مدرسان شریف

فصل اول

« یادآوری »

توان

❖ **تعریف ۱:** a به توان n را به شکل a^n نمایش می‌دهند، یعنی اینکه عدد a را n بار در خودش ضرب کنیم. اگر a و b اعـداد حقیقـی و m و n اعداد صحیح باشند آنگاه روابط زیر را داریم :

۱) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ۲) $a^n \times b^n = (ab)^n$ ۳) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

۴) $(a^m)^n = a^{mn}$ ۵) $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$ ۶) $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

تذکر۱ : هر عدد به توان یک برابر خود عدد می‌باشد : $a^1 = a$

تذکر۲ : هر عدد غیر از صفر اگر به توان صفر برسد، برابر یک می‌شود : $a^0 = 1$

مثال۱: حاصل عبارت $\dfrac{a^3 \times b^3 \times c^{-2}}{a^{-2} \times c^2 \times b^{-1}} \div \dfrac{a^2 \times c^{-2} \times b}{(ab)^{-1}}$ برابر کدام است ؟

۱) $(\dfrac{ab}{c})^2$ ۲) $(\dfrac{c}{ab})^2$ ۳) $\dfrac{a^2b^3}{c^2}$ ۴) a^2b^2

پاسخ : گزینه «۱»

$$\frac{a^3 \times b^3 \times a^2 \times b^1}{c^2 \times c^2} \div \frac{a^2 \times b \times (ab)^1}{c^2} = \frac{a^5b^4}{c^4} \times \frac{c^2}{a^3b^2} = \frac{a^2b^2}{c^2} = (\frac{ab}{c})^2$$

رادیکالها

❖ **تعریف ۲:** عبارتی مانند $\sqrt[n]{a}$ را ریشه nام ، a گویند و n را که معمولاً عددی طبیعی می‌باشد فرجه رادیکال می‌نامند .

قضایای رادیکالها:

۱) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ۲) $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \quad (a > 0)$ ۳) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ۴) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}} = \sqrt[mnk]{a}$

تذکر۳ : اگر فرجه رادیکال زوج باشد باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد تا رادیکال در مجموعه اعداد حقیقی معنی دار باشد .

تذکر۴ : اگر فرجه رادیکال فرد باشد، عبارت زیر رادیکال منفی نیز می‌تواند باشد .

مثال : ۳) $\sqrt{-16} \neq -4$ ۲) $\sqrt[3]{-27} = -3$ ۱) $\sqrt{36} = 6$

مثال۲: حاصل عبارت $A = \dfrac{\sqrt[3]{a} \times \sqrt{b}}{\sqrt[6]{ab}}$ کدام است ؟

۱) $\sqrt[6]{ab^2}$ ۲) $\sqrt[6]{ab}$ ۳) $\sqrt[6]{a^2b}$ ۴) $\sqrt[3]{ab}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$A=\frac{\sqrt[4]{a^2}\times\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[4]{ab}}=\frac{\sqrt[4]{a^2b^3}}{\sqrt[4]{ab}}=\sqrt[4]{\frac{a^2b^3}{ab}}=\sqrt[4]{ab^2}$$

توجه شود در صورت کسر چون برای ضرب کردن، فرجه‌ها با هم برابر نبودند، لذا کوچکترین مضرب مشترک فرجه ها را حساب کردیم و عبارت داخل رادیکال را با توجه به فرجه تغییر دادیم .

مثال ۳: حاصل عبارت $A=2\sqrt[3]{54}+\sqrt{12}-\sqrt[3]{128}$ را بدست آورید .

پاسخ :

$$A=2\sqrt[3]{27\times2}+\sqrt{3\times4}-\sqrt[3]{4^3\times2}=6\sqrt[3]{2}+2\sqrt{3}-4\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}+2\sqrt{3}$$

مثال ۴: حاصل عبارت $A=\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$ کدام است ؟ $(x>0)$

۱) ۱ ۲) $\sqrt[6]{x}$ ۳) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^2}}$ ۴) $\sqrt[6]{x^5}$

پاسخ : گزینه «۳» برای حل اینگونه مسائل باید عبارتهای پشت رادیکال را به زیر رادیکال برد و در نهایت با ضرب فرجه‌ها در هم به یک رادیکال برسیم :

$$A=\frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{\sqrt{x^2\times x}}}=\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x^3}}=\sqrt[6]{\frac{x}{x^3}}=\sqrt[6]{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{\sqrt[6]{x^2}}$$

مثال ۵: ساده شده عبارت $A=2\sqrt{20}-\sqrt{45}+\frac{1}{2}\sqrt{80}$ چند برابر $\sqrt{5}$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۳»

$$A=2\sqrt{20}-\sqrt{45}+\frac{1}{2}\sqrt{80}=2\sqrt{2^2\times5}-\sqrt{3^2\times5}+\frac{1}{2}\sqrt{5\times2^4}=2\times2\sqrt{5}-3\sqrt{5}+\frac{1}{2}\times2^2\sqrt{5}=4\sqrt{5}-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}=3\sqrt{5}$$

مثال ۶: حاصل $A=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+2\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt[4]{64}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $1-2\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{2}-1$ ۴) -1

پاسخ : گزینه «۴» چون $\sqrt{2}-1$، عددی منفی است، پس وقتی می‌خواهیم آن را از قدر مطلق بیرون بیاوریم آن را در یک منفی ضرب می‌کنیم.

$$A=\left|1-\sqrt{2}\right|+2(\frac{1}{\sqrt{2}})-\sqrt[4]{2^6}\ \Rightarrow\ A=-(1-\sqrt{2})+\frac{2}{\sqrt{2}}-\sqrt[2]{2^3}$$

$$A=-1+\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}-2\sqrt{2}\ \Rightarrow\ A=-1+\frac{2}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\frac{-\sqrt{2}+2-2}{\sqrt{2}}=-1$$

اتحادهای جبری

تساوی $f(a)=g(a)$ را وقتی اتحاد گوئیم که به ازای تمام مقادیر a برقرار باشد برای مثال تساوی $(a-1)^2=a^2-2a+1$ اتحاد می‌باشد زیرا به ازای تمام مقادیر a برقرار است و تساوی $a^2-1=3$ اتحاد نیست زیرا فقط به ازای $a=\pm2$ برقرار می‌باشد، انواع اتحادهای مهم که حفظ آنها سرعت محاسبات را در بعضی مسائل افزایش می‌دهد به شرح زیر می‌باشد :

۱) $(a\pm b)^2=a^2+b^2\pm2ab$

۲) $(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm3a^2b+3b^2a$

۳) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

۴) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

۵) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

۶) $(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc$

۷) $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)$

۸) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)$

۹) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

۱۰) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

مثال۷: اگر $x - \frac{1}{x} = -1$ باشد آنگاه حاصل $A = x^3 - \frac{1}{x^3}$ کدام است ؟

۱) ۴- ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۲-

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$A = x^3 - \frac{1}{x^3} = \underbrace{\left(x - \frac{1}{x}\right)}_{-1}^3 + 3(x)\left(\frac{1}{x}\right)\underbrace{\left(x - \frac{1}{x}\right)}_{-1} = (-1)^3 + 3\times1\times(-1) = -4$$

مثال۸: تفاضل دوعدد۹ وحاصل ضرب آن دو ۱۸- بوده ؛ «مربع مجموع آنها» چقدر است؟

۱) ۴۵ ۲) ۳۶ ۳) ۱۸ ۴) ۹

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ xy = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy = 9^2 - 2\times18 = 45 \\ (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 45 + 2xy = 45 - 2\times18 = 9 \end{cases}$$

توجه: اگر مجموع مربعات خواسته می‌شد باید $x^2 + y^2$ را محاسبه می‌کردیم که در این حالت گزینه (۱) صحیح است.

تجزیه عبارتهای جبری:

از کاربردهای تجزیه می‌توان به ساده کردن کسرها و عبارتهای جبری، بدست آوردن بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب . م . م) و کوچکترین مضرب مشترک (ک . م . م) اشاره کرد .

مثال۹: عبارات زیر را تجزیه کنید :

۱) $x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 9 + 3x)$

۲) $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$

۳) $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

۴) $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2$

مثال۱۰: حاصل $\frac{3}{x+2} + \frac{x^2 - x + 6}{x^2 - 4}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{2}{x-2}$ ۲) $\frac{x}{x-2}$ ۳) $\frac{x}{x+2}$ ۴) $\frac{2}{x+2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

با تجزیه عبارت مخرج داریم:

$$\frac{x^2 - x + 6}{x^2 - 4} + \frac{3}{x+2} = \frac{x^2 - x + 6}{(x-2)(x+2)} + \frac{3}{x+2} = \frac{x^2 - x + 6 + 3(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2 - x + 6 + 3x - 6}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2 + 2x}{(x-2)(x+2)} = \frac{x}{x-2}$$

مثال۱۱: عبارت $\frac{1 - y + y^3 - y^4}{1 - y}$ با کدام عبارت زیر هم ارز است؟

۱) y^3 ۲) $y^3 + 1$ ۳) $1 - y + y^3$ ۴) $y^3 - y^4$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\frac{1 - y + y^3 - y^4}{1 - y} = \frac{1 - y + y^3(1-y)}{1-y} = \frac{(1-y)(1+y^3)}{1-y} = 1 + y^3$$

مثال۱۲: ساده شده عبارت $A = \frac{(x^4 - 2x^3 + x - 2)(x^2 + 3x + 2)}{(x^2 - 4)(x^2 - x + 1)}$ کدام است ؟

۱) $(x+1)$ ۲) $(x+1)^2$ ۳) ۱ ۴) ۱-

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$A = \frac{[x^3(x-2) + (x-2)](x+2)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x^2 - x + 1)} = \frac{(x^3+1)(x-2)(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{(x^3+1)(x+1)}{x^2 - x + 1} = \frac{(x+1)(x^2 + 1 - x)(x+1)}{(x^2 - x + 1)} = (x+1)^2$$

گویا کردن مخرج کسرها:

منظور از گویا کردن، حذف رادیکال از مخرج کسر می‌باشد، به طوری که کسر بعد از گویا شدن با کسر قبل از گویا شدن برابر باشد، معمولاً در اینگونه عبارات یکی از جمله های طرف دوم اتحادها در مخرج می‌باشد و برای گویا کردن باید صورت و مخرج را در پرانتز دوم اتحاد ضرب کرد به مثالهای زیر توجه کنید :

جمله‌ای از اتحاد مزدوج در مخرج کسر می‌باشد .

$$۱)\ \frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}\times\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲-۱}=\sqrt{۲}+۱$$

جمله‌ای از طرف دوم اتحاد شماره ۸ می‌باشد .

$$۲)\ \frac{۱}{\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}}\times\frac{\sqrt[۳]{a^۲}+\sqrt[۳]{b^۲}+\sqrt[۳]{ab}}{\sqrt[۳]{a^۲}+\sqrt[۳]{b^۲}+\sqrt[۳]{ab}}=\frac{\text{صورت کسر}}{a-b}$$

$$۳)\ \frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}}\times\frac{\sqrt[۳]{۳^۲}}{\sqrt[۳]{۳^۲}}=\frac{\sqrt[۳]{۹}}{\sqrt[۳]{۳^۳}}=\frac{\sqrt[۳]{۹}}{۳}$$

بدست آوردن بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب . م . م) و کوچکترین مضرب مشترک (ک . م . م) چند عبارت:

برای بدست آوردن (ب . م . م) دو عبارت پس از تجزیه دو عبارت به حاصلضرب عوامل، حاصلضرب عوامل مشترک باکوچکترین توان را بعنوان (ب . م . م) انتخاب می‌کنیم و حاصلضرب عامل‌های مشترک و غیرمشترک با بزرگترین توان را بعنوان (ک . م . م) تعیین می‌کنیم.

مثال ۱۳: (ب . م . م) و (ک. م . م) بین دو عدد ۲۴ و ۵۴ را تعیین کنید :

پاسخ :

$$۲۴=۳\times۸=۳\times۲^۳ \quad , \quad ۵۴=۲\times۲۷=۲\times۳^۳$$

(ب . م . م) برابر $۶=۲\times۳$ و (ک . م . م) برابر $۲۱۶=۳^۳\times۲^۳$ می‌باشد.

مثال ۱۴: (ک . م . م) دو عبارت $A=(x^۳-۱)$, $B=(x-۱)^۲(x+۱)^۲$ را بدست آورید .

پاسخ :

$$A=x^۳-۱=(x-۱)(x^۲+x+۱) \quad , \quad B=(x-۱)^۲(x+۱)^۲$$

$$\text{ک . م . م}=(x-۱)^۲(x+۱)^۲(x^۲+x+۱)$$

معادلات و نامعادلات

معادله یک مجهولی درجه اول:

صورت کلی این معادله به صورت $ax+b=۰$ با شرط $a\neq۰$ است که در این حالت $x=-\frac{b}{a}$ ریشه معادله است.

تعیین علامت عبارت درجه اول $A=ax+b$:

هدف از تعیین علامت یک عبارت جبری آن است که مشخص کنیم به ازای چه مقادیر x عبارت مثبت یا منفی است ، مشخص است کـه علامت عبارت $A=ax+b$ به ازای مقادیر بزرگتر از ریشه معادله $ax+b=۰$

x		$-\frac{b}{a}$	
ax + b	مخالف علامت a		موافق علامت a

موافق علامت ضریب x (a) و به ازای مقادیر کمتر از $-\frac{b}{a}$ مخالف علامت ضریب x است.

نکته۱: هرگاه عبارتی به صورت حاصلضرب یا خارج قسمت چند عبارت درجه اول باشد ، هر یک را جداگانه تعیین علامت نموده و علامتها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم می‌کنیم.

مثال ۱۵: عبارتهای $A=۳x+۶$ و $B=۴-۲x$ را تعیین علامت کنید .

$$۱)A=۳x+۶ \Rightarrow ۳x+۶=۰ \Rightarrow x=-\frac{۶}{۳}=-۲ \Rightarrow$$

x	$-\infty$		-۲		$+\infty$
$A=۳x+۶$		$-$	۰	$+$	

$$۲)B=۴-۲x \Rightarrow ۴-۲x=۰ \Rightarrow x=\frac{۴}{۲}=۲ \Rightarrow$$

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
$B=۴-۲x$		$+$	۰	$-$	

مثال۱۶: عبارت $A=\frac{x^{2}-5x+6}{(x-1)^{2}(x+4)}$ را تعیین علامت کنید.

توجه شود که در این مثال چون $(x-1)^{2}$ یک عبارت همواره مثبت است لذا تأثیری در علامت A ندارد. همچنین دقت شود ریشه‌ها از کوچکترین مقدار از سمت چپ به راست در جدول مرتب می‌شوند.

X	$-\infty$ تا ۴-	۴- تا ۲	۲ تا ۳	۳ تا $+\infty$
x+۴	−	+	+	+
x-۲	−	−	+	+
x-۳	−	−	−	+
A	−	+	−	+

لازم به توضیح است که نقاط $x=1$ و $x=-4$ که مخرج کسر را صفر می‌کنند بعنوان نقاط انفصال عبارت محسوب می‌شوند که در فصل دوم کاملاً شرح داده می‌شود.

نتیجه: اگر $x>3$ یا $-4<x<2$ آنگاه $A>0$ خواهد بود.

اگر $x<-4$ یا $2<x<3$ آنگاه $A<0$ خواهد بود.

نکته۲: در تعیین علامت عبارت جبری از عوامل مضاعف (در مثال قبل $(x-1)^{2}$) صرف نظر می‌کنیم و بقیه را تعیین علامت می‌کنیم.

نامعادله درجه اول:

نامعادله یک مجهولی درجه اول پس از انتقال دادن همه جمله‌ها به یک طرف نامعادله و ساده کردن به شکل کلی زیر تبدیل خواهد شد.

$$\begin{cases}ax+b>0\\ \text{یا}\\ ax+b\ge 0\end{cases}\quad,\quad\begin{cases}ax+b<0\\ \text{یا}\\ ax+b\le 0\end{cases}$$

مثال۱۷: نامعادله $4+\frac{1}{2}x<1-\frac{3}{2}x-$ ... را حل کنید.

پاسخ:

$$\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x>-5\rightarrow 2x>-5\xrightarrow{\div 2}x>-\frac{5}{2}$$

نکته۳: هرگاه طرفین یک نامساوی را در یک مقدار منفی ضرب و یا تقسیم کنیم جهت نامساوی عوض خواهد شد.

معادله درجه دوم

هر معادله بصورت $ax^{2}+bx+c=0$ که a و b و c اعداد حقیقی هستند با شرط $a\neq 0$ را معادله درجه دوم می‌نامیم، در این معادله مبین (دلتا) به فرم $\Delta=b^{2}-4ac$ بیان می‌شود و داریم :

۱) اگر $\Delta>0$ باشد معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز می‌باشد که از رابطه: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ بدست می‌آید.

۲) اگر $\Delta<0$ معادله ریشه حقیقی ندارد.

۳) اگر $\Delta=0$ معادله ریشه مضاعف دارد : $x_{1}=x_{2}=-\frac{b}{2a}$.

نکته۴: اگر در معادله درجه دوم $a+b+c=0$ باشد یک ریشه (۱) و ریشه دیگر $(\frac{c}{a})$ است.

نکته۵: اگر در معادله درجه دوم $a+c=b$ باشد، آنگاه یک ریشه معادله (۱-) و ریشه دیگر $(-\frac{c}{a})$ است.

نکته۶: اگر ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^{2}+bx+c=0$ دو عدد متوالی باشند آنگاه $\Delta=a^{2}$ خواهد بود.

نکته۷: در معادله درجه دوم $ax^{2}+bx+c=0$ اگر یک ریشه K برابر ریشه دیگر باشد آنگاه: $\frac{b^{2}}{ac}=\frac{(K+1)^{2}}{K}$

معادله $ax^{2}+bx+c=0$ را در نظر بگیرید، داریم :

نکته۸: معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش عکس ریشه معادله فوق باشد، به صورت $cx^{2}+bx+a=0$ است.

نکته۹: معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش قرینه هر ریشه معادله فوق باشد، به صورت $ax^{2}-bx+c=0$ است.

نکته۱۰: معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش n برابر هر ریشه معادله فوق باشد ، به صورت $ax^{2}+bnx+cn^{2}=0$ است.

نکته۱۱: معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش مربع هر ریشه معادله فوق باشد به صورت $a^{2}x^{2}+(2ac-b^{2})x+c^{2}=0$ است.

مثال۱۸: کدام معادله زیر ریشه‌هایش ۲ برابر ریشه‌های معادله $x^2-3x-1=0$ است؟

۱) $x^2-5x-4=0$ ۲) $x^2-6x-4=0$ ۳) $x^2+6x-4=0$ ۴) $x^2-5x+4=0$

پاسخ : گزینه «۲» باتوجه به نکته ۱۰، در این مثال $n=2$ می‌باشد.

تشکیل معادله درجه دومی که دو ریشه آن معلوم است:

اگر x' و x'' دو ریشه معادلهٔ درجه دوم باشند، آنگاه با فرض $S=x'+x''$ و $P=x'.x''$ معادله درجه دومی که ریشه‌هایش x' و x'' می‌باشند به شکل $x^2-Sx+p=0$ بیان می‌شود.

مثال۱۹: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $\sqrt{2}-1$ و $\sqrt{2}+1$ باشد.

$$\begin{cases} S=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2 \\ p=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1 \end{cases} \Rightarrow x^2-Sx+p=0 \to x^2-2x-1=0$$

رابطه بین ریشه‌های معادله:

در معادله $ax^2+bx+c=0$ اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، آنگاه داریم :

$$\begin{cases} S=x'+x''=-\dfrac{b}{a} \to \text{حاصل جمع دو ریشه} \\ p=x'.x''=\dfrac{c}{a} \to \text{حاصلضرب دو ریشه} \\ A=|x'-x''|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \to \text{قدر مطلق تفاضل دو ریشه} \end{cases} , \begin{cases} x'^2+x''^2=S^2-2p \\ x'^3+x''^3=S^3-3Sp \\ \sqrt{x'}+\sqrt{x''}=\sqrt{S+2\sqrt{p}} \\ \left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right|=\sqrt{S-2\sqrt{P}} \end{cases}$$

مثال۲۰: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2-kx+24=0$ باشند،حاصل عبارت $(x_1-x_2)^2+4x_1x_2$ برابر است با:

۱) $-k^2$ ۲) k^2 ۳) ۲۴ ۴) ۲۴-

پاسخ : گزینه «۲» مجموعه ریشه‌های معادله داده شده برابر k و حاصلضرب ریشه‌ها برابر ۲۴ است، یعنی:

$$\begin{cases} x_1+x_2=k \\ x_1x_2=24 \end{cases}$$

بنابراین:

$$(x_1-x_2)^2+4x_1x_2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+4x_1x_2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2=k^2$$

مثال۲۱: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2-k^2x+k=0$ باشند، مقدار عبارت $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $-k$ ۴) k

پاسخ : گزینه «۴»

$$\begin{cases} x_1+x_2=k^2 \\ x_1x_2=k \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{k^2}{k}=k$$

تعیین علامت عبارت $A=ax^2+bx+c$:

اگر x_1 و x_2 دو ریشه حقیقی معادله فوق باشند آنگاه :

X	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
A		موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a	

نکته۱۲: شرط آنکه عبارت فوق همواره مثبت باشد آن است که : $a>0 , \Delta<0$

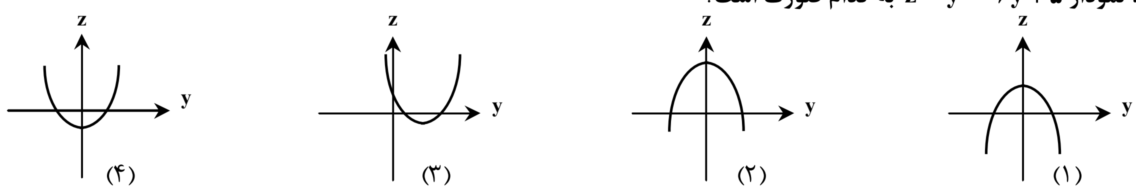
نکته۱۳: شرط آنکه عبارت فوق همواره منفی باشد آن است که : $a<0 , \Delta<0$

تابع با ضابطهٔ $y=ax^2+bx+c$ را در نظر بگیرید، داریم :

نکته۱۴: اگر $a>0$ باشد تابع دارای مینیمم است و اگر $a<0$ باشد تابع دارای ماکزیمم است.

نکته۱۵: مختصات نقطه مینیمم یا ماکزیمم $M(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a})$ می‌باشد.

مثال۲۲: نمودار $z = y^۲ - ۶y + ۵$ به کدام صورت است؟



☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به نکات فوق چون ضریب $y^۲$ مثبت است لذا نمودار تابع‌دارای مینیمم است یعنی گزینه‌های ۱ و ۲ اشتباه هستند اما برای بدست آوردن طول نقطه مینیمم داریم: $x = -\frac{b}{۲a} = \frac{-(-۶)}{۲\times۱} = \frac{۶}{۲} = ۳$

لذا با توجه به اینکه طول نقطه مینیمم نمودار گزینه ۴ برابر صفر است نمودار گزینه ۳، مربوط به تابع داده شده می‌باشد.

تذکر۵: خط $x = -\frac{b}{۲a}$ محور تقارن تابع $y = ax^۲ + bx + c$ است.

تذکر۶: در مورد Max و Min توابع در فصول دیگر به طور کامل توضیح داده خواهد شد.

مثال۲۳: در تابع $y = x^۲ - kx + ۲$ ، اگر طول نقطه مینیمم برابر ۲- باشد ، مقدار k کدام است؟

۱) ۴-　　۲) ۲　　۳) ۲-　　۴) ۴

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» طول نقطه مینیمم از رابطه $x = -\frac{b}{۲a}$ بدست می‌آید. پس خواهیم داشت: $x = \frac{k}{۲} = -۲ \rightarrow k = -۴$

محاسبه باقیمانده چند جمله‌ای $P(x) = ax^۲ + bx + c$ بر $mx + n$

برای محاسبه باقیمانده عبارت $P(x)$ بر عبارتی مانند $mx + n$ باید به جای x در ضابطه $P(x)$ ریشه معادله $mx + n = ۰$، یعنی $x = -\frac{n}{m}$ را قرار دهیم.

مثال۲۴: باقیمانده تقسیم چند جمله‌ای $۸x^۳ + ۴x^۲ - ۱۰x - ۵$ بر دو جمله‌ای $۲x - ۱$ کدام است؟

۱) ۳-　　۲) ۲-　　۳) ۲　　۴) ۳

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$۲x - ۱ = ۰ \rightarrow x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow R = ۸(\frac{۱}{۲})^۳ + ۴(\frac{۱}{۲})^۲ - ۱۰\times\frac{۱}{۲} = ۸\times\frac{۱}{۸} + ۴\times\frac{۱}{۴} - ۵ = ۱ + ۱ - ۵ = -۳$$

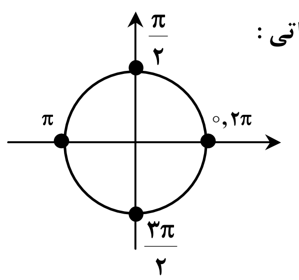
مثال۲۵: اگر باقیمانده تقسیم $x^۲ - ax + ۳a$ بر $x - a$ عدد ۶ باشد. آن‌گاه a برابر است با:

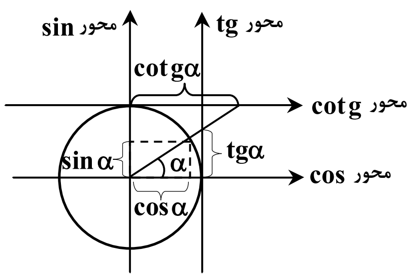
۱) ۳　　۲) ۶　　۳) ۲　　۴) ۲-

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به صورت مسئله مقدار $P(a)$ برابر ۶ می‌باشد. $P(a) = ۶ \Rightarrow a^۲ - a^۲ + ۳a = ۶ \Rightarrow ۳a = ۶ \Rightarrow a = ۲$

مثلثات

نسبت‌های مثلثاتی :





علامت نسبتهای مثلثاتی در چهار ربع دایرهٔ مثلثاتی در جدول زیر آمده است :

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin x	+	+	−	−
cos x	+	−	−	+
tg x	+	−	+	−
cotg x	+	−	+	−

تذکر۷: توجه شود که فقط کافی است علامتهای sin و cos در چهار ربع حفظ شود، علامتهای tg و cotg که همواره مانند یکدیگر هستند از ضرب علامت sin و cos در هم بدست خواهد آمد.

مقادیر نسبتهای مثلثاتی زوایای مختلف که باید به خاطر سپرده شود :

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
sin x	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	۱-	۰
cos x	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱-	۰	۱
tg x	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
cot x	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

تذکر۸: واحدهای استفاده شده در جدول فوق برحسب رادیان (R) می‌باشد درصورتی که واحد بر حسب درجه (D) بیان شود از فرمول $\frac{R}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰}$ جهت تبدیل واحدها به یکدیگر استفاده می‌کنیم.

نسبت‌های $\pi\pm\alpha$ ، $۲n\pi\pm\alpha$ ، $(\frac{۲n+۱}{۲})\pi\pm\alpha$:

الف) کمان $(-\alpha)$:

۱) $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ ۲) $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ ۳) $tg(-\alpha)=-tg\alpha$ ۴) $\cot(-\alpha)=-\cot g\alpha$

ب) کمان $(\pi-\alpha)$:

۱) $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ ۲) $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ ۳) $tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha$ ۴) $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

ج) کمان $(\pi+\alpha)$:

۱) $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ ۲) $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ ۳) $tg(\pi+\alpha)=tg\alpha$ ۴) $\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$

د) کمان $(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$:

۱) $\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$ ۲) $\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$ ۳) $tg(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$ ۴) $\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=tg\alpha$

س) کمان $(\frac{\pi}{۲}+\alpha)$:

۱) $\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$ ۲) $\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$ ۳) $tg(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha$ ۴) $\cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-tg\alpha$

ش) کمان $(۲\pi-\alpha)$:

۱) $\cos(۲\pi-\alpha)=\cos\alpha$ ۲) $\sin(۲\pi-\alpha)=-\sin\alpha$ ۳) $tg(۲\pi-\alpha)=-tg\alpha$ ۴) $\cot(۲\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

ن) کمان $(۲\pi+\alpha)$:

۱) $\cos(۲\pi+\alpha)=\cos\alpha$ ۲) $\sin(۲\pi+\alpha)=\sin\alpha$ ۳) $tg(۲\pi+\alpha)=tg\alpha$ ۴) $\cot(۲\pi+\alpha)=\cot\alpha$

باتوجه به مطالب فوق به نکات زیر جهت یادگیری راحت‌تر توجه فرمایید.

نکته۱۶: برای tg و cotg مضارب فرد و زوج π حذف می‌شوند.(بعبارت دیگر tang و cotg عبارت بعد از مضارب فرد یا زوج π محاسبه می‌شود و برای sin و cos ابتدا یک منفی پشت نسبت قرار داده و سپس مضرب فرد π را حذف می‌کنیم.)

نکته۱۷: برای sin و cos مضارب زوج π حذف می‌شوند. (بعبارت دیگر sin و cos عبارت بعد از مضارب زوج π محاسبه می‌شود.)

نکته۱۸: در تعیین نسبت مثلثاتی کمان ابتدا علامت نسبت مثلثاتی آن کمان را مشخص می‌کنیم ، در صورت وجود مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$، sin را به cos و tg را به cotg و بالعکس تبدیل می‌کنیم.

مثال۲۶: مقادیر $tg(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$, $sin(\pi+\alpha)$, $cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ را تعیین کنید. (α زاویه‌ای حاده می‌باشد)

پاسخ :

۳) $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha) \overset{\text{نکته ۱۸}}{=\!=} -\sin\alpha$	۲) $\sin(\pi+\alpha) \overset{\text{نکته ۱۶}}{=\!=} -\sin\alpha$	۱) $tg(\frac{3\pi}{2}+\alpha) \overset{\text{نکته ۱۸}}{=\!=} -\cot g\alpha$

مثال۲۷: اگر $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ و انتهای کمان α در ربع دوم باشد آنگاه $\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\xrightarrow[\text{و } \cos\alpha \text{ در این ناحیه منفی است}]{\text{چون } \alpha \text{ در ربع دوم است}}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اما با توجه به نکته ۱۸ داریم :

$$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha=-(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اتحادهای مهم مثلثاتی:

۱) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

۲) $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

۳) $\cot g\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

۴) $tg\alpha.\cot g\alpha=1\ ,\ (\alpha\neq\frac{k\pi}{2})$

۵) $1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},(\alpha\neq n\pi+\frac{\pi}{2})$

۶) $1+\cot g^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},(\alpha\neq n\pi)$

۷) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$

۸) $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})$

۹) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\ ,\ \sin 4\alpha=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\ ,\ \sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

۱۰) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\Rightarrow\begin{cases}\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\\ \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\end{cases}$

۱۱) $tg 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

۱۲) $\cos 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

۱۳) $\sin 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$

۱۴) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

۱۵) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

مثال۲۸: حاصل عبارت $(1-\cos\theta)(1+\sin\theta\cot g\theta)-\tan\theta.\cot g\theta$ برابر کدام است؟

۱) $\sin^2\theta$ ۲) $-\sin^2\theta$ ۳) $\cos^2\theta$ ۴) $-\cos^2\theta$

پاسخ : گزینه «۴»

$$A=(1-\cos\theta)(1+\sin\theta\cot g\theta)-\underbrace{\tan\theta\cot g\theta}_{1}$$

$$A=(1-\cos\theta)(1+\cancel{\sin\theta}\frac{\cos\theta}{\cancel{\sin\theta}})-1=(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)-1=1-\cos^2\theta-1=-\cos^2\theta$$

مثال۲۹: حاصل عبارت $A=\sin x\cos x(1-2\sin^2 x)$ به ازای $x=7/5^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$A=\frac{1}{2}\sin 2x.\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 4x\xrightarrow{x=7/5^\circ}A=\frac{1}{4}\times\sin(4\times 7/5^\circ)=\frac{1}{4}\sin 30^\circ=\frac{1}{8}$$

مثال۳۰: اگر $tgx+\cot gx=3$ باشد حاصل $A=tg^3x+\cot g^3x$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۹ ۳) ۲۷ ۴) ۳

پاسخ : گزینه «۱» بر طبق اتحاد $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ داریم:

$$tg^3x+\cot g^3x=(\underbrace{tgx+\cot gx}_{3})^3-3\underbrace{tgx\cot gx}_{1}(\underbrace{tgx+\cot gx}_{3})=3^3-3\times1\times3=18$$

مثال۳۱: اگر $\sin\alpha=\dfrac{a^4+1}{2a^2}$ باشد $\cos2\alpha$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) صفر ۴) ۱-

پاسخ : گزینه «۴»

$$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\left(\frac{a^4+1}{2a^2}\right)^2=1-2\left(\frac{a^8+2a^4+1}{4a^4}\right)=1-\frac{a^8+2a^4+1}{2a^4}=\frac{2a^4-a^8-2a^4-1}{2a^4}=-\frac{a^8+1}{2a^4}$$

$$-1\le\sin\alpha\le1\Rightarrow\frac{a^4+1}{2a^2}\le1\Rightarrow a^4+1\le2a^2\Rightarrow(a^2-1)^2\le0\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm1\Rightarrow\cos2\alpha=-1$$

نکته۱۹: اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ باشد آنگاه $(1+tg\alpha)(1+tg\beta)=2$.

مثال۳۲: حاصل $(1+tg12^\circ)(1+tg33^\circ)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۳»

$$12^\circ+33^\circ=45^\circ\to(1+tg12^\circ)(1+tg33^\circ)=2$$

مثال۳۳: در مثلث ABC ، $a=12$ و $b=16$ و $\sin\hat{B}=\frac{2}{3}$. آنگاه اندازه زاویه A چند درجه است؟

۱) ۹۰ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۵

پاسخ : گزینه «۲» بطورکلی در هر مثلث دلخواه ABC، رابطهٔ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ برقرار می‌باشد، لذا با توجه به اطلاعات داده شده در مسأله داریم:

$$\frac{12}{\sin A}=\frac{16}{\frac{2}{3}}\Rightarrow\frac{12}{\sin A}=24\Rightarrow\sin A=\frac{1}{2}\Rightarrow A=30^\circ$$

فرمول‌های نسبتهای مثلثاتی کمانهای مجموع و تفاضل :

۱) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

۲) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

۳) $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$

۴) $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$

فرمول‌های تبدیل مجموع و تفاضل نسبتهای مثلثاتی به حاصل ضرب نسبتها :

۱) $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

۲) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

۳) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

۴) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

فرمول‌های تبدیل حاصلضرب نسبتهای مثلثاتی به حاصل‌جمع نسبتها :

۱) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

۲) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$

۳) $\sin\alpha.\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

مثال۳۴: حاصل عبارت $A=\frac{\cos3\alpha+\sin\alpha\sin2\alpha}{\sin3\alpha-\sin2\alpha\cos\alpha}\times\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ کدام است؟

۱) $tg\alpha$ ۲) $\cot g\alpha$ ۳) ۱ ۴) ۱-

پاسخ : گزینه «۳»

$$A=\frac{\cos3\alpha-\frac{1}{2}[\cos3\alpha-\cos\alpha]}{\sin3\alpha-\frac{1}{2}[\sin3\alpha+\sin\alpha]}\times tg\alpha=\frac{\frac{1}{2}\cos3\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha}{\frac{1}{2}\sin3\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha}\times tg\alpha=\frac{\cos3\alpha+\cos\alpha}{\sin3\alpha-\sin\alpha}\times tg\alpha$$
$$=\frac{2\cos2\alpha\cos\alpha\times tg\alpha}{2\sin\alpha\cos2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\times tg\alpha=\cot g\alpha\times tg\alpha=1$$

مثال۳۵: حاصل $A=\cos(x+\frac{\pi}{6})\cos(x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}\cos2x$ ۴) $\frac{1}{2}\sin2x$

پاسخ : گزینه «۳»

$$A=\frac{1}{2}\left[\cos[(x+\frac{\pi}{6})-(x-\frac{\pi}{6})]+\cos[(x+\frac{\pi}{6})+(x-\frac{\pi}{6})]\right]-\frac{1}{4}$$
$$A=\frac{1}{2}[\cos(\frac{2\pi}{6})+\cos2x]-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}+\frac{\cos2x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos2x-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cos2x$$

تذکر۹: توجه شود که اکثر تستهای مثلثاتی را می‌توان با عددگذاری حل کرد، برای مثال اگر در صورت سؤال $x=0$ قرار دهیم آنگاه $A=\cos\frac{\pi}{6}.\cos(-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}$ که برابر عدد $\frac{1}{2}$ است حاصل می‌شود لذا به ازای $x=0$ هر گزینه‌ای که حاصلش $\frac{1}{2}$ شد جواب صحیح خواهد بود که تنها گزینه «۳» این شرائط را دارد.

«فرمولهای فرعی»

۱) $tg(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}$ ۲) $tg(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}$

۳) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$ ۴) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$

۵) $\cot g\alpha-tg\alpha=2\cot g2\alpha$ ۶) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos2\alpha$ ۷) $tg\alpha+\cot g\alpha=\frac{2}{\sin2\alpha}$

مثال۳۶: حاصل $A=\frac{1-tg25^\circ}{1+tg25^\circ}+\frac{1-tg20^\circ}{1+tg20^\circ}$ کدام است؟

۱) $tg20^\circ+tg25^\circ$ ۲) $tg20^\circ-tg25^\circ$ ۳) $\frac{1-tg45^\circ}{1+tg45^\circ}$ ۴) $\frac{1-tg20^\circ}{1+tg25^\circ}$

پاسخ : گزینه «۱» باتوجه به فرمولهای ۱ و ۲ (فرعی) ملاحظه می‌شود که در این تست $\alpha=25$ و $\beta=20$ پس داریم :

$$A=tg(45-25)+tg(45-20)=tg25+tg20$$

مثال۳۷: اگر $A-B=\frac{\pi}{4}$ آنگاه $\cos B-\sin B$ برابر کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}\sin A$ ۲) $\sqrt{2}\sin A$ ۳) $2\sqrt{2}\cos A$ ۴) $\sqrt{2}\cos A$

پاسخ : گزینه «۴» طبق فرمولهای ذکر شده داریم :

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)\Rightarrow\cos B-\sin B=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-B)=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-A)=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2}-A)=\sqrt{2}\cos A$$

مثال۳۸: حاصل $A=tg20(1+\cos40)$ برابر کدام است؟

۱) $\sin20$ ۲) $\sin40$ ۳) $\cos20$ ۴) $\cos40$

پاسخ : گزینه «۲»

$$A=\frac{\sin20}{\cos20}\times2\cos^2 20=2\sin20\cos20=\sin40$$

چند فرمول فرعی در مورد حاصلضرب عبارات مثلثاتی :

۱) $\sin\alpha\sin(۶۰-\alpha)\sin(۶۰+\alpha)=\frac{۱}{۴}\sin ۳\alpha$

۲) $\cos\alpha\cos(۶۰-\alpha)\cos(۶۰+\alpha)=\frac{۱}{۴}\cos ۳\alpha$

۳) $\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}(۶۰-\alpha)\,\mathrm{tg}(۶۰+\alpha)=\mathrm{tg}۳\alpha$

۴) $\sin\frac{\pi}{۲k+۱}\times\sin\frac{۲\pi}{۲k+۱}\times\cdots\times\sin\frac{k\pi}{۲k+۱}=\frac{\sqrt{۲k+۱}}{۲^k}$

۵) $\cos\frac{\pi}{۲k+۱}\times\cos\frac{۲\pi}{۲k+۱}\times\cdots\times\cos\frac{k\pi}{۲k+۱}=\frac{۱}{۲^k}$

۶) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{۲k+۱}\times\mathrm{tg}\frac{۲\pi}{۲k+۱}\times\cdots\times\mathrm{tg}\frac{k\pi}{۲k+۱}=\sqrt{۲k+۱}$

مثال۳۹: حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$A=۸(\cos ۸۰)(\cos ۴۰)(\cos ۲۰)\xrightarrow[\text{فرمول (۲)}]{\alpha=۲۰}A=۸\times\frac{۱}{۴}\times\cos ۶۰=۸\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}=۱$$

$$B=\cos\frac{\pi}{۷}\cos\frac{۲\pi}{۷}\cos\frac{۳\pi}{۷}\xrightarrow[\text{فرمول (۵)}]{k=۳}B=\frac{۱}{۲^۳}=\frac{۱}{۸}$$

$$C=\sin\frac{\pi}{۹}\sin\frac{۲\pi}{۹}\sin\frac{۳\pi}{۹}\sin\frac{۴\pi}{۹}\xrightarrow[\text{فرمول (۴)}]{k=۴}C=\frac{\sqrt{۲\times۴+۱}}{۲^۴}=\frac{\sqrt{۹}}{۱۶}=\frac{۳}{۱۶}$$

مفهوم Arc : معکوس توابع مثلثاتی مثل $\sin x$ را با نماد $\mathrm{Arc}\sin x$ یا $\sin^{-۱}x$ نشان می‌دهیم و منظور از $\mathrm{Arc}\sin\frac{۱}{۲}$ این است که سینوس چه زاویه‌ای برابر $\frac{۱}{۲}$ است (کوچکترین زاویه) که واضح است $\alpha=\frac{\pi}{۶}$ است.

۱) $\mathrm{Arc}\sin m=\alpha\Rightarrow\sin\alpha=m$ — عدد m باید همواره در بازه $[-۱,۱]$ باشد و کمان α نیز باید همواره در بازه $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ باشد.

۲) $\mathrm{Arc}\cos m=\alpha\Rightarrow\cos\alpha=m$ — عدد m باید همواره در بازه $[-۱,۱]$ باشد و کمان α نیز باید همواره در بازه $[۰,\pi]$ باشد.

۳) $\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\,m=\alpha\Rightarrow\mathrm{tg}\,\alpha=m$ — عدد m باید در بازه $(-\infty,+\infty)$ باشد و کمان α نیز باید همواره در بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ باشد.

۴) $\mathrm{Arc}\cot g\,m=\alpha\Rightarrow\cot g\alpha=m$ — عدد m باید در بازه $(-\infty,+\infty)$ باشد و کمان α نیز باید همواره در بازه $(۰,\pi)$ باشد.

اتحادهای مربوط به Arc:

حالت اول: (m یک عدد حقیقی است)

۱) $\mathrm{Arc}\sin(-m)=-\mathrm{Arc}\sin m$

۲) $\mathrm{Arc}\cos(-m)=\pi-\mathrm{Arc}\cos m$

۳) $\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}(-m)=-\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\,m$

۴) $\mathrm{Arc}\,\mathrm{otg}(-m)=\pi-\mathrm{Arc}\cot g\,m$

حالت دوم: (m یک عدد حقیقی است)

۱) $\sin(\mathrm{Arc}\sin m)=m$

۲) $\cos(\mathrm{Arc}\cos m)=m$

۳) $\mathrm{tg}(\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\,m)=m$

۴) $\cot g(\mathrm{Arc}\cot g\,m)=m$

حالت سوم: (x یک کمان است)

۱) $\mathrm{Arc}\sin(\sin x)=x$

۲) $\mathrm{Arc}\cos(\cos x)=x$

۳) $\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}(\mathrm{tg}\,x)=x$

۴) $\mathrm{Arc}\,\mathrm{cotg}(\cot g\,x)=x$

نکته۲۰: همواره داریم: $\mathrm{Arc}\sin x+\mathrm{Arc}\cos x=\frac{\pi}{۲}$

نکته۲۱: همواره داریم: $\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\,x+\mathrm{Arc}\cot g\,x=\frac{\pi}{۲}$

مثال۴۰: حاصل $\mathrm{Arc}\sin(\frac{\sqrt{۳}}{۲})+۲\,\mathrm{Arc}\cot g(-\sqrt{۳})$ **برابر کدام است؟**

۱) ۲π ۲) π ۳) $\frac{۵\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۳}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\mathrm{Arc}\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\pi}{۳}$$

$$\mathrm{Arc}\cot g(-\sqrt{۳})=\pi-\mathrm{Arc}\cot g(\sqrt{۳})=\pi-\frac{\pi}{۶}=\frac{۵\pi}{۶}\quad\Rightarrow\frac{\pi}{۳}+۲(\frac{۵\pi}{۶})=\frac{\pi}{۳}+\frac{۵\pi}{۳}=\frac{۶\pi}{۳}=۲\pi$$

مثال۴۱: حاصل $\cos(2\,\text{Arcsin}(\frac{1}{3}))$ برابر است با:

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{7}{9}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\text{Arcsin}(\frac{1}{3})=\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\frac{1}{3}$$

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 1-2(\frac{1}{3})^2 = 1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

مثال۴۲: مقدار عددی $A=\sin[\text{Arccos}(-\frac{2}{3})]$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) -1 ۴) $\frac{\sqrt{7}}{9}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\text{Arccos}(-\frac{2}{3})=\alpha \to \cos\alpha=-\frac{2}{3} \Rightarrow A=\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{5}{9}}$$

توضیح: چون α در ربع دوم قرار دارد $\sin\alpha$ مثبت در نظر گرفته می‌شود.

مثال۴۳: حاصل عبارت $tg(\text{Arctg}2-\text{Arctg}3)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $-\frac{1}{7}$ ۳) $\frac{5}{7}$ ۴) -1

پاسخ : گزینه «۲» اگر فرض کنیم $\text{Arctg}2=\alpha$ آنگاه $tg\alpha=2$ و به همین ترتیب اگر $\text{Arctg}3=\beta$ آنگاه $tg\beta=3$ می‌باشد، از طرفی طبق فرمول مقابل داریم:

$$t(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta} \Rightarrow tg(\underbrace{\text{Arctg}2}_{\alpha}-\underbrace{\text{Arctg}3}_{\beta})=\frac{2-3}{1+2\times3}=-\frac{1}{7}$$

معادلات مثلثاتی:

فرض می‌کنیم (α) زاویه‌ای معلوم و کمان x زاویه مجهول باشد در حل معادلات پس از انجام عملیات باید آنها را به یکی از فرمهای استاندارد زیر دربیاوریم.

۱) $\sin x=\sin\alpha \to \begin{cases} x=2k\pi+\alpha \\ x=2k\pi+\pi-\alpha \end{cases}$ **۲)** $\cos x=\cos\alpha \to x=2k\pi\pm\alpha$ **۳)** $\begin{cases} tgx=tg\alpha \\ \cot gx=\cot g\alpha \end{cases} \to x=k\pi+\alpha$

مثال۴۴: معادله $\sin x\cos x=\frac{1}{2}$ را حل کنید و جوابهای آن در فاصله $[0,\pi]$ را بدست آورید.

پاسخ : $2\sin x\cos x=1 \to \sin 2x=\sin\frac{\pi}{2} \to 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \to x=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in z) \xrightarrow[k=0]{\text{جوابهای بین } 0 \text{ و } \pi} x=\frac{\pi}{4}$

حالتهای خاص معادلات مثلثاتی:

$$\begin{cases} \sin x=0 \Rightarrow x=k\pi \\ \cos x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2} \end{cases} , \quad \begin{cases} tgx=0 \Rightarrow x=k\pi \\ \cot x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x=1 \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ \sin x=-1 \Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2} \end{cases} , \quad \begin{cases} \cos x=1 \Rightarrow x=2k\pi \\ \cos x=-1 \Rightarrow x=2k\pi+\pi \end{cases}$$

توضیح: در کلیه عبارات فوق $k\in z$ می‌باشد .

مثال۴۵: معادله $\cos^2 x-3\cos x+2=0$ را حل کنید.

پاسخ : مجموع ضرائب (با فرض $\cos x$ بعنوان مجهول) صفر است، یک ریشه یک و ریشه دیگر $\frac{c}{a}$ می‌باشد.

$$\begin{cases} \cos x=1 \Rightarrow x=2k\pi \\ \cos=\frac{2}{1}=2 \to \text{ق.ق.غ} \end{cases}$$

لگاریتم

❖ **تعریف ۴:** به ازای هر دو عدد مثبت N و a داریم : $\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$

عدد مثبت a ($a \neq 1$) را مبنای لگاریتم می‌نامیم ، که اگر مبنا در لگاریتم ۱۰ باشد ، معمولاً آنرا نمی‌نویسیم.

خواص و قضایای لگاریتم :

۱) $\log_a a = 1$

۲) $\log_a 1 = 0$

۳) $a^{\log_a M} = M$

۴) $\log_a M.N = \log_a |M| + \log_a |N|$

۵) اگر n زوج باشد N باقدرمطلق‌بیان می‌شود. $\log_{a^m} N^n = \frac{n}{m}\log_a N \rightarrow$

۶) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a |M| - \log_a |N|$

۷) $\log_a N = \frac{1}{\log_N a}$

۸) $\log_b a . \log_c b = \log_c a$

اگر مبنای لگاریتم عدد نپر ($e \approx 2/7$) باشد آنرا به شکل Ln نمایش می‌دهیم. $\log_e x = \text{Ln}x$

تعریف کلگاریتم یک عدد :

کلگاریتم عدد مثبت b را با نماد cologb نمایش می‌دهیم یعنی منفی لگاریتم b. $\boxed{\text{co}\log_a^b = -\log_a^b}$

مثال ۴۶: مقدار $A = \frac{1}{\log_2 216} + \frac{1}{\log_3 216}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) $\frac{1}{6}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» باتوجه به خاصیتهای لگاریتم داریم:

$$A = \log_{216} 3 + \log_{216} 2 = \log_{216} 6 = \log_{6^3} 6 = \frac{1}{3}$$

مثال ۴۷: اگر $\log_{12} 3 = a$ باشد آنگاه $\log_3 8$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}(a-1)$ ۲) $\frac{3}{2}(\frac{1}{a}-1)$ ۳) $3(\frac{1}{a}-1)$ ۴) $3(a-1)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\log_{12} 3 = a \Rightarrow \log_3 12 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_3 2^2 \times 3 = \frac{1}{a} \Rightarrow 2\log_3 2 + \log_3 3 = \frac{1}{a} \Rightarrow 2\log_3 2 = \frac{1}{a} - 1 \Rightarrow \log_3 2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{a}-1)$$

$$\log_3^8 = \log_3^{2^3} = 3\log_3^2 = 3 \times \frac{1}{2}(\frac{1}{a}-1) = \frac{3}{2}(\frac{1}{a}-1)$$

مثال ۴۸: اگر $\log 2 = a$ باشد مقدار عبارت $A = \log 0/25 \times \log\frac{\sqrt{2}}{2}$ کدام است؟

۱) $-2a$ ۲) $-a^2$ ۳) $\frac{a}{2}$ ۴) a^2

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\begin{cases} \log 0/25 = \log\frac{1}{4} = \log 2^{-2} = -2\log 2 = -2a \\ \log\frac{\sqrt{2}}{2} = \log(2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-1}) = \log 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\log 2 = -\frac{1}{2}a \end{cases} \Rightarrow A = (-2a) \times (-\frac{1}{2}a) = a^2$$

مثال ۴۹: حاصل $A = \log_8 \frac{\sqrt{2}}{4} \times \log_{2\sqrt{2}}^{64}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\begin{cases}\log_{۸}\dfrac{\sqrt{۲}}{۴}=\log_{۲^۳}۲^{+\frac{۱}{۲}}\times ۲^{-۲}=\log_{۲^۳}۲^{-\frac{۳}{۲}}=\dfrac{-\frac{۳}{۲}}{۳}\log_{۲}۲=-\dfrac{۱}{۲}\\ \log_{۲\sqrt{۲}}۶۴=\log_{۲^{\frac{۳}{۲}}}۲^{۶}=\dfrac{۶}{\frac{۳}{۲}}\log_{۲}۲=\dfrac{۱۲}{۳}\times ۱=۴\end{cases}\Rightarrow A=-\dfrac{۱}{۲}\times ۴=-۲$$

✍ **مثال۵۰: اگر $\log_{۳}a=۲$ باشد، حاصل $a^{\log_{۳}^{x}+۱}$ کدام است؟**

۱) $(x+۳)^{۲}$　　۲) $(\frac{x}{۳})^{۲}$　　۳) $(۳x)^{۲}$　　۴) $(x-۳)^{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»　$\log_{۳}^{a}=۲\Rightarrow a=۳^{۲}\Rightarrow A=a^{\log_{۳}^{x}+۱}=۳^{۲(\log_{۳}^{x}+۱)}=۳^{۲\log_{۳}^{x}}\times ۳^{۲}\Rightarrow$

در این تست از رابطه $a^{\log_{a}^{b}}=b$ استفاده کردیم:　$A=۳^{\log_{۳}^{x^{۲}}}\times ۳^{۲}=x^{۲}\times ۳^{۲}=(۳x)^{۲}$

✍ **مثال۵۱: حاصل $A=\log_{x-۲}(۹x^{۲}-۳۶x+۳۸)$ به ازای $x=۵$ در کدام فاصله است؟**

۱) (۵ و ۴)　　۲) (۴ و ۳)　　۳) (۳ و ۲)　　۴) (۶ و ۵)

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»　$A=\log_{۳}[۹\times(۵)^{۲}-۳۶\times ۵+۳۸]=\log_{۳}۸۳=x$

توجه شود $۸۱=۳^{۴}$ و $۲۴۳=۳^{۵}$ می‌باشد لذا $۴<A<۵$ خواهد بود.

معادلات لگاریتمی:

برای حل این معادلات باید معادله را به فرم کلی $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ تبدیل کرد و از این تساوی می‌توان نتیجه گرفت $f(x)=g(x)$ که یک معاله ساده قابل حل خواهد بود.

✍ **مثال۵۲: معادله $\log x^{۲}+\log(-x)=۳$ چند ریشه دارد؟**

۱) هیچ　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$۲\log|x|+\log(-x)=۳\xrightarrow{x<۰}۲\log(-x)+\log(-x)=۳\rightarrow ۳\log(-x)=۳\Rightarrow \log(-x)=۱\Rightarrow x=-۱۰$$

✍ **مثال۵۳: ریشه معادله $(\log x)^{۲}+\log x+۱=\dfrac{۷}{\log\frac{x}{۱۰}}$ کدام است؟**

۱) $x=۲$　　۲) $x=۸$　　۳) $x=۱۰۰$　　۴) $x=۱۰۰۰$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»　$\log^{۲}x+\log x+۱=\dfrac{۷}{\log x-۱}\Rightarrow \log^{۳}x-\log^{۲}x+\log^{۲}x-\log x+\log x-۱=۷$

$$\Rightarrow \log^{۳}x=۸\Rightarrow \log x=۲\Rightarrow x=۱۰^{۲}=۱۰۰$$

✍ **مثال۵۴: از معادله $\log(۲x-۱)+\log(x+۳)=\log ۳۰-\log ۲$ مقدار $\log_{۸}x$ کدام است؟**

۱) $-\frac{۱}{۲}$　　۲) $\frac{۲}{۳}$　　۳) $\frac{۱}{۳}$　　۴) $\frac{۳}{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$\log(۲x-۱)(x+۳)=\log ۱۵\Rightarrow (۲x-۱)(x+۳)=۱۵\Rightarrow ۲x^{۲}+۶x-x-۳=۱۵\Rightarrow ۲x^{۲}+۵x-۱۸=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{-۵\pm\sqrt{۱۶۹}}{۴}\Rightarrow \left|\begin{array}{ll}x=-\frac{۱۸}{۴} & \text{غ ق ق}\\ x=۲ & \text{ق ق}\end{array}\right.\Rightarrow \log_{۸}x=\log_{۸}۲=\frac{۱}{۳}$$

تصاعد

تصاعد عددی : عدد ثابت $a_۱$ و عدد ثابت $d \neq ۰$ و دنباله‌ای از اعداد را چنان در نظر بگیرید که جمله اول آن $a_۱$ و جمله‌های بعدی هر یک با اضافه کردن مقدار ثابت d به جمله ماقبل بدست آید،چنین دنباله‌ای راتصاعدعددی‌یا حسابی می‌نامیم.

a_n جمله n ام ، d قدر نسبت ، n تعداد جملات $$a_n = a_۱ + (n-۱)d$$

نکته۲۲: شرط لازم و کافی برای آنکه سه مقدار a و b و c سه جمله متوالی یک تصاعد حسابی باشند آنست که $۲b = a + c$ باشد .

نکته۲۳: مجموع n جمله اول یک تصاعد حسابی : $S_n = \frac{n}{۲}[a_۱ + a_n]$. $S_n = \frac{n}{۲}[۲a_۱ + (n-۱)d]$

نکته۲۴: رابطه بین جمله nام و mام یک تصاعد عددی به شکل $d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$ می‌باشد.

مثال۵۵: در یک تصاعد حسابی $a_۳ = ۶$ و $a_۷ = ۱۳۴$ می‌باشد ، جمله اول و قدر نسبت این تصاعد به ترتیب کدام است؟

۱) ۵۸- و ۳۲ ۲) ۹- و ۱۶ ۳) ۹۰- و ۶۴ ۴) ۸۴- و ۶۴

پاسخ : گزینه «۱»

$$d = \frac{۱۳۴-۶}{۷-۳} = \frac{۱۲۸}{۴} = ۳۲ \rightarrow a_۳ = a_۱ + ۲d \Rightarrow ۶ = a_۱ + ۲\times ۳۲ \rightarrow a_۱ = -۵۸$$

تصاعد هندسی : عدد ثابت $t_۱ \neq ۰$ و عدد ثابت q ($q \neq ۰$ و ± ۱) را در نظر بگیرید ، دنباله‌ای از اعداد را چنان در نظر بگیرید که جمله اول آن $t_۱$ و جمله‌های بعدی آن از ضرب q در جمله ماقبل بدست آید ، چنین دنباله‌ای را یک تصاعد هندسی می‌نامیم.

جمله n ام یک تصاعد هندسی از رابطه $t_n = t_۱ q^{n-۱}$ محاسبه می‌شود.

نکته۲۵: شرط لازم و کافی برای آنکه سه مقدار a و b و c سه جمله متوالی یک تصاعد هندسی باشند آنست که $b^۲ = ac$ باشد .

نکته۲۶: مجموع n جمله اول یک تصاعد هندسی : $S_n = t_۱(\frac{۱-q^n}{۱-q})$

نکته۲۷: رابطه بین جمله n ام و m ام یک تصاعد هندسی :

۱) اگر $n-m$ زوج باشد آنگاه $q = \pm\sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}}$ می‌باشد. ۲) اگر $n-m$ فرد باشد آنگاه $q = \sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}}$ می باشد.

مثال۵۶: در یک تصاعد هندسی $t_۵ = ۱۶۲$ و $t_۸ = ۴۳۷۴$ مقدار $t_۳$ برابر است با :

۱) ۲۷ ۲) ۸۱ ۳) ۱۸ ۴) هیچکدام

پاسخ : گزینه «۳»

$$\begin{cases} q = \sqrt[۸-۵]{\frac{۴۳۷۴}{۱۶۲}} = \sqrt[۳]{۲۷} = ۳ \\ t_۵ = t_۱ q^۴ \Rightarrow ۱۶۲ = t_۱ \times ۸۱ \rightarrow t_۱ = ۲ \rightarrow t_۳ = ۱۸ \end{cases}$$

حد مجموع جملات در یک تصاعد هندسی با جملات نامحدود :

اگر در یک تصاعد هندسی با تعداد جملات نامحدود قدرمطلق قدر نسبت کوچکتر از ۱ باشد ($|q| < ۱$) آنگاه حد مجموع جمله‌ها یعنی S برابر است با: $S = \frac{t_۱}{۱-q}$

نکات مهم معادله خط

❖ **تعریف ۵:** اگر $a,b,c \neq ۰$ و $ax + by + c = ۰$ آنگاه شیب خط برابر $m = -\frac{a}{b}$ می‌باشد.

نکته۲۸: کلیه خطوطی که به صورت $y = a \quad (a \in R)$ باشند شیب خطشان برابر صفر است

نکته۲۹: کلیه خطوطی که به صورت $x = a \quad (a \in R)$ باشند شیب خطشان بی‌نهایت است.

نکته۳۰: کلیه خطوطی که به صورت y=mx یا ay=bx باشند شیب خطشان m یا $\frac{b}{a}$ می‌باشند.

نکته۳۱: معادله خطی که از نقطه $A\left|\begin{matrix} x_A \\ y_A \end{matrix}\right.$ با شیب m می‌گذرد عبارتست از : $\boxed{y - y_A = m(x - x_A)}$

مثال۵۷: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A\Big|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}$ بگذرد و شیب آن برابر (۲-) باشد .

$$y-y_A=m(x-x_A)\rightarrow y-۲=-۲(x-۱)\rightarrow y=-۲x+۴$$

مثال۵۸: خط گذرنده بر نقطه $A(۲,۵)$ و عمود بر خط به معادله $y+۲x=۱$ محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۲-　　۲) ۱-　　۳) ۳　　۴) ۴

پاسخ : گزینه «۴»

این خط که قرار است از نقطه $A(۲,۵)$ عبور کند، بر خط $y=-۲x+۱$ عمود است، پس شیب آن برابر $m=-\frac{۱}{m'}=-\frac{۱}{-۲}=\frac{۱}{۲}$ می‌شود، لذا داریم:

$$y-y_A=m(x-x_A)\ \Rightarrow\ y-۵=\frac{۱}{۲}(x-۲)$$

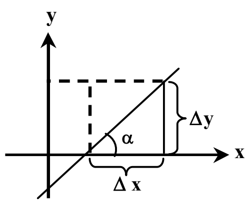
برای تعیین محل تلاقی خط به دست آمده با محور y ها کافی است به جای x عدد صفر را قرار دهیم.

$$y-۵=\frac{۱}{۲}(۰-۲)\Rightarrow\ y-۵=-۱\Rightarrow\ y=۴$$

نکته۳۲: شیب خطی که از دو نقطه $A\Big|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}$ و $B\Big|\begin{matrix}x_B\\y_B\end{matrix}$ می‌گذرد برابر است با:

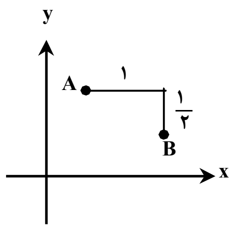
$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

نکته۳۳: شیب یک خط همان تانژانت زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد یا بعبارت دیگر می‌توان شیب را نسبت تغییرات y به تغییرات x بیان کرد.



$$m=tg\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

مثال۵۹: در شکل زیر ضریب زاویه خطی که از دو نقطه A و B می‌گذرد کدام است؟



۱) ۲-

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $-\frac{۱}{۲}$

۴) ۲

پاسخ : گزینه «۳»

$$m=tg\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\frac{۱}{۲}}{۱}=-\frac{۱}{۲}$$

توجه شود که خط گذرنده از دو نقطه A و B دارای شیب منفی می‌باشد.

نکته۳۴: معادله خطی که از دو نقطه $A\Big|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}$ و $B\Big|\begin{matrix}x_B\\y_B\end{matrix}$ می‌گذرد برابر است با:

$$y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)$$

نکته۳۵: برای آن که دو خط موازی باشند، باید شیبهای آن دو خط با هم برابر باشند.

نکته۳۶: برای آنکه دو خط بر هم عمود باشند، باید حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط برابر (۱-) باشد.

مثال۶۰: نقاط A و B به مختصات $A\Big|\begin{matrix}-۱\\-۲\end{matrix}$ و $B\Big|\begin{matrix}۲k\\k+۳\end{matrix}$ مفروضند. مقدار k چقدر باشد تا خط AB بر نیمساز ربع اول عمود باشد؟

۱) ۱-　　۲) ۳　　۳) ۲-　　۴) ۲

پاسخ : گزینه «۳»　ابتدا توجه کنید که شیب خط AB برابر است با:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{k+۳-(-۲)}{۲k-(-۱)}=\frac{k+۵}{۲k+۱}$$

می‌دانیم دو خط وقتی برهم عمودند که حاصل‌ضرب شیب‌های آنها برابر ۱- باشد و شیب نیمساز ربع اول و سوم برابر یک است. لذا:

$$\frac{k+۵}{۲k+۱}\times ۱=-۱\ \Rightarrow\ k+۵=-۲k-۱\ \Rightarrow\ k=-۲$$

مثال۶۱: نقاط A و B به مختصات $A\begin{vmatrix}-۲\\-۴\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۴a\\۲a+۶\end{vmatrix}$ مفروضند. مقدار a چقدر باشد تا خط AB با خط $y-۲x-۵=۰$ موازی شود؟

۱) $a=-۱$ ۲) $a=۱$ ۳) $a=۵$ ۴) $a=-۲$

پاسخ : گزینه «۲» شیب خط AB برابر است با:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۲a+۶-(-۴)}{۴a-(-۲)}=\frac{۲a+۱۰}{۴a+۲}=\frac{a+۵}{۲a+۱}$$

شیب خط $y-۲x-۵=۰$ برابر ۲+ می‌باشد، برای موازی بودن خط AB با خط داده شده لازم است شیب آنها با هم برابر باشد، یعنی:

$$\frac{a+۵}{۲a+۱}=+۲\Rightarrow ۴a+۲=a+۵\Rightarrow a=۱$$

نکته۳۷: برای آنکه دو خط به معادلات $ax+by+c=۰, a'x+b'y+c'=۰$ بر هم منطبق باشند باید $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد.

نکته۳۸: برای تعیین زاویه بین دو خط از فرمول $tg\alpha=\pm\frac{m-m'}{۱+mm'}$ استفاده می‌کنیم.

تذکر۱۰: برای تعیین مختصات محل برخورد دو خط کافی است معادله دو خط را در یک دستگاه حل نماییم.

مثال۶۲: مختصات محل تلاقی دو خط به معادله $۲x-y=۱$ و $۳x+y=۴$ را به دست آورید؟

$$\begin{cases}۳x+y=۴\\۲x-y=۱\end{cases}\Rightarrow ۵x=۵\to x=۱\xrightarrow{۲x-y=۱}A\begin{vmatrix}۱\\۱\end{vmatrix}\Rightarrow$$ مختصات محل تلاقی

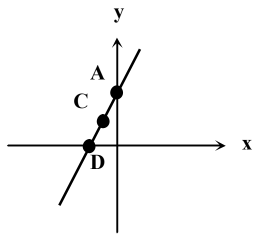
نکته۳۹: اگر مختصات $A\begin{vmatrix}x_۱\\y_۱\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}x_۲\\y_۲\end{vmatrix}$، آنگاه مختصات نقطه M که دقیقاً وسط پاره‌خط AB قرار دارد به صورت زیر است:

$$x_M=\frac{x_۱+x_۲}{۲}\ ,\ y_M=\frac{y_۱+y_۲}{۲}$$

مثال۶۳: خط به معادله $۲y-۳x=۶$ محورهای مختصات را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. فاصله نقطه وسط AB از نقطه $(۱,۰)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ : گزینه «۴» وقتی خطی محور xها را قطع کند، آنگاه y آن خط برابر صفر می‌شود و اگر خطی محور yها را قطع کند در آن نقطه x آن خط صفر می‌شود:



$$x=۰\Rightarrow ۲y=۶\xrightarrow{\div ۲}y=۳\Rightarrow A(۰,۳)$$ و $D(۱,۰)$

$$y=۰\Rightarrow -۳x=۶\xrightarrow{\div(-۳)}x=-۲\Rightarrow B(-۲,۰)$$

$$\left.\begin{aligned}x_C&=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۰-۲}{۲}=-۱\\ y_C&=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۳+۰}{۲}=\frac{۳}{۲}\end{aligned}\right\}\Rightarrow CD=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(\frac{۳}{۲}-۰)^۲}=\sqrt{۴+\frac{۹}{۴}}=\sqrt{\frac{۲۵}{۴}}=\frac{۵}{۲}$$

نکته۴۰: شرط آنکه سه نقطه $A\begin{vmatrix}x_A\\y_A\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}x_B\\y_B\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}x_C\\y_C\end{vmatrix}$ بر روی یک خط راست واقع باشند آن است که $m_{AB}=m_{AC}$ به عبارت دیگر $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$.

مثال۶۴: به ازای چه مقداری از a سه نقطه $A\begin{vmatrix}۱\\۲\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۳\\۵\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}۲a-۱\\۶\end{vmatrix}$ بر روی یک استقامت واقع می‌باشند.

$$m_{AB}=m_{AC}\Rightarrow\frac{۵-۲}{۳-۱}=\frac{۶-۲}{۲a-۱-۱}\Rightarrow\frac{۳}{۲}=\frac{۴}{۲a-۲}\Rightarrow ۳a-۳=۴\to a=\frac{۷}{۳}$$

نکته۴۱: فاصله نقطه $A\begin{vmatrix}x_A\\y_A\end{vmatrix}$ از خط D به معادله $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

نکته۴۲: فاصله دو خط موازی به معادلات $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

فاکتوریل

فاکتوریل عددی مانند n را به فرم $n!$ نمایش می‌دهند، $n!$ یعنی حاصلضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n . $n! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times n$

تذکر۱۱: $n!$ را می‌توان به فرم $n\times(n-1)!$ نیز نوشت .

تذکر۱۲: طبق قرارداد $0! = 1$ می‌باشد .

تذکر۱۳: روابط $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n$ همواره برقرار هستند.

مفهوم ترکیب :

هر گاه در انتخاب k عنصر از n عنصر، ترتیب انتخاب مهم نباشد، ترکیب k از n تعریف می‌شود و آن را با نمادهای C_n^k یا $\binom{n}{k}$ نشان می‌دهیم

و با استفاده از رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد : $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$

مثال۶۵: اگر $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 56$، عدد n کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ : گزینه «۲» $(n+1)!$ را به شکل $(n+1)n!$ می‌نویسیم و به همین ترتیب $n!$ را به شکل $n(n-1)!$ می‌نویسیم، لذا داریم:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 56 \Rightarrow \frac{(n+1)n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = 56 \Rightarrow n(n+1) = 56 \Rightarrow n^2 + n - 56 = 0 \Rightarrow (n-7)(n+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 7 & \text{ق‌ق} \\ n = -8 & \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

مثال۶۶: حاصل عبارت $A = \dfrac{\binom{5}{3}\times n!}{\binom{6}{3}\times (n-2)!}$ کدام است ؟

۱) $2(n-2)$ ۲) $n(n-1)$ ۳) $\dfrac{n(n-2)}{2}$ ۴) $\dfrac{n(n-1)}{2}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!\times 3!} = \frac{4!\times 5}{2!\times 3!} = \frac{3!\times 4\times 5}{3!\times 1\times 2} = 10$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!\times 3!} = \frac{5!\times 6}{3!\times 3!} = \frac{3!\times 4\times 5\times 6}{3!\times 1\times 2\times 3} = 20$$

$$\Rightarrow A = \frac{10\times (n-2)!\times (n-1)\times n}{20\times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

مثال۶۷: اگر مجموعه A دارای ۵ عضو باشد، آنگاه تعداد زیر مجموعه‌های ۲ عضوی آن کدام است ؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

پاسخ : گزینه «۱» چون ترتیب انتخاب مهم نیست، لذا از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!(2!)} = \frac{3!\times 4\times 5}{3!\times 1\times 2} = 10$$

بسط دوجمله‌ای نیوتن

بسط $(a+b)^n$ به بسط دوجمله‌ای نیوتن معروف است که فرمول بسط به صورت زیرمی‌باشد :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

خواص بسط دوجمله‌ای نیوتن :

۱) جمله $(k+1)$ام از فرمول $T_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ بدست می‌آید .

۲) تعداد جملات در بسط فوق $(n+1)$ است .

۳) در بسط فوق مجموع ضرائب 2^n می‌باشد. به طور کلی در بسط $[f(x)]^n$ برای محاسبه مجموع جبری ضرایب باید $x = 1$ قرار داده و مقدار عددی را بدست آوریم .

مثال۶۸: مجموع جبری ضرایب بسط عبارت $(2x^2+x-2)^{99}+(2x^3+x^2-x-1)^6+3$ کدام است ؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ : گزینه «۴»
$$[2\times(1)^2+1-2]^{99}+[2(1)^3+(1)^2-1-1]^6+3=1+1+3=5$$

تذکر۱۴: در بسط $(a-b)^n$ مجموع ضرائب صفر و جمله $(k+1)$ام از رابطه $T_{k+1}=(-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ بدست می‌آید.

مثال۶۹: ضریب x^{-17} در بسط عبارت $(x^4-\frac{1}{x^3})^{15}$ کدام است ؟

۱) ۱۳۸۳ ۲) -۱۳۶۵ ۳) -۱۳۸۳ ۴) ۱۳۶۵

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا فرمول جمله $(k+1)$ را می‌نویسیم :
$$T_{k+1}=(-1)^k\binom{15}{k}(x^4)^{15-k}(\frac{1}{x^3})^k=(-1)^k\binom{15}{k}x^{(60-4k)}.x^{-3k}=(-1)^k\binom{15}{k}x^{60-7k}\Rightarrow 60-7k=-17\Rightarrow \boxed{k=11}$$
$$\Rightarrow T_{12}=(-1)^{11}\binom{15}{11}x^{-17}=(-1)\times\frac{15!}{(15-11)!\times 11!}x^{-17}=-\frac{15!}{4!\times 11!}x^{-17}=(-\frac{11!\times 12\times 13\times 14\times 15}{4!\times 11!})x^{-17}=-1365x^{-17}$$

مثال۷۰: در بسط $(a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}+\frac{1}{\sqrt[7]{a^2}})^{10}$ جمله مستقل از a جمله چندم است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۳ ۴) ۹

پاسخ : گزینه «۲»
$$T_{k+1}=\binom{10}{k}(a^{\frac{2}{3}})^{10-k}(a^{-\frac{2}{7}})^k=\binom{10}{k}a^{\frac{2}{3}(10-k)-\frac{2}{7}k}$$

باید توان a صفر شود تا جمله مستقل از a باشد لذا داریم : $\frac{2}{3}(10-k)-\frac{2}{7}k=0\Rightarrow k=7\Rightarrow k+1=8\Rightarrow$ (جمله هشتم)

مثال۷۱: بسط $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[5]{b})^{13}$ چند جمله گویا دارد ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۱»
$$T_{k+1}=\binom{13}{k}a^{\frac{13-k}{3}}.b^{\frac{k}{5}}$$

اگر $k=0,5,10$ آنگاه بسط نسبت به b گویا است، فقط اگر $k=10$ باشد، آنگاه بسط نسبت به a نیز گویا خواهد بود .

توضیح: منظور از گویا بودن صحیح بودن توانهای a و b می باشد .

نکته۴۳: به طور کلی در بسط $(a_1+a_2+a_3)^n$ جمله عمومی را می‌توان به صورت زیر نوشت:
$$T=\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}a_1^{k_1}.a_2^{k_2}.a_3^{k_3}$$

در این رابطه $k_1+k_2+k_3=n$ می‌باشد.

مثال۷۲: در بسط $(a^3+2b-1)^6$ ضریب جمله شامل a^6b^3 کدام است؟

۱) -۸۰ ۲) -۴۸۰ ۳) ۸۰ ۴) ۴۸۰

پاسخ : گزینه «۲» اگر بخواهیم جمله a^6b^3 را داشته باشیم، باید جمله عمومی را به شکل زیر بنویسیم:
$$T=\frac{6!}{2!3!1!}\times(a^3)^2.(2b)^3\times(-1)^1=\frac{3!\times 4\times 5\times 6}{2!\times 3!}(a^6)(8b^3)(-1)=-\frac{120}{2!}a^6\times b^3\times 8=\frac{-120\times 8}{2!}a^6b^3=-480a^6b^3$$