مدرسان شریف

فصل اول

«حساب کامپیوتری»

اصول محاسبه در ماشین‌های محاسبه‌گری مانند کامپیوتر، حساب کامپیوتری نامیده می‌شود. چون حساب کامپیوتری با محاسبه‌های واقعی متفاوت است درنتیجه، نتایج به‌دست آمده از آن نیز متفاوت خواهد بود. در این فصل، این تفاوت‌ها و روش‌های ذخیره عدد در حساب کامپیوتری را بررسی می‌کنیم.

نمایش اعشاری اعداد حقیقی

در آنالیز مقدماتی برای هر عدد حقیقی نمایشی به‌صورت $\pm(a_n a_{n-1}\dots a_0 / b_1 b_2 \dots)_\beta$ درنظر گرفته می‌شود. در این نمایش β مبنای نمایش اعشاری نام دارد و عددی طبیعی و بزرگ‌تر از یک است. a_i و b_jها رقم‌های نمایش اعشاری هستند و متعلق به مجموعه $\{0,1,\dots,\beta-1\}$ هستند. در این نمایش ممیز اعشار نقش مهمی دارد و ارزش ارقام را مشخص می‌کند. به‌این صورت که، i امین رقم بعد از ممیز یعنی b_i دارای ارزش β^{-i} و i امین رقم قبل از ممیز یعنی a_i دارای ارزش β^i است. بنابراین این نمایش مربوط به عدد حقیقی با ارزش زیر است:

$$\pm(a_n a_{n-1}\cdots a_0 / b_1 b_2\cdots)_\beta = \pm\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\beta^i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i\beta^{-i}\right) = \pm\left(a_n\beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots + a_1\beta + a_0 + \frac{b_1}{\beta} + \frac{b_2}{\beta^2} + \cdots\right)$$
$$a_i\ ,\ b_i \in \{0,1,\cdots,\beta-1\}$$

نمایش‌های اعشاری با توجه به ویژگی‌های آن‌ها به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند:

۱) اگر کلیه رقم‌های بعد از ممیز اعشار صفر باشند، آن نمایش اعشاری را یک عدد صحیح می‌نامیم.

۲) اگر تعداد ارقام غیر صفر بعد از ممیز اعشار متناهی باشد، نمایش اعشاری را با پایان یا مختوم گوییم و در غیر این صورت آن را بی‌پایان یا نامختوم می‌نامیم.

۳) اگر در یک نمایش اعشاری بی‌پایان، ارقامی مانند c_1 و c_2 و ... و c_k به تناوب تکرار شوند، آن نمایش اعشاری را متناوب می‌گوییم. شکل کلی یک نمایش اعشاری متناوب به‌صورت زیر است:

$$\pm(a_n a_{n-1}\cdots a_0 / b_1 b_2\cdots b_m c_1 c_2\cdots c_k c_1 c_2\cdots c_k\cdots)_\beta = \pm(a_n a_{n-1}\cdots a_0 / b_1 b_2\cdots b_m \overline{c_1 c_2\cdots c_k})_\beta$$

که بخش $c_1 c_2\cdots c_k$ را یک دوره گردش یا تناوب نمایش اعشاری می‌گوییم.

مثال۱: حاصل $(0/\overline{1})_\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{\beta-1}{\beta+1}$　　۲) $\frac{1}{\beta+1}$　　۳) $\frac{1}{\beta}$　　۴) $\frac{1}{\beta-1}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از دستور محاسبه حد مجموع سری هندسی، این مقدار به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$(0/\overline{1})_\beta = \beta^{-1} + \beta^{-2} + \cdots = \frac{\beta^{-1}}{1-\beta^{-1}} = \frac{1}{\beta-1}$$

مثال۲: حاصل $(0/0\overline{z})_\beta$ کدام است؟ $(z := \beta-1)$

۱) $\frac{\beta-1}{\beta+1}$　　۲) $\frac{1}{\beta+1}$　　۳) $\frac{1}{\beta}$　　۴) $\frac{1}{\beta-1}$

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از دستور محاسبه حد مجموع سری هندسی، این مقدار به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(0/\overline{0z})_\beta = (\beta-1)(\beta^{-2}+\beta^{-4}+\cdots) = (\beta-1)\frac{\beta^{-2}}{1-\beta^{-2}} = \frac{\beta-1}{\beta^2-1} = \frac{1}{\beta+1}$$

قضیه: نمایش اعشاری یک عدد حقیقی در مبنای β یکتا نیست. هریک از دو شرط زیر موجب می‌شود نمایش اعشاری اعداد حقیقی یکتا باشد:

۱) از بین نمایش‌های متفاوت یک عدد، نمایش مختوم آن انتخاب شود.

۲) بی‌نهایت رقم از ارقام نمایش اعشاری متفاوت با رقم $\beta-1$ باشد.

توجه کنید که این دو شرط معادل هستند. برای مثال به تساوی $3/99\ldots = 4$ که دو نمایش متفاوت از عدد چهار در مبنای دهدهی می‌باشد، توجه کنید. هر دو شرط موجب می‌شود که نمایش ۴ که هم مختوم است و هم بی‌نهایت رقم از آن متفاوت با ۹ است، انتخاب شود.

نکته۱: یک عدد حقیقی ممکن است در یک مبنا دارای نمایش مختوم و در مبنای دیگر دارای نمایش نامختوم باشد. به‌عنوان مثال عدد حقیقی $\frac{1}{10}$ در مبنای ۱۰ دارای نمایش مختوم $0/1$ و در مبنای ۲ دارای نمایش نامختوم $(0/0\overline{0011})_2$ است.

اعداد حقیقی گویا و گنگ

مطابق تقسیم‌بندی که برای نمایش‌های اعشاری انجام دادیم، می‌توانیم اعداد حقیقی را به دو گروه گویا و گنگ تقسیم کنیم.

یک عدد حقیقی گویا است، اگر نمایش اعشاری آن در مبنای β دارای یکی از دو وضعیت زیر باشد:

۱) نمایش بسط اعشاری آن باپایان (مختوم) باشد.

۲) نمایش بسط اعشاری آن بی‌پایان (نامختوم) و متناوب باشد.

و یک عدد حقیقی گنگ است اگر نمایش بسط اعشاری آن در مبنای β بی‌پایان (نامختوم) و نامتناوب باشد.

مثال۳: کدام‌یک از اعداد زیر گنگ است؟

۱) $(0/10101010\ldots)_2$ ۲) $(0/010101\ldots)_2$ ۳) $(0/101001000100000\ldots)_2$ ۴) $(0/110110110110\ldots)_2$

پاسخ: گزینه «۳» عدد حقیقی $(0/1010010001000\ldots)_2$ نامختوم و نامتناوب است. زیرا تعداد صفرهای بین دو رقم یک متوالی، رو به افزایش است، پس یک عدد گنگ می‌باشد و اعداد دیگر نامختوم و متناوب هستند. (۱) $0/\overline{10}$, ۲) $0/\overline{01}$, ۳) $0/\overline{110}$)

مثال۴: کدام‌یک از اعداد زیر گویا است؟

۱) $(0/101001000100000\ldots)_3$ ۲) $(0/010110111011111\ldots)_3$

۳) $(0/122112211112211111\ldots)_3$ ۴) $(0/10101010\ldots)_3$

پاسخ: گزینه «۴» عدد حقیقی $(0/10101010\ldots)_3$ نامختوم و متناوب و بنابراین یک عدد گویا است و اعداد دیگر نامختوم و نامتناوب هستند؛ زیرا در گزینه (۱) تعداد صفرهای بین دو رقم یک، در گزینه (۲)، تعداد یک‌های بین دو رقم صفر و در گزینه (۳) تعداد یک‌های بین دو عدد ۲۲، رو به افزایش است.

تبدیل مبنا در نمایش اعشاری

در حساب واقعی، محاسبه‌ها در مبنای ۱۰ انجام می‌شوند؛ اما در ماشین‌های محاسبه‌گر از مبناهای دیگری مانند مبنای ۲ استفاده می‌شود. بنابراین تبدیل مبنا در نمایش اعشاری و روش آن را بررسی می‌کنیم.

تبدیل از مبنای ده به مبنای دیگر

برای تبدیل نمایش اعشاری از مبنای ۱۰ به مبنای دیگر دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

حالت اول: برای تبدیل عدد صحیح A از مبنای ۱۰ به مبنای β، از روش تقسیم‌های متوالی به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

گام ۱: A و β را از ورودی بگیرید و شمارنده i را برابر صفر قرار دهید.

گام ۲: a_i را برابر $A-\beta[\frac{A}{\beta}]$ قرار دهید. (این مقدار باقی‌مانده تقسیم A بر β است.)

گام ۳: اگر $[\frac{A}{\beta}]$ برابر صفر است، به گام ۶ بروید. (یعنی عمل تقسیم تا زمانی که خارج قسمت کوچک‌تر از مقسوم علیه شود ادامه دارد.)

گام ۴: A را برابر $[\frac{A}{\beta}]$ قرار دهید.

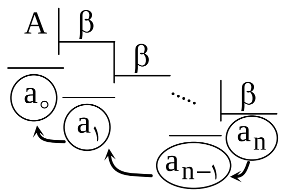
گام ۵: به شمارنده i یک واحد اضافه کنید و به گام ۲ بروید.

گام ۶: عدد $a_i a_{i-1} \cdots a_1 a_0$ را چاپ کنید.

برای راحتی می‌توان از جدولی به‌صورت زیر استفاده کرد. در این جدول هر بخش از الگوریتم در ستونی جداگانه آورده شده است.

A	β	i	$a_i = A - \beta[\frac{A}{\beta}]$	$[\frac{A}{\beta}]$

درواقع، با عمل به این الگوریتم تقسیم‌های متوالی مقابل انجام می‌شوند.



حالت دوم: برای تبدیل عدد حقیقی $0 < A < 1$ از مبنای ۱۰ به مبنای β و تعیین n رقم بسط اعشاری آن در مبنای β از الگوریتم زیر استفاده می‌کنیم:

گام ۱: A و β را از ورودی بگیرید.

گام ۲: برای i از ۱ تا n دستورات زیر را انجام دهید.

(آ) b_i را برابر $[\beta A]$ قرار دهید.

(ب) A را برابر $\beta A - b_i$ قرار دهید.

(پ) اگر A برابر صفر بود، انجام دستورات را خاتمه دهید.

گام ۳: عدد $0/b_1 b_2 ... b_n$ را چاپ کنید.

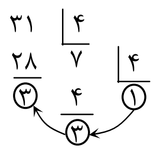
البته برای چنین تبدیلی بهتر است از یک جدول به شکل زیر استفاده کنیم. در این جدول، هر بخش از الگوریتم در ستونی جداگانه آورده شده است.

A	i	$A\beta$	$b_i = [\beta A]$	$\beta A - b_i$

مثال ۵: کدام‌یک نمایش عدد ۳۱ در مبنای ۴ است؟

۱) $(۱۳۳)_۴$ ۲) $(۳۱۳)_۴$ ۳) $(۳۳۱)_۴$ ۴) $(۱۱۳)_۴$

پاسخ: گزینه «۱» نمایش عدد ۳۱ در مبنای ۴ براساس الگوریتم بالا به‌صورت $(۱۳۳)_۴$ است.



A	β	i	$a_i = A - \beta[\frac{A}{\beta}]$	$[\frac{A}{\beta}]$
۳۱	۴	۰	$a_0 = ۳۱ - ۴[\frac{۳۱}{۴}] = ۳$	$[\frac{۳۱}{۴}] = ۷$
۷	۴	۱	$a_1 = ۷ - ۴[\frac{۷}{۴}] = ۳$	$[\frac{۷}{۴}] = ۱$
۱	۴	۲	$a_2 = ۱ - ۴[\frac{۱}{۴}]$	$[\frac{۱}{۴}] = ۰$

مثال ۶: عدد $۰/۳$ در مبنای ۲ کدام است؟

۱) $(۰/۰\overline{۰۱۰۰۱})_۲$ ۲) $(۰/۰\overline{۱}۰۱)_۲$ ۳) $(۰/۰\overline{۱۰۰۱})_۲$ ۴) $(۰/۰\overline{۱۰۰۱})_۲$

پاسخ: گزینه «۴» مطابق الگوریتم تبدیل در حالت دوم، جدول زیر به‌دست می‌آید.

مدرسان شریف

فصل دوم

«خطاها»

منابع خطا

اغلب برای بررسی یک پدیده واقعی، مدلی ریاضی برای آن طراحی؛ سپس براساس آن مدل، بررسی‌ها انجام می‌شود. منابع خطاهای احتمالی در این فرآیند را می‌توان به شکل زیر دسته‌بندی کرد.

خطای مدل: در طراحی مدل ریاضی، از عوامل جزئی صرف‌نظر می‌شود یا ساده‌نویسی‌هایی برای ساده شدن مدل صورت می‌گیرد.

خطای داده‌ها: داده‌های مورد نیاز در مدل ریاضی، با وسایل اندازه‌گیری که دقیق نیستند اندازه‌گیری می‌شوند.

خطای نمایش اعداد: به‌دلیل محدودیت در نگهداری ارقام بسط اعشاری اعداد، تقریباً تمام اعداد اعشاری با خطا در وسایل محاسبه‌گر ذخیره می‌شوند.

خطای اعمال ریاضی: اعمال ریاضی بر روی اعداد تقریبی، ایجاد خطا می‌کنند.

خطای روش: روش‌های عددی معمولاً تکراری هستند و تقریبی از جواب را به‌دست می‌آورند که دقت آن به نوع روش و مرحله توقف آن بستگی دارد.

مثال۱: کدام جزء منابع خطا نیست؟

۱) خطای داده‌ها ۲) خطای روش ۳) خطای مدل ۴) خطای برشی

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به منابع خطا، خطای برشی نمی‌تواند جزو آن‌ها باشد.

خطای مطلق و نسبی

عدد تقریبی a، عددی است که با عدد دقیق A تفاوت داشته و به جای آن در محاسبات استفاده می‌شود. اگر مقدار تقریبی a، از مقدار دقیق A کمتر باشد تقریب را نقصانی و در صورتی که مقدار تقریبی a، بیشتر از مقدار دقیق A باشد، تقریب را اضافه می‌گوییم. به‌عنوان مثال چون $۳/۱۴ < \pi < ۳/۱۵$ است پس ۳/۱۴ تقریبی نقصانی و ۳/۱۵ تقریبی اضافی برای عدد π هستند.

خطای مطلق

خطای مطلق عدد تقریبی a که یک تقریب از A می‌باشد را با نماد e(a) نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{e(a) = |A - a|}$$

اغلب تقریب A با روش‌های عددی محاسبه می‌شود و A مجهول است؛ بنابراین e(a) به‌طور دقیق قابل محاسبه نیست؛ به همین منظور هر کران بالای e(a) را خطای مطلق حدی a می‌نامیم و آن را با e_a نمایش می‌دهیم.

بنابراین همواره $e(a) \le e_a$ است. توجه کنید که e(a) یکتا می‌باشد، اما e_a چنین نیست. از طرفی، $|A - a| \le e_a$ است؛ بنابراین $a - e_a \le A \le a + e_a$، پس A متعلق به بازه $[a - e_a , a + e_a]$ می‌باشد؛ به همین دلیل A را به شکل $A = a \pm e_a$ می‌نویسیم.

مثال۲: اگر $A = ۲/۷ \pm ۰/۰۴$ باشد حدود A کدام است؟

۱) $۲/۶۶ \le A \le ۲/۷۴$ ۲) $-۲/۷ \le A \le ۲/۷$

۳) $-۰/۴ \le A \le ۰/۴$ ۴) $A = ۲/۶۶$ یا $A = ۲/۷۴$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون $A = ۲/۷ \pm ۰/۰۴$ است، پس $e_a = ۰/۰۴$، $A \in [۲/۷ - ۰/۰۴ , ۲/۷ + ۰/۰۴]$ است.

خطای نسبی

خطای مطلق اغلب نمی‌تواند دقت یک تقریب را مشخص کند. دو ساعت را درنظر بگیرید. اولی در یک سال و دومی در یک دهه به اندازه یک دهم ثانیه دچار خطا می‌شود. هر دو دارای خطای مطلق حدی یکسانی هستند؛ اما ساعت دومی دقیق‌تر است، بنابراین باید معیار دیگری برای تعیین دقت تقریب‌ها معرفی کنیم و آن، خطا در واحد کمیت است. اگر a تقریبی برای عدد غیرصفر A باشد خطای نسبی (خطا در واحد کمیت) a را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{\delta(a)=\frac{|A-a|}{|A|}=\frac{e(a)}{|A|}}$$

چون اغلب مقدار A مجهول است بنابراین محاسبه خطای نسبی a ممکن نیست، پس با استفاده از خطای مطلق حدی کران بالایی برای آن محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۱: اگر a تقریبی از A و e_a یک خطای مطلق حدی a باشد، آن‌گاه $\delta(a)\le\frac{e_a}{|a|-e_a}$ است. همچنین اگر e_a در مقایسه با $|a|$ کوچک باشد، آن‌گاه $\delta(a)\le\frac{e_a}{|a|}$ است.

اگر e_a در مقایسه با $|a|$ کوچک باشد، قرار می‌دهیم $\delta(a)\simeq\frac{e_a}{|a|}$ و آن را خطای نسبی حدی a می‌گوییم.

مثال ۳: کدام در مورد $\delta(a)$ برقرار است؟

۱) $\delta(a)\le\frac{e(a)}{|a|-e(a)}$ ۲) $\delta(a)>\frac{e(a)}{|a|-e(a)}$ ۳) $\delta(a)>\frac{e_a}{|a|-e_a}$ ۴) گزینه ۲ و ۳

پاسخ: گزینه «۱» چون $e(a)$ خود یک خطای مطلق حدی a است، با استفاده از قضیه ۱، گزینه (۱) به‌دست می‌آید.

مثال ۴: در چه صورت $\delta(a)\simeq\frac{e_a}{|a|}$ است؟

۱) $|a|>>e_a$ ۲) $e_a>>|a|$ ۳) $e_a=|a|$ ۴) $e_a|a|=1$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به قضیه ۱ باید e_a در مقایسه با $|a|$ کوچک باشد.

مثال ۵: اگر a تقریبی از A و b تقریبی از B باشد به‌طوری‌که $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$ آن‌گاه کدام درست است؟

۱) $e(a)=e(b)$ ۲) $e_a=e_b$ ۳) $\delta(a)=\delta(b)$ ۴) گزینه ۱ و ۲

پاسخ: گزینه «۳» فرض کنیم $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}=d$ باشد، پس می‌توانیم رابطه بین $\delta(a)$ و $\delta(b)$ را به‌صورت زیر مشخص کنیم.

$$\delta(a)=\frac{|A-a|}{|A|}=\frac{|Bd-bd|}{|Bd|}=\frac{|B-b|}{|B|}=\delta(b)$$

خطای چهار عمل اصلی

با داشتن خطای دو مقدار، می‌توان خطای محاسبه بین آن‌ها را نیز به دست آورد. قضیه بعد کران بالایی برای خطای محاسبه دو مقدار ارائه می‌کند.

قضیه ۲: (خطای مطلق اعمال حسابی) اگر a و b تقریب‌هایی از A و B و همگی این اعداد مثبت باشند، آن‌گاه:

۱) $e(a+b)\le e(a)+e(b)$ ۲) $e(a-b)\le e(a)+e(b)$ ۳) $e(ab)\lesssim ae(b)+be(a)$ ۴) $e(\frac{a}{b})\lesssim\frac{ae(b)+be(a)}{b^2}$

توجه کنید که در بند سوم تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $A-a$ و $B-b$ هم علامت یا برابر صفر باشند.

مثال ۶: اگر $A=3/14$ و $B=-2/71$ باشد به ازای کدام تقریب a و b به‌ترتیب برای A و B، تساوی $e(ab)=ae(b)+be(a)$ برقرار است؟

۱) $a\le 3/14$, $-2/71\le b$ ۲) $a\le 3/14$, $b\le -2/71$ ۳) $a\ge -2/71$, $3/14\le b$ ۴) $a\le -2/71$, $b\le 3/14$

پاسخ: گزینه «۲» تنها در گزینه (۲) $3/14-a$ و $-2/71-b$ هم علامت یا برابر صفر هستند.

مدرسان شریف

فصل سوم

«حل عددی معادله غیرخطی»

در فصل پیش رو، به روش‌های عددی یافتن تقریبی برای ریشه‌های یک معادله می‌پردازیم. ریشه یک تابع، عددی است که موجب صفر شدن آن می‌شود. اگر α ریشه‌ای برای تابع $f(x)$ باشد، آن‌گاه عدد طبیعی m و تابع $g(x)$ را می‌توان یافت به‌طوری که،

$$\boxed{f(x)=(x-\alpha)^m g(x) \quad ; \quad g(\alpha)\neq 0}$$

عدد طبیعی m، مرتبه تکرار (یا چندگانگی) ریشه α نامیده می‌شود. در حالتی که m برابر یک است ریشه α را ساده می‌گویند. گاهی یافتن تابع $g(x)$ دشوار است؛ بنابراین برای مشخص کردن مرتبه تکرار یک ریشه از قضیه زیر استفاده می‌کنیم که مبتنی بر مشتق تابع f می‌باشد.

قضیه ۱: عدد α ریشه با مرتبه تکرار m برای معادله $f(x)=0$ است اگر و فقط اگر:

$$\boxed{f(\alpha)=f'(\alpha)=\dots=f^{(m-1)}(\alpha)=0 \quad , \quad f^{(m)}(\alpha)\neq 0}$$

به عبارت دیگر، کوچک‌ترین مرتبه مشتقی از تابع f که α آن را صفر نمی‌کند، برابر مرتبه تکرار ریشه α است.

مثال۱: مرتبه تکرار ریشه $x=0$ برای معادله $x\tan x=\sin x$، کدام است؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

پاسخ: گزینه «۱» فرض کنیم $f(x)=x\tan x-\sin x$ باشد؛ آن‌گاه $f'(x)=\tan x+x\sec^2 x-\cos x$ است و از آن، $f'(0)=-1$ نتیجه می‌شود. بنابراین $x=0$ یک ریشه ساده برای این معادله است.

تعیین تعداد و حدود ریشه‌ها

اغلب برای تعیین ریشه‌ای از یک معادله، با دقت مطلوب، نیاز است که تقریبی از آن ریشه یا بازه کوچکی که شامل آن باشد را بیابیم. روش‌های زیر را برای تعیین تعداد و حدود ریشه‌های معادله $f(x)=0$ بررسی می‌کنیم.

روش ترسیمی

در این روش با توجه به ضابطه تابع f می‌توان دو حالت زیر را درنظر گرفت:

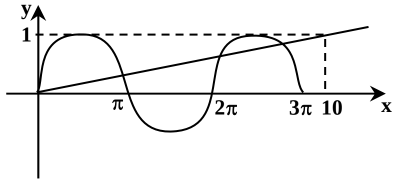
۱) منحنی $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم. سپس محل تلاقی این منحنی را با محور x می‌یابیم. طول نقاط تلاقی ریشه‌های معادله $f(x)=0$ هستند.

۲) تابع $f(x)$ را به‌صورت تفاضل دو تابع، یعنی $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ می‌نویسیم که رسم هریک از آن‌ها پیچیدگی کمتری نسبت به $f(x)$ دارد. سپس منحنی‌های $y=f_1(x)$ و $y=f_2(x)$ را رسم می‌کنیم. محل تلاقی این دو منحنی را می‌یابیم. طول نقاط تلاقی، ریشه‌های معادله $f(x)=0$ هستند.

مثال۲: معادله $x=10\sin x$ چند ریشه مثبت دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

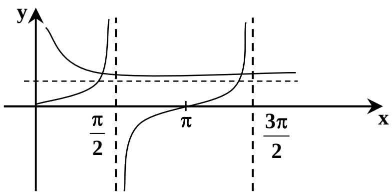
پاسخ: گزینه «۳» معادله را به‌صورت $\frac{x}{10}=\sin x$ می‌نویسیم، خط $y=\frac{x}{10}$ در $x=10$ مقدار یک را می‌پذیرد. پس تقاطع این خط با منحنی $y=\sin x$ بر بازه $(0,10)$ اتفاق می‌افتد که تعداد آن مطابق شکل برابر ۳ است.



مثال۳: معادله $(x+1)\cos x = x\sin x$ چند ریشه بر بازه $(0,\frac{k\pi}{2})$ دارد؟

۱) صفر		۲) $k-1$		۳) k		۴) $[\frac{k+1}{2}]$

پاسخ: گزینه «۴» معادله را به‌صورت $\frac{x+1}{x}=\tan x$ می‌نویسیم (توجه کنید که $x=0$ و $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ریشه‌های معادله نیستند). منحنی $y=\frac{x+1}{x}$ دارای مجانب $y=1$ است و منحنی $y=\tan x$ دارای مجانب‌هایی به معادله $x=\frac{(2n+1)\pi}{2}$ است. مطابق شکل نقاط برخورد دو منحنی بر بازه‌های $(\frac{(2n)\pi}{2},\frac{(2n+1)\pi}{2})$ واقع است. بنابراین تعداد نقاط برخورد برابر $[\frac{k+1}{2}]$ است.



توجه کنید که با درنظر گرفتن $k=1$ و $k=3$ و نمودار می‌توان به پاسخ درست رسید.

روش تحلیلی

برای استفاده از روش تحلیلی، به یادآوری چند قضیه از حسابان نیاز داریم. برخی از این قضایا برای تعیین حدود ریشه‌ها و بعضی برای یافتن تعداد ریشه‌ها مناسب هستند. به‌عنوان مثال، قضیه علامت دکارت فقط برای تعیین تعداد ریشه‌های مثبت یا منفی معادله‌ای چندجمله‌ای در شرایطی خاص استفاده می‌شود.

قضیه۲: (بولتزانو ـــ وایرشتراس): اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته و دو مقدار $f(a)$ و $f(b)$ دارای علامت‌های مختلف باشند یعنی؛ $f(a)f(b)<0$، آن‌گاه تابع f بر بازه (a,b)، حداقل یک ریشه دارد. علاوه بر این، اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ یکنوای اکید (یعنی صعودی یا نزولی اکید) باشد، این ریشه یکتا خواهد بود.

نکته۱: توجه کنید که در صورت برقراری شرایط قضیه بولتزانو ـ وایرشتراس بر بازه (a,b)، برای یکتا بودن ریشه، کافی است که $f'(x)$ بر $[a,b]$ موجود و بر (a,b) مخالف صفر باشد. همچنین اگر در شرایط قضیه بولتزانو ـ وایرشتراس $f(a)f(b)'>0$ باشد، آن‌گاه تابع f بر (a,b) یا ریشه ندارد و یا ریشه تکراری با چندگانگی زوج دارد.

مثال۴: معادله $x^2-(1-x)^3=0$ به‌ترتیب چند ریشه مثبت و چند ریشه منفی دارد؟

۱) صفر و صفر		۲) یک و صفر		۳) دو و یک		۴) سه و صفر

پاسخ: گزینه «۲» فرض کنیم $f(x)=x^2-(1-x)^3$ باشد؛ بنابراین $f'(x)=2x+3(1-x)^2=3x^2-4x+3$ است. چون مبین $f'(x)$ منفی است پس $f'(x)$ همواره مثبت است و تابع f صعودی اکید خواهد بود. بنابراین حداکثر یک ریشه دارد. چون $f(0)=-1$ و $f(1)=1$ پس بنابر قضیه بولتزانو ـ وایرشتراس این معادله دارای یک ریشه مثبت است و ریشه منفی ندارد.

مثال۵: معادله $x^{1389}+x+k=0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۱) k		۲) ۱		۳) ۳		۴) ۱۳۸۹

پاسخ: گزینه «۲» فرض کنیم $f(x)=x^{1389}+x+k$ باشد، آن‌گاه، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ است. پس اعداد حقیقی a و b موجودند تا $f(a)<0$ و $f(b)>0$ باشد. بنابراین طبق قضیه بولتزانو معادله $f(x)=0$، حداقل یک ریشه حقیقی دارد؛ اما $f'(x)=1389x^{1388}x+1>0$ است، پس تابع f صعودی اکید و درنتیجه، معادله دارای یک ریشه حقیقی است.

قضیه۳: (قضیه رُل) اگر تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته و بر بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد، به‌طوری که $f(a)=f(b)$ باشد، آن‌گاه عددی مانند c متعلق به (a,b) وجود دارد که $f'(c)=0$ است.

قضیه۴: (نتیجه قضیه رُل) با شرایط قضیه رُل، اگر تابع $f'(x)$ بر بازه (a,b) دارای n ریشه باشد، آن‌گاه تابع $f(x)$ بر این بازه دارای $n+1$ ریشه است.

قضیه۵: اگر عدد مختلط α ریشه معادله $P(x)=0$ باشد، آن‌گاه مزدوج آن، $\overline{\alpha}$ نیز چنین است. بنابراین اگر درجه چندجمله‌ای $P(x)$ فرد باشد، حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

قضیه۶: (قاعده علامت‌های دکارت)

حداکثر تعداد ریشه‌های مثبت چندجمله‌ای $P(x)$ برابر تعداد تغییر علامت‌های ضرایب آن است و اختلاف آن‌ها (تعداد ریشه‌ها و تعداد تغییر علامت‌های ضرایب) عددی زوج است.

حداکثر تعداد ریشه‌های منفی چندجمله‌ای $P(x)$ برابر تعداد تغییر علامت‌های ضرایب چندجمله‌ای $P(-x)$ است و اختلاف آن‌ها (تعداد ریشه‌ها و تعداد تغییر علامت‌های ضرایب) عددی زوج است.

مثال۶: تعداد ریشه‌های منفی معادله $P(x)=x^{۳}-x^{۲}-۱۰x+۴=۰$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲» چون $P(-x)=-x^{۳}-x^{۲}+۱۰x+۴$ است. پس تعداد تغییر علامت ضرایب آن ۱ است. بنابراین طبق قاعده علامات دکارت معادله $P(x)=۰$ حداکثر دارای یک ریشه منفی است و چون $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=-\infty$ و $P(۰)=۴$ پس معادله‌ی $P(x)=۰$ دارای یک ریشه‌ی منفی است.

حل عددی معادله غیرخطی

در روش‌های عددی برای حل معادله $f(x)=۰$، ابتدا بازه $[a,b]$ را طوری می‌یابیم که شرایط قضیه بولتزانو ـ وایرشتراس برای آن برقرار شود. (یعنی ریشه‌ای یکتا از معادله در آن باشد.) در این صورت بازه (a,b) را برای تابع f غیربدیهی می‌گوییم. سپس دنباله $\{x_n\}$ را که دنباله حاصل از روش عددی نامیده می‌شود، طوری می‌سازیم که به ریشه موردنظر معادله همگرا شود. در الگوریتم روش‌های عددی محاسبه جمله‌های دنباله $\{x_n\}$ تا زمانی انجام می‌شود که شرطی خاص موسوم به شرط توقف برقرار شود. برای مثال هریک از موارد زیر را می‌توان به‌عنوان شرط توقف درنظر گرفت که در آن‌ها ε عددی مثبت و مفروض است.

$$|f(x_n)|<\varepsilon \quad \text{و} \quad |x_n-x_{n-۱}|<\varepsilon \quad \text{و} \quad \left|\frac{x_n-x_{n-۱}}{x_{n-۱}}\right|<\varepsilon$$

مرتبه همگرایی دنباله

اگر دنباله $\{x_n\}$ به عدد α همگرا باشد، می‌گوییم مرتبه همگرایی آن برابر p است. هرگاه عدد مثبت c موجود باشد به‌طوری که $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{n+۱}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p}\right|=c$ در این صورت عدد c را مجانب خطی یا ثابت همگرایی دنباله می‌گوییم.

نکته۲: هرچه مرتبه همگرایی دنباله بزرگ‌تر باشد، همگرایی آن سریع‌تر است. همچنین اگر دنباله $\{x_n\}$ به عدد α همگرا بوده و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{n+۱}-\alpha}{(x_n-\alpha)^q}\right|=۰$ باشد در این صورت مرتبه همگرایی دنباله از q بیشتر خواهد بود.

روش دوبخشی (تنصیف)

هرگاه α، تنها ریشه معادله $f(x)=۰$ بر فاصله (a,b) باشد، در روش دوبخشی، نقطه وسط بازه یعنی $c=\frac{a+b}{۲}$ را به‌عنوان اولین تقریب برای ریشه α درنظر می‌گیریم، برای مقدار c، سه امکان وجود دارد.

۱) اگر $f(c)=۰$ باشد، در این صورت ریشه برابر c است.

۲) اگر علامت‌های مقادیر $f(a)$ و $f(c)$ متفاوت باشند، آن‌گاه ریشه معادله در فاصله (a,c) قرار دارد.

۳) اگر علامت‌های مقادیر $f(b)$ و $f(c)$ متفاوت باشند، آن‌گاه ریشه معادله در فاصله (c,b) قرار دارد.

به این ترتیب، با ادامه این روش، ریشه معادله را در بازه‌هایی جستجو می‌کنیم که طول آن‌ها در هر مرحله نصف می‌شوند.

درواقع، در روش دوبخشی، دنباله بازه‌های (a_n,b_n) به‌صورت زیر پدید می‌آیند:

$$(a_۱,b_۱):=(a,b) \quad , \quad (a_{n+۱},b_{n+۱}):=\begin{cases}(a_n,x_n) & ; \ f(x_n)f(a_n)<۰\\ (x_n,b_n) & ; \ f(x_n)f(b_n)<۰\end{cases} \quad ; \quad x_n:=\frac{۱}{۲}(a_n+b_n)$$

نقاط میانی بازه‌های (a_n,b_n)، یعنی دنباله $\{x_n\}$ تقریب‌هایی برای ریشه α هستند که به وسیله روش دوبخشی به‌دست می‌آیند.

خطای مطلق تقریب x_n برای ریشه α در روش دوبخشی دارای کران بالای زیر می‌باشد؛ زیرا در هر مرحله از این روش بازه موردنظر نصف می‌شود.

$$e(x_n)=|x_n-\alpha|<\frac{b_n-a_n}{۲}=\frac{b-a}{۲^n}$$

رابطه ذکر شده نشان می‌دهد که خطای مطلق تقریب x_n با افزایش n به‌طور بی‌کران، به صفر نزدیک می‌شود. قضیه زیر همگرایی روش دوبخشی را با جزئیات بیشتری مطرح می‌کند.

قضیه۷: دنباله حاصل از روش دوبخشی به تنها ریشه معادله $f(x)=۰$ بر بازه (a,b) همگرا است. علاوه بر این، مرتبه همگرایی آن برابر ۱ و ثابت همگرایی آن برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. یعنی، $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+۱}-\alpha}{x_n-\alpha}\right|=\frac{۱}{۲}$.

الگوریتم روش دوبخشی

ورودی: اعداد حقیقی a و b، تابع پیوسته $f(x)$ و عدد مثبت ε

خروجی: تقریبی از ریشه معادله $f(x)=۰$ بر بازه (a,b) با دقت ε

گام ۱: قرار دهید $c=\frac{a+b}{۲}$

گام ۲: اگر $f(c)=۰$ باشد، c ریشه است.

گام ۳: اگر $f(a)f(c)>۰$ باشد، قرار دهید $a=c$. در غیر این‌صورت قرار دهید $b=c$.

گام ۴: اگر شرط توقف برقرار است، c تقریب مناسبی برای ریشه است وگرنه به گام ۱ بروید.

مثال۷: اگر $\{x_n\}$ دنباله حاصل از روش دوبخشی برای حل عددی معادله $x^۵+x-۱=۰$ باشد، $x_۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۷}{۸}$

پاسخ: گزینه «۴» فرض کنیم $f(x)=x^۵+x-۱$ باشد. چون $f(۱)=۱>۰$ و $f(۰)=-۱<۰$ است، پس معادله بر $[۰,۱]$ یک ریشه دارد. بنابراین $x_۱=\frac{۰+۱}{۲}$ و $f(\frac{۱}{۲})<۰$ است. پس $f(\frac{۱}{۲})f(۱)<۰$ و بازه $[\frac{۱}{۲},۱]$ غیربدیهی است. بنابراین $x_۲=\frac{\frac{۱}{۲}+۱}{۲}=\frac{۳}{۴}$ و $f(\frac{۳}{۴})<۰$ می‌باشد. بنابراین $f(\frac{۳}{۴})f(۱)<۰$ و بازه $[\frac{۳}{۴},۱]$ غیربدیهی است. بنابراین $x_۳=\frac{\frac{۳}{۴}+۱}{۲}=\frac{۷}{۸}$ می‌باشد.

ویژگی‌های روش دوبخشی

با دقت بیشتر بر روی روش دوبخشی می‌توان ویژگی‌های زیر را برای آن بیان کرد. این ویژگی‌ها از آن جهت دارای اهمیت می‌باشند که ما را در استفاده مناسب از این روش راهنمایی می‌کنند.

۱) تعداد ورودی‌ها در این الگوریتم زیاد نیستند؛ اما همواره به بازه‌ای نیاز داریم که معادله در آن فقط یک ریشه داشته باشد.

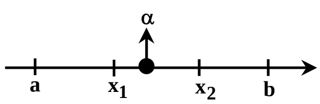
۲) روش دوبخشی همواره همگرا است؛ ولی این همگرایی کند می‌باشد. همان‌طورکه در قضیه قبل بیان شد، مرتبه همگرایی روش دوبخشی برابر ۱ است.

۳) برتری روش دوبخشی بر دیگر روش‌های مشابه، آن است که قبل از محاسبه دنباله تقریب‌ها، می‌توان تعداد تکرارهای روش برای رسیدن به دقتی خاص را محاسبه کرد. درواقع اگر بخواهیم خطای مطلق روش دوبخشی از مقدار ε کمتر باشد، کافی است روش دوبخشی را به تعداد زیر تکرار کنیم:

$$\boxed{\mathbf{e(x_n)=|x_n-\alpha|<\varepsilon\Rightarrow n=[\log_۲(\frac{b-a}{\varepsilon})]+۱}}$$

مشاهده می‌کنید که تعداد تکرارها به معادله وابسته نیست؛ بلکه به بازه‌ای که ریشه را در آن جستجو می‌کنیم و مقدار ε بستگی دارد.

۴) گاهی در روش دوبخشی دنباله تکرارها به جای نزدیک‌تر شدن به ریشه از آن دورتر می‌شوند؛ یعنی ممکن است در مرحله‌ای $|x_n-\alpha|<|x_{n+۱}-\alpha|$ باشد، برای روشن شدن موضوع به شکل زیر توجه کنید. در این شکل $|x_۱-\alpha|<|x_۲-\alpha|$ است.



مثال۸: چند تکرار از روش دوبخشی برای حل معادله $x^{۱۳۸۹}-۵=۰$ نیاز است تا خطای آن کمتر از $۱۰^{-۲}$ باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

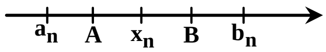
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» فرض کنیم $f(x)=x^{۱۳۸۹}-۵$ باشد، پس $f(۱)=-۴<۰$ و $f(۲)=۲^{۱۳۸۹}-۵>۰$ است. بنابراین بنابر قضیه بولتزانو ـ وایرشتراس معادله بر بازه $(۱,۲)$ دارای یک ریشه است (توجه کنید که $f'(x)>۰$)؛ بنابراین تعداد تکرارهای لازم برای رسیدن به دقت موردنظر از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$n=[\log_۲(\frac{۲-۱}{۱۰^{-۲}})]+۱=[۲\log_۲ ۱۰]+۱=۳+[۲\log_۲ ۵]=۳+۴=۷$$

مثال۹: اگر $\{x_n\}$ دنباله حاصل از روش تنصیف باشد، مقدار $|x_{n+1}-x_n|$ کدام است؟

۱) $\frac{b-a}{۲^{n-۱}}$ ۲) $\frac{b-a}{۲^{n}}$ ۳) $\frac{b-a}{۲^{n+۱}}$ ۴) $\frac{۳(b-a)}{۲^{n+۱}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر بازه $[a,b]$ را به $۲^{n+۱}$ زیر بازه با طول برابر افراز کنیم، آن‌گاه x_n و $x_{n+۱}$ دو نقطه مجاور از این افراز خواهند بود. درواقع با توجه به الگوریتم روش تنصیف در شکل، یکی از نقاط A یا B متناظر $x_{n+۱}$ است. چون طول هر بخش از افراز برابر $\frac{b-a}{۲^{n+۱}}$ است پس، $|x_{n+۱}-x_n|=\frac{b-a}{۲^{n+۱}}$ می‌باشد.



روش نابجایی

اگر α، تنها ریشه معادله $f(x)=۰$ بر بازه (a,b) باشد، در روش نابجایی نقطه تلاقی پاره‌خط واصل دو نقطه $A\Big|\begin{matrix}a\\f(a)\end{matrix}$ و $B\Big|\begin{matrix}b\\f(b)\end{matrix}$ با محور طول‌ها را به‌عنوان اولین تقریب برای ریشه α درنظر می‌گیریم. با نوشتن معادله خط گذرا از دو نقطه A و B، نقطه تلاقی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

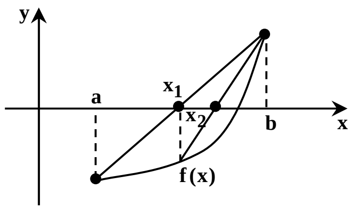
$$\boxed{c=\frac{۱}{f(b)-f(a)}\begin{vmatrix}a & f(a)\\ b & f(b)\end{vmatrix}=\frac{a\,f(b)-b\,f(a)}{f(b)-f(a)}}$$

مشابه روش دوبخشی، برای مقدار c، سه امکان وجود دارد؛ یا c ریشه معادله است، یا ریشه در بازه (a,c) قرار دارد، یا ریشه در بازه (c,b) واقع است.

بنابراین با تکرار روش نابه‌جایی، ریشه معادله را در بازه‌های زیر جستجو می‌کنیم:

$$\boxed{(a_۱,b_۱):=(a,b)\quad,\quad (a_{n+۱},b_{n+۱}):=\begin{cases}(a_n,x_n) & ;\ f(x_n)f(a_n)<۰\\ (x_n,b_n) & ;\ f(x_n)f(b_n)<۰\end{cases}\quad;\quad x_n=\frac{۱}{f(b_n)-f(a_n)}\begin{vmatrix}a_n & f(a_n)\\ b_n & f(b_n)\end{vmatrix}}$$

دنباله حاصل از روش نابه‌جایی به تنها ریشه معادله $f(x)=۰$ بر بازه (a,b) همگرا است. همچنین نقطه $(x_n,۰)$ محل تقاطع محور x با خطی است که از دو نقطه $(a_n,f(a_n))$ و $(b_n,f(b_n))$ می‌گذرد.



نکته۳: روش نابه‌جایی معمولاً سریع‌تر از روش دوبخشی است، اما اگر x_n ها همگی در یک طرف ریشه باشند همگرایی می‌تواند حتی کندتر از روش دوبخشی باشد. تعداد عملیات لازم برای روش نابه‌جایی، دو برابر و نیم تعداد عملیات لازم برای روش دوبخشی است.

الگوریتم روش نابجایی

ورودی: اعداد حقیقی a و b، تابع پیوسته $f(x)$ و عدد مثبت ε

خروجی: تقریبی از ریشه معادله $f(x)=۰$ بر بازه (a,b) با دقت ε

گام ۱: قرار دهید $c=\frac{۱}{f(b)-f(a)}\begin{vmatrix}a & f(a)\\ b & f(b)\end{vmatrix}$

گام ۲: اگر $f(c)=۰$ باشد، c ریشه است.

گام ۳: اگر $f(a)f(c)>۰$ باشد، قرار دهید $a=c$. در غیر این صورت قرار دهید $b=c$.

گام ۴: اگر شرط توقف برقرار است c تقریب مناسبی برای ریشه است وگرنه به گام ۱ بروید.

مثال۱۰: معادله $x-۱=\sin x$ در بازه $[\frac{\pi}{۲},\pi]$ یک ریشه دارد. مقدار $x_۱$ که از روش نابه‌جایی به‌دست می‌آید، کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{\pi-۲}$ ۲) $\frac{۳\pi}{\pi+۲}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲-\pi}$ ۴) $\frac{۳\pi}{\pi+۱}$

پاسخ: گزینه «۲» فرض کنیم $f(x)=x-۱-\sin x$ باشد. درنتیجه، $f(\pi)=\pi-۱>۰$ و $f(\frac{\pi}{۲})=\frac{\pi}{۲}-۲<۰$ است. بنابراین با توجه به فرمول روش نابه‌جایی خواهیم داشت:

$$x_۱=\frac{۱}{f(\pi)-f(\frac{\pi}{۲})}\begin{vmatrix}\frac{\pi}{۲} & f(\frac{\pi}{۲})\\ \pi & f(\pi)\end{vmatrix}=\frac{۲}{\pi+۲}\begin{vmatrix}\frac{\pi}{۲} & \frac{\pi}{۲}-۲\\ \pi & \pi-۱\end{vmatrix}=\frac{\pi}{\pi+۲}\begin{vmatrix}۱ & \pi-۴\\ ۱ & \pi-۱\end{vmatrix}=\frac{۳\pi}{\pi+۲}$$

مثال۱۱: کدام مورد از ویژگی‌های روش نابه‌جایی نیست؟

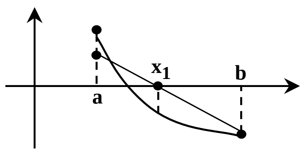
۱) همگرایی
۲) تعداد عملیات زیاد
۳) سرعت همگرایی آن همواره از روش دوبخشی بیشتر است.
۴) ورودی‌ها در الگوریتم آن کم است.

پاسخ: گزینه «۳» اگر تقریب‌های روش نابه‌جایی همگی در یک طرف ریشه باشند ممکن است روش نابه‌جایی کندتر از روش دوبخشی باشد.

روش اصلاح شده نابه‌جایی

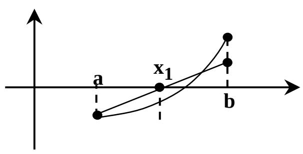
چنان‌چه جملات دنباله حاصل از روش نابه‌جایی در یک طرف ریشه قرار گیرند، یعنی تابع، محدب یا مقعر باشد. می‌توان با نصف کردن عرض نقطه‌ای که ثابت مانده است به همگرایی سرعت بخشید. این روش را روش اصلاح شده نابه‌جایی می‌گویند.

اگر جملات دنباله از سمت b به ریشه نزدیک شوند، خطی را از $(b,f(b))$ به $(a,\frac{۱}{۲}f(a))$ رسم می‌کنیم.



$$x_n=\frac{۱}{f(b_n)-\frac{۱}{۲}f(a_n)}\begin{vmatrix}a_n & \frac{۱}{۲}f(a_n)\\ b_n & f(b_n)\end{vmatrix}$$

اگر جملات دنباله از سمت a به ریشه نزدیک شوند، خطی را از $(a,f(a))$ به $(b,\frac{۱}{۲}f(b))$ رسم می‌کنیم.



$$x_n=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}f(b_n)-f(a_n)}\begin{vmatrix}a_n & f(a_n)\\ b_n & \frac{۱}{۲}f(b_n)\end{vmatrix}$$

مثال۱۲: اگر در روش نابه‌جایی، جملات دنباله از سمت b به ریشه نزدیک شوند، فرمول روش اصلاح شده نابه‌جایی برای محاسبه $x_۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۲af(a)-bf(b)}{۲f(a)-f(b)}$ ۲) $\frac{۲af(b)-bf(a)}{۲f(b)-f(a)}$ ۳) $\frac{af(a)-۲bf(b)}{f(a)-۲f(b)}$ ۴) $\frac{af(b)-۲bf(a)}{f(b)-۲f(a)}$

پاسخ: گزینه «۲» در این حالت فرمول روش اصلاح شده نابه‌جایی برای محاسبه $x_۱$ چنین است:

$$x_۱=\frac{۱}{f(b)-\frac{۱}{۲}f(a)}\begin{vmatrix}a & \frac{۱}{۲}f(a)\\ b & f(b)\end{vmatrix}=\frac{af(b)-\frac{۱}{۲}bf(a)}{f(b)-\frac{۱}{۲}f(a)}=\frac{۲af(b)-bf(a)}{۲f(b)-f(a)}$$

روش تکرار ساده

اگر α ریشه معادله $f(x)=۰$ باشد، در روش تکرار ساده، معادله $f(x)=۰$ را به شکل $x=g(x)$ می‌نویسیم؛ به‌طوری که α ریشه‌ای از آن باشد. سپس تقریبی نه‌چندان دقیق از α مانند $x_۰$ را درنظر می‌گیریم و دنباله $\{x_n\}$ با ضابطه $x_{n+۱}=g(x_n)$ را می‌سازیم. قضیه زیر شرایط کافی برای همگرایی دنباله $\{x_n\}$ به α را مهیا می‌کند.

قضیه۸: اگر $g(x)$ تابعی مشتق‌پذیر بر $[a,b]$ بتوی $[a,b]$ باشد و برای هر x از $[a,b]$ داشته باشیم؛ $|g'(x)| \le L < 1$. در این صورت داریم:

۱) معادله $x=g(x)$ تنها یک ریشه حقیقی متعلق به $[a,b]$ دارد.

۲) به ازای هر x_0 از $[a,b]$، دنباله $\{x_n\}$ که $x_{n+1}=g(x_n)$ باشد، به تنها ریشه حقیقی معادله $x=g(x)$ همگرا است.

اگر یک یا هر دو شرط قضیه برقرار نبود نمی‌توان نتیجه گرفت که دنباله $\{x_n\}$ حاصل از روش تکرار ساده، به α همگرا نیست؛ بلکه توصیه می‌شود که از این $g(x)$ استفاده نشود. همچنین مقدار L در این قضیه بسیار مهم است؛ زیرا، سرعت همگرایی دنباله $\{x_n\}$ به مقدار L بستگی دارد، هرچه L به صفر نزدیک‌تر باشد، سرعت همگرایی بیشتر است.

مثال۱۳: روش تکراری $x_{n+1}=\frac{e^{-x_n}}{3}$ برای محاسبه ریشه معادله $3xe^x=1$ به ازای کدام مقادیر x_0 به ریشه معادله، همگرا است؟

۱) $x_0<0$ ۲) $x_0<e^{-3}$ ۳) $x_0>\ln\frac{1}{3}$ ۴) $x_0<\frac{e}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» فرض کنیم $g(x)=\frac{e^{-x}}{3}$ باشد، پس $g'(x)=-\frac{e^{-x}}{3}$ است. اگر $|g'(x)|<1$ باشد، آن‌گاه $e^{-x}<3$ و $x>\ln\frac{1}{3}$ است.

قضیه۹: اگر شرایط قضیه قبل برقرار باشد و دنباله $\{x_n\}$ به α ریشه معادله $x=g(x)$ همگرا باشد، در این صورت، روابط زیر برای خطای مطلق تقریب‌های x_n برقرار هستند:

$$|x_n-\alpha| \le L^n \operatorname{Max}\{x_0-a, b-x_0\} \qquad |x_n-\alpha| \le L^n|x_0-\alpha|$$

$$|x_n-\alpha| \le \frac{L}{1-L}|x_n-x_{n-1}| \qquad |x_n-\alpha| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|$$

اگر علاوه بر این، در آن همسایگی $g'(x)<0$ باشد، آن‌گاه جملات متوالی دنباله $\{x_n\}$، حاصل از روش تکرار ساده در دو طرف α قرار دارند و $|x_n-\alpha| \le \frac{L}{1+L}|x_n-x_{n-1}|$ است.

مثال۱۴: اگر $|g'(x)| \le L < 1$ و دنباله $\{x_n\}$ با $x_{n+1}=g(x_n)$ به α همگرا باشد، کران بالای $|x_n-x_{n-1}|$ کدام باشد تا خطای دنباله کمتر از ε شود؟

۱) $(\frac{1+L}{L})\varepsilon$ ۲) $(\frac{L}{1+L})\varepsilon$ ۳) $(\frac{1-L}{L})\varepsilon$ ۴) $(\frac{L}{1-L})\varepsilon$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به قضیه قبل $|x_n-\alpha| \le \frac{L}{1-L}|x_n-x_{n-1}|$ است. پس کافی است داشته باشیم: $|x_n-x_{n-1}|<(\frac{1-L}{L})\varepsilon$.

مثال۱۵: اگر دنباله $\{x_n\}$ که $x_{n+1}=-e^{x_n}+\frac{1}{e}$ به α ریشه معادله $x=-e^x+\frac{1}{e}$ همگرا باشد، کدام درباره علامت $(x_{10}-\alpha)(x_9-\alpha)$، درست است؟

۱) علامت آن منفی است. ۲) به علامت x_0 بستگی دارد. ۳) علامت آن مثبت است. ۴) به علامت x_0x_1 بستگی دارد.

پاسخ: گزینه «۱» فرض کنیم $g(x)=-e^x+\frac{1}{e}$ باشد. چون $g'(x)=-e^x<0$ و برای $x<0$، همواره $|g'(x)|<1$ است، بنابراین شرایط قضیه قبل برقرار بوده و تقریب‌های متوالی در دو طرف α قرار دارند و بنابراین علامت این عبارت منفی است.

قضیه زیر مرتبه همگرایی روش تکرار ساده را در شرایط مختلف بررسی می‌کند.

قضیه۱۰: فرض کنیم دنباله حاصل از روش تکرار ساده به α، تنها ریشه معادله $x=g(x)$ همگرا باشد، در این صورت:

۱) اگر $g'(\alpha)\neq 0$ باشد، مرتبه همگرایی دنباله برابر یک و ثابت همگرایی برابر $|g'(\alpha)|$ است.

۲) اگر $g'(\alpha)=g''(\alpha)=\cdots=g^{(k-1)}(\alpha)=0$ و $g^{(k)}(\alpha)$ مخالف صفر باشد، مرتبه همگرایی دنباله برابر k و ثابت همگرایی برابر $\frac{1}{k!}|g^{(k)}(\alpha)|$ است.

۳) اگر $g'(\alpha)=g''(\alpha)=\ldots=g^{(k-1)}(\alpha)=0$ باشد، آن‌گاه مرتبه همگرایی دنباله حداقل k است.

فصل چهارم

«درون‌یابی»

تابع درون‌یاب و درون‌یابی

در کشور ما هر پنج سال یک بار، جمعیت سرشماری می‌شود. به نظر شما آیا می‌توان با استفاده از اطلاعات سال‌های سرشماری، جمعیت کشور را در سالی که سرشماری در آن انجام نشده است، تخمین زد؟

فرض کنید سرشماری جمعیت از سال ۱۳۲۰ تا ۱۳۹۰ هر پنج سال یک بار در کشور انجام شده باشد، این عمل تخمین را اگر برای سال‌های واقع در فاصله [۱۳۹۰ و ۱۳۲۰] باشد، درون‌یابی و اگر برای سالی خارج از فاصله داده شده باشد، برون‌یابی می‌گویند.

در حالت کلی اگر مقادیر تابع $f(x)$ در نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ برابر مقادیر $f_0, f_1, \cdots, f_n$ باشند، درون‌یابی روندی برای تخمین مقادیر تابع $f(x)$ بین نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ است. همچنین برون‌یابی تخمین مقادیر تابع $f(x)$ برای نقاطی خارج از بازه $[x_0, x_n]$ است.

تابع $f(x)$ که با استفاده از چند نقطه مشخص شده است را یک تابع جدولی می‌نامیم و آن را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

x_i	x_0	x_1	...	x_n
$f_i = f(x_i)$	f_0	f_1	...	f_n

تابع $F(x)$ را درون‌یاب تابع جدولی $f(x)$ می‌گوییم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

$$F(x_i) = f_i \quad ; \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

مثال۱: اگر تابع g درون‌یاب تابع f در نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ و h تابعی باشد که برای $i = 0, 1, \cdots, n$ ، $h(x_i) = \delta_{in} = \begin{cases} 1 & ; i = n \\ 0 & ; i \neq n \end{cases}$، آن‌گاه برای کدام مقدار c تابع $g + ch$ درون‌یاب تابع f در نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ است؟

۱) $f_n - g(x_n)$ ۲) $f_n + g(x_n)$ ۳) $g(x_n) - f_n$ ۴) $\frac{g(x_n)}{f_n}$

پاسخ: گزینه «۱» چون برای $0 \le i \le n-1$ داریم $g(x_i) = f_i$، پس مقدار تابع $g + ch$ در نقطه x_i به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$(g+ch)(x_i) = g(x_i) + ch(x_i) = \begin{cases} g(x_n) + c\delta_{nn} & ; i = n \\ g(x_i) + c\delta_{in} & ; i \neq n \end{cases} = \begin{cases} g(x_n) + c & ; i = n \\ g(x_i) + c \times 0 & ; i \neq n \end{cases} = \begin{cases} g(x_n) + c & ; i = n \\ f_i & ; i \neq n \end{cases}$$

پس کافی است که $g(x_n) + c = f_n$ باشد، یعنی $c = f_n - g(x_n)$ است.

قضیه۱: اگر $A(x)$ درون‌یاب تابع $f(x)$ در نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ و تابع $B(x)$ درون‌یاب تابع $f(x)$ در نقاط $x_1, x_2, \cdots, x_n$ باشد، آن‌گاه تابع زیر درون‌یاب تابع $f(x)$ در نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ خواهد بود.

$$\boxed{F(x) = \frac{(x_n - x)A(x) + (x - x_0)B(x)}{x_n - x_0}}$$

مثال۲: اگر $A(x)$ درون‌یاب تابع $f(x)$ در نقاط ۱۳۸۸,...,۱,۰ و تابع $B(x)$ درون‌یاب تابع $f(x)$ در نقاط ۱۳۸۹,...,۲,۱ باشد، آن‌گاه تابع $\alpha(x)A(x) + \beta(x)B(x)$ که در آن $\alpha(x) + \beta(x) = 1$ است درون‌یاب تابع $f(x)$ در نقاط ۱۳۸۹,...,۲,۱,۰ است هرگاه:

۱) $\alpha(0) = \beta(1389) = 0$ ۲) $\alpha(0) = \beta(1389) = 1$ ۳) $\alpha(1389) = \beta(0) = 0$ ۴) $\alpha(1389) = \beta(0) = 1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون $A(0)=f(0)$ و $\beta(0)=1-\alpha(0)$ است. بنابراین، با تشکیل $f(0)$ خواهیم داشت.

$$f(0)=\alpha(0)A(0)+\beta(0)B(0)=\alpha(0)f(0)+(1-\alpha(0))B(0)$$

درنتیجه، $(1-\alpha(0))f(0)=(1-\alpha(0))B(0)$ است. چون مقدار $B(0)$ هر مقداری می‌تواند باشد پس $\alpha(0)=1$ است. به همین ترتیب با قرار دادن ۱۳۸۹ در تابع درون‌یاب شرط $\beta(1389)=1$ حاصل می‌شود.

چندجمله‌ای درون‌یاب

چندجمله‌ای $P(x)$ را چندجمله‌ای درون‌یاب تابع $f(x)$ در نقاط $(x_0,f_0),(x_1,f_1),\dots,(x_n,f_n)$ می‌گوییم اگر علاوه بر برقراری شرط $P(x_i)=f_i$ برای $i=0,1,\dots,n$، درجه چندجمله‌ای $P(x)$ نیز حداکثر برابر n باشد.

اگر $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ باشد، آن‌گاه شرط $P(x_i)=f_i$ با $i=0,1,\dots,n$، برای چندجمله‌ای درون‌یاب $P(x)$ به شکل دستگاه معادلات خطی روبه‌رو تبدیل می‌شود که در آن $a_0,a_1,\dots,a_n$ ضرایب چندجمله‌ای درون‌یاب $P(x)$ هستند. ماتریس ضرایب این دستگاه معادلات خطی را ماتریس واندرموند می‌نامند. دترمینان ماتریس

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2\cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2\cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2\cdots & x_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

واندرموند برابر $\prod\limits_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i)$ است، چون این دترمینان برای مقادیر متمایز $x_0,x_1,\cdots,x_n$، مخالف صفر است. بنابراین دستگاه معادلات خطی چندجمله‌ای درون‌یاب دارای جواب یکتا است. بنابراین چندجمله‌ای درون‌یاب در نقاط متمایز $(x_0,f_0),(x_1,f_1),\dots,(x_n,f_n)$ موجود و یکتاست.

مثال ۳: اگر $P(x)$ چندجمله‌ای درون‌یاب نقاط $(0,1)$ و $(1,2)$ و $(2,3)$ باشد، جواب کدام دستگاه ضرایب $P(x)$ را مشخص می‌کند؟

۱) $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

۲) $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$

۳) $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

۴) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&1\\3&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اگر $x_0=0$ و $x_1=1$ و $x_2=2$ فرض شوند ماتریس ضرایب دستگاه موردنظر طبق مطالب بالا چنین خواهد بود:

$$\begin{pmatrix}1&x_0&x_0^2\\1&x_1&x_1^2\\1&x_2&x_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}$$

نکته ۱: درجه چندجمله‌ای درون‌یاب کمتر یا مساوی تعداد نقاط درون‌یابی است، اما قاعده‌ای برای تعیین آن وجود ندارد. یعنی ممکن است با افزایش نقاط درون‌یابی درجه چندجمله‌ای درون‌یاب تغییری نکند.

مثال ۴: چندجمله‌ای درون‌یاب تابع $f(x)=x^{[\frac{n+1}{2}]}-x^{[\frac{n-1}{2}]}$ برای درون‌یابی چند نقطه برابر خود $f(x)$ است؟

۱) $[\frac{n-1}{2}]+[\frac{n+1}{2}]$ ۲) $[\frac{n+1}{2}]+1$ ۳) n ۴) $\frac{n+1}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» باید تعداد نقاط، ۱ واحد بیشتر از درجه‌ی چندجمله‌ای باشد. پس جواب درست $[\frac{n+1}{2}]+1$ می‌باشد.

نکته ۲: چندجمله‌ای درون‌یاب تابع $P(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ برای درون‌یابی k نقطه که $k\ge n+1$ است با $P(x)$ برابر است.

مثال ۵: اگر $P(x)$ چندجمله‌ای درون‌یاب نقاط $(1,f_1),(2,f_2),\dots,(10,f_{10})$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای درون‌یاب نقاط زیر باشد، آن‌گاه:

$(1,f_1),(2,f_2),\dots,(10,f_{10}),(11,f_{11})$

۱) $\deg(P)\ge\deg(Q)$ ۲) $\deg(P)\le\deg(Q)$ ۳) $\deg(P)=\deg(Q)$ ۴) مشخص نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ برای مقادیر مختلف f_{11} امکان رخ دادن دارند، پس این موضوع قابل پیش‌بینی نیست.

روش‌های متفاوتی برای یافتن چندجمله‌ای درون‌یاب وجود دارند. از جمله این روش‌ها، درون‌یابی لاگرانژ، تفاضلات تقسیم شده نیوتن، اسپلاین و هرمیت است که در بخش‌های بعدی به‌طور مجزا آن‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

روش درون‌یابی لاگرانژ

در روش لاگرانژ برای یافتن چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی $\begin{array}{c|cccc} x_i & x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline f_i & f_0 & f_1 & \cdots & f_n \end{array}$ چندجمله‌ای‌های درج n به‌صورت $L_i(x)\ ;\ i=0,1,\cdots,n$ را موسوم به چندجمله‌ای‌های لاگرانژ، معرفی می‌کنیم:

$$\boxed{L_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & ;i=j\\ 0 & ;i\neq j\end{cases} \quad ; \quad i=0,1,\dots,n}$$

با کمی محاسبه می‌توان نشان داد که چندجمله‌های لاگرانژ به‌صورت زیر هستند:

$$\boxed{L_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید چندجمله‌ای‌های لاگرانژ تنها به مقادیر $x_0, x_1, \dots, x_n$ وابسته هستند و به مقادیر $f_0, f_1, \dots, f_n$ بستگی ندارند. با استفاده از این چندجمله‌ای‌ها، می‌توان چندجمله‌ای درون‌یاب نقاط متمایز $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{n}$ به روش لاگرانژ را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\boxed{P(x)=f_0L_0(x)+f_1L_1(x)+\cdots+f_nL_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f_iL_i(x)}$$

ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های لاگرانژ

۱) اگر $F(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ باشد، آن‌گاه می‌توان چندجمله‌ای‌های لاگرانژ را از رابطه $L_i(x)=\dfrac{F(x)}{(x-x_i)F'(x_i)}$ محاسبه کرد.

۲) مجموع چندجمله‌ای‌های لاگرانژ برابر یک است یعنی، $\sum_{i=0}^{n}L_i(x)=L_0(x)+L_1(x)+\cdots+L_n(x)=1$

۳) چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مستقل خطی‌اند. یعنی اگر ترکیب خطی $c_0L_0(x)+c_1L_1(x)+\dots+c_nL_n(x)$ برابر صفر باشد، آن‌گاه تمام ضرایب برابر صفر خواهد بود.

۴) اگر $Q(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه k باشد و $0\le k\le n$ آن‌گاه، چندجمله‌ای لاگرانژ در رابطه $\sum_{i=0}^{n}Q(x_i)L_i(x)=Q(x)$ صدق می‌کند.

۵) دستگاه معادلات حاصل از روش لاگرانژ یک دستگاه قطری است.

مثال۶: اگر $L_i(x)$ برای $i=0,1,2$ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ در نقاط x_0 و x_1 و x_2 باشد، درجه چندجمله‌ای زیر کدام است؟

$$P(x)=(2x_0+1)L_0(x)+(2x_1+1)L_1(x)+(2x_2+1)L_2(x)$$

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) به نقاط x_0، x_1 و x_2 بستگی دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» بنابر ویژگی شماره ۴ برای چندجمله‌ای‌های لاگرانژ، $P(x)=2x+1$ است که درجه آن یک می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۷: اگر $L_i(x)$ برای $i=0,1,\dots,6$ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ، در نقاط $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(5,6)$, $(6,7)$ باشند. درجه چندجمله‌ای $P(x)=L_1(x)+L_2(x)+\cdots+L_6(x)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» بنابر ویژگی شماره ۲ برای چندجمله‌ای‌های لاگرانژ $1=L_0(x)+L_1(x)+\cdots+L_6(x)$ است. پس $P(x)=1-L_0(x)$ می‌باشد که درجه آن برابر ۶ است (هر کدام از $L_i(x)$ها دارای درجه ۶ می‌باشند).

مثال۸: اگر $F(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ **و** $\sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha_i F(x)}{(x-x_i)F'(x_i)}=0$ **باشد، حاصل** $\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ **کدام است؟**

۱) $x_0+x_1+\cdots+x_n$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $F(x_0+x_1+\cdots+x_n)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون $\sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha_i F(x)}{(x-x_i)F'(x_i)}=0$ است، پس با استفاده از ویژگی شماره ۱ خواهیم داشت، $0=\sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha_i F(x)}{(x-x_i)F'(x_i)}=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i L_i(x)$ اما بنابر ویژگی شماره ۳ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مستقل خطی هستند پس $\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$ می‌باشد، یعنی $\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n=0$ است.

مثال۹: اگر چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی

x_i	۱	۲	۴	۸
f_i	۱	۳	۷	۱۱

برابر $P(x)$ باشد. حاصل $P(7)+L_0(0)$ کدام است؟

۱) $\frac{76}{7}$ ۲) $\frac{64}{21}$ ۳) $\frac{292}{21}$ ۴) $\frac{292}{7}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مربوط به این تابع جدولی را محاسبه می‌کنیم.

$$L_0(x)=\frac{(x-2)(x-4)(x-8)}{(1-2)(1-4)(1-8)}=-\frac{1}{21}(x-2)(x-4)(x-8)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-8)}{(4-1)(4-2)(4-8)}=-\frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-8)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-1)(x-4)(x-8)}{(2-1)(2-4)(2-8)}=\frac{1}{12}(x-1)(x-4)(x-8)$$

$$L_3(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(8-1)(8-2)(8-4)}=\frac{1}{168}(x-1)(x-2)(x-4)$$

بنابراین، چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی برابر $P(x)=\sum_{i=0}^{3}f_iL_i(x)=L_0(x)+3L_1(x)+7L_2(x)+11L_3(x)$ می‌باشد. که از آن $P(7)=\frac{76}{7}$ است. اما $L_0(0)=\frac{64}{21}$ می‌باشد. بنابراین $P(7)+L_0(0)=\frac{76}{7}+\frac{64}{21}=\frac{292}{21}$ است.

اشکالات روش درون‌یابی لاگرانژ

روش درون‌یابی لاگرانژ دارای اشکالاتی است که از آن جمله می‌توان موارد زیر را نام برد:

۱) برای nهای بزرگ عملیات روش بسیار زیاد و خسته‌کننده است. حتی با استفاده از کامپیوتر هم محاسبه چندجمله‌ای درون‌یاب با این روش نیاز به انجام عملیات زیاد دارد. (علاوه بر این‌که برنامه‌نویسی روش هم ساده نیست)

۲) قبل از اتمام عملیات درجه چندجمله‌ای درون‌یاب معلوم نیست.

۳) با اضافه کردن یک یا چند نقطه تقریباً تمام عملیات باید از ابتدا انجام شوند.

۴) معمولاً با افزایش درجه چندجمله‌ای دقت درون‌یابی در نقاط انتهایی کاهش می‌یابد.

مثال۱۰: کدام مورد از اشکالات روش درون‌یابی لاگرانژ نیست؟

۱) عملیات زیاد ۲) معلوم نبودن درجه چندجمله‌ای درون‌یاب قبل از انجام درون‌یابی

۳) با افزایش نقاط تمام عملیات تکرار می‌شود. ۴) استفاده از این روش همواره امکان‌پذیر نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به موارد ذکر شده در قسمت قبل، گزینه ۴ نمی‌تواند از اشکالات روش درون‌یابی لاگرانژ باشد. چون این روش همواره می‌تواند مورد استفاده باشد.

تفاضلات تقسیم شده نیوتن

روش دومی که برای محاسبه چندجمله‌ای درون‌یاب مورد بررسی قرار می‌دهیم، روش نیوتن است. برای این منظور نیاز به ابزاری موسوم به تفاضلات تقسیم شده نیوتن است. فرض کنیم نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ متمایز باشند. تفاضلات تقسیم شده نیوتن در نقاط $(x_0,f_0),(x_1,f_1),\cdots,(x_n,f_n)$ چنین تعریف می‌شوند.

تفاضلات مرتبه صفر در x_i: $f[x_i]:=f_i$

تفاضلات مرتبه اول در x_i و x_{i+1}: $f[x_i,x_{i+1}]:=\frac{f_i-f_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}$

تفاضلات مرتبه k در نقاط $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$: $f[x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]:=\frac{f[x_i,\ldots,x_{i+k-1}]-f[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]}{x_i-x_{i+k}}$

مدرسان شریف

فصل پنجم

« مشتق‌گیری عددی»

در فصل پیش رو روش‌های عددی محاسبه مشتق تابع را بیان خواهیم کرد. محاسبه عددی مشتق تابع به دو علت بررسی می‌شود یا تابع دارای فرمول پیچیده‌ای است که مشتق‌گیری از آن دشوار است یا مقادیر تابع در چند نقطه به شکل یک تابع جدولی داده شده است که مقادیر آن به‌طور تجربی به‌دست می‌آیند. خطای مقادیر به‌دست آمده به روش تجربی برای تابع، معمولاً به ناپایداری در مشتق‌گیری عددی می‌انجامد. بنابراین مشتق‌گیری عددی از لحاظ عددی ناپایدار است و در صورت امکان نباید از آن استفاده کرد.

مشتق عددی با درون‌یابی

یکی از روش‌های اساسی یافتن تقریب عددی برای $f'(x)$، استفاده از مشتق چندجمله‌ای $P(x)$ است که $f(x)$ را در یک مجموعه نقاط گره‌ای معین درون‌یابی می‌کند.

با توجه به روش درون‌یابی لاگرانژ و نیوتن برای تابع جدولی $\begin{array}{c|cccc} x_i & x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline f_i & f_0 & f_1 & \cdots & f_n \end{array}$ دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

۱) مشتق عددی با درون‌یابی لاگرانژ:

$$\boxed{f'(x) \simeq p'(x) = L'_0(x)f_0 + L'_1(x)f_1 + \dots + L'_n(x)f_n = \sum_{k=0}^{n} L'_k(x)f_k}$$

۲) مشتق عددی با درون‌یابی نیوتن:

$$\boxed{\begin{aligned} f'(x) \simeq P'(x) &= f[x_0,x_1] + ((x-x_0)+(x-x_1))f[x_0,x_1,x_2] \\ &+ [(x-x_0)(x-x_1)+(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_1)(x-x_2)]f[x_0,x_1,x_2,x_3] + \cdots \end{aligned}}$$

مثال ۱: اگر تابع جدولی $\begin{array}{c|ccc} x_i & x_0 & x_1 & x_2 \\ \hline f_i & f_0 & f_1 & f_2 \end{array}$ **داده شده باشد، $f'(x_i)$ کدام است؟**

۱) $f[x_0,x_1] + (x - x_i)f[x_0,x_1,x_2]$

۲) $f[x_0,x_1] + (x_i - x)f[x_0,x_1,x_2]$

۳) $f[x_0,x_1] + (3x_i - x_0 - x_1 - x_2)f[x_0,x_1,x_2]$

۴) $f[x_0,x_1] + (2x_i - x_0 - x_1)f[x_0,x_1,x_2]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به فرمول مشتق‌گیری عددی با درون‌یابی نیوتن به‌دست می‌آید.

$$f'(x_i) \simeq f[x_0,x_1] + ((x_i - x_0)+(x_i - x_1))f[x_0,x_1,x_2] = f[x_0,x_1] + (2x_i - x_0 - x_1)f[x_0,x_1,x_2]$$

مشتق‌گیری عددی با تفاضلات پیشرو

همان‌طور که در فصل چهارم آموختیم چندجمله‌ای درون‌یاب پیشروی نیوتن در نقطه $x = x_s = x_i + hs$ به شکل زیر است:

$$\boxed{P(x_s) = f_i + \binom{s}{1}\Delta f_i + \binom{s}{2}\Delta^2 f_i + \cdots + \binom{s}{n}\Delta^n f_i}$$

درنظر داریم $f'(x)$ را با $P'(x)$ به‌دست آمده از رابطه بالا تقریب بزنیم، اما $P'(x) = \frac{dP}{ds}\cdot\frac{ds}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dP}{ds}$ است. بنابراین فرمول مشتق‌گیری عددی با

تفاضلات پیشرو را می‌توان با دستور زیر بیان کرد:

$$\boxed{f'(x) \simeq \frac{1}{h}\left(\frac{d}{ds}\binom{s}{1}\Delta f_i + \frac{d}{ds}\binom{s}{2}\Delta^2 f_i + \cdots + \frac{d}{ds}\binom{s}{n}\Delta^n f_i\right)}$$

فرمول مشتق عددی با تفاضلات پیشرو و معمولاً در نقطه گره‌ای اول، x_i، نقطه گره‌ای دوم، x_{i+1} و نقطه وسط این دو گره، $x_i + \frac{h}{2}$، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مشتق عددی در نقطه گره‌ای اول:

اگر در فرمول مشتق عددی با تفاضلات پیشرو مقدار s را برابر صفر قرار دهیم، فرمول مشتق عددی در نقطه گره‌ای اول حاصل می‌شود.

$$\boxed{f'_i = f'(x_i) \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i + \frac{1}{3}\Delta^3 f_i - \frac{1}{4}\Delta^4 f_i + \cdots\right)}$$

در محاسبه مشتق عددی با استفاده از این فرمول، تعدادی از جملات آن درنظر گرفته می‌شوند.

فرمول دونقطه‌ای: $\boxed{f'_i \simeq \frac{\Delta f_i}{h} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}}$

فرمول سه‌نقطه‌ای (فرمول تفاضل پیشرو): $\boxed{f'_i \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i\right) = \frac{1}{2h}\left(-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i\right)}$

فرمول چهارنقطه‌ای: $\boxed{f'_i \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i + \frac{1}{3}\Delta^3 f_i\right) = \frac{1}{6h}\left(2f_{i+3} - 9f_{i+2} + 18f_{i+1} - 11f_i\right)}$

مثال۲: برای تابع جدولی

x_i	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴
f_i	۰/۰۱	۰/۱۱	۰/۲۱	۰/۳۳

با استفاده از فرمول تفاضل پیشرو حاصل $f'(0/1)$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳۳

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به تابع جدولی، طول گام برابر $h = 0/1$ است. بنابراین با استفاده از فرمول تفاضل پیشرو خواهیم داشت:

$$f'(0/1) \simeq \frac{1}{2(0/1)}\left(-0/21 + 4(0/11) - 3(0/01)\right) = 1$$

مشتق عددی در نقطه گره‌ای دوم:

اگر در فرمول مشتق عددی با تفاضلات پیشرو مقدار s را برابر یک قرار دهیم، فرمول مشتق عددی در نقطه گره‌ای دوم به‌دست می‌آید:

$$\boxed{f'_{i+1} = f'(x_{i+1}) \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_i + \frac{1}{2}\Delta^2 f_i - \frac{1}{6}\Delta^3 f_i + \frac{1}{12}\Delta^4 f_i + \cdots\right)}$$

در محاسبه مشتق عددی با استفاده از این فرمول، تعدادی از جملات آن درنظر گرفته می‌شوند.

فرمول تفاضل پسرو: $\boxed{f'_{i+1} \simeq \frac{1}{h}\Delta f_i = \frac{1}{h}(f_{i+1} - f_i)}$

فرمول تفاضل مرکزی: $\boxed{f'_{i+1} \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_i + \frac{1}{2}\Delta^2 f_i\right) = \frac{1}{2h}(f_{i+2} - f_i)}$

فرمول چهارنقطه‌ای: $\boxed{f'_{i+1} \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_i + \frac{1}{2}\Delta^2 f_i - \frac{1}{6}\Delta^3 f_i\right) = \frac{1}{6h}\left(-f_{i+3} + 6f_{i+2} - 3f_{i+1} - 2f_i\right)}$

توجه کنید که فرمول تفاضل پسرو برای مشتق عددی در نقطه گره‌ای دوم با فرمول دونقطه‌ای برای مشتق عددی در نقطه گره‌ای اول یکسان است.

مثال۳: برای تابع جدولی مثال ۲ با استفاده از فرمول تفاضل مرکزی حاصل $f'(0/2)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰/۱ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۰۵

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به تابع جدولی طول گام برابر $h = 0/1$ است. بنابراین با استفاده از فرمول تفاضل مرکزی خواهیم داشت:

$$f'(0/2) \simeq \frac{1}{2(0/1)}(0/21 - 0/01) = 1$$

مشتق عددی در نقطه وسط گره اول و دوم:

اگر در فرمول مشتق عددی با تفاضلات پیشرو مقدار s را برابر $\frac{1}{2}$ قرار دهیم، فرمول مشتق عددی در نقطه وسط گره اول و دوم حاصل می‌شود.

$$\boxed{f'_{i+\frac{1}{2}} = f'(x_i + \frac{h}{2}) \simeq \frac{1}{h}(\Delta f_i - \frac{1}{24}\Delta^3 f_i + \frac{1}{24}\Delta^4 f_i + \cdots)}$$

در محاسبه مشتق عددی با استفاده از این فرمول، تعدادی از جملات آن درنظر گرفته می‌شوند.

$$\boxed{f'_{i+\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{h}\Delta f_i = \frac{1}{h}(f_{i+1} - f_i)}$$

$$\boxed{f'_{i+\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{h}(\Delta f_i - \frac{1}{24}\Delta^3 f_i) = \frac{1}{24h}(-f_{i+3} + 3f_{i+2} + 21f_{i+1} - 23f_i)}$$

مثال۴: در تابع جدولی مثال ۲ مقدار $f'(0/15)$ کدام است؟

۱) ۰/۹۹	۲) ۰/۹۵	۳) ۲/۸۳	۴) ۲/۳۸

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به تابع جدولی طول گام برابر $h = 0/1$ است. بنابراین داریم:

$$f'(0/15) = \frac{1}{24(0/1)}(-0/33 + 3(0/21) + 21(0/11) - 23(0/01)) = \frac{2/38}{2/4} = 0/99$$

مشتق‌گیری عددی با تفاضلات پسرو

با توجه به مطالب فصل چهارم، چندجمله‌ای درون‌یاب پسروی نیوتن در نقطه $x = x_s = x_i + hs$ به شکل زیر است:

$$\boxed{P(x_s) = f_i + \binom{s}{1}\nabla f_i + \binom{s+1}{2}\nabla^2 f_i + \cdots + \binom{s+n-1}{n}\nabla^n f_i}$$

می‌خواهیم $f'(x)$ را با $P'(x)$ که از رابطه بالا به‌دست آمده تقریب بزنیم. چون $P'(x) = \frac{1}{h}\frac{dP}{ds}$ است، بنابراین فرمول مشتق‌گیری عددی مبتنی بر تفاضلات پسرو را می‌توان با دستور زیر بیان کرد:

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{h}(\frac{d}{ds}\binom{s}{1}\nabla f_i + \frac{d}{ds}\binom{s+1}{2}\nabla^2 f_i + \cdots + \frac{d}{ds}\binom{s+n-1}{n}\nabla^n f_i)}$$

فرمول مشتق عددی با تفاضلات پسرو معمولاً در نقطه گره‌ای آخر، x_i، نقطه گره‌ای ماقبل آخر، x_{i-1} و نقطه وسط این دو گره، $x_i - \frac{h}{2}$، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مشتق عددی در نقطه گره‌ای آخر:

اگر در فرمول مشتق عددی با تفاضلات پسرو مقدار s را برابر صفر قرار دهیم فرمول مشتق عددی در نقطه گره‌ای آخر حاصل می‌شود.

$$\boxed{f'_i = f'(x_i) \simeq \frac{1}{h}(\nabla f_i + \frac{1}{2}\nabla^2 f_i + \frac{1}{3}\nabla^3 f_i + \cdots)}$$

در محاسبه مشتق عددی با استفاده از این فرمول، تعدادی از جملات آن درنظر گرفته می‌شوند.

$$\boxed{f'_i \simeq \frac{1}{h}\nabla f_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \quad ; \quad f'_i \simeq \frac{1}{h}(\nabla f_i + \frac{1}{2}\nabla^2 f_i) = \frac{1}{2h}[3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}]}$$

مشتق عددی در نقطه گره‌ای ماقبل آخر:

اگر در فرمول مشتق عددی با تفاضلات پسرو مقدار s را برابر ۱- قرار دهیم، فرمول مشتق عددی در نقطه گره‌ای ماقبل آخر حاصل می‌شود.

$$\boxed{f'_{i-1} = f'(x_{i-1}) \simeq \frac{1}{h}(\nabla f_i - \frac{1}{2}\nabla^2 f_i - \frac{1}{6}\nabla^3 f_i + \cdots)}$$

در محاسبه مشتق عددی با استفاده از این فرمول، تعدادی از جملات آن درنظر گرفته می‌شوند.

$$\boxed{f'_{i-1} \simeq \frac{1}{h}\nabla f_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \quad ; \quad f'_{i-1} \simeq \frac{1}{h}(\nabla f_i - \frac{1}{2}\nabla^2 f_i) = \frac{1}{2h}(f_i - f_{i-2})}$$

مشتق عددی در نقطه وسط گره آخر و ماقبل آخر:

اگر در فرمول مشتق عددی با تفاضلات پسرو مقدار s را برابر $-\frac{1}{2}$ قرار دهیم، فرمول مشتق عددی در نقطه وسط گره آخر و ماقبل آخر به‌دست می‌آید.

$$\boxed{f'_{i-\frac{1}{2}} = f'(x_i - \frac{h}{2}) \simeq \frac{1}{h}(\nabla f_i - \frac{1}{24}\nabla^3 f_i + \cdots)}$$

در محاسبه مشتق عددی با استفاده از این فرمول، تعدادی از جملات آن درنظر گرفته می‌شوند.

$$\boxed{f'_{i-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{h}\nabla f_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \quad ; \quad f'_{i-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{h}(\nabla f_i - \frac{1}{24}\nabla^3 f_i) = \frac{1}{24h}(23f_i - 3f_{i-2} + f_{i-3})}$$

مثال ۵: کدام‌یک فرمول مشتق با تفاضلات پسرو نیست؟

۱) $f'_{i-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{h}(f_i + \frac{1}{24}\nabla^3 f_i)$ ۲) $f'_{i-1} \simeq \frac{1}{h}(\nabla f_i - \frac{1}{2}\nabla^2 f_i)$ ۳) $f'_i \simeq \frac{1}{h}(\nabla f_i + \frac{1}{2}\nabla^2 f_i)$ ۴) $f'_i \simeq \frac{1}{h}(f_i - f_{i-1})$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به فرمول‌های مشتق با تفاضلات پسرو، تنها گزینه (۱) نادرست است.

درون‌یابی خطی مشتق

اگر مشتق تابع f در نقطه x به‌طوری که $x_i < x < x_{i+1}$ مورد نظر باشد ابتدا مشتق f را در نقاط x_i و x_{i+1} با استفاده از مشتق‌گیری عددی با تفاضلات پیشرو یا پسرو به‌دست می‌آوریم و سپس از درون‌یابی خطی $f'(x)$ در این دو نقطه به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$\boxed{f'(x) \simeq \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f'(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f'(x_{i+1})}$$

مثال ۶: مقادیر تابع f به‌صورت جدولی

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	-1	2	9

داده شده است. $f'(-0/4)$ کدام است؟

۱) $0/6$ ۲) $0/2$ ۳) $-0/2$ ۴) $-0/6$

پاسخ: گزینه «۴» جدول تفاضلات پیشرو برای تابع جدولی f به‌صورت روبه‌رو است.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
-1	0			
0	-1	-1		
1	2	3	4	
2	9	7	4	0

برای $h = 1$ ابتدا تقریبی از $f'(-1)$ و $f'(0)$ با استفاده از رابطه $f'(x_i) \approx \frac{1}{h}(\Delta f_i - \frac{\Delta^2 f_i}{2})$ به‌دست می‌آوریم:

$$f'(-1) \simeq \frac{1}{1}(-1 - \frac{4}{2}) = -3 \quad , \quad f'(0) \simeq \frac{1}{1}(3 - \frac{4}{2}) = 1$$

پس با توجه به رابطه درون‌یابی خطی به‌دست می‌آید:

$$f'(-0/4) \simeq \frac{-0/4 - 0}{-1 - 0} f'(-1) + \frac{-0/4 - (-1)}{0 - (-1)} f'(0) = 0/4(-3) + 0/6(1) = -0/6$$

مشتق عددی مراتب بالاتر

همان‌گونه که با استفاده از چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f(x) تقریبی برای $f'(x)$ به‌دست آوردیم. برای مشتق مراتب بالاتر نیز به همان روش عمل می‌کنیم. به عبارتی:

$$f^{(k)}(x) \simeq P^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} P(x)$$

فصل ششم

«انتگرال‌گیری عددی»

در این فصل روش‌های عددی محاسبه انتگرال معین یک تابع را بیان می‌کنیم. دلایل استفاده از روش‌های عددی برای محاسبه تقریبی یک انتگرال معین؛ عدم وجود تابع اولیه، دشواری یافتن آن و یا وجود اطلاعات جدولی از انتگرالده در تعدادی متناهی نقطه است.

فرض کنید مقادیر تابع f به‌صورت جدولی

x_i	$x_\circ$	x_1	$\cdots$	x_n
f_i	$f_\circ$	f_1	$\cdots$	f_n

داده شده است که $x_n,\ldots,x_1,x_\circ$ نقاطی از بازه $[a,b]$ هستند. برای تقریب $\int_a^b f(x)dx$ از مجموع $\sum\limits_{i=\circ}^{n} w_i f(x_i)$ استفاده می‌کنیم که در آن ممکن است برخی w_i ها (وزن‌ها) و برخی x_i ها (گره‌ها) مجهول باشند. بنابراین این تقریب حداکثر دارای $2n+2$ مجهول است. برای محاسبه مقادیر x_i ها و w_i ها در صورت مجهول بودن، تابع $f(x)$ را به‌ترتیب برابر ۱ و x و ... و x^{k-1} قرار می‌دهیم که در آن k برابر تعداد مجهول‌ها است. بدین ترتیب یک دستگاه معادلات با k معادله و k مجهول به‌دست می‌آید که با حل آن مقادیر مجهول مشخص می‌شوند.

درجه دقت یک فرمول انتگرال‌گیری عددی برابر عدد طبیعی n است، هرگاه فرمول برای همه چندجمله‌ای‌های تا درجه حداکثر n یک فرمول بدون خطا باشد، در این حالت می‌گوییم فرمول برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه n دقیق است. برای یافتن درجه دقت فرمول انتگرال‌گیری کافی است بزرگ‌ترین عدد طبیعی n را بیابیم که فرمول برای x^k که $k \le n$ است، بدون خطا باشد. معمولاً درجه دقت فرمول، یک واحد کمتر از مرتبه مشتق موجود در رابطه خطا است.

فرمول انتگرال‌گیری عددی که در آن از هر دو نقطه انتهایی a و b استفاده شود، فرمول بسته نامیده می‌شود و اگر حداقل یکی از دو نقطه انتهایی a و b در آن، مورد استفاده نباشد آن فرمول را باز می‌نامیم.

مثال۱: اگر E خطای فرمول انتگرال‌گیری مضربی از $f^{(1389)}(\eta)$ باشد، درجه دقت فرمول کدام است؟

۱) ۱۳۸۸   ۲) ۱۳۸۹   ۳) ۱۳۹۰   ۴) ۶۹۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» درجه دقت فرمول، یک واحد کمتر از مرتبه مشتق موجود در رابطه خطا یعنی ۱۳۸۸=۱−۱۳۸۹ است.

مثال۲: کدام فرمول انتگرال‌گیری باز است؟

۱) هیچ‌یک از گره‌ها برابر نقاط انتهایی نیست.   ۲) تنها یکی از گره‌ها برابر یکی از نقاط انتهایی است.

۳) هر دو نقطه انتهایی جزء گره‌ها هستند.   ۴) گزینه ۱ و ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مطابق تعریف فرمول باز باید حداقل یکی از نقاط انتهایی در آن، مورد استفاده نباشد.

فرمول‌های بسته نیوتن کوتس

در روش نیوتن کوتس گره‌ها، $x_n,\ldots,x_1,x_\circ$، معلوم و اغلب فاصله و وزن‌ها، $w_n,\ldots,w_\circ$ مجهول درنظر گرفته می‌شوند. بنابراین برای یافتن مجهول‌ها با جایگذاری $x^{n+1},\cdots,x,1$ به جای $f(x)$ در رابطه زیر، یک دستگاه معادلات با $n+1$ معادله و $n+1$ مجهول ایجاد می‌شود.

$$\boxed{\begin{array}{c}\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = w_0 f_0 + w_1 f_1 + \cdots + w_n f_n + E = \sum_{i=0}^{n} w_i f_i + E \\ f_i = f(x_i)\ ;\ x_i = x_0 + ih\ ;\ i = 0,1,\cdots,n\end{array}}$$

این دستور را فرمول $n+1$ نقطه‌ای نیوتن کوتس می‌گوییم. روش دیگری نیز برای به‌دست آوردن این فرمول وجود دارد. در این روش چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f در نقاط $i=0,1,\dots,n$ و $x_i = x_0 + ih$ را جایگزین تابع f در انتگرال می‌کنیم. نتیجه همان فرمول $n+1$ نقطه‌ای نیوتن کوتس خواهد بود. نکته جالب در فرمول نیوتن کوتس آن است که ضرایب جمله‌های متساوی‌البُعد از طرفین با هم برابرند. به عبارت دیگر:

$$\boxed{w_i = w_{n-i}\ \ ;\ \ i = 0,1,2,\cdots,n}$$

خطای روش $n+1$ نقطه‌ای نیوتن کوتس متناسب با h^k است که در آن برای nهای فرد $k=n+2$ و برای nهای زوج $k=n+3$ است. پس k عددی فرد است و استفاده از این روش برای n های زوج مناسب‌تر می‌باشد.

مثال ۳: فرمول ۴ نقطه‌ای نیوتن کوتس را به‌دست آورید.

☑ **پاسخ:** برای راحتی فرض می‌کنیم $x_0 = 0$ باشد، پس فرمول به‌صورت $\int_0^{3h} f(x)dx = \sum_{i=0}^{3} w_i f_i + E$ است که در آن $x_0 = 0$، $x_1 = h$، $x_2 = 2h$ و $x_3 = 3h$ می‌باشد. مطابق روشی که گفته شد برای یافتن w_iها تابع $f(x)$ را برابر ۱ و x و x^2 و x^3 و $E=0$ قرار می‌دهیم:

$$f(x)=1\ :\ \int_0^{3h} 1\,dx = 3h = w_0 + w_1 + w_2 + w_3$$

$$f(x)=x\ :\ \int_0^{3h} x\,dx = \frac{9h^2}{2} = hw_1 + 2hw_2 + 3hw_3$$

$$f(x)=x^2\ :\ \int_0^{3h} x^2 dx = 9h^3 = h^2 w_1 + 4h^2 w_2 + 9h^2 w_3$$

$$f(x)=x^3\ :\ \int_0^{3h} x^3 dx = \frac{81h^4}{4} = h^3 w_1 + 8h^3 w_2 + 27h^3 w_3$$

که پس از ساده کردن، مقادیر به‌صورت روبه‌رو به‌دست می‌آیند. $w_0 = \frac{3h}{8}\ ,\ w_1 = \frac{9h}{8}\ ,\ w_2 = \frac{9h}{8}\ ,\ w_3 = \frac{3h}{8}$

مثال ۴: در فرمول ۱۳۸۹ نقطه‌ای نیوتن کوتس خطا متناسب با .... است.

۱) h^{1389} ۲) h^{1390} ۳) h^{1391} ۴) h^{1392}

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون $n+1=1389$ و $n=1388$ زوج است، پس خطا متناسب با $h^{n+3} = h^{1391}$ است.

مثال ۵: خطای روش $n+1$ نقطه‌ای نیوتن کوتس متناسب با h^{12} است، n کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) وجود ندارد

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» خطای روش نیوتن کوتس نمی‌تواند متناسب با توان زوجی از h باشد.

چند فرمول نیوتن کوتس

فرمول ذوزنقه‌ای ساده: در این فرمول $n=1$ است و یک فرمول ۲ نقطه‌ای نیوتن کوتس می‌باشد.

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) - \frac{h^3}{12} f''(\eta)\ ;\ x_i < \eta < x_{i+1}}$$

فرمول سیمپسون ساده: در این فرمول $n=2$ است و یک فرمول ۳ نقطه‌ای نیوتن کوتس می‌باشد.

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta)\ ;\ x_i < \eta < x_{i+2}}$$

مدرسان شریف

فصل هفتم
«حل عددی معادلات دیفرانسیل»

یکی از شاخه‌های مهم در ریاضیات که کاربرد فراوانی نیز دارد، معادلات دیفرانسیل است. یک معادله دیفرانسیل از مرتبه k، در حالت کلی به شکل $f(x,y,y',y'',\dots,y^{(k)})=0$ می‌باشد. تابع $y=y(x)$ جواب این معادله دیفرانسیل است، هرگاه در آن صدق کند. روش‌های تحلیلی فراوانی برای حل معادله دیفرانسیل در حالت کلی وجود دارد، اما بعضی معادله‌های دیفرانسیل هستند که با استفاده از این روش‌ها قابل حل نیستند و یا روش حل آن‌ها پیچیده، دشوار و یا نیاز به محاسبات طولانی دارد. بنابراین حل عددی معادله دیفرانسیل می‌تواند بسیار مفید و پرکاربرد باشد. برای شروع، معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\boxed{y'=f(x,y) \quad ; \quad y(x_0)=y_0}$$

که در آن x_0 و y_0 مقدارهای مشخص و $f(x,y)$ تابعی دومتغیره و معلوم می‌باشد. در روش‌های عددی حل معادله دیفرانسیل، عدد حقیقی h را به‌عنوان گام درنظر گرفته و نقاط $x_n=x_0+nh$ را به‌دست می‌آوریم. هرگاه تابع $y=y(x)$ جواب این معادله دیفرانسیل باشد، $y(x_n)$ و y_n را به‌ترتیب مقدار واقعی و تقریبی تابع y به ازای x_n درنظر می‌گیریم.

روش تیلور و اویلر

فرض کنید تابع $f(x,y)$ در معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y'=f(x,y)$ به اندازه کافی نسبت به متغیرهای x و y مشتق‌پذیر باشد، بنابراین با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، می‌توان مشتق‌های y را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= f(x,y)=f \\ y'' &= f_x x' + f_y y' = f_x + f_y f \\ y''' &= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y f_x + f_y^2 f \end{aligned}}$$

به همین ترتیب می‌توان مشتق‌های مرتبه بالاتر تابع y را محاسبه کرد. حتی اگر $f(x,y)$ تابعی ساده باشد، بعد از چند مرحله، محاسبه‌ها طولانی و پیچیده خواهد شد، بنابراین با وجود امکان ایجاد خطای قابل توجه ترجیح می‌دهیم که از سری تیلور محدود تابع y، به‌صورت زیر استفاده کنیم:

$$y(t+h)=y(t)+hy'(t)+\frac{1}{2!}h^2y''(t)+\cdots+\frac{1}{k!}h^ky^{(k)}(t)+E$$

اگر این سری را برای $t=x_n$ بنویسیم، تقریبی برای $y(x_{n+1})$، برحسب مقادیر تابع y و مشتق‌های آن به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$y(x_{n+1})=y(x_n+h)=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{1}{2!}h^2y''(x_n)+\cdots+\frac{1}{k!}h^ky^{(k)}(x_n)+O(h^{k+1})$$

الگوریتم روش تیلور از مرتبه k

برای محاسبه جواب تقریبی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y'=f(x,y)$ با شرط اولیه $y(x_0)=y_0$ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱) گام h را درنظر گرفته و نقاط $x_i=x_0+ih$ را برای مقادیر $i=0,1,\dots,n$ محاسبه می‌کنیم.

۲) با استفاده از دستور زیر دنباله تقریب‌های y_1، y_2، ... را برای تابع y به‌دست می‌آوریم:

$$\boxed{y_{n+1}=y_n+hy'_n+\frac{1}{2!}h^2y''_n+\cdots+\frac{1}{k!}h^ky_n^{(k)}}$$

که داریم:

$$y'_n = f(x_n, y_n)$$
$$y''_n = f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)$$
$$y'''_n = f_{xx}(x_n, y_n) + ۲f_{xy}(x_n, y_n) f(x_n, y_n) + f_{yy}(x_n, y_n)(f(x_n, y_n))^۲ + f_y(x_n, y_n) f_x(x_n, y_n)$$
$$+ (f_y(x_n, y_n))^۲ f(x_n, y_n)$$

مثال۱: مسأله مقدار اولیه $\begin{cases} y' = x + y \\ y(\circ) = ۱ \end{cases}$ را درنظر بگیرید. به‌ازای $h = \circ/۱$ مقدار تقریبی $y(\circ/۱)$ از روش بسط تیلور مرتبه سوم برابر است با:

۱) $۱/\circ۱$ ۲) $۱/۱۱$ ۳) $۱/۱۳$ ۴) $۱/\circ۳$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای $f(x,y) = x + y$ و $h = \circ/۱$ و $x_\circ = \circ$ و $y_\circ = ۱$، مقادیر $y'_\circ$ و $y''_\circ$ و $y'''_\circ$ را محاسبه می‌کنیم.

$$y' = x + y \ , \ y'_\circ = x_\circ + y_\circ = \circ + ۱ = ۱ \quad و \quad y'' = \frac{d}{dx}(x+y) = ۱ + y' \ , \ y''_\circ = ۱ + y'_\circ = ۱ + ۱ = ۲$$

$$y''' = \frac{d^۲}{dx^۲}(x+y) = y'' \ , \ y'''_\circ = y''_\circ = ۲$$

بنابراین، با توجه به فرمول روش تیلور مرتبه سوم مقدار $y_۱$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y(\circ/۱) \simeq y_۱ = y_\circ + \frac{h}{۱!} y'_\circ + \frac{h^۲}{۲!} y''_\circ + \frac{h^۳}{۳!} y'''_\circ = ۱ + \frac{\circ/۱}{۱!} \times ۱ + \frac{(\circ/۱)^۲}{۲!} \times ۲ + \frac{(\circ/۱)^۳}{۳!} \times ۲ \simeq ۱/۱۱$$

مثال۲: با استفاده از روش تیلور مرتبه k برای معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = x + y$ با شرط اولیه $y(\circ) = ۱$، کدام رابطه جواب تقریبی $\frac{y_{n+۱} + x_n + ۱}{y_n + x_n + ۱}$ می‌باشد؟

۱) $h + \frac{۱}{۲!} h^۲ + \cdots + \frac{۱}{k!} h^k$ ۲) $۱ + h + \frac{۱}{۲!} h^۲ + \cdots + \frac{۱}{k!} h^k$

۳) $۱ + h + \frac{۱}{۲!} h^۲ + \cdots + \frac{۱}{(k+۱)!} h^{k+۱}$ ۴) $h + \frac{۱}{۲!} h^۲ + \cdots + \frac{۱}{k+۱!} h^{k+۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون $x_\circ = \circ$ و $y_\circ = ۱$ و $f(x,y) = x + y$ است، بنابراین $y' = f(x,y) = x + y$ و مشتق‌های مرتبه دوم و سوم تابع y به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$y'' = [f(x,y)]' = [x+y]' = ۱ + y' = ۱ + x + y \ , \ y''' = [y'']' = [۱ + x + y]' = ۱ + y' = ۱ + x + y$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که $y^{(k)} = ۱ + x + y$ است. بنابراین داریم:

$$y_{n+۱} = y_n + h(۱ + x_n + y_n) + \frac{۱}{۲!} h^۲ (۱ + x_n + y_n) + \cdots + \frac{۱}{k!} h^k (۱ + x_n + y_n)$$

اگر در عبارت سمت راست از $۱ + x_n + y_n$ فاکتور بگیریم نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

$$y_{n+۱} + x_n + ۱ = (۱ + h + \frac{۱}{۲!} h^۲ + \cdots + \frac{۱}{k!} h^k)(۱ + x_n + y_n)$$

مثال۳: معادله دیفرانسیل $y' = e^{xy+۱}$ با شرط اولیه $y(\circ) = \circ$ را درنظر بگیرید. مقدار $y(\circ/۱)$ با استفاده از روش بسط تیلور مرتبه دو با گام $h = \circ/۱$ کدام است؟

۱) $\circ/\circ\circ۵e$ ۲) $\circ/۱\circ۵$ ۳) $\circ/\circ\circ۵$ ۴) $\circ/۱\circ۵e$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در روش تیلور مرتبه دوم $y(x_۱) \simeq y_۱ = y_\circ + \frac{h}{۱!} y'_\circ + \frac{h^۲}{۲!} y''_\circ$ است. ابتدا $y'(\circ)$ و $y''(\circ)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$y'(\circ) = e^{\circ \times y(\circ) + ۱} = e$$
$$y'' = (xy + ۱)' e^{xy+۱} = (y + xy') e^{xy+۱} \quad , \quad y''(\circ) = [y(\circ) + \circ \times y'(\circ)] e^{\circ \times y(\circ) + ۱} = e$$

بنابراین با جایگذاری این مقادیر در رابطه روش تیلور مرتبه دوم، مقدار $y(0/1)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y(0/1) \simeq y_1 = y(0) + \frac{0/1}{1!} y'(0) + \frac{(0/1)^2}{2!} y''(0) = 0 + 0/1e + 0/005e = 0/105e$$

نکته۱: خطای برشی روش تیلور مرتبه k، با گام h به شکل $E = \frac{1}{(k+1)!} h^{k+1} y^{(k+1)}(\eta)$ است که متناسب با h^{k+1} می‌باشد و خطای کلی آن متناسب با h^k است.

روش اویلر

برای دوری از محاسبه مشتق‌های مراتب بالای y در روش بسط تیلور کافی است از روش بسط تیلور مرتبه یک استفاده کنیم. این روش، به روش اویلر مشهور است و دستور آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hy'_n = y_n + h(x_n, y_n)}$$

برای آنکه با استفاده از روش اویلر جواب تقریبی دقیق‌تری به‌دست آید، گام h باید بسیار کوچک انتخاب شود. اما می‌توان نشان داد که حتی با انتخاب گام بسیار کوچک نیز امکان دارد مقدار تقریبی y_n بسیار دور از مقدار دقیق $y(x_n)$ باشد. بنابراین روش اویلر از لحاظ عددی ناپایدار است.

درواقع اگر δ کران بالای خطای مطلق گردکردن محاسبات در هر مرحله باشد و M کران بالای $|y''(t)|$ در بازه‌ی $[a,b]$ باشد، آن‌گاه بهترین انتخاب برای طول گام h در روش اویلر به‌صورت مقابل است:

$$h = \sqrt{\frac{2\delta}{M}}$$

نکته۲: خطای برشی روش اویلر، با گام h به شکل $E = \frac{1}{2} h^2 y''(\eta)$ است که متناسب با h^2 می‌باشد و خطای کلی آن متناسب با h است.

مثال۴: مسأله مقدار اولیه $\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ **را درنظر بگیرید. به‌ازای $h = 0/1$ مقدار تقریبی $y(0/1)$ از روش اویلر برابر است با ....:**

۱) ۱/۱ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۳ ۴) ۱/۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای $f(x,y) = x + y$ و $x_0 = 0$ و $h = 0/1$ مطابق روش اویلر، مقدار y_1 به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y(0/1) \simeq y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0/1(0+1) = 1/1$$

روش‌های رانگه کوتا

روش اویلر دارای دقت از مرتبه فقط یک است با این حال بسیار ساده و راحت می‌باشد، زیرا در آن فقط یک بار تابع $f(x,y)$ در نقطه (x_n, y_n) محاسبه می‌شود. در روش‌های رانگه کوتا با از دست دادن این سادگی محاسبه در روش اویلر، مقدار تابع $f(x,y)$ را در چندین نقطه مابین دو نقطه $(x_n, y(x_n))$ و $(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$ می‌یابیم، با این هدف که به دقت بالاتری دست یابیم. برای مثال یک خانواده از روش‌های رانگه کوتا به‌صورت زیر را درنظر بگیرید:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + aF_1 + bF_2 \\ F_1 = hf(x_n, y_n), \;\; F_2 = hf(x_n + \alpha h, y_n + \beta F_1) \end{array}}$$

که در آن پارامترهای a، b، α و β باید تعیین شوند. توجه کنید که روش اویلر متعلق به این خانواده از روش‌ها می‌باشد که با فرض $a = 1$ و $b = 0$ حاصل می‌شود. اگر بخواهیم این روش دارای دقت دو باشد، در این صورت با کمی محاسبه می‌توان نشان داد که پارامترها در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\boxed{\alpha = \beta, \;\; a = 1 - \frac{1}{2\alpha}, \;\; b = \frac{1}{2\alpha}; \;\; \alpha \neq 0}$$

خطای برشی این روش با گام h متناسب با h^3 و خطای کلی آن متناسب با h^2 می‌باشد. سه مثال از روش‌های رانگه کوتای مرتبه دوم، روش‌های اصلاح شده اویلر، هیون و نقطه میانی می‌باشند.

روش نقطه‌ی میانی: برای رسیدن به روش نقطه‌ی میانی کافی است که $\alpha = \frac{1}{2}$ فرض شود:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + F_2 \\ F_1 = hf(x_n, y_n), \;\; F_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}F_1) \end{array}}$$

روش اصلاح شده اویلر: با انتخاب $a=۱$ روش دیگری موسوم به روش اصلاح شده‌ی ایلر یا رانگه کوتای مرتبه دوم به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{gathered}y_{n+۱}=y_n+\frac{۱}{۲}[F_۱+F_۲]\\ F_۱=hf\left(x_n,y_n\right),\ \ F_۲=hf\left(x_n+h,y_n+F_۱\right)\end{gathered}$$

روش هیون: با انتخاب $\alpha=\frac{۲}{۳}$ داریم: $y_{n+۱}=y_n+\frac{۱}{۴}(F_۱+۳F_۲)$ که $F_۱=hf\left(x_n,y_n\right)$ و $F_۲=hf\left(x_n+\frac{۲h}{۳},y_n+\frac{۲}{۳}F_۱\right)$

مثال۵: با استفاده از روش اصلاح شده‌ی اویلر، کدام رابطه جواب تقریبی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y'=۲y$ با شرط اولیه $y(۰)=۱$ می‌باشد؟

۱) $y_n=(۱+h+h^۲)^n$ ۲) $y_n=(۱+h+۲h^۲)^n$ ۳) $y_n=(۱+۲h+۲h^۲)^n$ ۴) $y_n=(۲+۲h+h^۲)^n$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» روش رانگه کوتای مرتبه دو را برای تابع $f(x,y)=۲y$ می‌نویسیم:

$$F_۱=hf(x_k,y_k)=۲hy_k\quad,\quad F_۲=hf(x_k,y_k+F_۱)=hf(x_k,(۲h+۱)y_k)=۲h(۲h+۱)y_k$$

$$y_{k+۱}=y_k+\frac{۱}{۲}(F_۱+F_۲)=y_k+\frac{۱}{۲}[۲hy_k+۲h(۲h+۱)y_k]=(۱+۲h+۲h^۲)y_k$$

با قرار دادن $k=۰$ در این رابطه و $n=۱$ در گزینه‌ها فقط گزینه «۳» است که می‌تواند درست باشد. حال رابطه را برای $k=۰,۱,\cdots,n-۱$ نوشته و آن‌ها را درهم ضرب می‌کنیم، رابطه $y_n=(۱+۲h+۲h^۲)^n y_۰$ به‌دست می‌آید.

مثال۶: مسأله مقدار اولیه $\begin{cases}y'=y+x^۲\\ y(۰)=۱\end{cases}$ را با طول گام $h=۰/۱$ درنظر بگیرید. با روش رانگه ـ کوتای مرتبه دوم مقدار $y_۱$ کدام است؟

۱) ۱/۰۱۵۵ ۲) ۱/۱۰۵۵ ۳) ۱/۱۵۰۵ ۴) ۱/۵۰۱۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای $f(x,y)=y+x^۲$ و $x_۰=۰$ و $y_۰=۱$ و $h=۰/۱$، مقدار $F_۱$ و $F_۲$ برابر است با:

$$F_۱=hf(x_۰,y_۰)=۰/۱f(۰,۱)=۰/۱\quad \text{و} \quad F_۲=۰/۱f(x_۰+h,y_۰+F_۱)=۰/۱f(۰/۱,۱+۰/۱)=۰/۱۱$$

درنتیجه مقدار $y_۱$ چنین خواهد بود.

$$y_۱=y_۰+\frac{۱}{۲}(F_۱+F_۲)=۱+\frac{۱}{۲}(۰/۱+۰/۱۱۱)=۱/۱۰۵۵$$

روش رانگه کوتای مرتبه چهارم

یک تجزیه و تحلیل مشابه اما با پیچیدگی بیشتر برای یافتن روش‌های رانگه کوتای از مراتب بالاتر به‌کار می‌رود. یکی از پرکاربردترین این روش‌ها، روش رانگه کوتای مرتبه چهار کلاسیک است. دستور این روش به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{gathered}y_{n+۱}=y_n+\frac{۱}{۶}(F_۱+۲F_۲+۲F_۳+F_۴)\\ F_۱=hf(x_n,y_n),\ \ F_۲=hf(x_n+\frac{۱}{۲}h,y_n+\frac{۱}{۲}F_۱)\\ F_۳=hf(x_n+\frac{۱}{۲}h,y_n+\frac{۱}{۲}F_۲)\ ,\ \ F_۴=hf(x_n+h,y_n+F_۳)\end{gathered}$$

خطای برشی روش رانگه کوتای مرتبه چهارم، با گام h متناسب با $h^۵$ و خطای سراسری آن متناسب با $h^۴$ است.

مثال۷: مسأله مقدار اولیه $\begin{cases}y'=x+y\\ y(۰)=۱\end{cases}$ را درنظر می‌گیریم. به‌ازای $h=۰/۱$ مقدار تقریبی $y(۰/۱)$ با روش رانگه ـ کوتای مرتبه چهارم برابر است با:

۱) ۱/۱۱۳۰۴ ۲) ۱/۱۱۰۳۴ ۳) ۱/۱۱۰۱۱ ۴) ۱/۱۱۱۰۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای $f(x,y)=x+y$ و $x_۰=۰$ و $y_۰=۱$ و $h=۰/۱$ مقادیر $F_۱$ و $F_۲$ و $F_۳$ و $F_۴$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$F_۱=h(x_۰,y_۰)=۰/۱\times(۰+۱)=۰/۱$$

$$F_۲=hf(x_۰+\frac{۱}{۲}h,y_۰+\frac{۱}{۲}F_۱)=۰/۱\times(۰/۰۵+۱/۰۵)=۰/۱۱$$

مدرسان شریف

فصل هشتم

«جبرخطی عددی»

ماتریس

یک ماتریس $m\times n$ مانند A، آرایه‌ای مستطیلی از اعداد است که در m سطر و n ستون آرایش یافته‌اند. $A=(a_{ij})_{m\times n}$ شکل درایه‌ای ماتریس A است که در آن a_{ij} درایه واقع در سطر i ام و ستون j ام ماتریس A است. همچنین $A_{i.}$ برای نمایش سطر i ام و $A_{.j}$ برای نمایش ستون j ام ماتریس A استفاده می‌شود.

چند ماتریس خاص

ماتریس سطری و ستونی: ماتریس‌های $1\times n$ و $m\times 1$ را به‌ترتیب ماتریس سطری و ستونی می‌نامیم. این ماتریس‌ها را بردار نیز می‌گوییم.

ماتریس صفر: تمام درایه‌های آن برابر صفر است. ماتریس صفر $m\times n$ را با $O_{m\times n}$ نشان می‌دهیم.

ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن برابر است.

فرض کنیم $A=(a_{ij})_{n\times n}$ یک ماتریس مربعی باشد. در این صورت:

ماتریس قطری: $a_{ij}=0 \;;\; i\neq j$

ماتریس پایین‌هسنبرگی: $a_{ij}=0 \;;\; j>i+1$

ماتریس واحد (همانی): $a_{ij}=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & ;\; i=j\\ 0 & ;\; i\neq j\end{cases}$

ماتریس بالاهسنبرگی: $a_{ij}=0 \;;\; i>j+1$

ماتریس بالامثلثی: $a_{ij}=0 \;;\; i>j$

ماتریس سه‌قطری: $a_{ij}=0 \;;\; |i-j|>1$

ماتریس پایین‌مثلثی: $a_{ij}=0 \;;\; i<j$

توجه کنید که ماتریس واحد (همانی) مرتبه n را با I_n نشان می‌دهیم. در ماتریس مربعی $A=(a_{ij})$، درایه‌های a_{ii} را درایه‌های قطری و مجموعه درایه‌های قطری را قطر اصلی ماتریس می‌نامیم. یک ماتریس قطری را با استفاده از درایه‌های قطری آن به‌صورت $D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\dots,d_n)$ نشان می‌دهیم.

مثال۱: کدام‌یک از روابط زیر نشان‌دهنده درایه یک ماتریس قطری در حالت کلی می‌باشد؟

۱) $d_i\delta_{ij}$ ۲) $d_{kl}\delta_{ij}$ ۳) $a_{ik}d_k\delta_{kj}$ ۴) $k\delta_{ij}$

پاسخ: گزینه «۱» ماتریس قطری $D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\dots,d_n)$ را درنظر می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$d_{ij}=\begin{cases}d_i & ;\; i=j\\ 0 & ;\; i\neq j\end{cases}=d_i\times\begin{cases}1 & ;\; i=j\\ 0 & ;\; i\neq j\end{cases}=d_i\delta_{ij}$$

چند عمل بر روی ماتریس‌ها

اعمال جبری ماتریس‌ها به شرح زیر هستند:

تساوی ماتریسی: دو ماتریس برابرند، اگر و تنها اگر درایه‌های متناظر برابر داشته باشند: $A=B \;\Leftrightarrow\; a_{ij}=b_{ij}$

ضرب اسکالر در ماتریس: همه درایه‌های ماتریس در یک اسکالر (عدد حقیقی یا مختلط) ضرب می‌شود: $B=\alpha A \;\Leftrightarrow\; \forall_{i,j}\;;\; b_{ij}=\alpha a_{ij}$

جمع ماتریسی: درایه‌های متناظر با هم جمع می‌شوند: $C=A+B \;\Leftrightarrow\; c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

ضرب ماتریسی: حاصل‌ضرب دو ماتریس زمانی امکان‌پذیر است که تعداد ستون‌ها در ماتریس اول برابر تعداد سطرها در ماتریس دوم باشد.

$$C_{m\times n} = A_{m\times p}B_{p\times n} \iff c_{ij} := \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

توان ماتریس: برای عدد طبیعی k، توان kام ماتریس مربعی A با رابطه $A^k := A\times A^{k-1}$ تعریف می‌شود. توجه کنید که $A^{0} := I$ است.

اثر ماتریس: در ماتریس مربعی $A=(a_{ij})_{n\times n}$، مجموع درایه‌های قطری را اثر ماتریس A می‌گوییم و آن را با نماد $\mathrm{trace}(A)$ نشان می‌دهیم.

درواقع، $\mathrm{trace}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ است.

قضیه ۱: اگر A، B و C سه ماتریس و λ و μ دو اسکالر باشند، آن‌گاه روابط زیر برقرار هستند:

۱) $\mathrm{trace}(AB)=\mathrm{trace}(BA)$

۲) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

۳) $AO=OA=O$

۴) $AI_n = I_m A = A$ (A ماتریس $m\times n$ است.)

۵) $(AB)C=A(BC)$

۶) $A(B+C)=AB+AC$

۷) ضرب ماتریسی در حالت کلی جابه‌جایی نیست، یعنی $AB\neq BA$

۸) مجموع (حاصل‌ضرب) دو ماتریس بالا (پایین) مثلثی هم‌مرتبه، بالا (پایین) مثلثی است.

۹) $\mathrm{trace}\,[A+B]=\mathrm{trace}\,A+\mathrm{trace}\,B$

۱۰) $|\,\mathrm{trace}(AB)\,|\leq\{\mathrm{trace}[AA^T]\}^{\frac{1}{2}}\{\mathrm{trace}[BB^T]\}^{\frac{1}{2}}$

مثال ۲: اثر کدام ماتریس متفاوت است؟

۱) ABC ۲) BCA ۳) CAB ۴) BAC

پاسخ: گزینه «۴» بنابر بندهای (۱) و (۵) از قضیه قبل خواهیم داشت:

$$\mathrm{trace}(ABC)=\mathrm{trace}\big((AB)C\big)=\mathrm{trace}(CAB) \quad \text{و} \quad \mathrm{trace}(ABC)=\mathrm{trace}\big(A(BC)\big)=\mathrm{trace}(BCA)$$

بنابراین اثر ماتریس BAC متفاوت است.

ترانهاده ماتریس

اگر سطرها و ستون‌های یک ماتریس $m\times n$ مانند A با یکدیگر جابه‌جا شوند، ماتریسی با ابعاد $n\times m$ حاصل می‌شود که آن را ترانهاده A نامیده و با A^T نشان می‌دهیم:

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \Leftrightarrow A^T=(a_{ji})_{n\times m}$$

قضیه ۲: اگر A و B دو ماتریس و α یک اسکالر باشد. در این صورت، روابط زیر برقرار هستند:

۱) $(A+B)^T=A^T+B^T$

۲) $(\alpha A)^T=\alpha A^T$

۳) $(AB)^T=B^TA^T$

۴) $(A^T)^T=A$

۵) $(A^T)^n=(A^n)^T$

۶) $\mathrm{trace}(A^TB)=\mathrm{trace}(AB^T)$

۷) درایه‌های قطری دو ماتریس A و A^T برابرند.

۸) ترانهاده یک ماتریس بالا (پایین) مثلثی یک ماتریس پایین (بالا) مثلثی است.

مثال ۳: برای ماتریس‌های A و B کدام رابطه معادل $(AB-BA)^T$ است؟

۱) $(BA-AB)^T$ ۲) $A^TB^T-B^TA^T$ ۳) $B^TA^T-A^TB^T$ ۴) $(BA)^T-(AB)^T$

پاسخ: گزینه «۳» کافی است ویژگی‌های ترانهاده ماتریس را به‌کار بریم تا نتیجه مطلوب به‌دست آید.

$$(AB-BA)^T=(AB)^T-(BA)^T=B^TA^T-A^TB^T$$

تقارن ماتریس

ماتریس مربعی A را متقارن گوییم، هرگاه $A^T = A$ باشد و آن را پادمتقارن گوییم، هرگاه $A^T = -A$ باشد.

مثال۴: اگر ماتریس A پادمتقارن باشد، آن‌گاه برای همه بردارهای x داریم:

۱) $x^TAx \ge ۰$ ۲) $x^TAx > ۰$ ۳) $x^TAx = ۰$ ۴) $x^TAx \ne ۰$

پاسخ: گزینه «۳» چون x^TAx برابر یک ماتریس مرتبه یک یعنی اسکالر است، بنابراین داریم:

$$x^TAx = (x^TAx)^T = x^TA^Tx = x^T(-A)x = -x^TAx \Rightarrow x^TAx = ۰$$

قضیه۳: ویژگی‌های ماتریس‌های متقارن و پادمتقارن به‌صورت زیر هستند:

۱) در ماتریس متقارن، درایه‌های متقارن نسبت به قطر اصلی برابرند. ۲) در ماتریس پادمتقارن، درایه‌های متقارن نسبت به قطر اصلی قرینه‌اند و درایه‌های واقع بر قطر اصلی برابر صفر هستند. ۳) اگر ماتریس A متقارن باشد، A^n نیز متقارن است.

مثال۵: اثر ماتریس $B = A^TA$ که A یک ماتریس حقیقی است برابر صفر است، اگر و تنها اگر ....

۱) ماتریس A مربعی باشد. ۲) ماتریس A متقارن باشد.

۳) ماتریس A پادمتقارن باشد. ۴) ماتریس A برابر ماتریس صفر باشد.

پاسخ: گزینه «۴» فرض کنیم $C = A^T$ باشد، پس $B = CA$ و $c_{ij} = a_{ji}$ است. بنابراین $b_{ii} = \sum_k c_{ik}a_{ki} = \sum_k a_{ki}a_{ki} = \sum_k a_{ki}^۲$ می‌باشد.

بنابراین داریم:

$$۰ = \text{trace}(B) = \sum_i b_{ii} = \sum_i \sum_k a_{ik}^۲ \Leftrightarrow \forall_{i,k} \; ; \; a_{ik} = ۰ \Leftrightarrow A = o$$

توجه کنید که اگر A یک ماتریس با درایه‌های مختلط باشد، دیگر مثال بالا درست نیست. مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱+i \\ ۰ & ۱-i \end{bmatrix}$ آن‌گاه $\text{trace}\, A^TA = ۰$ است، در حالی که $A \ne ۰$ است.

قضیه۴: فرض کنیم A یک ماتریس مربعی و P یک چندجمله‌ای ماتریسی $P(A) = c_mA^m + c_{m-۱}A^{m-۱} + \cdots + c_۱A + c_۰I$ باشد. در این صورت داریم:

۱) اگر A یک ماتریس بالا (پایین) مثلثی باشد، آن‌گاه $P(A)$ نیز یک ماتریس بالا (پایین) مثلثی است. ۲) اگر A یک ماتریس مثلثی باشد، آن‌گاه $P(a_{ii})$ درایه قطری ماتریس $P(A)$ است. ۳) اگر A متقارن باشد، $P(A)$ نیز متقارن است. ۴) فرض کنیم A یک ماتریس پادمتقارن باشد.

ـ اگر $P(A)$ تنها شامل توان‌های فرد A باشد، $P(A)$ پادمتقارن است.

ـ اگر $P(A)$ تنها شامل توان‌های زوج A باشد، $P(A)$ متقارن است.

مثال۶: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۳} & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، اثر ماتریس $B = A^۳ + ۲A - I$ برابر است با:

۱) صفر ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه «۳» اگر $P(x) = x^۳ + ۲x - ۱$ باشد، آن‌گاه $B = P(A)$ است. از طرفی A پایین‌مثلثی است، پس $P(۱)$ و $P(-۱)$ و $P(۰)$ درایه‌های قطری B هستند. بنابراین داریم:

$$\text{trace}(B) = P(۰) + P(-۱) + P(۱) = -۱ - ۴ + ۲ = -۳$$

ترانهاده مزدوج

اگر ماتریسی با درایه‌های مختلط باشد، آن‌گاه ماتریس ترانهاده مزدوج A را با A^* نشان داده و به‌صورت $A^* = \overline{A}^T$ تعریف می‌کنیم که در آن $\overline{A}$ ماتریسی است که درایه‌های آن مزدوج مختلط درایه‌های ماتریس A هستند. ماتریس مربعی A را هرمیتی گویند، هرگاه $A = A^*$ باشد. بدیهی است که هر ماتریس متقارن و حقیقی، هرمیتی می‌باشد.

نکته۱: درایه‌های قطر اصلی یک ماتریس هرمیتی، حقیقی هستند.

مثال۷: کدام رابطه درست است؟

۱) $(AB)^* = B^*A^*$ ۲) $(AB)^* = A^*B^*$ ۳) $(AB)^* = A^*\overline{B} + \overline{A}B^*$ ۴) $(AB)^* = B^*\overline{A} + \overline{B}A^*$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از تعریف و ویژگی ترانهاده ماتریس به‌دست می‌آید:

$$(AB)^* = \overline{(AB)}^T = (\overline{A}\overline{B})^T = \overline{B}^T\overline{A}^T = B^*A^*$$

ماتریس‌های بلوکی (افراز شده)

یک ماتریس را می‌توان با رسم خطوط افقی و عمودی به ماتریس‌هایی با مراتب پایین‌تر که زیرماتریس نامیده می‌شوند، افراز نمود.

جمع ماتریس‌های بلوکی: اگر $A=\left[\begin{array}{c|c|c} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{array}\right]$ و $B=\left[\begin{array}{c|c|c} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline B_{m1} & \cdots & B_{mn} \end{array}\right]$ و ماتریس‌های A_{ij} و B_{ij} دارای ابعاد یکسانی باشند، آن‌گاه:

$$A+B=\left[\begin{array}{c|c|c} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1n}+B_{1n} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline A_{m1}+B_{m1} & \cdots & A_{mn}+B_{mn} \end{array}\right]$$

ضرب ماتریس‌های بلوکی: ماتریس‌های $A=\left[\begin{array}{c|c|c} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{array}\right]$ و $B=\left[\begin{array}{c|c|c} B_{11} & \cdots & B_{1p} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline B_{n1} & \cdots & B_{np} \end{array}\right]$ را درنظر بگیرید. اگر ماتریس‌های A_{ik} و B_{kj} طوری باشند که تعداد ستون‌های ماتریس A_{ik} برابر تعداد سطرهای ماتریس B_{kj} باشد، در این صورت حاصل‌ضرب ماتریس‌های A و B برابر است با:

$$AB=\left[\begin{array}{c|c|c} C_{11} & \cdots & C_{1p} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline C_{m1} & \cdots & C_{mp} \end{array}\right] \quad ; \quad C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+\cdots+A_{in}B_{nj}$$

زیرماتریس

یک زیرماتریس اصلی ماتریس A، ماتریس مربعی است که از حذف چند سطر و ستون ماتریس A به‌دست می‌آید. زیرماتریس اصلی $A_k=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$ از ماتریس $A=(a_{ij})$، زیرماتریس اصلی پیشرو kام نامیده می‌شود.

دترمینـــان

دترمینان ماتریس مربعی A از مرتبه n، یک عدد حقیقی است که با نماد $\det(A)$ یا $|A|$ نشان داده می‌شود.

۱) اگر $n=1$ باشد، یعنی $A=(a)$ آن‌گاه داریم:

$$\det(A)=a$$

۲) اگر $n\geq 2$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}N_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}N_{ij}$$

توجه کنید که در این تعریف، مجموع اول را بسط دترمینان برحسب سطر i ام و مجموع دوم را بسط دترمینان برحسب ستون j ام می‌گوییم. هم عامل N_{ij} با رابطه $N_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ تعریف می‌شود که در آن مینور M_{ij} عبارت است از دترمینان زیرماتریس حاصل از حذف سطر iام و ستون j ام ماتریس A. ماتریس $N^T=(N_{ij})^T$ را ماتریس الحاقی ماتریس A می‌گوییم و آن را با نماد $\mathrm{adj}(A)$ نشان می‌دهیم.

دترمینان ماتریس‌های مرتبه ۲ و ۳ به شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$1)\quad \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=(-1)^{1+1}a\det(d)+(-1)^{1+2}b\det(c)=ad-bc$$

$$2)\quad \det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}=(-1)^{1+1}a\det\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix}+(-1)^{2+1}d\det\begin{bmatrix} b & c \\ h & i \end{bmatrix}+(-1)^{3+1}g\det\begin{bmatrix} b & c \\ e & f \end{bmatrix}$$
$$=a(ei-hf)-d(bi-hc)+g(bf-ec)$$

ویژگی‌های دترمینان ماتریس

ویژگی‌های دترمینان ماتریس به شرح زیر هستند:

۱) اگر یک سطر یا ستون از ماتریس صفر باشد، دترمینان آن صفر است. ۲) اگر دو سطر یا دو ستون از ماتریس مضربی از هم باشند، دترمینان آن صفر است.
۳) اگر جای دو سطر یا دو ستون را عوض کنیم، دترمینان قرینه می‌شود. ۴) اگر یک سطر یا ستون را در اسکالر c ضرب کنیم، دترمینان c برابر می‌شود.

۵) افزودن مضربی از یک سطر (ستون) به سطر (ستون) دیگر دترمینان را تغییر نمی‌دهد. ۶) دترمینان هر ماتریس مثلثی برابر حاصل‌ضرب درایه‌های قطری آن است. ۷) اگر $A_{m\times n}$ و $B_{n\times m}$ و $m>n$ باشد، آن‌گاه $\det(AB)=0$ است.۸) $\det(A^T)=\det(A)\ ,\ \det(A^*)=\overline{\det(A)}$

۹) اگر A و B مربعی باشند، آن‌گاه $\det(AB)=\det(A)\det(B)$ است. ۱۰) اگر دو ماتریس A و D مربعی باشند، آن‌گاه داریم:

$$\det\begin{bmatrix}A & B\\ 0 & D\end{bmatrix}=\det(A)\det(D) \quad \text{و} \quad \det\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{cases}\det(A)\det(D-CA^{-1}B) & ;\ \det(A)\neq 0\\ \det(D)\det(A-BD^{-1}C) & ;\ \det(D)\neq 0\end{cases}$$

۱۱) اگر ماتریس مربعی A از مرتبه n و بردارهای c و d از مرتبه $n\times 1$ باشند، آن‌گاه داریم: $\det(A+cd^T)=\det(A)(1+d^TA^{-1}c)$

۱۲) اگر c یک ماتریس $n\times n$ باشد، به‌طوری که ستون (سطر) jام c مساوی مجموع ستون‌های (سطرهای) jام B و A باشد و سایر ستون‌های (سطرهای) سه ماتریس A و B و C یکسان باشند، آن‌گاه داریم: $\det[C]=\det A+\det B$

۱۳) اگر λ یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه $\det[\lambda A]=\lambda^n\det[A]$ که ماتریسی $n\times n$ است.

مثال۸: کدام همواره برقرار است؟

۱) $\det(A+B)\neq\det(A)+\det(B)$
۲) $\det(A-B)\neq\det(A)-\det(B)$
۳) $\det\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\neq\det(A)\det(D)-\det(C)\det(B)$
۴) $\det(AB)=\det(A)\det(B)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ماتریس‌های $A=I$ و $B=-I$ مثال نقض برای گزینه (۱) هستند. ماتریس‌های $A=B=I$ مثال نقض برای گزینه (۲) هستند. ماتریس‌های $A=D=O_{2\times 2}$ و $B=C=I_{2\times 2}$ مثال نقض برای گزینه (۳) هستند.

مثال۹: اگر $A_{4\times 7}$ و $B_{7\times 4}$ باشد، آن‌گاه ....:

۱) $\det(AB)=0$
۲) $\det(BA)=0$
۳) $\det(AB)\neq 0$
۴) $\det(BA)\neq 0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق ویژگی شماره (۷) چون $4<7$ است، پس $\det(BA)=0$ می‌باشد.

مثال۱۰: اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد، حاصل $\left||A|A^2\right|$ برابر است با:

۱) $|A|$
۲) $|A|^n$
۳) $|A|^{n+1}$
۴) $|A|^{n+2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» طبق ویژگی (۴) چون $|A|$ یک اسکالر است، بنابراین خواهیم داشت: $\left||A|A^2\right|=|A|^n\left|A^2\right|=|A|^n|A|^2=|A|^{n+2}$

مثال۱۱: اگر A یک ماتریس پادمتقارن از مرتبه فرد باشد، آن‌گاه دترمینان A برابر است با:

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۱−
۴) به مرتبه A بستگی دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون $A^T=-A$ و n مرتبه ماتریس A فرد است، بنابراین داریم: $\det(A^T)=\det(-A)=(-1)^n\det(A)=-\det(A)$

از طرفی چون $\det(A^T)=\det(A)$ می‌باشد، پس $\det(A)=-\det(A)$ یعنی $\det(A)=0$ است.

ماتریس منفرد، نامنفرد و قطر غالب

ماتریس A را منفرد (تکین) گویند، هرگاه $\det A=0$ و نامنفرد (ناتکین) گویند، هرگاه $\det A\neq 0$ باشد. همچنین ماتریس مربعی $A=(a_{ij})$ از مرتبه n را قطر غالب گویند، هرگاه برای هر i داشته باشیم: $|a_{ii}|\geq\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$. اگر $\geq$ به $>$ تبدیل شود، ماتریس را قطر غالب اکید می‌گوییم.

نکته۲: ماتریس قطر غالب اکید، نامنفرد است.

وارون ماتریس

ماتریس مربعی A را وارون‌پذیر می‌گوییم، اگر ماتریس مربعی B موجود باشد که $AB=BA=I$. در این صورت B را وارون A می‌نامیم و آن را با نماد A^{-1} نشان می‌دهیم.

قضیه۵: فرض کنیم A و B دو ماتریس وارون‌پذیر باشند، آن‌گاه روابط زیر برقرار است:

۱) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

۲) $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$

۳) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

۴) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

۵) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

۶) $(A^{-1})^{-1} = A$

۷) $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$

۸) $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$

۹) ماتریس A وارون‌پذیر است، اگر و تنها اگر $\det(A) \neq 0$ باشد.

۱۰) وارون یک ماتریس بالا (پایین) مثلثی، وارون‌پذیر بالا (پایین) مثلثی است.

۱۱) اگر ماتریس A وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$ است.

۱۲) وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برابر $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ است.

۱۳) اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه از تساوی $AB = AC$ نتیجه می‌شود $B = C$.

۱۴) اگر دو ماتریس A و B مربعی بوده و $AB = I$ باشد، آن‌گاه $BA = I$ است.

مثال۱۲: اگر ماتریس‌های A و B و $A+B$ وارون‌پذیر باشند، در این صورت کدام متفاوت است؟

۱) $A+B$ ۲) $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ ۳) $A(A+B)^{-1}B$ ۴) $B(A+B)^{-1}A$

پاسخ: گزینه «۱» ماتریس $A(A+B)^{-1}B$ وارون ماتریس $A^{-1}+B^{-1}$ است، زیرا:

$$[A(A+B)^{-1}B]^{-1} = B^{-1}(A+B)A^{-1} = (B^{-1}A+I)A^{-1} = B^{-1}+A^{-1}$$

بنابراین $A(A+B)^{-1}B = (A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که:

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A$$

مثال۱۳: دترمینان ماتریس الحاقی ماتریس $A_{n\times n}$ برابر است با:

۱) $|A|^{n-1}$ ۲) $|A|^n$ ۳) $|A|^{n+1}$ ۴) $|A|^{n+2}$

پاسخ: گزینه «۱» چون $\text{adj}(A) = \det(A)A^{-1}$ است و $|A|$ یک اسکالر می‌باشد، پس داریم:

$$\det\left(\text{adj}(A)\right) = \left||A|A^{-1}\right| = |A|^n\left|A^{-1}\right| = |A|^n|A|^{-1} = |A|^{n-1}$$

مثال۱۴: اگر $ABC = I$ باشد، آن‌گاه کدام متفاوت است؟

۱) ABC ۲) BCA ۳) CAB ۴) BAC

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به نکته قبل و شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها به‌دست می‌آید:

$$I = ABC = A(BC) \Leftrightarrow I = BCA \quad \text{و} \quad I = ABC = (AB)C \Leftrightarrow I = CAB$$

ماتریس‌های متعامد و یکانی

ماتریس A را متعامد می‌گوییم، هرگاه $AA^T = A^TA = I$ باشد. ماتریس مربع A با درایه‌های مختلط را یکانی نامند، هرگاه $A^*A = AA^* = I$ باشد.

قضیه۶: ویژگی‌های ماتریس متعامد به‌صورت زیر است:

۱) اگر A ماتریسی متعامد باشد، آن‌گاه $A^{-1} = A^T$ است. ۲) اگر A ماتریسی متعامد باشد، آن‌گاه $\det(A) = \pm 1$ است. ۳) حاصل‌ضرب دو ماتریس متعامد یک ماتریس متعامد است. ۴) حاصل‌ضرب داخلی دو سطر یا دو ستون متفاوت در ماتریس متعامد برابر صفر است. ۵) طول سطرها و ستون‌ها در ماتریس متعامد برابر یک است.

مدرسان شریف

فصل نهم

«دستگاه معادلات خطی»

معرفی دستگاه معادلات خطی

معادله خطی معادله‌ای به شکل $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ برحسب متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$ است که در آن $a_1, \ldots, a_n$ ضرایب معادلـه خطـی و b مقدار سمت راست نامیده می‌شود و همگی اعدادی حقیقی هستند. یک دستگاه معادلات خطی با m معادله و n مجهول، در حالت کلی به شکل زیر است:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

شکل ماتریسی دستگاه معادلات خطی بالا به‌صورت $Ax = b$ کـه در آن، $A = (a_{ij})_{m\times n}$ مـاتریس ضـرایب و $x = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_m)^T$ بـردار مجهـول و $b = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_m)^T$ بردار مقادیر سمت راست نامیده می‌شود. دستگاهی که تعداد معادلات آن با تعداد مجهول آن برابر باشد، دستگاه معـادلات مربعـی نامیده می‌شود. اگر $b = o$ باشد، دستگاه همگن و اگر $b \neq o$ باشد، دستگاه ناهمگن است. ماتریس بلوکی $(A \mid b)$ ماتریس افزوده دستگاه $Ax = b$ است.

دستگاه‌های معادلات خطی هم‌ارز دو دستگاه هستند که جواب‌های یکسان داشته باشند.

نکته۱: در حالت کلی دستگاه $Ax = b$، یا جواب ندارد، یا جواب یکتا دارد، یا بی‌نهایت جواب دارد.

مثال۱: کدام‌یک نمی‌تواند تعداد جواب‌های دستگاه $Ax = b$ باشد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌نهایت

پاسخ: گزینه «۳» دستگاه $Ax = b$ نمی‌تواند دو جواب داشته باشد.

قضیه۱: فرض کنیم A یک ماتریس مربع مرتبه n باشد. در این صورت:

۱) اگر $\text{rank}(A \mid b) \neq \text{rank}(A)$ باشد، دستگاه جواب ندارد.

۲) اگر $\text{rank}(A \mid b) = \text{rank}(A) = n$ باشد، دستگاه جواب یکتا دارد.

۳) اگر $\text{rank}(A \mid b) = \text{rank}(A) < n$ باشد، دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

یک دستگاه مربعی جواب یکتا دارد اگر و فقط اگر ماتریس ضرایب آن نامنفرد باشد و این جواب از رابطه $x = A^{-1}b$ به‌دست می‌آید.

مثال۲: اگر $\text{rank}(A \mid b) = \text{rank}(A)$ باشد، آن‌گاه دستگاه معادلات مربعی $Ax = b$ ....

۱) جواب یکتا دارد. ۲) بی‌نهایت جواب دارد. ۳) جواب ندارد. ۴) جواب دارد.

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به بند ۲ و ۳ قضیه قبل، در این حالت دستگاه ممکن است یک یا بی‌نهایت جواب داشته باشد.

مثال ۳: دستگاه معادلات $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1+3x_2+\alpha x_3=\beta \end{cases}$ **در چه صورت دارای جواب نیست؟**

۱) $\alpha=4\ ,\ \beta=9$ ۲) $\alpha=4\ ,\ \beta\neq 9$ ۳) $\alpha\neq 4$ ۴) $\beta\neq 9$

پاسخ: گزینه «۲» ماتریس افزوده دستگاه را به شکل سطری پلکانی تبدیل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & \alpha & \beta \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \alpha & \beta \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha-2 & \beta-6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha-4 & \beta-9 \end{array}\right]$$

اگر $\beta\neq 9$ و $\alpha=4$ باشد، آن‌گاه $\operatorname{rank}(A)=2 \neq (A\mid b)=3$ و دستگاه معادلات دارای جواب نیست.

اعمال سطری مقدماتی

اگر معادله i ام دستگاه معادلات خطی را با E_i نشان دهیم، اعمال سطری مقدماتی به‌صورت زیر خواهند بود:

ضرب یک معادله دستگاه در یک عدد ناصفر: $E_i \to cE_i \ ;\ c\neq 0$

تعویض جای دو معادله از دستگاه: $E_i \leftrightarrow E_j$

افزودن مضربی از یک معادله دستگاه به معادله دیگری از آن: $E_i \to E_i + cE_j$

قضیه ۲: اعمال سطری مقدماتی اثری در جواب دستگاه معادلات خطی و وضعیت معکوس‌پذیری ماتریس ضرایب دستگاه ندارد.

مثال ۴: اعمال سطری مقدماتی بر کدام اثری ندارد؟

۱) جواب دستگاه ۲) وارون‌پذیری ماتریس ضرایب ۳) تعداد جواب‌های دستگاه ۴) هر سه مورد

پاسخ: گزینه «۴» طبق قضیه قبل اعمال سطری مقدماتی بر جواب دستگاه، وارون‌پذیری ماتریس ضرایب و تعداد جواب‌های دستگاه اثری ندارند.

قضیه ۳: اگر A یک ماتریس مربع مرتبه n باشد، آن‌گاه موارد زیر معادلند:

۱) ماتریس A وارون‌پذیر (نامنفرد) است. ۲) دترمینان ماتریس A مخالف صفر است: $\det(A)\neq 0$. ۳) رتبه ماتریس A برابر n است: $\operatorname{rank}(A)=n$. ۴) سطرهای ماتریس A مستقل خطی هستند. ۵) ستون‌های ماتریس A مستقل خطی هستند. ۶) دستگاه معادلات $Ax=b$ دارای جواب یکتای $x=A^{-1}b$ است. ۷) ماتریس A حاصل‌ضرب ماتریس‌های مقدماتی است.

روش‌های حل دستگاه معادلات خطی

روش‌های حل دستگاه معادلات خطی را می‌توان به‌صورت زیر دسته‌بندی کرد:

۱) روش‌های مستقیم ۲) روش‌های تجزیه‌ای ۳) روش‌های تکراری

روش‌های مستقیم

روش‌های مستقیم در نهایت به حل یک دستگاه قطری یا مثلثی می‌انجامند.

۱) روش حل دستگاه قطری

شکل کلی این نوع دستگاه به‌صورت مقابل است:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \bigcirc \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

و جواب آن برای $i=1,2,\cdots,n$ به شکل $x_i=\dfrac{b_i}{a_{ii}}$ است.

۲) روش حل دستگاه بالامثلثی (جایگذاری پسرو)

شکل کلی این نوع دستگاه به‌صورت زیر است که در آن $i=1,2,\cdots,n$ ؛ $a_{ii}\neq 0$ است.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & \bigcirc & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

روش حل این دستگاه را جایگذاری پسرو می‌نامیم. در این روش مقدار متغیرها را می‌توان از روابط زیر محاسبه کرد:

$$\boxed{x_n=\frac{b_n}{a_{nn}}\quad,\quad x_i=\frac{b_i-\sum\limits_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j}{a_{ii}}\ ;\ i=n-1,\cdots,1}$$

۳) روش حل دستگاه پایین‌مثلثی (جایگذاری پیشرو)

شکل کلی این نوع دستگاه به‌صورت زیر است که در آن $i=1,2,\cdots,n$ ؛ $a_{ii}\neq 0$ است.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & \bigcirc \\ a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & & \ddots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

روش حل این نوع دستگاه را جایگذاری پیشرو می‌نامیم. در این روش مقدار متغیرها را می‌توان از روابط زیر محاسبه کرد:

$$\boxed{x_1=\frac{b_1}{a_{11}}\quad,\quad x_i=\frac{b_i-\sum\limits_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j}{a_{ii}}\quad;\quad i=2,\cdots,n}$$

مثال۵: روش حل کدام دستگاه را جایگذاری پسرو می‌گویند؟

۱) بالامثلثی ۲) پایین‌مثلثی ۳) مثلثی ۴) قطری

پاسخ: گزینه «۱» روش حل دستگاه بالامثلثی را جایگذاری پسرو می‌گویند.

نکته۲: حل یک دستگاه مثلثی نیاز به $\frac{n(n-1)}{2}$ عمل جمع، $\frac{n(n-1)}{2}$ عمل ضرب و n عمل تقسیم دارد.

مثال۶: برای حل یک دستگاه مثلثی مرتبه n نیاز به انجام a عمل جمع و b عمل ضرب داریم. مقدار $a+b$ برابر است با:

۱) n^2 ۲) n^2+1 ۳) n^2+n ۴) n^2-n

پاسخ: گزینه «۴» بنابر نکته قبل $a=b=\frac{n(n-1)}{2}$ است، بنابراین $a+b=n(n-1)=n^2-n$ می‌باشد.

روش حذفی گاوس

این روش یک روش مستقیم برای حل دستگاه معادلات خطی است که در آن ماتریس ضرایب به یک ماتریس مثلثی تبدیل و سپس معادلات بـا جایگـذاری پسرو و یا پیشرو حل می‌شود. الگوریتم روش حذفی گاوس به‌صورت زیر است:

گام ۱ (حذف در ستون ۱)

فرض می‌کنیم $a_{11}\neq 0$. در این مرحله a_{11} درایه محوری و سطر اول را سطر محوری می‌نامیم.

در این گام $a_{21},a_{31},\cdots,a_{n1}$ یعنی درایه‌های زیر قطر اصلی در ستون اول با عملیات سطری صفر می‌شوند. برای ایـن منظـور ضـربگرهای زیـر را تعریـف می‌کنیم:

$$m_{i1}=-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\ ;i=2,\cdots,n$$

سپس اعضای سطر اول ماتریس افزوده را در m_{i1} ضرب می‌کنیم و با اعضای متناظر از سطر i ام جمع می‌کنیم.

در پایان گام اول الگوریتم روش حذفی گاوس ماتریس زیر به‌دست می‌آید:

$$(A^{(1)}|b^{(1)})=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)}\end{array}\right]\quad \text{و}\quad \begin{array}{l} a_{ij}^{(1)}=a_{ij}+m_{i1}a_{ij}\\ b_i^{(1)}=b_i+m_{i1}b_1\end{array}\ ;i,j=2,3,\cdots,n$$

با ادامه این روند به گام k می‌رسیم.

گام k (حذف در ستون k)

فرض می‌کنیم $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$. در این مرحله $a_{kk}^{(k-1)}$ درایه محوری و سطر k ام سطر محوری نامیده می‌شود.

در این گام $a_{(k+1)k}^{(k-1)},\cdots,a_{nk}^{(k-1)}$ یعنی درایه‌های زیر قطر اصلی در ستون k ام با عملیات سطری صفر می‌شوند. برای این منظور ضربگرهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$m_{ik}=-\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\ ;\ i=k+1,\cdots,n$$

سپس اعضای سطر k ام ماتریس $(A^{(k-1)}\,|\,b^{(k-1)})$ را در m_{ik} ضرب می‌کنیم و با اعضای متناظر از سطر i ام جمع می‌کنیم.

در پایان گام k ماتریس $(A^{(k)},b^{(k)})$ به‌دست می‌آید که در آن:

$$a_{ij}^{(k)}=a_{ij}^{(k-1)}+m_{ik}a_{kj}^{(k-1)} \quad \text{و} \quad b_i^{(k)}=b_i^{(k-1)}+m_{ik}b_k^{(k-1)}\ ;\quad i,j=k+1,\cdots,n$$

این روند را تا گام $n-1$ ادامه می‌دهیم تا ماتریس ضرایب به شکل بالامثلثی شود و سپس با جایگذاری پسرو مقادیر متغیرها را محاسبه می‌کنیم.

مثال۷: در حل دستگاه معادلات $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8 \\ 2x_1+x_2+3x_3=13 \\ -x_1-3x_2+4x_3=5 \end{cases}$ **مقدار m_{21} و m_{31} و m_{32} کدام است؟**

۱) $m_{32}=-\frac{1}{3},m_{31}=1,m_{21}=-2$

۲) $m_{32}=-\frac{1}{3},m_{31}=-2,m_{21}=2$

۳) $m_{32}=3,m_{31}=\frac{1}{2},m_{21}=-2$

۴) $m_{32}=-\frac{1}{3},m_{31}=-\frac{1}{3},m_{21}=-2$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا ماتریس افزوده $(A|b)=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ -1 & -3 & 4 & 5 \end{array}\right]$ را تشکیل می‌دهیم، پس $m_{31}=-\frac{a_{31}}{a_{11}}=-\frac{-1}{1}=1$ و $m_{21}=-\frac{a_{21}}{a_{11}}=-\frac{2}{1}=-2$ با ضرب ضربگرهای m_{21} و m_{31} در سطر اول و جمع با به‌ترتیب سطر دوم و سوم به‌دست می‌آید.

$$(A^{(1)}|b^{(1)})=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 & 13 \end{array}\right]$$

پس $m_{32}=-\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}=-\frac{-1}{-3}=-\frac{1}{3}$ است.

مثال۸: ماتریس افزوده دستگاه $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8 \\ 2x_1+x_2+3x_3=13 \\ -x_1-3x_2+4x_3=5 \end{cases}$ **به روش حذفی گاوس کدام است؟**

۱) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{14}{3} & 14 \end{array}\right]$

۲) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \end{array}\right]$

۳) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{14}{3} & 14 \end{array}\right]$

۴) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \end{array}\right]$

پاسخ: گزینه «۱» ماتریس افزوده دستگاه یعنی $(A^{(1)}\,|\,b^{(1)})=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ -1 & -3 & 4 & 5 \end{array}\right]$ را به شکل بالامثلثی تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} m_{21}&=-\frac{a_{21}}{a_{11}}=-\frac{2}{1}=-2 \\ m_{31}&=-\frac{a_{31}}{a_{11}}=-\frac{-1}{1}=1 \end{aligned} \Rightarrow (A^{(2)}\,|\,b^{(2)})=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 & 13 \end{array}\right]$$

$$m_{32}=-\frac{-1}{-3}=-\frac{1}{3} \Rightarrow (A^{(3)}\,|\,b^{(3)})=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{14}{3} & 14 \end{array}\right]$$

فصل دهم

«تقریب کمترین مربعات»

تابع جدولی را درنظر بگیرید که مقادیر آن با اندازه‌گیری یا آزمایش به‌دست آمده است. در این حالت، اغلب به جای درون‌یابی داده‌ها، یک منحنی به‌دست می‌آوریم که از نزدیکی نقاط تابع جدولی بگذرد و خطای آن حداقل باشد. در این فصل روش به‌دست آوردن منحنی کمترین مربعات و ویژگی‌های آن را بررسی می‌کنیم.

چندجمله‌ای کمترین مربعات

نمودار کدام چندجمله‌ای $P(x)$ از نزدیکی نقاط $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$ می‌گذرد، به‌طوری که خطای آن کمترین مقدار ممکن باشد؟ فرض کنید خطای مورد نظر، خطای کمترین مربعات باشد، یعنی به دنبال چندجمله‌ای $P(x)$ هستیم تا مجموع زیر کمترین مقدار را داشته باشد:

$$E=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-P(x_i)\right]^2=\left[y_1-P(x_1)\right]^2+\left[y_2-P(x_2)\right]^2+\cdots+\left[y_n-P(x_n)\right]^2$$

برای یافتن چندجمله‌ای مورد نظر آن را به‌صورت $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ می‌نویسیم. بنابر قضیه‌ای از حسابان برای آن‌که تابع $m+1$ متغیره $E(a_0,a_1,\ldots,a_m)$ کمترین مقدار را داشته باشد، لازم است که در شرایط زیر صدق کند:

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial a_k}=0\ ;\quad k=0,1,\ldots,m}$$

بنابراین دستگاه معادلات خطی با $m+1$ معادله و $m+1$ مجهول به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. این دستگاه معادلات را دستگاه معادلات نرمال می‌گویند.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}x_i^k\left[a_0+a_1x_i+a_2x_i^2+\cdots+a_mx_i^m-y_i\right]=0\quad ;\ k=0,1,\ldots,m}$$

شکل ماتریسی دستگاه معادلات نرمال به‌صورت زیر می‌باشد. توجه کنید که اندیس i مقادیر طبیعی از ۱ تا n را می‌پذیرد.

$$\begin{bmatrix}\sum 1 & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^m\\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{m+1}\\ \vdots & & & \vdots & \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \sum x_i^{m+2} & \cdots & \sum x_i^{2m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum y_i\\ \sum x_iy_i\\ \vdots\\ \sum x_i^my_i\end{bmatrix}$$

نکته ۱: دستگاه معادلات نرمال چندجمله‌ای کمترین مربعات دارای جواب یکتا است.

مثال۱: کدام درباره دستگاه معادلات روش کمترین مربعات با چندجمله‌ای درست است؟

۱) دارای جواب یکتا است.
۲) ممکن است جواب نداشته باشد.
۳) ممکن است بی‌نهایت جواب داشته باشد.
۴) در شرایط مختلف هر سه حالت امکان دارد.

پاسخ: گزینه «۱» دستگاه معادلات روش کمترین مربعات با چندجمله‌ای در هر شرایط دارای جواب یکتا است.

نکته۲: ماتریس ضرایب دستگاه معادلات نرمال چندجمله‌ای کمترین مربعات، به شکل A^TA است که $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times(m+1)}$ و $a_{ij}=\left(x_i\right)^{j-1}$ می‌باشد.

مثال ۲: کدام درباره ماتریس ضرایب دستگاه معادلات برازش با چندجمله‌ای درست است؟

۱) آن را می‌توان به شکل $A^T A$ نوشت.
۲) آن را می‌توان به شکل $P^{-1}AP$ نوشت.
۳) آن را می‌توان به شکل $P^T AP$ نوشت.
۴) در شرایط مختلف هر سه حالت امکان دارد.

پاسخ: گزینه «۱» طبق نکته قبل ماتریس ضرایب را می‌توان به شکل $A^T A$ نوشت.

خط کمترین مربعات

در حالتی که چندجمله‌ای کمترین مربعات خط باشد، آن را خط کمترین مربعات می‌گوییم. دستگاه معادلات نرمال خط کمترین مربعات $P(x) = a_1 x + a_0$ برای داده‌های $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ به‌صورت زیر است:

$$\boxed{\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}}$$

از حل این دستگاه با استفاده از روش کرامر، برای a_0 و a_1 مقادیر زیر به‌دست می‌آید:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left[\sum x_i\right]^2}$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left[\sum x_i\right]^2}$$

مثال۳: دستگاه معادلات برازش خطی تابع جدولی $\begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline y & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{array}$**، کدام است؟**

۱) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از اطلاعات داده‌ها، جدول مقابل را تشکیل می‌دهیم.

درنتیجه دستگاه معادلات $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \end{bmatrix}$ به‌دست می‌آید.

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
۲-	۱	۴	۲-
۱-	۲	۱	۲-
۰	۳	۰	۰
۱	۳	۱	۳
۳	۴	۹	۱۲
$\sum x_i = 1$	$\sum y_i = 13$	$\sum x_i^2 = 15$	$\sum x_i y_i = 11$

مثال۴: خط کمترین مربعات برای تابع جدولی $\begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline y & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{array}$**، کدام است؟**

۱) $74y = 184 + 42x$
۲) $47y = 184 + 74x$
۳) $47y = 74 + 184x$
۴) $184y = 74 + 47x$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به مثال قبل و به کمک روش کرامر، جواب دستگاه $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \end{bmatrix}$ به‌صورت زیر است:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 11 & 15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 15 \end{vmatrix}} = \frac{184}{74} \quad , \quad a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 1 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 15 \end{vmatrix}} = \frac{42}{74}$$

بنابراین خط کمترین مربعات برای تابع جدولی در گزینه اول آمده است.

نکته۳: اگر $y = ax + b$ خط کمترین مربعات داده‌های $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ باشد، آن‌گاه میانگین x_iها و y_iها در معادله خط صدق می‌کند. به عبارتی، اگر $\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ و $\bar{y} = \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}$ باشند، آن‌گاه $\bar{y} = a\bar{x} + b$ است.

مثال۵: کدام درباره خط کمترین مربعات رئوس یک چندضلعی درست است؟

۱) حداقل از دو رأس چندضلعی عبور می‌کند.　　۲) از وسط دو ضلع چندضلعی عبور می‌کند.

۳) از مرکز ثقل چندضلعی عبور می‌کند.　　۴) از وسط یک قطر چندضلعی عبور می‌کند.

پاسخ: گزینه «۳» بنابر نکته قبل این خط از مرکز ثقل چندضلعی عبور می‌کند. توجه داشته باشید که مرکز ثقل همان نقطه‌ی $(\bar{x}, \bar{y})$ می‌باشد.

مثال۶: معادله خط کمترین مربعات داده‌های $(1,1)$ و $(2,1)$ و $(3,3)$ کدام است؟

۱) $2y = x$　　۲) $3y = 3x - 1$　　۳) $y = x$　　۴) $2y = x + 3$

پاسخ: گزینه «۲» بنابر نکته قبل این خط از نقطه $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{1+2+3}{3}, \frac{1+1+3}{3}) = (2, \frac{5}{3})$ می‌گذرد. اما این نقطه فقط در خط گزینه دوم صدق می‌کند.

چند تقریب کمترین مربعات دیگر

گاهی داده‌ها طوری هستند که تقریب با یک تابع چندجمله‌ای مناسب نیست و بهتر است آن‌ها را با یک تابع دیگر تقریب بزنیم. این موضوع زمانی رخ می‌دهد که با رسم داده‌ها در یک دستگاه مختصات، مجموعه نقاط رسم شده شبیه یک منحنی خاص باشد. اما در این حالت دستگاه معادلات حاصل غیر خطی است. برای رهایی از این مشکل، برخی اوقات می‌توان این توابع را با جانشانی‌هایی به شکل خطی در آورد. این فرآیند را خطی‌سازی می‌گوییم.

تقریب نمایی

اگر رابطه بین x و y داده‌ها به‌صورت $y = ae^{bx}$ باشد، رابطه‌ای خطی بین x و $\ln y$ به شکل $\ln y = bx + \ln a$ برقرار خواهد بود. با جانشانی $Y = \ln y$ خطی‌سازی $Y = bx + \ln a$ به‌دست می‌آید. دستگاه معادلات نرمال این تقریب کمترین مربعات به‌صورت زیر است:

$$\boxed{\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ln a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \ln y_i \\ \sum x_i \ln y_i \end{bmatrix}}$$

تقریب هذلولی

اگر رابطه بین x و y داده‌ها به‌صورت $y = \frac{1}{ax + b}$ باشد، رابطه‌ای خطی بین x و $\frac{1}{y}$ به شکل $\frac{1}{y} = ax + b$ برقرار خواهد بود. با جانشانی $Y = \frac{1}{y}$ خطی‌سازی $Y = ax + b$ به‌دست می‌آید. دستگاه معادلات نرمال این تقریب کمترین مربعات به‌صورت زیر است:

$$\boxed{\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \frac{1}{y_i} \\ \sum \frac{x_i}{y_i} \end{bmatrix}}$$

تقریب مثلثاتی

اگر y_iها در داده‌ها به‌صورت متناوب تکرار شوند، منحنی تقریب مناسب به‌صورت مثلثاتی $y = b + a\cos\omega x$ است که در آن ω مقداری معلوم می‌باشد. با جانشانی $X = \cos\omega x$ خطی‌سازی $y = aX + b$ به‌دست می‌آید. دستگاه معادلات نرمال این تقریب کمترین مربعات به‌صورت زیر است:

$$\boxed{\begin{bmatrix} n & \sum \cos\omega x_i \\ \sum \cos\omega x_i & \sum (\cos\omega x_i)^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \cos\omega x_i \end{bmatrix}}$$

تقریب کسری

اگر رابطه بین x و y داده‌ها به‌صورت $y = \frac{x}{ax + b}$ باشد، رابطه‌ای خطی بین x و $\frac{x}{y}$ به شکل $\frac{x}{y} = ax + b$ برقرار خواهد بود. با جانشانی $Y = \frac{x}{y}$ خطی‌سازی $Y = ax + b$ به‌دست می‌آید. دستگاه معادلات نرمال این تقریب کمترین مربعات به‌صورت زیر است:

$$\boxed{\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \frac{x_i}{y_i} \\ \sum \frac{x_i^2}{y_i} \end{bmatrix}}$$

تقریب تابع با روش کمترین مربعات

تابع پیوسته $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ داده شده است. می‌خواهیم این تابع را با یک چندجمله‌ای $P(x)$ چنان تقریب بزنیم که کمترین خطای ممکن ایجاد شود. خطای کمترین مربعات را درنظر بگیرید؛ بنابراین باید چندجمله‌ای $P(x)$ را طوری بیابیم که عبارت زیر کمترین مقدار را داشته باشد.

$$\boxed{E=\int_a^b \left(f(x)-P(x)\right)^{۲} dx}$$

در این صورت چندجمله‌ای $P(x)$ را چندجمله‌ای تقریب کمترین مربعات تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ می‌نامیم. برای یافتن چندجمله‌ای مورد نظر آن را به‌صورت $P(x)=a_۰+a_۱x+\cdots+a_mx^m$ می‌نویسیم. بنابر قضیه‌ای از حسابان برای آن که تابع $m+۱$ متغیره $E(a_۰,a_۱,\ldots,a_m)$ کمترین مقدار را داشته باشد، لازم است که در شرایط زیر صدق کند:

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial a_k}=۰\ ; \quad k=۰,۱,\ldots,m}$$

بنابراین دستگاه معادلات خطی با $m+۱$ معادله و $m+۱$ مجهول به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. این دستگاه معادلات را دستگاه معادلات نرمال می‌گویند.

$$\boxed{\int_a^b x^k\left[a_۰+a_۱x+a_۲x^۲+\cdots+a_mx^m-f(x)\right]dx=۰ \quad ; \ k=۰,۱,\ldots,m}$$

شکل ماتریسی دستگاه معادلات نرمال به‌صورت زیر می‌باشد. توجه کنید که اندیس i مقادیر طبیعی از ۱ تا n را می‌پذیرد.

$$\begin{bmatrix} I_۰ & I_۱ & \cdots & I_m \\ I_۱ & I_۲ & \cdots & I_{m+۱} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I_m & I_{m+۱} & \cdots & I_{۲m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_۰ \\ a_۱ \\ \vdots \\ a_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_۰ \\ b_۱ \\ \vdots \\ b_m\end{bmatrix}$$

که در آن I_k و b_k را می‌توان از روابط زیر محاسبه کرد:

$$\boxed{I_k=\int_a^b x^k dx=\frac{b^{k+۱}-a^{k+۱}}{k+۱}\ ;\ k=۰,۱,\ldots,۲m \quad , \quad b_k=\int_a^b x^k f(x)dx\ ;\ k=۰,۱,\ldots,m}$$

نکته۴: اگر تقریب تابع با روش کمترین مربعات بر بازه $[۰,۱]$ موردنظر باشد، ماتریس ضرایب دستگاه معادلات حاصل به شکل $\left(\frac{۱}{i+j}\right)_{m\times m}$ است که آن را ماتریس هیلبرت می‌نامیم.

❖ **تعریف:** اگر $f(x)$ تابعی انتگرال‌پذیر بر بازه $[a,b]$ باشد، نرم p آن را به‌صورت $\|f\|_p:=\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{۱}{p}}$ تعریف می‌کنیم و نرم بی‌نهایت آن با $\|f\|_\infty:=\underset{a\le x\le b}{\text{Max}}|f|$ تعریف می‌شود.

مثال۷: اگر $T_n(x)$ چندجمله‌ای چبیشف درجه n باشد، مقدار $\|T_n\|_\infty$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{n}$ ۲) $|\cos\frac{۱}{n}|$ ۳) $|\cos\frac{\pi}{n}|$ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» بنابر مطالب فصل چهارم درباره چندجمله‌ای چبیشف، چون $|T_n(x)|\le ۱$ و $T_n(\cos\frac{k\pi}{n})=(-۱)^k$ است؛ بنابراین $\|T_n\|_\infty=\underset{-۱\le x\le ۱}{\text{Max}}|T_n|=۱$ می‌باشد.