناسب‌ترین تصمیم کدام است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۹۱)

۱) تهیه از منبع ۱

۲) تهیه از منبع ۲

۳) تهیه از منبع ۳

۴) تهیه از منبع ۴

۲۰۱ـ دو مسأله برنامه‌ریزی ریاضی ۱ و ۲ را در نظر بگیرید که در آن $U(x_1, x_2)$ یک تابع غیر خطی است.

$$z_2 = \text{Max}\, U(x_1, x_2) \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$$z_1 = \text{Max}\, U(x_1, x_2) \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (1)$$

کدام رابطه زیر صحیح است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۹۱)

۱) $z_1 \ge z_2$

۲) $z_1 \le z_2$

۳) $\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \le \frac{1}{2}$

۴) $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \ge \frac{1}{2}$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل چهارم

۱ـ گزینه «۴» مسائل زیر مفروضند:

$$P: \underset{\text{S.t.}}{\text{Min}}\ Z = C^T X \quad AX \ge b \quad x \ge 0 \quad \xrightarrow{\text{دوگان}} \quad D: \underset{\text{s.t.}}{\text{Max}}\ W = b^T y \quad yA \le C \quad y \ge 0$$

طبق قضیه ضعیف دوگان می‌دانیم که در هر جواب شدنی $C^T x_0 \ge b^T y_0$. اگر مسأله را به روش سیمپلکس حل کنیم از هر مرحله به مرحله بعد مقدار $C^T x$ کم می‌شود و مقدار $b^T y$ زیاد می‌شود یعنی از یک مرحله به مرحله بعد مقدار $d = C^T x - b^T y$ کاهش می‌یابد و در بهینگی به صفر می‌رسد.

۲ـ گزینه «۴»

$$P_1: \underset{\text{s.t.}}{\text{Min}}\ Z_1 = CX \quad AX \ge b \quad x \ge 0 \quad \xrightarrow{\text{دوگان}} \quad D_1: \underset{\text{s.t.}}{\text{Max}}\ W_1 = yb \quad yA \le C \quad y \ge 0$$

$$P_2: \underset{\text{s.t.}}{\text{Min}}\ Z_2 = CX \quad AX \ge \bar{b} \quad x \ge 0 \quad \xrightarrow{\text{دوگان}} \quad D_2: \underset{\text{s.t.}}{\text{Max}}\ W_2 = y\bar{b} \quad yA \le C \quad y \ge 0$$

y^* جواب بهینه مسأله D_1 است، فرض می‌کنیم $\bar{y}$ نیز جواب بهینه مسأله D_2 باشد و چون فضای شدنی مسائل D_2, D_1 یکسان است، پس y^* جواب شدنی مسأله D_2 نیز می‌باشد. پس $y^*\bar{b} \le \bar{y}\bar{b}$. همچنین $\bar{x}$ جواب بهینه مسأله P_2 است و می دانیم $Z_2(\bar{x}) = w_2(\bar{y})$، یعنی $C\bar{X} = \bar{y}\bar{b}$. لذا با مقایسه روابط $y^*\bar{b} \le \bar{y}\bar{b}$ و $C\bar{X} = \bar{y}\bar{b}$ داریم: $y^*\bar{b} \le C\bar{X}$.

۳ـ گزینه «۲» اگر اولین محدودیت مسأله اولیه در ۲ ضرب شود فضای شدنی و جواب بهینه مسأله اولیه هیچ تغییری نمی‌کند و مقدار بهینه تابع هدف دوگان نیز تغییر نخواهد کرد. تابع هدف دوگان در مسأله جدید به صورت $\hat{W} = 2b_1\hat{y}_1 + b_2y_2 + \ldots + b_m y_m$ است و تابع هدف دوگان مسأله قدیم $W = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_m y_m$ می‌باشد. مقدار بهینه تابع‌های هدف $w, \hat{w}$ برابر است، بنابراین خواهیم داشت: $\hat{y}_1 = \frac{1}{2}y_1$

۴ـ گزینه «۱»

$$\underset{\text{s.t.}}{\text{Min}}\ C^T X \quad AX \le C \quad x \ge 0 \quad \xrightarrow{\text{دوگان}} \quad \underset{\text{S.t.}}{\text{Max}}\ yc \quad \begin{matrix} y_A \le C^T \\ y \le 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A^T y^T \le C \\ y \le 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -Ay^T \le C \\ y \le 0 \end{matrix}$$

مسأله دوگان را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

$$\underset{\text{s.t.}}{\text{Min}}(-y)C \quad A(-y^T) \le C \quad -y \ge 0$$

می‌دانیم $(-y)C = C^T(-y)^T$ با تغییر متغیر $-y^T = x$ داریم: $\underset{\text{s.t.}}{\text{Min}}\ C^T x \quad Ax \le C \quad x \ge 0$

۵ـ گزینه «۱» اگر در مسأله اولیه محدودیت اول فعال نباشد، پس متغیر کمکی آن مخالف صفر است. یعنی $S_1 \ne 0$ و طبق قضیه مکمل زائد: $y_1 s_1 = 0$
بنابراین خواهیم داشت: $y_1 = 0$.

۶ـ گزینه «۱» چون دارای جواب بهینه غیرتبهگن می‌باشد پس شدنی هم هست پس دوگان آن هم شدنی و دارای جواب بهینه می‌باشد که مقدار بهینه هر دو (اولیه و دوگان) با هم برابر است. اما اطلاعات بیش‌تر این است که اگر مسأله اولیه دارای جواب بهینه غیرتبهگن باشد و دوگان دارای جواب منحصر به فرد است اگر مسأله اولیه دارای جواب بهینه تبهگن باشد دوگان دارای جواب چندگانه می‌باشد (برعکس آن همیشه صادق نیست)

۷ـ گزینه «۲» برای حفظ شرط شدنی بودن و در نتیجه ثابت ماندن پایه بهینه فعلی باید داشته باشیم:

$$\bar{b} = B^{-1}b \geq ۰ \Rightarrow \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۴ \\ b_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۴ - b_۲ \geq ۰ \\ b_۲ \geq ۰ \end{pmatrix} \rightarrow ۰ \leq b_۲ \leq ۴$$

یادآوری: حواسمان باشد که $B^{-۱}$ زیر متغیرهای پایه‌ای اولیه قرار دارد $(s_۱, a)$.

۸ـ گزینه «۱» جواب بهینه مسأله $(۰,۰,۲,۴,۰)$ است که در قید $x_۳ \geq ۳$ صدق نمی‌کند $۲ \ngeq ۳$، پس این قید را به صورت $-x_۳ + s_۳ = -۳$ تبـدیل و آن را به سطر آخر جدول می‌افزاییم.

Z / $c_j - z_j$	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۲$	$S_۱$	$S_۳$	
	۳	+۱	۰	+۱	۰	۰	۲
$S_۱$	−۱	۳	۰	۱	۱	۰	۴
$x_۳$	۲	۱	۱	−۱	۰	۰	۲
$S_۳$	۰	۰	−۱	۰	۰	۱	−۳

با توجه به اینکه بردار متغیرهای پایه باید یکه باشد پایه را به روز می‌کنیم، با توجه به اینکه مقدار سمت راست $S_۳$ منفی اسـت، بـا اسـتفاده از سـیمپلکس دوگان متغیر $S_۲$ به عنوان متغیر ورودی انتخاب می‌شود.

ورودی ↓

Z / $C_j - Z_j$	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۲$	$S_۱$	$S_۳$		
	−۳	−۱	۰	−۱	۰	۰	۲	
$S_۱$	−۱	۳	۰	۱	۱	۰	۴	
$x_۳$	۲	۱	۱	−۱	۰	۰	۲	
$S_۳$	۲	۱	۰	−۱	۰	۱	−۱	← خروجی

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۲$	$S_۱$	$S_۳$	۳
Z	−۵	−۲	۰	۰	۰	−۱	
$S_۱$	۱	۴	۰	۰	۱	۱	۳
$x_۳$	۰	۰	۱	۰	۰	−۱	۳
$S_۲$	−۲	−۱	۰	۱	۰	−۱	۱

جواب بهینه $(S_۱^* = ۳, x_۳^* = ۳, S_۲^* = ۱)$ است.

۹ـ گزینه «۳» متغیری که در روش دوال سیمپلکس برای ورود به پایه انتخاب می‌شود در مرحله بعد ضریب سطر هدف و یا همان $Z_j - C_j$ صفر خواهد داشت.

۱۰ـ گزینه «۲» اگر $S_i^* (i = ۱,۲,۳)$ متغیرهای کمکی قیود مسأله اولیه در جواب بهینه و v_i^* متغیرهای کمکی قیود مسأله ثانویـه در جـواب بهینـه باشـند و y_i^*, x_i^* مؤلفه‌های جواب بهینه مسأله اولیه و ثانویه باشند، طبق قضیه مکمل زائد :

$$x_i^* . v_i^* = ۰ \quad , \quad y_i^* . S_i^* = ۰$$

جواب بهینه دوگان $y_۱^* = ۲, y_۲^* = ۰, y_۳^* = ۳$ است.

$$y_i^* . S_i^* = ۰ \Rightarrow S_۱^* = ۰, S_۳^* = ۰$$

پس قیود ۱ و ۳ در مسأله اولیه در جواب بهینه به صورت تساوی هستند:

$$\begin{cases} x_۱^* + \frac{۵}{۲} x_۲^* = ۱۴ \\ x_۱^* - \frac{۱}{۲} x_۲^* = ۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱^* = ۹ \\ x_۲^* = ۲ \end{cases}$$

۱۱ـ گزینه «۲» تابع هدف مسأله مزدوج عبارت است از : $\text{Min } w = yb$ که $y = C_B B^{-۱}$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$w_{old}^* = C_B B^{-۱} b \,,\, w_{new}^* = C_B B^{-۱}(b + \Delta b) = C_B B^{-۱} b + C_B B^{-۱} \Delta b \rightarrow w_{new}^* - w_{old}^* = C_B B^{-۱} \Delta b$$

۱۲ـ گزینه «۲» طبق قضیه‌ی مکمل زائد داریم:

$x_۲ . v_۲ = ۰ \xrightarrow{x_۲ > ۰} v_۲ = ۰ \rightarrow$ محدودیت دوم دوگان به صورت تساوی است.

$x_۳ . v_۳ = ۰ \xrightarrow{x_۳ > ۰} v_۳ = ۰ \rightarrow$ محدودیت سوم دوگان به صورت تساوی است.

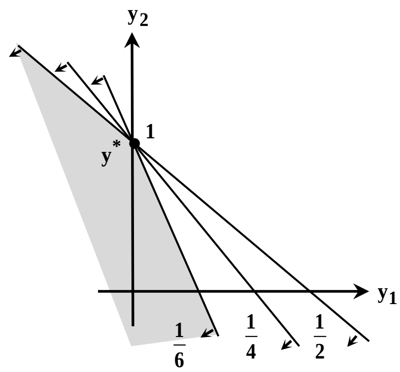
$$\Rightarrow \begin{cases} ۴y_۱ - y_۲ = ۴ \\ y_۱ + ۴y_۳ = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_۱ = ۱ \\ y_۲ = ۰ \end{cases}$$

۱۳ـ گزینه «۴» مسأله $(P_1)\ \underset{\substack{\text{s.t.}\\ AX\le b\\ x\ge 0}}{\text{Max}}\ Z_1 = CX$ و دوگان آن $(D_1)\ \underset{\substack{\text{s.t.}\\ yA\ge C\\ y\ge 0}}{\text{Min}}\ w = yb$ مفروضند و اگر در P_1 ضرایب تابع هدف و ماتریس A در عدد $K>0$ ضرب شود. داریم : $(P_2)\ \underset{\substack{\text{s.t.}\\ (KA)X\le b\\ x\ge 0}}{\text{Max}}\ Z_2 = (KC)X$ و دوگان آن $(D_2)\ \underset{\substack{\text{s.t.}\\ y(KA)\ge KC\\ y\ge 0}}{\text{Min}}\ w = yb$ است. با حذف $K>0$ از محدودیت‌های مسأله D_2 همان مسأله D_1 است و جواب بهینه هر دو y^* است و مقدار بهینه تابع هدف هر دو w^* است. در نتیجه باید جواب بهینه مسائل D_2, P_2, D_1, P_1 برابر گردد. پس باید $CX_1^* = (KC)X_2^*$ یعنی $X_2^* = \frac{X_1^*}{K}$ و y^* نیز تغییر نمی‌کند. کامل‌ترین اطلاعات در گزینه (۴) است.

۱۴ـ گزینه «۴» اگر متغیر وارد شونده به پایه نداشته باشیم مسأله اولیه نشدنی خواهد بود و مسأله ثانویه جواب بی‌کران دارد.

۱۵ـ گزینه «۱» با نوشتن مساله دوگان داریم :

$$\underset{\text{s.t.}}{\text{Max}}\ w = 6y_1 + 3y_2$$
$$2y_1 + y_2 \le 1$$
$$6y_1 + y_2 \le 1$$
$$4y_1 + 2y_2 \le 2$$
$$8y_1 + 2y_2 \le 2$$
y_1, y_2 : آزاد



به روش هندسی بهینه دوگان را می‌یابیم. نقطه بهینه مسأله دوگان $w^* = 3, y^* = (0,1)$ است. جواب بهینه دوگان تباهیده است، پس مسأله اولیه جواب بهینه چند گانه دارد. توجه شود که اگر مسأله اولیه، دو برابر معادله دوم را از معادله اول کم کنیم داریم: $4x_2 + 4x_4 = 0$

چون $x_2 \ge 0$ و $x_4 \ge 0$ سپس متغیرهای x_2 و x_4 متغیرهای خنثی هستند و همواره مقدار صفر دارند، گزینه ۳ هم می‌تواند درست باشد.

۱۶ـ گزینه «۴» اگر هریک از مسائل اولیه یا ثانویه غیرمنحط باشد، دیگری جواب بهینه منحصر به فرد دارد.

۱۷ـ گزینه «۲» مسأله اولیه به صورت $\underset{\substack{\text{S.t.}\\ AX\le b\\ x\ge 0}}{\text{Max}}\ Z = cx$ است و ثانویه عبارت است از : $\underset{\substack{\text{S.t.}\\ yA\ge C\\ y\ge 0}}{\text{Min}}\ W = yb$ عبارت $Z_j - C_j \ge 0$ در جدول بهینه مسأله اولیه بیانگر برقراری شرایط بهینگی است و می‌دانیم متغیرهای دوگان، یعنی y برابر $C_B B^{-1}$ است. پس برای متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ داریم:

$$Z_j - C_j \ge 0 \Rightarrow \underbrace{C_B\ B^{-1}}_{y} a_j - Cj \ge 0 \Rightarrow \forall j; ya_j \ge C_j \Rightarrow yA \ge C \qquad (1)$$

برای متغیرهای $S_1, \dots, S_m$ داریم:

$$Z_j - C_j \ge 0 \Rightarrow \underbrace{C_B\ B^{-1}}_{y} a_j - Cj \ge 0 \Rightarrow (y_1, \dots, y_j, \dots, y_m)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \ge 0 \Rightarrow y_j \ge 0 \Rightarrow y \ge 0 \qquad (2)$$

که (۱) و (۲) همان محدودیت‌های مسأله ثانویه هستند.

۱۸ـ گزینه «۱»

$$P_۱: \text{Min } Z = CX \quad \text{S.t.} \quad Ax \ge b, \quad x \ge ۰ \quad \xrightarrow{\text{مسأله ثانویه}} \quad D_۱: \text{Max } W = yb \quad \text{S.t.} \quad yA \le C, \quad y \ge ۰$$

می‌دانیم y^* جواب بهینه مسأله $D_۱$ است. چون $D_۱$ جواب بهینه دارد، پس مسأله اولیه متناظر یعنی $P_۱$ نیز جواب بهینه‌ای دارد که آن را x^* می‌نامیم و داریم: $CX^* = y^*b$. اکنون در مسأله $P_۱$ بردار سمت راست b را با $\bar{b}$ جایگزین می‌کنیم :

$$P_۲: \text{Min } Z = CX \quad \text{S.t.} \quad Ax \ge \bar{b}, \quad x \ge ۰ \quad \xrightarrow{\text{مسأله ثانویه}} \quad D_۲: \text{Max } W = y\bar{b} \quad \text{S.t.} \quad yA \le C, \quad y \ge ۰$$

می‌دانیم جواب بهینه مسأله $P_۲$ برابر $\bar{x}$ است، پس $D_۲$ نیز دارای جواب بهینه است که آن را $\bar{y}$ می‌نامیم و داریم: $C\bar{x} = \bar{y}\bar{b}$.

از طرفی y^* یک جواب شدنی $D_۱$ می‌باشد و چون محدودیت‌های مسائل $D_۱$ و $D_۲$ یکسان هستند y^* جواب شدنی $D_۲$ نیز هست و چون $\bar{y}$ جواب بهینه $D_۲$ است، پس $y^*\bar{b} \le \bar{y}\bar{b}$ و چون $C\bar{x} = \bar{y}\bar{b}$ پس: $C\bar{x} \ge y^*\bar{b}$.

۱۹ـ گزینه «۳» می‌دانیم که در روش سیمپلکس دوگان باید شرط بهینگی برقرار باشد ولی چون $C_۲ = -۴$ پس شرط بهینگی برقرار نمی‌گردد. لذا نمی‌توان این مسأله را از روش سیمپلکس دوگان حل کرد مگر آنکه ضریب هزینه $C_۲$ نامنفی گردد، که این در گزینه ها موجود نیست.

۲۰ـ گزینه «۱» چون هر دو مسأله شدنی هستند، پس هر دو جواب بهینه دارند، اما لزومی ندارد که فضای حل هر دو مسأله محدود باشد.

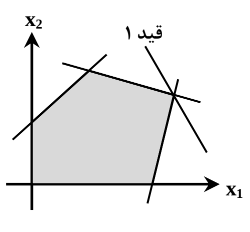
۲۱ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه متغیرهای تصمیم محدود شده‌اند، $(A_j, \ell_j \le x_j \le u_j)$ پس فضای موجه مسأله اوّلیه محدود است و در نتیجه مسأله اولیه دارای جواب بهینه محدود است و لذا مسأله ثانویه نیز جواب بهینه محدود دارد.

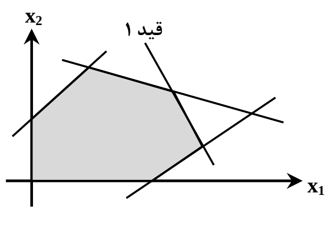
۲۲ـ گزینه «۱» متغیر w آزاد در علامت است، پس محدودیت دوگان مربوط به آن به صورت تساوی برقرار می‌شود.

$$P: \text{Max } wb \quad \text{S.t.} \quad WA \le ۰, \quad W: \text{د} \quad \xrightarrow{\text{دوگان}} \quad D: \text{Min } ۰x \quad \text{S.t.} \quad Ax = b, \quad x \ge ۰$$

۲۳ـ گزینه «۱» با توجه قضیه مکمل زائد، گزینه ۱ صحیح است.

۲۴ـ گزینه «۲» با حذف یکی از محدودیت‌ها، ناحیه شدنی تغییر نمی‌کند و یا بزرگتر می‌شود. در نتیجه کوچکتر نمی‌شود و مقدار تابع هدف نیز بدتر (کوچکتر) نمی‌شود.





۲۵ـ گزینه «۳» روش ۱ : با توجه به اینکه محدودیت‌های مسأله اولیه (Min سازی) به صورت $\le$ هستند. پس متغیرهای مسأله ثانویه کوچکتر مساوی صفر هستند و گزینه (۳) صحیح است.

روش ۲ : با امتحان کردن گزینه‌ها با توجه به گزینه (۳) داریم:

جواب بهینه مسأله ثانیه $W^* = (-۱)\times ۹ + ۰ \times ۲ + (-۲)\times ۴ = -۱۷$; جواب بهینه مسأله اولیه $Z^* = \frac{۱}{۳} + ۰ - ۴(\frac{۱۳}{۳}) = -۱۷$

۲۶ـ گزینه «۴» شرط بهینه بودن مسأله اولیه این است که جواب مسأله دوگان شدنی باشد.

۲۷ـ گزینه «۳» حجم محاسبات در مسأله اولیه کمتر می‌باشد چرا که تعداد محدودیت در این مسأله (m) کمتر از تعداد محدودیت‌ها در مسأله ثانویه (n) می‌باشد.

۲۹ـ گزینه «۴» منظور از جواب موجه نامحدود، منطقه موجه نامحدود است، z^* می‌تواند محدود یا نامحدود شود، پس w^* می‌تواند محدود یا نشدنی باشد و فضای موجه دوگان می‌تواند نشدنی یا محدود یا نامحدود شود.

۳۰ـ گزینه «۱» تعریف قیمت سایه‌ای: میزان تغییر در تابع هدف به ازای یک واحد افزایش در منابع. با توجه به تعریف فوق، چون میزان افزایش در تابع هدف (قیمت سایه‌ای) (dual price) محدودیت اول بیشتر از سایر محدودیتها است (۰/۲۲). گزینه (۱) صحیح‌ترین پاسخ می‌باشد.

۳۱ـ گزینه «۲» با استفاده از قانون ۱۰۰% در تحلیل حساسیت تغییر در جواب پایه‌ای را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{۱/۵-۱/۴۱}{۱/۳۸}+\frac{۱/۵-۱/۴۳۳}{۰/۲۴}+\frac{۱/۷۵-۱/۷}{۰/۱۱}<۱$$

پس پایه‌ی بهینه تغییر نمی‌کند و فقط مقدار بهینه ممکن است تغییر کند.

میزان تغییر در تابع هدف را در شرایط قدیم و جدید محاسبه می‌کنیم:

$$Z_{\text{قدیم}}=۱/۴۱۶(۰)+۱/۴۳۳(۰)+۱/۸۵(۵۱۲)+۲/۱۸۳(۰)+۱/۷(۵۱۲)$$

$$\Rightarrow\ Z_{\text{جدید}}-Z_{\text{قدیم}}=۱/۷۵(۵۱۲)-۱/۷(۵۱۲)=۲۵/۶$$

$$Z_{\text{جدید}}=۱/۵(۰)+۱/۵(۰)+۱/۸۵(۵۱۲)+۲/۱۸۳(۰)+۱/۷۵(۵۱۲)$$

۳۲ـ گزینه «۱» در سیمپلکس همزاد از یک نقطه‌ی نشدنی و بهینه به یک نقطه‌ی شدنی بهینه می‌رسیم. پس شرط تعلق وجود ندارد.

۳۳ـ گزینه «۲» تابع دوگان $w=۲y_۱+y_۲+۴y_۳$ است. مقدار بهینه تابع هدف مسأله اولیه $z^*=۱۲$ است و به ازای گزینه (۲) داریم: $w^*=۱۲$. چون مقادیر تابع هدف برابرند، پس گزینه ۲ جواب بهینه دوگان است.

۳۴ـ گزینه «۱» محدودیت‌ها به صورت $\geq$ هستند و ضرایب متغیرها در همه محدودیت‌ها نامنفی می‌باشند. بنابراین متغیرها هر مقدار مثبت و بسیار بزرگ را می‌توانند اختیار کنند یعنی فضای شدنی نامتناهی است. همچنین هدف ماکزیمم‌سازی است و ضرایب متغیرها در تابع هدف مثبت می‌باشد. پس وقتی متغیرها هر مقدار مثبت و بسیار بزرگ را اختیار کنند، مقدار تابع هدف هر چقدر بخواهیم افزایش می‌یابد. یعنی مقدار بهینه تابع هدف نامتناهی است و در نتیجه مسأله دوگان نشدنی می‌باشد.

۳۵ـ گزینه «۴»

$$(\sum_{i=۱}^{m}a_{ij}x_i\geq N)\times y_j\Rightarrow\sum_{i=۱}^{m}a_{ij}x_iy_j\geq Ny_j\qquad \text{for}\quad j=۱,\dots,n.\quad\Rightarrow\sum_{j=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{m}a_{ij}x_iy_j\geq N\sum_{j=۱}^{n}y_j\qquad :(۱)$$

$$(\sum_{j=۱}^{n}a_{ij}y_j\leq M)\times x_i\Rightarrow\sum_{j=۱}^{n}a_{ij}y_jx_i\leq Mx_i\qquad \text{for}\quad i=۱,\dots,m.\Rightarrow\sum_{j=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{m}a_{ij}x_iy_j\leq M\sum_{i=۱}^{m}x_i\qquad :(۲)$$

می‌دانیم $\sum_{i=۱}^{m}x_i=۱,\ \sum_{j=۱}^{n}y_j=۱$ بنابراین خواهیم داشت: (۱) و (۲) $\Rightarrow N\leq\sum_{j=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{m}a_{ij}x_iy_j\leq M$

۳۸ـ گزینه «۲» قید دوگان مربوط به متغیر $y_۳$ عبارت است از: $۰x_۱+۲x_۲=-۱$، بنابراین خواهیم داشت: $x_۲=-\frac{۱}{۲}$ و فقط گزینه (۲) صحیح است.

۳۹ـ گزینه «۳» با توجه به توضیحات گفته شده در مورد سیمپلکس دوگان، در این روش اگر تمام عناصر یک سطر مثبت و فقط سمت راست منفی باشد، دوگان نامتناهی و اولیه نشدنی است.

۴۰ـ گزینه «۱» با استفاده از قانون صددرصد داریم: $\frac{۰/۵}{۲}+\frac{۰/۲}{۱}+\frac{۰/۳}{۱}<۱$ پس پایه فعلی می‌ماند.

۴۱ـ گزینه «۲»

روش اول: اگر $\text{Min}\ z = Cx$ $\text{s.t.}\ Ax \ge b,\ x \ge 0$ جواب بی‌کران داشته باشد، در این صورت مسأله دوگان آن یعنی $\text{Max}\ w = yb$ $\text{s.t.}\ yA \le c,\ y \ge 0$ نشدنی است، با تغییر b فضای شدنی دوگان تغییری نخواهد کرد. پس با تغییر b مسأله ثانویه جواب بهینه متناهی یا نامتناهی نخواهد داشت و در نتیجه مسأله اولیه جواب بهینه متناهی اختیار نخواهد کرد، زیرا اگر این اتفاق رخ دهد دوگان نیز بهینه متناهی پیدا خواهد کرد و در نتیجه جواب شدنی خواهد داشت.

روش دوم: سیستم $\begin{cases} AX \ge b \\ x \ge 0 \end{cases}$ بی‌کران است پس سیستم همگن نظیر آن یعنی $\begin{cases} Ad \ge 0 \\ d \ge 0 \end{cases}$ جواب غیرصفر دارد، لذا با تغییر بردار b سیستم همگن و در نتیجه مجموعه جواب‌های سیستم همگن تغییر نمی‌کند. بنابراین با تغییر b فضای موجه $\begin{cases} AX \ge b \\ x \ge 0 \end{cases}$ همچنان بی‌کران خواهد ماند.

۴۲ـ گزینه «۱»

مسأله اولیه :

$$\begin{aligned} &\text{Min}\quad z = y \\ &\text{s.t} \\ &\begin{cases} y - Cx = 0 & \rightarrow u \\ 0y + Ax = b & \rightarrow V \end{cases} \\ &x \ge 0 \quad y \ \text{نامقید} \end{aligned}$$

مسأله ثانویه :

$$\begin{aligned} &\text{Max}\quad w = u \times 0 + Vb \\ &\text{s.t.} \\ &u + 0v = 1 \qquad \Rightarrow u = 1 \\ &-uC + vA \le 0 \\ &u \ \text{نامقید} \\ &V \ \text{نامقید} \end{aligned}$$

۴۳ـ گزینه «۴» با توجه به جدول مفروض سوال، مقدار دوال محدودیت‌های ۳ و ۴ و ۵ برابر است با:

$y_3 = -2/162 \qquad y_4 = 1/891 \qquad y_5 = 10/27$

همچنین طبق قضیه مکمل زائد $y_i.S_j = 0$، پس $S_3, S_4, S_5 = 0$، بنابراین محدودیت سوم و چهارم و پنجم به صورت مساوی در می‌آیند.

$$5x_2 - 2x_3 \ge 0 \xrightarrow{\ominus} -5x_2 + 2x_3 \le 0 \rightarrow -5x_2 + 2x_3 + \cancel{S_3}^{\,0} = 0$$

$$5x_1 - 3x_3 \ge 0 \xrightarrow{\ominus} -5x_1 + 3x_3 \le 0 \rightarrow -5x_1 + 3x_3 + \cancel{S_4}^{\,0} = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 4000 \rightarrow 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + \cancel{S_5}^{\,0} = 4000$$

۴۴ـ گزینه «۲» دوگان را می‌نویسیم :

$$\begin{aligned} &\text{Min}\ w = 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ &\text{s.t.} \\ &y_1 + 2y_2 \ge 2 \\ &2y_1 - y_3 \ge 2 \\ &-y_2 + y_3 \ge 2 \\ &y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن سه معادله به صورت تساوی $\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 2 \\ 2y_1 - y_3 = 2 \\ -y_2 + y_3 = 2 \end{cases}$ و حل دستگاه داریم $y_1 = 2, y_2 = 0, y_3 = 2$ ملاحظه می‌شود که $(2,0,2)$ نقطه شدنی هر دو مسأله اولیه و ثانویه است پس این نقطه، نقطه‌ی بهینه است $Z^* = W^* = 8$.

۴۵ـ گزینه «۱» جدول اول سیمپلکس به صورت زیر است:

	…	x_j	…	S_1	…	S_m
	…	$-C_j < 0$	…	0	…	0
s_1		$a_{1j} < 0$	…	1	…	0
				0		
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
s_m		$a_{mj} < 0$	…	0	…	1

متغیر x_j شرط ورود به پایه را داراست ولی متغیر خروجی نداریم، یعنی فضای جواب و مقدار بهینه تابع هدف بی‌کران هستند. (با فرض max سازی بودن مسأله)

۴۶ـ گزینه «۲» چون جواب بهینه $x^* = (x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{1}{15}, x_3 = 0)$ در این قید صدق نمی‌کند، پس با افزودن این قید به مسأله جواب بهینه تغییر می‌کند.

۴۷ـ گزینه «۲» مسأله دوگان به صورت $\begin{array}{l}\text{Max } w = yC^T \\ \text{s.t.} \\ yA \le c \\ y \ge 0\end{array}$ و یا به طور معادل $\begin{array}{l}\text{Max } w = y.c^T \\ \text{s.t.} \\ Ay \le c^T \\ y \ge 0\end{array}$ است. پس $\overline{x}$ جواب موجه مسأله اولیه و دوگان است، پس جواب بهینه هر دو است.

۴۸ـ گزینه «۳» در جدول نهایی روش سیمپلکس، اعداد روبرو متغیرهای کمکی y^* می‌باشند. $y^* = \begin{pmatrix} \overset{S_1}{0} & \overset{S_2}{0} & \overset{S_3}{-2} \end{pmatrix}$

۴۹ـ گزینه «۴» در این سؤال منظور از مرحله اول سیمپلکس همان فاز I از روش دو فازی است. مسأله فاز I به صورت مقابل است:

$$\begin{array}{l}\text{Min } x_0 = R_1 + \dots + R_m \\ \text{s.t.} \\ \quad Ax + IR = b \\ \quad x, R \ge 0\end{array} \quad ; \quad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}$$

فرض کنیم $y_1, \dots, y_m$ متغیرهای مسأله دوگان باشند. جدول اول فاز I البته بعد از به روزآوری پایه‌ها به صورت زیر است.

	$x_1 \dots x_n$	R_1	$\dots$	R_m	
x_0		0	$\dots$	0	$\sum_{i=1}^{m} b_i$
R_1					b_1
$\vdots$	A		I		$\vdots$
R_m					b_m

برای یافتن مقادیر متغیرهای دوگان داریم: $y = C_B B^{-1} = (1, \dots, 1)\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (1, \dots 1)$

در نتیجه $y_1 = \dots = y_m = 1$ پس در این مرحله همه متغیرهای مسأله دوگان ۱ هستند. در مراحل بعدی تا پایان فاز I متغیرهای مصنوعی دو حالت زیر را دارند.

الف) در پایه هستند: بنابراین برای این متغیرها $z_j - c_j = 0$ و چون $c_j = 1$ بنابراین $y_j = z_j = 1$.

ب) خارج پایه هستند: برای این متغیرها $z_j - c_j < 0$ و چون $c_j = 1$ پس $y_j = z_j < 1$.

به طور خلاصه در طول فاز I برای مسأله ذکر شده در صورت سؤال مقادیر متغیرهای مسأله دوگان کوچکتر یا مساوی ۱ هستند.

۵۰ـ گزینه «۱» افزایش تعداد محدودیت‌ها هیچگاه فضای شدنی را افزایش نمی‌دهد.

۵۱ـ گزینه «۳»

$$\begin{array}{ll} P: \text{Min } Z = CX - b^T y & \\ \text{s.t.} & \\ (1)\ AX \ge b & : u \\ (2)\ -A^T Y \ge -C^T & : v \\ \quad X, Y \ge 0 & \end{array} \xrightarrow{\text{دوگان}} \begin{array}{l} D: \text{Max } w = b^T u - CV \\ \text{s.t.} \\ (1)\ uA \le C \\ (2)\ -VA^T \le -b^T \\ \quad u, v \ge 0 \end{array}$$

قیود (۱) مسأله P معادل قیود (۲) مسألهD هستند و قیود ۲ مسأله p معادل قیود ۱ مسأله D هستند و $Z = -W$. لذا ناحیه شدنی هر دو مساله یکسان می‌باشند که یا هر دو مسأله D,P نشدنی هستند و یا هردو شدنی. اگر هر دو شدنی باشند، جواب بهینه متناهی و برابر خواهند داشت، یعنی $Z^* = W^*$ و چون از قبل داریم $Z^* = -W^*$، پس: $Z^* = W^* = 0$.

۵۲ـ گزینه «۴» x_1 یک متغیر پایه‌ای است و تغییر در ضریب هزینه آن می‌تواند روی $z_j - c_j$ متغیرهای غیرپایه‌ای اثر گذار باشد:

$$z_{s_2} - c_{s_2} = (3, 0, 5+a)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} - 0 = 1 - \frac{5}{6} - \frac{a}{6} = \frac{1}{6} - \frac{a}{6} \geq 0 \to a \leq 1$$

$$z_{s_3} - c_{s_3} = (3, 0, 5+a)\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix} - 0 = -2 + \frac{25+5a}{6} = \frac{13+5a}{6} \geq 0 \to a \geq -\frac{13}{5}$$

پس: $-\frac{13}{5} \leq a \leq 1$ و می‌توان گفت: $-1 \leq a \leq 1$.

۵۴ـ گزینه «۲» ابتدا جواب بهینه را می‌یابیم:

$$X_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_4 = 20 \\ x_2 = 30 \\ x_3 = 10 \end{cases}$$

و بقیه متغیرها صفر هستند.

اگر بخواهیم با افزودن قید $-3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \geq b_4$ بردارهای پایه بهینه عوض نشوند، باید جواب بهینه در این قید صدق کند :

$$-3(0) + 2(30) - (10) + (20) - 0 \geq b_4 \to b_4 \leq 70$$

۵۵ـ گزینه «۴» حساسیت z نسبت به تغییرات جزئی b_3 (یعنی $\frac{\partial z}{\partial b_3}$) همان مقدار بهینه متغیر سوم مسأله دوگان (y_3^*) است.

$$y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*) = C_B B^{-1} = (-3, -2, -1)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 3, -6)$$

بنابراین خواهیم داشت: $\frac{\partial z}{\partial b_3} = y_3^* = -6$.

۵۶ـ گزینه «۳» چون متغیر x_3 متغیر پایه‌ای است. پس تغییر در ضریب هزینه آن می‌تواند باعث تغییر در $Z_j - C_j$ متغیرهای غیرپایه‌ای گردد:

$$Z_1 - C_1 = (-3, -2, \alpha - 1)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 = -\alpha - 3 \leq 0 \to \alpha \geq -3$$

$$Z_5 - C_5 = (-3, -2, \alpha - 1)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = \alpha - 8 \leq 0 \to \alpha \leq 8$$

بنابراین خواهیم داشت: $-3 \leq \alpha \leq 8$.

۵۷ـ گزینه «۲» مقادیر دوگان یا شبه قیمت‌ها به صورت روبرو محاسبه می‌شوند:

$$y^{*T} = C_B B^{-1} = (-3, -2, -1)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 3, -6)$$

۵۸ـ گزینه «۳» دوگان مسأله P به صورت زیر به دست می‌آید و آن را D می‌نامیم.

$$p:\text{Min } Z=CX \quad \text{s.t.} \quad Ax=b \qquad\qquad D:\text{Max } Z=yb \quad \text{s.t.} \quad yA=C$$

اگر بتوان C را برحسب ترکیب خطی سطرهای ماتریس A نوشت، یعنی دستگاه yA=C جواب شدنی دارد. طبق صورت مسأله، مسأله P هم حل‌شدنی دارد. پس مسأله D,P هر دو شدنی هستند و باید حل بهینه محدود و برابر داشته باشند. (مراجعه به شدنی بودن معادله ۲ در لم فارکاس)

۵۹ـ گزینه «۱» مقدار بهینه تابع هدف مسأله اولیه بی‌کران است و مسأله دوگان نشدنی خواهد بود.

۶۰ـ گزینه «۱» با توجه به محدوده تغییرات $C_۱$ داریم: $۱ \le C_۱ \le ۲۰$ ، یعنی تغییر $C_۱$ در این محدوده بهینگی را بهم نمی‌زند و چون مقدار جدید $C_۱$ برابر ۵ می‌باشد، جواب قبلی همچنان بهینه باقی می‌ماند.

۶۱ـ گزینه «۲» الگوریتم سیمپلکس می‌تواند با هر پایه موجه که لزوماً ماتریس همانی نیست، شروع به حل کند.

۶۲ـ گزینه «۲» مقدار بهینه تابع هدف مسأله ماکزیمم‌سازی یک کران پایین برای تابع هدف دوگان به ازای تمام نقاط شدنی مسأله ثانویه می‌باشد. چون مقدار بهینه تابع هدف مسأله ماکزیمم‌سازی مثبت است پس مقادیر تابع هدف مسأله دوگان به ازای نقاط شدنی مسأله D نیز مثبت خواهد بود.

۶۳ـ گزینه «۱» در دستگاه Ax=b اگر m>n (یعنی تعداد معادلات بیشتر از تعداد متغیرها است) می‌توان فرض کرد: $\text{Rank}(A)=n$ ، در این صورت دستگاه را به صورت زیر افراز می کنیم:

$$\begin{bmatrix} A_۱ \\ A_۲ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \end{bmatrix}$$ که در آن $(A_۱)_{n\times n}$ و $\text{Rank}(A_۱)=n$ و $(A_۲)_{(m-n)\times n}$.

اکنون با اعمال سطری مقدماتی ماتریس، $A_۱$ را به I و $A_۲$ را به O تبدیل می‌کنیم، پس دستگاه به شکل $\begin{bmatrix} I \\ o \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} b'_۱ \\ b'_۲ \end{bmatrix}$ تبدیل می‌شود. اگر $b'_۲=o$ دستگاه جواب منحصر به فرد دارد و اگر $b'_۲ \ne o$ دستگاه جواب ندارد. حال اگر $\text{Rank}(A)<n$ در این صورت نیز دستگاه ممکن است جواب داشته باشد و یا نداشته باشد.

۶۴ـ گزینه «۳» مسأله دارای n متغیر است که در هر نقطه شدنی می‌تواند تمام مؤلفه‌ها مثبت باشند.

۶۵ـ گزینه «۳» چون $\text{Rank}(A,b)>\text{Ran}(A)$ ، پس مسأله اوّلیه نشدنی است و مسأله ثانویه نشدنی یا بی‌کران می‌شود.

۶۷ـ گزینه «۲» برای اینکه جواب بهینه تغییر نکند باید مقادیر سمت راست در جدول نهایی شدنی باقی بمانند. یعنی:

$$\bar{b}=B^{-۱}b \ge ۰ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۱}{۳} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۳} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \\ b_۳ \end{bmatrix} \ge o \Rightarrow \begin{cases} b_۱ - \frac{۱}{۳} b_۲ \ge ۰ \\ \frac{۱}{۳} b_۲ \ge ۰ \\ b_۳ \ge ۰ \end{cases} \Rightarrow ۳b_۱ \ge b_۲ \ge ۰ \quad ; \quad b_۳ \ge ۰$$

۶۸ـ گزینه «۴» برای متغیرهای غیرپایه‌ای $x_۱$ و $x_۴$ باید داشته باشیم $Z_j - C_j \ge ۰$ پس:

$$Z_۱ - C_۱ = C_B B^{-۱} a_۱ - C_۱ = (۰, C_۲, ۰) \begin{pmatrix} ۱ & \frac{-۱}{۳} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۳} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} - C_۱ \ge ۰ \Rightarrow C_۲ \ge ۳C_۱$$

$$Z_۴ - C_۴ = (۰, C_۲, ۰) \begin{pmatrix} ۱ & \frac{-۱}{۳} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۳} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} - ۰ \ge ۰ \Rightarrow C_۲ \ge ۰$$

۶۹ـ گزینه «۳» می‌دانیم $C_B B^{-1}$ مقادیر متغیرهای مسأله ثانویه است. چون $S_i^* y_i^* = 0,\ S_i^* = 0$ پس مقدار y_i^* ممکن است غیرصفر باشد.

۷۰ـ گزینه «۱» با توجه به قضیه قوی دوگان: در حالت بهینگی $z^* = w^*$ می‌باشد که تفاوت آنها مقدار صفر است. اگر یکی از مسائل بهینه نامحدود باشد، دیگری نشدنی است و اختلاف ∞ است.

۷۱ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه ستون a^K, a^J نسبت به هم وابستگی خطی دارند، بنابراین نمی‌توانند همزمان در پایه قرار گیرند، از این رو حداقل یکی از آن‌ها صفر بوده و حاصل‌ضرب آنها صفر خواهد شد. $x_K . x_J = 0$

۷۲ـ گزینه «۱» اگر ضریب متغیری در محدودیت‌های $\leq$ صفر یا منفی باشد، نتیجه می‌گیریم که فضا در راستای متغیر فوق بیکران است. همچنین اگر ضریب این متغیر در تابع هدف مثبت باشد، تابع هدف هم بی‌کران است.

۷۳ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه مسأله اولیه نشدنی می‌باشد، طبق روابط مابین مسأله اولیه و ثانویه، مسأله ثانویه یا بی‌کران است یا نشدنی.

۷۴ـ گزینه «۲» منظور از ناسازگاری، موجه نبودن مسأله می‌باشد. با توجه به روابط مابین مسأله اولیه و ثانویه، مسأله اولیه می‌تواند بدون جواب موجه و یا دارای مقدار تابع هدف نامحدود باشد.

۷۵ـ گزینه «۲» با استفاده از قضیه مکمل زائد مقادیر متغیرهای x_1 و x_2 به شکل زیر محاسبه می‌شوند.

$$\text{طبق قضیه مکمل زائد} \Rightarrow y_i . s_i = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 28 \\ 2x_1 - x_2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

۷۶ـ گزینه «۲»

$$\text{مزدوج مسأله} \Rightarrow \text{Min}\ z = 8x_1 + 15x_2$$

$$\text{s.t}: x_1 + 2x_2 \geq 3$$

$$4x_1 - x_2 \geq 4 \xrightarrow[y_i.s_i=0 / s_2, s_3 = 0]{\text{طبق قضیه مکمل زائد}} \begin{cases} 4x_1 - x_2 = 4 \\ x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 0$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2\ \text{نامقید}$$

۷۷ـ گزینه «۴» شرط بهینگی مسأله اولیه این است که مسأله مزدوج شدنی گردد.

۷۸ـ گزینه «۳» قضیه اصلی برنامه‌ریزی خطی در خصوص جواب مسأله به بحث می‌پردازد که این مسأله یا دارای جواب محدود است یا نامحدود و یا جواب موجه ندارد.

۷۹ـ گزینه «۲» شرط بهینگی مسأله اولیه، شدنی بودن دوگان است.

۸۰ـ گزینه «۳» در جدول دوال سیمپلکس به علت غیرمنفی بودن $z_j - c_j$ در مسأله Max سازی، در هر مرحله یک جواب قابل قبول برای مسأله D حاصل می‌شود.

۸۲ـ گزینه «۲» مسأله زیر مفروض است:

$$P: \text{Max}\ Z = C^T x \quad \text{s.t.} \quad Dx \leq b \ ;\ b \geq 0,\quad x \geq 0$$

که $k < m, D_{m\times k}$ می‌باشد. با افزودن متغیرهای کمکی به محدودیت‌ها به مسأله معادل فوق می‌رسیم: $p: \text{Max}\ Z = C^T x + 0s \quad \text{s.t.} \quad Dx + IS = b,\ x, s \geq 0$ که در آن

$A = [D, I]_{m\times(m+k)}, I_{m\times m}$. دوگان مسأله p به صورت مقابل است: $D: \text{Min}\ w = yb \quad \text{s.t.} \quad yD \geq C^T,\ yI \geq 0,\ y:\text{نامقید}$ ملاحظه می‌شود که $y \geq 0$. پس متغیرهای دوگان نامنفی هستند.

۸۳ـ گزینه «۱» با توجه به توضیح سؤال قبل می‌دانیم مسأله p به صورت مقابل است:

$$P: \text{Max } Z = C^T x \quad \text{s.t.} \quad Dx + IS = b, \quad x, s \geq 0$$

با توجه به اینکه $b \geq 0$ پس با در نظر گرفتن $x = 0, s = b$ به جواب شدنی پایه ای $x(x = 0, s = b)$ می‌رسیم.

۸۴ـ گزینه «۱» با توجه به توضیح سوال ۸۲ می‌دانیم $A = [D, I]_{m \times (m+k)}$ و رتبه ماتریس A برابر m است، زیرا رتبه I برابر m است.

۸۵ـ گزینه «۲» برای مسأله قدیم داریم:

$$x^* = B^{-1} b \qquad y^* = C_B B^{-1} \qquad Z^* = C_B B^{-1}.b$$

اگر فقط محدودیت اول دوبرابر شود، درایه‌های سطر اول از ماتریس B دو برابر می‌شود و درایه‌های ستون اول ماتریس معکوس پایه $\frac{1}{2}$ برابر خواهند شد.

$$B'_{\text{جدید}} = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & \cdots & 2a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1'}_{\text{جدید}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \frac{1}{2} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2} a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad b'_{\text{جدید}} = \begin{bmatrix} 2b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

پس برای مسأله جدید خواهیم داشت:

$$x^{**} = B^{-1}_{\text{جدید}}.b_{\text{جدید}} = B^{-1} b = x^* \qquad y^{**} = C_B B^{-1}_{\text{جدید}} = (\tfrac{1}{2} y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*)$$

$$Z^{**} = C_B.B^{-1}_{\text{جدید}}.b_{\text{جدید}} = C_B B^{-1} b = Z^*$$

۸۶ـ گزینه «۳» برای اینکه جواب بهینه تغییر نکند باید مقادیر سمت راست در جدول بهینه نهایی نسبت باقی بمانند.

$$\bar{b} = B^{-1} b \geq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ b_2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 - \frac{b_2}{2} \geq 0 \\ \frac{b_2}{2} \geq 0 \\ -\frac{b_2}{2} + 5 \geq 0 \end{pmatrix} \rightarrow 0 \leq b_2 \leq 10$$

۸۷ـ گزینه «۱» با تغییر ضرایب هزینه ممکن است گوشه بهینه تغییر کند، ولی نقطه بهینه قبلی یعنی x^* همچنان نقطه‌ای موجه بـرای مسـأله جدیـد اسـت پس: $w' \geq c' x^*$.

۸۸ـ گزینه «۲»

$$\begin{array}{l} \text{Max } -Z = C^T x \\ \text{S.t.} \\ \quad Ax \leq -C \\ \quad x \leq 0 \end{array} \equiv \begin{array}{l} \text{Min } Z = -C^T x \\ \text{S.t.} \\ \quad Ax \leq -C \\ \quad x \leq 0 \end{array} \xrightarrow{\text{دوگان}} \begin{array}{l} \text{Max } W = -C^T y \\ \text{S.t.} \\ \quad A^T y \geq -C \\ \quad y \leq 0 \end{array} \equiv \begin{array}{l} \text{Max } W = C^T y \\ \text{S.t.} \\ \quad A^T y \leq C \\ \quad y \geq 0 \end{array}$$

۸۹ـ گزینه «۴» در روش سیمپلکس همزاد (Dual simplex) هدف از آزمون تست، تضمین حفظ شرط بهینگی در جدول بعدی است.

۹۰ـ گزینه «۱» با تبدیل محدودیت‌های نامساوی به تساوی فضای شدنی کوچکتر می‌شود و با کوچک شدن فضای شدنی مقدار بهینـه تـابع هـدف مسـأله جدید بهتر نخواهد شد (یعنی یا بدتر می‌شود و یا تغییر نمی‌کند).

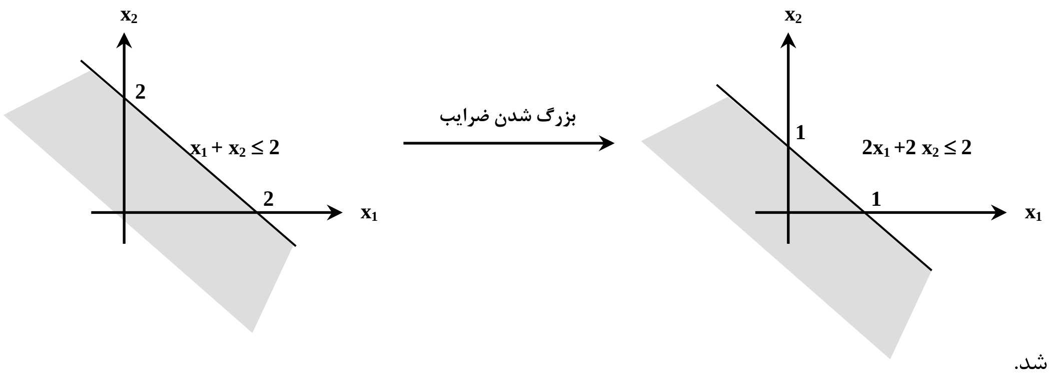
فضای شدنی یک نیم فضا است. فضای شدنی یک خط است.

۹۱ـ گزینه «۴» مسأله دوگان به صورت مقابل است:

$$\text{Max } w = ۱۵y_۱$$
$$\text{s.t.}$$
$$\left.\begin{array}{l} y_۱ \le -۲ \\ -y_۱ \le ۳ \\ y_۱ \le ۵ \\ y_۱ \le ۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ناحیه شدنی دوگان}} -۳ \le y_۱ \le -۲ \Rightarrow -۴۵ \le ۱۵y_۱ \le -۳۰$$

پس $w^* = -۳۰$.

۹۲ـ گزینه «۳» با تغییر داده شده، فضای شدنی کوچکتر می‌شود و در نتیجه مقدار تابع هدف بهتر نمی‌شود یعنی $Z_۲ \le Z_۱$.



فضای شدنی کوچکتر شد.

۹۳ـ گزینه «۲» با توجه به غیرتباهیده بودن جواب بهینه داریم: $x_۳^* > ۰, x_۲^* > ۰, x_۱^* > ۰$ و بنا به قضیه مکمل زائد $x_i^* . v_i^* = ۰$ که v_i^* متغیر کمکی قیود مسأله دوگان در جواب بهینه است و داریم $v_۳^* = v_۲^* = v_۱^* = ۰$. یعنی محدودیت ۱و۲و۳ در دوگان به صورت تساوی هستند.

۹۴ـ گزینه «۳» با این فرض که ماتریس زیر متغیرهای $x_۴$ و $x_۵$ و $x_۶$ در جدول بهینه ماتریس $B^{-۱}$ است، داریم:

$$\bar{b} = B^{-۱}b \ge ۰ \rightarrow \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_۱ \\ ۱۰ \\ ۵ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_۱ - ۱۰ \ge ۰ \\ ۱۰ \\ ۱۵ \end{pmatrix} \rightarrow b_۱ \ge ۱۰$$

۹۵ـ گزینه «۳» بنابر قضیه ضعیف دوگان برای دو مسأله مزدوج اگر x^* جواب بهینه مسأله Min و y° یک جواب قابل قبول مسأله Max باشد آنگاه خواهیم داشت: $W(y^\circ) \le Z(x^*)$

۹۶ـ گزینه «۲»

$$\begin{array}{l} P_A : \text{Max } \; Cx \\ \quad \text{S.t} \\ \qquad Ax \le b \\ \qquad x \ge ۰ \end{array} \xrightarrow{\text{دو گان}} \begin{array}{l} D_A : \text{Min } \; yb \\ \quad \text{s.t.} \\ \qquad yA \ge C \\ \qquad y \ge ۰ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P_B : \text{Max } \; CX \\ \quad \text{s.t} \\ \qquad Ax \le d \\ \qquad x \ge ۰ \end{array} \xrightarrow{\text{دو گان}} \begin{array}{l} D_B : \text{Min } \; yd \\ \quad \text{s.t} \\ \qquad yA \ge C \\ \qquad y \ge ۰ \end{array}$$

چون مسأله P_A جواب بهینه محدود دارد پس D_A نیز جواب بهینه محدود خواهد داشت، در نتیجه مسأله D_A جواب شدنی دارد و چون ناحیه شدنی مسائل D_A و D_B یکسان است، پس مسأله D_B نیز جواب شدنی دارد. از این رو چون P_B و D_B هر دو جواب شدنی دارند، پس P_B و D_B هر دو جواب بهینه محدود دارند.

۹۷ـ گزینه «۴» برای اینکه بتوان یک مسأله را به روش سیمپلکس دوگان حل کرد باید شرط بهینگی در جدول اول سیمپلکس برقرار باشد.

۹۸ـ گزینه «۳» مسأله ثانویه نشدنی است $\Rightarrow$ مقدار بهینه تابع هدف مسأله اولیه بی‌کران

مسأله ثانویه نشدنی یا مقدار بهینه تابع هدف ثانویه بی‌کران است $\Rightarrow$ مسأله اولیه نشدنی

۹۹ـ گزینه «۱» قید دوم مسأله دوگان به صورت زیر است:

$$y_1 - 2y_2 + v_2 = 2 \xrightarrow{y_1^*=1, y_2^*=3} v_2^* = 7 \xrightarrow[\text{قضیه مکمل زاید}]{x_2^* . v_2^* = 0} x_2^* = 0$$

v_2 متغیر کمکی قید دوم مسأله دوگان است.

۱۰۰ـ گزینه «۳» افزایش هر واحد به منبع ۱ معادل ۹ واحد سودآوری دارد.

۱۰۱ـ گزینه «۲» با توجه به پایه بهینه $B = (a_1, a_2, a_3)$ متغیر x_2 در مسأله اولیه پایه‌ای است، پس محدودیت دوم در مسأله دوگان از نقطه بهینه می‌گذرد و متغیر کمکی نظیر محدودیت دوم مسأله دوگان یعنی W_{S_2} صفر خواهد بود.

۱۰۲ـ گزینه «۱» می‌بایست $Z_6 - C_6 \geq 0$ بنابراین خواهیم داشت:

$$Z_6 - C_6 = (C_1, C_2, C_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - B = (C_1, C_2, C_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - B = C_1 - 3C_2 + 3C_3 - B \geq 0 \Rightarrow B \leq C_1 - 3C_2 + 3C_3$$

۱۰۳ـ گزینه «۲» مسأله اصلی نشدنی و مسأله دوگان جواب بهینه بی‌کران دارد، پس گزینه «۴» نیز صحیح است.

۱۰۴ـ گزینه «۱» در روش سیمپلکس مقادیر Z از یک مرحله به مرحله بعد کاهش می‌یابد (مسأله Min) و یا بدون تغییر می‌ماند تا به کمترین مقدار خود، یعنی Z^* برسد:

$$Z \searrow Z^*$$

در روش سیمپلکس دوگان مقادیر Z' از یک مرحله به مرحله بعد زیاد می‌شود (مسأله $\max$) و یا بدون تغییر می‌ماند تا به بیشترین مقدار خود یعنی Z^* برسد:

$$Z' \nearrow Z^*$$

پس برای مسأله مینیمم‌سازی در سیمپلکس معمولی مقدار تابع هدف Z از کران‌های بالای Z^* به آن نزدیک می‌شود، ولی در سیمپلکس ثانویه مقادیر تابع هدف Z' از کران‌های پایین Z^* به آن نزدیک می‌شود، پس: $Z' \leq Z$.

۱۰۵ـ گزینه «۴» با تغییر متغیر $x'_j = x_j - 1000$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\text{Max} \quad z' = 12(x'_1 + 1000) + 20(x'_2 + 1000) + 18(x'_3 + 1000) + 40(x'_4 + 1000) \\
&\text{s.t} \quad 6x'_1 + 9x'_2 + 7x'_3 + 10x'_4 \leq 27800 \\
&\qquad x'_1 + x'_2 + 4/2x'_3 + 4x'_4 \leq 8000 \\
&\qquad x'_j \geq 0 \quad j = 1 \text{ تا } 4
\end{aligned}$$

در مسأله جدید ضرایب متغیرها در تابع هدف و محدودیت‌ها ثابت می‌ماند و فقط مقادیر سمت راست تغییر کرده که تأثیری بر بهینگی نداشته و متغیرهای x'_2 و x'_4 پایه‌ای باقی می‌مانند و متغیرهای x'_1 و x'_3 غیرپایه‌ای و صفر خواهند بود.

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = x'_3 = 0 \\ x'_j = x_j - 1000 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_3 = 0 + 1000 = 1000$$

۱۰۶ـ گزینه «۲» زیرا جواب بهینه مسأله اولیه عوض می‌شود.

۱۰۷ـ گزینه «۲»

$$(y_1, y_2, y_3) = (C_{B_1}, C_{B_2}, C_{B_3})B^{-1} \; ; \quad (1,1,1) = (C_{B_1}, C_{B_2}, C_{B_3})\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad C_{B_1} = 1 \qquad C_{B_2} = 0 \qquad C_{B_3} = 1$$

۱۰۸ـ گزینه «۳» x_2 و x_3 در پایه می‌باشند پس s_2 و s_1 و x_1 غیرپایه‌ای می‌باشند و مقدار صفر را می‌پذیرند و داریم:

$$\left.\begin{array}{r} x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_2 + x_3 = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{array}$$

مقادیر x_3, x_2 مخالف صفر است پس طبق قضیه مکمل زائد $x_j.s'_j = 0$ باشد که با توجه به پایه‌ای بودن متغیرهای x_3, x_2، s'_2, s'_3 از متغیرهای مازاد محدودیت دوال برابر با صفر خواهند شد.

محدودیت‌های دوال دوم و سوم مسأله $\begin{cases} y_1 + 3y_2 = 3 \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 1/5 \\ y_2 = 0/5 \end{array}$

۱۰۹ـ گزینه «۲» به نکات زیر توجه کنید:

۱) هر یک از مسائل اولیه یا ثانویه دارای جواب بهینه محدود باشد، دیگری نیز جواب بهینه محدود خواهد داشت، پس حالات B و C امکان‌پذیر نیستند.

۲) اگر یکی از مسائل اولیه یا ثانویه جواب بهینه نامحدود داشته باشد، مسأله دیگر غیرموجه (نشدنی) است، پس حالات D و E امکان‌پذیر نیستند.

۳) اگر یکی از مسائل اولیه یا ثانویه نشدنی باشد، مسأله دیگر نشدنی است و یا بهینه نامحدود دارد، پس حالت G امکان‌پذیر نیستند.

۱۱۰ـ گزینه «۲» حالات امکان‌پذیر I,H,F,A هستند و حالات E, G, C, D, B امکان‌پذیر نیستند.

۱۱۱ـ گزینه «۴» می‌دانیم $S_2^* = 12$ یعنی در حالت بهینه ۱۲ واحد از منبع b_2 مصرف نشده است. پس اگر تا ۱۲ واحد از منبع b_2 را کم کنیم $(-12 \le \Delta \le 0)$ و یا به منبع b_2 اضافه کنیم $(\Delta > 0)$ در هر دو حالت پایه بهینه فعلی تغییر نمی‌کند، پس در مجموع $\Delta \ge -12$ است.

۱۱۲ـ گزینه «۲»

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 300 \\ x_2 + x_3 = 100 \\ x_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 80 \\ x_2^* = 90 \Rightarrow z^* = 7800 \\ x_3^* = 10 \end{cases}$$

برای بررسی درستی جواب بهینه، مقادیر بهینه متغیرهای دوگان را با استفاده از قضیه مکمل زائد می‌یابیم: $y_3^* = -120, y_2^* = -60, y_1^* = 50$ و در نتیجه خواهیم داشت: $w^* = 7800$.

۱۱۳ـ گزینه «۱» محدودیت سوم یک محدودیت فعال غیرزائد است، پس با حذف آن مقدار z^* افزایش می‌یابد.

۱۱۴ـ گزینه «۲» اگر y_2, y_1 متغیرهای مسأله دوگان باشند. داریم $y_2^* = 4, y_1^* = 3$. طبق قضیه مکمل زائد داریم: $y_2^* \times S_2^* = 0, y_1^* \times S_1^* = 0$.

پس: $S_2^* = S_1^* = 0$. (برای یافتن y_1 و y_2 کافی است دوگان را نوشته و محدودیت‌ها را می‌توان در فضای ۲ بعدی رسم کرد و محدودیت‌های فعال را یافت و مقدار آن‌ها را بدست آورد)

۱۱۵ـ گزینه «۱» قید دوم مسأله دوگان به صورت $2y_1 + 5y_2 \ge 20$ اگر V_2 متغیر کمکی این قید باشد.

$$2y_1 + 5y_2 - v_2 = 20 \xrightarrow{y_1^*=3,\, y_2^*=4} v_2^* = 6 \xrightarrow{v_2^* \times x_2^* = 0} x_2^* = 0$$

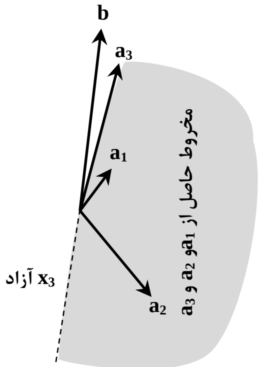
پس گزینه‌های ۲و۳و۴ غلط هستند.

۱۱۶ـ گزینه «۲» می‌دانیم جواب بهینه دوگان $C_B B^{-1} = (3,4)$ است. پس خواهیم داشت:

$$Z^* = C_B B^{-1} b = (3,4)\begin{pmatrix} 25 \\ 80 \end{pmatrix} = 395$$

۱۱۷ـ گزینه «۳» ابتدا مقادیر b_1 و b_2 و b_3 را می‌یابیم و سپس از رابطه $Z^* = C_B B^{-1} b$ استفاده می‌کنیم.

$$x^* = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 - b_3 = 2 \\ b_2 = 6 \\ -b_2 + b_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 4 \\ b_2 = 6 \\ b_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow z^* = C_B B^{-1} b = (0 \quad 3 \quad 2)\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = 34$$



۱۱۸ـ گزینه «۴» **روش اول:** مسأله دوگان به صورت: $\text{Min}\ \ w = 3y_1 + 10y_2$ است.

$$\text{S.t.}$$
$$(1): y_1 + 2y_2 \geq 3$$
$$(2): 3y_1 - 4y_2 \geq -2$$
$$(3): 2y_1 + 6y_2 = 6$$
$$y_1, y_2 \ \text{نامقید}$$

از محدودیت سوم دوگان داریم. $y_1 = 3 - 3y_2$ با قرار دادن در تابع هدف داریم. $w = 9 + y_2$ و چون y_2 نامقید است، پس اگر y_2 مقادیر منفی اختیار کند. می‌توان w را تا $-\infty$ کاهش داد. پس $w^* = -\infty$ و مسأله اولیه نشدنی است.

روش دوم: فضای ایجاب سیستم
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 10 \end{cases}$$
به صورت زیر است.
$$x_1, x_2 \geq 0 \ ; \ x_3 : \text{نامقید}$$

$b \notin$ مخروط ستون‌ها $\Rightarrow$ سیستم نشدنی است.

تذکر: x_3 نامقید است اگر آن را مقید کنیم به صورت $x_3 = x_3^+ - x_3^-$ می باشد پس در رسم فضای ایجاب علاوه بر a_3، $-a_3$ را هم باید رسم کرد.

۱۱۹ـ گزینه «۴» سیستم نشدنی باشد $(P) \Leftarrow (D)$ نشدنی یا بی‌کران است.

۱۲۰ـ گزینه «۴»

روش اول: مسأله دوگان به صورت مقابل است:

$$\text{Max} \quad Z = 50x_1 + 30x_2 + 10x_3$$
$$\text{S.t.}$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_2 = -5 \ \Rightarrow x_2 = -\dfrac{5}{2} < 0 \\ 4x_1 + x_3 = 6 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

ملاحظه می‌شود که دوگان نشدنی است، پس مسأله اولیه نشدنی یا بهینه نامحدود دارد.

روش دوم: با توجه به محدودیت‌ها متغیر y_2 می‌تواند تا $+\infty$ زیاد شود و چون ضریب y_2 در تابع هدف منفی است. پس با قرار دادن $y_1 = 5, y_3 = 10$ و $y_2 = +\infty$ در تابع هدف خواهیم داشت: $y_0^* = -\infty$.

۱۲۱ـ گزینه «۴» (p) مسأله بی‌کران است $\Leftarrow$ (D) نشدنی می‌باشد.

۱۲۲ـ گزینه «۲» می دانیم $Z^* = C_B B^{-1} b \ , \ x^* = B^{-1} b$. پس تغییر در بردار سمت راست b می‌تواند روی Z^*, x^* اثر بگذارد. برای اینکه متغیرهای اساسی و غیراساسی در جدول بهینه تغییر نکند، می‌بایست با تغییر مقادیر سمت راست، شدنی بودن جواب به هم نخورد:

$$B^{-1}b \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/5 & -0/5 \\ -0/5 & 0/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0/5 - 0/5a \\ 0/5 + 0/5a \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow -1 \leq a \leq 1$$

۱۲۳ـ گزینه «۴» چون تابع هدف ماکزیمم‌سازی است و $Z_1 - C_1 = 3 > 0$، پس x_1 شرط ورود به پایه را ندارد. اگر x_1 را وارد پایه کنیم، مقدار تابع هدف بدتر می‌شود. همچنین با ورود x_1 به پایه متغیر خروجی منحصر به فرد نیست. پس با ورود x_1 به پایه یک جواب اساسی تبهگن به دست می‌آید.

۱۲۴ـ گزینه «۳» با ورود x_1 و خروج x_2 یا x_3 به یک جواب پایه‌ای موجه مجاور که تباهیده است می‌رسیم.

با ورود S_1 و خروج x_3 به یک جواب پایه‌ای موجه مجاور می‌رسیم. با ورود S_1 و خروج x_2 به یک جواب پایه‌ای غیرموجه مجاور می‌رسیم.

با ورود S_2 و خروج x_3 به یک جواب پایه‌ای غیرموجه مجاور می‌رسیم. با ورود S_2 و خروج x_2 به یک جواب پایه‌ای موجه مجاور می‌رسیم.

بنابراین جدول داده شده دارای پنج جواب پایه‌ای مجاور است.

۱۲۵ـ گزینه «۳» **نکته:** اگر عدد سمت راست محدودیت i ام، یعنی b_i، به اندازه Δb_i آشفته شود، میزان تغییر تابع هدف $\Delta z = y_i^*.\Delta b_i$ است که y_i^* قیمت سایه‌ای منبع b_i است.

با توجه به سؤال ۱۵۸ داریم: $-1 \le a \le 1$ و عدد سمت راست قید دوم به اندازه $\Delta b_2 = a$ تغییر کرده است. در نتیجه $\Delta z = y_2^*.\Delta b_2$ و $y_2^* = 1$ پس: $\Delta z = a$، یعنی $-1 \le \Delta z \le 1$. بنابراین اگر عدد سمت راست قید دوم به اندازه a تغییر نماید، در این صورت تغییر تابع هدف عبارت است از: $\Delta z = a$، اگر a مثبت باشد z افزایش و اگر a منفی باشد z کاهش می‌یابد.

۱۲۶ـ گزینه «۴» در تعبیر اقتصادی، جواب مسأله ثانویه را می‌توان به عنوان بهایی که برای منابع قیدها پرداخت می‌گردد تفسیر نمود و چون $y_1^* = 4$، بنابراین برای تأمین هر واحد از منبع قید اول حداکثر می‌توان ۴ واحد پول پرداخت نمود.

۱۲۷ـ گزینه «۱» مقادیر متناظر با متغیرهای پایه‌ای اولین جدول سیمپلکس در سطر تابع هدف همان مقادیر بهینه متغیرهای دوگان هستند.

۱۲۸ـ گزینه «۲»

$$w^* = yb \xrightarrow{y=C_BB^{-1}} w^* = C_BB^{-1}b \xrightarrow{b\to\Delta b+b} w^{**} = C_BB^{-1}\Delta b + C_BB^{-1}b = w^* + \underbrace{C_BB^{-1}\Delta b}_{\text{اختلال}}$$

۱۲۹ـ گزینه «۲» در مسأله دوگان متغیر y_1 نامقید است، پس در مسأله دوگان قرار می‌دهیم $y_1 = y_1' - y_1'' \ge 0$. بنابراین مسأله دوگان دارای ۳ متغیر y_1' و y_1'' و y_2 است و از روش ترسیمی نمی‌توان آن را حل کرد.

تابع هدف مسأله دوگان عبارت است از: $\text{Min } w = 30y_1' - 30y_1'' + 40y_2$ که به دلیل وجود ضریب هزینه -30 جدول اول سیمپلکس شرایط بهینگی را ندارد، بنابراین نمی‌توان از سیمپلکس دوگان استفاده کرد.

دارای پایه همانی نیستیم و باید متغیر مصنوعی اضافه کنیم پس، از روش M بزرگ استفاده می‌کنیم.

۱۳۰ـ گزینه «۴» به ازای هر $B.F.S$ در مسأله اولیه یک جواب پایه‌ای (نه لزوماً شدنی) در مسأله ثانویه قابل محاسبه است (قضیه مکمل زائد) که مقادیر تابع هدف هر دو مسأله در این نقاط یکسان است.

۱۳۱ـ گزینه «۱» فرض کنیم جواب بهینه مسأله (۱) برابر صفر باشد $(\lambda = 0)$. اگر مسأله (۲) دارای جوابی شدنی مانند x° باشد، در این صورت $Ax^\circ \le b$ و در نتیجه $Ax^\circ - b \le 0$ که یک جواب شدنی برای مسأله (۱) به‌صورت $(x^\circ, \lambda = 1)$ به‌دست می‌آید، با این فرض که جواب بهینه مسأله (۱) عبارت‌است از: $\lambda = 0$ در تناقض است. پس اگر جواب بهینه مسأله (۱) برابر صفر باشد، مسأله (۲) نشدنی است.

۱۳۲ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. اگر میزان منبعی در حد مجاز خود تغییر کند، قیمت سایه‌ای آن ثابت می‌ماند، البته به شرط ثابت بودن سایر عوامل. پس باید محدوده مجاز تغییرات b_3 را بیابیم.

$$B^{-1}b \ge 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 - b_3 \ge 0 \\ -12 + b_3 \ge 0 \\ 9 - b_3 \ge 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_3 \le 24 \\ b_3 \ge 12 \\ b_3 \le 9 \end{cases}$$

محدوده‌های حاصله برای b_3 هیچ اشتراکی با هم ندارند. دلیل این موضوع آن است که جدول بهینه داده شده در صورت سؤال اشتباه است زیرا طبق این جدول مقادیر سمت راست جدول عبارتند از:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = -11 < 0$$

و جدول ارائه شده نشدنی است.

۱۳۳ـ گزینه «۳» دوگان مسأله LP_1 به‌صورت مقابل است:

$$\begin{aligned}&\text{Min } W_1 = b_1y_1 + b_2y_2\\ &\text{s.t.}\\ &a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \ge c_1\\ &a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \ge c_2\\ &y_1, y_2 \ge 0\end{aligned}$$

و دوگان مسأله LP_2 به‌صورت مقابل می‌باشد:

$$\begin{aligned}&\text{Min } W_2 = b_1y_1 + b_2y_2\\ &\text{s.t.}\\ &100a_{11}y_1 + 100a_{21}y_2 \ge 100c_1\\ &100a_{12}y_1 + 100a_{22}y_2 \ge 100c_2\\ &y_1, y_2 \ge 0\end{aligned}$$

با تقسیم محدودیت ۱ و ۲ بر عدد ۱۰۰ ملاحظه می‌شود که دوگان مسائل LP_1 و LP_2 یکسان هستند. بنابراین $W_1^* = W_2^*$ و $Z_1^* = Z_2^* = 550$، یعنی:

$$c_1x_1 + c_2x_2 = 100c_1x_1^\circ + 100c_2x_2^\circ$$

و در نتیجه $x_1^\circ = \frac{1}{100}x_1 = 0/5$ و $x_2^\circ = \frac{1}{100}x_2 = 5$ جواب بهینه LP_2 است.

۱۳۴ـ گزینه «۲» برای حفظ پایه بهینه باید جواب بهینه شدنی باقی بماند:

$$\bar{b} = B^{-1}b \ge 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - \frac{b_3}{3} \ge 0 \\ -2 + \frac{2}{3}b_3 \ge 0 \\ -9 + b_3 \ge 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 9 \le b_3 \le 12$$

۱۳۵ـ گزینه «۴» قیمت‌های سایه منابع عبارتند از: $y_1 = \frac{1}{4}$، $y_2 = \frac{1}{4}$ و $y_3 = 0$. منبعی که قیمت سایه آن بیشتر باشد کاندیدای افزایش خواهد بود. یعنی منبع ۱ یا ۲.

۱۳۶ـ گزینه «۱» با استفاده از متغیرهای کمکی قیود را به تساوی تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 3\\ &x_1 - 2x_2 \qquad - s_2 = 1\\ &-x_1 \qquad + 2x_3 - s_3 = 2\\ &x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \ge 0\end{aligned}$$

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): $x_1 = 1,\ x_2 = 0, x_3 = 2 \rightarrow x(1,0,2,0,0,1)$

جواب اخیر یک BFS است. زیرا دارای سه مؤلفه غیرصفر است و ستون متناظر با مؤلفه‌های غیرصفر مستقل خطی‌اند.

گزینه (۲): $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1 \rightarrow x(1,0,1,1,0,-1)$

جواب اخیر نشدنی است. زیرا $S_3 = -1 < 0$.

گزینه (۳): $x_1 = 2,\ x_2 = 0, x_3 = 1 \rightarrow x(2,0,1,0,1,-2)$ جواب اخیر نشدنی است.

گزینه (۴): $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 0, x_3 = \frac{3}{2} \rightarrow x(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2},0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ جواب اخیر نشدنی است.

۱۳۷ـ گزینه «۴» با استفاده از $z_j - c_j$ متغیرهای غیرپایه‌ای داریم:

$$z_{s_1} - c_{s_1} = \frac{1}{4} \to (c_2, c_1, 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = \frac{1}{4} \to 4c_2 - c_1 = 2$$

$$z_{s_2} - c_{s_2} = \frac{1}{4} \to (c_2, c_1, 0)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} \\ -2 \end{pmatrix} - 0 = \frac{1}{4} \to -4c_2 + 3c_1 = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4c_2 - c_1 = 2 \\ -4c_2 + 3c_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 2 \quad , \quad c_2 = 1$$

۱۳۸ـ گزینه «۲» برای این که پایه‌ی نهایی B مسأله P' باقی بماند باید با تغییر مقادیر سمت راست جدول نهایی، شدنی باقی بماند. یعنی:

$$B^{-1}(b + \lambda d) \geq 0 \to B^{-1} b + B^{-1} \lambda d \geq 0$$

با توجه به اینکه $B^{-1} b$ جواب بهینه مسأله P می‌باشد پس $B^{-1} b \geq 0$. هم‌چنین $\lambda \geq 0$ است. پس در صورتی که $B^{-1} d \geq 0$ باشد، رابطه‌ی بالا برقرار است. البته این شرط لازم نمی‌باشد ولی جواب بهتری نسبت به گزینه‌های دیگر است.

۱۳۹ـ گزینه «۲» مقادیر متغیرهای دوگان در حالت بهینه نشان دهنده قیمت‌های سایه‌ای هستند. گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ تعبیرهای درستی برای قیمت سایه‌ای هستند.

۱۴۰ـ گزینه «۳» متغیرهای پایه‌ای در اولین جدول سیمپلکس x_3, x_4, x_5 هستند. می‌دانیم مقادیر متناظر با این متغیرها در سطر صفر جدول بهینه همان مقادیر متغیرهای دوگان هستند، البته به شرطی که ضریب هزینه x_3, x_4, x_5 صفر باشد که در این مسأله چنین نیست. پس برای یافتن مقادیر متغیرهای دوگان ضرایب هزینه را به اعداد متناظر با x_3 و x_4 و x_5 در سطر صفر جدول بهینه می‌افزاییم.

$$y_1 = 0 - 1 = -1 \ , \ y_2 = 3 - 2 = 1 \ , \ y_3 = 1 + 1 = 2$$

۱۴۱ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. صورت مسأله اشتباه می‌باشد. مسأله از نوع Max سازی است و با توجه به فرضیات، سؤال بهینه می‌باشد که این مطلب خلاف شرایط موجود در جدول است، زیرا عناصر منفی در سطر هدف مسأله موجود می‌باشد. اما در صورتی که تابع هدف را Min سازی در نظر بگیریم $(\min Z = -2x_1 + x_2 - x_3)$ جدول بهینه درست خواهد بود. با تغییر ضریب x_1 که یک متغیر پایه‌ای است، خواهیم داشت:

$$C_B = (0, 0) \qquad C_B B^{-1} = (0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0) \qquad \bar{Z}_3 = Z_3 - C_3 = C_B B^{-1} a_3 - C_3 = (0, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-1) = 1 > 0$$

$$\bar{Z}_2 = Z_2 - C_2 = C_B B^{-1} a_2 - C_2 = (0, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 = -1 < 0 \qquad \bar{Z}_{s_1} = Z_{s_1} - C_{s_1} = C_B B^{-1} a_{s_1} - C_{s_1} = (0, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0$$

پس با توجه به اینکه ضریب x_3 مثبت است، جدول بهینه نیست و متغیر x_3 وارد پایه شده و طبق تست مینیمم نسبت x_1 از پایه خارج می‌شود.

۱۴۲ـ گزینه «۱» با افزایش b_i، فضای جواب کاهش یافته و جواب بهینه می‌تواند بدتر شود به عبارت دیگر، نمی‌تواند بهتر شود.

۱۴۳ـ گزینه «۱» اگر x_6 ورودی باشد، طبق تست مینیمم نسبت باید x_3 خروجی باشد اما اگر x_1 را خارج کنیم، چون متغیر خروجی اشتباه انتخاب شده جواب ناموجه به دست می‌آید.

۱۴۴ـ گزینه «۳» در جدول بهینه متغیرهای x_1 و x_3 پایه بهینه را تشکیل می‌دهند. بنابراین حاصل‌ضرب ماتریس معکوس پایه بهینه در ضرایب اولیه آن‌ها ماتریس همانی تشکیل می‌دهد:

$$\bar{a}_j = B^{-1} a_j \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_3 = 1 \\ \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{3}a_4 = 0 \\ -\frac{2}{10}a_1 + \frac{4}{10}a_3 = 0 \\ -\frac{2}{10}a_2 + \frac{4}{10}a_4 = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = 6 \\ a_2 = 5 \\ a_3 = 3 \\ a_4 = 5 \end{matrix}$$

۱۴۵ـ گزینه «۱» مقدار a_5 با استفاده از رابطه $\vec{Z}_j = C_B B^{-1} a_j - C_j = C_B \bar{a}_j - C_j$ و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$a_5 = Z_{s_1} - C_{s_1} = C_B \bar{a}_{s_1} - C_{s_1} \Rightarrow a_5 = (3,5)\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{10} \end{bmatrix} - 0 = 0$$

۱۴۶ـ گزینه «۴» مقادیر زیر S_1 و S_2 در سطر هدف همان قیمت‌های سایه‌ای هستند.

$$y^* = (y_1, y_2) = (a_5, 1)$$

۱۴۷ـ گزینه «۲» با استفاده از قضیه مکمل زائد داریم:

$$x_1 = 5 \xrightarrow[x_1.A_1=0]{\text{قضیه مکمل زائد}} A_1 = 0 \qquad x_3 = 3 \xrightarrow[x_3.A_3=0]{\text{قضیه مکمل زائد}} A_3 = 0$$

۱۴۸ـ گزینه «۳» با توجه به جدول جواب بهینه مسأله Max سازی برابر ۳۰ شده است. طبق قضیه‌ی ضعیف دوگان هر نقطه‌ی شدنی مسأله‌ی دوگان (که Min سازی است) همواره بزرگتر مساوی مقدار بهینه هدف خواهد بود. $(W \geq 30)$. تنها گزینه‌ای که مقدار بزرگتر از ۳۰ دارد، گزینه «۳» است.

۱۴۹ـ گزینه «۲» داریم: $a_5 = 0$ و تست مینیمم نسبت مخالف صفر است، پس مسأله دارای بهینه چندگانه است.

۱۵۰ـ گزینه «۴» مجموع تعداد جواب‌های شدنی و نشدنی مسأله‌ی اولیه برابر مجموع تعداد جواب‌های شدنی و نشدنی مسأله‌ی ثانویه می‌باشد.

۱۵۱ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه دو محدودیت داریم، در هر جواب اساسی موجه بیشتر از دو متغیر نمی‌توانند مقدار مثبت داشته باشند، پس گزینه‌های ۳ و ۴ نادرست است. با توجه به جدول اگر بخواهیم متغیر x_2 را وارد پایه کنیم، متغیر x_3 از پایه خارج می‌شود و در جواب جدید متغیرهای $x_1 = 6$ و $x_2 = 3$ خواهند شد که یک جواب موجه و غیربهینه است.

۱۵۲ـ گزینه «۲» برای اینکه متغیرهای اساسی تغییر نکنند، باید $\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$ باشد. پس می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -0/2 & 0/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 45+a \\ 30-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+\frac{2}{3}a \geq 0 \\ 3-0/6a \geq 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -7/5 \leq a \leq 5$$

۱۵۳ـ گزینه «۱» با استفاده از متغیرها کمکی سیستم را به تساوی تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases} X_1 + 3X_2 + X_4 + S_1 = 4 \\ 2X_1 + X_2 + S_2 = 3 \\ X_2 + 4X_3 + X_4 + S_3 = 3 \end{cases}$$
$$X_1, \ldots\ldots, X_4, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

در جواب پایه‌ای موجه مورد نظر $X_4 = S_1 = S_2 = S_3 = 0$ است، زیرا غیر پایه‌ای هستند. پس داریم:

$$\begin{cases} X_1 + 3X_2 = 4 \\ 2X_1 + X_2 = 3 \\ X_2 + 4X_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 1 \\ X_2 = 1 \\ X_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

در همه سؤال‌های بعدی داریم: $X_B = (X_1, X_2, X_3)$.

۱۵۴ـ گزینه «۲» فضای موجه مسأله محدود است زیرا سیستم همگن نظیر آن فقط جواب صفر دارد.

$$\begin{cases} d_1 + 3d_2 + d_4 \leq 0 \\ 2d_1 + d_2 \leq 0 \\ d_2 + 4d_3 + d_4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0$$
$$d, \ldots, d_4 \geq 0$$

پس Z^* نیز حتماً محدود خواهد بود و گزینه (۴) غلط است. از بین جواب‌های گزینه ۱و۲و۳ فقط جواب گزینه ۲ در محدودیت‌ها صدق می‌کند.

۱۵۵ـ گزینه «۳» باید داشته باشیم: $\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$. با توجه به سؤال قبل می‌دانیم:

$$X_B = (X_1, X_2, X_3) \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

بنابراین برای یافتن دامنه مجاز b_1 داریم:

$$\bar{b} = B^{-1}b \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-b+9}{5} \geq 0 \\ \frac{2b_1 - 3}{5} \geq 0 \\ \frac{-2b_1 + 18}{20} \geq 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{3}{2} \leq b_1 \leq 9$$

۱۵۶ـ گزینه «۲» C_1 ضریب هزینه متغیر پایه‌ای X_1 است، پس برای یافتن دامنه مجاز تغییرات C_1 برای متغیرهای غیر پایه‌ای S_3, S_2, S_1, X_4 باید $Z_j - C_j \geq 0$ باشد.

$$Z_{X_4} - C_{X_4} = C_B B^{-1} a_4 - C_4 = (C_1, 4, 1) \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = (C_1, 4, 1) \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{20} \end{pmatrix} - 1 = -\frac{C_1}{5} + \frac{3}{4} \geq 0 \Rightarrow C_1 \leq \frac{15}{4}$$

$$Z_{S_1} - C_{S_1} = C_B B^{-1} a_{S_1} - C_{S_1} = (C_1, 4, 1) \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = (C_1, 4, 1) \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix} = -\frac{C_1}{5} + \frac{3}{2} \geq 0 \Rightarrow C_1 \leq \frac{15}{2}$$

$$Z_{S_2} - C_{S_1} = C_B B^{-1} a_{S_2} - C_{S_2} = (C_1, 4, 1) \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = (C_1, 4, 1) \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{20} \end{pmatrix} = \frac{3C_1}{5} - \frac{3}{4} \geq 0 \Rightarrow C_1 \geq \frac{5}{4}$$

$$Z_{S_3} - C_{S_3} = C_B B^{-1} a_{S_3} - C_{S_3} = (C_1, 4, 1) \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = (C_1, 4, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \geq 0$$

با توجه به $C_1 \leq \frac{15}{4}, C_1 \leq \frac{15}{2}, C_1 \geq \frac{5}{4}$ داریم: $\frac{5}{4} \leq C_1 \leq \frac{15}{4}$.

۱۵۷ـ گزینه «۱» ابتدا بررسی می‌کنیم که با اضافه شدن یک واحد به هر یک از اعداد سمت راست هر محدودیت پایه بهینه $B=(a_۱,a_۲,a_۳)$ شدنی باقی می‌ماند یا خیر.

$$B^{-۱}b=\begin{pmatrix} -\frac{۱}{۵} & \frac{۳}{۵} & ۰ \\ \frac{۲}{۵} & -\frac{۱}{۵} & ۰ \\ -\frac{۱}{۱۰} & \frac{۱}{۲۰} & \frac{۱}{۴} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۵ \\ ۴ \\ ۴ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{۷}{۵} \\ \frac{۶}{۵} \\ \frac{۷}{۱۰} \end{pmatrix}\geq ۰ \rightarrow \text{پایه بهینه شدنی باقی می‌ماند}$$

اکنون مقدار ΔZ را محاسبه می‌کنیم

$$\Delta Z=C_BB^{-۱}(\Delta b)=(۲,۴,۱)\begin{pmatrix} -\frac{۱}{۵} & \frac{۳}{۵} & ۰ \\ \frac{۲}{۵} & -\frac{۱}{۵} & ۰ \\ -\frac{۱}{۱۰} & \frac{۱}{۲۰} & \frac{۱}{۴} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}=(۲,۴,۱)\begin{pmatrix} \frac{۲}{۵} \\ \frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۵} \end{pmatrix}=\frac{۹}{۵}$$

۱۵۸ـ گزینه «۳» ابتدا بررسی می‌کنیم که با اضافه شدن یک واحد به ضرایب هزینه $C_۱,C_۲,C_۳$ پایه بهینه $B=(a_۱,a_۲,a_۳)$ بهینه باقی می‌ماند یا خیر.

$$Z_{S_۱}-C_{S_۱}-C_B\bar{a}_{S_۱}-C_{S_۱}=(۳,۵,۲)\begin{pmatrix} -\frac{۱}{۵} \\ \frac{۲}{۵} \\ -\frac{۱}{۱۰} \end{pmatrix}-۰=\frac{۶}{۵}\geq ۰ \qquad Z_{X_۴}-C_{X_۴}-C_B\bar{a}_۴-C_۴=(۳,۵,۲)\begin{pmatrix} -\frac{۱}{۵} \\ \frac{۲}{۵} \\ \frac{۳}{۲۰} \end{pmatrix}-۱=\frac{۱۷}{۱۰}-۱=\frac{۷}{۱۰}\geq ۰$$

$$Z_{S_۳}-C_{S_۳}-C_B\bar{a}_{S_۳}-C_{S_۳}=(۳,۵,۲)\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ \frac{۱}{۴} \end{pmatrix}-۰=\frac{۱}{۲}\geq ۰ \qquad Z_{S_۲}-C_{S_۲}-C_B\bar{a}_{S_۲}-C_{S_۲}=(۳,۵,۲)\begin{pmatrix} \frac{۳}{۵} \\ -\frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۲۰} \end{pmatrix}-۰=\frac{۹}{۱۰}\geq ۰$$

تمامی ضرایب سطر هدف مثبت می‌مانند پس جدول بهینه باقی می‌ماند:

$$Z=۲X_۱+۴X_۲+X_۳+X_۴ \xrightarrow{X_۱=۱,\ X_۲=۱,\ X_۳=\frac{۱}{۲},\ X_۴=۰} Z=\frac{۱۳}{۲}$$

$$Z'=۳X_۱+۵X_۲+۲X_۳+X_۴ \xrightarrow{X_۱=۱,\ X_۲=۱,\ X_۳=\frac{۱}{۲},\ X_۴=۰} Z'=۹$$

پس مقدار افزایش تابع هدف، $۹-\frac{۱۳}{۲}=\frac{۵}{۲}$ است.

۱۵۹ـ گزینه «۱» متغیر $X_۳$ خروجی است ولی چون در سطر لولا عدد منفی نداریم پس متغیر ورودی یافت نمی‌شود و در این حالت مسأله اولیه نشدنی است ومسأله دوگان بهینه نامتناهی دارد.

۱۶۰ـ گزینه «۴» در چنین شرایطی، $X_۳$ خروجی است و چون $\min\left\{\left|\frac{۲}{-۰/۲}\right|=۱۰,\left|\frac{۱}{-۰/۴}\right|=۲/۵\right\}=۲/۵$، پس متغیر $S_۲$ ورودی به پایه است و در جدول بعدی متغیرهای پایه $X_۱,S_۲$ هستند.

۱۶۱ـ گزینه «۱» جدول سؤال قبل به صورت زیر است:

	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$S_۱$	$S_۲$ ↓	R.H.S
Z	۰	۳	۰	۲	۱	۳۰
$X_۱$	۱	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	۵
← $X_۳$	۰	۱	۱	$-۰/۲$	$-۰/۴$	-۲

با ورودی $S_۲$ و خروجی $X_۳$ مقدار Z در جدول بعدی عبارت است از: $Z_{new}=۳۰-(۱)(۵)=۲۵$

۱۶۲ـ گزینه «۴» با توجه به جدول $S_۱=S_۴=۰$ پس محدودیت‌های اول و چهارم در نقطه بهینه فعالند.

۱۶۳ـ گزینه «۴» در جدول بهینه داده شده مقادیر متناظر با متغیرهای $S_۴,S_۳,S_۲,S_۱$ همان مقادیر بهینه متغیرهای دوگان هستند یعنی:

$y^*=(۶,۰,۰,۲)$

۱۶۴ـ گزینه «۳» مسأله داده شده از نوع Max است، زیرا در سطر هدف جدول بهینه عدد منفی وجود ندارد. در نتیجه مسأله ثانویه از نوع Min است. همچنین با توجه به جدول بهینه، مقدار بهینه تابع هدف مسأله ثانویه، $W^*=۳۲$ است. بنابراین در هر نقطه موجه مسأله ثانویه مقدار تابع هدف یا ۳۲ و یا عددی بزرگ‌تر از ۳۲ است و تنها گزینه قابل قبول عدد ۳۵ است.

۱۶۵ـ گزینه «۳» قیمت سایه‌ای منبع اول $y_۱^*=۶$ است، یعنی حداکثر مبلغ قابل پرداخت برای خرید هر واحد اضافه‌تر از منبع اول ۶ واحد پول است.

۱۶۶ـ گزینه «۲» با اضافه شدن محدودیت جدید فضای موجه بزرگ‌تر نمی‌شود پس Z^* بهتر نمی‌شود، یعنی $Z^*\le Z$.

۱۶۷ـ گزینه «۱» تابع هدف و محدودیت مسأله فوق به شکل زیر می‌باشد.

$$
\begin{aligned}
\text{Min } z &= ۴۰x_۱+۳۰x_۲+۲۷x_۳+۲۲x_۴\\
\text{s.t}&\\
&۲x_۱+۲x_۲+x_۳+۲x_۴\ge ۹\\
&۳x_۱+x_۲+۳x_۳+۲x_۴\ge ۱۹\\
&x_۱,x_۲,x_۳,x_۴\ge ۰
\end{aligned}
$$

تابع هدف مسأله مزدوج برابر است با: $\text{Max}w=۹y_۱+۱۹y_۲$

از طرفی $x_۳$ و $x_۴$ در پایه می‌باشند و مسأله ۲ معادله و ۴ مجهول، دارای ۲ متغیر پایه‌ای است. چون $x_۱$ و $x_۲$ غیرپایه هستند، پس داریم:

$x_۱,x_۲=۰$

طبق قضیه قوی دوگان، در بهینگی $z^*=w^*$ می‌باشد، یعنی:

$$۴۰x_۱+۳۰x_۲+۲۷x_۳+۲۲x_۴=۹y_۱+۱۹y_۲ \xrightarrow{x_۱,x_۲=۰} ۲۷x_۳+۲۲x_۴=۹y_۱+۱۹y_۲$$

که نقطه $(\overset{x_۳}{۵}\ \ \overset{x_۴}{۲})\,,\,(\overset{y_۱}{۳}\ \ \overset{y_۲}{۸})$ در معادله فوق صدق می‌کند.

۱۶۸ـ گزینه «۲» برای اینکه خرید میوه‌های ۱ و ۲ به صرفه باشد باید، ضریب سطر هدف آن‌ها مثبت باشد تا شرط ورود به پایه را داشته باشند:

$Z_2 - C_2 \geq 0 \;,\; Z_1 - C_1 \geq 0$

و می‌دانیم $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = B = (a_{x_3}, a_{x_4})$ پس $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ می‌باشد و داریم:

$$Z_1 - C_1 \geq 0 \Rightarrow C_B B^{-1} a_1 - C_1 = (27, 22)\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - C_1 \geq 0 \Rightarrow C_1 \leq 30$$

$$Z_2 - C_2 \geq 0 \Rightarrow C_B B^{-1} a_2 - C_2 = (27, 22)\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - C_2 \geq 0 \Rightarrow C_2 \leq 14$$

۱۶۹ـ گزینه «۲» باید $Z_j - C_j$ متغیر x_1 محاسبه شود.

$$Z_1 - C_1 = C_B B^{-1} a_1 - C_1 = (27, 22)\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 25 = 5 > 0$$

با توجه به min بودن تابع هدف و مثبت بودن $Z_1 - C_1$، x_1 وارد پایه می‌شود. حال برای تعیین خروجی از پایه باید مقادیر سمت راست و ستون لولا را محاسبه کنیم:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \;;\quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \;,\quad B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

نسبت‌ها $\min\{\frac{5}{\frac{1}{2}}, \frac{2}{\frac{3}{4}}\} = \frac{8}{3}$　　x_4 متغیر خروجی است.　　در حل جدید $B = \begin{array}{cc} x_3 & x_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$$Z_2 - C_2 = (27, 25)\begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 30 = -\frac{73}{3} \qquad Z_4 - C_4 = (27, 25)\begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - 22 = -\frac{20}{3}$$

پس $Z_j - C_j$ متغیرهای غیرپایه‌ای کوچکتر از صفر هستند و جدول فعلی بهینه است و x_3, x_1 برای تولید بهینه هستند.

۱۷۰ـ گزینه «۴» باید $Z_j - C_j$ متغیر x_2 محاسبه شود.

$$Z_2 - C_2 = C_B B^{-1} a_2 - C_2 = (27, 22)\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 14 = 0 \qquad B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow y_{12} < 0 \\ \rightarrow y_{22} > 0 \end{array}$$

مسأله بهینه چندگانه؛ دارد یعنی می‌توان x_2 را وارد پایه کرد و از طرفی چون $y_{12} < 0$ می‌باشد محورگیری روی سطر ۲ انجام می‌شود و x_4 از پایه خارج می‌شود.

۱۷۱ـ گزینه «۳» تعداد جواب‌های پایه‌ای هر دو مسأله باهم برابر است و برابر است با : $\frac{(m+n)!}{m!n!}$

۱۷۲ـ گزینه «۲» ابتدا مقدار $Z_2 - C_2$ جدید را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{a}_2 = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix} \qquad Z_2 - C_2 = C_B B^{-1} a_2 - C_2 = (2, 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} - 1 = -\frac{1}{2}$$

پس جدول شرط بهینگی را ندارد، متغیر $x_۲$ وارد پایه شده و طبق تست مینیمم نسبت متغیر $x_۵$ خروجی است.

$$\min\{\frac{۸}{\frac{۱}{۴}},\frac{۱۲}{\frac{۵}{۴}}\}=\frac{۴۸}{۵}\Rightarrow \text{خروجی } x_۵$$

$$Z^*_{\text{جدید}}=Z^*_{\text{قدیم}}-(Z_۲-C_۲)\times\text{(مقدار حاصل از تست مینیمم نسبت)} \qquad Z^*_{\text{جدید}}=۱۶-(-\frac{۱}{۲})\times\frac{۴۸}{۵}=\frac{۱۰۴}{۵}$$

۱۷۳ـ گزینه «۱» مقدار $Z_۴-C_۴$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{a}_۴=B^{-۱}a_۴=\begin{bmatrix}۱&۰\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\۳\end{bmatrix}\ ;\quad Z_۴-C_۴=C_BB^{-۱}a_۴-C_۴=(۲,۰)\begin{pmatrix}۱\\۳\end{pmatrix}-۴=-۲$$

متغیر $x_۴$ ورودی به پایه است و از آنجایی که ضریب آن در سطر هدف ۲- است، پس با تولید هر واحد از آن سود به مقدار $-(z_j-c_j)\theta=-(z_۲-c_۲)\times۱=۲$ واحد افزایش خواهد یافت.

۱۷۴ـ گزینه «۱» مسأله دوگان را می‌نویسیم. برای اینکه مسأله self-dual باشد، باید تمامی ضرایب متناظر در مسأله اولیه و ثانویه برابر باشند:

$$\begin{array}{llll}\text{Min } Z=x_۱+x_۲+x_۳ & & \longrightarrow\quad \text{Max } W=ay_۳+by_۲+cy_۱ & \\ \text{s.t}\quad -x_۲+x_۳\ge a & :y_۳ & -y_۲+y_۳\ge ۱ & :x_۳\\ \quad x_۱-x_۳\ge b & :y_۲ & y_۱-y_۳\ge ۱ & :x_۲\\ \quad dx_۱+x_۲\ge c & :y_۱ & dy_۱+y_۲\ge ۱ & :x_۱\\ \quad x_۱,x_۲,x_۳\ge ۰ & & y_۱,y_۲,y_۳\ge ۰ & \end{array}$$

پس شرط اینکه مسأله $\text{Self}-\text{Dual}$ باشد این است که: $a=۱\ ,\ b=۱\ ,\ c=۱\ ,\ d=۱$

۱۷۵ـ گزینه «۴» شرط لازم برای امکان‌پذیری تابع $h(x)$ این است که در فضای امکان‌پذیر دو تابع f,g قرار گیرد، با توجه به ماهیت مسأله، گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۱۷۶ـ گزینه «۲» مسأله در راستای متغیر V کران دارد و می‌تواند دارای جواب متناهی باشد.

۱۷۷ـ گزینه «۲» در مسأله اولیه داریم: $x_B=B^{-۱}b$ پس با فرض $B^{-۱}=[a_۱,.....,a_m]$ خواهیم داشت. فرض کنید x_i متغیر پایه‌ای است که در مکان iام پایه قرار گرفته است و مقدار سمت راست از b_i به $b_i+\Delta b_i$ تغییر یافته است:

$$\begin{bmatrix}x_۱\\\vdots\\x_i\\\vdots\\x_m\end{bmatrix}=[a_۱,....,a_i,......,a_m]\begin{bmatrix}b_۱\\\vdots\\b_i+\Delta b_i\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$$

پس مقادیر جدید x_j ها $(j=۱,....,m)$ هر کدام به اندازه $a_{ji}\times\Delta b_i$ تغییر می‌کنند.

۱۷۸ـ گزینه «۳» چون $S_۲$ غیر پایه‌ای است پس $S_۲^*=۰$ یعنی محدودیت دوم در نقطه بهینه فعال است.

$$a_{۲۱}x_۱^*+a_{۲۲}x_۲^*+a_{۲۳}x_۳^*=b_۲\xrightarrow{x_۲^*=x_۳^*=۰}x_۱^*=\frac{b_۲}{a_{۲۱}}$$

اما چون $x_۱^*\ge۰$ پس $\frac{b_۲}{a_{۲۱}}\ge۰$ و گزینه (۱) صحیح است.

چون متغیر $x_۱$ پایه‌ای است (در مسأله اولیه) پس در مسأله دوگان قید اول در جواب بهینه صورت تساوی است.

$$a_{۱۱}y_۱^*+a_{۲۱}y_۲^*+a_{۳۱}y_۳^*=c_۱\xrightarrow[y_۱^*=y_۳^*=۰\ \text{زائد}]{\text{طبق قضیه مکمل}}y_۲^*=\frac{c_۱}{a_{۲۱}}$$

اما در مسأله دوگان $0 \le y_2 \le \frac{c_1}{a_{21}}$ پس $0 \le$ و گزینه (۲) صحیح است.

قید دوم مسأله دوگان به صورت زیر است: $a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \ge c_2$

در جواب بهینه دوگان $y_1^* = y_3^* = 0$ است، پس: $a_{22}y_2^* \ge c_2 \xrightarrow{a_{22} \ge 0} y_2^* \ge \frac{c_2}{a_{22}} \xrightarrow{y_2^* = \frac{c_1}{a_{21}}} \frac{c_1}{a_{21}} \ge \frac{c_2}{a_{22}}$

۱۷۹ـ گزینه «۴» محدودیت‌های دوگان به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} ay_1 + cy_2 + ky_3 \ge c_1 & : P_1 \\ by_1 + dy_2 + my_3 \ge c_2 & : P_2 \end{cases}$$

با توجه به شرط $\frac{a}{b} \ne \frac{c}{d} \ne \frac{k}{m}$ دو صفحه P_1 و P_2 متقاطع هستند و فضای موجه دوگان غیر تهی است و چون مسأله اولیه نیز شدنی است پس هر دو مسأله نقطه بهینه دارند. اما جواب بهینه مسأله اولیه تباهیده است زیرا فضای موجه آن سه خط است که همگی از یک نقطه می‌گذرند. چون مسأله اولیه تباهیده است پس مسأله دوگان بهینه چندگانه دارد.

۱۸۰ـ گزینه «۱» چون متغیر x_2 غیر پایه‌ای است تغییر ضریب تابع هدف آن در جدول نهایی فقط بر ضریب خودش تاثیر می‌گذارد که با استفاده از رابطه مقابل محاسبه می شود: $(Z_2 - C_2)_{new} = (Z_2 - C_2)_{old} - \Delta C_2 \Rightarrow (Z_2 - C_2)_{new} = (-3) - (-3-1) = 1$

۱۸۱ـ گزینه «۱» با توجه به قضیه مکمل زائد داریم: $t_2.x_2 = 0 \xrightarrow{t_2 = 1 \ne 0} x_2 = 0 \qquad t_3.x_3 = 0 \xrightarrow{t_3 = 1 \ne 0} x_3 = 0$

$S_1.y_1 = 0 \xrightarrow{y_1 = 1 \ne 0} S_1 = 0 \Rightarrow$ قید ۱ مسأله اولیه به صورت تساوی است. $\Rightarrow 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 8$

$S_2.y_2 = 0 \xrightarrow{y_2 = 1 \ne 0} S_2 = 0 \Rightarrow$ قید ۲ مسأله اولیه به صورت تساوی است. $\Rightarrow x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5$

$$\left.\begin{matrix} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{x_3 = x_2 = 0} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

۱۸۲ـ گزینه «۱» محدودیت‌های مسأله‌ی اولیه به صورت مقابل می‌باشند: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_j \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, m$

چون محدودیت‌های مسأله Max سازی به صورت $\le$ می‌باشند، پس متغیرهای دوگان به صورت $\ge$ خواهند بود $(y_i \ge 0)$. با ضرب طرفین محدودیت‌ها در y_i داریم: $y_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j) \le b_i\, y_i \quad , \quad i = 1, \cdots, m$

و با جمع بستن تمامی محدودیت‌ها با یکدیگر خواهیم داشت: $\sum_{i=1}^{m} y_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

۱۸۳ـ گزینه «۳» در جدول سیمپلکس معمولی می‌توان علامت نامحدود بودن را مشاهده کرد.

۱۸۴ـ گزینه «۱» با نوشتن دوگان مدل‌های داده شده مشاهده می‌شود که محدودیت‌های دوگان هر سه مدل یکسان می‌باشند، ولی تابع هدف مدل (۱) $\text{Max } W_1 = yE_1$ و مدل (۲) $\text{Max } W_2 = yE_2$ و مدل (۳) $\text{Max } W_3 = y(E_1 + E_2)$ می‌باشد. چون فضای موجه سه مدل یکسان است $W_3 \le W_1 + W_2 \Rightarrow Z_3 \le Z_1 + Z_2$

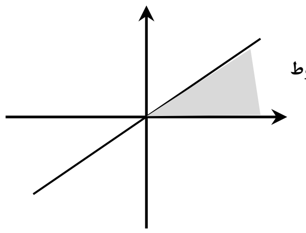
۱۸۵ـ گزینه «۳»

$$\begin{array}{lcl} P_1 : \text{Min } Z_1 = CX & & D_1 : \text{Max } W_1 = yb \\ \quad \text{s.t.} & \xrightarrow{\text{دوگان}} & \quad \text{s.t.} \\ \qquad AX \ge b & & \qquad yA \le C \\ \qquad x \ge 0 & & \qquad y \ge 0 \\ P_2 : \text{Min } Z_2 = CX & & D_2 : \text{Max } W_2 = y\bar{b} \\ \quad \text{s.t.} & \xrightarrow{\text{دوگان}} & \quad \text{s.t.} \\ \qquad AX \ge \bar{b} & & \qquad yA \le C \\ \qquad x \ge 0 & & \qquad y \ge 0 \end{array}$$

y^* جواب بهینه مسأله D_1 است. فرض می‌کنیم $\bar{y}$ نیز جواب بهینه مسأله D_2 باشد و چون فضای شدنی مسائل D_1, D_2 یکسان است پس y^* جواب شدنی مسأله D_2 نیز می‌باشد. پس $y^*\bar{b} \le \bar{y}\bar{b}$. همچنین $\bar{x}$ جواب بهینه مسأله P_2 است و می‌دانیم $Z_2(\bar{x}) = w_2(\bar{y})$ یعنی $C\bar{X} = \bar{y}\bar{b}$. لذا با مقایسه روابط $y^*\bar{b} \le \bar{y}\bar{b}$ و $C\bar{X} = \bar{y}\bar{b}$ داریم : $y^*\bar{b} \le C\bar{X}$.

۱۸۶ـ گزینه «۳» با هر مقدار افزایش x_1 محدودیت برقرار می‌باشد و تابع هدف به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

$$\begin{aligned} &\text{Max } (x_1 + x_2) \\ &\text{s.t} \quad -x_1 + x_2 \le 0 \\ &\qquad x_1, x_2 > 0 \end{aligned}$$



۱۸۷ـ گزینه «۳» P_1 و P_2 اولیه و ثانویه یکدیگر می‌باشند.

چون $C \ge 0$ است پس P_2 موجود است؛ زیرا $u = 0$ یک جواب آن است. چون $b \le 0$ است بنابراین P_1 هم موجود است؛ زیرا $x = 0$ یک جواب آن است.

$A\cancel{x}^{\circ} \ge b \le 0$ $\qquad\qquad$ $A^t \cancel{u}^{\circ} \le C \ge 0$

۱۸۸ـ گزینه «۲» با توجه به عدد صحیح نامنفی بودن x_1, x_2 در مسأله z_2 (مسأله برنامه‌ریزی خطی اعداد صحیح) می‌توان دریافت که ناحیه شدنی مسأله z_2 بزرگتر از z_1 نخواهد بود پس مقدار بهینه z_2 بهتر از z_1 نخواهد بود (مسأله‌ها از نوع max سازی هستند) پس $\max z_1 \ge \max z_2$ و اگر مسأله حل گردد خواهید دید که $\text{Max}z_1 = \text{Max}z_2$ است. چرا که جواب مسأله اول $x_1 = 2, x_2 = 1$ می‌باشد که این جواب مقادیر صحیح به خود گرفته است.

۱۸۹ـ گزینه «۲» چون $E_2 \ge E_1$ است، بنابراین فضای جواب مسأله z_2 بیشتر از فضای جواب مسأله z_1 است؛ بنابراین جواب مسأله z_2 بهتر یا مساوی جواب مسأله z_1 است. از آن‌جا که مسأله Min سازی است، پس $z_2 \le z_1$ می‌باشد.

۱۹۰ـ گزینه «۱ و ۴»

$C = C_1 \Rightarrow$ بهینه x_1 و غیربهینه x_2 $\Rightarrow C_1 x_1 \le C_1 x_2 \Rightarrow C_1(x_1 - x_2) \le 0$

$C = C_2 \Rightarrow$ بهینه x_2 و غیربهینه x_1 $\Rightarrow C_2 x_2 \le C_2 x_1 \Rightarrow C_2(x_2 - x_1) \le 0$

$$\Rightarrow C_1(x_1 - x_2) + C_2(x_2 - x_1) \le 0 \Rightarrow C_1(x_1 - x_2) - C_2(x_1 - x_2) \le 0$$

$$\Rightarrow (C_1 - C_2)(x_1 - x_2) \le 0 \approx (C_2 - C_1)(x_1 - x_2) \ge 0$$

گزینه‌های ۱ و ۴ معادل یکدیگر هستند.

۱۹۱ـ گزینه «۴» برای بررسی شدنی بودن جواب جدید داریم:

$$B^{-1}b_{new} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix}$$

پس جواب شدنی باقی می‌ماند یعنی پایه تغییر نکرده است اما مقادیر بهینه به $\begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix}$ تغییر کرده است.

۱۹۲ـ گزینه «۱» چون مسأله maxسازی است پس افزایش یک واحد منبع iام به اندازه مقدار دوگان iام سود حاصل می‌کند، بنابراین بهتر است به منبع اول ۱ واحد اضافه کنیم که ۹ واحد سود دارد.

۱۹۳ـ گزینه «۴» باید مقادیر دوگان را به دست آوریم مسأله دوگان به صورت روبرو است:

$$\text{Min } w = ۶۰w_۱ + ۱۵۰w_۲ + ۸w_۳$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} ۶w_۱ + ۱۰w_۲ + w_۳ \geq ۵۰۰ \\ ۵w_۱ + ۲۰w_۲ \geq ۴۵۰ \\ w_i \geq ۰ \end{cases}$$

از طرفی از حل ترسیمی مسأله اولیه $x_۱ = ۶/۴۲۹, x_۲ = ۴/۲۸۶$ به دست می‌آید و از حل مسأله دوگان مقادیر: $w_۳ = ۰, w_۱ = ۷۸\frac{۴}{۷}$ به دست می‌آید.

می‌توان مقادیر w_i را بدین صورت به دست آورد که $s_۳ \neq ۰$ پس $w_۳ = ۰$ از طرفی چون $x_۱, x_۲$ مخالف صفر هستند، پس $s'_۱ = s'_۲ = ۰$ پس محدودیت‌های دوگان به صورت مساوی تبدیل می‌شود. پس:

$$\begin{matrix} ۶w_۱ + ۱۰w_۲ = ۵۰۰ \\ ۵w_۱ + ۲۰w_۲ = ۴۵۰ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} w_۱ = ۷۸\frac{۴}{۷} = ۷۸/۵۷۱ \\ w_۲ = ۲\frac{۶}{۷} = ۲/۸۵۷ \end{matrix}$$

۱۹۴ـ گزینه «۱» هزینه‌های تقلیل یافته همان $z_j - c_j$ ها است که برای متغیرهای پایه‌ای مقدار ۰ است. در این‌جا $x_۲, x_۱$ پایه‌ای می‌باشند پس هزینه‌های تقلیل‌یافته آن‌ها صفر است.

۱۹۵ـ گزینه «۳» با استفاده از روش ترسیمی می‌توان حدود c_j را پیدا کرد بدین صورت که:

$$\begin{matrix} \frac{c_۱}{۶} \leq \frac{۴۵۰}{۵} \rightarrow c_۱ \leq ۵۴۰ \\ \frac{۴۵۰}{۲۰} \leq \frac{c_۱}{۱۰} \rightarrow c_۱ \geq ۲۲۵ \end{matrix} \rightarrow ۲۲۵ \leq c_۱ \leq ۵۴۰$$

بنابراین از همین‌جا مشخص است، گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۱۹۶ـ گزینه «۴» برای یک مسأله ماکزیمم سازی به دنبال این هستیم که هزینه فرصت از دست رفته منابع کمتر از حاشیه سود آن‌ها شود درحالی کـه در مسأله مینیمم‌سازی به دنبال این هستیم که هزینه فرصت از دست رفته بیشتر از حاشیه سود شود.

۱۹۷ـ گزینه «۱» فرض کنید برای این محدودیت از تغییر متغیر $(x'_i = x_i - l_i)$ استفاده شود. در نتیجه اگـر در جـواب بهینـه متغیـر x'_i پایـه‌ای باشـد $(x'_i > ۰ \rightarrow x_i > L_i)$، پس reduce cost آن صفر خواهد بود، همان‌طور که شبه قیمت محدودیت $x_i \geq l_i$ به دلیل اینکه به صورت تسـاوی برقـرار نمی‌شود $(x_i > l_i)$، صفر خواهد بود و اگر x'_i غیرپایه‌ای باشد $(x'_i = ۰ \rightarrow x_i = l_i)$، هزینه کاهش یافته x'_i برابر شبه قیمت نامعادله فوق می‌شود.

۱۹۸ـ گزینه «۴» چون مسأله دو محدودیت دارد، پس در جواب بهینه دو متغیر پایه‌ای داریم که یکی از آنها $s_۲$ متغیر کمک محدودیت دوم است. متغیـر دیگر یکی از متغیرهای $s_۱, x_۵, \cdots x_۱$ خواهد بود که با توجه به اینکه متغیر $x_۴$ بیشترین نسبت ضریب تابع هدف به ضریب محـدودیت اول $(\frac{۴}{۳})$ را دارد، با مقدار $x_۴ = ۱۰$ پایه‌ای خواهد بود و مقدار تابع هدف بهینه $\text{Max}z = ۱۰ \times ۴ = ۴۰$ می‌باشد.

۱۹۹ـ گزینه «۱» چون فقط $x_۱$ پایه‌ای است، پس $x_۲ = x_۳ = ۰$. بنابراین حداکثر مقداری که متغیر $x_۱$ می‌تواند داشته باشد، $x_۱ = \frac{۹}{۲}$ خواهد بود. بنابراین جواب بهینه عبارت از: $z^* = ۵ \times \frac{۹}{۲} = ۲۲/۵$

۲۰۰ـ گزینه «۲» متغیرهای دوگان همان شبه قیمت محدودیت‌ها و در واقع درآمد خاص از یک واحد بیشتر منبع می‌باشد. بنابراین منبع دوم بـا سـود هـر واحد ۳ واحد پولی بیشترین درآمد را ایجاد می‌کند.

۲۰۱ـ گزینه «۱» فرض کنید فضای موجه مربوط به مدل $z_۱$، برابر $X_۱ = \{(x_۱, x_۲) | ۳x_۱ + ۴x_۲ \leq ۱۵, x_۱ \geq ۰, x_۲ \geq ۰\}$ و فضای موجه مربوط به مدل $z_۲$، $X_۲ = \{(x_۱, x_۲) | ۴x_۱ + ۵x_۲ \leq ۱۵, x_۱ \geq ۰, x_۲ \geq ۰\}$ است. از آن‌جا که $X_۲ \leq X_۱$، بنابراین $z_۲ \leq z_۱$ است. چون مسأله Max سازی است.

فصل پنجم

«مدل حمل و نقل و تخصیص و مدل‌های شبکه»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل پنجم

۱ـ در یک مسأله حمل و نقل متعادل شده (Balanced) با m نقطه عرضه و n نقطه تقاضا، اگر تعداد $(m+n-1)$ خانه جدول حمل و نقل تشکیل یک حلقه (loop) دهند، آنگاه: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

۱) نمی‌توان یک جواب موجه پایه برای مسأله پیدا کرد.

۲) متغیرهای متناظر با آن خانه‌های جدول یک جواب بهینه برای مسأله حمل و نقل است.

۳) با استفاده از متغیرهای روی آن حلقه نمی‌توان یک جواب پایه موجه تشکیل داد.

۴) با استفاده از متغیرهای روی آن حلقه می‌توان یک جواب موجه پایه تشکیل داد به شرط آنکه متغیرهای روی حلقه مستقل خطی باشند.

۲ـ اگر در جدول بهینه مسأله حمل و نقل زیر، مقدار Δ به C_{13} اضافه شود، به ازای چه مقادیری از Δ جواب بهینه موجود، همچنان بهینه خواهد ماند؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

				عرضه
8	6 (12)	10 (25)	9	37
9 (45)	12	13 (5)	7	50
14	9 (10)	16	5 (30)	40
45	22	30	30	تقاضا

۱) $\Delta \le 5$

۲) $\Delta \ge 2$

۳) $-2 \le \Delta \le 2$

۴) $-1 \le \Delta \le 3$

۳ـ در مسأله حمل و نقل داده شده اگر عرضه و تقاضای سطر اول و ستون اول به اندازه یک واحد اضافه شود، چه تغییری در جواب داده شده به وجود می‌آید؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

				عرضه
	12	25		37
45		5		50
	10		30	40
45	22	30	30	تقاضا

۱) متغیر x_{11} مقدار یک می‌گیرد و یک تغییر پایه با ورود x_{11} به پایه انجام می‌شود.

۲) متغیر x_{11} مقدار یک می‌گیرد و وارد پایه می‌شود.

۳) مقادیر متغیرهای x_{13} و x_{21} به اندازه یک واحد اضافه شده و متغیر x_{23} به اندازه یک واحد کاهش می‌یابد.

۴) متغیر x_{12} و x_{21} یک واحد افزایش می‌یابد ولی برای برقراری رابطه ستون دوم یک واحد از x_{32} کاسته می‌شود. همچنین یک واحد از x_{23} کاسته می‌شود.

۴ـ در مورد جدول حمل و نقل زیر و مقادیر یک جواب پایه داده شده، چه می‌توان گفت؟ (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۰)

			عرضه
10 (20)	10 (40)	15 (40)	100
30 (40)	20	15	40
5	25	30 (20)	20
60	40	60	تقاضا

۱) پایه فوق بهینه است.

۲) مسأله فوق جواب قابل قبول نامحدود دارد.

۳) پایه فوق بهینه نیست و x_{23} ورودی به پایه و x_{21} خروجی از پایه می‌باشد.

۴) پایه فوق بهینه نیست و x_{31} ورودی پایه و x_{11}, x_{33} هر دو از پایه خارج می‌شوند.

۵ـ در جدول بهینه حمل و نقل داده شده اگر مقدار عرضه و تقاضای سطر اول و ستون دوم یک واحد اضافه شود، به اندازه چند واحد به مقدار تابع هدف اضافه می‌شود؟
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

مبدأ \ مقصد	1	2	3	4	عرضه
1	8	6 / 12	10 / 25	9	37
2	9 / 45	12	13 / 5	7	50
3	14	9 / 10	16	5 / 30	40
تقاضا	45	22	30	30	

۱) ۱۶
۲) ۱۲
۳) ۶
۴) مسأله باید مجدداً حل شود.

۶ـ شرط لازم برای تبهگن در مدل حمل و نقل آن است که:
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

۱) عرضه و تقاضای یکسانی در مدل باشد.
۲) مجموع مقادیر عرضه در دو سطر با هم برابر باشند.
۳) جمع زیر مجموعه‌های حقیقی از عرضه در سطرها مساوی جمع زیر مجموعه حقیقی از تقاضا در ستون‌ها نباشد.
۴) جمع زیر مجموعه‌های حقیقی از عرضه در سطرها مساوی جمع زیر مجموعه حقیقی از تقاضا در ستون‌ها باشد.

۷ـ مسأله حمل و نقل زیر و جواب بهینه آن داده شده است. به ازای چه دامنه‌ای از C_{11} (هزینه حمل کالا از منبع شماره یک به مقصد شماره یک) جواب پایه فعلی همچنان بهینه باقی می‌ماند؟
(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۱)

	1	2	3	4	
1	8	6 / 10	10 / 25	9	35
2	9 / 45	12	13 / 5	7	50
3	14	9 / 10	5	5 / 30	40
	45	20	30	30	

۱) $C_{11} \geq ۶$
۲) $C_{11} \leq ۶$
۳) $C_{11} \geq ۰$
۴) $۴ \leq C_{11} \leq ۱۲$

۸ـ هر جواب پایه‌ای موجه (Basic Feasible Solution) برای یک مسأله تخصیص $m \times m$ (Assignment) دارای .... متغیر با مقدار یک و .... متغیر با مقدار صفر است.
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

۱) $m+۱, m$
۲) $m-۱, m$
۳) $m, m+۱$
۴) $m, m-۱$

۹ـ اگر در مسأله حمل و نقلی با m مبدأ و n مقصد بخواهیم آن را با روش M بزرگ حل نمائیم، تعداد متغیرهای مصنوعی مورد نیاز کدام است؟
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

۱) m
۲) n
۳) $m+n$
۴) $m \times n$

۱۰ـ با توجه به اطلاعات موجود در جدول حمل و نقل زیر که هدف آن ماکزیمم کردن است: اگر X نشانهٔ سلول‌هایی باشند که نمایانگر عناصر حل پایهٔ پیشنهادی باشند، کدام مورد صحیح است؟
(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

مبدأ \ مقصد	۱	۲	۳	عرضه
۱	۵	۷ / X	۱۰ / X	۴۰۰
۲	۴	۹	۶	۳۰۰
۳	۸	X / ۳	۲	۲۰۰
تقاضا	X ۱۵۰	X ۵۰۰	۲۵۰	۹۰۰

۱) در این حل، $x_{۱۲} = ۱۵۰$ و $x_{۳۱} = ۱۵۰$ و این حل بهینه نیست.
۲) حل پیشنهادی چون از کمترین هزینه یعنی $C_{۳۳} = ۲$ استفاده نمی‌کند بهینه نیست.
۳) در این حل، $x_{۱۲} = ۱۵۰$ و $x_{۳۱} = ۱۵۰$ و مقدار تابع هدف برابر ۷۶۰۰ است و این حل بهینه است.
۴) حل پیشنهادی چون برای مدل مزدوج عبارتِ $U_i + V_j > C_{ij}$ است (برای تمام سلول‌های مصرف‌نشده) لذا حل داده شده بهینه نیست.

۱۱ـ در مسأله برنامه‌ریزی حمل و نقل اگر U_i و V_j به ترتیب متغیرهای مزدوج مربوط به محدودیت‌های عرضه و تقاضا باشند، کدام گزینه برای تمام مقادیر i و j صحیح است؟ (C_{ij} هزینهٔ حمل و نقل هر واحد کالا از محل عرضه به محل تقاضا باشد.)

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۱)

۱) $U_i + V_j \le C_{ij}$

۲) $U_i + V_j \le C_{ij}$ ، $V_j , U_i \ge 0$

۳) $U_i + V_j \le C_{ij}$ ، $V_j \ge 0$, آزاد U_i

۴) $U_i - V_j \le C_{ij}$ ، $U_i , V_j \ge 0$

۱۲ـ در یک مسأله حمل و نقل یک جواب اولیه به صورت زیر داده شده است:

35 (8)	(6)	(10)	(9)	35
10 (9)	20 (12)	20 (13)	(7)	50
(14)	(9)	10 (16)	30 (5)	40
45	20	30	30	

در این صورت در تکرار بعدی روش سیمپلکس حمل و نقل متغیر وارد شونده کدام متغیر خواهد بود؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) x_{13} ۲) x_{24} ۳) x_{31} ۴) x_{32}

۱۳ـ یک جدول حمل و نقل متعادل $n \times n$ که عرضه‌ها و تقاضاها همه جا یک واحد است را در نظر بگیرید و جواب بهینه آن را x^* با مقدار تابع هدف $z(x^*)$ بنامید. حال اگر به همهٔ عناصر جدول مذکور، مقدار ثابت k را اضافه کنیم و جواب بهینه مسأله جدید را $\bar{x}$ با مقدار تابع هدف $z(\bar{x})$ فرض کنیم، آنگاه:

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۲)

۱) $\bar{x} = x^*$

۲) $\bar{x} = x^*$ و $z(x^*) < z(\bar{x})$

۳) $\bar{x} = x^*$ و $z(x^*) > z(\bar{x})$

۴) x^* جواب بهینهٔ مسأله جدید و $\bar{x}$ جواب بهینه مسأله اصلی است.

۱۴ـ کدام یک از مسائل زیر یک زیر مسأله از مسأله فروشنده دوره‌گرد (Traveling salesman problem) می‌باشد؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۲)

۱) مسأله کوله‌پشتی (The Knapsack problem)

۲) مسأله تخصیص (The assignment Problem)

۳) مسأله پوشش مجموعه (The Set – covering Problem)

۴) مسأله بودجه‌بندی سرمایه (The Capital Budgeting Problem)

۱۵ـ در یک مجموعه از خانه‌های جدول حمل و نقل که تشکیل حلقه را داده‌اند می‌توان گفت:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۲)

۱) یک خانه از تمام سطرها و ستون‌های جدول حمل و نقل در آن موجود است.

۲) از هر سطر یا ستون جدول حمل و نقل حتماً از دو خانه استفاده شده است.

۳) سطر یا ستونی از جدول حمل و نقل وجود دارد که از هر خانه آن فقط یک بار استفاده شده است.

۴) از هر سطر یا ستون جدول حمل و نقل یا از دو خانه استفاده شده است و یا از خانه‌ای استفاده نشده است.

۱۶ـ به ازای چه مقادیری از θ جواب مسأله حمل و نقل زیر بهینه است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۲)

($۸-\theta$)	۲۵ ($۱۰+\theta$)
۴۵ ($۹+۲\theta$)	۵ ($۱۳-\theta$)

۱) $\theta \le \frac{۲}{۵}$

۲) $\theta \ge \frac{۲}{۳}$

۳) $\theta \ge \frac{۴}{۵}$

۴) $\theta \le \frac{۴}{۵}$

■ **توجه کنید که دو سؤال بعدی در رابطه با مسأله کلی زیر تحت عنوان «برنامه‌ریزی حمل و نقل» است.**

شرکتی را در نظر بگیرید که دارای دو کارخانه و سه انبار عمده باشد. تصور کنید که کارخانه اول بتواند حداکثر ۵۰۰ کیلو از یک محصول و کارخانه دوم حداکثر ۲۰۰ کیلو از این محصول مشخص تولید کند. فرض کنید که تقاضای سه انبار به ترتیب ۱۵۰ و ۲۰۰ و ۳۵۰ کیلو از این محصول باشد. هزینه تولید هر کیلو محصول در کارخانه i و انتقال آن به انبار j مطابق جدول زیر است:

تصور کنید که مسأله عبارت است از تعیین برنامه حمل و نقلی که بتواند تقاضاها را در حداقل هزینه تامین کند.

کارخانه	انبار		
	۱	۲	۳
۱	۸	۱۰/۲	۱۲/۶
۲	۷	۹	۱۱/۸

۱۷ـ در «مسأله برنامه‌ریزی حمل و نقل» فرض کنید که x_{ij} نشان دهنده مقدار کالایی باشد که از کارخانه i به انبار j حمل می‌شود. در آن صورت محدودیت عرضه کدام است اگر S_i ظرفیت تولید کارخانه iام باشد؟ (مهندسی صنایع گرایش‌های صنایع و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۲)

۱) $\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = S_i$ و یا $\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \le S_i$ برای $i = 1,2$ هر دو صحیح است.

۲) $\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \le S_i \;;\; j = 1,2$

۳) $\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \ge S_i \;;\; i = 1,2$

۴) $\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = S_i \;;\; i = 1,2$

۱۸ـ در «مسأله برنامه‌ریزی حمل و نقل» فرض کنید که x_{ij} مبین مقدار کالایی باشد که از کارخانه i به انبار j انتقال داده می‌شود. محدودیت تقاضا برای انبار اول کدام است؟ (مهندسی صنایع گرایش‌های صنایع و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۲)

۱) فقط $x_{11} + x_{21} = 150$ صحیح است.

۲) $x_{11} + x_{21} \ge 150$ و یا $x_{11} + x_{21} = 150$ هر دو صحیح است.

۳) فقط $x_{11} + x_{21} \ge 150$ صحیح است.

۴) فقط $x_{11} + x_{21} \le 150$ صحیح است.

۱۹ـ در یک مسأله به کارگماری تصور کنید که بخواهیم چهار فروشنده را به چهار منطقه فروش اختصاص دهیم. به طوری‌که به هر منطقه فقط یک فروشنده اختصاص یابد. اعداد داده شده در جدول زیر نشان‌دهنده درآمد حاصل از فروش در این مناطق است. تصور کنید که تخصیص فروشنده B به منطقه ۱ و فروشنده A به منطقه ۲ امکان‌پذیر نباشد. با توجه به این محدودیت، حل بهینه این تخصیص با هدف ماکزیمم کردن درآمد کل چقدر است؟

(مهندسی صنایع گرایش‌های صنایع و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۸۲)

منطقه / فروشنده	۱	۲	۳	۴
A	۶۵	۷۳	۵۵	۵۸
B	۹۰	۶۷	۸۷	۷۵
C	۱۰۶	۸۶	۹۶	۸۹
D	۸۴	۶۹	۷۹	۷۷

۱) حل بهینه این مسأله A_4، B_3، C_1 و D_2 با درآمد کل ۳۲۰ واحد پول است.

۲) حل بهینه این مسأله A_2، B_3، C_1 و D_4 با درآمد کل ۳۴۳ واحد پول است.

۳) حل بهینه این مسأله A_3، B_2، C_4 و D_1 با درآمد کل ۲۹۵ واحد پول است.

۴) حل بهینه این مسأله A_2، B_1، C_3 و D_4 با درآمد کل ۳۳۶ واحد پول است.

۲۰ـ مسأله تخصیص یا واگذاری با جدول هزینه‌های زیر را در نظر بگیرید:

کار / شخص	۱	۲	۳	۴
A	۵	۸	۶	۷
B	۸	۶	۷	۵
C	۵	۹	۸	۶
D	۷	۸	۶	۹

حداقل هزینه تخصیص کارها به اشخاص برابر است با: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۳)

۱) $Z^* = ۲۵$ ۲) $Z^* = ۲۴$ ۳) $Z^* = ۲۳$ ۴) $Z^* = ۲۱$

۲۱ـ روش پله سنگی stepping stone ، در مسائلِ .... (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۳)

۱) کوتاهترین مسیر، کاربرد دارد. ۲) حداقل مسافت، کاربرد دارد.

۳) حداکثر جریان، کاربرد دارد. ۴) در هیچ‌کدام از موارد کاربردی ندارد.

۲۲ـ جهت حل مسأله تخصیص می‌توان از کدام روش زیر استفاده کرد؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۳)

۱) روش مجارستانی ۲) برنامه‌ریزی خطی ۳) روش انشعاب و تحدید ۴) همه موارد

۲۳ـ تعداد متغیرهای تبهگن در یک مسأله تخصیص با n شغل و n فرد، برابر است با:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۳)

۱) $۲n-۱$ ۲) $۲n+m$ ۳) $m+n-۱$ ۴) هیچ‌کدام

۲۴ـ در جدول حمل و نقل زیر به ازای $\lambda = ۰$ جواب پایه بهینه است. به ازای چه مقادیری از λ جواب بهینه باقی می‌ماند؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۴)

هزینه 4، مقدار 15	هزینه 7-3λ	هزینه 5، مقدار 15
هزینه 2	هزینه 4-λ، مقدار 10	هزینه 3-2λ، مقدار 10

۱) $۰ \le \lambda \le \frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲} \le \lambda \le \frac{۱}{۴}$

۳) $۰ \le \lambda \le \frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲} \le \lambda \le \frac{۱}{۳}$

۲۵ـ کدام گزینه در مورد جداول حل مسائل حمل و نقل کلاسیک به روش سیمپلکس صحیح است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۴)

۱) بردارهای مرتبط با خانه‌هایی (Cells) که با هم حلقه می‌سازند استقلال خطی دارند.

۲) بردارهای مرتبط با خانه‌هایی (Cells) که با هم حلقه می‌سازند استقلال خطی ندارند.

۳) بردارهای مرتبط با خانه‌هایی (Cells) که با هم حلقه می‌سازند ممکن است استقلال خطی داشته باشند.

۴) بردارهای مرتبط با خانه‌هایی (Cells) که با هم حلقه می‌سازند از ترکیب محدب بردارهای سایر خانه‌ها به دست می‌آیند.

۲۶ـ در یک مسأله حمل و نقل فرض کنید که مجموع مقادیر عرضه برابر با مجموع مقادیر تقاضا باشد. اگر مسأله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی در نظر بگیرید، کدام یک از جملات زیر صحیح خواهند بود؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۴)

۱) حل بهینه یگانه نخواهد بود. ۲) در حل بهینه، از تمام مبدأها به تمام مقصدها کالا ارسال خواهد شد.

۳) در حل بهینه، مقادیر تمام متغیرهای لنگی (Slack) صفر خواهند شد. ۴) در حل بهینه، هر مقصد تنها از یک مبدأ کالا دریافت خواهد کرد.

۲۷ـ می‌دانیم که مدل مسائل حمل و نقل کلاسیک که برای m مبدأ و n مقصد تدوین می‌شوند، دارای $m+n$ محدودیت و (m) (n) متغیر می‌باشد. کدام گزینه در مورد این مسائل صحیح است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۴)

۱) فقط با حذف آخرین محدودیت مسأله جواب بهینه تغییر نمی‌کند.

۲) با حذف هر کدام از محدودیت‌های مسأله، جواب بهینه تغییر می‌کند.

۳) با حذف هر کدام از محدودیت‌های مسأله ممکن است جواب مسأله بی‌کران شود.

۴) با حذف هر کدام از محدودیت‌های $(m+n)$ گانه مسأله، جواب بهینه تغییر نمی‌کند.

■ مسأله حمل و نقل مقابل را T بنامید.

$$\underset{s.t}{\text{Min}}\, Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij}$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1,2,\cdots,m$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1,2,\cdots,n$$
$$x_{ij} \ge 0$$

در ارتباط با این مسأله به ۲ سؤال بعد پاسخ دهید.

۲۸ـ کدام گزینه در مورد مسأله T درست است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) مسأله T همواره جوابِ شدنی دارد.

۲) مسأله T همواره دارای جوابِ شدنی عدد صحیح می‌باشد.

۳) مسأله T فقط وقتی دارای جوابِ شدنی است که $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ باشد.

۴) مسأله T وقتی دارای جوابِ شدنی عدد صحیح است که کلیه a_i و b_jها عدد صحیح باشند.

۲۹ـ در صورت وجود جواب شدنی برای مسأله T کدام گزینه درست است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) هر محدودیتی را می‌توان از ترکیب خطی محدودیت‌های دیگر به دست آورد.

۲) هیچ محدودیتی را نمی‌توان از ترکیب خطی دیگر محدودیت‌ها به دست آورد.

۳) فقط محدودیت آخر را می‌توان از ترکیب خطی محدودیت‌های دیگر به دست آورد.

۴) هر محدودیتی را می‌توان از ترکیب خطی محدّب محدودیت‌های دیگر به دست آورد.

۳۰ـ مسأله حمل ونقلی را در نظر بگیرید که m مبدأ و n مقصد دارد و تابع هدف بیشینه می‌شود. موجودی کالا در مبدأ i برابر a_i واحد و مقدار تقاضا برای کالا در مقصد j برابر b_j واحد است. هزینه حمل هر واحد کالا از مبدأ i به مقصد j برابر c_{ij} ریال است. x_{ij} مقدار کالایی است که از مبدأ i به مقصد j حمل می‌شود. در مدل دوگان (dual) این مسأله، بردار متغیرهای مسأله دوگان را به صورت $W = (u_1,...,u_m, v_1,...,v_n)$ تعریف می‌کنیم. برای هر x_{ij} در مسأله حمل و نقل یک محدودیت در دوگان وجود دارد. محدودیت مربوط به متغیر x_{st} در مدل دوگان کدام است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) $u_s + v_t \ge c_{st}$

۲) $\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = c_{st}$

۳) $\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j \ge c_{st}$

۴) $u_s + v_t = \min.\{a_s, b_t\}$

۳۱ـ آیا مقدار تابع هدف مدل حمل و نقل کلاسیک می‌تواند نامحدود شود؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۵)

۱) خیر
۲) همواره
۳) اگر تباهیده شود
۴) در شرایط مخصوص

۳۲ـ مسأله حمل و نقل متوازن مقابل را در نظر بگیرید :

$$\underset{s.t.}{\text{Min}} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & i = 1,...,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & j = 1,...,n \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases} \quad ; \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

فرض کنید هزینه حمل و نقل هر محصول در کلیه کمان‌های شبکه ۲ واحد پولی افزایش یابد، آنگاه: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۶)

۱) جواب بهینه متغیرهای مسأله ثابت باقی می‌ماند ولی هزینه حمل کل افزایش می‌یابد.

۲) جواب بهینه متغیرهای مسأله ثابت باقی می‌ماند ولی هزینه حمل کل کاهش می‌یابد.

۳) جواب بهینه متغیرهای مسأله تغییر می‌کند و هزینه حمل کل افزایش می‌یابد.

۴) جواب بهینه متغیرهای مسأله تغییر می‌کند و هزینه حمل کل کاهش می‌یابد.

■ **مسأله حمل و نقل T به شرح مقابل مفروض است:**

$$\underset{s.t}{\text{Min}}\ Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\ x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \qquad i=1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \qquad j=1,\dots,n$$

$$x_{ij}\geq 0 \quad \forall_{i,j}$$

که در آن کلیهٔ a_i و b_jها دارای مقادیر مثبت می‌باشند. جدول حل این مسأله از m سطر و n ستون تشکیل شده است که دارای $m\times n$ خانه (cell) می‌باشد. متغیر مربوط به سطر i و ستون j را با x_{ij} و بردار ستونی مرتبط با آن را با a_{ij} نمایش می‌دهیم. در ارتباط با این مسأله به سؤالات ۴۴ تا ۴۷ مستقل از هم پاسخ دهید.

۳۳ـ در مسأله T کدام گزینه درست است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۶)

۱) حداکثر تعداد خانه‌هایی که در جدول حل مسأله می‌توانند حلقه تشکیل دهند، برابر $m+n-1$ است.

۲) حداکثر تعداد خانه‌هایی که در جدول حل مسأله می‌توانند حلقه تشکیل دهند، برابر $m+n$ است.

۳) در جدول حل مسأله T بردارهای a_{ij} مربوط به خانه‌های (i,j) که با یکدیگر حلقه (loop) تشکیل می‌دهند استقلال خطی دارند.

۴) در جدول حل مسأله T بردارهای a_{ij} مربوط به خانه‌های (i,j) که با یکدیگر حلقه (loop) تشکیل می‌دهند استقلال خطی ندارند.

۳۴ـ در صورت وجود جواب شدنی برای مسأله T کدام گزینه درست است؟ (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۶)

۱) حداکثر به تعداد $(m\times n)$ متغیر می‌تواند مقدار مثبت داشته باشد.

۲) حداکثر به تعداد $(m+n)$ متغیر می‌تواند مقدار مثبت داشته باشد.

۳) حداکثر به تعداد $(m+n-1)$ متغیر می‌تواند مقدار مثبت داشته باشد.

۴) حداکثر به تعداد $(m\times n-1)$ متغیر می‌تواند مقدار مثبت داشته باشد.

۳۵ـ در صورت وجود جواب شدنی برای مسأله T چنانچه حمل کالا از مبدأ i به مقصد j مقدور نباشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۶)

۱) c_{ij} را برابر عدد منفی بسیار بزرگ $-M$ قرار می‌دهیم.

۲) c_{ij} را برابر عدد بسیار بزرگ M قرار می‌دهیم.

۳) a_i را برابر صفر قرار می‌دهیم.

۴) a_i و b_j را همزمان برابر صفر قرار می‌دهیم.

۳۶ـ اگر در مسأله T کلیه a_i ها و b_j برابر ۱ بوده و $m=n$ باشد، آنگاه: (مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۶)

۱) مسأله دارای جواب بهینه چندگانه خواهد بود.

۲) جواب بهینه مسأله غیرتبهگن (no degenerate) خواهد بود.

۳) جواب بهینه مسأله ممکن است تبهگن باشد.

۴) جواب بهینه مسأله قطعاً تبهگن خواهد بود.

۳۷ـ در برنامه‌ریزی حمل و نقل اگر d_j, S_i (مقادیر منبع‌ها و تقاضاها) عدد صحیح باشند، در این صورت جواب پایه مسأله همواره:

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۷)

۱) اعداد صحیح است. ۲) هر عددی می‌تواند باشد. ۳) اعداد مثبت و واقعی است. ۴) هیچ کدام

۳۸ـ جدول بهینه مسأله حمل و نقل زیر را درنظر بگیرید، اگر ضریب هزینه حمل و نقل X_{1c} از مقدار ۵ به $5-\lambda$ تغییر یابد، بازه تغییرات λ چقدر باشد تا پایه قبلی بهینه باقی بماند؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۷)

	A	B	C
۱	هزینه ۴، ۱۰	هزینه ۷	هزینه ۵، ۱۰
۲	هزینه ۲	هزینه ۴، ۱۵	هزینه ۳، ۵

۱) $0\geq\lambda\geq-1$

۲) $\lambda\geq-2$

۳) $0\geq\lambda\geq-2$

۴) $\lambda\geq 2$

۳۹ـ در یک مسأله حمل و نقل تعداد مراکز عرضه ۴ و تعداد مراکز تقاضا ۳ است. اگر مجموع عرضه و تقاضا با هم برابر نباشند:

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۷)

۱) تعداد متغیرها در حل پایه ممکن، مساوی ۶ است.
۲) تعداد متغیرها در حل پایه ممکن، مساوی ۷ است.
۳) تعداد متغیرها در حل پایه ممکن، مساوی ۸ است.
۴) حل پایه اولیه با هر روشی حتماً تبهگن یا Degenerate است.

۴۰ـ جدول بهینه مسأله حمل و نقل را در نظر بگیرید. اگر به مقدار هزینه در ارسال کالا از ۱ به ۴ مقدار Δ افزوده شود، به ازای چه مقداری از Δ مسأله بیش از یک جواب بهینه دارد؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۷)

۸	۶ (۱۲)	۱۰ (۲۵)	۹
۹ (۴۵)	۱۲	۱۳ (۵)	۷
۱۴	۹ (۱۰)	۱۶	۵ (۳۰)
۴۵	۳۲	۳۰	۳۰

۱) $\Delta = 7$
۲) $\Delta = 5$
۳) $\Delta = -5$
۴) $\Delta = -7$

۴۱ـ در جدول حمل و نقل زیر ضرایب C_{22} و C_{11} و متغیر ورودی کدام‌اند؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۷)

	$v_1 = 10$	$v_2 = 7$	$v_3 = 9$	$v_4 = 8$
$u_1 = 0$	(۲۵۰)	۷ (۲۵۰)	۹ (۰)	۱۲
$u_2 = -5$	۴	(۲۰۰)	۱۱	۸
$u_3 = -5$	۱۵	۱۴	۶ (۲۵۰)	۵ (۲۵۰)
	۲۵۰	۴۵۰	۲۵۰	۲۵۰

۱) $C_{11} = 2$, $C_{22} = 10$, x_{21} متغیر وارد شونده
۲) $C_{11} = 10$, $C_{22} = 2$, x_{21} متغیر وارد شونده
۳) $C_{11} = 10$, $C_{22} = 2$, x_{23} متغیر وارد شونده
۴) $C_{11} = 2$, $C_{22} = 10$, x_{23} متغیر وارد شونده

۴۲ـ مسأله حمل و نقل زیر را در نظر بگیرید.

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \quad ; \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \; ; \; i = 1 \text{ تا } m \quad ; \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \; ; \; j = 1 \text{ تا } n \quad x_{ij} \geq 0 \quad ;$$

اگر B یک پایه قابل قبول این مسأله باشد و سیستم روابط خطی زیر را حل کنیم.

$u_i + v_j = c_{ij} \rightarrow$ **مربوط به x_{ij} پایه**

و $w = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$ یک جواب قابل قبول برای مسأله دوگان مسأله فوق باشد، کدام گزینه صحیح است؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ آزاد ۸۸)

۱) مسأله نامحدود است.
۲) دوگان نامحدود است.
۳) B پایه بهینه مسأله است.
۴) مسأله جواب بهینه دارد؛ ولیکن B لزوماً پایه بهینه نیست.

۴۳ـ کدام عبارت زیر صحیح می‌باشد؟

(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۸۹)

۱) در مسأله حمل و نقل تعداد صفرها در ماتریس A برابر $2mn(m+n-2)$ می‌باشد.
۲) شرط لازم و نه کافی برای عدد صحیح شدن جواب حمل و نقل، صحیح بودن عرضه و تقاضاست.
۳) در مسأله تخصیص در هر جواب پایه‌ای تعداد متغیرهای غیر پایه‌ای $n(n-1)$ می‌باشد.
۴) در حل مسأله حمل و نقل با LP در هر حل پایه‌ای، حداقل ۱ درجه تباهیدگی داریم.

۴۴ـ اگر در یک مسأله حمل نقل u_i متغیر دوگان نظیر محدودیت عرضه i ام باشد، مقدار u_i چه مقداری می‌تواند باشد؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۹)

۱) صفر
۲) هر عدد نامثبت
۳) هر عدد نامنفی
۴) هر عددی می‌تواند باشد.

۴۵ـ جدول نهایی مدل حمل و نقل را در نظر بگیرید. در صورت ورود متغیر غیراساسی x_{23} میزان تغییرات در هزینه کل حمل نقل معادل چیست؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۹)

مبدا \ مقصد	۱	۲	۳	۴	عرضه	u_i
۱	۶ / ۰	۹ / (۲)	۸ / ۶۰۰	۱۳ / ۱۰۰	۷۰۰	۰
۲	۱۲ / (۱۰)	۱۷ / (۱۴)	۱۰ / (۶)	۹ / ۴۰۰	۴۰۰	۴-
۳	۷ / ۳۰۰	۸ / ۳۰۰	۱۱ / (۲)	۱۵ / (۱)	۶۰۰	۱
تقاضا	۳۰۰	۳۰۰	۶۰۰	۵۰۰	۱۷۰۰	
V_j	۶	۷	۸	۱۳		

۱) کاهش ۲۴۰۰واحد
۲) افزایش ۲۴۰۰ واحد
۳) کاهش ۲۶۰۰ واحد
۴) افزایش ۳۶۰۰ واحد

۴۶ـ یک مسأله حمل و نقل با جدول بهینه و احتیاجات زیر مفروض است. اگر هزینه نگهداری کالای اضافی در مبادی ۱ و ۲ و ۳ به ترتیب برابر ۶ و ۵ و ۳ باشد و باید تمامی عرضه از مبدأ ۲ ارسال گردد. هزینه‌های مربوط به ستون فرضی برای مسأله سیمپلکس حمل و نقل کدام گزینه می‌باشد؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۸۹)

مبدا

	۳۰۰	۱۰۰	۲۰۰
۱۰۰	۵	۲	۳
۳۰۰ عرضه‌ها	۸	۴	۵
۳۰۰	۹	۷	۶

۱) $C_{14} = M,\ C_{24} = 5,\ C_{34} = M$
۲) $C_{14} = 6,\ C_{24} = M,\ C_{34} = 3$
۳) $C_{14} = M,\ C_{24} = 0,\ C_{34} = M$
۴) $C_{14} = 0,\ C_{24} = M,\ C_{34} = 0$

۴۷ـ در مدل برنامه‌ریزی خطی مسأله حمل و نقل، محدودیت‌های اصلی مسأله به‌صورت زیر است: (مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۹۰)

$$\sum_j x_{ij} = a_i \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j \qquad j = 1,2,\dots,n$$

در این صورت چگالی ماتریس ضرایب (نسبت اعداد غیر صفر به اعداد صفر) آن چند درصد است؟

۱) $\dfrac{200}{m+n}$
۲) $\left(\dfrac{m+n}{mn}\right)*100$
۳) $\left(\dfrac{mn-(m+n)}{mn}\right)*100$
۴) $\left(\dfrac{mn-(m+n)}{2mn}\right)*100$

۴۸ـ جواب اولیه شدنی گوشه در مدل حمل و نقل در شبکه حمل و نقل معادل آن دارای چه خاصیتی است؟(مهندسی صنایع گرایش صنایع ـ سراسری ۹۰)

۱) ما بین گره‌های عرضه یال دارد.
۲) ما بین گروه‌ها چندین دور دارد.
۳) درخت گسترش است.
۴) به تعداد کل گره‌های عرضه و تقاضا کمان دارد.

۴۹ـ ماتریس هزینه مسأله تخصیص زیر را با هدف حداقل کردن تابع هدف در نظر بگیرید. مقدار بهینه تابع هدف کدام است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری۹۰)

$$\begin{pmatrix} 10 & 17 & 37 & 30 & 40 \\ 50 & 40 & 30 & 25 & 35 \\ 60 & 80 & 40 & 50 & 60 \\ 50 & 30 & 90 & 60 & 40 \\ 80 & 70 & 50 & 60 & 40 \end{pmatrix}$$

۱) کوچکتر یا مساوی ۹۵ است.
۲) برابر ۱۳۰ می‌باشد.
۳) بزرگتر یا مساوی ۱۴۰ می‌باشد.
۴) برابر ۱۲۴ می‌باشد.

۵۰ـ در صورتی که در مسأله حمل و نقل $(c_{ij} - u_i - v_j)$ برای بعضی از متغیرهای غیرپایه‌ای در وضعیت بهینگی صفر باشد، در آن صورت:

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری۹۰)

۱) مسأله حتماً تباهیده است.
۲) مسأله دارای جواب بهینه چندگانه است.
۳) مسأله حتماً تباهیده و دارای جواب بهینه چندگانه است.
۴) مسأله دارای جواب بی‌کران است.

۵۱ـ در یک حل امکان‌پذیر در یک مدل حمل و نقل متوازن با m نقطه عرضه و n نقطه تقاضا به تعداد........................ متغیر دارای مقدار........................ می‌باشد.

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۹۰)

۱) $(m+n-1)$، مثبت
۲) $(m+n-1)$، غیرمنفی
۳) حداکثر $(m\times n)$، مثبت
۴) حداکثر $(m+n-1)$، غیرمنفی

۵۲ـ هر مسأله تخصیص قابل تبدیل به مدل حمل و نقل............ و هر مدل حمل و نقل قابل تبدیل به مسأله تخصیص.................

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ سراسری ۹۰)

۱) است، نیست
۲) نیست، نیست
۳) است، است
۴) نیست، است

۵۳ـ با توجه به جدول اگر x_{22} به عنوان متغیری ورودی انتخاب شود میزان تغییر در هزینه به چه میزان می‌گردد.

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۹۱)

	D_1	D	D_3	D_4	
s_1	۵	۳ ۸۰	۷ ۲۰	۶	۱۰۰
s_2	۴ ۵۰	۶	۸ ۰	۳ ۵۰	۱۰۰
s_3	۴	۸	۲ ۵۰	۴	۵۰
	۵۰	۸۰	۷۰	۵۰	۲۵۰

۱) افزایش ۴۰ واحد
۲) افزایش صفر واحد
۳) افزایش ۱۶۰ واحد
۴) کاهش ۴۰ واحد

۵۴ـ یکی از تکرارهای مسأله برنامه‌ریزی پارامتریک به شرح زیر است تحت چه شرایطی جواب بهینه است؟

(مهندسی صنایع گرایش سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی ـ آزاد ۹۱)

	z	x_1	x_2	S_1	S_2	
z	۱	۰	$(8-2\theta)$	۰	$6+\theta$	$100+5\theta$
x_1	۰	۱	۲	۰	۱	$-2+2\theta$
S_1	۰	۰	-1	۱	۳	$15-3\theta$

۱) $0\le\theta<5$
۲) $0\le\theta\le 4$
۳) $-6\le\theta\le 4$
۴) $1\le\theta\le 4$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل پنجم

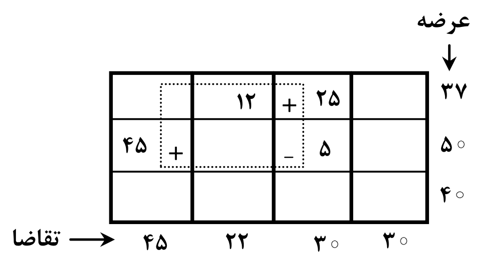
۱ـ گزینه «۳» با استفاده از متغیرهای روی گوشه‌های حلقه نمی‌توان یک جواب پایه‌ای شدنی ساخت زیرا وابسته خطی‌اند.

۲ـ گزینه «۳» C_{13} ضریب هزینه متغیر پایه‌ای x_{13} می‌باشد پس با تغییر آن باید نامنفی بودن $C_{ij}-Z_{ij}$ برای همه متغیرهای غیرپایه‌ای که خانه مربوط به متغیر پایه‌ای C_{13} در حلقه آنهاست را بررسی نماییم.

$$C_{11}-Z_{11}=8-(10+\Delta)+13-9=2-\Delta\ge 0\to\Delta\le 2$$
$$C_{22}-Z_{22}=12-13+(10+\Delta)-6=3+\Delta\ge 0\to\Delta\ge -3$$
$$C_{24}-Z_{24}=7-13+(10+\Delta)-6+9-5=2+\Delta\ge 0\to\Delta\ge -2 \qquad \Rightarrow -2\le\Delta\le 2$$
$$C_{31}-Z_{31}=14-9+6-(10+\Delta)+13-9=5-\Delta\ge 0\to\Delta\le 5$$
$$C_{33}-Z_{33}=16-9+6-(10+\Delta)=3-\Delta\ge 0\to\Delta\le 3$$

۳ـ گزینه «۳»

x_{11} یک متغیر غیرپایه‌ای است پس حلقه مربوط بـه آن را تشـکیل داده و با توجه به علامت درج شده در گوشه‌های حلقـه یـک واحـد بـه متغیرهـای پایه‌ای این گوشه‌ها اضافه یا کم می‌کنـیم. x_{13} و x_{21} یـک واحـد اضـافه و x_{23} یک واحد کم می‌شوند.



۴ـ گزینه «۳»

$C_{۲۲}-Z_{۲۲}=۲۰-۳۰+۱۰-۱۰=-۱۰<۰$ $\quad$ $C_{۲۳}-Z_{۲۳}=۱۵-۳۰+۱۰-۱۵=-۲۰<۰$

$C_{۳۱}-Z_{۳۱}=۵-۳۰+۱۵-۱۰=-۲۰<۰$ $\quad$ $C_{۳۲}-Z_{۳۲}=۲۵-۳۰+۱۵-۱۰=۰$

جواب داده‌شده، بهینه نیست و یکی از متغیرهای $x_{۳۲}$ یا $x_{۳۱}$ می‌تواند وارد پایه شود ولی نمی‌توانیم بیش از یک متغیر خروجی داشته باشیم. اگر $x_{۳۲}$ وارد پایه شود، متغیرهای $x_{۲۱}$ و $x_{۱۳}$، هر دو صفر می‌شود، می‌توانیم فرض کنیم $x_{۲۱}$ از پایه خارج شده و $x_{۱۳}$ با مقدار صفر در پایه مانده است؛ یعنی با ورود $x_{۳۲}$ به پایه، یک جواب پایه‌ای تباهیده به دست می‌آید.

۵ـ گزینه «۳» با تغییرات گفته شده در مسأله مقدار متغیر $x_{۱۲}^*=۱۲$ به $x_{۱۲}^*=۱۳$ در جواب بهینه تغییر می‌یابد و با توجه به ضریب هزینه آن یعنی $C_{۱۲}=۶$ مقدار بهینه تابع هدف ۶ واحد اضافه می‌شود. بقیه مقادیر جواب بهینه بدون تغییر باقی می‌مانند.

۶ـ گزینه «۴» شرط لازم برای تبهگن در مدل حمل و نقل این است که جمع زیر مجموعه‌های حقیقی از عرضه در سطرها مساوی جمع زیرمجموعه حقیقی از تقاضا در ستون‌ها باشد.

۷ـ گزینه «۱» $C_{ij}-Z_{ij}$ خانه غیرپایه‌ای $x_{۱۱}$ را تشکیل می‌دهیم:

$C_{۱۱}-۱۰+۱۳-۹\geq ۰ \Rightarrow C_{۱۱}\geq ۶$

۸ـ گزینه «۲» هر جواب قابل قبول پایه‌ای در مدل تخصیص $m\times m$ دارای $۲m-۱$ متغیر پایه‌ای است، که m تا از آنها دارای مقدار ۱ و $m-۱$ تای مابقی دارای مقدار ۰ هستند.

۹ـ گزینه «۳» در مسأله حمل و نقل متوازن با m مبدأ و n مقصد، $m+n$ محدودیت به صورت تساوی خواهیم داشت و در روش Mـ بزرگ نیاز به $m+n$ متغیر مصنوعی داریم.

۱۰ـ گزینه «۳» مقادیر $C_{ij}-Z_{ij}$ خانه‌های غیر پایه را محاسبه می‌کنیم:

$C_{۱۱}-Z_{۱۱}=۵-۸+۳-۷=-۷<۰$ $\quad$ $;C_{۳۳}-Z_{۳۳}=۲-۱۰+۷-۳=-۴<۰$

$C_{۲۱}-Z_{۲۱}=۴-۸+۳-۹=-۱۰<۰$ $\quad$ $;C_{۲۳}-Z_{۲۳}=۶-۱۰+۷-۹=-۶<۰$

دقت شود که تابع هدف Max است و حل پیشنهادی بهینه است.

مقادیر این جواب عبارتند از:

$x_{۳۱}=۱۵۰;\ x_{۳۲}=۵۰;\ x_{۲۲}=۳۰۰;\ x_{۱۲}=۱۵۰;\ x_{۱۳}=۲۵۰$

و مقدار بهینه تابع هدف $Z=۷۶۰۰$ است.

۱۱ـ گزینه «۱»

مسأله اولیه (حمل و نقل)

$$\underset{s.t}{\text{Min}Z}=\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n}C_{ij}x_{ij}$$

محدودیت‌های عرضه : $\sum_{j=۱}^{n}x_{ij}=a_i \qquad :u_i$

محدودیت‌های تقاضا : $\sum_{i=۱}^{m}x_{ij}=b_j \qquad :v_j$

$x_{ij}\geq ۰; i=۱,\ldots,m;\ j=۱,\ldots,n.$

مسأله دوگان (حمل و نقل)

$$\underset{s.t.}{\text{Max}}\ \ w=\sum_{i=۱}^{m}a_iu_i+\sum_{j=۱}^{n}b_jv_j$$

$u_i+v_j\leq c_{ij}$

u_i, v_j : آزاد

$i=۱,\ldots,m.$

$j=۱,\ldots,n.$

۱۲ـ گزینه «۴» $C_{ij}-Z_{ij}$ متغیرهای غیر پایه عبارتند از:

$C_{۳۱}-Z_{۳۱}=۱۴-۹+۱۳-۱۶=۲$ $\quad$ $C_{۱۴}-Z_{۱۴}=۹-۵+۱۶-۱۳+۹-۸=۸$ $\quad$ $C_{۱۲}-Z_{۱۲}=۶-۱۲+۹-۸=-۵$

$C_{۳۲}-Z_{۳۲}=۹-۱۲+۱۳-۱۶=-۶$ $\quad$ $C_{۲۴}-Z_{۲۴}=۷-۵+۱۶-۱۳=۵$ $\quad$ $C_{۱۳}-Z_{۱۳}=۱۰-۱۳+۹-۸=-۲$

متغیر $x_{۳۲}$ کاندید ورود به پایه است.

۱۳ـ گزینه «۴» مسأله ارائه‌شده یک مسأله تخصیص می‌باشد. با افزودن عدد ثابت K به تمامی ضرایب هزینه جواب بهینه مسأله جدید $(\overline{X})$ برابر جواب بهینه مسأله قبلی (X^*) است. یعنی $\overline{x}=x^*$ است. پس می‌توان گفت x^* جواب بهینه مسأله جدید و $\overline{x}$ جواب بهینه مسأله اصلی است.

۱۴ـ گزینه «۲» مسأله «تخصیص» حالت خاصی از مسأله «فروشنده دوره‌گرد» است.

۱۵ـ گزینه «۴» در جدول حمل و نقل زیر در حلقه مربوط به خانه $x_{۱۳}$ هیچ خانه‌ای از ستون ۱ و سطر ۳ موجود نیست پس گزینه (۱) و (۲) نادرست هستند. همچنین سطر یا ستونی وجود ندارد که از هر خانه آن تنها یک بار استفاده شده باشد پس گزینه (۳) نیز نادرست است.

	۱	۲	۳
۱	۵	۱۰	
۲		۸	۱۲
۳	۱۵		

۱۶ـ گزینه «۱»

$$C_{۱۱}-Z_{۱۱}=(۸-\theta)-(۱۰+\theta)+(۱۳-\theta)-(۹+۲\theta)\geq ۰ \Rightarrow \theta \leq \frac{۲}{۵}$$

۱۷ـ گزینه «۱» مدل مسأله حمل و نقل متوازن به این صورت است:

$$\min z=\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n}C_{ij}X_{ij}$$

$\sum_{j=۱}^{n}X_{ij}=S_i$ $(i=۱,۲,\dots,m$ محدودیت‌های عرضه از مبدأ)

$\sum_{i=۱}^{m}X_{ij}=d_j$ $(j=۱,۲,\dots n$ محدودیت‌های تقاضا در مقصد)

$X_{ij}\geq ۰$ به ازای تمام i و j ها

(مدل مسأله حمل و نقل غیر متوازن و محدودیت عرضه و تقاضا)

$$\sum_{j=۱}^{n}X_{ij}\leq S_i \qquad (i=۱,۲,\dots,,m) \quad ; \quad \sum_{i=۱}^{m}X_{ij}\geq d_j \qquad (j=۱,۲,\dots,n)$$

۱۸ـ گزینه «۲» با توجه به توضیحات مسأله قبل در حالت متوازن، $\sum_{i=۱}^{m}X_{ij}=d_j$ و غیر متوازن $\sum_{i=۱}^{m}X_{ij}\geq d_j$ است. معادله مسأله به صورت زیر می‌باشد.

$x_{۱۱}+x_{۲۱}=۱۵۰$ و یا $x_{۱۱}+x_{۲۱}\geq ۱۵۰$

۱۹ـ گزینه «۱» چون مسأله تخصیص ماکزیمم‌سازی است و این که الگوریتم مجارستانی برای مسأله مینیمم‌سازی طراحی شده است، پس برای حل این مسأله کافی است ضرایب جدول را در منفی ضرب کرده تا تبدیل به مینیمم‌سازی شود، سپس آن را با الگوریتم مجارستان حل می‌کنیم و همچنین با توجه به فرض مسأله، تخصیص فروشنده B به منطقه ۱ و فروشنده A به منطقه ۲ امکان‌پذیر نمی‌باشد پس در خانه‌های مربوط به این دو در جدول M قرار می‌دهیم پس:

−۶۵	M	−۵۵	−۵۸
M	−۶۷	−۸۷	−۷۵
−۱۰۶	−۸۶	−۹۶	−۸۹
−۸۴	−۶۹	−۷۹	−۷۷

$\Rightarrow$

۰	M+۶۵	۱۰	۷
M+۶۷	۲۰	۰	۱۲
۰	۲۰	۱۰	۱۷
۰	۱۵	۵	۷

$\Rightarrow$

۰	M+۵۰	۱۰	۰
M+۶۷	۵	۰	۵
۰	۵	۱۰	۱۰
۰	۰	۵	۰

حداقل خطوط پوشش $=۴$

$$\begin{cases} A\rightarrow ۴ \\ B\rightarrow ۳ \\ C\rightarrow ۱ \\ D\rightarrow ۲ \end{cases}$$

$$Z^*=۵۸+۸۷+۱۰۶+۶۹=۳۲۰$$

۲۰ـ گزینه «۳» ماتریس تقلیل‌یافته به صورت زیر است:

۰	۲	۱	۲
۳	۰	۲	۰
۰	۳	۳	۱
۱	۱	۰	۳

$\Rightarrow$ حداقل خطوط پوششی $=۳<۴$

مینیمم عناصر پوشیده‌نشده برابر ۱ است که آن را از اعضای پوشیده‌نشده کسر و به اعضای دوبار پوشیده اضافه می‌کنیم:

۰	۱	۰	۱
۴	۰	۲	۰
۰	۲	۲	۰
۲	۱	۰	۳

$$\Rightarrow Z^*=۵+۶+۶+۶=۲۳$$

حداقل خطوط پوششی $=۴$

۲۱ـ گزینه «۴» روش پله‌سنگ برای یافتن جواب بهینه مسائل حمل و نقل استفاده می‌شود.

۲۲ـ گزینه «۴» با استفاده از روش مجارستانی، برنامه‌ریزی صفر و یک (انشعاب و تحدید) و یا روش‌های برنامه‌ریزی خطی می‌توان مسأله تخصیص را حل کرد.

۲۳ـ گزینه «۴» تعداد متغیر تبهگن در یک مسأله تخصیص $n \times n$ برابر $n-1$ است.

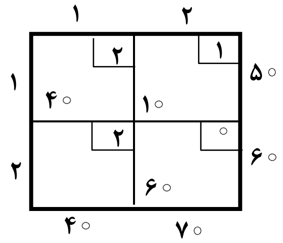
۲۴ـ گزینه «۱»

$$C_{12} - Z_{12} = (7-3\lambda) - 5 + (3-2\lambda) - (4-\lambda) = 1 - 4\lambda \geq 0 \rightarrow \lambda \leq \frac{1}{4}$$

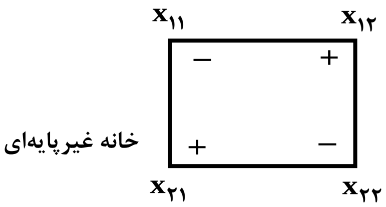
$$C_{21} - Z_{21} = 2 - (3-2\lambda) + 5 - 4 = 2\lambda \geq 0 \rightarrow \lambda \geq 0$$

و در نتیجه داریم: $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{4}$.

۲۵ـ گزینه «۲» جدول حمل و نقل زیر همراه با جواب پایه‌ای شدنی داده شده را در نظر بگیرید:



حلقه متغیر غیر پایه‌ای x_{21} به شکل مقابل است:



بردار ضرایب متغیرهای موجود در گوشه‌های حلقه عبارتند از: $a_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $a_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $a_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $a_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و همان‌طور که می‌بینید، $a_{21} = a_{11} - a_{12} + a_{22}$ است و در نتیجه $a_{21} - a_{11} + a_{12} - a_{22} = 0$. این به آن معنی است که ترکیب خطی غیر صفر $a_{21}, a_{22}, a_{12}, a_{11}$ برابر صفر شده است؛ یعنی بردارهای مرتبط با خانه‌هائی که با هم حلقه می‌سازند استقلال خطی ندارند.

۲۶ـ گزینه «۳» اگر $\sum_i a_i = \sum_j b_j$ همه محدودیت‌ها به تساوی تبدیل می‌شوند و مقادیر متغیرهای کمکی صفر می‌شود.

۲۷ـ گزینه «۴» همواره یکی از محدودیت‌های مسأله حمل و نقل متوازن، زائد است.

۲۸ـ گزینه «۳» چون همه محدودیت‌ها تساوی هستند.

۲۹ـ گزینه «۱» قیود مسأله حمل و نقل دارای یک درجه آزادی است یعنی همواره می‌توان یک محدودیت را از ترکیب خطی سایر محدودیت‌ها به دست آورد.

۳۰ـ گزینه «۱»

مسأله اولیه (حمل و نقل)

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = \sum\sum c_{ij} x_{ij} \\ &\text{s.t} \\ &\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad : u_i \\ &\quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad : v_j \\ &\quad x_{ij} \geq 0 \\ &\quad i = 1, \ldots, m \\ &\quad j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

$\xrightarrow{\text{دوگان}}$

$$\begin{aligned} &\text{Min } w = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \\ &\text{s.t} \\ &\quad u_i + v_j \geq C_{ij} \\ &\quad u_i, v_j : \text{آزاد} \\ &\quad i = 1, \ldots, m \\ &\quad j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

۳۱ـ گزینه «۱» مقدار بهینه تابع هدف مسأله حمل و نقل همواره محدود است.

۳۲ـ گزینه «۱» چون همه ضرایب هزینه، ۲ واحد اضافه شده‌اند پس مقادیر $C_{ij} - Z_{ij}$ها تغییری نمی‌کند زیرا در حلقه متغیر غیر پایه علامت گوشه‌ها یکی در میان + و - است و مقادیر بهینه متغیرها تغییر نخواهند کرد ولی مقدار Z^* زیاد می‌شود.

۳۳ـ گزینه «۴» به جواب سوال ۳۴ مراجعه شود.

۳۴ـ گزینه «۱» با فرض متوازن بودن مسأله $D = \sum_{i=۱}^{m} a_i = \sum_{j=۱}^{n} b_j$ می‌توان یک جواب برای مسأله به صورت $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{D}$ برای $۱ \le i \le m, ۱ \le j \le n$ ارائه کرد. این جواب در همه قیود صدق می‌کند (بررسی کنید) و چون $a_i > ۰$ و $b_j > ۰$ پس $x_{ij} > ۰$ برای $۱ \le i \le m$ و $۱ \le j \le n$. در چنین جوابی تمام $m \times n$ متغیر مقادیر مثبت دارند.

۳۵ـ گزینه «۲» با فرض $C_{ij} = M$ که M عددی بسیار بزرگ است و با توجه به تابع هدف که مینیمم‌سازی است، متغیر x_{ij} در پایه بهینه قرار نمی‌گیرد، یعنی $x_{ij} = ۰$.

۳۶ـ گزینه «۴» با توجه به شرایط ذکر شده، مسأله حمل و نقل به مسأله تخصیص تبدیل می‌شود که همه BFS های آن و از جمله جواب بهینه تباهیده هستند.

۳۷ـ گزینه «۱» جواب پایه به صورت $(x_B, ۰)$ است که $x_B = B^{-۱}b$ است و عناصر $B^{-۱}$ همگی ۰، ۱ یا ۱- و عناصر b نیز همگی عدد صحیح می‌باشند، پس همه مؤلفه‌های x_B عدد صحیح هستند.

۳۸ـ گزینه «۱» برای این که پایه قبلی بهینه باقی بماند، باید $C_{۱B} - Z_{۱B} \ge ۰$ و $C_{۲A} - Z_{۲A} \ge ۰$.

$$\left.\begin{array}{l} C_{۱B} - Z_{۱B} = ۷ - (۵ - \lambda) + ۳ - ۴ = \lambda + ۱ \ge ۰ \Rightarrow \lambda \ge -۱ \\ C_{۲A} - Z_{۲A} = ۲ - ۴ + (۵ - \lambda) - ۳ = -\lambda \ge ۰ \Rightarrow \lambda \le ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow -۱ \le \lambda \le ۰$$

۳۹ـ گزینه «۲» تعداد کل متغیرهای پایه در یک مسأله حمل و نقل نامتوازن برابر است با $m + n$. $۴ + ۳ = ۷$: تعداد متغیر پایه

۴۰ـ گزینه «۴» برای اینکه جدول بهینه بیش از یک جواب بهینه داشته باشد، باید $Z_{ij} - C_{ij}$ متغیر غیرپایه‌ای برابر صفر شود. به همین منظور لوپ حاصل از متغیر غیرپایه‌ای $x_{۱۴}$ را تشکیل داده و مقدار آن را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$Z_{ij} - C_{ij} = ۰ \xrightarrow[\text{لوپ}]{x_{۱۴}} (۹ + \Delta + ۹) - (۶ + ۵) = ۰ \Rightarrow \Delta = -۷$$

۴۱ـ گزینه «۲» برای هر u_i و v_j متغیر پایه‌ای $\Rightarrow u_i + v_j = c_{ij} \Rightarrow u_۱ + v_۱ = c_{۱۱} \Rightarrow c_{۱۱} = ۰ + ۱۰ = ۱۰$

$u_۲ + v_۲ = c_{۲۲} \Rightarrow -۵ + ۷ = c_{۲۲} \Rightarrow c_{۲۲} = ۲$

پس گزینه «۱» و «۲» غلط است. هم‌چنین برای $x_{۲۱}$ و $x_{۲۳}$ داریم:

$$C_{۲۱} - Z_{۲۱} = ۴ - (۱۰ - ۵) = -۱ < ۰ \qquad C_{۲۳} - Z_{۲۳} = ۱۱ - (۹ - ۵) = ۷ > ۰$$

پس متغیر $x_{۲۱}$ شرط ورود را دارد.

۴۲ـ گزینه «۳» از آنجایی که B یک پایه‌ی قابل قبول برای مسأله‌ی اولیه است و پایه‌ی متناظر آن در مسأله دوگان نیز دارای جواب قابل قبول می‌باشد، پس B پایه‌ی بهینه مسأله می‌باشد.

۴۳ـ گزینه «۴» در حل مسأله حمل و نقل با LP همواره یک متغیر مصنوعی با مقدار صفر در پایه باقی می‌ماند. بنابراین همواره حداقل یک درجه تباهیدگی در هر جدول سیمپلکس خواهیم داشت.

۴۴ـ گزینه «۴» در مسأله‌ی حمل و نقل متوازن، متغیرهای دوگان آن آزاد در علامت بوده و هر مقداری را می‌توانند به خود بگیرند.

۴۵ـ گزینه «۲» در صورتی که متغیر غیرپایه‌ای x_{ij} وارد پایه شود، میزان تغییر تابع هدف عبارت است از $\Delta Z=(C_{ij}-Z_{ij})\times\theta$ که θ مقدار تست مینیمم نسبت است. اگر متغیر $x_{۲۳}$ ورودی به پایه باشد متغیر $x_{۲۴}$ خروجی خواهد بود و $\theta=۴۰۰$ پس داریم: $\Delta Z=(۶)\times ۴۰۰=۲۴۰۰$

۴۶ـ گزینه «۲» مسأله متوازن شده به صورت زیر است:

	مقصد ۱	مقصد ۲	مقصد ۳	مجازی	
مبدأ ۱	۵	۲	۳	۶	۱۰۰
مبدأ ۲	۸	۴	۵	M	۳۰۰
مبدأ ۳	۹	۷	۶	۳	۳۰۰
	۳۰۰	۱۰۰	۲۰۰	۱۰۰	

باید اعداد ستون مجازی را ۶ و M و ۳ قرار دهیم؛ زیرا نباید کالا از مبدأ ۲ به مقصد مجازی ارسال شود. زیرا در واقع کالا در انبار ۲ باقی می‌ماند.

۴۷ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\frac{\text{تعداد عناصر غیر صفر}=۲mn}{\text{تعداد عناصر صفر}=mn(m+n)-۲mn}=\frac{۲}{m+n-۲}$$

درصد: $\frac{۲\times ۱۰۰}{m+n-۲}$ که در گزینه‌ها نیست ولی احتمالاً سنجش گزینه ۱ را انتخاب می‌کند؛ زیرا چگالی ماتریس به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$d=\frac{\text{تعداد عناصر غیر صفر}}{\text{کل عناصر ماتریس}}=\frac{۲mn}{mn(m+n)}=\frac{۲}{m+n}$$

که در ۱۰۰ هم ضرب می‌کنیم به خاطر درصد.

۴۸ـ گزینه «۴» چون درخت ریشه‌دار می‌باشد پس تعداد کل کمان‌ها و کمان ریشه $(m+n-۱)+۱$ می‌باشد، یعنی $m+n$

۴۹ـ گزینه «۳» تخصیص بهینه $x_{۵۵}=۱, x_{۴۲}=۱, x_{۳۳}=۱, x_{۲۴}=۱, x_{۱۱}=۱$ می‌باشد که مقدار تابع هدف آن ۱۴۵ می‌باشد، پس گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۵۰ـ گزینه «۳» مسأله حمل و نقل که همیشه تباهیده است؛ چون همواره یکی از متغیرهای پایه‌ای آن مقدار صفر می‌گیرد. حال اگر $c_{ij}-u_i-v_j$ برابر صفر گردد، یعنی آن متغیر غیرپایه‌ای می‌تواند وارد پایه شود. اما تأثیری در مقدار بهینه ندارد و در واقع مسأله جواب چندگانه دارد.

۵۱ـ گزینه «۳» هر حل امکان‌پذیر از یک مسأله حداکثر به تعداد متغیرها، متغیر مثبت دارد. پس در مسأله حمل و نقل حداکثر $m\times n$ جواب مثبت در هر حل امکان‌پذیر وجود دارد.

۵۲ـ گزینه «۱» هر مسأله تخصیص در واقع نوعی خاص از مدل حمل و نقل است، پس هر مسأله تخصیص را می‌توان به یک مسأله حمل و نقل تبدیل کرد و آن را حل کرد، اما هر مسأله‌ی حمل و نقلی را نمی‌توان به مسأله‌ی تخصیص تبدیل کرد.

۵۳ـ گزینه «۲» اگر $x_{۲۲}$ بخواهد وارد شود، حداکثر مقداری که می‌تواند داشته باشد صفر است. پس در مرحله بعد $x_{۲۳}$ از پایه خارج شده و $x_{۲۲}$ مقدار صفر گرفته و مقدار هزینه ثابت می‌ماند.

$$\begin{array}{l} ۸۰-\theta \leftarrow ۲۰+\theta \\ \qquad\qquad \uparrow \\ \theta \rightarrow \quad ۰-\theta \end{array}$$

۵۴ـ گزینه «۴» با فرض اینکه تابع هدف ماکزیمم‌سازی است، برای اینکه جواب بهینه باشد باید ضرایب سطر هدف و مقادیر سمت راست مثبت باشند.

(۱) شرط شدنی بودن: $\begin{cases}-۲+۲\theta\ge ۰\\ ۱۵-۳\theta\ge ۰\end{cases}$ (۲) شرط بهینگی: $\begin{cases}۸-۲\theta\ge ۰\\ ۶+\theta\ge ۰\end{cases}$ $(۱),(۲)\Rightarrow ۱\le\theta\le ۴$