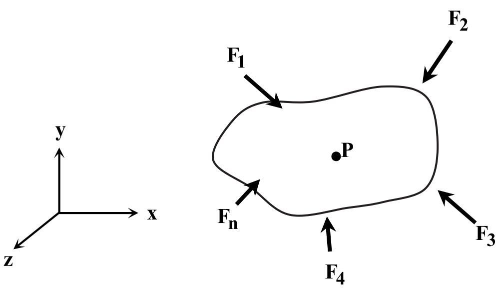
مدرسان شریف

فصل اول

«تنش، کرنش، بارگذاری محوری»

درسنامه (۱): معرفی انواع تنش‌ها

مقدمه

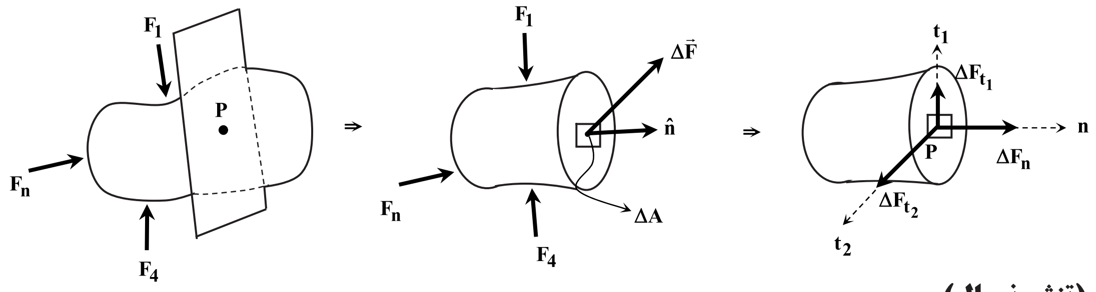


هرگاه جسمی (طبق شکل مقابل) تحت انواع بارگذاری‌ها قرار گیرد، نیروهای داخلی که در جسم به وجود می‌آیند در جسم تولید تنش می‌کنند.

در شکل مقابل اگر جسم در نقطه P موازی صفحه yz برش زده شده و پیکره سمت چپ برش رسم شود، به علت حفظ تعادل در سطح برش‌خورده نیروی داخلی وجود خواهد داشت.

اگر برآیند نیروهای وارد بر المان سطح ΔA که در برگیرنده‌ی نقطه P است با $\Delta\vec{F}$ نشان داده شود، این نیرو سه مؤلفه دارد. یک مؤلفه آن عمود بر سطح ΔA (ΔF_n) در راستای بردار نرمال $\hat{n}$ و دو مؤلفه دیگر مماس بر سطح ΔA $(\Delta F_{t_1}, \Delta F_{t_2})$ خواهد بود.

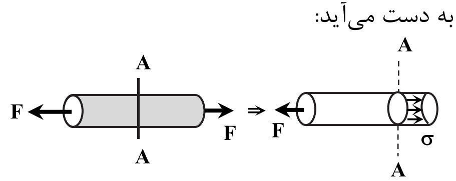
از تقسیم ΔF_n بر مساحت سطح مقطع ΔA کمیتی به نام تنش قائم (σ) و از تقسیم $\Delta F_{t_1}, \Delta F_{t_2}$ بر مساحت سطح مقطع ΔA نوع دیگری از تنش به دست می‌آید که به آن تنش برشی (τ) گفته می‌شود. لازم به ذکر است که با استفاده از مقادیر به دست آمده، مقادیر متوسط تنش را می‌توان به دست آورد.



تنش قائم (تنش نرمال)

تعریف تنش عمودی

به شدت نیروی عمودی سطحی یا نیروی عمود بر واحد سطح، تنش عمودی می‌گویند که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

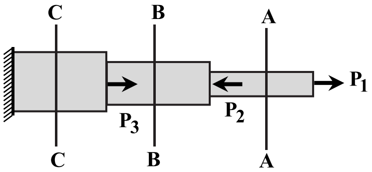


$$\boxed{\sigma = \frac{F}{A}}$$

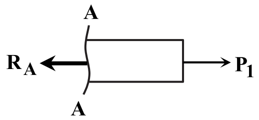
A مساحت سطح مقطع اولیه جسم است. لازم به ذکر است در صورتی که نیرو به مرکز سطح مقطع جسم وارد شود نیرو، محوری اما اگر نیرو به مرکز سطح مقطع وارد نشود نیرو، غیر محوری می‌باشد که برای محاسبه تنش ناشی از آن، در فصل‌های بعدی بحث می‌کنیم. همچنین رابطه بالا تنش عمودی متوسط در فاصله‌های دور از ناحیه‌ی اعمال بار متمرکز را نشان می‌دهد (چرا که تنش در مقاطع نزدیک به نقطه‌ی اعمال بار توزیعی غیریکنواخت دارد). ولی برای محاسبه‌ی تنش واقعی در یک نقطه، می‌توان حد تنش متوسط را وقتی سطح مقطع به سمت صفر میل می‌کند محاسبه نمود: $\sigma = \lim\limits_{\Delta A \to ۰} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$

طبق قرارداد، تنش‌های کششی را با علامت مثبت و تنش‌های فشاری را با علامت منفی نشان می‌دهند. واحد تنش در سیستم متریک نیوتن بر مترمربع $(\frac{N}{m^۲})$ یا پاسکال Pa و در سیستم اینچی $U.S$، پوند بر اینچ مربع $(\frac{lb}{in^۲})$ یا Psi می‌باشد.

F در رابطه $\sigma = \frac{F}{A}$ نیروی داخلی در مقطعی است که تنش در آن مورد نظر می‌باشد. برای یافتن نیروی داخلی در هر مقطع کافی است کـه مقطـع مـورد نظر را برش زده و از رابطه تعادل نیروها، نیروی وارده در مقطع برش‌خورده را به دست آورد. به عنوان مثال:

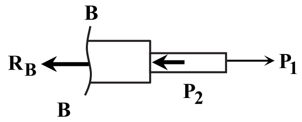


نیروی داخلی در برش $A-A$:



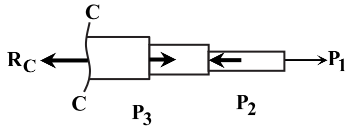
$$\Rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow P_1 - R_A = 0 \Rightarrow R_A = P_1$$

نیروی داخلی در برش $B-B$:



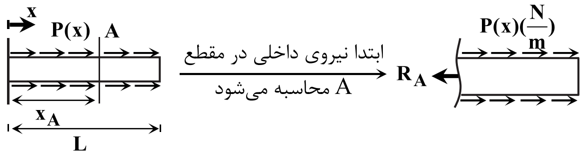
$$\Rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow P_1 - P_2 - R_B = 0 \Rightarrow R_B = P_1 - P_2$$

نیروی داخلی در برش $C-C$:



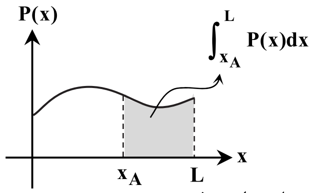
$$\Rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow P_1 - P_2 + P_3 - R_C = 0 \Rightarrow R_C = P_1 - P_2 + P_3$$

نکته۱: اگر به میله‌ای بار گسترده محوری وارد کنیم از رابطه انتگرالی برای محاسبه نیروی داخلی در هر سطح مقطع دلخواه از آن استفاده می‌شود:



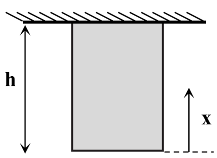
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_A = \int_{x_A}^{L} P(x)dx$$

اگر نمودار تغییرات $P(x)$ بر حسب x به صورت روبرو باشد، حاصـل انتگـرال $\int P(x)dx$ در واقـع سطح زیر منحنی در بازه مورد نظر بوده که برابر نیروی داخلی در سطح مقطع داخلی می‌باشد.



یادآوری: لازم به ذکر است که تنش کمیتی تانسوری و از مرتبه دو بوده و نباید به اشتباه آن را کمیت اسکالر یا برداری فرض نمود.

مثال۱: یک ستون تحت وزن خود آویزان است. تنش نرمال در $x = \frac{h}{۲}$ چقدر است؟ γ وزن مخصوص جنس ستون است.



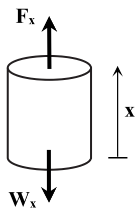
۱) $\sigma = \gamma h$

۲) $\sigma = \frac{3}{2}\gamma h$

۳) $\sigma = \frac{\gamma h}{2}$

۴) $\sigma = 0$

پاسخ: گزینه «۳» نیروی داخلی در هر مقطع دلخواه از میله باید وزن بخش پایینی میله را تحمل کند، بنابراین:



$$\sigma = \frac{F_x}{A} = \frac{W_x}{A} = \frac{mg}{A}$$

اما حجم بخش جداشده از میله برابر $V = Ax$ می‌باشد، بنابراین:

$$\sigma = \frac{\rho Vg}{A} = \frac{\rho Axg}{A} = \rho xg = \gamma x$$

طبق رابطه فوق، تنش قائم در هر مقطع از استوانه‌ای که تحت وزن خود آویزان است، با فاصله x نسبت خطی دارد اما مقدار تنش در $x = \frac{h}{2}$ برابر است با:

$$x = \frac{h}{2} \Rightarrow \sigma = \gamma \frac{h}{2}$$

تذکر۱: تنش ماکزیمم در میله فوق در تکیه‌گاه ایجاد شده که مقدار آن مساوی $\sigma_{max} = \frac{ql}{A}$ می‌باشد. این نوع بارگذاری را می‌توان مشابه میله‌ای در نظر گرفت که از سقف آویزان بوده و تحت اثر وزنش قرار گرفته است. در چنین حالتی اگر میله استوانه‌ای بوده و وزن مخصـوص مسـاوی γ باشـد، آنگـاه تغییرات تنش آن بر حسب متغیر x مساوی $\sigma = \gamma x$ و خطی بوده و حداکثر تنش آن در تکیه‌گاه ایجاد شده و برابر $\sigma_{max} = \gamma l$ می‌باشد.

مثال۲: کدام یک از عبارات زیر در مورد تنش صحیح است؟

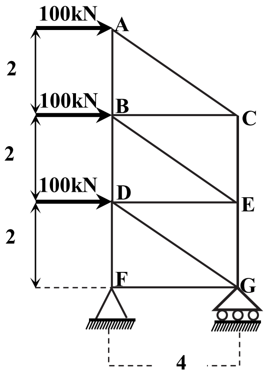
۱) تنش به ابعاد هندسی قطعه وابسته و مستقل از جنس و فرآیند ساخت می‌باشد.

۲) تنش به ابعاد هندسی، جنس و مقاومت قطعه و نیروهای اعمالی وابسته است.

۳) تنش از خواص ذاتی ماده است که به چگونگی توزیع نیروهای داخلی وابسته می‌باشد.

۴) تنش به ابعاد هندسی قطعه، جنس آن و نیروهای خارجی اعمال به قطعه وابسته است.

پاسخ: گزینه «۱» تنش مستقل از جنس و فرآیند ساخت می‌باشد و با توجه به رابطه $\sigma = \frac{F}{A}$ تنها به ابعاد هندسی و بارگذاری خارجی وابسته است.



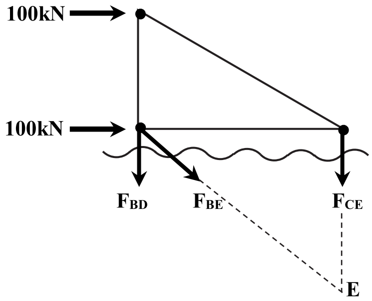
مثال۳: برای خرپای نشان داده شده اگر مساحت مقطع عضو BD، ۱۰۰۰ میلی‌متر مربع باشد، تنش عمودی در این عضو چند MPa است؟

۱) ۵۰

۲) ۱۰۰

۳) ۱۵۰

۴) ۲۰۰



پاسخ: گزینه «۳» برای تعیین تنش در عضو BD کافیست نیرو در عضو مورد نظر را به دست آوریم. از روش برش برای محاسبه آن استفاده می‌کنیم:

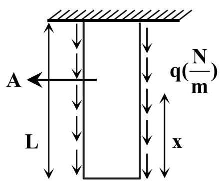
مطابق شکل خرپا، برشی افقی می‌زنیم و دیاگرام آزاد بخش فوقانی برش را رسم می‌کنیم. برش مورد نظر عضوهای BD، BE و CE را قطع می‌کند.

$$\sum M_E = ۰ \Rightarrow F_{BD} \times ۴ - ۱۰۰ \times ۲ - ۱۰۰ \times ۴ = ۰ \Rightarrow F_{BD} = ۱۵۰\,KN$$

$$\sigma_{BD} = \frac{F_{BD}}{A_{BD}} = \frac{۱۵۰۰۰۰N}{۱۰۰۰\,mm^۲} = ۱۵۰\,MPa$$

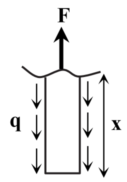
توجه کنید اگر در رابطه تنش $\sigma = \frac{F}{A}$، F بر حسب نیوتن و A بر حسب $mm^۲$ جایگزین شوند، واحد تنش MPa خواهد شد.

مثال۴: میله‌ای طبق شکل زیر در انتهای فوقانی خود از سقف آویزان بوده و در طول خود تحت بار گسترده یکنواخت q قرار گرفته است. تغییرات تنش در میله، در یک مقطع دلخواه از تیر به فاصله x از انتهای آن مساوی کدام یک از گزینه‌های زیر است؟



۱) $\frac{w}{۲A}x$　　۲) $\frac{q}{A}x$

۳) $\frac{q}{A}x^۲$　　۴) $\frac{q}{۲A}x^۲$

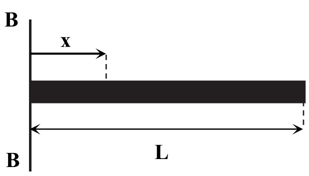


پاسخ: گزینه «۲» برای تعیین تنش قائم در میله، آن را به فاصله x از انتهایش برش می‌زنیم سپس دیاگرام آزاد بخش جداشده را رسم می‌کنیم. با توجه به اینکه بار وارد شده بر میله از نوع گسترده طولی است، لذا نیروی داخلی برابر حاصل‌ضرب بار گسترده در فاصله طولی اعمال بار گسترده می‌باشد.

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow F - \int q dx = ۰ \Rightarrow F = \int q dx = q\int_۰^x dx = qx$$

از طرفی تنش قائم مساوی است با: $\sigma = \frac{F}{A} = \frac{q}{A}x$

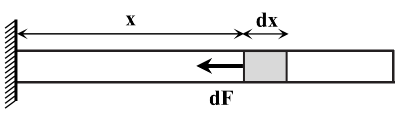
مثال۵: میله‌ای به جرم m، طول L، مساحت مقطع یکنواخت A با سرعت زاویه‌ای ω حول محور B – B می‌گردد. تنش در فاصله x از محور دوران کدام است؟ (مدول یانگ را E در نظر بگیرید.) (مهندسی مکانیک ماشین‌های کشاورزی ـ سراسری۸۶)



۱) $\frac{m\omega^۲}{۲A.L}(L^۲ - x^۲)$　　۲) $\frac{m\omega^۲}{A.L}(L^۲ - x^۲)$

۳) $\frac{\omega^۲}{۲A.L}(L^۲ - x^۲)$　　۴) $\frac{\omega^۲}{A.L}(L^۲ - x^۲)$

پاسخ: گزینه «۱» بر هر المان از میله یک نیروی جانب مرکز مطابق شکل وارد می‌شود. مقدار این نیرو برای یک المان به فاصله x از محور دوران برابر است با:



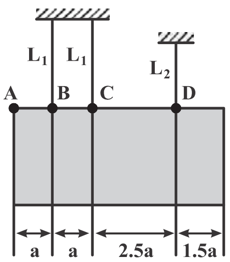
(شتاب جانب مرکز برابر $R\omega^۲$ می‌باشد)　$dF = -adm \Rightarrow dF = -dmx\omega^۲$

x در رابطه‌ی بالا همان شعاع دوران بوده که برابر فاصله‌ی المان تا محور دوران است.

با انتگرال‌گیری از این نیرو، نیروی داخلی در هر مقطع دلخواه به فاصله x از تکیه‌گاه به دست می‌آید.

$$F = \int_L^x -dm\,x\,\omega^۲ = \int_x^L \rho A\,dx.x\omega^۲ = \frac{\omega^۲\rho A}{۲}(L^۲ - x^۲)$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\rho\omega^۲}{۲}(L^۲ - x^۲) \xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در حجم میله ضرب می‌کنیم}} \sigma = \frac{\rho V\omega^۲}{۲V}(L^۲ - x^۲) \Rightarrow \sigma = \frac{m\omega^۲}{۲AL}(L^۲ - x^۲)$$

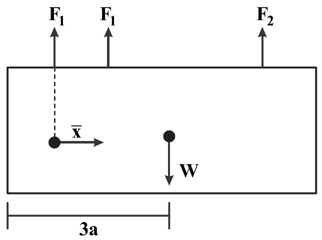


مثال ۲۶۷: تابلوی مستطیلی یکنواخت از سه سیم هم‌جنس و هم‌مقطع آویخته شده است. نسبت $\frac{L_۲}{L_۱}$ برای آنکه تابلو افقی بماند، کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۱۴۰۱)

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) ۱
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه «۳» برای آنکه تابلو افقی باقی بماند باید مرکز سختی بر مرکز ثقل تابلو منطبق باشد.

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i k_i}{\sum k_i}=\frac{k_۱x_۱+k_۲x_۲+k_۳x_۳}{k_۱+k_۲+k_۳}$$



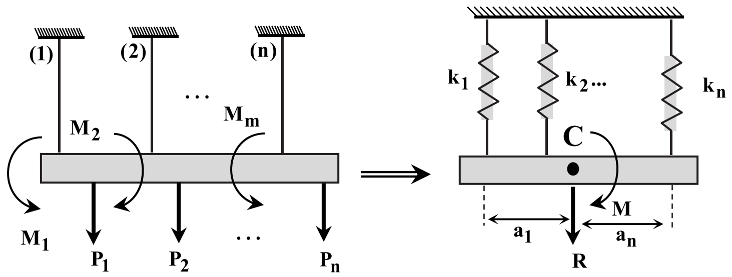
چون میله‌ها هم‌جنس هستند، می‌توان نوشت:

$$\bar{x}=\frac{\frac{AE}{L_۱}x_۱+\frac{AE}{L_۱}x_۲+\frac{AE}{L_۲}x_۳}{\frac{AE}{L_۱}+\frac{AE}{L_۱}+\frac{AE}{L_۲}}=\frac{۰+\frac{a}{L_۱}+\frac{۳/۵a}{L_۲}}{\frac{۱}{L_۱}+\frac{۱}{L_۱}+\frac{۱}{L_۲}}=\frac{\frac{a}{L_۱}+\frac{۳/۵a}{L_۲}}{\frac{۲}{L_۱}+\frac{۱}{L_۲}}$$

$$\Rightarrow ۳a=\frac{aL_۲+۳/۵aL_۱}{۲L_۲+L_۱}\Rightarrow ۶L_۲+۳L_۱=L_۲+۳/۵L_۱\Rightarrow \frac{L_۲}{L_۱}=\frac{۱}{۲}$$

تذکر ۱۴: اگر برخلاف تذکر (۱۳) برآیند نیروها و لنگرهای خارجی به مرکز سختی اثر نکند، در این صورت ابتدا باید نیروها و گشتاورهای خارجی را به مرکز سختی منتقل نموده، در این صورت در مرکز سختی (نقطه C) یک نیروی برآیند و یک گشتاور برآیند وجود خواهد داشت. در این حالت نیرویی که هر میله مطابق شکل تحمل خواهد کرد، مساوی است با:

$$F_j=\frac{Rk_j}{\sum_{i=۱}^{n}k_i}\pm\frac{a_jk_j}{\sum_{i=۱}^{n}k_ia_i^۲}M$$



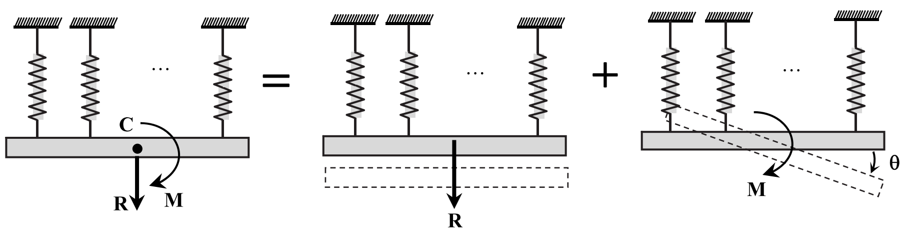
در رابطه فوق:

R: برآیند نیروهای خارجی وارد بر میله صلب k_i: سختی میله iام

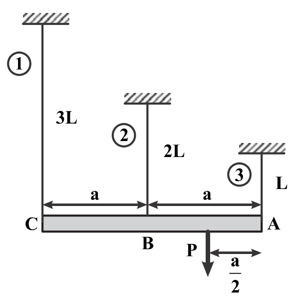
a_i: فاصله میله iام از نقطه C یا مرکز سختی M: مجموع گشتاور نیروها و لنگرهای خارجی حول مرکز سختی

در رابطه فوق با فرض اینکه لنگر برآیند M حول مرکز سختی ساعتگرد باشد، برای محاسبه نیرو در میله‌های سمت راست علامت جمله دوم مثبت در نظر گرفته شده و میله‌های سمت چپ مرکز سختی دارای علامت منفی است. در شکل فوق همان‌طور که اشاره شد، برآیند نیروها به مرکز سختی اعمال نشده و در ضمن گشتاور خارجی حول مرکز سختی مساوی صفر نمی‌باشد، بنابراین میله صلب به صورت افقی جابجا نشده و علاوه بر خیز به سمت پایین یک گردش ساعتگرد یا پادساعتگرد خواهد داشت.

به عبارت دیگر می‌توان گفت که میله صلب افقی تحت نیروی R خیزی یکسان به سمت پایین داشته و تحت لنگر M یک دوران خالص حول مرکز سختی خواهد داشت. بنابراین برای تعیین δ (خیز هر میله) و θ (دوران میله) می‌توان از روابط زیر استفاده نمود:



$$\boxed{\theta=\frac{M}{\sum_{i=۱}^{n}k_ia_i^۲}\ ;\ \delta_j=\frac{R}{\sum_{i=۱}^{n}k_i}\pm\frac{Ma_j}{\sum_{i=۱}^{n}k_ia_i^۲}}$$



مثال ۲۶۸: مطابق شکل مقابل، تیر صلب ABC با سه کابل مهار و بار P به فاصله $\frac{a}{۲}$ از A وارد شده است. سهم کابل ۱ از نیروی P چقدر است؟ (مکانیک بیوسیستم ـ سراسری ۱۴۰۲)

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۸}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون نیروی P بر مرکز سختی میله‌ها (فنرها) اعمال نشده است بنابراین سهم هریک از میله‌ها (فنرها) از نیروی خارجی مساوی است با:

$$F_j = \frac{Pk_j}{\sum_{i=1}^{3} K_i} + \frac{a_j k_j}{\sum_{i=1}^{3} k_i a_i^2} M$$

سهم میله (۱) از نیروی خارجی برابر است با:

$$F_1 = \frac{Pk_1}{k_1+k_2+k_3} \pm \frac{a_1k_1}{k_1a_1^2+k_2a_2^2+k_3a_3^2}\times M$$

a_i فاصله میله‌ها از مرکز سختی می‌باشد. فاصله مرکز سختی از نقطه C مساوی است با:

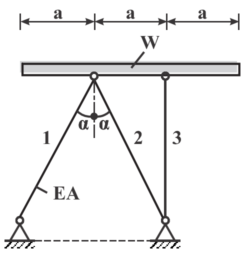
$$\bar{x} = \frac{x_1k_1+x_2k_2+x_3k_3}{k_1+k_2+k_3} = \frac{a\times\frac{AE}{2L}+2a\times\frac{AE}{L}}{\frac{AE}{3L}+\frac{AE}{2L}+\frac{AE}{L}} = \frac{15}{11}a$$

$$F_1 = \frac{P\times\frac{AE}{3L}}{\frac{AE}{3L}+\frac{AE}{2L}+\frac{AE}{L}} - \frac{\frac{15}{11}a\times\frac{AE}{3L}\times(1/5a-\frac{15}{11}a)P}{\frac{AE}{3L}\times(\frac{15}{11}a)^2+\frac{AE}{2L}(\frac{4}{11}a)^2+\frac{AE}{L}(\frac{7a}{11})^2}$$

چون میله (۱) سمت چپ مرکز سختی است بنابراین علامت جمله دوم منفی است.

$$\Rightarrow F_1 = P\times\frac{2}{11} - P\times\frac{5}{88} = \frac{11}{88}P = \frac{1}{8}P$$

مثال۲۶۹: یک تیر صلب با وزن W بر روی ۳ میلهٔ الاستیک با صلبیت EA مطابق شکل قرار داده می‌شود. زاویه شیب تیر صلب (B) نسبت به افق تحت اثر وزن تیر چقدر است؟ (مهندسی عمران ـ سازه ـ دکتری ۱۴۰۰)



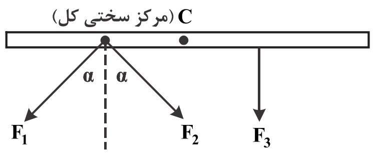
۱) $\frac{2\cos\alpha-1}{4\cos\alpha}.\frac{W\cot\alpha}{EA}$

۲) $\frac{2\cos^3\alpha-1}{4\cos^3\alpha}.\frac{W\tan\alpha}{EA}$

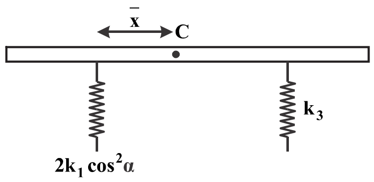
۳) $\frac{\cos^3\alpha-1}{2\cos^3\alpha}.\frac{W\cot\alpha}{EA}$

۴) $\frac{2\cos^3\alpha-1}{4\cos^3\alpha}.\frac{W\cot\alpha}{EA}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» زاویه میله صلب با افق توسط رابطه زیر تعیین می‌شود که در آن k_i سختی معادل هر میله و a_i فاصله هر میله از مرکز سختی کل می‌باشد.

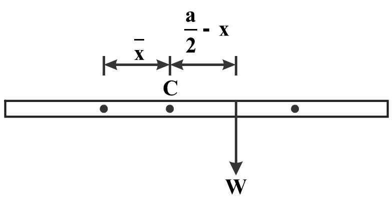


$$\theta = \frac{M}{\sum k_i a_i^2} = \frac{M}{k_1a_1^2+k_2a_2^2+k_3a_3}$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 \Rightarrow k_1 = k_2$$

$$\bar{x} = \frac{k_3 a}{2k_1\cos^2\alpha+k_3} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\frac{AE}{L}\times a}{2\frac{\frac{AE}{L}}{\cos\alpha}\cos^2\alpha+\frac{AE}{L}} = \frac{a}{1+2\cos^3\alpha}$$

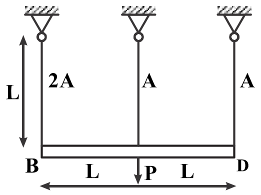


$$M = (\frac{a}{2}-\bar{x})W = (\frac{a}{2}-\frac{a}{1+2\cos^3\alpha})W = aW\frac{2\cos^3\alpha-1}{2(1+2\cos^3\alpha)}$$

$$\theta = aW\frac{aW\frac{2\cos^3\alpha-1}{1+2\cos^3\alpha}}{2\frac{AE}{L}\cos^3\alpha\times x^{-2}+\frac{AE}{L}(a-\bar{x})^2} \Rightarrow \theta = aW\times\frac{L}{AE}\times\frac{2\cos^3\alpha-1}{2(1+2\cos^3\alpha)}\left[\frac{1}{2\cos^3 ax^{-2}+(a-\bar{x})^2}\right]$$

پس از جایگذاری $\bar{x}$ در رابطه فوق و ساده‌سازی عبارت به دست آمده خواهیم داشت:

$$\theta = aW\times\frac{L}{AE}\times\frac{2\cos^3\alpha-1}{4a^2\cos^3\alpha} = \frac{W}{AE}\times\frac{L}{a}\frac{2\cos^3\alpha-1}{4\cos^3\alpha} \Rightarrow \theta = \frac{W\cot\alpha}{AE}\,\frac{2\cos^3\alpha-1}{4\cos^3\alpha}$$



مثال۲۷۰: در شکل مقابل، جنس و طول هر سه میله یکسان ولی سطح مقطع میلهٔ سمت چپ دو برابر دو میلهٔ دیگر است. نسبت تغییر مکان دو سر تیر صلب BD، چقدر است؟ ($\frac{\delta B}{\delta D}=?$)

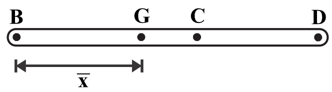
(مهندسی معدن ـ سراسری ۱۴۰۰)

۱) $\frac{1}{2}$　　۲) $\frac{1}{3}$　　۳) ۱　　۴) ۳

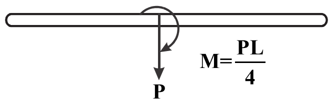
پاسخ: گزینه «۱» با توجه به اینکه مساحت مقطع میله‌ی سمت چپ دو برابر مساحت دیگر میله‌ها است، بنابراین سختی این میله دو برابر سختی دیگر میله‌ها می‌باشد.

$k_B = 2k_C = 2k_D = 2k$

و اما موقعیت مرکز سختی بر روی میله‌ی صلب افقی توسط رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:



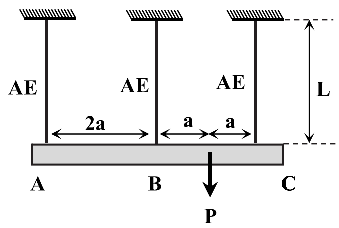
$$\bar{x}=\frac{x_1k_B+x_2k_C+x_3k_D}{k_B+k_C+k_D}\Rightarrow \bar{x}=\frac{0\times 2k+L\times k+2L\times k}{2k+k+k}=\frac{3Lk}{4k}=\frac{3}{4}L$$



اکنون نیروی P از نقطه‌ی C به نقطه‌ی G منتقل شده، در اثر این انتقال گشتاور M ایجاد می‌شود.

نسبت تغییر مکان دو سر تیر صلب را می‌توان از رابطه‌ی زیر محاسبه کرد.

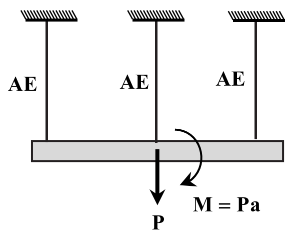
$$\frac{\delta_B}{\delta_D}=\frac{\frac{P}{\sum k_i}-\frac{Ma_B}{\sum k_ia_i^2}}{\frac{P}{\sum k_i}+\frac{Ma_D}{\sum k_ia_i^2}}=\frac{\frac{P}{4k}-\frac{\frac{PL}{4}\times\frac{3L}{4}}{2k\times(\frac{3L}{4})^2+k\times(\frac{L}{4})^2+k\times(\frac{5L}{4})^2}}{\frac{P}{4k}+\frac{\frac{PL}{4}\times\frac{5L}{4}}{2k\times(\frac{3L}{4})^2+k\times(\frac{L}{4})^2+k\times(\frac{5L}{4})^2}}=\frac{1}{2}$$



مثال۲۷۱: نیروی P مطابق شکل بر میله صلب ABC اعمال می‌شود، این میله توسط سه سیم مشابه نگه داشته شده است. نیرویی که هر یک از میله‌ها تحمل می‌کنند چه اندازه است؟

۱) $\frac{P}{12}$　　۲) $\frac{P}{6}$

۳) $\frac{7P}{12}$　　۴) $\frac{5P}{6}$



پاسخ: گزینه «۱» در این حالت چون سه سیم مشابه هم می‌باشند، بنابراین مرکز سختی میله‌ها در نقطه B واقع است. نیروی خارجی به نقطه B انتقال داده شده و گشتاور ناشی از آن محاسبه می‌شود.

$$F_A=\frac{Rk_A}{\sum_{i=1}^{n}k_i}-\frac{k_Aa_A}{\sum_{i=1}^{n}k_ia_i^2}M$$

اما $k_A=k_B=k_C=k$ و $a_A=a_1=2a$ و $a_3=2a$ و $a_2=0$ است، بنابراین:

$$F_A=\frac{Pk}{3k}-\frac{k\times 2a}{k(4a^2)+0+k(4a^2)}\times pa=\frac{P}{3}-\frac{P}{4}=\frac{P}{12}$$

چون میله A سمت چپ مرکز سختی واقع شده است، بنابراین علامت جمله دوم رابطه فوق در آن منفی می‌شود.

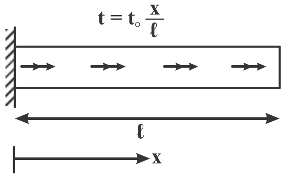
مثال۲۷۲: زاویه دوران میله صلب ABC در مثال قبلی چه اندازه است؟

۱) $\frac{PL}{12AEa}$　　۲) $\frac{PL}{8AEa}$　　۳) $\frac{PL}{24AEa}$　　۴) $\frac{Pl}{4AEa}$

پاسخ: گزینه «۲» در این مثال سختی میله‌ها برابر و مساوی $\frac{AE}{L}$ می‌باشد.

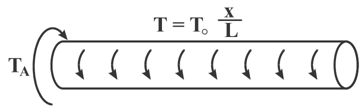
$$\theta=\frac{M}{\sum_{i=1}^{n}k_ia_i^2}=\frac{Pa}{k(4a^2)+0+k(4a^2)}=\frac{Pa}{8ka^2}=\frac{P}{8ka}=\frac{P}{8\frac{AE}{L}a}=\frac{PL}{8AEa}$$

مثال۴۸: تیر یک سرگیردار زیر با مدول برشی G و سطح مقطع دایره‌ای به شعاع R، تحت گشتاور گسترده پیچشی که شدت آن در واحد طول تیر با معادله $t = t_0 \frac{x}{\ell}$ توصیف می‌شود، قرار دارد. زاویه پیچش سر آزاد تیر چند برابر $\frac{t_0 \ell^2}{G\pi R^4}$ است؟ (مهندسی عمران ـ دکتری ۱۴۰۳)



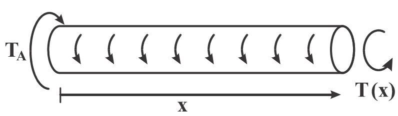
۱) ۱
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{4}{3}$
۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» در ابتدا گشتاور تکیه‌گاهی محاسبه می‌شود.



$$T_A = \int_0^L t\,dx = \int_0^L t_0 \frac{x}{L} dx \Rightarrow T_A = t_0 [\frac{x^2}{2L}]_0^L = \frac{t_0 L}{2}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow T(x) - T_A + \int_0^x t_0 \frac{x}{L} dx = 0 \Rightarrow T(x) = \frac{t_0 L}{2} - \frac{t_0}{L}\frac{x^2}{2}$$



$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)dx}{GJ} = \int_0^L [\frac{\frac{t_0 L}{2} - \frac{t_0 x^2}{2L}}{G \times \frac{\pi}{2} R^4}]dx = \frac{2}{\pi G R^4}[\frac{t_0 L}{2} \times L - \frac{t_0}{2L} \times \frac{L^3}{3}] = \frac{2}{3}\frac{t_0 L^2}{\pi G R^4}$$

انتقال قدرت توسط محورهای مدور

در صورتی که محوری گشتاور پیچشی T را در سرعت زاویه‌ای ω انتقال دهد، توان انتقال‌یافته توسط آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

توان (وات) = گشتاور پیچشی (نیوتن متر) × سرعت زاویه‌ای (رادیان بر ثانیه) $\Rightarrow P = T(N.m) \times \omega(\frac{rad}{s})$

توان به دست آمده از رابطه فوق بر حسب وات می‌باشد. همچنین در این رابطه می‌توان به جای سرعت زاویه‌ای، تعداد دوران در دقیقه n(rpm) را نمایش داد، در نتیجه داریم:

$$\boxed{P = T\frac{2\pi n}{60} = 2\pi f T}$$

$\frac{n}{60}$ مساوی f بوده که به بسامد یا فرکانس موسوم می‌باشد. در سیستم .U.S واحد توان بر حسب اسب بخار می‌باشد که هر اسب بخار معادل $550 \frac{ft.lb}{s}$ می‌باشد، در نتیجه داریم:

$$H(hp) = \frac{2\pi n T}{33000} \quad (n = rpm \ , \ T = lb.ft)$$

مثال۴۹: حداقل قطر مورد نیاز برای محوری که در سرعت ۱۰۰۰ rpm توان ۳۰kW را انتقال می‌دهد، کدام است؟
(تنش برشی مجاز محور ۲۰۰MPa) (۳ ≃ π)

۱) ۱۸ mm
۲) ۲۰ mm
۳) ۱۶ mm
۴) ۱۲ mm

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به توان انتقال یافته می‌توان ابتدا گشتاور پیچشی وارد بر محور را به دست آورد.

$$P = \frac{2\pi n T}{60} \Rightarrow T = \frac{30000 \times 60}{2\pi \times 1000} = 300 \ N.m \qquad \text{یا} \qquad T = 3 \times 10^5 \ N.mm$$

هم اکنون با توجه به گشتاور پیچشی به دست آمده و همچنین تنش برشی مجاز می‌توان حداقل قطر مورد نیاز برای محور را به دست آورد.

$$\tau_{max} = \frac{TR}{J} = \frac{16T}{\pi d^3} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi \times \tau_{max}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 3 \times 10^5 \ N.mm}{\pi \times 200}} \Rightarrow d = 20\,mm$$

مثال۵۰: برای انتقال حداکثر گشتاور پیچشی از موتوری به یک ژنراتور، کدام محور مناسب است؟ فرض کنید وزن و جنس مورد استفاده برای ساخت همه‌ی محورها، یکسان و ثابت باشد. (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۲)

۱) محور توپر با قطر $\frac{3d}{2}$ ۲) محور توخالی با قطر خارجی d ۳) محور توپر با قطر $\frac{d}{2}$ ۴) محور تو خالی با قطر خارجی $2d$

پاسخ: گزینه «۴» چون جنس محورها یکسان بوده، بنابراین حداکثر تنش برشی قابل تحمل توسط محورها نیز یکسان می‌باشد. از طرفی حداکثر گشتاور قابل انتقال توسط محورها با استفاده از رابطه مقابل محاسبه می‌شود:

$$\tau_{max} = \frac{TR}{J} \Rightarrow T_{max} = \tau_{max}\frac{J}{R}$$

با توجه به رابطه فوق T_{max} با ممان اینرسی پیچشی نسبت مستقیم دارد، از طرفی مقدار ممان اینرسی پیچشی متناسب با توان چهارم قطر محور می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که محورها با قطر خارجی بزرگ‌تر قابلیت انتقال گشتاور بزرگ‌تری را داشته و چون وزن محور ثابت است، پس ناگزیر محور باید توخالی باشد.

مثال۵۱: لوله‌ای فولادی با قطر بیرونی $2/5\,in$ برای انتقال $20\,(hp)$ در سرعت دورانی $3000\,rev/min$ به‌کار می‌رود. اگر قطر داخلی لوله $2/0\,in$ باشد، گشتاور انتقالی چند $lb.ft$ است؟ (مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۸)

۱) $\frac{110}{\pi}$ ۲) $\frac{220}{\pi}$ ۳) $\frac{550}{\pi}$ ۴) $\frac{3000}{\pi}$

پاسخ: گزینه «۱» مقدار گشتاور پیچشی T ناشی از توان P برابر است با:

$$P = T\omega \Rightarrow T = \frac{P}{\omega} = \frac{20\times 550}{\frac{2\pi}{60}\times 3000} = \frac{11000}{100\pi} = \frac{110}{\pi}\,lb-ft$$

مثال۵۲: برای انتقال توان از یک موتور به ملخ، از محوری با قطر ۴ سانتی‌متر و تنش تسلیم برشی $200\,Mpa$، استفاده شده است. برای رسیدن به ضریب اطمینان حداقل ۲، حداکثر توان قابل انتقال در ۳۰۰۰ دور بر دقیقه، چند کیلووات است؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۱۴۰۳)

۱) $40\pi^2$ ۲) 80π ۳) $160\pi^2$ ۴) 160π

پاسخ: گزینه «۱» حداکثر تنش برشی مجاز برابر است با:

$$\tau_{all} = \frac{\tau_y}{n} = \frac{200}{2} = 100\,MPa$$

از تنش برشی، لنگر پیچشی مجاز به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

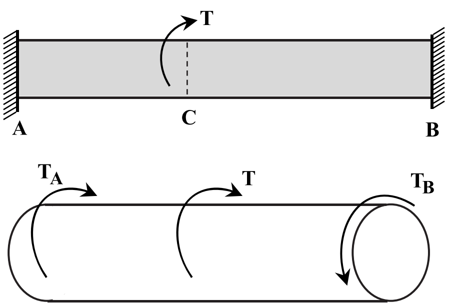
$$\tau_{all} = \frac{TR}{J} = \frac{16T_{max}}{\pi d^3} \Rightarrow T_{max} = \frac{\pi d^3}{16}\tau_{all} \Rightarrow T_{max} = \frac{\pi\times(40)^3}{16}\times 100 = 4\pi\times 10^5\,N.mm = 4\pi\times 10^2\,N.m$$

حداکثر توان قابل انتقال توسط موتور به محور ملخ برابر است با:

$$P_{max} = T_{max}\times\frac{2\pi n}{60} = 4\pi\times 10^2\times\frac{2\pi\times 3000}{60} = 4\pi^2\times 10^4\,W \Rightarrow P_{max} = 40\,\pi^2\,kW$$

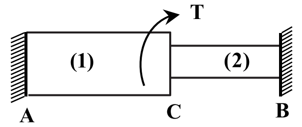
محورهای نامعین استاتیکی

در این محورها به دلیل وجود تکیه‌گاه‌های اضافی، معادلات تعادل به تنهایی برای تعیین گشتاورها کافی نمی‌باشند، لذا علاوه بر معادلات تعادل، معادلات سازگاری مربوط به تغییر مکان‌های پیچشی نیز باید در نظر گرفته شوند. لازم به ذکر است که مجهولات در معادلات تعادل، گشتاورهای داخلی و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی بوده و در معادلات سازگاری، زوایای پیچشی می‌باشند. ارتباط بین این دو مجهول (یعنی T و ϕ) در محدوده‌ی ارتجاعی را می‌توان از رابطه $\phi = \frac{TL}{GJ}$ به دست آورد.



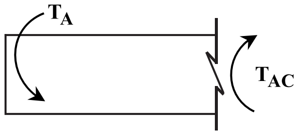
به عنوان مثال در شکل روبرو محور دو سر گیرداری نشان داده شده که تحت کوپل پیچشی خارجی قرار گرفته است. مجهولات مسئله، لنگرهای تکیه‌گاهی می‌باشند $(T_B\,,T_A)$. در حالی که فقط یک معادله تعادل $(T_A + T_B = T)$ وجود دارد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که تنها با استفاده از معادله تعادل، تعیین مجهولات تکیه‌گاهی مقدور نبوده، بلکه به معادلات دیگری نیاز می‌باشد. به این مسئله، یک مسئله نامعین استاتیکی گفته شده و برای حل آن نیاز به استفاده از معادله سازگاری می‌باشد. معادله سازگاری براساس تغییر شکل‌های سازه نوشته می‌شود. در مسائل نامعین استاتیکی در پیچش، معادله سازگاری براساس زاویه پیچش بیان می‌گردد.

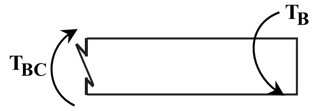
همانند فصل گذشته دو روش سختی و روش نیرو یا انعطاف‌پذیری برای حل این‌گونه مسائل وجود دارند. انتخاب روش مناسب که دارای کوتاه‌ترین راه‌حل باشد با تمرین و مهارت دانشجو ارتباط زیادی دارد.



در شکل روبه‌رو یک محور مرکب نشان داده شده که از دو طرف توسط تکیه‌گاه‌های صلب، مقید شده است. برای تعیین مجهولات تکیه‌گاهی می‌توان از معادل‌سازی محور مرکب با دو فنر موازی استفاده کرد، چرا که زاویه پیچش محورهای (۱) و (۲) در مقطع C با یکدیگر برابر می‌باشند که این خود، ویژگی اساسی فنرهای موازی است.

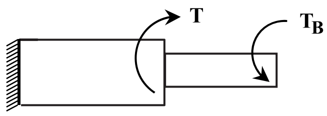
در این حالت سهم هر محور از لنگر پیچشی خارجی با سختی آن محور متناسب است. به عنوان مثال:





$$T_A = T_{AC} = \frac{k_{AC}}{k_{eq}} \times T \Rightarrow T_A = \frac{k_{AC}}{k_{AC} + k_{BC}} \times T$$

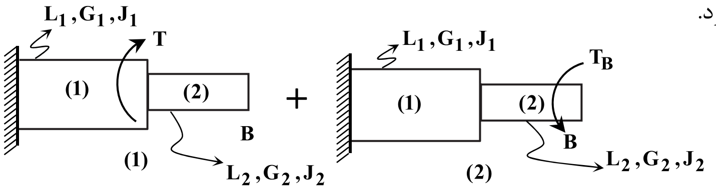
$$T_B = T_{BC} = \frac{k_{BC}}{k_{eq}} \times T \Rightarrow T_B = \frac{k_{BC}}{k_{AC} + k_{BC}} \times T$$



از طرف دیگر اگر بخواهیم محور مرکب فوق را توسط روش نیرو حل نماییم، ابتدا باید یکی از تکیه‌گاه‌ها (مانند تکیه‌گاه B) را برداشته به جای آن یک لنگر تکیه‌گاهی T_B قرار داده شود. چون مقطع B به تکیه‌گاه صلب متصل است، بنابراین باید زاویه پیچش این مقطع تحت اثر لنگرهای پیچشی T و T_B برابر صفر باشد.

با توجه به این نکته و استفاده از اصل جمع آثار می‌توان زاویه پیچش مقطع B را که ناشی از لنگرهای T و T_B است، محاسبه نمود. سپس مجموع آن‌ها را با حفظ جهت قراردادی مثبت مساوی صفر قرار داد. با نوشتن معادله مذکور، می‌توان مجهول مسئله یعنی T_B را به دست آورد و سپس با استفاده از معادله تعادل، مجهول دیگر مسئله یعنی T_A را نیز تعیین نمود.

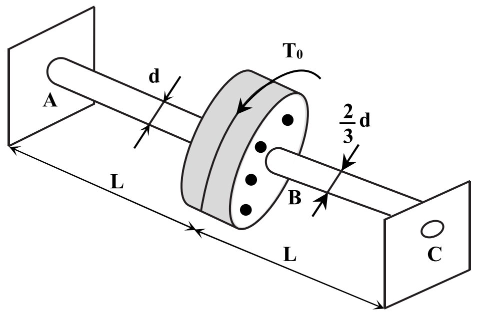
روش جمع آثار :



$+\curvearrowleft \phi_B = ۰ \Rightarrow \phi_B = (\phi_B)_{(1)} + (\phi)_{(۲)} = ۰ \Rightarrow \frac{TL_۱}{G_۱J_۱} + (-\frac{T_B L_۲}{G_۲J_۲} - \frac{T_B L_۱}{G_۱J_۱}) = ۰ \Rightarrow$ T_B براساس T تعیین می‌شود.

معادله تعادل: $T_A + T_B = T \Rightarrow$ T_A براساس T تعیین می‌شود.

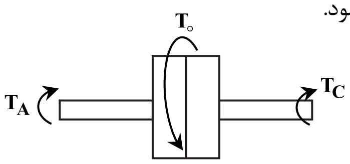
مثال۵۳: دو شفت فولادی مطابق شکل توسط دو فلنج کوپل شده‌اند، در صورتی که گشتاور خارجی $T_۰$ بر فلنج‌ها اعمال شود، نسبت گشتاور عکس‌العمل در تکیه‌گاه A به گشتاور خارجی برابر کدام گزینه است؟ ($\frac{T_A}{T_۰}$)



۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۱۶}{۸۱}$
۳) $\frac{۹۷}{۸۱}$
۴) $\frac{۸۱}{۹۷}$

پاسخ: گزینه «۴»

روش اول: مسئله از نوع نامعین استاتیکی است چرا که دو مجهول تکیه‌گاهی T_C, T_A داشته در حالی‌که یک معادله تعادل در اختیار می‌باشد. بنابراین برای حل این مسئله باید علاوه بر معادله تعادل از معادله سازگاری که براساس زاویه پیچش نوشته می‌شود نیز استفاده نمود.

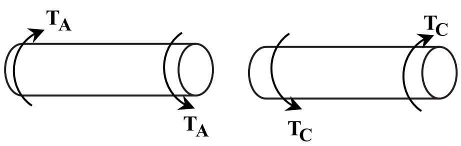


معادله تعادل : $T_A + T_C = T_۰$ (۱)

چون مقطع B بین دو محور مشترک می‌باشد و اتصال دو نیمه کوپلینگ از نوع صلب می‌باشد، در نتیجه زوایای پیچش دو نیمه فلنج مساوی است.

معادله سازگاری : $\phi_{B/A} = \phi_{B/C}$ (۲)

$$(۲) \Rightarrow \frac{T_A L}{G\frac{\pi}{۳۲}d^۴} = \frac{T_C L}{G\frac{\pi}{۳۲}(\frac{۲}{۳}d)^۴} \Rightarrow \frac{T_C}{T_A} = (\frac{۲}{۳})^۴ = \frac{۱۶}{۸۱} \Rightarrow T_C = T_A \times \frac{۱۶}{۸۱} \qquad (۳)$$

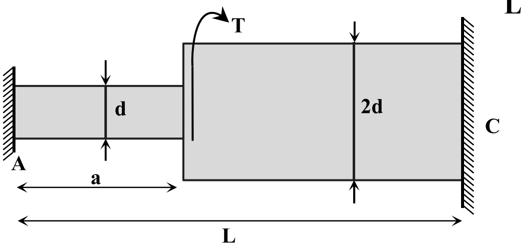


$$(۳), (۱) \Rightarrow T_A + T_C = T_۰ \Rightarrow T_A + T_A\frac{۱۶}{۸۱} = T_۰ \Rightarrow \frac{T_A}{T_۰} = \frac{۱}{۱+\frac{۱۶}{۸۱}} = \frac{۸۱}{۹۷}$$

روش دوم: از معادل‌سازی فنرهای موازی می‌توان استفاده نمود (دو میله مانند دو فنر پیچشی موازی می‌باشند).

$$T_A=\frac{k_A}{k_{eq}}.T_\circ=\frac{k_A}{k_A+k_C}T_\circ=\frac{\dfrac{G(\frac{\pi}{۳۲}d^۴)}{L}}{\dfrac{G(\frac{\pi}{۳۲}d^۴)}{L}+\dfrac{G(\frac{\pi}{۳۲}(\frac{۲}{۳}d^۴))}{L}}T_\circ=\frac{۱}{۱+(\frac{۲}{۳})^۴}T_\circ\Rightarrow T_A=\frac{۸۱}{۹۷}T_\circ$$

مثال۵۴: میله‌ای با قطر d در فاصله AB و ۲d در فاصله BC در دو نقطه انتهایی به تکیه‌گاه‌های صلبی جوش شــده اسـت و در نقطــه‌ی B تحـت گشتاور پیچشی T قرار گرفته است. برای اینکه دو تکیه‌گاه گشتاور مساوی تحمل کنند نسبت $\frac{a}{L}$ چقدر است؟



۱) $\frac{۱}{۱۷}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$

۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه «۱» **روش اول:** مقطع B بین دو محور مشترک بوده در نتیجه زاویــه پـیچش دو محـور در مقطـع B برابـر مـی‌باشـد. بنـابراین رابطـه سازگاری بین دو میله به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\phi_{B/A}=\phi_{B/C}\Rightarrow\frac{T_A a}{G\frac{\pi}{۳۲}d^۴}=\frac{T_C(L-a)}{G\frac{\pi}{۳۲}((۲d)^۴)}\Rightarrow\frac{T_A a}{۱}=\frac{T_C(L-a)}{۱۶}\xrightarrow[]{T_A=T_C\ \text{طبق فرض مسئله}}۱۶a=L-a\Rightarrow۱۷a=L\Rightarrow\frac{a}{L}=\frac{۱}{۱۷}$$

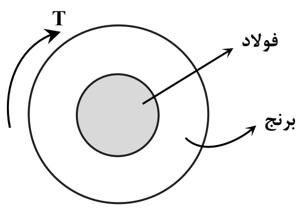
روش دوم: اگر میله‌ها را با فنر، معادل نماییم گشتاور هر میله بر حسب سختی فنرها به این صورت خواهد بود (دو میله مانند دو فنر موازی رفتار می‌کنند):

$$\left.\begin{aligned}T_A&=\frac{k_A}{k_A+k_C}T\\T_C&=\frac{k_C}{k_A+k_C}T\end{aligned}\right\}\xrightarrow[]{T_A=T_C\ \text{طبق فرض مسئله}}\frac{k_A T}{k_A+k_C}=\frac{k_C T}{k_A+k_C}\Rightarrow k_A=k_C$$

$$\Rightarrow\frac{G(\frac{\pi}{۳۲}d^۴)}{a}=\frac{G\frac{\pi}{۳۲}(۲d)^۴}{L-a}\Rightarrow\frac{۱}{a}=\frac{۱۶}{L-a}\Rightarrow L-a=۱۶a\Rightarrow L=۱۷a\Rightarrow\frac{a}{L}=\frac{۱}{۱۷}$$

مثال۵۵: یک میله فولادی ۲ متری به قطر $d_۱$ ، در داخل یک لوله توخالی برنجی به قطر خارجی $d_۲$ جا زده شده است. نسبت $\frac{d_۲}{d_۱}$ بـرای اینکــه در صورت اعمال گشتاور پیچشی به مجموعه، میله و لوله گشتاورهای یکسانی تحمل کنند کدام است؟

(مدول برشی G برای فولاد و برنج به ترتیب ۸۰ و ۴۰ مگاپاسکال می‌باشد)



۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt[۴]{۳}$

۳) $\sqrt[۴]{۳}$ ۴) ۳

پاسخ : گزینه «۳» چون در صورت مسئله اشاره شده که میله فولادی در داخل لوله برنجی جا زده شده است، بنابراین زاویه پیچش آن‌ها یکسان است:

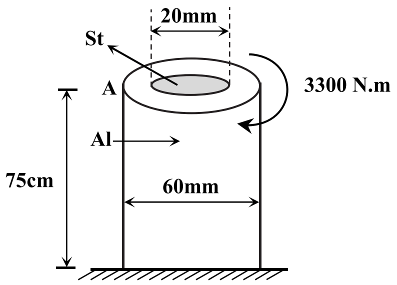
$$\phi_۱\text{زاویه پیچش محور فولادی}=\text{زاویه پیچش لوله برنجی}\ \phi_۲\Rightarrow\frac{T_۱L}{۸۰\times\frac{\pi}{۳۲}d_۱^۴}=\frac{T_۲L}{۴۰\times\frac{\pi}{۳۲}\times(d_۲^۴-d_۱^۴)}\Rightarrow\frac{T_۱}{۲d_۱^۴}=\frac{T_۲}{d_۲^۴-d_۱^۴}\Rightarrow\frac{d_۲^۴-d_۱^۴}{d_۱^۴}=۲\frac{T_۲}{T_۱}$$

از طرفی طبق فرض مسئله $T_۱=T_۲$ در نتیجه داریم:

$$\frac{d_۲^۴-d_۱^۴}{d_۱^۴}=۲\Rightarrow(\frac{d_۲}{d_۱})^۴-۱=۲\Rightarrow\frac{d_۲}{d_۱}=\sqrt[۴]{۳}$$

روش دیگر، مساوی قرار دادن سختی فنرهای معادل دو میله است که همین نتیجه را خواهد داد.

مثال ۵۶: میله‌ی فولادی مطابق شکل در داخل لوله آلومینیومی به طور محکم جا زده شده است. زاویه پیچش میله مرکب در مقطع A برابر کدام گزینه است؟ $(G_{st} = ۶۲/۵\ GPa\ ,\ G_{AL} = ۲۵\ GPa)$ $(\pi \simeq ۳)$



۱) $۲/۶^{\circ}$

۲) $۴/۸^{\circ}$

۳) $۱/۲^{\circ}$

۴) $۲/۴^{\circ}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» **روش اول:** چون دو میله در داخل هم به طور محکم جا زده شده‌اند، بنابراین زوایای پیچش انتهای دو محور با یکدیگر مساوی می‌باشد.

$$\text{رابطه سازگاری}: (\phi_A)_{AL} = (\phi_A)_{St} \Rightarrow \frac{T_{AL}L}{G_{AL}J_{AL}} = \frac{T_{St}L}{G_{St}J_{St}} \Rightarrow \frac{T_{AL}}{T_{St}} = \frac{۲۵\times\frac{\pi}{۳۲}(۶۰^۴-۲۰^۴)}{۶۲/۵\times\frac{\pi}{۳۲}(۲۰^۴)} = ۳۲ \qquad (۱)$$

$$\text{رابطه تعادل} \Rightarrow T_{AL}+T_{St} = ۳۳۰۰\ N.m \overset{(۱)}{\Rightarrow} ۳۲\ T_{St}+T_{St} = ۳۳۰۰ \Rightarrow T_{St} = ۱۰۰\ \ N.m$$

$$\Rightarrow \phi_A = \frac{T_{St}L}{G_{St}J_{St}} = \frac{(۱۰۰\times۱۰^۳)\times۷۵۰}{(۶۲/۵\times۱۰^۳)\times\frac{\pi}{۳۲}\times۲۰^۴} = \frac{۲}{۲۵}rad\times\frac{۱۸۰}{\pi} = \frac{۲}{۲۵}\times۶۰ = ۴/۸^{\circ}$$

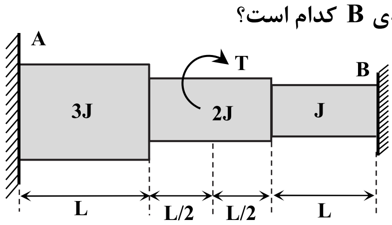
روش دوم: دو محور فولادی و آلومینیومی را به دلیل مساوی بودن زوایای پیچش انتهایشان می‌توان مانند دو فنر موازی در نظر گرفته و زاویه پیچش کل محور را توسط رابطه مقابل محاسبه کرد:

$$\phi = \frac{T}{k_{eq.}} = \frac{T}{k_۱+k_۲} = \frac{T}{k_{St}+k_{AL}} = \frac{T}{\frac{G_{St}J_{St}}{L_{St}}+\frac{G_{AL}J_{AL}}{L_{AL}}} \Rightarrow \phi = \frac{TL}{G_{St}J_{St}+G_{AL}J_{AL}}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{(۳۳۰۰\times۱۰^۳\ N.mm)\times۷۵۰\,mm}{(۶۲/۵\times۱۰^۳\ MPa)\times\frac{\pi}{۳۲}\times۲۰^۴\ mm^۴+(۲۵\times۱۰^۳\ MPa)\times\frac{\pi}{۳۲}(۶۰^۴-۲۰^۴)mm^۴}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{۲}{۲۵}rad\times\frac{۱۸۰}{\pi} = \frac{۲}{۲۵}\times۶۰ = ۴/۸^{\circ}$$

مثال ۵۷: در وسط محور دو سرگیردار شکل زیر، گشتاور T اعمال می‌شود، گشتاور عکس‌العمل در نقطه‌ی B کدام است؟



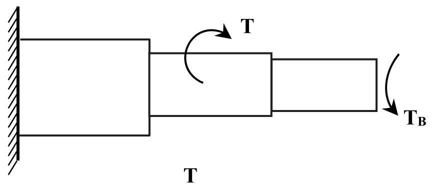
۱) $\frac{۷}{۲۲}T$

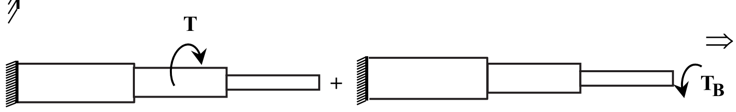
۲) $\frac{۵}{۲۲}T$

۳) $\frac{۷}{۱۴}T$

۴) $\frac{۵}{۱۴}T$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مسئله از نوع نامعین استاتیکی است، برای حل آن بهتر است از روش نیرو استفاده نمود، به این صورت که ابتدا تکیه‌گاه B را برداشته به جای آن لنگر تکیه‌گاهی T_B گذاشته شود، چون تکیه‌گاه B صلب است در نتیجه زاویه پیچش مقطع B مساوی صفر است. اکنون با استفاده از روش جمع آثار، زاویه پیچش در مقطع B ناشی از دو لنگر پیچشی T_B و T محاسبه شده و نتایج آن با هم جمع می‌گردد، سپس با مساوی صفر قرار دادن زاویه پیچش مقطع B، T_B به دست خواهد آمد.

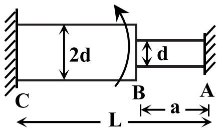




$$\phi_B = \frac{TL}{۳GJ}+\frac{T\frac{L}{۲}}{۲GJ}-\frac{T_BL}{۳GJ}-\frac{T_BL}{۲GJ}-\frac{T_BL}{GJ} = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{T}{۳}+\frac{T}{۴} = \frac{T_B}{۳}+\frac{T_B}{۲}+T_B \Rightarrow \frac{۷T}{۱۲} = \frac{۱۱T_B}{۶} \Rightarrow T_B = \frac{۷}{۲۲}T$$

مثال۵۸: محور ABC با قطر d در فاصله‌ی AB و ۲d در فاصله‌ی BC در دو انتها به تکیه‌گاه صلبی جوش شده، و در نقطه‌ی B تحت گشتاور پیچشی T قرار گرفته است. برای این که دو تکیه‌گاه گشتاور مساوی تحمل کنند، نسبت $\frac{a}{L}$ چقدر باید باشد؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۲)



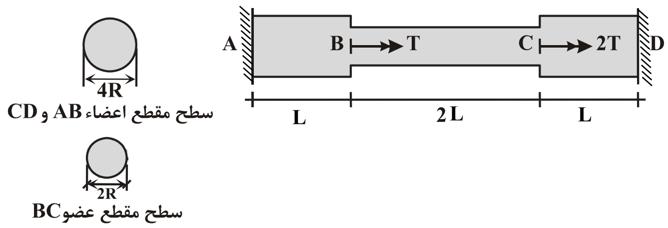
۱) $\frac{۱}{۱۷}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۸}$
۴) $\frac{۱}{۱۶}$

پاسخ: گزینه «۱» محورهای AB و BC مانند دو فنر موازی پیچشی رفتار می‌کنند که لنگر تحمل شده توسط هر یک از این محورها با سختی آن‌ها نسبت مستقیم دارد. بنابراین داریم:

$$\frac{T_A}{T_C}=\frac{k_{AB}}{k_{BC}}=۱ \Rightarrow \frac{\frac{GJ_{AB}}{L_{AB}}}{\frac{GJ_{BC}}{L_{BC}}}=۱ \Rightarrow \frac{J_{AB}}{J_{BC}}\,\frac{L_{BC}}{L_{AB}}=۱ \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{۳۲}d^۴}{\frac{\pi}{۳۲}(۲d)^۴}\times\frac{L-a}{a}=۱$$

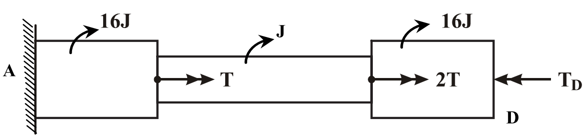
$$\Rightarrow \frac{۱}{۱۶}\,\frac{L-a}{a}=۱ \Rightarrow \frac{L-a}{a}=۱۶ \Rightarrow \frac{L}{a}-۱=۱۶ \Rightarrow \frac{L}{a}=۱۷ \Rightarrow \frac{a}{L}=\frac{۱}{۱۷}$$

مثال۵۹: عضو زیر، با مقطع دایره‌ای متغیر مطابق شکل تحت دو کوپل پیچشی متمرکز T و ۲T در نقاط B و C قرار گرفته است. عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در نقاط A و D کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۹۲)



۱) $T_A=\frac{۶۵}{۳۴}T \ ,\ T_D=\frac{۳۷}{۳۴}T$
۲) $T_A=\frac{۳۷}{۳۴}T \ ,\ T_D=\frac{۳۵}{۳۴}T$
۳) $T_A=\frac{۳۵}{۳۴}T \ ,\ T_D=\frac{۶۷}{۳۴}T$
۴) $T_A=\frac{۶۷}{۳۴}T \ ,\ T_D=\frac{۳۵}{۳۴}T$

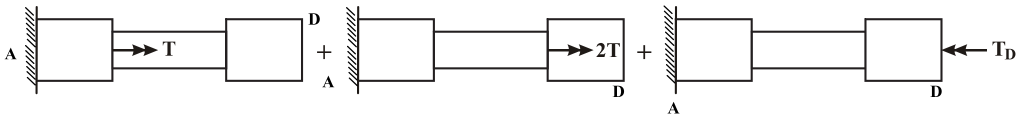
پاسخ: گزینه «۳» لنگر خارجی ۲T به تکیه‌گاه D نزدیک‌تر است، بنابراین گشتاور تکیه‌گاهی D باید بزرگ‌تر از گشتاور تکیه‌گاهی A باشد. با در نظر گرفتن این نکته می‌توان نتیجه گرفت که گزینه (۳) صحیح می‌باشد. اما حل مسئله به روش تشریحی به این صورت است که یکی از تکیه‌گاه‌ها مانند تکیه‌گاه D را برداشته و به جای آن عکس‌العمل تکیه‌گاهی T_D قرار می‌دهیم. سپس زاویه‌ی پیچش مقطع D ناشی از لنگرهای خارجی T و ۲T و گشتاور تکیه‌گاهی T_D محاسبه شده و نتیجه آن مساوی صفر قرار داده می‌شود (زاویه‌ی پیچش مقطع متصل به تکیه‌گاه D برابر صفر است). با حل رابطه به‌دست آمده، لنگر تکیه‌گاهی T_D تعیین می‌شود.



$$J_{BC}=\frac{\pi}{۲}R^۴=J$$

$$J_{AB}=J_{CD}=\frac{\pi}{۲}(۲R)^۴=۱۶J$$

زاویه‌ی پیچش مقطع D را می‌توان با استفاده از روش جمع آثار محاسبه نمود.



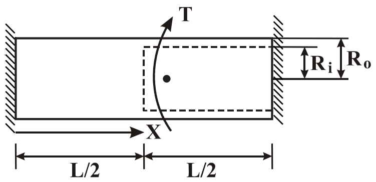
$$\phi_D=[\frac{TL}{۱۶GJ}]+[\frac{۲TL}{۱۶GJ}+\frac{۲T(۲L)}{GJ}]-[\frac{T_DL}{۱۶GJ}+\frac{T_D(۲L)}{GJ}+\frac{T_DL}{۱۶GJ}]=۰ \Rightarrow \frac{TL}{۱۶GJ}+\frac{۲TL}{۱۶GJ}+\frac{۴TL}{GJ}=\frac{T_DL}{۱۶GJ}+\frac{۲T_DL}{GJ}+\frac{T_DL}{۱۶GJ}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{۱۶}+\frac{T}{۸}+۴T=\frac{T_D}{۱۶}+۲T_D+\frac{T_D}{۱۶} \Rightarrow ۶۷T=۳۴T_D \Rightarrow T_D=\frac{۶۷}{۳۴}T$$

از طرفی، طبق رابطه‌ی تعادل گشتاور می‌توان نوشت:

$$\sum T=۰ \Rightarrow T_A+T_D-T-۲T=۰ \Rightarrow T_A=۳T-\frac{۶۷}{۳۴}T \Rightarrow T_A=\frac{۳۵}{۳۴}T$$

مثال۶۰: **محور مدوری به شعاع R_o در نیمی از طول خود دارای سوراخی هم‌محور به شعاع R_i است، دو انتهای این محور مطابق شکل گیردار بوده و در فاصله‌ی $x > L/۲$ از انتهای چپ آن لنگر پیچشی متمرکز T وارد شده است. مقدار x برای اینکه لنگرهای عکس‌العمل در دو انتهای تیر برابر باشند، چقدر است؟** (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۹۲)



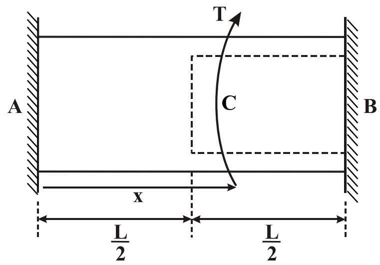
۱) $x = L[۲+(\frac{R_i}{R_o})^۴]$

۲) $x = \frac{L}{۲}[۳+(\frac{R_i}{R_o})^۴]$

۳) $x = \frac{L}{۴}[۲+(\frac{R_i}{R_o})^۴]$

۴) $x = \frac{L}{۴}[۲+(\frac{R_o}{R_i})^۴]$

پاسخ: گزینه «۳» اگر لنگر خارجی بر مقطع C اعمال شود، آنگاه زاویه پیچش مقطع C نسبت به تکیه‌گاه‌های A و B با هم برابر خواهند بود.



$$۱)\ \phi_{C/A} = \phi_{C/B} \Rightarrow \frac{T_A \frac{L}{۲}}{GJ_۱} + \frac{T_A(x-\frac{L}{۲})}{GJ_۲} = \frac{T_B(L-x)}{GJ_۲}$$

در رابطه فوق، $J_۱$ و $J_۲$ به ترتیب ممان اینرسی پیچشی مقاطع توپر و توخالی است.

$$۲)\ J_۱ = \frac{\pi}{۳۲}d_۲^۴ = \frac{\pi}{۲}R_o^۴ \qquad ۳)\ \frac{\pi}{۳۲}d_۲^۴ - \frac{\pi}{۳۲}d_۱^۴ = \frac{\pi}{۲}(R_o^۴ - R_i^۴)$$

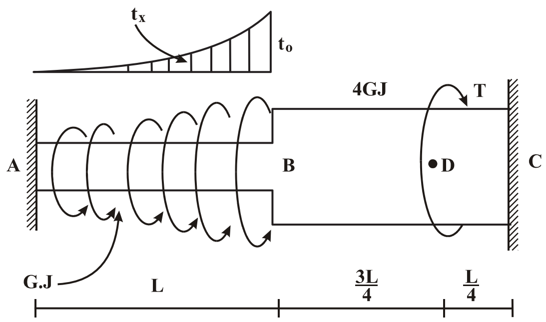
$$(۱)\ ,\ (۲)\ ,\ (۳) \Rightarrow \frac{T_A \frac{L}{۲}}{G\frac{\pi}{۲}R_o^۴} + \frac{T_A(x-\frac{L}{۲})}{G\frac{\pi}{۲}(R_o^۴-R_i^۴)} = \frac{T_B(L-x)}{G\frac{\pi}{۲}(R_o^۴-R_i^۴)}$$

پس از ساده‌سازی عبارت فوق و با توجه به فرض مسئله $T_A = T_B$ خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{L}{۲}}{R_o^۴} + \frac{x-\frac{L}{۲}}{R_o^۴-R_i^۴} = \frac{L-x}{R_o^۴-R_i^۴} \Rightarrow x(\frac{۲}{R_o^۴-R_i^۴}) = \frac{L}{R_o^۴-R_i^۴} + \frac{\frac{L}{۲}}{R_o^۴-R_i^۴} - \frac{\frac{L}{۲}}{R_o^۴}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\frac{۳\frac{L}{۲}}{R_o^۴-R_i^۴} - \frac{\frac{L}{۲}}{R_o^۴}}{\frac{۲}{R_o^۴-R_i^۴}} = \frac{L}{۲}\frac{\frac{۳R_o^۴-R_o^۴+R_i^۴}{R_o^۴(R_o^۴-R_i^۴)}}{\frac{۲}{R_o^۴-R_i^۴}} = \frac{۲R_o^۴+R_i^۴}{۲R_o^۴}\frac{L}{۲} \Rightarrow x = \frac{L}{۴}\left[۲+(\frac{R_i}{R_o})^۴\right]$$

مثال۶۱: **عضو ABC تحت بارگذاری پیچشی مطابق شکل قرار می‌گیرد. مقدار T را طوری تعیین کنید که عکس‌العمل A صفر شود؟** (دکتری ۹۴)



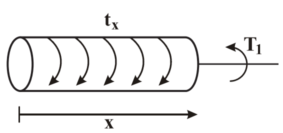
۱) $\frac{Lt_o}{۳}$

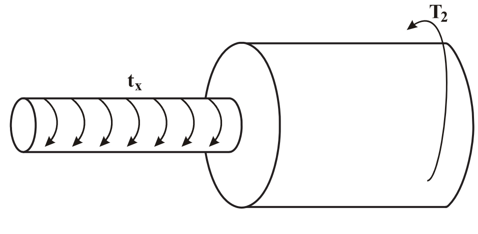
۲) $\frac{۲Lt_o}{۳}$

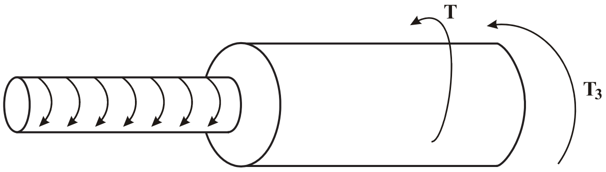
۳) $\frac{Lt_o}{۴}$

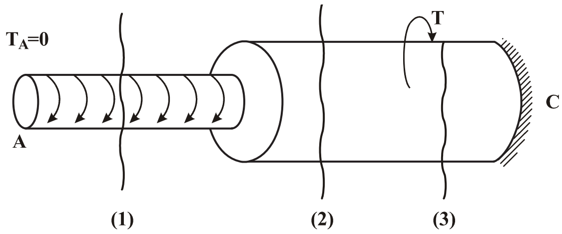
۴) $\frac{Lt_o}{۵}$

پاسخ: هیچ‌یک از گزینه‌ها صحیح نیست. مطابق شکل در هر بخش برش جداگانه زده و لنگر پیچشی داخلی در هر مقطع محاسبه می‌شود، سپس با جمع کردن زاویه‌های پیچش و مساوی صفر قرار دادن مجموعه آن‌ها لنگر پیچشی T تعیین می‌شود.









$$T_۱=\int_۰^x t_x dx=\int_۰^x (\frac{x}{L})^۲ t_۰ dx=\frac{t_۰}{۳L^۲}x^۳ \quad , \quad T_۲=\int_۰^L t_x dx=\int_۰^L (\frac{x}{L})^۲ t_۰ dx=\frac{t_۰L}{۳} \quad , \quad T_۳=\frac{t_۰L}{۳}-T$$

اما چون مقاطع A و C متصل به تکیه‌گاه صلب هستند هیچ‌گونه دورانی نخواهند داشت. بنابراین داریم:

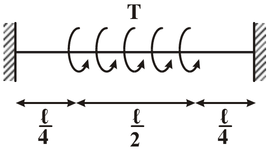
$$\phi_{\frac{A}{C}}=۰ \Rightarrow \phi_A-\phi_C=۰$$

$$\Rightarrow \int_۰^L \frac{t_۰x^۳}{۳L^۲GJ}+\frac{T_۲(\frac{۳L}{۴})}{۴GJ}+\frac{(\frac{t_۰L}{۳}-T)\frac{L}{۴}}{۴GJ}=۰ \Rightarrow ۴\times\frac{t_۰}{۳L^۲}\times\frac{L^۴}{۴}+\frac{t_۰L}{۳}\times\frac{۳L}{۴}+\frac{t_۰L}{۳}\times\frac{L}{۴}=\frac{TL}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{t_۰L^۲}{۳}+\frac{t_۰L^۲}{۴}+\frac{t_۰L^۲}{۱۲}=\frac{TL}{۴} \Rightarrow T=t_۰L(\frac{۴}{۳}+۱+\frac{۱}{۳}) \Rightarrow T=\frac{۸}{۳}t_۰L$$

مثال ۶۲: میله به طول ℓ با مقطع دایره‌ای و با صلبیت پیچشی GJ بین دو جداره متوازی محکم شده و زاویه پیچش در دو تکیه‌گاه صفر است. اگر کل لنگر پیچشی $T=۰/۴۸GL/B$ در نیمه میانی میله به‌صورت گسترده یکنواخت به آن اعمال شود، زاویه پیچش وسط میله چند رادیان است؟

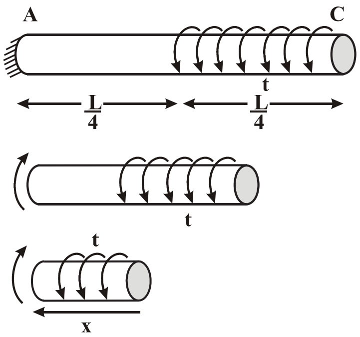
(مهندسی عمران ـ سراسری ۹۶)



۱) ۰/۰۴۵ ۲) ۰/۰۹۰
۳) ۰/۱۲۰ ۴) ۰/۱۸۰

پاسخ: گزینه «۲» اگر لنگر پیچشی گسترده را با T نشان دهیم مقدار آن برابر است با:

$$t=\frac{T}{\frac{L}{۲}}=\frac{۰/۴۸\frac{Gj}{L}}{\frac{L}{۲}}=۰/۹۶\frac{Gj}{L^۲}$$



و اما زاویه پیچش وسط میله تحت لنگر پیچشی گسترده برابر است با:

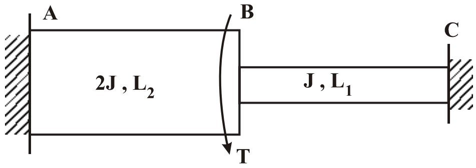
$$T_۱=tx \quad , \quad T_۲=t\frac{L}{۴}$$

$$\phi_{\frac{C}{A}}=\int_۰^{\frac{L}{۴}}\frac{T_۱dx}{GJ}+\frac{T_۲\frac{L}{۴}}{GJ} \Rightarrow \phi_{\frac{C}{A}}=\int_۰^{\frac{L}{۴}}\frac{txdx}{GJ}+\frac{t\frac{L}{۴}\times\frac{L}{۴}}{GJ}$$

$$\phi_{\frac{C}{A}}=\frac{۰/۹۶}{۲L^۲}[x^۲]_۰^{\frac{L}{۴}}+\frac{۰/۹۶}{۱۶}=۰/۰۹\,rad$$

مثال ۶۳: در شفت زیر اگر گشتاور عکس‌العمل تکیه‌گاه A، سه برابر گشتاور عکس‌العمل تکیه‌گاه C باشد، طول $L_۱$ کدام است؟

(مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۶)



۱) $L_۱=\frac{۳}{۲}L_۲$ ۲) $L_۱=\frac{۲}{۳}L_۲$
۳) $L_۱=\frac{۴}{۳}L_۲$ ۴) $L_۱=\frac{۳}{۴}L_۲$

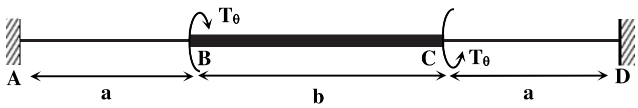
پاسخ: گزینه «۱» چون زاویه پیچش فصل مشترک دو محور یکسان است، بنابراین دو محور را می‌توان مانند دو فنر موازی در نظر گرفت. در این حالت گشتاوری که هر محور تحمل می‌کند، متناسب با سختی آن محور خواهد بود.

$$\frac{T_A}{T_C}=\frac{k_{AB}}{k_{BC}}=۳ \Rightarrow \frac{\frac{G(۲J)}{L_۲}}{\frac{GJ}{L_۱}}=۳ \Rightarrow \frac{۲L_۱}{L_۲}=۳ \Rightarrow L_۱=\frac{۳}{۲}L_۲$$

آزمون (۳)

تعداد سؤالات : ۲۰ **سطح آزمون : A**

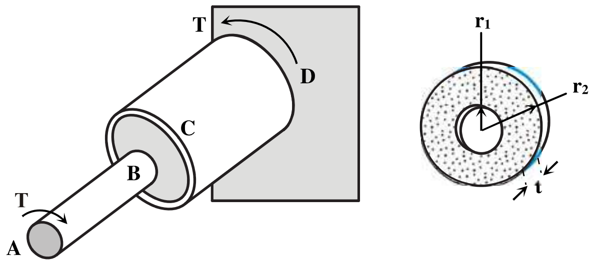
۱ـ در شکل روبرو میله BC صلب می‌باشد. دو کوپل پیچشی به نقاط B و C از میله AD وارد شده است. لنگر پیچشی ایجاد شده در قسمت AB چقدر است؟



۱) $\frac{T_\circ b}{2a+b}$ ۲) $T_\circ$

۳) $\frac{T_\circ}{2}$ ۴) صفر

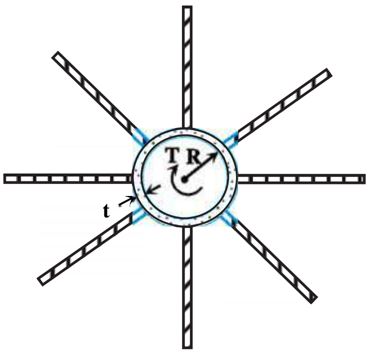
۲ـ یک صفحه سوراخدار به شعاع داخلی r_1 و شعاع خارجی r_2 برای اتصال دو میله AB و CD به یکدیگر در B و C استفاده شده است، ضخامت صفحه t می‌باشد. تنش برشی در C بر روی سطح میله CD برابر کدام است؟



۱) $\tau_C = \frac{2T}{\pi t r_2^2}$ ۲) $\tau_C = \frac{2T}{\pi r_1^3}$

۳) $\tau_C = \frac{2Tr_2}{\pi(r_2^4 - r_1^4)}$ ۴) $\tau_C = \frac{T}{2\pi t r_2^2}$

۳ـ میله‌ای با سطح مقطع نشان داده شده در شکل تحت تأثیر لنگر پیچشی T قرار دارد، شعاع متوسط دایره R و ضخامت آن t می‌باشد. ضخامت هر یک از ورقهای اتصالی به دایره جدار نازک t و طول آن $2\pi R$ می‌باشد. چنانچه نسبت $\frac{R}{t} = 10$ باشد، چند درصد لنگر پیچشی T توسط جدارهٔ نازک دایره‌ای شکل تحمل خواهد شد؟



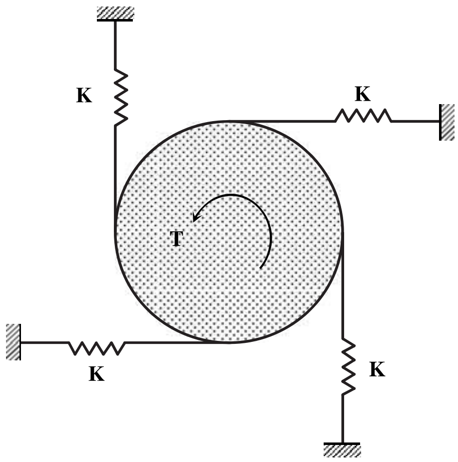
۱) ۹۱/۲ درصد

۲) ۹۵/۳ درصد

۳) ۹۷/۴ درصد

۴) ۹۹/۲ درصد

۴ـ سختی پیچشی یک صفحهٔ صلب دایره‌ای شکل متصل به چهار فنر به سختی $K = 10\ \frac{ton}{m}$ برابر چند $ton.\frac{m}{rad}$ است؟
(۲۰ cm = قطر صفحه)



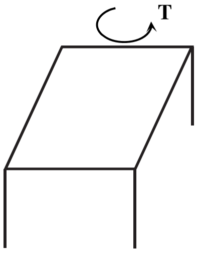
۱) ۱

۲) ۰/۲

۳) ۰/۳

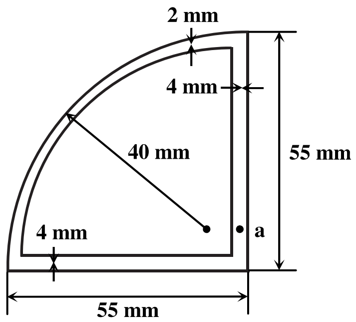
۴) ۰/۴

۵ـ در حالت استفاده از تشابه غشایی (Memberane analogy) برای تعیین کیفی توزیع تنش برشی در یک میله تحت پیچش بـا مقطـع مربـع مستطیل، کدامیک از جملات زیر وضعیت تنش برشی در یک نقطه فرضی A از مقطع را به طور صحیح بیان می‌کند؟



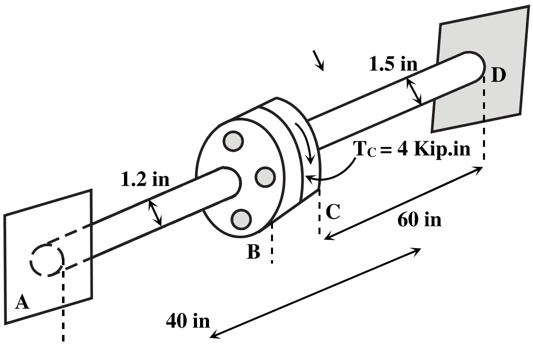
۱) در نقطه‌ای از غشاء متناظر با نقطه A کمترین شیب متناسب با مقدار تنش و بیشترین شیب نشان دهنده جهت آن است.
۲) بزرگی تنش در هر نقطه A از مقطع، متناسب با کمترین شیب نقطه متناظر A در روی غشاء می‌باشد.
۳) تشابه غشائی فقط قادر به پیش‌بینی مقدار پیچش بوده و در خصوص توزیع تنش اطلاعاتی بدست نمی‌دهد.
۴) در نقطه‌ای از غشاء متناظر با نقطه A بیشترین شیب متناسب با مقدار تنش برشـی و کمتـرین شـیب نشـان دهنـده جهت آن است.

۶ـ با اعمال گشتاور پیچشی ۹۰N.m تنش برشی حاصل در a برابر است با: (از اثر تمرکز تنش صرفنظر می‌گردد)



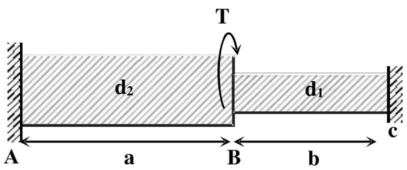
۱) ۹/۴۶MPa
۲) ۴/۷۳ MPa
۳) ۲/۳۹ MPa
۴) ۸/۹۵ MPa

۷ـ دو شفت فولادی توپر توسط فلنج به یکدیگر به شکل زیر متصل شده‌اند. در صورتی که فلنجهای اتصال نسبت به یکدیگر $\frac{۱}{۲}$ درجه چرخش داشته باشند، در اثر اعمال بار $۴\text{Kip}-\text{in}$ در فلنج ، تنش برشی ماکزیمم در CD چه مقدار است؟



۱) ۳/۷۸ Ksi
۲) ۳/۲۶ Ksi
۳) ۴/۲۲ Ksi
۴) ۵/۴۲ Ksi

۸ـ تیر داده شده از اتصال دو قطعه مدور توپر به قطرهای $d_۱$ و $d_۲$ تشکیل شده است و تیر در نقطهٔ B تحت تأثیر پیچش T قـرار گرفتـه اسـت. عکس‌العمل تکیه‌گاه C برابر است با :



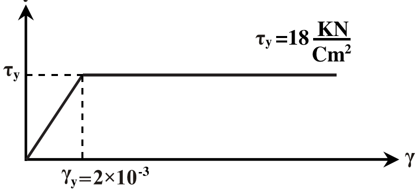
۱) $T_C = \dfrac{Ta}{Ta+Tb}$

۲) $T_C = \dfrac{\frac{Ta}{d_۲}}{\frac{a}{d_۱}+\frac{b}{d_۲}}$

۳) $T_C = \dfrac{T(a+b)}{J_{AB}+J_{BC}}$

۴) $T_C = \dfrac{\frac{Ta}{J_{AB}}}{\frac{a}{J_{AB}}+\frac{b}{J_{BC}}}$

۹ـ میله استوانه‌ای توخالی به طول ۲m و به قطر داخلی ۴cm و قطر خارجی ۸cm را تحت اثر کوپل پیچشی قرار می‌دهیم و به تـدریج کوپـل را اضافه می‌کنیم. با توجه به دیاگرام تنش ـ کرنش زیر مقدار زاویه پیچش تیر در لحظه‌ای که کوپل به بیشترین مقدار ممکن می‌رسد، چقدر است؟

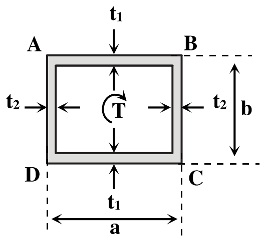


۱) ۰/۲ rad
۲) ۰/۱ rad
۳) ۰/۱۵ rad
۴) ۰/۰۲۵ rad

۱۰ـ یک شفت توپر فولای به قطر ۷۰ میلیمتر که بعنوان انتقال دهنده گشتاور بکار برده می‌شود، با یک شفت توخالی به قطر ۷۰ میلیمتـر و ضـخامت ۶ میلیمتر تعویض می‌شود، اگر جنس هر دو شفت یکی باشد، چند درصد کاهش در میزان انتقال گشتاور خواهیم داشت؟

۱) ۵۷٪ ۲) ۳۷٪ ۳) ۴۷٪ ۴) ۶۲٪

۱۱ـ در مقطع قوطی شکل زیر سهم وجه‌های افقی مقطع در تحمل پیچش چند برابر سهم وجه‌های قائم مقطع می‌باشد؟



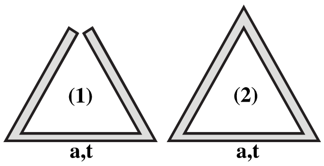
۱) $\frac{a}{b}$

۲) $\frac{t_۱}{t_۲}$

۳) $\frac{at_۱}{bt_۲}$

۴) سهم وجه‌های افقی و قائم در تحمل پیچش برابر است.

۱۲ـ در شکل زیر اگر $\frac{a}{t} = ۱۰$ باشد نسبت ممان اینرسی پیچشی مقطع دوم به مقطع اول $(\frac{J_۲}{J_۱})$ کدام است؟ $(t = const)$



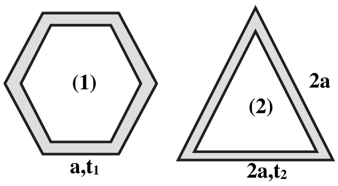
۱) ۲۵

۲) ۱۵

۳) ۲۰

۴) ۳۰

۱۳ـ اگر دو مقطع هم‌جنس و هم‌طول زیر، مقاومت پیچشی یکسانی داشته باشند چه رابطه‌ای بین $t_۱$ و $t_۲$ برقرار است؟



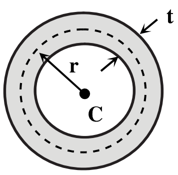
۱) $t_۱ = ۱/۵ t_۲$

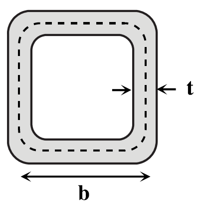
۲) $t_۱ = ۳t_۲$

۳) $t_۲ = ۳t_۱$

۴) $t_۲ = ۱/۵ t_۱$

۱۴ـ دولوله که یکی از آنها دارای مقطع گرد و دیگری با مقطع مربعی است از یک جنس ساخته شده‌اند و تحت تأثیر گشتاور یکسان قرار دارند. هـر دو لوله دارای طول، ضخامت جداره و مساحت سطح مقطع یکسان می‌باشند. نسبت تنش برشی لوله دایروی به لوله مربعی چقدر است؟



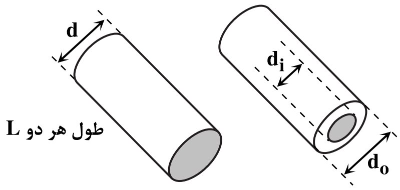


۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) π

۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۸}$

۱۵ـ مطلوب است تعیین قطر d در میله زیر به طوری که تنش حداکثر پیچشی در هر دو میله و استوانه یکسان باشد.

$$(d_i = ۳'' \quad , \quad d_o = ۴'')$$



۱) $d = ۳/۵۲''$

۲) $d = ۶/۵۸''$

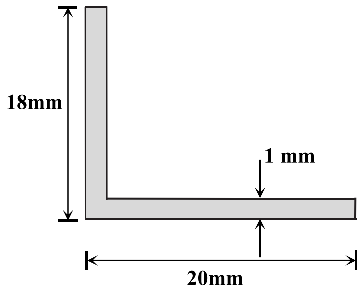
۳) $d = ۳/۴۲''$

۴) $d = ۳/۴۸''$

۱۶ـ یک مقطع n ضلعی منتظم جدار نازک بسته تحت اثر پیچش قرار دارد. اگر مقطع از حالت بسته به حالت باز تغییـر کنـد زاویـه پـیچش مقطـع چندبرابر خواهد شد؟ (طول هر ضلع a و ضخامت مقطع t می‌باشد).

۱) $\frac{۴}{۳}(\frac{a}{t})^۲ \cot g^۲ \frac{\pi}{۲n}$ ۲) $\frac{۳}{۴}(\frac{a}{t})^۲ \cot g^۲ \frac{\pi}{۲n}$ ۳) $\frac{۳}{۴}(\frac{a}{t})^۲ \cot g^۲ \frac{\pi}{n}$ ۴) $\frac{۴}{۳}(\frac{a}{t})^۲ \cot g^۲ \frac{\pi}{n}$

۱۷ـ ممان اینرسی قطبی مقطع نشان داده شده تحت لنگر پیچشی مساوی است با:



۱) $۹/۴\ mm^۴$

۲) $۱۸\ mm^۴$

۳) $۸/۲\ mm^۴$

۴) $۱۲/۷\ mm^۴$

۱۸ـ تنش برشی در میله‌ای توخالی جدار نازک با ضخامت t و مقطع n ضلعی منتظم تحت اثر پیچش T چقدر است؟ طول هر ضلع n ضلعی برابر a است.

۱) $\dfrac{۲T\tan\frac{\pi}{n}}{na^۲t}$ ۲) $\dfrac{۴\pi T}{n^۲a^۲t}$ ۳) $\dfrac{۲T\sin\frac{\pi}{n}}{na^۲t^۲}$ ۴) هیچکدام

۱۹ـ یک پین به قطر ۶mm جهت حمل بار محوری فشاری ۳/۵KN و گشتاور پیچشی ۹/۸N.m طراحی شده است. اگر حداکثر تنش عمودی و برشی مجاز برای فلزی که پین از آن ساخته شده ۲۵۰ Mpa باشد، آیا این طراحی مناسب است؟

۱) پین از نظر تنش عمودی مناسب است. ولی از نظر تنش برشی مناسب نیست.

۲) پین از نظر تنش عمودی و برشی مناسب است.

۳) پین از نظر تنش برشی مناسب است. ولی از نظر تنش عمودی مناسب نیست.

۴) پین از نظر تنش عمودی و برشی مناسب نیست.

۲۰ـ یک شفت با قطر خارجی ۵۰mm برای انتقال ۱۰۰KW توان در حالیکه با فرکانس ۲۰Hz می‌چرخد طراحی شده است. اگر این شفت توخالی بوده و حداکثر تنش برشی مجاز ۶۰Mpa باشد، قطر داخلی شفت حداقل چقدر باید باشد؟

۱) $d_{in} = ۳۸/۳mm$ ۲) $d_{in} = ۴۱/۲mm$ ۳) $d_{in} = ۳۶mm$ ۴) $d_{in} = ۴۴mm$

پاسخنامه آزمون‌های خودسنجی

پاسخنامه آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۴»	۱۲ـ گزینه «۳»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۲»
۱۶ـ گزینه «۱»	۱۷ـ گزینه «۲»	۱۸ـ گزینه «۱»	۱۹ـ گزینه «۱»	۲۰ـ گزینه «۲»

پاسخنامه آزمون (۲)

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۴»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۴»
۱۶ـ گزینه «۴»	۱۷ـ گزینه «۳»	۱۸ـ گزینه «۳»	۱۹ـ گزینه «۱»	۲۰ـ گزینه «۳»

پاسخنامه آزمون (۳)

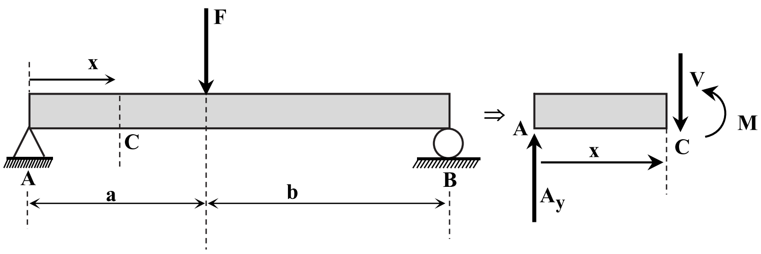
۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۴»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۴»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۱»
۱۶ـ گزینه «۳»	۱۷ـ گزینه «۴»	۱۸ـ گزینه «۱»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۲»

فصل سوم

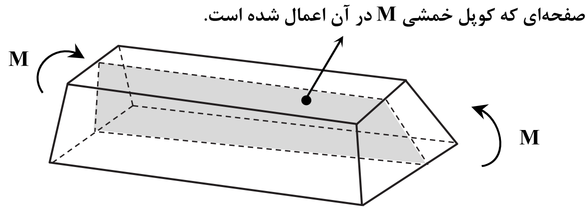
«خمش»

درسنامه (۱): خمش ساده، خمش متقارن

در این فصل تنش‌ها و کرنش‌ها در تیرهایی که تحت گشتاورهای مساوی و مختلف‌الجهت M و M' از دو طرف تیر و در یک صفحه قرار گرفته‌اند با تیرهایی که تحت بارگذاری عرضی قرار گرفته‌اند، مورد مطالعه قرار می‌گیرند. مطابق شکل زیر اگر یک تیر تحت بارگذاری عرضی قرار گیرد، در هر مقطع دلخواه آن، به منظور حفظ تعادل بخش جدا شده از تیر (بخش AC) نیروی برشی V و یک لنگر خمشی داخلی M وارد می‌شود. در اصل نیروی برشی V و لنگر خمشی M، حاصل برآیند نیروهای داخلی توزیع شده در سطح مقطع برش خورده می‌باشند که در درس استاتیک به صورت مؤلفه‌های متمرکز نمایش داده شدند. اما در درس مقاومت مصالح، نیروهای داخلی توزیع شده در سطح مقطع برش خورده ایجاد تنش نموده که به تنش ناشی از نیروی برش، تنش برشی و به تنش ناشی از لنگر خمشی، تنش خمشی گفته می‌شود.

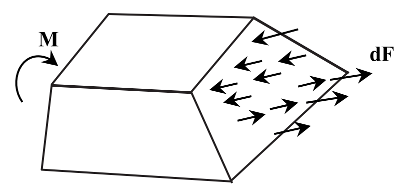


ابتدا فرض می‌شود که جسم نسبت به صفحه کوپل اعمالی متقارن است، همچنین جسم تحت اثر لنگر خمشی خالص قرار گرفته است، به عبارت دیگر نیروی داخلی برش، در تیر برابر صفر می‌باشد. چنین وضعیتی را می‌توان در شکل روبرو مشاهده نمود. در این شکل، جسم تحت اثر دو کوپل خمشی مساوی و مختلف الجهت قرار گرفته است.

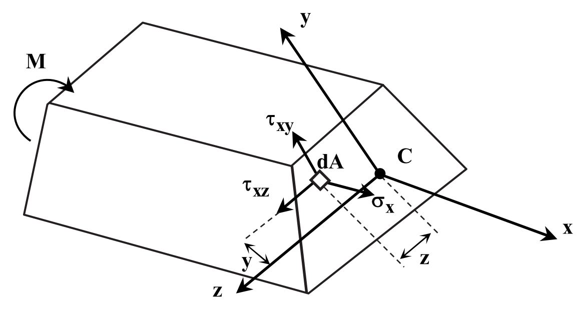


جسم تحت اثر خمش حاصل $(V = 0)$

اگر بخشی از جسم تحت خمش خالص، جدا شده و دیاگرام آزاد آن، مطابق شکل مقابل رسم شود، در مقطع برش خورده، بارهای گسترده سطحی وجود خواهند داشت که تولید تنش قائم می‌کنند. با توجه به نحوه اعمال لنگر خمشی خارجی M، انتظار می‌رود که جسم در تارهای فوقانی تحت فشار قرار گرفته و در تارهای تحتانی، تحت کشش قرار گیرند.



در شکل روبرو دستگاه محورهای مختصات در مقطع برش خورده به گونه‌ای انتخاب می‌شود که مبدأ مختصات منطبق بر مرکز هندسی سطح مقطع و محور طولی جسم در راستای x بوده و محورهای y و z در سطح مقطع عرضی جسم واقع شوند. با توجه به این که کوپل خمشی M در راستای محور z بر جسم اعمال شده، بنابراین توزیع نیروهای داخلی در مقطع برش خورده باید کوپلی مساوی و در جهت مخالف آن ایجاد کند تا تعادل برای تیر برقرار باشد. یک المان دلخواه از سطح مقطع عرضی جسم به فاصله y از محور عرضی z و فاصله z از محور عرضی y در نظر گرفته می‌شود. این المان تحت اثر نیروی dF دارای سه مؤلفه تنش σ_x، τ_{xz}, τ_{xy} است.



مؤلفه σ_x تنش قائم یا تنش نرمال بوده و τ_{xy} و τ_{xz} مؤلفه‌های تنش برشی می‌باشند. لازم به ذکر است که اندیس اول در تنش برشی، محور عمود بر صفحه المان بوده و اندیس دوم، راستای تنش را نشان می‌دهد. برآیند تنش‌های وارد بر المان‌ها، باید تولید یک لنگر خمشی M مساوی و مخالف با جهت لنگر M خارجی کنند. بنابراین با استفاده از معادلات تعادل استاتیکی بین نیروهای المان داخلی و کوپل M خارجی، می‌توان نوشت:

۱) چون نیروی محوری خارجی بر جسم اعمال نمی‌شود، بنابراین باید مجموع نیروهای محوری داخلی مساوی صفر باشد.

$$\text{نیروهای محوری خارجی } \sum F_x = 0 \Rightarrow \text{نیروهای محوری المانی } \int dF_x = 0 \xrightarrow{\text{از طرفی در المان داریم } \sigma_x=\frac{dF_x}{dA}} \int \sigma_x dA = 0 \qquad (1)$$

۲) چون نیروی برشی خارجی (بارگذاری عرضی) بر جسم اعمال نمی‌شود، بنابراین باید مجموع نیروهای برشی داخلی (تنش‌های برشی)، برابر صفر باشد.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \int F_y = 0 \xrightarrow{\tau_{xy}=\frac{dF_y}{dA}} \int \tau_{xy} dA = 0 \qquad (2)$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow \int dF_z = 0 \xrightarrow{\tau_{xz}=\frac{dF_z}{dA}} \int \tau_{xz} dA = 0 \qquad (3)$$

۳) چون تنها لنگر خارجی وارد بر جسم، حول محور عرضی z می‌باشد، نیروهای المانی داخلی باید به گونه‌ای باشند که لنگر مذکور را خنثی نمایند.

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow \int z dF_x = 0 \xrightarrow{\sigma_x=\frac{dF_x}{dA}} \int z\sigma_x dA = 0 \qquad (4)$$

مؤلفه‌های تنش برشی τ_{xy} و τ_{xz} حول محور y تولید لنگر یا ممان نمی‌کنند، چرا که با این محور متقاطع می‌باشند.

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow \int y dF_z - \int z dF_y = 0 \xrightarrow[\tau_{xz}=\frac{dF_z}{dA}]{\tau_{xy}=\frac{dF_y}{dA}}$$

$$\int y\tau_{xz} dA - \int z\tau_{xy} dA = 0 \Rightarrow \int (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) dA = 0 \qquad (5)$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M + \int y dF_x = 0 \xrightarrow{\sigma_x=\frac{dF_x}{dA}} \Rightarrow -\int y\sigma_x dA = M \qquad (6)$$

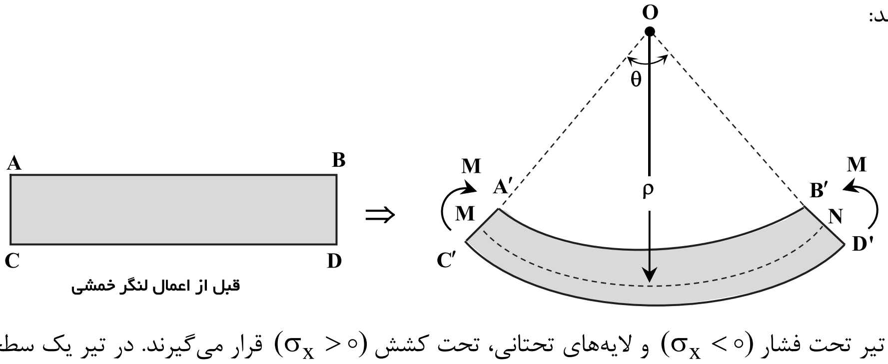
روابط (۲) و (۳) از مجموع روابط در صورتی برقرار می‌باشند که مؤلفه‌های تنش برشی τ_{xy} و τ_{xz} برابر صفر باشند. بنابراین رابطه (۵) نیز ارضاء شده و شش رابطه فوق به سه رابطه زیر تقلیل می‌یابند.

$$\int \sigma_x dA = 0 \qquad (7)$$

$$\int z\sigma_x dA = 0 \qquad (8)$$

$$-\int y\sigma_x dA = M \qquad (9)$$

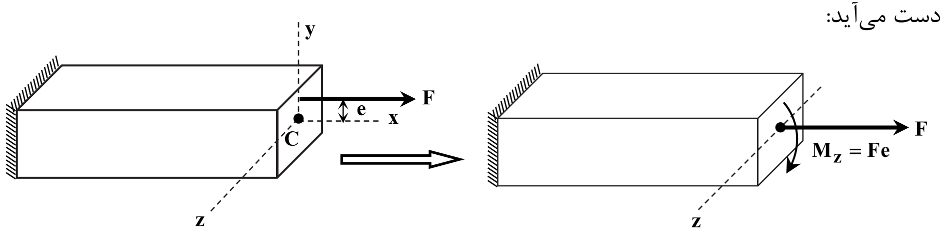
با توجه به آن که کوپل خمشی M در صفحه تقارن جسم اثر می‌کند، بنابراین رابطه (۸) نیز برقرار خواهد بود، اما روابط (۷) و (۹) دارای اهمیت بوده که در ادامه به بحث بیشتری درباره آن پرداخته می‌شود. در اینجا لازم به ذکر است که تنها با استفاده از روابط استاتیک (۷) و (۹) نمی‌توان نحوه توزیع تنش σ_x را در سطح مقطع داخلی جسم تعیین کرد، زیرا که پخش واقعی تنش‌ها از لحاظ استاتیکی نامعین است و تنها با استفاده از تحلیل تغییر شکل‌های به وجود آمده در جسم قادر خواهیم بود به توزیع واقعی تنش دست یابیم. برای تحلیل تغییر شکل، یک تیر مستقیم در نظر گرفته شده است که تحت لنگر خمشی مثبت مطابق شکل زیر می‌باشد:



در این حالت لایه‌های فوقانی تیر تحت فشار $(\sigma_x < 0)$ و لایه‌های تحتانی، تحت کشش $(\sigma_x > 0)$ قرار می‌گیرند. در تیر یک سطحی که به موازات سطوح فوقانی و تحتانی تیر است (سطح MN)، باید وجود داشته باشد که در روی آن مقدار تنش برابر صفر باشد، به این سطح، **سطح خنثی یا تار خنثی** گفته می‌شود. به عبارت دیگر، طول تار خنثی، قبل و بعد از اعمال گشتاور، یکسان باقی می‌ماند. یعنی اگر طول تیر قبل از بارگذاری L بوده، بعد از اعمال بار، طول کمان $\widehat{MN}$ که همان تار خنثی می‌باشد، همچنان برابر L خواهند بود.

بارگذاری خارج از مرکز (بارگذاری غیرمحوری)

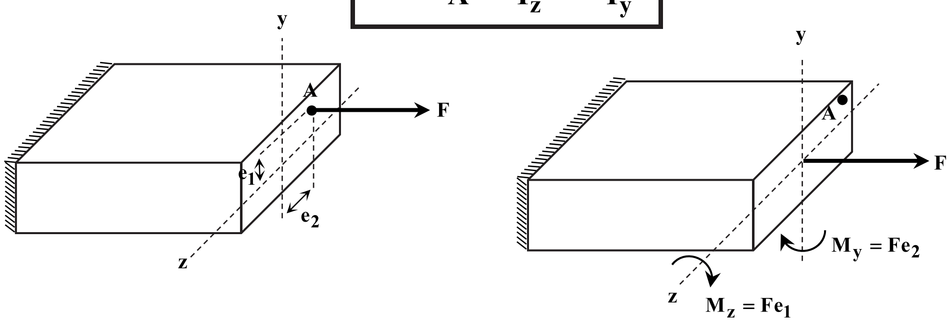
بارگذاری غیرمحوری وارد بر جسم نشان داده شده را در نظر بگیرید. با اعمال این نیرو به مرکز سطح مقطع یک لنگر خمشی ایجاد شده که در جسم تولید تنش محوری می‌کند. در صورتی که تنش‌های ناشی از بار محوری و لنگر خمشی از حد تناسب تجاوز نکنند، مقدار تنش محوری در هر نقطه از جسم توسط روش جمع آثار به دست می‌آید:



$$\sigma_x = \frac{F}{A}\ (\text{تنش ناشی از بار محوری}) \pm \frac{M_z y}{I_z}\ (\text{تنش ناشی از لنگر خمشی})$$

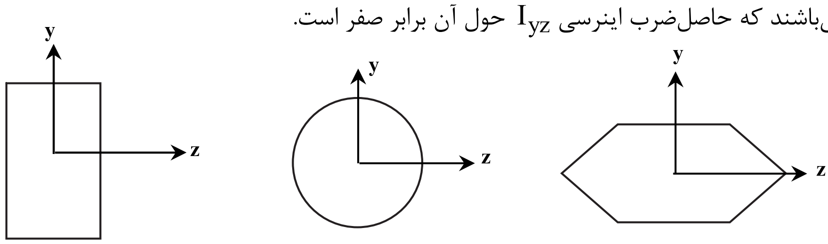
در رابطه فوق تنش ناشی از یک نیروی غیرمحوری واقع بر محور y محاسبه شده است، در حالی که اگر نقطه اثر نیروی غیر محوری در حالت کلی در صفحه yz واقع بود، با انتقال این نیرو به مرکز سطح مقطع دو لنگر خمشی M_y و M_z ایجاد می‌شد که کلی‌ترین حالت تنش محوری ناشی از بار خارج از محور را ایجاد می‌کند.

$$\boxed{\sigma_x = \pm\frac{F}{A} \pm \frac{M_z y}{I_z} \pm \frac{M_y z}{I_y}}$$

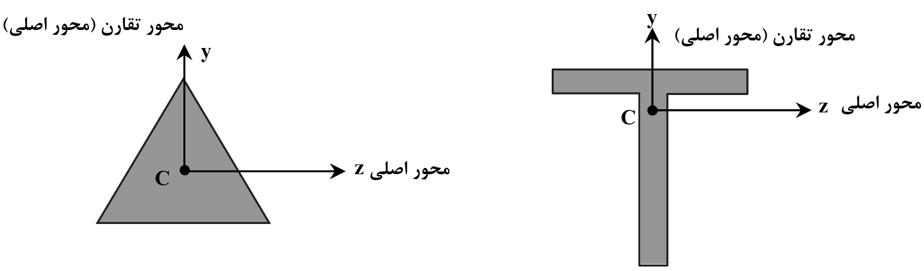


برای تعیین علامت تنش در معادله فوق انگشت شست دست راست را در جهت بردار گشتاور وارد شده قرار داده و انگشتان را در جهتی می‌چرخانیم که انگشتان در آن سمت جمع می‌شوند، این بخش از تیر تحت فشار بوده و تنش مربوط به آن منفی است و سمت دیگر تحت کشش است و تنش مربوط به آن مثبت خواهد بود. برای نیروی محوری هم اگر نیروی کششی وارد شود، تنش مربوط به آن مثبت و اگر نیروی فشاری وارد شود، تنش مربوط به آن منفی است.

تذکر۹: اگر سطحی دارای دو محور تقارن عمود بر هم باشد، به آن محورها، محور اصلی گفته می‌شود. در سطوح زیر محورهای y و z محورهای اصلی می‌باشند. همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد، محورهای اصلی به محورهایی گفته می‌شود که ممان اینرسی حول آن محورها دارای مقادیر اکسترمم بوده و دارای این ویژگی می‌باشند که حاصل‌ضرب اینرسی I_{yz} حول آن برابر صفر است.

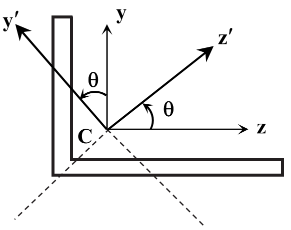


از طرفی اگر سطحی دارای یک محور تقارن باشد، علاوه بر آن که محور تقارن محور اصلی بوده، محور عمود بر آن نیز محور اصلی خواهد بود. به عنوان مثال در مثلث شکل زیر محور y محور تقارن بوده و از طرفی محور z که از مرکز سطح عبور کرده و بر محور y عمود می‌باشد، نیز محور اصلی است.



به محورهایی که محور اصلی بوده و از مرکز سطح عبور نمایند، محور اصلی مرکزی می‌گویند. به‌طور کلی، اگر I_{yz} برای سطحی صفر باشد، آن محورها یعنی y و z محورهای اصلی می‌باشند.

در مقطع شکل مقابل محورهای z,y محور اصلی نیستند، بلکه محورهای 'y و 'z محور اصلی می‌باشند که مقادیر آن‌ها توسط روابط زیر تعیین می‌شود.



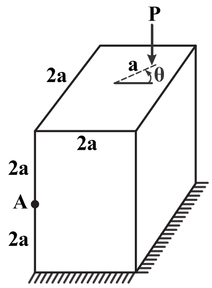
$$I_{z'}=\frac{I_z+I_y}{۲}+\frac{I_z-I_y}{۲}\cos ۲\theta-I_{zy}\sin ۲\theta$$

$$I_{y'}=\frac{I_z+I_y}{۲}-\frac{I_z-I_y}{۲}\cos ۲\theta+I_{zy}\sin ۲\theta$$

همچنین برای محاسبه زاویه بین محورهای اصلی و محورهای y و z از رابطه زیر استفاده می‌شود.

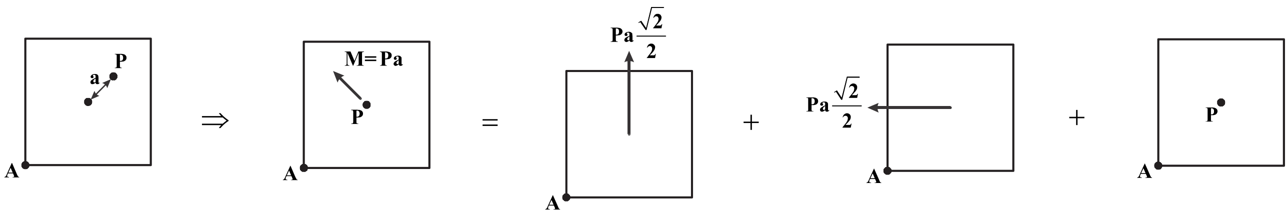
$$tg۲\theta=\frac{۲I_{zy}}{I_z-I_y}$$

مثال۱۲۹: در ستون مقابل بار P با شعاع چرخش a حول مرکز مقطع در بازه $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ می‌چرخد. دراین‌صورت حداکثر تنش ایجاد شده در نقطه A برحسب $\frac{P}{a^۲}$ کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۱۴۰۰)



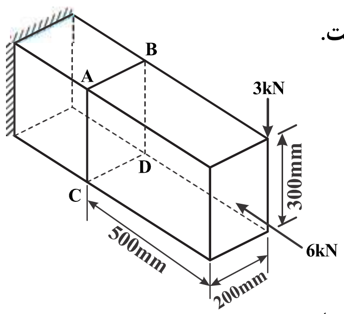
۱) $(\frac{۴۸\sqrt{۲}-۱}{۴})$
۲) $(\frac{۳\sqrt{۲}-۱}{۴})$
۳) $(\frac{۴۸\sqrt{۲}-۴}{۴})$
۴) $(\frac{۳\sqrt{۲}-۲}{۴})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در $\theta=\frac{\pi}{۴}$ حداکثر تنش کششی ناشی از خمش در نقطه A خواهیم داشت. با استفاده از اصل جمع آثار می‌توان مقدار تـنش را در نقطه A تعیین کرد.



$$\sigma_A=-\frac{p}{A}+\frac{۶M_y}{Ah}+\frac{۶M_z}{Ab}=-\frac{p}{۴a^۲}+\frac{۶Pa\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۸a^۳}+\frac{۶Pa\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۸a^۳}\Rightarrow\sigma_A=-\frac{p}{۴a^۲}+\frac{۳Pa\sqrt{۲}}{۴a^۳}=+\frac{p}{a^۲}(\frac{۳\sqrt{۲}-۱}{۴})$$

مثال۱۳۰: به انتهای تیر یک سر درگیر شکل زیر، نیروی عمودی ۳kN و نیروی محوری ۶kN وارد شده است. در طول AC، در چه فاصله‌ای (برحسب میلی‌متر) از نقطه A تنش عمودی صفر است؟ (مهندسی مکانیک بیوسیستم ـ سراسری ۱۴۰۲)



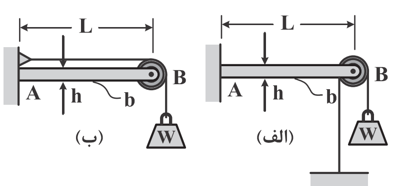
۱) ۱۲۰
۲) ۱۳۵
۳) ۱۶۵
۴) ۱۸۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» فرض می‌کنیم در طول تار AC در نقطه N، مقدار تنش قائم برابر صفر است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sigma_N=۰=-\frac{P}{A}+\frac{MC}{I}=۰\Rightarrow\frac{-۶۰۰۰}{۲۰۰\times۳۰۰}+\frac{(۳۰۰۰\times۵۰۰)y}{\frac{۲۰۰\times۳۰۰^۳}{۱۲}}=۰\Rightarrow y=۳۰$$

فاصله نقطه N از تار خنثی برابر ۳۰ بوده بنابراین این نقطه از نقطه A فاصله ۱۲۰ میلی‌متری دارد.

مثال۱۳۱: در بارگذاری روبه‌رو سطح مقطع تیر AB به شکل مستطیل با ابعاد b×h است. مقدار L چند برابر h باشد تا بیشینه تنش کششی در تیر (الف) برابر بیشینه تنش فشاری در تیر (ب) باشد؟ (مهندسی مکانیک بیوسیستم ـ سراسری ۱۴۰۳)



۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۶}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

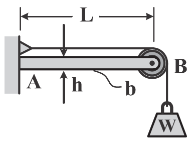
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در شکل (الف) نیروی طناب در تیر ایجاد تنش خمشی نموده در حالی‌که در شکل (ب) نیروی طناب علاوه بر تنش خمشی ایجاد تنش فشاری ناشی از بار محوری می‌کند. حداکثر تنش خمشی در تکیه‌گاه است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$(\sigma_{max})_T=(\sigma_{max})_C \Rightarrow (\frac{MC}{I})_T=(\frac{MC}{I})_C+\frac{W}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{(۲WL)\frac{h}{۲}}{\frac{bh^۳}{۱۲}}=\frac{(WL)\frac{h}{۲}}{\frac{bh^۳}{۱۲}}+\frac{W}{bh}\Rightarrow \frac{۱۲WL}{bh^۲}=\frac{۶WL}{bh^۲}+\frac{W}{bh}\Rightarrow \frac{۶L}{h}=۱\Rightarrow \frac{L}{h}=\frac{۱}{۶}$$

مثال۱۳۲: در بارگذاری زیر، سطح مقطع تیر AB به شکل مستطیل با ابعاد $b\times h$ است. مقدار L چقدر باشد تا به تیر تنش کششی وارد نشود؟

(مهندسی مکانیک بیوسیستم ـ سراسری ۱۴۰۳)



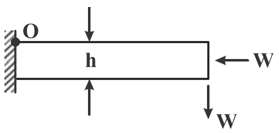
۱) $\le \frac{h}{۶}$

۲) $\ge \frac{h}{۶}$

۳) $\le \frac{h}{۳}$

۴) $\ge \frac{h}{۳}$

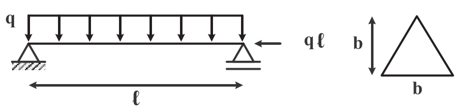
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تأثیر نیروی وزن بر تیر شامل یک بار برشی و بار محوری است که در مقطع تیر تنش قائم ایجاد می‌کند. درنقطه O، بار محوری W، تنش فشاری و بار برشی W، تنش کششی ایجاد می‌کند. طبق فرض مسئله می‌توان نوشت:



$$\sigma_O=-\frac{w}{bh}+\frac{MC}{I}\le ۰ \Rightarrow -\frac{w}{bh}+\frac{۶wL}{bh^۲}\le ۰ \Rightarrow \frac{۶L}{h}\le ۱ \Rightarrow L\le \frac{h}{۶}$$

مثال۱۳۳: تیر نشان داده‌شده به طول ℓ تحت اثر همزمان بار جانبی گسترده یکنواخت به شدت q و نیروی محوری $q\ell$ قرار دارد. سطح مقطع تیر به شکل یک مثلث با قاعده و ارتفاع b است. ماکزیمم تنش نرمال وارد بر سطح مقطع تیر کدام است؟

(مهندسی عمران ـ سراسری ۱۴۰۳)



۱) $\frac{q\ell}{b^۲}(۲+\frac{۳}{۲}\frac{\ell}{b})$

۲) $\frac{q\ell}{b^۲}(۲+۶\frac{\ell}{b})$

۳) $\frac{q\ell}{b^۲}(۲+\frac{۳}{۴}\frac{\ell}{b})$

۴) $\frac{q\ell}{b^۲}(۲+۳\frac{\ell}{b})$

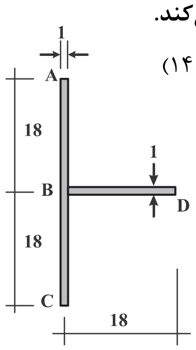
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» حداکثر تنش ایجادشده در مقطع مثلثی در رأس مثلث ایجاد می‌شود. این تنش حاصل‌جمع تنش ناشی از بار محوری و لنگر خمشی است.

$$\sigma'_x=-\frac{F}{A}-\frac{MC}{I}=-\frac{q\ell}{\frac{b^۲}{۲}}-\frac{(\frac{q\ell^۲}{۸})\frac{۲b}{۳}}{\frac{b^۴}{۳۶}}=-(\frac{۲q\ell}{b^۲}+\frac{۳q\ell^۲}{b^۳})\Rightarrow \sigma'_x=-\frac{q.\ell}{b^۲}(۲+۳\frac{\ell}{b})$$

حداکثر لنگر خمشی در یک تیر ساده ناشی از بار گسترده یکنواخت برابر $(\frac{q\ell^۲}{۸})$ می‌باشد.

مثال۱۳۴: در مقطع نشان داده‌شده، نیرویی به بزرگی $۲/۷kN$ بر نقطه A در امتداد عمود بر صفحه و به سمت بیرون اثر می‌کند. تقریباً چه کسری از بخش BD در کشش قرار دارد؟ (ابعاد بر روی شکل برحسب cm هستند.)

(مهندسی عمران ـ سراسری ۱۴۰۳)

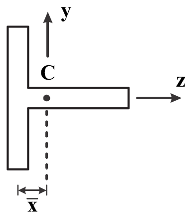


۱) ۱

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

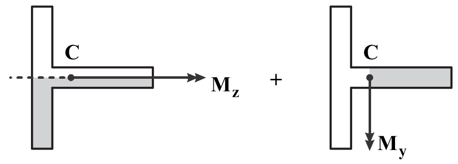
۴) $\frac{۵}{۹}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» نیرو به‌صورت خارج از مرکز بر مقطع تیر وارد شده است. اگر نیرو به مرکز سطح مقطع منتقل شود، گشتاور خمشی حول محورهای y و z به آن اضافه می‌شود. در ابتدا مختصات مرکز سطح مقطع تعیین می‌شود.

$$\overline{x}=\frac{x_۱A_۱+x_۲A_۲}{A_۱+A_۲}=\frac{۹\times۱۸+۰\times۳۶}{۱۸+۳۶}=۳$$

همان‌طور که در شکل مشخص شده است، سطح تحت تنش کشش ناشی از لنگر خمشی رنگ شده است.

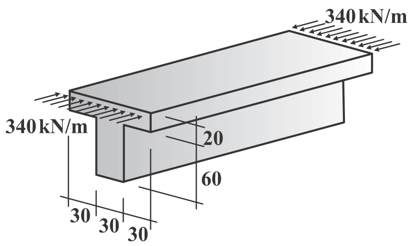


مساحت این سطح نسبت به سطح کل مقطع BD برابر است با:

$$\frac{۹+۱۵}{۱۸+۱۸}=\frac{۲۴}{۳۶}=\frac{۲}{۳}$$

مثال۱۳۵: تیری T شکل به طول 6m مطابق آنچه در تصویر آمده در بالایی‌ترین تراز مقطع خود تحت بار خطی یکنواختی در امتداد طولی خود قرار گرفته است. بزرگ‌ترین تنش نرمال فشاری پدیدآمده در مقطع، چند مگاپاسکال است؟ (ابعاد داده‌شده بر روی شکل همگی برحسب cm هستند.)

(مهندسی عمران ـ دکتری ۱۴۰۳)



۱) ۲/۲۰۰

۲) ۵/۳۵۰

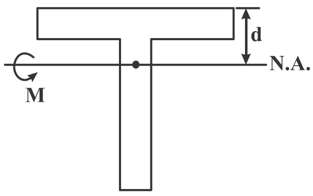
۳) ۲/۴۴۴

۴) ۵/۹۴۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» بار گسترده وارد بر بالاترین تراز مقطع تیر، حول تار خنثی یک گشتاور خمشی ایجاد می‌کند.

برای تعیین گشتاور ابتدا موقعیت تار خنثی (مرکز سطح) تعیین می‌شود.

$$\overline{y}=\frac{\sum_{i=۱}^{۲}y_iA_i}{\sum_{i=۱}^{۲}A_i}=\frac{(۳۰\times۶۰)\times۳۰+(۹۰\times۲۰)\times۷۰}{۳۰\times۶۰+۹۰\times۲۰}=۵۰\,\text{cm}$$



$$F=۳۴۰\frac{\text{kN}}{\text{m}}\times(۰/۳+۰/۳+۰/۳)\text{m}=۳۰۶\text{kN}$$

$$M=Fd=۳۰۶\times۱۰^۳\,(\text{N})\times۳۰۰(\text{mm})=۹۱۸\times۱۰^۵\,\text{N.mm}$$

$$I=[\frac{۱}{۱۲}\times۳۰۰\times۶۰۰^۳+(۳۰۰\times۶۰۰)\times۲۰۰^۲]+[\frac{۱}{۱۲}\times۹۰۰\times۲۰۰^۳+(۹۰۰\times۲۰۰)\times۲۰۰^۲]$$

$$=۲۰۴\times۱۰^۸\,\text{mm}^۴$$

حداکثر تنش فشاری ناشی از بار فشاری و لنگر خمشی برابر است با:

$$(\sigma_{max})_C=-\frac{F}{A}-\frac{MC}{I}=\frac{-۳۰۶\times۱۰^۳}{۳۰۰\times۶۰۰+۹۰۰\times۲۰۰}-\frac{۹۱۸۰۰\times۱۰^۳\times۳۰۰}{۲۰۴\times۱۰^۸}=-۲/۲\,\text{MPa}$$

محاسبه معادله محور خنثی

برای محاسبه محور خنثی نکات زیر، باید مورد توجه قرار گیرند:

۱ـ برای سطح خنثی نیاز است که $\int ydA=۰$ باشد، یعنی سطح خنثی در محدوده ارتجاعی باید از مرکز سطح مقطع عرضی جسم عبور کند.

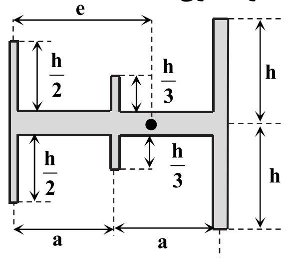
۲ـ برای سطح خنثی نیاز است که $I_{yz}=۰$ باشد یعنی باید محورها، علاوه بر مرکزی بودن، اصلی نیز باشند.

البته دو نکته فوق برای زمانی است که در راستای محورهای اصلی مرکزی فقط یک گشتاور خمشی M وجود داشته باشد که در این صورت تار خنثی نیز از مرکز سطح گذشته و در راستای گشتاور M می‌باشد، ولی اگر گشتاوری وجود داشته که بر محور اصلی مرکزی منطبق نباشد و یا نیروی متمرکز محوری بر مقطع وارد شود دیگر تار خنثی بر هیچ یک از محورها منطبق نیست و باید معادله آن را مانند ادامه محاسبه کرد:

در یک نقطه دلخواه (y و z که در ربع اول دستگاه مختصات قرار دارند، y و z مثبت باشند) مقدار تنش که حاصل مجموع تنش ناشی از گشتاور خمشی و تنش ناشی از نیروی محوری می‌باشد را محاسبه کرده و سپس تنش را در نقطه مورد نظر مساوی صفر قرار می‌دهیم، معادله به دست آمده، معادله تار خنثی می‌باشد و به صورت کلی مقابل است:

$$۰=\pm\frac{F_x}{A}\pm\frac{M_zy}{I_z}\pm\frac{M_yz}{I_y}\;\Rightarrow\;۰=C+by+az\Rightarrow C=\pm\frac{F}{A},b=\pm\frac{M_z}{I_z},a=\pm\frac{M_y}{I_y}$$

مثال۸۵: موقعیت مرکز برش مقطع جدار نازک نشان داده شده مساوی کدام گزینه است؟ (ضخامت کلیه مقاطع ثابت و مساوی t است).



۱) $e = a$

۲) $e = \frac{4}{3}a$

۳) $e = \frac{7}{4}a$

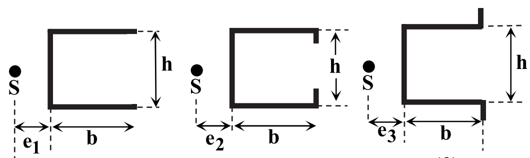
۴) $e = \frac{5}{3}a$

پاسخ: گزینه «۳» نیرویی که هر شاخه عمودی تحمل می‌کند متناسب با ممان اینرسی آن شاخه حول تار خنثی است، بنابراین اگر مبدأ مختصات در مرکز جان شاخه عمودی سمت چپ در نظر گرفته شود، آنگاه e را با توجه به مثال قبلی، می‌توان توسط رابطه زیر تعیین نمود:

$$e = \frac{\sum_{i=1}^{3} I_i \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^{3} I_i} = \frac{I_1 \times 0 + I_2 \times a + I_3 \times 2a}{I_1 + I_2 + I_3} = \frac{\frac{1}{12}t(\frac{2h}{3})^3 \times a + \frac{1}{12}t(2h)^3 \times 2a}{\frac{1}{12}th^3 + \frac{1}{12}t(\frac{2h}{3})^3 + \frac{1}{12}t(2h)^3} \Rightarrow e = \frac{\frac{8}{27}a + 8 \times 2a}{1 + \frac{8}{27} + 8} = 1/75a$$

از ممان اینرسی شاخه افقی مقطع به دلیل کوچک بودن آن صرف‌نظر شده است.

مثال۸۶: چه ارتباطی بین فاصله مرکز برش تا جان تیر مقاطع شکل مقابل برقرار است؟



(1) (2) (3)

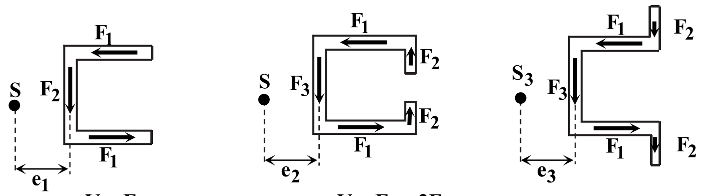
۱) $e_1 > e_2 > e_3$

۲) $e_2 > e_1 > e_3$

۳) $e_3 > e_1 > e_2$

۴) $e_1 = e_2 = e_3$

پاسخ: گزینه «۲» نیروی برآیند ناشی از جریان برش در سه مقطع به شکل زیر است. لازم به ذکر است که مجموع نیروهای برش داخلی در راستای قائم برابر نیروی برشی خارجی یعنی V باشد.



$V = F_2$ $V = F_3 - 2F_2$ $V = F_3 + 2F_2$

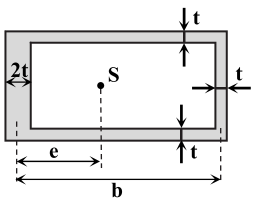
$$\text{شکل (۱)}: \sum M_S = 0 \Rightarrow -F_2 e_1 + F_1 h = 0 \Rightarrow e_1 = \frac{F_1 h}{F_2} = \frac{F_1 h}{V}$$

$$\text{شکل (۲)}: \sum M_S = 0 \Rightarrow -F_3 e_2 + F_1 h + 2F_2(b + e_2) = 0 \Rightarrow e_2(F_3 - 2F_2) = F_1 h + 2F_2 b \Rightarrow e_2 = \frac{F_1 h + 2F_2 b}{V}$$

$$\text{شکل (۳)}: \sum M_S = 0 \Rightarrow -F_3 e_3 + F_1 h - 2F_2(e_3 + b) = 0 \Rightarrow e_3(F_3 + 2F_2) = F_1 h - 2F_2 b \Rightarrow e_3 = \frac{F_1 h - 2F_2 b}{V}$$

از مقایسه e_1, e_2, e_3 به دست آمده از روابط فوق می‌توان نتیجه گرفت که: $e_2 > e_1 > e_3$

مثال۸۷: موقعیت مرکز برش مقطع جدار نازک نشان داده شده تحت نیروی برش قائم در کدام یک از گزینه‌ها صحیح بیان شده است؟



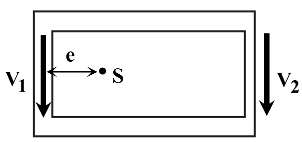
۱) $e = \frac{b}{2}$

۲) $e > \frac{b}{2}$

۳) $e < \frac{b}{2}$

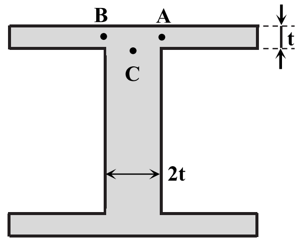
۴) مرکز برش در خارج مقطع واقع است.

پاسخ: گزینه «۳» مرکز برش به مرکز جان ضخیم‌تر نزدیک‌تر می‌باشد. چرا که جان ضخیم‌تر سهم بزرگ‌تری از نیروی برشی خارجی V را تحمل می‌کند.



$$\sum M_S = 0 \Rightarrow V_1 e = V_2(b - e) \Rightarrow e = \frac{V_2 b}{V_1 + V_2} \Rightarrow e = \frac{b}{\frac{V_1}{V_2} + 1} \xrightarrow{\frac{V_1}{V_2} > 1} e < \frac{b}{2}$$

مثال ۸۸: چه ارتباطی بین تنش برشی در نقاط A و C وجود دارد؟ (مقطع دارای محور تقارن افقی و قائم است.)



۱) $\tau_A = ۲\tau_C$

۲) $\tau_C = ۲\tau_A$

۳) $\tau_C = \frac{\tau_A}{۲}$

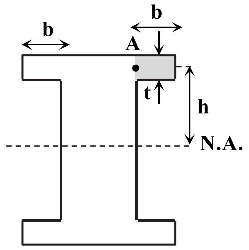
۴) $\tau_C = \tau_A$

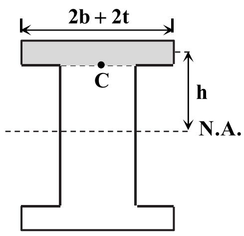
پاسخ: گزینه «۴» **روش اول:** به دلیل تقارن مقطع نسبت به محور قائم می‌توان نتیجه گرفت جریان برش در نقاط A و B باهم برابر است. $q_A = q_B \qquad (۱)$

از طرفی با جمع نمودن جریان‌های برش در نقاط A و B، جریان برش در نقطه C به دست می‌آید: $q_C = q_A + q_B \xrightarrow{(۱)} q_C = ۲q_A \qquad (۲)$

$$\tau_C = \frac{q_C}{t_C} \xrightarrow{(۲)} \tau_C = \frac{۲q_A}{t_C} = \frac{۲q_A}{۲t} = \frac{q_A}{t} = \tau_A$$

روش دوم:





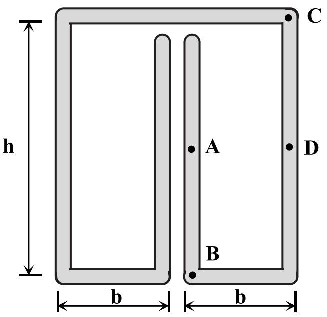
$$\tau_A = \frac{VQ_A}{It_A} = \frac{V \times (b \times t \times h)}{I \times t} = \frac{Vbh}{I} \qquad (۳)$$

$$\tau_C = \frac{VQ_C}{It_C} = \frac{V \times (۲b + ۲t) \times t \times h}{I \times (۲t)} = \frac{V(۲bt + ۲t^۲)h}{I(۲t)} \cong \frac{V(۲bt)h}{I(۲t)} = \frac{Vbh}{I} \qquad (۴)$$

در رابطهٔ بالا، مقدار $۲b + ۲t$ به دلیل کوچکی مقدار t تقریباً برابر $۲b$ در نظر گرفته شده است.

$$(۳),(۴) \Rightarrow \tau_A = \tau_C$$

مثال ۸۹: در کدام نقطه از مقطع مقابل که ضخامت یکنواختی دارد، مقدار تنش برشی برابر با صفر است؟



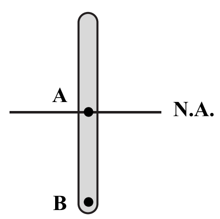
۱) D

۲) A

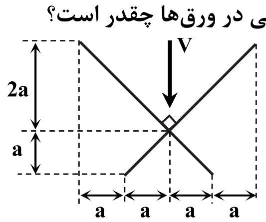
۳) C

۴) B

پاسخ: گزینه «۴» مرکز سطح جدار نازک از وسط ارتفاع مقطع یعنی نقاط A و D می‌گذرد در نتیجه تنش برشی در نقطه B مساوی صفر است. چون برای محاسبه تنش برشی در مقطع B کافی است در این نقطه مقطع برش خورده و سطح بالای نقطه B هاشور زده شود. مرکز سطح بالای نقطه B (یعنی نقطه A) بر تار خنثی منطبق است، بنابراین $\bar{y} = ۰$ است. $Q_B = $ (مساحت سطح هاشور خورده) $A.\bar{y} = A \times ۰ = ۰ \Rightarrow \tau_B = ۰$



مثال ۹۰: مقطع تیری فلزی مطابق شکل از ورق با ضخامت نازک t ساخته شده است. براثر برش V، حداکثر تنش برشی در ورق‌ها چقدر است؟



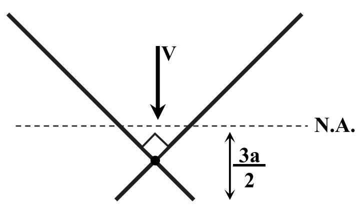
۱) $\frac{V}{۶at}$

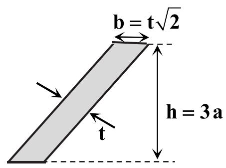
۲) $\frac{V}{۴\sqrt{۲}at}$

۳) $\frac{V}{۴at}$

۴) $\frac{V}{۳\sqrt{۲}at}$

پاسخ: گزینه «۳» تنش برشی در روی تار خنثی ماکزیمم می‌شود. اما تار خنثی از وسط ارتفاع $\bar{y} = \frac{h}{۲} = \frac{۳a}{۲}$ می‌گذرد. از طرفی برای محاسبه ممان اینرسی متوازی‌الاضلاع می‌توان از فرمول ممان اینرسی مستطیل استفاده نمود $(I = \frac{bh^۳}{۱۲})$ که در آن h برابر ارتفاع متوازی‌الاضلاع بوده و b برابر قاعده متوازی‌الاضلاع است.



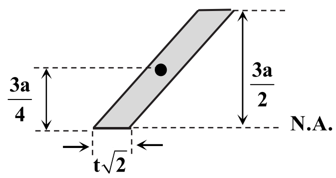


$$I = ۲ \times \frac{bh^۳}{۱۲} = \frac{۲}{۱۲}(۳a)^۳ t\sqrt{۲} = \frac{۹\sqrt{۲}}{۲}a^۳ t$$

ممان استاتیک سطح هاشور خورده بالای تار خنثی برابر است با:

$$Q = A\bar{y} = ۲(\frac{۳}{۲}a \times t\sqrt{۲}) \times \frac{۳a}{۴} = \frac{۹a^۲ t}{۴}\sqrt{۲}$$

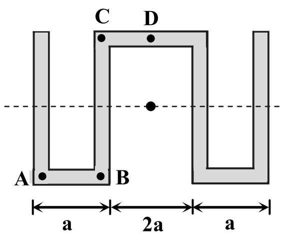
در رابطه فوق ممان استاتیک هر دو شاخه حول تار خنثی محاسبه شده است.



$$\tau_{max}=\frac{V\times\frac{9\sqrt{2}}{4}a^2t}{\frac{9\sqrt{2}}{2}a^3t\times 2t}=\frac{V}{4at}$$

لازم به ذکر است که در رابطه‌ی فوق به جای ضخامت در مخرج کسر رابطه تنش برشی ماکزیمم، مجموع ضخامت مقطع در روی تار خنثی قرار داده شده است.

مثال۹۱: درمقطع متقارن شکل زیر نیروی برشی موازی BC می‌باشد. تنش برشی در کدام یک از نقاط اشاره شده صفر خواهد بود؟ (ضخامت ثابت است.) (مهندسی عمران- سراسری۸۳)



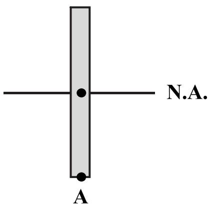
۱) D,B

۲) D,A

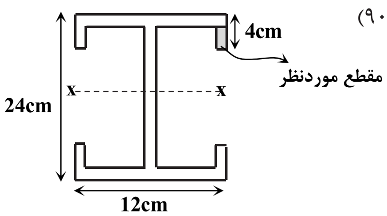
۳) C,B

۴) C,A

پاسخ: گزینه «۲» نقطه D روی محور تقارن قرار داشته و نیروی برش در امتداد این محور به سطح مقطع وارد می‌شود، در نتیجه تنش برشی بر روی آن صفر است. در نقطه A نیز Q مساوی صفر می‌باشد، چرا که تار خنثی از وسط ارتفاع مقطع گذشته و برای محاسبه تنش برشی در نقطه A باید در آن نقطه، مقطع را برش زده و Q بخش جدا شده را محاسبه نمود. اما مرکز سطح هاشور خورده بر روی تار خنثی منطبق است و بنابراین $\bar{y}=0$ می‌باشد. $Q_A=A.\bar{y}=A\times 0=0\Rightarrow \tau_A=0$



مثال۹۲: شکل زیر تیری است که تحت برش V قرار دارد. اگر I_x ممان اینرسی مقطع و ضخامت در همه جا ۲ سانتی‌متر باشد، تنش برشی در مقطع نشان داده شده کدام گزینه می‌باشد؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۹۰)

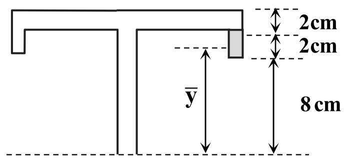


۱) $9\frac{V}{I}$ به طرف پایین

۲) $9\frac{V}{I}$ به طرف بالا

۳) $18\frac{V}{I}$ به طرف پایین

۴) $18\frac{V}{I}$ به طرف بالا



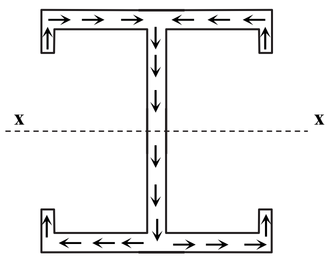
پاسخ: گزینه «۴» تنش برشی در مقطع نشان داده شده توسط رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\tau=\frac{VQ}{It}=\frac{V}{I}(\frac{Q}{t})$$

$$Q=A\bar{y}\Rightarrow Q=(2\times 2)\times(8+1)=36\text{cm}^3$$

$$\frac{Q}{t}=\frac{36}{2}=18\ \ \text{cm}^2$$

$$\tau=\frac{V}{I}\times 18$$



نحوه توزیع جریان برش نیز به شکل رسم شده روبه‌رو می‌باشد.

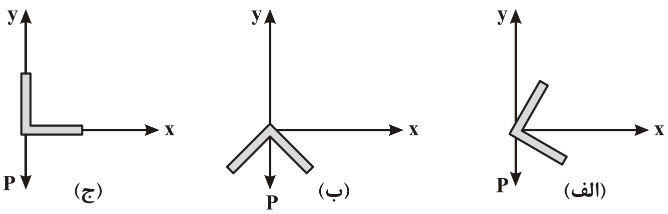
مثال۹۳: اشکال زیر، مقاطع یک تیره طرّه را که در انتهای آزاد تحت بار P قرار گرفته است، نشان می‌دهند. در کدام حالت، عضو بدون پیچش خم می‌شود؟ (دکتری ۹۲)

۱) در حالت (ج)

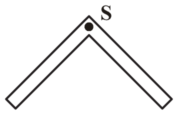
۲) در حالت (ب)

۳) در حالت (الف)

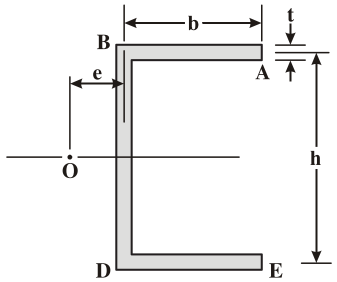
۴) در هر سه حالت



پاسخ: گزینه «۴» اگر بار P بر مرکز برش اعمال شود، مقطع تیر بدون پیچش، دچار خمش خواهد شد. اما در مقاطع نبشی، محل مرکز برش در محل تلاقی دو بال تیر می‌باشد و چون در هر سه شکل، نیروی P بر مرکز برش اعمال شده است، بنابراین تیر در هر سه حالت فقط دچار خمش می‌شود.



مثال ۹۴: مرکز برش پروفیل نشان داده شده، (e) برابر کدام است؟ (مهندسی مکانیک بیوسیستم ـ سراسری ۹۵)



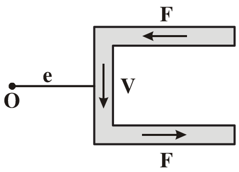
۱) $\frac{th^2b}{4I}$

۲) $\frac{th^2b^2}{4I}$

۳) $\frac{th^2b^2}{2I}$

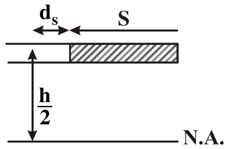
۴) $\frac{thb^2}{4I}$

پاسخ: گزینه «۲» با گشتاورگیری نیروی حاصل از جریان برش حول نقطه‌ی O و مساوی صفر قرار دادن حاصل آن، فاصله‌ی مرکز جان پروفیل از مرکز برش به‌دست می‌آید:



$$\sum M_O = 0 \Rightarrow -Ve + Fh = 0 \Rightarrow e = \frac{Fh}{V} \qquad (1)$$

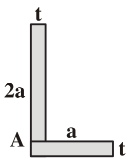
و اما مقدار نیروی F در بال‌های افقی مقطع تیر برابر است با:



$$F = \int q ds = \int \frac{VQ}{I} ds = \frac{V}{I}\int (A\bar{y}) ds \Rightarrow F = \frac{V}{I}\int st \times \frac{h}{2} ds = \frac{Vth}{2I}\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^b \Rightarrow F = \frac{Vthb^2}{4I} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow e = \frac{th^2b^2}{4I}$$

مثال ۹۵: نبشی به ابعاد $2a \times a$ و ضخامت کم $t \ll a$ تحت تأثیر تلاش برشی عمودی قرار گرفته است. نسبت تنش برشی در مقطع A به تنش برشی بیشینه چقدر است؟ (مهندسی مکانیک بیوسیستم ـ سراسری ۹۵)



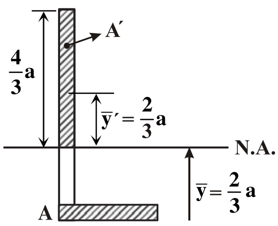
۱) $\frac{2}{3}$

۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{1}{9}$

۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا باید موقعیت تار خنثی را تعیین نمود:



$$\bar{y} = \frac{y_1A_1 + y_2A_2}{A_1 + A_2} = \frac{2at \times a}{2at + at} = \frac{2}{3}a$$

تنش برشی ماکزیمم در روی تار خنثی ایجاد می‌شود، بنابراین گشتاور اول سطح در روی این تار حداکثر می‌شود.

$$\tau_{max} = \frac{VQ}{It} = \frac{V}{It} \times Q_{max} = \frac{V}{It}(A'\bar{y}') = \frac{V}{It} \times \frac{4}{3}at \times \frac{2}{3}a \Rightarrow \tau_{max} = \frac{V}{It} \times \frac{8}{9}a^2t \qquad (1)$$

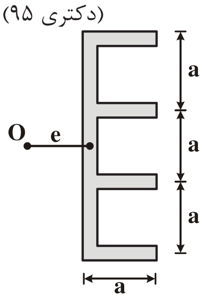
و اما تنش برشی در نقطه A برابر است با:

$$\tau_A = \frac{V}{It}Q_A = \frac{V}{It} \times at \times \frac{2}{3}a = \frac{V}{It} \times \frac{2}{3}a^2t \qquad (2)$$

از نتایج به‌دست آمده از رابطه‌ی (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{\tau_A}{\tau_{max}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

مثال ۹۶: در شکل زیر، مرکز برش در چه فاصله‌ای از جان مقطع قرار دارد؟ (ضخامت در همه‌جا یکسان و برابر t است) (دکتری ۹۵)



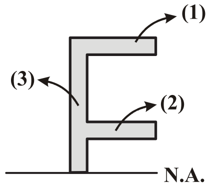
۱) ۰/۳۰a

۲) ۰/۲۸a

۳) ۰/۳۴a

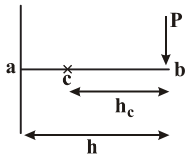
۴) ۰/۳۲a

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به حل تشریحی مثال ۷۱ همین درسنامه می‌توان نتیجه گرفت:



$$e=\frac{\sum_{i=1}^{J}I_i\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{J}I_i}=\frac{2I_1\bar{x}_1+2I_2\bar{x}_2+I_3\bar{x}_3}{2I_1+2I_2+I_3}\Rightarrow e=\frac{\frac{9a^4t}{4}+\frac{a^4t}{4}}{\frac{29a^3t}{4}}=\frac{10a}{29}=0/34\,a$$

مثال ۹۷: یک تیر با مقطع عرضی مطابق شکل مفروض است. هرگاه نیروی عمودی وارد بر تیر در نقطه «b» اثر کرده باشد، در این صورت (c مرکز سطح مقطع عرضی است). (مهندسی در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۶)



۱) در این تیر علاوه بر برش و خمش، گشتاور پیچشی برابر $P\times h_c$ نیز وجود دارد.

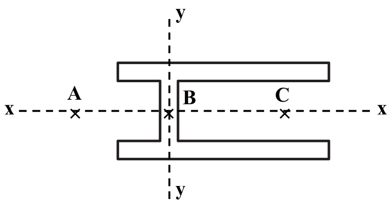
۲) در این تیر علاوه بر برش و خمش، گشتاور پیچشی برابر $P\times h$ نیز ایجاد می‌شود.

۳) در این تیر فقط نیروی برشی و گشتاور خمشی وجود دارد.

۴) این تیر در حالت خمش خالص قرار دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در مقاطع جدار نازک، گشتاور پیچشی حول مرکز برش ایجاد می‌شود. در این مقطع نقطه a مرکز برش بوده، بنابراین گشتاور پیچشی ایجاد شده برابر ph است.

مثال ۹۸: مرکز برش در مقطع شکل زیر کدام‌یک از نقاط نشان داده شده در شکل است؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۹۷)



۱) نقطه A

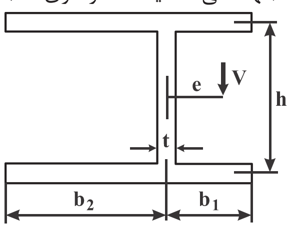
۲) نقطه B

۳) نقطه C

۴) به مقدار و جهت نیروی برشی بستگی دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مرکز برش در یک ناودانی در سمت چپ جان آن قرار دارد. در مقطع شکل مسأله اگر بال‌های سمت چپ کوچک‌تر شده تا به مقطع ناودانی تبدیل شود باید مرکز جان آن نیز بر مرکز برش مقطع ناودانی منطبق شود، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت گزینه (۱) صحیح است.

مثال ۹۹: در تیری با سطح مقطع نشان داده شده در شکل زیر محل مرکز برش (e) در کجا قرار می‌گیرد؟ ضخامت سطح مقطع همه جا یکسان و برابر t و ممان اینرسی دوم سطح مقطع نسبت به محور خنثی برابر I است. (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۹)



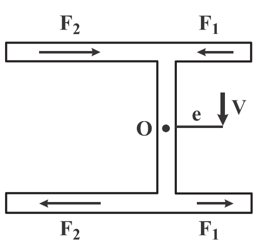
۱) $e=\frac{th^2}{2I}(b_2^2-b_1^2)$

۲) $e=\frac{th^2}{4I}(b_1^2-b_2^2)$

۳) $e=\frac{th^2}{2I}(b_1^2-b_2^2)$

۴) $e=\frac{th^2}{4I}(b_2^2-b_1^2)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای تعیین موقعیت مرکز برش، نسبت به نقطه مرکز جان تیر گشتاورگیری می‌شود.



$$\sum M_O=0\Rightarrow F_1h+Ve=F_2h \qquad (1)$$

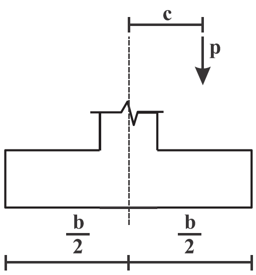
$$F_1=\int qds=\int\frac{VQ}{I}\bar{y}ds=\frac{V}{I}\int_0^{b_1}st\times\frac{h}{2}ds\Rightarrow F_1=\frac{V}{I}\frac{b_1^2th}{4} \qquad (2)$$

به همین ترتیب:

$$F_2=\frac{V}{I}\frac{b_2^2th}{4} \qquad (3)$$

$$\frac{V}{I}\frac{b_1^2th}{4}\times h+Ve\Rightarrow\frac{V}{I}\frac{b_2^2th}{4}\times h\Rightarrow e=\frac{(b_2^2-b_1^2)th^2}{4I}$$

مثال ۱۰۰: خروج از مرکزیت e چقدر باشد که مقطع نشان داده شده در آستانه بلندشدگی قرار گیرد؟ (عرض مقطع برابر واحد است.) (مهندسی عمران ـ سراسری ۹۹)

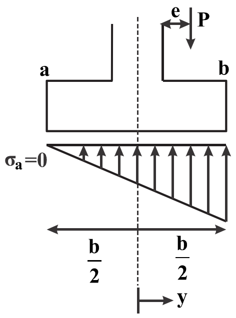


۱) $\frac{b}{6}$

۲) $\frac{b}{5}$

۳) $\frac{b}{4}$

۴) $\frac{b}{3}$



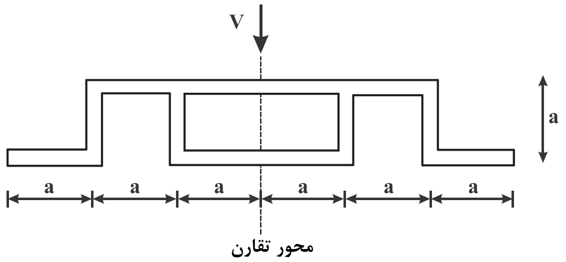
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای آن که پی در آستانه بلند شدن باشد، می‌بایست تنش در نقطه بلندشدگی برابر صفر شود.

$$\sigma_a=\frac{P}{A}+\frac{My_a}{I}\quad,\quad y_a=-\frac{b}{۲}\quad,\quad I=\frac{۱}{۱۲}b^۳h\xrightarrow{(h=۱)}I=\frac{b^۳}{۱۲}$$

$$A=bh\xrightarrow{(h=۱)}A=b\quad M=Pe\Rightarrow\sigma_a=۰\Rightarrow\frac{P}{A}+\frac{My}{I}=۰\quad\Rightarrow\frac{P}{b}+\frac{Pe(-\frac{b}{۲})}{\frac{b^۳}{۱۲}}=۰$$

$$\frac{P}{b}=\frac{۶Pe}{b^۲}\Rightarrow e=\frac{b}{۶}$$

مثال۱۰۱: در مقطع با ضخامت ثابت شکل زیر، تحت اثر برش V، در چند نقطه تنش برشی برابر صفر است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۹۹)

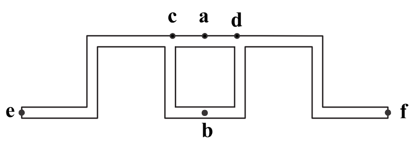


۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در محل برخورد خط تقارن و جداره مقطع مقدار تنش برشی صفر است و درحالی‌که گشتاور اول سطح نیز برابر صفر باشد، مقدار تنش برشی براساس رابطه $\tau=\frac{VQ}{It}$ برابر صفر بوده، همچنین در لبه‌های آزاد مقطع نیز تنش برش صفر خواهد بود: (نقاط a، b، c، d، e و f)

مثال۱۰۲: کدام گزینه در بارگذاری برشی (عرضی) صحیح است؟ (مهندسی مکانیک بیوسیستم ـ سراسری ۱۴۰۰)

۱) مرکز برش به ابعاد هندسی و شکل مقطع بستگی دارد.

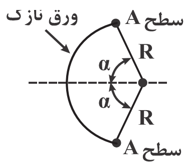
۲) مرکز برش به ابعاد هندسی مقطع و طول تیر بستگی دارد.

۳) مرکز برش به مقدار بار و ابعاد هندسی مقطع بستگی دارد.

۴) مرکز برش به مقدار بار، طول تیر و ابعاد هندسی مقطع بستگی دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مرکز برش برای تیرهای همگن تنها وابسته به ابعاد و شکل هندسی سطح مقطع می‌باشد و تابعی از جنس و نوع بارگذاری نیست.

مثال۱۰۳: ورق شکل مقابل، کمانی از یک دایره است که دو سطح متمرکز با مساحت A در دو انتهای آن قرار دارند. اگر مساحت مقطع ورق نازک در مقایسه با سطوح A، ناچیز و قابل صرف‌نظر باشد مرکز برش در چه فاصله‌ای از مرکز دایره قرار می‌گیرد؟ $\left(۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}\right)$ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۱۴۰۰)



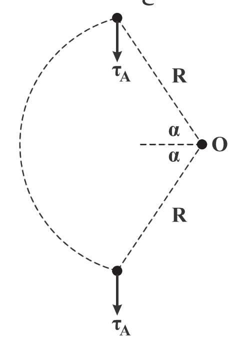
۱) $\frac{R\cos\alpha}{\alpha}$

۲) $R\cos\alpha$

۳) $\frac{R\alpha}{\sin\alpha}$

۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

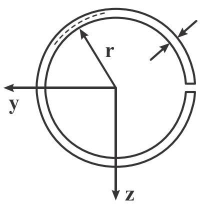


$$\sum M_o=۰\Rightarrow\tau_A\times R\cos\alpha\times۲=Fe\qquad(۱)$$

از طرفی: $۲\tau_A=F\Rightarrow\tau_A=\frac{F}{۲}\qquad(۲)$

$$(۱),(۲)\Rightarrow e=R\cos\alpha$$

مثال۱۰۴: فاصله مرکز برش حلقه‌ی جدار نازک باز نشان داده شده تا مرکز آن حلقه، چه ضریبی از شعاع حلقه است؟ (مهندسی عمران ـ دکتری ۱۴۰۲)



۱) ۱/۵

۲) ۲

۳) ۲/۵

۴) ۳