سؤالات آزمون مهندسی برق ـ الکترونیک ـ دکتری ۹۸

۱ـ اگر $u(x,t)$ جواب مسئله موج زیر باشد، مقدار تقریبی $u(۰/۴,۱/۳)$ کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt}-۹u_{xx}=۰ \ , \ ۰<x<۲, t>۰ \\ u(x,۰)=۲x+۱ \\ u_t(x,۰)=x \quad , \ ۰\le x\le ۲ \\ u(۰,t)=u(۲,t)=۰ \ , \ t\ge ۰ \end{cases}$$

۱) ۱/۲۴
۲) ۱/۷۹
۳) ۱/۹۶
۴) ۲/۱۵

۲ـ فرض کنید $z=x+iy$ باشد. مقدار ماکزیمم $|\sin z|$ در دامنه مربعی شکل $D=\{(x,y), ۰\le x,y\le ۲\pi\}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $e^{۲\pi}$
۳) $\sinh ۲\pi$
۴) $\cosh ۲\pi$

۳ـ جواب مسئله پواسن زیر کدام است؟

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^۲\omega}{\partial r^۲}+\dfrac{۱}{r}\dfrac{\partial\omega}{\partial r}+\dfrac{۱}{r^۲}\dfrac{\partial^۲\omega}{\partial\theta^۲}=\dfrac{\sin\theta}{r^۲} \ , \ ۰<r<۲ \ , \ ۰<\theta<۲\pi \\ \omega(r,۰)=۰ \quad , \quad ۰\le r\le ۲ \\ \omega(۲,\theta)=\sin ۳\theta \quad , \quad ۰\le\theta\le ۲\pi \end{cases}$$

۱) $\omega(r,\theta)=\sum_{n=۱}^{\infty} r^n \sin ۳n\theta$
۲) $\omega(r,\theta)=\frac{۱}{۲}r\sin\theta+\frac{۱}{۸}r^۳\sin\theta$
۳) $\omega(r,\theta)=\sum_{n=۱}^{\infty}(r^n+r^{-n})\sin ۳n\theta$
۴) $\omega(r,\theta)=(\frac{۱}{۲}r-۱)\sin\theta+\frac{۱}{۸}r^۳\sin ۳\theta$

۴ـ انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}|\sin x| &, |x|\le\pi \\ ۰ &, |x|>\pi\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\pi}\int_۰^{\infty}\frac{۱+\cos(\omega\pi)}{۱-\omega^۲}\cos(\omega x)d\omega$
۲) $\frac{۱}{\pi}\int_۰^{\infty}\frac{۱+\cos(\omega\pi)}{۱-\omega^۲}\omega\cos(\omega x)d\omega$
۳) $\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\infty}\frac{۱+\cos(\omega\pi)}{۱-\omega^۲}\cos(\omega x)d\omega$
۴) $\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\infty}\frac{۱+\cos(\omega\pi)}{۱-\omega^۲}\omega\cos(\omega x)d\omega$

۵ـ اگر C مرز نیم‌دایره فوقانی $|z|=r$ در جهت مثبت و $I(r)=\int_C \frac{e^{iz}}{z}dz$ باشد، $\lim_{r\to\infty} I(r)$ کدام است؟

۱) ۰
۲) ۱
۳) π
۴) ∞

۶ـ مسئله گرمای زیر را در نظر بگیرید، اگر $v(x,s)$ تبدیل لاپلاس $u(x,t)$ باشد، آنگاه $v(x,s)$ در کدام معادله صدق می‌کند؟

$$\begin{cases} u_t(x,t)-۴u_{xx}(x,t)=۳u(x,t) \ , \ x>۰, t>۰ \\ u(x,۰)=-e^{-x} \quad , \ x>۰ \\ u(۰,t)=۰ \quad , \ t\ge ۰ \end{cases}$$

۱) $۴v''(x,s)+(۳-s)v(x,s)=e^{-x}$
۲) $v''(x,s)+(۴s-۳)v(x,s)=e^{-x}$
۳) $۴v''(x,s)+(s-۳)v(x,s)=se^{-x}$
۴) $v''(x,s)+(۳-۴s)v(x,s)=se^{-x}$

۷ـ معادله دیفرانسیل جزئی ناهمگن زیر با تغییر متغیر $u(x,t)=v(x,t)+r(x)$ به یک معادله همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل می‌شود. $v(x,۰)$ کدام است؟

$$\begin{cases} u_{xx}=u_t+x-۱ \ , \ ۰<x<۲ \ , \ t>۰ \\ u(۰,t)=۳ \quad , u(۲,t)=-۱ \ , t>۰ \\ u(x,۰)=۱-x^۳ \quad , ۰<x<۲ \end{cases}$$

۱) $-\frac{۷}{۶}x^۳+\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۵}{۳}x-۲$
۲) $-\frac{۷}{۶}x^۳+\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۵}{۳}x-۲$
۳) $-\frac{۷}{۶}x^۳+\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۵}{۳}x+۳$
۴) $-\frac{۷}{۶}x^۳+\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۵}{۳}x+۳$

۸ـ اگر $v(x,y)$ مزدوج همساز تابع $u(x,y)=(x^۲-y^۲+۱)^۲-۴x^۲y^۲$ با شرط $v(۰,۰)=۰$ باشد، مقدار $v(۱,۱)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۴
۴) -۴

۹ـ اگر $F_s\{f(x)\}=\int_۰^{\infty} f(x)\sin\omega x dx$ تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x)$ باشد، تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x)=\frac{x}{x^۲+۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}e^{-۲\omega}$
۲) $\frac{\pi}{۲}e^{۲\omega}$
۳) $\pi e^{-۲\omega}$
۴) $e^{۲\omega}$

۱۰ـ سری نیم‌دامنه سینوسی تابع $f(x)=x(\pi-x)$ در فاصله $0<x<\pi$ کدام است؟

۱) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{(2m+1)\pi}\sin(2m+1)x$

۲) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{8}{(2m+1)^3\pi}\sin(2m+1)x$

۳) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{m\pi}\sin 2mx$

۴) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3\pi}\sin 2mx$

۱۱ـ اگر $F(\omega,t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)e^{-i\omega x}dx$ تبدیل فوریه $f(x)$ باشد، تبدیل فوریه جواب مسئله زیر کدام است؟

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=f(x,t)\ ,\ t>0\ ,\ x\in\mathbb{R}\\ u(x,0)=0\ ,\ x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

۱) $\int_0^t F(\omega,\tau)e^{a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$

۲) $\int_0^t F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$

۳) $\int_0^{\infty} F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$

۴) $\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$

۱۲ـ فرض کنید تابع تحلیلی $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ برای هر $z\in\mathbb{C}$ در نامساوی $|f(z)-2z^2-iz|\le\sqrt{2}$ صدق کند. در این‌صورت مقدار $\oint_{|z|=1}f\left(\frac{1}{z}\right)dz$ کدام است؟

۱) $2\pi i$

۲) $-2\pi i$

۳) 2π

۴) -2π

۱۳ـ تصویر خط راست $2x+3y=5$ تحت نگاشت $w=u+iv=\frac{1}{z}$، کدام است؟

۱) $(u-\frac{1}{5})^2+(v+\frac{3}{10})^2=\frac{13}{100}$

۲) $(u-\frac{1}{5})^2+(v-\frac{3}{10})^2=\frac{13}{100}$

۳) $(u+\frac{1}{5})^2+(v-\frac{3}{10})^2=\frac{13}{100}$

۴) $(u+\frac{1}{5})^2+(v+\frac{3}{10})^2=\frac{13}{100}$

۱۴ـ فرم کلی جواب مسئله موج زیر کدام است؟

$$\begin{cases}u_{tt}(x,y,t)-9\nabla^2u(x,y,t)=\begin{cases}te^{-|x+y|} & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}\ ,\ y\in\mathbb{R}\ ,\ t>0\\ u(x,y,0)=\begin{cases}x+y & 0<x<1\ ,\ -2<y<2\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}\\ u_t(x,y,0)=0\ ,\ x>0,y\in\mathbb{R}\\ u(0,y,t)=0\ ,\ y\in\mathbb{R}\end{cases}$$

۱) $u(x,y,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1(A_\omega\cos 3\omega t+B_\omega\sin 3\omega t+C_\omega t+D_\omega)e^{i\omega y}\sin(\omega x)dxdy$

۲) $u(x,y,t)=\int_{-2}^{2}\int_0^1(A_\omega\cos 3\omega t+B_\omega\sin 3\omega t+C_\omega t+D_\omega)e^{i\omega y}\sin(\omega x)dxdy$

۳) $u(x,y,t)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(A_\omega\cos 3\omega t+B_\omega\sin 3\omega t+C_\omega t+D_\omega)e^{i\omega y}\sin(\omega x)dxdy$

۴) $u(x,y,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}(A_\omega\cos 3\omega t+B_\omega\sin 3\omega t+C_\omega t+D_\omega)e^{i\omega y}\sin(\omega x)dxdy$

۱۵ـ اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل $y''-4y'+3y=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ با شرط $\lim_{x\to\infty}y(x)=\lim_{x\to\infty}y'(x)=0$ باشد، تبدیل فوریه $y(x)$ کدام است؟

(راهنمایی: $F\{y(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}y(x)e^{-i\omega x}dx$)

۱) $\frac{\sin 2\omega}{\omega^2+4i\omega-3}$

۲) $\frac{\sin\omega}{\omega^2+4i\omega-3}$

۳) $\frac{-2\sin\omega}{\omega(\omega^2+4i\omega-3)}$

۴) $\frac{2\sin\omega}{\omega(\omega^2+4i\omega-3)}$

پاسخنامه آزمون مهندسی برق ـ الکترونیک ـ دکتری ۹۸

۱ـ گزینه «۲» از سؤالات بسیار پرتکرار در آزمون‌های کارشناسی ارشد و دکتری که هم در کتاب و هم در آزمون‌های آزمایشی بر روی آن تمرکز ویژه‌ای داشته‌ایم. از روش جبری کمک می‌گیریم:

$$u(x,t)=\frac{۱}{۲}[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)]+\frac{۱}{۲c}[G^*(x+ct)-G^*(x-ct)]$$

که در این سؤال $c=۳$، $x=۰/۴$ و $t=۱/۳$ است. چون هر دو شرط مرزی روی u است، پس دوره تناوب $۲\times۲=۴$ است. با این توضیحات سراغ محاسبه می‌رویم:

$$u(۰/۴,۱/۳)=\frac{۱}{۲}[f^*(۰/۴+۳\times۱/۳)+f^*(۰/۴-۳\times۱/۳)]+\frac{۱}{۲\times۳}[G^*(۰/۴+۳\times۱/۳)-G^*(۰/۴-۳\times۱/۳)]$$

$$=\frac{۱}{۲}[f^*(۴/۳)+f^*(-۳/۵)]+\frac{۱}{۲}[G^*(۴/۳)-G^*(-۳/۵)]$$

دقت کنید مقادیر داخل پرانتزها یعنی دو عدد $۴/۳$ و $-۳/۵$ خارج از بازه‌ی $[۰,۲]$ هستند، پس باید با استفاده از دوره تناوب آن‌ها را درون بازه بیاوریم! اگر به اندازه‌ی یک دوره تناوب از $۴/۳$ کم کنیم، به عدد $۰/۳$ و اگر به اندازه یک دوره تناوب به $-۳/۵$ اضافه کنیم، به عدد $۰/۵$ می‌رسیم، پس داریم:

$$u(۰/۴,۱/۳)=\frac{۱}{۲}[f^*(۰/۳)+f^*(۰/۵)]+\frac{۱}{۶}[G^*(۰/۳)-G^*(۰/۵)]$$

ضابطه‌ی f که معلوم است، $f=۲x+۱$. ضابطه‌ی G هم با انتگرال‌گیری از $g(x)=x$ به‌دست می‌آید:

$$G(x)=\int_۰^x g(x)\,dx=\frac{x^۲}{۲}$$

پس داریم:

$$u(۰/۴,۱/۳)=\frac{۱}{۲}[۲\times۰/۳+۱+۲\times۰/۵+۱]+\frac{۱}{۶}\left[\frac{(\frac{۳}{۱۰})^۲}{۲}-\frac{(\frac{۱}{۲})^۲}{۲}\right]=\frac{۱}{۲}[۱/۶+۲]+\frac{۱}{۶}\left[\frac{\frac{۹}{۱۰۰}-\frac{۱}{۴}}{۲}\right]=۱/۸+\frac{۱}{۱۲}\left[\frac{۹-۲۵}{۱۰۰}\right]$$

$$=۱/۸+\frac{۱}{۱۲}\left[-\frac{۱۶}{۱۰۰}\right]=۱/۸-\frac{۱}{۷۵}$$

که تقریباً برابر با ۱/۷۹ می‌شود.

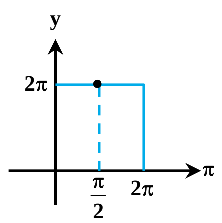
توضیح: سؤال فی‌نفسه سؤال راحتی از این نوع سؤالات بود، چون به روش جبری حتی نیاز به استفاده از گسترش توابع f^* و G^* هم نداشتیم. اما محاسبات اعشاری آن کمی جالب نبود!

۲ـ گزینه «۴» در مثال متن کتاب ریاضی مهندسی مدرسان شریف، بخش توابع هذلولی مختلط ثابت کردیم که $|\sin z|$ برابر با $\sqrt{\sin^۲ x+\sinh^۲ y}$ است. می‌توانید اندازه $\sin z$ را از رابطه‌ی زیر حساب کنید:

$$\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\cosh y$$

پس $|\sin z|$ قطعاً بزرگ‌تر یا مساوی $\sinh y$ است؛ چون حداقلِ $\sin^۲ x$ صفر است، از طرفی می‌توان نوشت:

$$|\sin z|=\sqrt{۱-\cos^۲ x+\cosh^۲ y-۱}=\sqrt{\cosh^۲ y-\cos^۲ x}$$



چون حداقلِ $\cos^۲ x$ صفر است، پس حداکثر $\sin z$ هم برابر با $\cosh y$ است. ماکزیمم $\cosh y$ در ناحیه مشخص شده برابر با $\cosh ۲\pi$ است. در واقع ماکزیمم روی مرز و در نقطه‌ی $(x,y)=(\frac{\pi}{۲},۲\pi)$ اتفاق می‌افتد. البته در صورت تسلط بر روی اصل ماکزیمم و کمی تجربه به راحتی می‌توان با توجه به شکل مقابل گفت؛ ماکزیمم در نقطه‌ی $(x,y)=(\frac{\pi}{۲},۲\pi)$ رخ می‌دهد و با توجه به رابطه‌ی $\sin z$ به وضوح $\mathrm{Max}|\sin z|=\cosh ۲\pi$ است.

۳ـ گزینه «۴» در ابتدا طرفین معادله را در $r^۲$ ضرب می‌کنیم:

$$r^۲\frac{\partial^۲\omega}{\partial r^۲}+r\frac{\partial\omega}{\partial r}+\frac{\partial^۲\omega}{\partial\theta^۲}=\sin\theta \qquad (I)$$

اکنون برای حل معادله بالا از تغییر متغیر مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\omega(r,\theta)=W(r,\theta)+f(\theta) \qquad (II)$$

با جایگذاری رابطه (II) در رابطه (I) خواهیم داشت:

$$r^۲(W_{rr})+r(W_r)+W_{\theta\theta}+f''(\theta)=\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} r^۲W_{rr}+rW_r+W_{\theta\theta}=۰ \\ f''(\theta)=\sin\theta \end{cases}$$

همچنین با توجه به شرایط اولیه و بررسی و تغییر متغیر داریم:

$$W(r,۰)+f(۰)=۰ \Rightarrow W(r,۰)=f(۰)=۰$$

$$W(۲,\theta)+f(\theta)=\sin ۳\theta$$

پس داریم:

$$f''(\theta)=\sin\theta \Rightarrow f(\theta)=-\sin\theta+C_۱\theta+C_۲$$

چون زوج‌های مرتب (r,θ) و $(r,\theta+2n\pi)$ یک نقطه را در صفحه مشخص می‌کنند، برای این که $\omega(r,\theta)$ تابع باشد، باید داشته باشیم:

$$\omega(r,\theta)=\omega(r,\theta+2n\pi)$$

پس یعنی ω باید نسبت به θ تناوبی باشد. ω خود حاصل‌جمع W و f است. با توجه به اینکه W خود نسبت به θ تناوبی است f نیز باید همین شـرایط را داشته باشد.

$$f(\theta)=f(\theta+2n\pi)\Rightarrow -\sin\theta+C_1\theta+C_2=-\sin(\theta+2n\pi)+C_1(\theta+2n\pi)+C_2$$

$$\Rightarrow -\sin\theta+C_1\theta+C_2=-\sin\theta+C_1(\theta+2n\pi)+C_2\ \Rightarrow C_1=0$$

$$f(\theta)=-\sin\theta+C_2$$

از طرفی داریم $f(0)=0$ پس $C_2=0$ خواهد بود. پس تابع $f(\theta)=-\sin\theta$ به‌دست می‌آید. اکنون به سراغ حل معادله مربوط به W می‌رویم:

$$\begin{cases} W_{rr}+\dfrac{1}{r}W_r+\dfrac{1}{r^2}W_{\theta\theta}=0 \\ W(r,0)=0 \\ W(2,\theta)=\sin3\theta-f(\theta)=\sin3\theta-(-\sin\theta)=\sin3\theta+\sin\theta \end{cases}$$

معادله لاپلاس روی یک دیسک $(0<\theta<2\pi$ و $0<r<2)$ دارای جوابی به صورت زیر می‌باشد: (در متن کتاب ریاضی مهندسی مدرسان شریف مطرح شده است):

$$W(r,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$$

شرط $W(r,0)=0$ ایجاب می‌کنـد کـه در رابطـه بـالا $A_n=0$ باشـد (بـه‌ازای $n=0,1,2,3,\ldots$). همچنـین مطـابق بـا شـرط $W(2,\theta)=\sin3\theta+\sin\theta$، ضرایب $B_1=\frac{1}{2}$ و $B_3=\frac{1}{8}$ و بقیه Bها برابر صفر به‌دست می‌آیند؛ پس داریم:

$$W(r,\theta)=\frac{1}{2}r\sin\theta+\frac{1}{8}r^3\sin3\theta$$

به‌دست می‌آید و در نهایت:

$$\omega(r,\theta)=\frac{1}{2}r\sin\theta+\frac{1}{8}r^3\sin3\theta-\sin\theta=(\frac{1}{2}r-1)\sin\theta+\frac{1}{8}r^3\sin3\theta$$

روش رد گزینه : با توجه به شرایط مرزی اگه به جای r عدد ۲ رو قرار بدیم باید به $\sin3\theta$ برسیم، به وضوح فقط گزینه (۴) تو این شرایط صدق می‌کنه!!

۴ــ گزینه «۳» سؤال بسیار پرتکرار و نسبتاً ساده است. با توجه به این که تابع زوج است، پس تبدیل فوریه کسینوسی باید مورد استفاده قرار بگیرد:

$$I=F_c(\omega)=\int_0^{\infty}|\sin x|\cos\omega x\,dx=\int_0^{\pi}\sin x\cos\omega x\,dx$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء داریم:

	مشتق	انتگرال
$\oplus$	$\cos\omega x$	$\sin x$
$\ominus$	$-\omega\sin\omega x$	$-\cos x$
$\oplus$	$-\omega^2\cos\omega x$	$-\sin x$ → انتگرال می‌گیریم

چون مشتق صفر نمی‌شود، لذا در مرحله‌ی سوم انتگرال می‌گیریم:

$$I=-[\cos x\cos\omega x]_0^{\pi}-[\omega\sin x\sin\omega x]_0^{\pi}+\omega^2 I\Rightarrow(1-\omega^2)I=1+\cos\pi\omega\Rightarrow I=F_c(\omega)=\frac{1+\cos\pi\omega}{1-\omega^2}\Rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1+\cos\pi x}{1-\omega^2}\cos\omega x\,d\omega$$

۵ــ گزینه «۱» از قضیه مانده‌ها کمک می‌گیریم. دقت کنید طبق توضیحات کتاب ریاضی مهندسی مدرسان شریف، چون حول مانده یک گردش کامل نداریم و نصف یک دور کامل داریم، به جای $2\pi i$ باید حاصل انتگرال در πi ضرب شود.

$$I(r)=\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{iz}}{z}=\pi i[\frac{e^{iz}}{1}]_{z=0}=\pi i$$

که $|I(r)|=\pi$ می‌شود. اما عجله نکنید! برای انتخاب گزینه (۳)، چون $r\to\infty$ داده شده و منحنی C به صورت $|z|=\infty$ است، یعنی مانده در بی‌نهایت هم باید حساب شود. می‌دانیم مقدار مانده در بی‌نهایت قرینه‌ی مجموع مانده‌ها در نقاط تکین است، یعنی مانده در بی‌نهایت برابر با ۱- است و لذا حاصل انتگرال صفر است.

۶ــ گزینه «۱» سؤال ساده‌ای است! طراح خودش به وضوح استفاده از تبدیل لاپلاس را پیشنهاد داده است. ابتدا دقت کنید که داریم:

$$L[u_t(x,t)]=su(x,s)-u(x,0)$$

در این سؤال طراح به جای $u(x,s)$ خواسته است که $v(x,s)$ بنویسیم! اشکال ندارد فقط یک نماد است و برای ما هم فرقی ندارد. در ادامه داریم:

$$sv(x,s)-u(x,0)-4v''(x,s)=3v(x,s)\ \Rightarrow 4v''(x,s)+(3-s)v(x,s)=e^{-x}$$

۷ـ گزینه «۲» ابتدا از طرفین رابطه‌ی $u(x,t)=v(x,t)+r(x)$ دو بار نسبت به x و در یک مرحله‌ی دیگر یک‌بار نسبت به t مشتق می‌گیریم و داریم:

$$u_{xx}=v_{xx}+r_{xx}\ ,\ u_t(x,t)=v_t(x,t)+0$$

حالا در معادله جایگزین می‌کنیم:

$$v_{xx}+r_{xx}=v_t(x,t)+x-1$$

بر اساس دو شرط اولیه صورت سؤال داریم:

$$u(0,t)=v(0,t)+r(0)\Rightarrow 3=v(0,t)+r(0)\quad ,\quad u(2,t)=v(2,t)+r(2)\Rightarrow -1=v(2,t)+r(2)$$

برای این که شرایط مرزی برحسب v همگن شود باید $r(0)=3$ و $r(2)=-1$ شود، بنابراین با دستگاه معادلات زیر برای همگن شدن معادله و شرایط مرزی آن روبه‌رو هستیم:

$$\begin{cases}r_{xx}=x-1\Rightarrow r_x=\dfrac{x^2}{2}-x+c_1\Rightarrow r(x)=\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}+c_1x+c_2\\ r(0)=3,r(2)=-1\end{cases}$$

حالا از شرط $r(0)=3$ به راحتی c_2 برابر با ۳ به‌دست می‌آید و از شرط $r(2)=-1$ داریم:

$$-1=\frac{2^3}{6}-\frac{2^2}{2}+c_1(2)+3\Rightarrow -4=\frac{4}{3}-2+2c_1\Rightarrow 2c_1=-2-\frac{4}{3}\Rightarrow c_1=-\frac{5}{3}$$

بنابراین داریم: $r(x)=\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{5}{3}x+3$.

ما دنبال $v(x,0)$ هستیم. اگر دوباره به تغییر متغیر صورت سؤال برگردیم، رابطه‌ی مقابل را داریم: $u(x,0)=v(x,0)+r(x)$

$$\Rightarrow 1-x^3=v(x,0)+\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-\frac{5}{3}x+3\Rightarrow v(x,0)=-\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{3}x-2$$

روش تستی: خُب از شرط صورت سؤال داریم: $u(x,t)=v(x,t)+r(x)\qquad (*)$

با توجه به داده‌های دیگه دو شرط $u(0,t)=3$ و $u(2,t)=-1$ داریم، پس از این دو شرط فعلاً کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases}u(0,t)=v(0,t)+r(0)\Rightarrow 3=v(0,t)+r(0)\\ u(2,t)=v(2,t)+r(2)\Rightarrow -1=v(2,t)+r(2)\end{cases}$$

چون قراره معادله برحسب v یک معادله‌ی همگن با شرایط مرزی همگن باشه، پس باید $v(0,t)=v(2,t)=0$ باشه، بنابراین $r(0)=3$ و $r(2)=-1$ نتیجه‌ای که تا اینجا داریم. دنبال $v(x,0)$ هستیم؛ در رابطه‌ی $(*)$ به جای t ها صفر قرار می‌دیم:

$$u(x,0)=v(x,0)+r(x)\Rightarrow v(x,0)=u(x,0)-r(x)\Rightarrow \boxed{v(x,0)=1-x^3-r(x)}$$

اگه در طرفین رابطه‌ی فوق به جای x ها عدد صفر رو قرار بدیم، داریم: $v(0,0)=1-0-r(0)\xrightarrow{r(0)=3}v(0,0)=-2$

تو گزینه‌ها فقط گزینه‌های (۱) و (۲) هستن که اگه به جای x های اونا صفر قرار بدیم، مقدارشون برابر منفی (۲) میشه، پس تا اینجا گزینه‌های (۳) و (۴) میپرن!

حالا برای انتخاب از بین گزینه‌های (۱) و (۲) از شرط $r(2)=-1$ کمک می‌گیریم: $v(2,0)=1-2^3-r(2)\Rightarrow v(2,0)=1-8-(-1)=-6$

کافیه از بین گزینه‌های (۱) و (۲) تو یکی به جای x عدد ۲ قرار بدیم، مثلاً تو گزینه (۲) داریم:

$$v(2,0)=-\frac{7}{6}(2^3)+\frac{1}{2}(2)^2+\frac{5}{3}\times 2-2=-\frac{7\times 4}{3}+2+\frac{10}{3}-2=\frac{-28+6+10-6}{3}=-\frac{18}{3}=-6$$

پس همین گزینه جوابه. میتونین تو گزینه (۱) به جای x، عدد ۲ رو قرار بدین و ببینین که برابر با ۶- نمیشه! (اگه این کارو هم میکردین باز هم می‌تونستین بدون محاسبه‌ی گزینه (۲)، به جواب برسین فرقی نداره!)

۸ـ گزینه «۳» از سؤالات تکراری که چند بار تاکنون عین آن طرح شده است! یک روش این است که به جای y ها، صفر و به جای x ها، z قرار دهیم و مستقیم به ضابطه‌ی $f(z)$ برسیم و روش دیگر مبتنی بر فرمول زیر است:

$$v=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy-\int(\text{عبارتی که از حذف توابع شامل } y \text{ در ضابطه‌ی } \frac{\partial u}{\partial y} \text{ حاصل می‌شود})dx$$

$$v=\int[2(x^2-y^2+1)(2x)-8xy^2]dy-\int(0)dx=4x^3y-\frac{y^3}{3}\times 4x+4xy-\frac{8xy^3}{3}+c=4x^3y-\frac{12xy^3}{3}+4xy+c$$

$$\Rightarrow v(x,y)=4xy(x^2-y^2+1)+c\xrightarrow{v(0,0)=0}c=0\Rightarrow v(x,y)=4xy(x^2-y^2+1)\Rightarrow v(1,1)=4$$

روش دیگر: وقتی u را داریم می‌توانیم از فرمول مقابل به z و بعد از آن به v برسیم.

$$f(z)=u(z,0)+iv(z,0)$$

در ضابطه‌ی $u(x,y)$ به جای تمام x ها z و به جای تمام y ها صفر قرار می‌دهیم:

$$f(z)=(z^2+1)^2+iv(z,0)$$

با توجه به این که $v(0,0)=0$، پس $f(0)=1$ و با توجه به ضابطه‌ی u قطعاً $v(z,0)=0$ خواهد بود، لذا $f(z)=(z^2+1)^2$. از این‌جا داریم:

$$f(z)=(z^2+1)^2=(x^2-y^2+1+i2xy)^2=u(x,y)+i4xy(x^2-y^2+1)\Rightarrow v(x,y)=4xy(x^2-y^2+1)\Rightarrow v(1,1)=4$$

۹ـ گزینه «۱» به راحتی با استفاده از فرمول داریم:

$$F_s(\omega)=\int_0^{\infty}\underbrace{\frac{x}{x^2+4}}_{\text{فرد}}\underbrace{\sin\omega x}_{\text{فرد}}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin\omega x}{x^2+4}dx=I$$

دقت کنید برای این بازه‌ی انتگرال را به‌صورت $\int_{-\infty}^{+\infty}$ نوشتیم تا از روش محاسبه‌ی انتگرال‌های حقیقی به کمک قضیه مانده‌ها کمک بگیریم. همان‌طور که در متن کتاب ریاضی مهندسی مدرسان شریف گفته‌ایم، داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin ax\,dx=\mathrm{Im}[2\pi i\ (\text{مجموع مانده‌های تابع } f(z)e^{iaz} \text{ در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند})]$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\mathrm{Im}[2\pi i\operatorname*{Res}_{z=2i}\frac{ze^{i\omega z}}{z^2+4}]$$

دقت کنید که $z=2i$ قطب ساده درون ناحیه (نیم‌صفحه‌ی فوقانی) است، لذا داریم:

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\mathrm{Im}[2\pi i\frac{ze^{i\omega z}}{2z}]_{z=2i}=\frac{\pi}{2}e^{-2\omega}$$

۱۰ـ گزینه «۲» سؤال بسیار تکراری از سری فوریه است و اساساً جنبه‌ی محاسباتی دارد. سؤال را به دو روش حل می‌کنیم، روش اول، روش تشریحی و عادی حل سؤال است:

با توجه به اینکه سری فوریه سینوسی مدنظر است، لذا باید b_n را حساب کنیم:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi x)\sin(nx)dx+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}-x^2\sin(nx)dx=2\int_0^{\pi}x\sin(nx)dx-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin(nx)dx=I_1-I_2$$

دو انتگرال جزء به جزء داریم که از روش جدول برای هر دوی آن‌ها کمک می‌گیریم:

x	$\sin nx$
1	$\oplus\ \frac{-1}{n}\cos(nx)$
0	$\ominus\ -\frac{1}{n^2}\sin nx$

$$\Rightarrow I_1=2[-\frac{x}{n}\cos nx-\frac{1}{n^2}\sin nx]_0^{\pi}=2\times[-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)]=-\frac{2\pi}{n}\cos n\pi$$

برای محاسبه I_2 داریم:

x^2	$\sin nx$
$2x$	$\oplus\ \frac{-1}{n}\cos(nx)$
2	$\ominus\ -\frac{1}{n^2}\sin(nx)$
0	$\oplus\ +\frac{1}{n^3}\cos(nx)$

$$\Rightarrow I_2=\frac{2}{\pi}[-\frac{x^2}{n}\cos(nx)+\frac{2x}{n^2}\sin(nx)+\frac{2}{n^3}\cos(nx)]_0^{\pi}\Rightarrow I_2=\frac{2}{\pi}[(-\frac{\pi^2}{n}\cos(n\pi)+\frac{2}{n^3}\cos n\pi-\frac{2}{n^3}\cos(0)]$$

$$\Rightarrow I_2=-\frac{2\pi}{n}\cos(n\pi)+\frac{4}{\pi n^3}\cos(n\pi)-\frac{4}{\pi n^3}$$

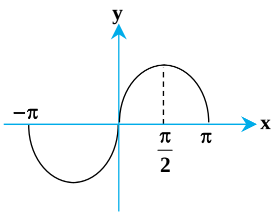
بنابراین $b_n=I_1-I_2$ برابر با مقدار مقابل است:

$$b_n=I_1-I_2=-\frac{4}{\pi n^3}\cos n\pi+\frac{4}{\pi n^3}$$

اگر n زوج باشد، آنگاه $\cos n\pi=1$ و لذا $b_n=0$ می‌شود و اگر n فرد باشد (یعنی $n=2m+1$) آنگاه داریم:

$$b_n=-\frac{4(-1)}{\pi(2m+1)^3}+\frac{4}{\pi(2m+1)^3}=\frac{8}{(2m+1)^3\pi}$$

همان‌طور که می‌بینید b_n به‌دست آمده همان b_n داده شده در گزینه (۲) می‌باشد.



روش رد گزینه: دقت کنین، چون تابع پیوسته هستش، پس قطعاً سرعت رشد ضریب از درجه یک نیست و این یعنی گزینه‌های (۱) و (۳) غلطن. از بین گزینه‌های (۴) و (۲) باید یکی رو انتخاب کنیم. هم از بحث تقارن می‌تونیم برای حذف کمک بگیریم و هم از روش مقدارگذاری؛ چون روش مقدارگذاری اطلاعاتی در حد دبیرستان نیاز داره، پس از اون کمک می‌گیریم:

برای مقدارگذاری می‌تونیم $x=\frac{\pi}{۲}$ در نظر بگیریم:

$$f(\frac{\pi}{۲})=\frac{\pi}{۲}(\pi-\frac{\pi}{۲})=\frac{\pi}{۲}\times\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi^۲}{۴}$$

با فرض $\pi^۲\simeq ۱۰$، $f(\frac{\pi}{۲})=۲/۵$ هستش، پس واضحه که گزینه (۴) غلطه، چون به ازای $x=\frac{\pi}{۲}$، $\sin ۲mx=\sin x\pi=۰$ میشه.

۱۱ـ گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که تبدیل فوریه $u(x,t)$ را با $u(\omega,t)$ و تبدیل فوریه u_{xx} برابر با $(i\omega)^۲u(\omega,t)$ است. حالا از طرفین معادله تبدیل فوریه می‌گیریم، $\frac{du(\omega,t)}{dt}-a^۲[-\omega^۲u(\omega,t)]=F(\omega,t)$ با یک معادله‌ی خطی مرتبه اول روبه‌رو هستیم:

$$u(\omega,t)=e^{-a^۲\omega^۲t}[\int_۰^t F(\omega,\tau)e^{+a^۲\omega\tau}d\tau+C(\omega)]$$

$$u(\omega,۰)=۰\Rightarrow C(\omega)=۰\Rightarrow u(\omega,t)=\int_۰^t F(\omega,\tau)e^{-a^۲\omega^۲(t-\tau)}d\tau$$

۱۲ـ گزینه «۴» از سؤالاتی است که در دو سال اخیر مورد توجه طراحان قرار گرفته است. سؤال مبتنی بر قضیه لیوویل طراحی شده است. چون سمت چپ نامساوی $|f(z)-۲z^۲-iz|\le\sqrt{۲}$ همه جا تحلیلی است، لذا داریم:

$$f(z)-۲z^۲-iz=c\Rightarrow f(z)=c+۲z^۲+iz\Rightarrow f(\frac{۱}{z})=c+\frac{۲}{z^۲}+\frac{i}{z}$$

حالا سراغ محاسبه‌ی انتگرال می‌رویم:

$$I=\oint_{|z|=۱}f(\frac{۱}{z})dz=\oint_{|z|=۱}cdz+\oint_{|z|=۱}\frac{۲}{z^۲}dz+i\oint_{|z|=۱}\frac{۱}{z}dz\Rightarrow I=۰+۰+i\times ۲\pi i=-۲\pi$$

دقت کنید بر طبق انتگرال کوشی یعنی $\oint_C\frac{f(z)}{z^{n+۱}}=۲\pi i\frac{f^{(n)}(۰)}{n!}$، برای انتگرال‌های فوق، حاصل دو انتگرال صفر است و حاصل انتگرال دیگر برابر $۲\pi if(۰)=۲\pi i\times ۱=۲\pi i$ می‌شود که با ضرب در i، مقدار آن برابر با -۲π شد.

۱۳ـ گزینه «۱» یک سؤال بسیار پرتکرار و نسبتاً ساده از نگاشت $w=\frac{۱}{z}$ طرح شده است. می‌دانیم تحت نگاشت $w=\frac{۱}{z}$، رابطه‌های $x=\frac{u}{u^۲+v^۲}$ و $y=\frac{-v}{u^۲+v^۲}$ را داریم و چون $۲x+۳y=۵$، لذا با جایگذاری داریم:

$$\frac{۲u}{u^۲+v^۲}-\frac{۳v}{u^۲+v^۲}=۵\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } u^۲+v^۲}۲u-۳v=۵u^۲+۵v^۲\Rightarrow ۵u^۲-۲u+۵v^۲+۳v=۰$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۵}}u^۲-\frac{۲}{۵}u+v^۲+\frac{۳}{۵}v=۰$$

حالا با اضافه و کم کردن اعداد مناسب سعی می‌کنیم متغیرهای u و v را به صورت مربع کامل بنویسیم:

$$[u^۲-\frac{۲}{۵}u+(\frac{۱}{۵})^۲-(\frac{۱}{۵})^۲]+[v^۲+\frac{۳}{۵}v+(\frac{۳}{۱۰})^۲-(\frac{۳}{۱۰})^۲]=۰\Rightarrow(u-\frac{۱}{۵})^۲-\frac{۱}{۲۵}+(v+\frac{۳}{۱۰})^۲-\frac{۹}{۱۰۰}=۰\Rightarrow(u-\frac{۱}{۵})^۲+(v+\frac{۳}{۱۰})^۲=\frac{۱۳}{۱۰۰}$$

۱۴ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. سؤال فوق‌العاده غیر استاندارد می‌باشد و نه تنها در کتاب‌های کنکوری چنین سؤالاتی وجود ندارد، بلکه در کتاب‌های دانشگاهی و سؤالات پایان ترم هم چنین سؤالاتی طرح نمی‌شود. ظاهراً بحث فقط برای این بوده که کسی سؤال را جواب ندهد و ضمناً گزینه‌ها هم غلط هستند و سؤال باید حذف شود.

$$\frac{\partial^۲u}{\partial t^۲}-۹\frac{\partial^۲u}{\partial x^۲}-۹\frac{\partial^۲u}{\partial y^۲}=\begin{cases}te^{-|x+y|} & ۰<x<۱\\ ۰ & x>۱\end{cases}=f(x,y,t)$$

تبدیل فوریه کلی روی y:

$$F(u(x,y,t))=\hat{u}(x,\omega,t)$$

$$F(\frac{\partial^۲u}{\partial y^۲})=(i\omega)^۲\hat{u}(x,\omega,t)=-\omega^۲\hat{u}(x,\omega,t)$$

$$\frac{\partial^۲\hat{u}}{\partial t^۲}-۹\frac{\partial^۲\hat{u}}{\partial x^۲}+۹\omega^۲\hat{u}=\hat{f}(x,\omega,t)$$

تبدیل فوریه سینوسی روی x:

$$F_s(\hat{u}(x,\omega,t)) = \tilde{\hat{u}}(m,\omega,t)$$

$$F_s\left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}\right) = \frac{2}{\pi} m \cancelto{0}{\hat{u}(0,\omega,t)} - m^2 \tilde{\hat{u}} = -m^2 \tilde{\hat{u}}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\hat{u}}}{\partial t^2} + 9m^2 \tilde{\hat{u}} + 9\omega^2 \tilde{\hat{u}} = \tilde{\hat{f}}(m,\omega,t) \Rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{\hat{u}}}{\partial t^2} + \tilde{\hat{u}}\, 9(m^2+\omega^2) = \tilde{\hat{f}}(m,\omega,t)$$

$$f(x,y,t) = te^{-|x+y|} \Rightarrow \hat{f} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega y} f(x,y,t)\,dy$$

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-|x+y|}.e^{-i\omega y}dy = \left(\int_{-\infty}^{-x} te^{x+y-i\omega y}\,dy + \int_{-x}^{\infty} te^{-x-y-i\omega y}\,dy\right)\frac{1}{2\pi} = \frac{t}{2\pi}\left[e^{x}\int_{-\infty}^{-x} e^{y-i\omega y}\,dy + e^{-x}\int_{-x}^{\infty} e^{-y-i\omega y}\,dy\right]$$

$$\Rightarrow \hat{f} = \frac{t}{2\pi}\left[e^{x}\left(\frac{e^{y(1-i\omega)}}{1-i\omega}\right)\Bigg|_{-\infty}^{-x} + e^{-x}\left(\frac{e^{-y(1+i\omega)}}{-(1+i\omega)}\right)\Bigg|_{-x}^{\infty}\right] = \frac{t}{2\pi}\left[\frac{e^{ix\omega}}{1-i\omega} + \frac{e^{ix\omega}}{1+i\omega}\right] = \frac{te^{ix\omega}}{2\pi}\left(\frac{1}{1-i\omega}+\frac{1}{1+i\omega}\right) = \frac{te^{ix\omega}}{2\pi}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)$$

$$\Rightarrow \tilde{\hat{f}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \hat{f}\sin mx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{te^{ix\omega}}{2\pi}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)\sin mx\,dx = \frac{2t}{\pi^2(1+\omega^2)}\int_0^{\infty} e^{ix\omega}\sin mx\,dx = t.F(m,\omega) + \cancelto{0}{G(m,\omega)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{\hat{u}}}{\partial t^2} + 9(m^2+\omega^2)\tilde{\hat{u}} = t.F(m,\omega)$$

پس برای جواب $\tilde{\hat{u}}$ داریم:

جواب عمومی $\tilde{\hat{u}}_n = A_{m,\omega}\cos 3t\sqrt{m^2+\omega^2} + B_{m,\omega}\sin 3t\sqrt{m^2+\omega^2}$

جواب خصوصی $\tilde{\hat{u}}_p = t.C_{m,\omega} + D_{m,\omega}$

$$\Rightarrow \tilde{\hat{u}} = \tilde{\hat{u}}_h + \tilde{\hat{u}}_p = A_{m,\omega}\cos 3t\sqrt{m^2+\omega^2} + B_{m,\omega}\sin 3t\sqrt{m^2+\omega^2} + t.C_{m,\omega} + D_{m,\omega}$$

اکنون جواب را به‌صورت $u(x,y,t)$ به‌دست می‌آوریم.

$$F_s^{-1}\{\tilde{\hat{u}}(m,\omega,t)\} = \hat{u}(x,\omega,t) = \int_0^{\infty} \tilde{\hat{u}}\sin mx\,dm$$

تبدیل معکوس کلی:

$$F^{-1}\{\hat{u}(x,\omega,t)\} = u(x,y,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x,\omega,t)\,e^{i\omega y}\,d\omega$$

$$\Rightarrow u(x,y,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}\left(A_{m,\omega}\cos 3\sqrt{m^2+\omega^2}\,t + B_{m,\omega}\sin 3\sqrt{m^2+\omega^2}\,t + t.C_{m,\omega t} + D_{m,\omega}\right)\times \sin mx\,e^{i\omega y}\,dm\,d\omega$$

تذکر مهم: در حالت کلی اگر بخواهیم با روش حذف گزینه سؤال را حل کنیم، گزینه (۴) گزینه منطقی‌تری نسبت به بقیه می‌باشد. هر چند تمام گزینه‌ها غلط هستند. برای مثال متغیرهای انتگرال‌گیری در طرف دوم گزینه‌ها x و y نوشته شده است و این غلط است. پارامترهایی که نسبت به آنها انتگرال گرفته می‌شوند، پارامتر مربوط به انتگرال فوریه مثل امگا می‌باشند. جنس طرف اول گزینه‌ها با طرف دوم یکی نیست و این ایراد اساسی جواب‌ها است. حل صحیح در بالا نوشته شده است.

۱۵ــ گزینه «۳» از سؤالات نسبتاً ساده این آزمون! اگر فرض کنیم تبدیل فوریه $y(x)$ برابر با $Y(\omega)$ است، آنگاه تبدیل فوریه y' برابر با $i\omega Y(\omega)$ و تبدیل فوریه y'' برابر با $-\omega^2 Y(\omega)$ است. لذا معادله‌ی زیر را داریم:

$$[(i\omega)^2 - 4(i\omega) + 3]Y(\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega} \Rightarrow -\omega^2 Y(\omega) - 4i\omega Y(\omega) + 3Y(\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega}$$

بنابراین داریم:

$$Y(\omega) = \frac{-2\sin(\omega)}{\omega(\omega^2 + 4i\omega - 3)}$$

توضیح: دقت کنید که تبدیل فوریه عبارت سمت راست معادله‌ی صورت سؤال به صورت زیر حساب می‌شود:

تبدیل فوریه عبارت سمت راست $= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = 2\int_0^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx = 2\int_0^{1} 1\times\cos(\omega x)\,dx = \frac{2\sin\omega}{\omega}$

دقت کنید چون تابع $f(x)$ زوج است، لذا حاصل قسمت سینوسی صفر است و فقط تبدیل کسینوسی داریم.

سؤالات آزمون مهندسی برق ـ الکترونیک ـ دکتری ۱۳۹۹

۱ـ فرض کنید $(\sigma_۱, y_۱)$ و $(\sigma_۲, y_۲)$ دو جواب غیربدیهی (غیرصفر) از مسئله مقدار مرزی $\begin{cases} y'' - ۲xy' + \sigma y = ۰ \\ y(۰) = y(۱) = ۰ \end{cases}$ با شرط $\sigma_۱ \neq \sigma_۲$ باشند. کدام مورد درست است؟

۱) $\int_۰^۱ e^{-x^۲} y_۱(x) y_۲(x) dx = ۰$
۲) $\int_۰^۱ e^{۲x} y_۱(x) y_۲(x) dx = ۰$
۳) $\int_۰^۱ y_۱^۲(x) dx = \int_۰^۱ y_۲^۲(x) dx = \frac{۱}{۲}$
۴) $\int_۰^۱ y_۱(x) y_۲(x) dx = ۰$

۲ـ فرض کنید $u = u(x,t)$ جواب مسئله مقدار مرزی زیر باشد. در این‌صورت، مقدار $u(۲,۱)$، کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt} = ۴u_{xx}, x > ۰, t > ۰ \\ u(x,۰) = \cos x \quad , x \geq ۰ \\ u_t(x,۰) = ۱ \quad , x \geq ۰ \\ u(۰,t) = ۰ \quad , t \geq ۰ \end{cases}$$

۱) $۱ - \frac{۱}{۲}\cos ۴$
۲) $۱ + \frac{۱}{۲}\cos ۴$
۳) $۱ + \cos^۲ ۲$
۴) $۱ - \cos^۲ ۲$

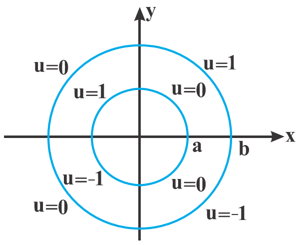
۳ـ مسئله ارتعاش موج داده شده زیر را در نظر بگیرید. شتاب ارتعاش در $x = \frac{۳}{۴}$ کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt} + ۶ = u_{xx}, ۰ < x < ۱, t > ۰ \\ u(۰,t) = u_t(x,۰) = ۰ \\ u(x,۰) = ۳x(x+۱), u(۱,t) = ۶ \end{cases}$$

۱) ۰
۲) -۶
۳) ۶
۴) $\frac{۶۳}{۱۶}$

۴ـ مقدار پتانسیل u در ربع دایره‌های مرزی مطابق شکل زیر داده شده است. اگر تابع پتانسیل u به‌صورت زیر باشد، آنگاه کدام مقدار $|A|$، $|B|$، $|C_۴|$ یا $|E_۲|$، بزرگتر است؟

$$u(\rho, \varphi) = A\text{Ln}\rho + B + \sum_{n=۱}^{\infty} (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) \cos(n\varphi) + (E_n \rho^n + F_n \rho^{-n}) \sin(n\varphi)$$



۱) $|A|$
۲) $|B|$
۳) $|C_۴|$
۴) $|E_۲|$

۵ـ فرض کنید در معادله انتگرالی $h(x) = \int_۰^{\infty} \int_۰^{\infty} g(t) \sin(\omega x) \sin(\omega t) d\omega dt$، $g(t) = \begin{cases} \cos t & ; -\pi < t < ۰ \\ \sin t & ; ۰ < t < \pi \\ ۰ & ; \text{سایر جاها} \end{cases}$ باشد. مقدار $h(\frac{-\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) ۰
۲) $-\frac{\pi}{۲}$
۳) $\frac{\pi}{۲}$
۴) $\frac{\pi}{۴}$

۶ـ اگر $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ تبدیل فوریه سیگنال $f(t) = \frac{۱}{۲} e^{-|t|}$ باشد، آنگاه حاصل $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^۲ d\omega$ کدام است؟ $(i^۲ = -۱)$

۱) $\frac{۱}{\pi}$
۲) $\frac{۲}{\pi}$
۳) $\frac{\pi}{۲}$
۴) π

۷ـ مسئله انتقال حرارت یک‌بعدی $u_t = a^۲ u_{xx} (x > ۰, t > ۰)$ با شرط اولیه $u(x,۰) = A$ و شرط کرانه‌ای $u(۰,t) = B(۱ - H(t - t_۰))$، که در آن H تابع پله واحد (هوی‌ساید) و $t_۰ > ۰$ است، را در نظر بگیرید. اگر $U(x,s)$ تبدیل لاپلاس $u(x,t)$ باشد، آنگاه $U(x,s)$ کدام است؟

۱) $\frac{(B - A - Be^{-t_۰ s})}{s} e^{\frac{-\sqrt{s}x}{|a|}} - \frac{A}{s}$
۲) $\frac{(B - A + Be^{-t_۰ s})}{s} e^{\frac{-\sqrt{s}x}{|a|}} - \frac{A}{s}$
۳) $\frac{(B - A - Be^{-t_۰ s})}{s} e^{\frac{-\sqrt{s}x}{|a|}} + \frac{A}{s}$
۴) $\frac{(B - A + Be^{-t_۰ s})}{s} e^{\frac{-\sqrt{s}x}{|a|}} + \frac{A}{s}$

۸ـ نقاط غیرتحلیلی شاخه اصلی تابع $f(z) = \log(۱ - iz^۲)$، کدامند؟

۱) $\{z = x + iy \mid y = x, |x| \leq \frac{\sqrt{۲}}{۲}\}$
۲) $\{z = x + iy \mid y = x, |x| \geq \frac{\sqrt{۲}}{۲}\}$
۳) $\{z = x + iy \mid y = -x, |x| \leq \frac{\sqrt{۲}}{۲}\}$
۴) $\{z = x + iy \mid y = -x, |x| \geq \frac{\sqrt{۲}}{۲}\}$

۹ـ حاصل عبارت $\int_۰^{۲\pi} \sin^۲(\frac{\pi}{۶} + ۲e^{i\theta}) d\theta$، کدام است؟ $(i^۲ = -۱)$

۱) π
۲) $۲\pi i$
۳) $\frac{\pi}{۲}$
۴) $\frac{\pi}{۲} i$

۱۰ـ فرض کنید $a \in (-۱,۱)$ یک عدد حقیقی و $z = ae^{i\theta}$ باشد. با استفاده از سری توانی $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} z^n$ حاصل سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a^n \cos\frac{n\pi}{۳}$، کدام است؟

۱) $\dfrac{a-۲a^۲}{(۱-a)^۲}$ ۲) $\dfrac{۲a^۲-a}{(۱-a)^۲}$ ۳) $\dfrac{۲a^۲-a}{۲(۱-a+a^۲)}$ ۴) $\dfrac{a-۲a^۲}{۲(۱-a+a^۲)}$

۱۱ـ مسئله پواسن زیر را در نظر بگیرید. اگر $U_\omega(y) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)e^{-i\omega x}dx = c_۱ e^{-\omega y} + c_۲ e^{\omega y} + B_\omega$ تبدیل فوریه $u(x,y)$ باشد، مقدار $c_۱$ کدام است؟

$$\begin{cases}\nabla^۲ u = \begin{cases} ۲ \;;\; |x|<۱ \\ ۰ \;;\; |x|>۱ \end{cases}, \quad ۰<y<\pi \\ u(x,۰) = u(x,\pi) = ۰\end{cases}$$

۱) $\dfrac{(e^{-\pi\omega}-۱)\sin\omega}{\pi\omega^۳\sinh(\pi\omega)}$ ۲) $\dfrac{(e^{\pi\omega}-۱)\sin\omega}{\pi\omega^۳\sinh(\pi\omega)}$

۳) $\dfrac{(۱-e^{-\pi\omega})\sin(\pi\omega)}{\pi\omega^۳\sinh(\omega)}$ ۴) $\dfrac{(۱-e^{\pi\omega})\sin\omega}{\pi\omega^۳\sinh(\omega)}$

۱۲ـ فرض کنید $f(x) = (\cos x + ۲\sin x - ۲)^۲$ در $-\pi < x < \pi$ تعریف شده و متناوب با دوره تناوب ۲π باشد. اگر $\frac{۱}{۲}a_۰ + \sum\limits_{n=۱}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ سری فوریه تابع f باشد، مقدار $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}(a_n^۲ + b_n^۲)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱۵۳}{۸}$ ۲) $\dfrac{۱۵۳}{۴}$ ۳) $\dfrac{۷۷}{۲}$ ۴) $\dfrac{۳۹}{۲}$

۱۳ـ ضریب $z^{-۲}$ در بسط لوران تابع $f(z) = z\sin(z - \frac{۱}{z})$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} + \frac{۱}{۲!۵!} + \frac{۱}{۳!۶!} + \frac{۱}{۴!۷!} + \frac{۱}{۵!۸!} + \cdots$ ۲) $\frac{۱}{۳!} - \frac{۱}{۴!} + \frac{۱}{۲!۵!} - \frac{۱}{۳!۴!} + \frac{۱}{۴!۷!} - \frac{۱}{۵!۸!} + \cdots$

۳) $-\frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} - \frac{۱}{۲!۵!} + \frac{۱}{۳!۶!} - \frac{۱}{۴!۷!} + \frac{۱}{۵!۸!} - \cdots$ ۴) $-\frac{۱}{۳!} - \frac{۱}{۴!} + \frac{۱}{۲!۵!} + \frac{۱}{۳!۴!} - \frac{۱}{۴!۷!} - \frac{۱}{۵!۸!} + \cdots$

۱۴ـ فرض کنید $f(z) = (۱+z^۲+z^۳)e^{\frac{۱}{z}}$ باشد. حاصل انتگرال $\oint\limits_{|z|=۲} \frac{f(z)dz}{z^۲}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۷\pi i}{۳}$ ۲) $\dfrac{۱۴\pi i}{۳}$ ۳) $\dfrac{۲۵\pi i}{۱۲}$ ۴) $\dfrac{۲۵\pi i}{۲۴}$

۱۵ـ حاصل انتگرال $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^۳ x}{x^۲+۱}dx$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\pi(e^۲+۳)}{۴e^۳}$ ۲) $\dfrac{\pi(۳e^۲+۱)}{۸e^۳}$ ۳) $\dfrac{\pi(e^۲+۳)}{۸e^۳}$ ۴) $\dfrac{\pi(۳e^۲+۱)}{۴e^۳}$

پاسخنامه آزمون مهندسی برق ـ الکترونیک ـ دکتری ۱۳۹۹

۱ـ گزینه «۱» ابتدا به یادآوری زیر توجه کنید:

تذکر: هر معادله‌ی خطی مرتبه دوم به شکل کلی $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = ۰$ را می‌توان با ضرب معادله در $\mu(x) = \frac{۱}{P(x)}e^{\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx}$ به یک معادله‌ی اشتورم ـ لیوویل تبدیل کرد. معادله‌ی اشتورم ـ لیوویل متناظر معادله‌ی فوق را صورت خودالحاق و یا صورت کانونیک معادله‌ی درجه‌ی دوم اولیه می‌نامیم.

در این سؤال $P(x) = ۱$ و $Q(x) = -۲x$ است، بنابراین داریم: $\mu(x) = \frac{۱}{۱}e^{\int \frac{-۲x}{۱}dx} = e^{-x^۲}$

با ضرب $e^{-x^۲}$ در معادله داده‌شده داریم: $e^{-x^۲}.y'' - ۲xe^{-x^۲}y' + \sigma e^{-x^۲}y = ۰ \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{-x^۲}\frac{dy}{dx}) + (\sigma e^{-x^۲})y = ۰$

درواقع معادله را می‌توان به فرم یک معادله اشتورم ـ لیوویل عادی به شکل مقابل نوشت: $(e^{-x^۲}y')' + [۰ + \sigma e^{-x^۲}]y = ۰$

با مقایسه با معادله استاندارد که به شکل مقابل است: $(f(x)y')' + [g(x) + \sigma h(x)]y = ۰$

واضح است $h(x) = e^{-x^۲}$ تابع وزن است و می‌دانیم جواب‌های $y_۱$ و $y_۲$ متعامدند، یعنی داریم: $\int_۰^۱ e^{-x^۲}y_۱(x)y_۲(x)dx = ۰$

۲ـ گزینه «۲» با استفاده از روش دالامبر به روش جبری داریم: $u(x,t) = \frac{۱}{۲}[f^*(x+۲t) + f^*(x-۲t)] + \frac{۱}{۲c}[G^*(x+۲t) - G^*(x-۲t)]$

با توجه به اینکه شرط مرزی به‌صورت $u(۰,t) = ۰$ داده شده، لذا f^* گسترش فرد f و G^* گسترش زوج G است که $G(x) = \int_۰^x g(x)dx$ است.

در این سؤال $g(x) = ۱$، $f(x) = \cos x$، پس $G(x) = x$ و چون مقدار جواب در $x = ۲$ و $t = ۱$ خواسته شده است، لذا داریم:

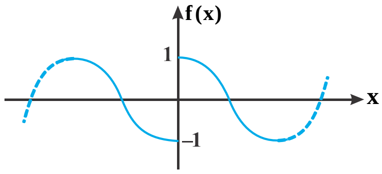
$$u(۲,۱) = \frac{۱}{۲}[f^*(۲+۲\times۱) + f^*(۲-۲\times۱)] + \frac{۱}{۲\times۲}[G^*(۲+۲\times۱) - G^*(۲-۲\times۱)]$$

از طرفی دوره تناوب:

$$=\frac{۱}{۲}[f^*(۴)+f^*(۰)]+\frac{۱}{۴}[G^*(۴)-G^*(۰)]$$

چون $f(x)=\cos x$ و $G(x)=\int_{۰}^{x}۱dx=x$؛ لذا $f^*(۴)=\cos ۴$ و $G^*(۴)=۴$ و $G^*(۰)=x\Big|_{x=۰}=۰$ اما در مورد $f^*(۰)$ داستان فرق می‌کند.

چون دقیقاً روی مرز $x=۰$ است و لذا باید از قضیه دیریکله کمک بگیریم:



$$f^*(۰)=\frac{f(۰^+)+f(۰^-)}{۲}=\frac{۱+(-۱)}{۲}=۰\Rightarrow u(۲,۱)=\frac{۱}{۲}(\cos ۴+۰)+\frac{۱}{۴}(۴-۰)=۱+\frac{\cos ۴}{۲}$$

۳ـ گزینه «۱» با یک معادله موج غیرهمگن با شرایط مرزی غیرهمگن روبه‌رو هستیم و چون ناهمگنی معادله و شرایط مرزی به زمان وابسته نیست از تغییر متغیر مقابل کمک می‌گیریم:

$$u(x,t)=V(x,t)+w(x)$$

$$\begin{cases}u_{xx}=V_{xx}+w''(x)\\ u_{tt}=V_{tt}+۰\end{cases}\Rightarrow V_{tt}+۶=V_{xx}+w''(x)\Rightarrow V_{tt}=V_{xx}+w''(x)-۶$$

برای همگنی باید $w''(x)-۶=۰$ باشد. لذا داریم:

$$w''(x)=۶\Rightarrow w'(x)=۶x+c_۱\Rightarrow w(x)=۳x^۲+c_۱x+c_۲$$

با استفاده از شرایط مرزی داریم:

$$u(۰,t)=V(۰,t)+w(۰)\Rightarrow ۰=V(۰,t)+w(۰)\Rightarrow w(۰)=۰\Rightarrow c_۲=۰$$

$$u(۱,t)=V(۱,t)+w(۱)\Rightarrow ۶=V(۱,t)+w(۱)\Rightarrow w(۱)=۶$$

بنابراین داریم:

$$w(۱)=۶\Rightarrow ۶=۳(۱)^۲+c_۱(۱)+۰\Rightarrow c_۱=۳$$

بنابراین $w(x)=۳x^۲+۳x$. پس معادله زیر را داریم:

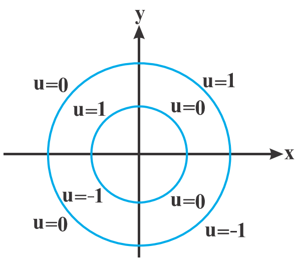
$$\begin{cases}V_{tt}=V_{xx}\ ,\ ۰<x<t\ ,\ t>۰\\ V(۰,t)=V(۱,t)=۰\\ V(x,۰)=۰=V_t(x,۰)=۰\end{cases}$$

حل معادله‌ی فوق به روش دالامبر به جواب بدیهی $V(x,t)=۰$ می‌رسد:

$$V(x,t)=\frac{۱}{۲}[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)]+\frac{۱}{۲}[G^*(x+ct)-G^*(x-ct)]\Rightarrow V(x,t)=۰$$

بنابراین $u(x,t)=w(x)$ و یا $u(x,t)=۳x^۲+۳x$ و لذا $u_{tt}(x=\frac{۳}{۴})=۰$ است.

نکته: توجه شود که شتاب مشتق دوم جابه‌جایی نسبت به زمان است.



۴ـ گزینه «۴» همان‌طور که مشاهده می‌شود روی هر مرز (هم‌دایره کوچک، هم دایره بزرگ) به‌ازای هر φ و $-\varphi$ مقادیر u قرینه یکدیگرند. لذا جواب نسبت به متغیر φ باید فرد باشد، لذا $D_n=۰$ و $C_n=۰$ و $B=۰$ و $A=۰$ و فقط ضرایب سینوسی باقی می‌ماند، بنابراین گزینه (۴) درست خواهد بود.

۵ـ گزینه «۲» اگر به تعریف $h(x)=\int_{۰}^{\infty}\int_{۰}^{\infty}g(t)\sin(\omega x)\sin(\omega t)dtd\omega$ دقت کنیم، می‌بینیم که $h(x)$ نسبت به x فرد است و در نتیجه داریم:

$$h(-\frac{x}{۲})=-h(\frac{\pi}{۲})$$

همچنین تبدیل فوریه سینوسی تابع $g(t)$ به صورت مقابل است:

$$G_S(\omega)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty}\sin(\omega t)g(t)\,dt$$

$$g(t)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty}G_s(\omega)\sin(\omega t)\,d\omega$$

به همین دلیل با ترکیب دو رابطه بالا داریم:

$$g(x)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\int_{۰}^{\infty}g(t)\sin(\omega x)\sin(\omega t)d\omega dt\quad ,\ x>۰$$

که البته این رابطه برای xهای مثبت صادق است ولی با استفاده از خاصیت فرد بودن $h(x)$ می‌توان نوشت:

$$h(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{۲}g(x) & ;\ x>۰\\ -\frac{\pi}{۲}g(-x) & ;\ x<۰\end{cases}\Rightarrow h(-\frac{\pi}{۲})=-\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi}{۲}=-\frac{\pi}{۲}$$

۶ـ گزینه «۳» طبق رابطه پارسوال داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^{2}\,d\omega=2\pi\int|f(t)|^{2}\,dt=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2}e^{-|t|})^{2}dt=\frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2|t|}dt=\frac{\pi}{2}\times 2\int_{0}^{\infty}e^{-2t}dt=[\pi\times\frac{1}{-2}e^{-2t}]_{t=0}^{t=\infty}=\frac{\pi}{2}$$

۷ـ گزینه «۳» حل معادلات با مشتقات جزئی با استفاده از لاپلاس که در کتاب هم مثال‌هایی در این حوزه حل کرده‌ایم:

$$u_t=a^2u_{xx}$$
$$\begin{cases}u(x,0)=A\\ u(0,t)=B(1-u(t-t_0))\end{cases}$$

برای به‌دست آوردن تبدیل لاپلاس جواب، از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L(u_t)=L(a^2u_{xx})\to s.L(u(x,t))-\cancel{u(x,0)}^{A}=a^2\frac{d^2}{dx^2}L(u(x,t))\,,\ L(u(x,t))=U(x,s)$$
$$s.U(x,s)-A=a^2U''(x,s)\to U''(x,s)-\frac{s}{a^2}U(x,s)=-\frac{A}{a^2}$$

معادله فوق یک معادله مرتبه دو با ضرائب ثابت با طرف دوم است؛ لذا دارای دو جواب عمومی و خصوصی است.

الف) محاسبه جواب عمومی:

$$U''(x,s)-\frac{s}{a^2}U(x,s)=0\Rightarrow m^2-\frac{s}{a^2}=0\Rightarrow m=\pm\frac{\sqrt{s}}{|a|}$$
$$U_h(x,s)=c_1e^{\frac{\sqrt{s}}{|a|}x}+c_2e^{-\frac{\sqrt{s}}{|a|}x}$$

ب) محاسبه جواب خصوصی:

فرم کلی جواب خصوصی به‌صورت مقابل است:

$$U_p(x,s)=k\Rightarrow U''(x,s)=0$$

در معادله قرار می‌دهیم:

$$0-\frac{s}{\cancel{a^2}}k=-\frac{A}{\cancel{a^2}}\Rightarrow k=\frac{A}{s}$$

$$U(x,s)=U_h(x,s)+U_p(x,s)=c_1e^{\frac{\sqrt{s}}{|a|}x}+c_2e^{-\frac{\sqrt{s}}{|a|}x}+\frac{A}{S}$$

تا اینجا مشخص می‌شود که گزینه‌های (۱) و (۲) جواب نیست. اکنون شرط مرزی را اعمال می‌کنیم.

$$u(0,t)=B[1-u(t-t_0)]\Rightarrow L(u(0,t))=U(0,s)\quad\Rightarrow\ L(u(0,t))=L(B[1-u(t-t_0)])=L(B)-L(Bu(t-t_0))=\frac{B}{s}-\frac{B}{s}e^{-t_0s}$$

$$\Rightarrow U(0,s)=\frac{B}{S}(1-e^{-t_0s})$$

از طرفی چون جواب در بی‌نهایت کراندار است باید:

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=\text{کراندار باشد (محدود باشد)}\Rightarrow c_1=0$$

$$U(x,s)=c_2e^{\frac{-\sqrt{s}}{|a|}x}+\frac{A}{s}\Rightarrow U(0,s)=c_2+\frac{A}{s}=\frac{B}{s}(1-e^{-t_0s})$$
$$c_2=\frac{1}{s}(B-Be^{-t_0s}-A)$$
$$U(x,s)=\frac{B-A-Be^{-t_0s}}{s}e^{\frac{-\sqrt{s}}{|a|}}+\frac{A}{s}$$

۸ـ گزینه «۴» تابع $Ln(f(z))$ در نقاطی که $\begin{cases}\operatorname{Im}f(z)=0\\ \operatorname{Re}f(z)\le 0\end{cases}$ است، غیرتحلیلی می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$1-iz^2=1-i[x^2-y^2+2ixy]=1+2xy-i(x^2-y^2)$$
$$\operatorname{Im}f(z)=\operatorname{Im}(1+2xy-i(x^2-y^2))=0\Rightarrow x^2-y^2=0\Rightarrow x=\pm y$$
$$\operatorname{Re}f(z)=1+2xy\le 0$$

اگر $x=y$ باشد، هیچگاه $1+2xy\le 0$ نمی‌شود، بنابراین $x=-y$.

$$1-2x^2\le 0\Rightarrow\frac{1}{2}\le x^2\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\le|x|$$

۹ـ گزینه «۳» سؤال را می‌توان به دو روش پاسخ داد:

$$e^{i\theta}=z \Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}\ ,\ \begin{cases}\theta=0 \Rightarrow z=1\\ \theta=2\pi \Rightarrow z=1\end{cases}$$

روش اول: با استفاده از تغییر متغیر $e^{i\theta}=z$ داریم:

$$I=\int_{|z|=1}\sin^2(\frac{\pi}{6}+2z)\frac{dz}{iz}$$

بنابراین روی دایره $|z|=1$ انتگرال می‌گیریم:

نقطه غیرتحلیلی تابع $z=0$ است که درون دایره $|z|=1$ قرار دارد، طبق قضیه کوشی داریم:

$$I=2\pi i\times\frac{1}{i}[\sin^2(\frac{\pi}{6}+2\times 0)]=2\pi\times\sin^2\frac{\pi}{6}=2\pi\times(\frac{1}{2})^2=\frac{\pi}{2}$$

روش دوم: طبق قضیه مقدار میانگین گاوس داریم:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

در این سؤال $f(z)=\sin^2 z$ و $r=2$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\int_0^{2\pi}\sin^2(\frac{\pi}{6}+2e^{i\theta})d\theta=2\pi\times\sin^2 z\Big|_{z=\frac{\pi}{6}}=2\pi\times\sin^2(\frac{\pi}{6})=2\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}$$

۱۰ـ گزینه «۴» واضح است سری داده‌شده در واقع قسمت حقیقی سری $\sum_{n=1}^{\infty}a^n e^{i\frac{\pi}{3}n}$ است. اگر مجموع خواسته شده را S بنامیم، داریم: $S=\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}a^n e^{i\frac{\pi}{3}n}$

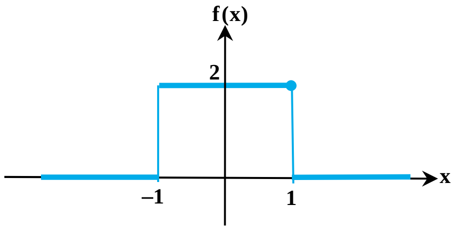
این سری، یک سری هندسی با جمله اول $ae^{i\frac{\pi}{3}}$ و قدرنسبت $ae^{i\frac{\pi}{3}}$ است. می‌دانیم حد مجموع سری هندسی با جمله اول r_1 و قدرنسبت q به‌صورت $\frac{r_1}{1-q}$ است. پس $S=\operatorname{Re}[\frac{ae^{i\frac{\pi}{3}}}{1-ae^{i\frac{\pi}{3}}}]$.

$$S=\operatorname{Re}\left\{\frac{ae^{i\frac{\pi}{3}}}{1-ae^{i\frac{\pi}{3}}}\right\}=\operatorname{Re}\left\{\frac{a\cos\frac{\pi}{3}+ia\sin\frac{\pi}{3}}{(1-a\cos\frac{\pi}{3})-ia\sin\frac{\pi}{3}}\right\}=\frac{(a\cos\frac{\pi}{3})(1-a\cos\frac{\pi}{3})-a^2\sin^2\frac{\pi}{3}}{(1-a\cos\frac{\pi}{3})^2+a^2\sin^2\frac{\pi}{3}}=\frac{(\frac{a}{2})(1-\frac{a}{2})-\frac{3a^2}{4}}{(1-\frac{a}{2})^2+\frac{3a^2}{4}}=\frac{\frac{a}{2}-a^2}{1-a+a^2}=\frac{a-2a^2}{2(1-a+a^2)}$$

۱۱ـ گزینه «۲» در واقع یک مسأله پواسن داریم که قرار است با استفاده از تبدیل فوریه آن را حل کنیم.

$$\nabla^2 u=\begin{cases}2\ ;\ |x|<1\\ 0\ ;\ |x|>1\end{cases}\qquad 0<y<\pi$$

$$u(x,0)=u(x,\pi)=0$$



برای حل از روش تبدیل فوریه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=\begin{cases}2 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

ابتدا تبدیل فوریه‌ای تابع طرف دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$F(\begin{cases}2\ ;\ |x|<1\\ 0\ ;\ |x|>1\end{cases})=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{1}{\pi}[\int_0^1 2\times\cos\omega x\,dx+\int_1^{\infty}0\times\cos\omega x\,dx]=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega x}{\omega}\Big|_0^1=(\frac{2\sin\omega}{\pi\omega})$$

با گرفتن تبدیل فوریه‌ای نسبت به x از طرفین معادله داریم:

$$F_x(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2})+F_x(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})=F_x(\begin{cases}2\ ;\ |x|<1\\ 0\ ;\ |x|>1\end{cases})\Rightarrow\frac{d^2U}{dy^2}-\omega^2 U=\frac{2\sin\omega}{\pi\times\omega}$$

این معادله یک معادله مرتبه دوم است که دارای دو جواب خصوصی و عمومی است.

الف) محاسبه جواب عمومی:

$$\frac{d^2U}{dy^2}-\omega^2U=0\Rightarrow\lambda^2-\omega^2=0\Rightarrow\lambda=\pm\omega$$

$$U_h(\omega,y)=c_1e^{-\omega y}+c_2e^{+\omega y}$$

ب) محاسبه جواب خصوصی:

$$U_p(\omega,y)=k\Rightarrow U_p''(\omega,y)=0\Rightarrow 0-\omega^2\times k=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}\Rightarrow k=-\frac{2}{\pi}\times\frac{\sin\omega}{\omega^3}$$

$$U(\omega,y)=+c_1e^{-\omega y}+c_2e^{\omega y}-\frac{2}{\pi}\times\frac{\sin\omega}{\omega^3}$$

با اعمال شرایط داده شده در صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases}u(x,0)=0\Rightarrow U(\omega,0)=0\Rightarrow c_1e^0+c_2e^0-\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega^3}=0\\ u(x,\pi)=0\Rightarrow U(\omega,\pi)=0\Rightarrow c_1e^{-\pi\omega}+c_2e^{\pi\omega}-\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega^3}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}c_1+c_2=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega^3}\\ c_1e^{-\pi\omega}+c_2e^{\pi\omega}=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega^3}\end{cases}\Rightarrow c_1=\frac{(e^{\pi\omega}-1)\sin\omega}{\pi\omega^3\times\sin h\,\pi\omega}$$

۱۲ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با بسط تابع مثلثاتی $f(x)$ داریم:

$$f(x)=(\cos x+۲\sin x-۲)^{۲}=\cos^{۲}x+۲\times ۲\sin x.\cos x+۴\sin^{۲}x+۴-۴\cos x-۸\sin x$$

$$=۴+\frac{۱+\cos ۲x}{۲}+۲\sin ۲x+۲(۱-\cos ۲x)-۴\cos x-۸\sin x=۴+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos ۲x+۲\sin ۲x+۲-۲\cos ۲x-۴\cos x-۸\sin x$$

$$=\frac{۱۳}{۲}-۸\sin x-۴\cos x-\frac{۳}{۲}\cos ۲x+۲\sin ۲x$$

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n^{۲}+b_n^{۲})=a_۱^{۲}+b_۱^{۲}+a_۲^{۲}+b_۲^{۲}=۴^{۲}+۸^{۲}+\frac{۹}{۴}+۴=۱۶+۶۴+۴+\frac{۹}{۴}=۸۴+\frac{۹}{۴}=\frac{۳۴۵}{۴}$$

۱۳ـ گزینه «۱» سؤال چندان سختی نیست و شبیه آن در آزمون‌ها و در متن کتاب سابقه طرح داشته است. کافیست فرمول بسط $\sin(a+b)$ را بلد باشیم.

$$z\sin\left(z-\frac{۱}{z}\right)=z\left(\sin z\cos\frac{۱}{z}-\sin\frac{۱}{z}\cos z\right)$$

دنبال ضرایب $z^{-۲}$ هستیم پس، بسط لوران هر کدام را می‌نویسیم:

$$f(z)=z\left[\left(z-\frac{z^{۳}}{۳!}+\frac{z^{۵}}{۵!}-\frac{z^{۷}}{۷!}+\cdots\right)\left(۱-\frac{z^{-۲}}{۲!}+\frac{z^{-۴}}{۴!}-\frac{z^{-۶}}{۶!}+\cdots\right)-\left(z^{-۱}-\frac{z^{-۳}}{۳!}+\frac{z^{-۵}}{۵!}-\cdots\right)\left(۱-\frac{z^{۲}}{۲!}+\frac{z^{۴}}{۴!}-\frac{z^{۶}}{۶!}+\cdots\right)\right]$$

پس ضرایب $z^{-۲}$ برابر است با:

$$\frac{۱}{۴!}+\frac{۱}{۳!۶!}+\frac{۱}{۵!۸!}\cdots-\left(-\frac{۱}{۳!}-\frac{۱}{۲!}\frac{۱}{۵!}-\cdots\right)=\frac{۱}{۳!}+\frac{۱}{۴!}+\frac{۱}{۲!۵!}+\frac{۱}{۳!۶!}+\cdots$$

۱۴ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. سؤال آشنایی و بر پایه مباحث بسط لوران طراحی شده است. نقطه‌ی تکین تابع $f(z)$ صرفاً $z=۰$ است. مهمترین کار دانستن بسط $e^{\frac{۱}{z}}$ است. ابتدا توجه کنید که داریم:

$$\frac{f(z)}{z^{۲}}=\frac{۱+z^{۲}+z^{۳}}{z^{۲}}e^{\frac{۱}{z}}=\frac{۱}{z^{۲}}e^{\frac{۱}{z}}+e^{\frac{۱}{z}}+ze^{\frac{۱}{z}}$$

از طرفی بسط لوران $e^{\frac{۱}{z}}$ به‌صورت مقابل است:

$$e^{\frac{۱}{z}}=۱+\frac{۱}{z}+\frac{۱}{۲!}\left(\frac{۱}{z^{۲}}\right)+\frac{۱}{۳!}\left(\frac{۱}{z^{۳}}\right)+\frac{۱}{۴!}\left(\frac{۱}{z^{۴}}\right)+\cdots$$

دنبال ضریب $\frac{۱}{z}$ در بسط هستیم. در عبارت $\frac{۱}{z^{۲}}e^{\frac{۱}{z}}$ جمله شامل $\frac{۱}{z}$ نداریم، در عبارت $e^{\frac{۱}{z}}$ ضریب $\frac{۱}{z}$ برابر یک و در عبارت $ze^{\frac{۱}{z}}$ ضریب $\frac{۱}{z}$ برابر با $۱\times\frac{۱}{۲!}$ است، پس داریم:

$$I=۲\pi i\times\left(\text{مجموع مانده‌های } \frac{f(z)}{z^{۲}} \text{ در } z=۰\right)=۲\pi i\times\left(\text{مجموع ضرایب } \frac{۱}{z} \text{ در بسط لوران } \frac{f(z)}{z^{۲}}\right)=۲\pi i\times\left(۱+\frac{۱}{۲!}\right)=۲\pi i\times\frac{۳}{۲}=۳\pi i$$

سازمان سنجش گزینه (۳) را به عنوان جواب اعلام کرده است که متأسفانه اشتباه است.

۱۵ـ گزینه «۴» طراح در این سؤال دنبال بررسی تسلط شما بر فرمول مثلثاتی $\cos^{۳}x=\frac{۳}{۴}\cos x+\frac{۱}{۴}\cos ۳x$ و همچنین نحوه‌ی محاسبه‌ی انتگرال‌های حقیقی $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\alpha x\,dx$ بوده است. ابتدا $\cos^{۳}x$ را با توجه به فرمول تبدیل می‌کنیم:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos^{۳}x}{۱+x^{۲}}dx=\frac{۳}{۴}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{۱+x^{۲}}dx+\frac{۱}{۴}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ۳x}{۱+x^{۲}}dx=I_۱+I_۲$$

حالا سراغ فرمول محاسبه‌ی انتگرال‌ها می‌رویم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\alpha x\,dx=\text{Re}[۲\pi i\times\text{مجموع مانده‌های تابع } f(z)e^{i\alpha z} \text{ در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند}]$$

در هر دو انتگرال، قطب $z=i$ بالای محور حقیقی قرار دارد و $f(x)=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$ بنابراین داریم:

$$I_۱=\frac{۳}{۴}\times\text{Re}[۲\pi i\times(\text{مانده تابع } \frac{e^{iz}}{z^{۲}+۱} \text{ در } z=i)]=\frac{۳}{۴}\times\text{Re}[۲\pi i\times\frac{e^{iz}}{۲z}]_{z=i}=\frac{۳}{۴}\text{Re}[۲\pi\times\frac{e^{i^{۲}}}{۲}]=\frac{۳}{۴}\pi e^{-۱}$$

به همین شکل برای $I_۱$ داریم:

$$I_۲=\frac{۱}{۴}\times\text{Re}[۲\pi i\times(\text{مانده تابع } \frac{e^{i۳z}}{z^{۲}+۱} \text{ در } z=i)]=\frac{۱}{۴}\text{Re}[۲\pi i\times\frac{e^{۳iz}}{۲z}|_{z=i}]=\frac{۱}{۴}[\pi e^{-۳}]=\frac{\pi}{۴}e^{-۳}$$

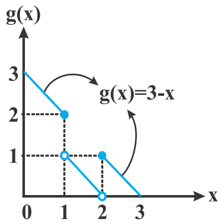
$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{۴}(۳e^{-۱}+e^{-۳})=\frac{\pi}{۴}\left(\frac{۳}{e}+\frac{۱}{e^{۳}}\right)=\frac{\pi(۳e^{۲}+۱)}{۴e^{۳}}$$

سؤالات آزمون مهندسی برق ــ الکترونیک ــ دکتری ۱۴۰۰

۱ــ اگر در بازه $(-\frac{۱}{۲}\,,\,\frac{۱}{۲})$ تساوی $x-[x]-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}a_\circ+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x)$ برقرار باشد، حاصل $\frac{۱}{۲}a_\circ+\sum_{n=۱}^{۳}(a_n\cos\frac{n\pi}{۴\ell}+b_n\sin\frac{n\pi}{۴\ell})$، کدام است؟

۱) $\frac{-۳}{۲\pi}$ ۲) $\frac{-۲}{۳\pi}$ ۳) $\frac{۲}{۳\pi}$ ۴) $\frac{۳}{۲\pi}$

۲ــ با توجه به معادله انتگرالی $g(x)=\int_\circ^{\infty}h(t)\cos(xt)dt$، مقدار $h(\pi)$، کدام است؟



۱) $\frac{۲}{\pi^۲}$ ۲) $\frac{۲}{\pi^۳}$ ۳) $\frac{۴}{\pi^۲}$ ۴) $\frac{۴}{\pi^۳}$

۳ــ اگر تبدیل فوریه تابع $f(t)=e^{-\alpha|t|}$ به ازای $\alpha>\circ$ برابر $F(\omega)=\frac{۲\alpha}{\omega^۲+\alpha^۲}$ باشد، حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^۲+۲x+۱\circ)^۲}$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۵۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۳۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۲۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۱۸}$

۴ــ مقدار β در معادله دیفرانسیل $g''(t)+(\alpha+\beta t^۲)g(t)=\circ$، چقدر باشد، تا اتحاد $g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-۲i\pi xt}dt$، برقرار باشد؟

۱) ۲π ۲) $۲\pi^۲$ ۳) $-۴\pi^۲$ ۴) $-\pi^۲$

۵ــ اگر $P_n(x)$ چندجمله‌ای لژاندر درجه n باشد، حاصل $\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{P_n(\circ)}{۲^n}$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ ۲) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

۶ــ فرض کنید $J_{\frac{۱}{۲}}(x)=\sqrt{\frac{۲}{\pi x}}\sin x$ است. مقدار α کدام باشد، تا حاصل $\lim_{x\to\circ^+}\frac{J_{\frac{۳}{۲}}(x)}{x^\alpha}$، یک عدد حقیقی ناصفر شود؟ (J نمایش تابع بسل است.)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۷ــ اگر تابع گرین (Green) متناظر با جواب مسئله $\begin{cases}y''+۲y'+y=x\\ y(\circ)=y(۱)=\circ\end{cases}$ به‌صورت $G(x,t)=g(x,t)e^{-(x+t)}$ باشد، $g(x,t)$ کدام است؟

۱) $\begin{cases}x & \circ\le x\le t\\ \frac{t(۱-x)}{۱-t} & t<x\le ۱\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}\frac{t(۱-x)}{۱-t} & \circ\le x\le t\\ x & t<x\le ۱\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}t(۱-x) & \circ\le x\le t\\ x & t<x\le ۱\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}x & \circ\le x\le t\\ t(۱-x) & t<x\le ۱\end{cases}$

۸ــ مسئله انتقال حرارت در حالت پایدار (مانا) روی یک صفحه رسانای نیم‌دایره‌ای شکل به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $a>\circ$ به‌صورت $\nabla^۲u(r,\theta)=\circ$، را در نظر بگیرید. اگر $u(r,\circ)=u(r,\pi)=\circ$ و $u(a,\theta)=T$ باشند، مقدار دمای صفحه در نقطه $(\frac{a}{۲},\frac{\pi}{۲})$، کدام است؟

۱) $\frac{۲T}{\pi}\sum_{k=\circ}^{\infty}\frac{(-۱)^k}{(۲k+۱)۴^k}$ ۲) $\frac{T}{۲\pi}\sum_{k=\circ}^{\infty}\frac{۱}{(۲k+۱)۴^k}$ ۳) $\frac{T}{\pi}\sum_{k=\circ}^{\infty}\frac{۱}{(۲k+۱)۴^k}$ ۴) $\frac{T}{\pi}\sum_{k=\circ}^{\infty}\frac{(-۱)^k}{(۲k+۱)۴^k}$

۹ــ جواب معادله دیفرانسیل زیر با شرایط اولیه داده شده، کدام است؟

$$\begin{cases}\frac{\partial^۲w(x,t)}{\partial x\partial t}+\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}+\sin t=\circ & ,\quad x>\circ\ ,\ t>\circ\\ w(\circ,t)=\circ & ,\quad t\ge\circ\\ w(x,\circ)=x & ,\quad x\ge\circ\end{cases}$$

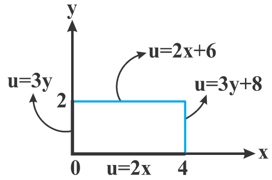
۱) $\frac{۱}{۴}(۲e^{-t}+۲\cos t-\sin t)x$

۲) $\frac{۱}{۲}(e^{-t}+\cos t+\sin t)x$

۳) $\frac{۱}{۴}(۲e^{-t}+۲\cos t+\sin t)x$

۴) $\frac{۱}{۲}(e^{-t}+\cos t-\sin t)x$

۱۰ـ مسئله پتانسیل $\nabla^۲ u=۰$ را با شرایط کرانه‌ای داده‌شده مطابق شکل زیر، در نظر بگیرید. حاصل $u(۱,۲/۵)-u(۳,۰/۵)$، کدام است؟



۱) $-۷/۵$

۲) ۰

۳) $۱/۵$

۴) ۲

۱۱ـ حاصل $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x dx}{x(x^۲+۱)}$، کدام است؟

۱) $\pi(۱-e^{-۱})$ ۲) $\pi(۲-e^{-۱})$ ۳) $\pi(۱+e^{-۱})$ ۴) $\pi(۲+e^{-۱})$

۱۲ـ با استفاده از اتحاد $|q|<۱$; $\sum_{n=۰}^{\infty} q^n=\frac{۱}{۱-q}$، حاصل $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n}{۲^n}(۱+i)^n$، کدام است؟

۱) i ۲) $۱-i$ ۳) $i-۱$ ۴) $i+۱$

۱۳ـ حاصل $\frac{۱}{\pi i}\oint_{|z|=۲}(z+۱)^۳\sinh\frac{۱}{z-۱}dz$، کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

۱۴ـ مانده تابع $f(z)=\frac{z^{-۴}}{z^۲-۲z\cosh ۱+۱}$، در دیسک $۰/۵<|z|<۱/۵$، حول نقطه $z=۰$، کدام است؟

۱) $\frac{-۱}{۲e^۴\sinh ۱}$ ۲) $\frac{-۱}{۲e^۶\sinh ۱}$ ۳) $\frac{e^۴-e^{-۴}}{۲\sinh ۱}$ ۴) $\frac{e^{-۴}-e^۴}{۲\sinh ۱}$

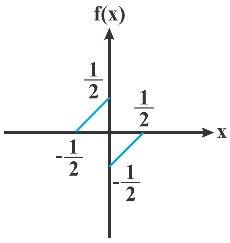
۱۵ـ با فرض $c\neq n\pi$، منحنی $\frac{x^۲}{\sin^۲ c}-\frac{y^۲}{\cos^۲ c}=۱$، تحت نگاشت $w=u+iv=\sin^{-۱}z$، به کدام منحنی تبدیل می‌شود؟

۱) بیضی ۲) هذلولی ۳) خط $u=c$ ۴) خط $v=c$

پاسخنامه آزمون مهندسی برق ـ الکترونیک ـ دکتری ۱۴۰۰

۱ـ گزینه «۲» ابتدا تابع $x-[x]-\frac{۱}{۲}$ را در بازه‌ی $(\frac{-۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ رسم می‌کنیم:

مشاهده می‌شود که $f(x)$ تابعی فرد است. بنابراین داریم:



$$f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\quad,\quad L=\frac{۱}{۲}\quad,\quad \alpha_۰=\alpha_n=۰$$

$$b_n=\frac{۲}{L}\int_۰^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=۴\int_۰^{\frac{۱}{۲}}(x-\frac{۱}{۲})\sin ۲n\pi x dx=۴\left(\frac{-x\cos ۲n\pi x}{۲n\pi}+\frac{\sin ۲n\pi x}{۴n^۲\pi^۲}+\frac{\cos ۲n\pi x}{۴n\pi}\right)\Bigg|_۰^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\Rightarrow b_n=۴\left(\frac{-\cos n\pi}{۴n\pi}+\frac{\sin n\pi}{۴n^۲\pi^۲}+\frac{\cos n\pi}{۴n\pi}\right)-۴\left(۰+۰+\frac{۱}{۴n\pi}\right)=\frac{-۱}{n\pi}$$

$$I=\frac{\alpha_۰}{۲}+\sum_{n=۱}^{۳}\left(\alpha_n\cos\frac{n\pi}{۴L}+b_n\sin\frac{n\pi}{۴L}\right)=\sum_{n=۱}^{۳} b_n\sin\frac{n\pi}{۴L}=\sum_{n=۱}^{۳}\frac{-\sin\frac{n\pi}{۲}}{n\pi}=\frac{-\sin\frac{\pi}{۲}}{\pi}+\frac{-\sin\pi}{۲\pi}+\frac{-\sin\frac{۳\pi}{۲}}{۳\pi}=\frac{-۱}{\pi}+\frac{۱}{۳\pi}=\frac{-۲}{۳\pi}$$

۲ـ گزینه «۴» با توجه به این که تابع $g(x)$ تابعی زوج نسبت به x است به نظر می‌رسد منظور از $g(x)$ همان بسط کسینوسی شکل آورده شده است. با جایگزینی ω به جای t متوجه می‌شویم که معادله‌ی صورت سؤال انتگرال فوریه $g(x)$ را نشان می‌دهد.

$$g(x)=\int_۰^{\infty}h(\omega)\cos(\omega x)d\omega$$

$$h(\omega)=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\infty}g(x)\cos\omega x dx=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{۳}(۳-x)\cos\omega x dx-\frac{۲}{\pi}\int_۱^{۲}(۱)\cos\omega x dx=\frac{۲}{\pi}\left(\frac{(۳-x)\sin\omega x}{\omega}-\frac{\cos\omega x}{\omega^۲}\right)\Bigg|_۰^{۳}-\frac{۲}{\pi}\left(\frac{\sin\omega x}{\omega}\right)\Bigg|_۱^{۲}$$

$$=\frac{۲}{\pi}\left(۰-\frac{\cos ۳\omega}{\omega^۲}-\frac{۳\sin ۳\omega}{\omega}+\frac{۱}{\omega^۲}\right)-\frac{۲}{\pi}\left(\frac{\sin ۲\omega}{\omega}-\frac{\sin\omega}{\omega}\right)\Rightarrow h(\pi)=\frac{۲}{\pi}\left(\frac{-\cos ۳\pi}{\pi^۲}-\frac{۳\sin ۳\pi}{\pi}+\frac{۱}{\pi^۲}-\frac{\sin ۲\pi}{\pi}+\frac{\sin\pi}{\pi}\right)=\frac{۴}{\pi^۳}$$

۳ــ گزینه «۱» با توجه به تبدیل فوریه آورده شده در صورت سؤال داریم:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{((\omega+۱)^{۲}+۹)^{۲}}$$

$$F^{-۱}\left(\frac{۶}{\omega^{۲}+۹}\right)=e^{-۳|t|}\ \Rightarrow\ F^{-۱}\left(\frac{۱}{(\omega+۱)^{۲}+۹}\right)=\frac{e^{-it-۳|t|}}{۶}$$

با توجه به تساوی پارسوال داریم:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{((\omega+۱)^{۲}+۹)^{۲}}=۲\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{e^{-it-۳|t|}}{۶}\right|^{۲}dt=۲\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-۶|t|}}{۳۶}dt=\frac{۴\pi}{۳۶}\int_{۰}^{\infty}e^{-۶t}dt=\frac{۴\pi}{۳۶}\left(\frac{e^{-۶t}}{-۶}\right)\Big|_{۰}^{\infty}=\frac{۴\pi}{۳۶}\left(۰-\frac{-۱}{۶}\right)=\frac{\pi}{۵۴}$$

۴ــ گزینه «۳» از معادله تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$-\omega^{۲}G(\omega)+\alpha G(\omega)-\beta G''(\omega)=۰\Rightarrow G''+\left(\frac{\omega^{۲}-\alpha}{\beta}\right)G=۰\qquad(*)$$

با جایگزینی $\omega=۲\pi x$ در رابطه صورت سؤال داریم:

$$g\left(\frac{\omega}{۲\pi}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i\omega t}dt\ \Rightarrow\ G(\omega)=g\left(\frac{\omega}{۲\pi}\right)\xrightarrow{t=\frac{\omega}{۲\pi}}G(۲\pi t)=g(t)$$

با تغییر متغیر $t=\frac{\omega}{۲\pi}$ در معادله $(*)$ داریم:

$$\frac{\partial G(۲\pi t)}{\partial\omega}=\frac{\partial G(۲\pi t)}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial\omega}=\frac{\partial g(t)}{\partial t}\cdot\frac{۱}{۲\pi}\Rightarrow\frac{\partial^{۲}G(۲\pi t)}{\partial\omega^{۲}}=\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\partial g(t)}{\partial t}\cdot\frac{۱}{۲\pi}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g(t)}{\partial t}\cdot\frac{۱}{۲\pi}\right)\frac{\partial t}{\partial\omega}=\frac{\ddot g(t)}{۴\pi^{۲}}$$

$$(*):\frac{\ddot g(t)}{۴\pi^{۲}}+\frac{۴\pi^{۲}t^{۲}-\alpha}{\beta}g(t)=۰\ \Rightarrow\ddot g(t)+۴\pi^{۲}\left(\frac{۴\pi^{۲}t^{۲}-\alpha}{\beta}\right)g(t)=۰$$

ضرایب معادله به‌دست آمده باید با ضرایب معادله صورت سؤال یکی باشد.

$$\Rightarrow\begin{cases}۴\pi^{۲}\left(\frac{۴\pi^{۲}}{\beta}\right)=\beta\ \Rightarrow\beta^{۲}=(۴\pi^{۲})^{۲}\\ ۴\pi^{۲}\left(\frac{-\alpha}{\beta}\right)=\alpha\ \Rightarrow\beta=-۴\pi^{۲}\end{cases}\Rightarrow\beta=-۴\pi^{۲}$$

۵ــ گزینه «۲» با استفاده از تابع مولد لژاندر داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۱-۲tx+t^{۲}}}=\sum_{n=۰}^{\infty}P_n(x)t^n\ \xrightarrow[t=\frac{۱}{۲}]{x=۰}\ \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{P_n(۰)}{۲^n}=\frac{۱}{\sqrt{۱-۰+\frac{۱}{۴}}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

۶ــ گزینه «۳» با توجه به رابطه‌ی زیر داریم:

$$\frac{d(x^{-v}J_v)}{dx}=-x^{-v}J_{v+۱}\ \Rightarrow\frac{d(x^{-\frac{۱}{۲}}J_{\frac{۱}{۲}})}{dx}=-x^{-\frac{۱}{۲}}J_{\frac{۳}{۲}}$$

$$\Rightarrow\frac{d\left(\sqrt{\frac{۲}{\pi}}x^{-۱}\sin x\right)}{dx}=-x^{-\frac{۱}{۲}}J_{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow\sqrt{\frac{۲}{\pi}}(-x^{-۲}\sin x+x^{-۱}\cos x)=-x^{-\frac{۱}{۲}}J_{\frac{۳}{۲}}\ \Rightarrow J_{\frac{۳}{۲}}=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\left(x^{-\frac{۳}{۲}}\sin x-x^{-\frac{۱}{۲}}\cos x\right)$$

$$\Rightarrow\frac{J_{\frac{۳}{۲}}(x)}{x^{\alpha}}=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\left(x^{-\frac{۳}{۲}-\alpha}\sin x-x^{-\frac{۱}{۲}-\alpha}\cos x\right)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{(\sin x-x\cos x)}{x^{+\frac{۳}{۲}+\alpha}}$$

$$\sin x-x\cos x\underset{x\to۰}{\approx}\left(x-\frac{x^{۳}}{۶}\right)-x\left(۱-\frac{x^{۲}}{۲}\right)=\frac{x^{۳}}{۳}\ \Rightarrow\lim_{x\to۰}\frac{J_{\frac{۳}{۲}}(x)}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to۰}\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{x^{۳}}{۳x^{+\frac{۳}{۲}+\alpha}}$$

برای این که حد بالا مقداری حقیقی و ناصفر داشته باشد داریم:

$$+\frac{۳}{۲}+\alpha=۳\Rightarrow\alpha=\frac{۳}{۲}$$

۷ـ گزینه «۱» ابتدا لازم به ذکر است این سؤال کاملاً غیرمتعارف و جزو سرفصل‌های دوره کارشناسی ریاضی مهندسی نیست! بنابراین طرح آن اشکال دارد. می‌دانیم طبق تعریف، پاسخ هر معادله دیفرانسیل خطی با مقدار مرزی و شرایط اولیه همگن به ورودی تابع دلتا، تابع گرین آن معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود که به بیان ریاضی:

$$\begin{cases} L(u(x)) = f(x) \;;\; n \in [a,b] \\ u(a) = 0 \;;\; u(b) = \beta \end{cases}$$

که تابع گرین بایستی معادله زیر را ارضا کند:

$$\begin{cases} L(G(x,x_0)) = \delta(x-x_0) \\ G(a,x_0) = G(b,x_0) = 0 \end{cases}$$

که L می‌تواند هر عملگر خطی نظیر عملگرهای لاپلاس، هلمهولتز، موج و ... باشد. مهمترین خواص تابع گرین به صورت زیر می باشند:

۱ـ تابع گرین مستقل از شرایط مرزی مسئله اصلی، همواره در شرایط مرزی صفر می‌باشد $(G(a,x_0) = G(b,x_0) = 0)$.

۲ـ تابع گرین همواره در نقطه x_0 پیوسته است یعنی $G(x,x_0^+) = G(x,x_0^-)$

۳ـ مشتق تابع گرین در نقطه x_0 ناپیوسته است و مقدار این ناپیوستگی برابر است با: $G'(x_0^+) - G'(x_0^-) = 1$

حال با توجه به نکات فوق مسئله را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} G'' + 2G' + G = \delta(x-t) \\ G(0,t) = G(1,t) = 0 \end{cases}$$

واضح است که تابع $\delta(x-t)$ برای لحظات $x \neq t$ برابر با صفر است. یعنی داریم:

$$G'' + 2G' + G = 0 \;\Rightarrow\; G(x,t) = \begin{cases} (a_1x + b_1)e^{-x} &, x \le t \\ (a_2x + b_2)e^{-x} &, x > t \end{cases}$$

با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$G(0,t) = 0 \xrightarrow{x<t} (a_1(0) + b_1)e^{-(0)} = 0 \xrightarrow{\text{پس}} b_1 = 0$$

$$G(1,t) = 0 \xrightarrow{x>t} (a_2 + b_2)e^{-1} = 0 \xrightarrow{\text{پس}} a_2 + b_2 = 0$$

یعنی تا اینجا تابع گرین به صورت مقابل می‌باشد:

$$G(x,t) = \begin{cases} a_1xe^{-x} &, x \le t \\ a_2(x-1)e^{-x} &, x > t \end{cases}$$

با اعمال شرط پیوستگی داریم:

$$G(x,t^-) = G(x,t^+) \Rightarrow a_1te^{-t} = a_2(t-1)e^{-t} \;\Rightarrow\; a_1t = a_2(t-1) \quad (1)$$

همچنین با اعمال شرط ناپیوستگی تابع $G'(x)$ در t داریم:

$$G'(t^+) - G'(t^-) = 1 \;\Rightarrow\; a_2(e^{-t})(2-t) + a_1e^{-t}(t-1) = 1$$

$$\text{با توجه به رابطه (۱)} \Rightarrow \frac{(a_1t)}{t-1}e^{-t}(2-t) + a_1e^{-t}(t-1) = 1 \;\Rightarrow a_1 = e^{-t} \xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} a_2 = \frac{te^{-t}}{t-1}$$

با توجه به مقادیر فوق تابع $G(x,t)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$G(x,t) = \begin{cases} xe^{-(x+t)} &, x \le t \\ \dfrac{t(x-1)}{t-1}e^{-(x+t)} &, x > t \end{cases} \xrightarrow{G(x,t)=g(x,t)e^{-(x+t)}} g(x,t) = \begin{cases} x &; x \le t \\ \dfrac{t(x-1)}{t-1} &; x > t \end{cases}$$

۸ـ گزینه «۱» فرم پاسخ مسئله به شکل مقابل است:

$$u(r,\theta) = a_0 + b_0 Lnr + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\sqrt{\lambda_n}\theta + b_n\sin\sqrt{\lambda_n}\theta)(A_nr^{\sqrt{\lambda_n}} + B_nr^{-\sqrt{\lambda_n}})$$

با توجه به شرط $u(r,0) = 0$ داریم:

$$a_0 = b_0 = a_n = 0 \;\Rightarrow u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\sqrt{\lambda_n}\theta(A_nr^{\sqrt{\lambda_n}} + B_nr^{-\sqrt{\lambda_n}})$$

با توجه به شرط $u(r,\pi) = 0$ داریم:

$$\sqrt{\lambda_n} = n \;\Rightarrow\; u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\theta(A_nr^n + B_nr^{-n})$$

با توجه به شرط $u(0,\theta) = T$ و فرض $A_n = b_nA_n$ و $B_n = b_nB_n$ داریم:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty}\sin n\theta(A_na^n + B_na^{-n})$$

با توجه به اینکه مسئله روی نیم دایره تعریف شده است لذا به ازای $r = 0$ نیز باید پاسخ داشته باشد. لذا داریم: $B_n = 0$. بنابراین داریم:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_nr^n\sin n\theta \;\Rightarrow\; T = \sum_{n=1}^{\infty} A_na^n\sin n\theta$$

مقدار $A_n a^n$ ضرایب سری فوریه سینوسی T به ازای $L=\pi$ را نشان می‌دهد.

$$A_n a^n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} T\sin\frac{n\pi}{\pi}x\,dx = \frac{2T}{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2T}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)$$

$$\Rightarrow A_n = \begin{cases} \dfrac{4T}{\pi n a^n} & \text{فرد } n \\ 0 & \text{زوج } n \end{cases} \Rightarrow u(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4T}{(2k+1)\pi a^{2k+1}} r^{2k+1}\sin(2k+1)\theta$$

$$u\left(\frac{a}{2},\frac{\theta}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4T}{(2k+1)\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2T}{(2k+1)\pi}\left(\frac{1}{4}\right)^k(-1)$$

۹ــ گزینه «۴» با استفاده از تفکیک متغیرها مسئله را حل می‌کنیم:

$$\omega(x,t) = F(x)G(T) \Rightarrow F'G' + F'G + \sin t = 0 \Rightarrow F' = \frac{-\sin t}{G'+G} = k \Rightarrow F = kx + A$$

با توجه به شرط اولیه $\omega(0,t)=0$ داریم:

$$F(0)=0 \Rightarrow A=0 \Rightarrow F(x)=kx$$

$$(G'+G)k = -\sin t \Rightarrow G'+G = \frac{-\sin t}{k}$$

با حل معادله مرتبه اول داریم:

$$G(t) = c_1 e^{-t} + \frac{\cos t - \sin t}{2k} \Rightarrow \omega(x,t) = kx\left(c_1 e^{-t} + \frac{\cos t - \sin t}{2k}\right)$$

با توجه به شرط $\omega(x,0)=x$ داریم:

$$\omega(x,0) = kx\left(c_1 + \frac{1}{2k}\right) = x \Rightarrow kc_1 + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow kc_1 = \frac{1}{2}$$

به نظر می‌رسد طراح سؤال با فرض $c_1 = 1$ مسئله را حل کرده است. با این فرض داریم:

$$k = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega(x,t) = \frac{1}{2}x(e^{-t} + \cos t - \sin t)$$

۱۰ــ گزینه «۴» با توجه به شرایط مرزی ناهمگن مسئله را با تغییر متغیر $u = v + w$ حل می‌کنیم. با توجه به اینکه باید روابط $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ و $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ برقرار باشد تابع $w(x,y)$ را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم:

$$w(x,y) = Axy + Bx + Cy + D$$

شرایط مرزی به ازای $x=0$ و $x=4$ را به w اعمال می‌کنیم:

$$w(0,y) = 3y \Rightarrow c=3\ ,\ D=0 \Rightarrow w = Axy + Bx + 3y$$

$$w(4,y) = 3y + A \Rightarrow A=0\ ,B=2 \Rightarrow w = 2x+3y$$

اکنون شرایط مرزی روی $y=0$، $y=3$ را برای w و v محاسبه می‌کنیم:

$$w(x,0) = 2x \Rightarrow v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = 0$$

$$w(x,3) = 2x+6 \Rightarrow v(x,3) = u(x,3) - w(x,3) = 0$$

با توجه به این که تمامی شروط مرزی v برابر صفر شدند لذا داریم:

$$v(x,y)=0 \Rightarrow u(x,y) = 2x+3y \Rightarrow u(1,2/5) - u(3,0/5) = (2(1)+3(2/5)) - (2(3)+3(0/5)) = 2$$

۱۱ــ گزینه «۱» با توجه به فرم عبارت داخل انتگرال و بازه‌ی انتگرال‌گیری داریم:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{x(x^2+1)} \Rightarrow \alpha = 1\ ,\ f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$$

$I = I_m(2\pi i$ (مجموع مانده $f(z)e^{iaz}$ در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند) $+\pi i$ (مجموع مانده $f(z)e^{iaz}$ در قطب‌هایی که روی محور حقیقی قرار دارند))

$$f(z)e^{iaz} = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)} \xrightarrow{\text{قطب‌ها}} \begin{cases} z=0 \rightarrow \text{روی محور حقیقی} \\ z=i \rightarrow \text{بالای محور حقیقی} \\ z=-i \rightarrow \text{پایین محور حقیقی} \end{cases}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}(f(z)e^{iaz}) = \frac{e^{i(0)}}{(0+1)} = 1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=I} = (f(z)e^{iaz}) = \frac{e^{i(i)}}{(i)(i+i)} = \frac{e^{-1}}{-2} \Rightarrow I = I_m\left(2\pi i\left(\frac{-e^{-1}}{2}\right) + \pi i(1)\right) = \pi(1-e^{-1})$$

۱۲ــ گزینه «۳» با مشتق‌گیری از رابطه داده شده داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

به‌ازای $q = \frac{1+i}{2}$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1-\left(\frac{1+i}{2}\right)\right)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n = \left(\frac{1+i}{2}\right)\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1+i}{2}\right)^2}\right) = \left(\frac{1+i}{2}\right)\left(\frac{1}{\left(\frac{1-i}{2}\right)^2}\right) = \left(\frac{1+i}{2}\right)\left(\frac{4}{-2i}\right) = (1+i)i = -1+i$$

۱۳ــ گزینه «۲» با توجه به قضیه تیلور داریم:

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow f(z) = (z+1)^3 \sinh\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^3}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}$$

با توجه به عبارت به‌دست آمده برای $f(z)$، این تابع در $z=1$ قطب دارد.

$$I = \frac{1}{\pi i}\oint_{|z|=2} f(z)dz = \frac{2\pi i}{\pi i}\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)$$

مانده $f(z)$ در نقطه $z=1$ برابر خواهد بود با ضریب $\frac{1}{z-1}$. بنابراین عبارت $(z+1)^3$ را برحسب $(z-1)$ بازنویسی می‌کنیم:

$$(z+1)^3 = (z-1+2)^3 = (z-1)^3 + 3(2)(z-1)^2 + 3(2)^2(z-1) + (2)^3$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^3 + 6(z-1)^2 + 12(z-1) + 8}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}} \Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \frac{6}{3!} + \frac{8}{1!} = 9 \Rightarrow I = \frac{2\pi i}{\pi i}(9) = 18$$

۱۴ــ گزینه «۱» ابتدا ریشه‌های مخرج کسر را به دست می‌آوریم:

$$z^2 - 2z\cosh 1 + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (2\cosh 1)^2 - 4 = 4(\cosh^2 1 - 1) = 4\sinh^2 1 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{2\cosh 1 \pm 2\sinh 1}{2} = \cosh 1 \pm \sinh 1$$

$$z_1 = \cosh 1 + \sinh 1 = e^1 \simeq 2/72 \;, z_2 = \cosh 1 - \sinh 1 = e^1 \simeq 0/37$$

بنابراین قطب‌های عبارت $f(z)$ عبارتند از $z_1 = e^1, z_2 = e^{-1}, z_3 = 0$.

با توجه به شرط $0/5 < |z| < 1/5$ تنها قطب‌های z_2, z_3 درون ناحیه انتگرال‌گیری قرار می‌گیرند. به همین دلیل داریم:

$$I = \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_3} f(z) = -\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) \Rightarrow I = -\operatorname*{Res}_{z=e} \frac{1}{z^4(z-e)(z-e^{-1})} = \frac{-1}{e^4(e-e^{-1})} = \frac{-1}{2e^4\sinh 1}$$

۱۵ــ گزینه «۳» می‌دانیم که خطوط ثابت با معادله‌ی $x=c$ تحت نگاشت $\sin z$ به هذلولی به فرمول $\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$ تبدیل می‌شود. لذا هذلولی $\frac{x^2}{\sin^2 c} - \frac{y^2}{\cos^2 c} = 1$ تحت نگاشت $\sin^{-1} z$ به خط $u=c$ تبدیل خواهد شد. اما برای کسانی که این مطلب را حفظ نباشند، مطلب را اثبات می‌کنیم.

فرض می‌کنیم $z = x+iy$ و $w = u+iv$ باشد. به جای z $w = \sin^{-1}$ تبدیل $z = \sin w$ را در نظر می‌گیریم:

$$z = \sin w = \underbrace{\sin u\cosh v}_{x} + i\underbrace{\cos u\sinh v}_{y} \Rightarrow \frac{\sin^2 u\cosh^2 v}{\sin^2 c} - \frac{\cos^2 u\sinh^2 v}{\cos^2 c} = 1$$

با توجه به این که می‌دانیم $\cosh^2 c - \sinh^2 c = 1$. در عبارت به دست آمده اگر به جای u قرار دهیم c به تساوی مذکور می‌رسیم، لذا پاسخ مسئله $u=c$ خواهد بود»