سؤالات آزمون حسابداری ـ دکتری ۹۹

۱ـ حد عبارت $(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x)$ وقتی $x \to 0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۲ـ مشتق مرتبه دهم تابع $y = xLnx$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟

۱) $\frac{105}{4}$ ۲) $\frac{105}{8}$ ۳) $\frac{315}{4}$ ۴) $\frac{315}{8}$

۳ـ مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$ و محور x ها و خطوط مجانب آن کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) ۳ ۴) ۴

۴ـ در تابع دو متغیری $Z = Ln(x^2 + y^2) + Arctg\frac{y}{x}$، حاصل $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$، کدام است؟

۱) $\frac{(x-y)^2}{(x^2+y^2)^2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

۵ـ رتبه ماتریس A، کدام است؟

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & -8 & 5 & 2 \\ 5 & -12 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۶ـ مختصات نقطه بحرانی تابع $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$، کدام است؟

۱) $(\frac{2}{3}, 2)$ ۲) $(1, \frac{2}{3})$ ۳) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ ۴) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

۷ـ میدان D مستطیل $[1,5] \times [2,3]$ است. حاصل $\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$، برابر LnA است. A کدام است؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{6}{5}$ ۳) $\frac{7}{6}$ ۴) $\frac{7}{4}$

پاسخنامه آزمون حسابداری ـ دکتری ۹۹

۱ـ گزینه «۲» حالت مبهم $\infty-\infty$ است که با تبدیل $\cot x$ به $\frac{۱}{tg\,x}$ و مخرج مشترک‌گیری آن را رفع ابهام می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{x^۲}-\frac{۱}{tg^۲x}\right)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{tg^۲x-x^۲}{x^۲tg^۲x}\right)$$

اکنون با استفاده از هم‌ارزی‌های $\underset{x\to ۰}{tgx}\sim x$ و $\underset{x\to ۰}{tgx-x}\sim\frac{x^۳}{۳}$ داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{(tgx-x)(tgx+x)}{x^۲(x^۲)}=\lim_{x\to ۰}\frac{(\frac{x^۳}{۳})(x+x)}{x^۴}=\frac{\frac{۲}{۳}x^۴}{x^۴}=\frac{۲}{۳}$$

۲ـ گزینه «۳» ابتدا مشتق‌های مرتبه‌ی اول و دوم تابع را به دست می‌آوریم و داریم:

$$y^{(۱)}=۱\times Lnx+\frac{۱}{x}(x)=Lnx+۱$$

$$y^{(۲)}=\frac{۱}{x}$$

اکنون با استفاده از مشتق مرتبه nام تابع $y=\frac{۱}{x}$ که به صورت زیر می‌باشد، فقط کافی است ۸ مرتبه از تابع $\frac{۱}{x}$ مشتق بگیریم.

$$y=\frac{۱}{x}\rightarrow y^{(n)}=\frac{(-۱)^n n!}{x^{n+۱}}$$

$$y=\frac{۱}{x}\rightarrow y^{(۸)}=\frac{(-۱)^۸\times ۸!}{x^۹}\xrightarrow{x=۲}\frac{۸!}{۲^۹}=\frac{۸!}{۵۱۲}=\frac{۸\times ۷\times ۶!}{۵۱۲}=\frac{۷\times ۶\times ۵!}{۶۴}=\frac{۷\times ۳\times ۵!}{۳۲}=\frac{۷\times ۳\times ۵\times ۴\times ۳!}{۳۲}=\frac{۷\times ۳\times ۵\times ۶}{۸}=\frac{۳۱۵}{۴}$$

۳ـ گزینه «۱» ابتدا باید مجانب‌های قائم تابع را به دست آوریم، تا حدود x برای انتگرال‌گیری مشخص شود، پس باید ریشه‌های مخرج کسر را بیابیم.

مجانب‌های قائم $۴x-x^۲-۳=۰\Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰\Rightarrow (x-۱)(x-۳)=۰\Rightarrow x=۱\,,\,x=۳$

اکنون مساحت ناحیه را به دست می‌آوریم:

$$S=\int_۱^۳\frac{۱}{\sqrt{-(x^۲-۴x+۳)}}dx=\int_۱^۳\frac{dx}{\sqrt{-((x-۲)^۲-۱)}}=\int_۱^۳\frac{dx}{\sqrt{۱-(x-۲)^۲}}=(Arcsin\,(x-۲))_۱^۳$$

$$=Arcsin\,(۳-۲)-Arcsin\,(۱-۲)=Arcsin\,(۱)-Arcsin\,(-۱)=\frac{\pi}{۲}-(-\frac{\pi}{۲})=\pi$$

۴ـ گزینه «۴» باید از تابع z نسبت به x و y جداگانه، دوبار مشتق بگیریم و با هم جمع کنیم.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۲x}{x^۲+y^۲}+\frac{-\frac{y}{x^۲}}{۱+(\frac{y}{x})^۲}=\frac{۲x}{x^۲+y^۲}-\frac{y}{x^۲+y^۲}=\frac{۲x-y}{x^۲+y^۲}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{۲x-y}{x^۲+y^۲}\right)=\frac{۲(x^۲+y^۲)-۲x(۲x-y)}{(x^۲+y^۲)^۲}=\frac{-۲x^۲+۲y^۲+۲xy}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{۲y}{x^۲+y^۲}+\frac{\frac{۱}{x}}{۱+(\frac{y}{x})^۲}=\frac{۲y}{x^۲+y^۲}+\frac{x}{x^۲+y^۲}=\frac{۲y+x}{x^۲+y^۲}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{۲y+x}{x^۲+y^۲}\right)=\frac{۲(x^۲+y^۲)-۲y(۲y+x)}{(x^۲+y^۲)^۲}=\frac{۲x^۲-۲y^۲-۲xy}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

پس داریم:

$$\frac{\partial^۲z}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲z}{\partial y^۲}=۰$$

۵ـ گزینه «۲» باید تعداد سطرهای (یا ستون‌های) مستقل را به دست آوریم:

سطر اول وابسته است $\to$ سطر اول = سطر سوم + (سطر دوم) ۲−

سطر چهارم وابسته است $\to$ سطر چهارم = سطر سوم + (سطر اول) ۲−

با توجه به اینکه دترمینان زیر ماتریس $A_1=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -5\end{bmatrix}$ برابر $|A_1|=5-4=1$ و مخالف صفر می‌باشد، پس رتبه ماتریس ۲ می‌باشد، چراکه فقط دو سطر مستقل پیدا کردیم.

۶ـ گزینه «۴» باید مشتق تابع نسبت به x و y را جداگانه مساوی صفر قرار دهیم.

$$f=x^3y^2-x^4y^2-x^3y^3$$

$$f_x=3x^2y^2-4x^3y^2-3x^2y^3=0\Rightarrow x^2y^2(3-4x-3y)=0$$

$$x=0\,,\ y=0\,,3-4x-3y=0\Rightarrow 4x+3y=3$$

$$f_y=2x^3y-2x^4y-3x^3y^2=0\Rightarrow x^3y(2-2x-3y)=0\Rightarrow x=y=0\ ,\ 2-2x-3y=0$$

از حل دستگاه زیر داریم:

$$\begin{cases}4x+3y=3\\ 2x+3y=2\end{cases}\xrightarrow{x(-1)}2x-3y=-2\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow 2(\frac{1}{2})+3y=2\Rightarrow 3y=1\Rightarrow y=\frac{1}{3}\xrightarrow[\text{بحرانی}]{\text{مختصات نقطه}}(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$$

۷ـ گزینه «۳» با توجه به ناحیه D داریم: $2\le x\le 3$, $1\le y\le 5$، پس خواهیم داشت:

$$\int_2^3\int_1^5\frac{dy\,dx}{(x+y)^2}\xrightarrow[dy=du]{x+y=u}\int_2^3\int\frac{du}{u^2}dx=\int_2^3\frac{u^{-1}}{-1}dx=\int_2^3(-\frac{1}{x+y})_1^5dx=\int_2^3(\frac{-1}{x+5}+\frac{1}{x+1})dx$$

$$=(\mathrm{Ln}(x+1)-\mathrm{Ln}(x+5))_2^3=(\mathrm{Ln}(\frac{x+1}{x+5}))_2^3=\mathrm{Ln}\frac{4}{8}-\mathrm{Ln}\frac{3}{7}=\mathrm{Ln}(\frac{\frac{4}{8}}{\frac{3}{7}})=\mathrm{Ln}\frac{7}{6}=\mathrm{Ln}A\Rightarrow A=\frac{7}{6}$$

سؤالات آزمون علوم اقتصادی ـ دکتری ۹۹

۱ـ حاصل عبارت $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}})$، کدام است؟

۱) $e-1$
۲) e
۳) 0
۴) 1

۲ـ اگر $f_0(x)=\frac{1}{2-x}$ و به ازای $n=0,1,2,...$ داشته باشیم $f_{n+1}=f_0 o f_n$، حاصل عبارت $f_9(-1)$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{9}$
۲) $\frac{9}{8}$
۳) $\frac{21}{9}$
۴) $\frac{19}{21}$

۳ـ اگر $z=f(x,y)$ تابع همگن درجه‌ی n باشد، کدام رابطه درست است؟

۱) $z=x^n f(1,\frac{y}{x})$
۲) $z=y^n f(1,\frac{y}{x})$
۳) $z=y^n f(\frac{y}{x},1)$
۴) $z=x^n f(\frac{y}{x},1)$

۴ـ علامت فرم درجه دوم $\phi_A(x)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_3$، کدام است؟

۱) نامعین
۲) معین منفی
۳) شبه‌معین مثبت
۴) شبه‌معین منفی

۵ـ چهار جمله اول بسط مک‌لورن در تابع $f(x)=x\mathrm{Ln}(1+x)$، کدام است؟

۱) $x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{4}$
۲) $x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}$
۳) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$
۴) $x^2-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}-\frac{x^5}{4!}$

۶ـ اگر $A=\begin{bmatrix}B_{n\times n} & I_n\\ O_{n\times n} & C_{n\times n}\end{bmatrix}$ باشد و معکوس آن $A^{-1}=\begin{bmatrix}X & Y\\ Z & T\end{bmatrix}$ باشد، X و Y کدام است؟

۱) $X=B^{-1}C^{-1}$ ، $Y=C^{-1}$
۲) $X=C^{-1}$ ، $Y=B^{-1}$
۳) $X=B^{-1}$ ، $Y=-B^{-1}C^{-1}$
۴) $X=B^{-1}$ ، $Y=B^{-1}C^{-1}$

۷ـ توابع معکوس عرضه و تقاضا برای کالایی $\begin{cases}y=16-x^2\\ y=2x+1\end{cases}$ می‌باشد که در آن y قیمت و x مقدار کالاست. مازاد مصرف‌کننده چند واحد پول است؟

۱) ۲۱
۲) ۱۸
۳) ۱۵
۴) ۱۲

۸ـ تابع تقاضای $q=f(p)$ را چنان تعیین می‌کنیم که در هر نقطه‌ی آن با فرض $p=2$ و $q=3$ کشش تقاضا نسبت به قیمت -3 باشد، مقدار تقاضا به ازای $p=1$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۸
۳) ۲۱
۴) ۲۴

۹ـ اگر A سطح محصور به خطوط $y=x$ و $y=0$ در فاصله‌ی $[0,2]$ باشد، مقدار انتگرال دوگانه $I=\iint_A xydxdy$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

۱۰ـ در مدل تار عنکبوتی داریم $\begin{cases}q_t=10-4p_t & \text{تقاضا}\\ q_t=-2+3p_{t-1} & \text{عرضه}\end{cases}$ ، اگر $p_0=3$ باشد، قیمت p_1 کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{12}{7}$
۴) $\frac{7}{12}$

پاسخنامه آزمون علوم اقتصادی ـ دکتری ۹۹

۱ـ گزینه «۱» با استفاده از روش حل سری‌های تلسکوپی، که برای پیدا کردن مجموع سری‌هایی می‌باشد که در آنها دو جمله‌ی پشت‌سرهم از هم کم شده باشند، داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}})=e^{\frac{1}{1}}-e^{\frac{1}{\infty}}=e-e^{0}=e-1$$

۲ـ گزینه «۴» با قرار دادن مقادیر n از $n=0$ در رابطه‌ی ترکیب داده شده باید الگوی f_9 را بیابیم.

$$n=0 \Rightarrow f_1=f_0of_0=\frac{1}{2-\frac{1}{2-x}}=\frac{2-x}{3-2x}$$

$$n=1 \Rightarrow f_2=f_0of_1=\frac{1}{2-\frac{2-x}{3-2x}}=\frac{1}{\frac{6-4x-2+x}{3-2x}}=\frac{3-2x}{4-3x}$$

به همین ترتیب داریم:

$$f_9=\frac{10-9x}{11-10x}\xrightarrow{x=-1}\frac{10-9(-1)}{11-10(-1)}=\frac{19}{21}$$

۳ـ گزینه «۱» اگر $z=f(x,y)$ تابعی همگن از درجه ۱ باشد، داریم:

$$z=x^{1}f(1,\frac{y}{x})$$

اگر درجه همگن بودن n باشد، داریم:

$$z=x^{n}f(1,\frac{y}{x})$$

۴ـ گزینه «۳» ابتدا ماتریس هسیان مربوطه را تشکیل می‌دهیم که به صورت زیر است:

$$H=\begin{bmatrix}\phi_{x_1x_1} & \phi_{x_1x_2} & \phi_{x_1x_3}\\ \phi_{x_2x_1} & \phi_{x_2x_2} & \phi_{x_2x_3}\\ \phi_{x_3x_1} & \phi_{x_3x_2} & \phi_{x_3x_3}\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{array}{l}\phi_{x_1}=2x_1-2x_3\\ \phi_{x_1x_1}=2\\ \phi_{x_1x_2}=0\\ \phi_{x_1x_3}=-2\end{array}$$

$$\phi_{x_2}=4x_2\ ,\ \phi_{x_2x_1}=0,\ \phi_{x_2x_2}=4\ ,\ \phi_{x_2x_3}=0$$

$$\phi_{x_3}=2x_3-2x_1\ ,\ \phi_{x_3x_1}=-2\ ,\ \phi_{x_3x_2}=0\ ,\ \phi_{x_3x_3}=2$$

$$H=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 4 & 0\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow H_1=2>0\quad,\quad H_2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}=8>0\quad,\ H_3=2(8)-2(8)=0$$

پس چون همه H ها مثبت نیستند، ماتریس شبه‌معین مثبت است.

۵ـ گزینه «۱» با توجه به بسط مک‌لورن تابع $f(x)=Ln(1+x)$ که به‌صورت $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$ می‌باشد، داریم:

$$x(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots)=x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{4}+\ldots$$

۶ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ از رابطه‌ی $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$ به‌دست می‌آید، معکوس ماتریس A را به‌دست می‌آوریم و درایه‌های آن را با درایه‌های A^{-1} مساوی قرار می‌دهیم.

$$A^{-1}=\frac{1}{BC-0}\begin{bmatrix}C_{n\times n} & -I_n\\ 0 & B_{n\times n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{C}{BC} & -\frac{I_n}{BC}\\ 0 & \frac{B}{BC}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X & Y\\ Z & T\end{bmatrix}$$

پس باید:

$$\frac{1}{B}=X\Rightarrow X=B^{-1}\ ,\ -I_nB^{-1}C^{-1}=Y\Rightarrow Y=-B^{-1}C^{-1}$$

۷ـ گزینه «۲» ابتدا با تساوی قرار دادن دو تابع عرضه و تقاضا، x تعادل را به‌دست می‌آوریم و داریم:

$$16-x^2=2x+1 \Rightarrow x^2+2x-15=0$$

$$(x-3)(x+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-5 \quad (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

$$x_e=3 \Rightarrow y_e=2(3)+1=7$$

$$\text{مازاد مصرف‌کننده}=\int_0^3 (y_{\text{تقاضا}}-y_e)\,dx=\int_0^3 (16-x^2-7)dx=\int_0^3 (9-x^2)\,dx=(9x-\frac{x^3}{3})_0^3=27-\frac{27}{3}=27-9=18$$

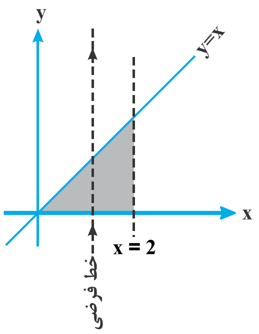
۸ـ گزینه «۴» اگر تابع تقاضا به صورت $q=\frac{A}{p^\alpha}$ باشد (A مقدار ثابت، q تقاضا و p قیمت کالا است)، کشش قیمتی تقاضا برابر $-\alpha$ است، پس در این مثال چون کشش قیمتی برابر -3 می‌باشد، پس $\alpha=3$ است و داریم:

$$q=3,p=2 \Rightarrow 3=\frac{A}{(2)^3} \Rightarrow 3=\frac{A}{8} \Rightarrow A=24$$

پس به ازای $p=1$ داریم:

$$q=\frac{24}{(1)^3}=24$$

۹ـ گزینه «۱» ابتدا باید ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را مشخص کنیم تا بتوانیم حدود x و y را بیابیم.



$$I=\int_0^2\int_0^x xy\,dy\,dx=\int_0^2 x(\frac{y^2}{2})_0^x dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 x(x^2)\,dx=\frac{1}{2}(\frac{x^4}{4})_0^2=\frac{1}{2}(4)=2$$

۱۰ـ گزینه «۲» با قرار دادن $t=1$ در معادله‌ی عرضه داریم:

$$q_1=-2+3p_0=-2+3(3)=7$$

اکنون $t=1$ را در معادله‌ی تقاضا قرار می‌دهیم و داریم:

$$q_1=10-4p_1=10-4p_1=7 \Rightarrow 4p_1=3 \Rightarrow p_1=\frac{3}{4}$$