www.modaresanesharif.ac.ir

مدرسان شریف

فصل اول

« یادآوری »

مثال۱: حاصل $\frac{x^۲-x+۶}{x^۲-۴}+\frac{۳}{x+۲}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۲}{x-۲}$ ۲) $\frac{x}{x-۲}$ ۳) $\frac{x}{x+۲}$ ۴) $\frac{۲}{x+۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با تجزیه عبارت مخرج داریم:

$$\frac{x^۲-x+۶}{x^۲-۴}+\frac{۳}{x+۲}=\frac{x^۲-x+۶}{(x-۲)(x+۲)}+\frac{۳}{x+۲}=\frac{x^۲-x+۶+۳(x-۲)}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{x^۲-x+۶+۳x-۶}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{x^۲+۲x}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{x}{x-۲}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲: اگر $\sin\alpha=\frac{a^۴+۱}{۲a^۲}$ باشد $\cos۲\alpha$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) صفر ۴) ۱-

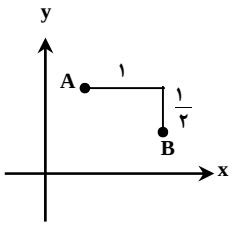
☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\cos۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha=۱-۲(\frac{a^۴+۱}{۲a^۲})^۲=۱-۲(\frac{a^۸+۲a^۴+۱}{۴a^۴})=۱-\frac{a^۸+۲a^۴+۱}{۲a^۴}=\frac{۲a^۴-a^۸-۲a^۴-۱}{۲a^۴}=-\frac{a^۸+۱}{۲a^۴}$$

$$-۱\le\sin\alpha\le۱\Rightarrow\frac{a^۴+۱}{۲a^۲}\le۱\Rightarrow a^۴+۱\le۲a^۲\Rightarrow(a^۲-۱)^۲\le۰\Rightarrow a^۲=۱\Rightarrow a=\pm۱\Rightarrow\cos۲\alpha=-۱$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳: در شکل زیر ضریب زاویه خطی که از دو نقطه A و B می‌گذرد کدام است؟



۱) ۲-
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $-\frac{۱}{۲}$
۴) ۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$m=tg\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\frac{۱}{۲}}{۱}=-\frac{۱}{۲}$$

توجه شود که خط گذرنده از دو نقطه A و B دارای شیب منفی می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۴: اگر $x = ۱ - \sqrt{۲}$ باشد، حاصل $(x + x^{-۱})^{\frac{۱}{۳}}$ چقدر است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۸)

۱) $\sqrt[۳]{۲}$ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) $-\sqrt{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$x = ۱ - \sqrt{۲} \Rightarrow \frac{۱}{x} = \frac{۱}{۱ - \sqrt{۲}} \times \frac{۱ + \sqrt{۲}}{۱ + \sqrt{۲}} = -۱ - \sqrt{۲} \Rightarrow x + \frac{۱}{x} = ۱ - \sqrt{۲} - ۱ - \sqrt{۲} = -۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow (x + \frac{۱}{x})^{\frac{۱}{۳}} = (-۲\sqrt{۲})^{\frac{۱}{۳}} = (-۲^{\frac{۳}{۲}})^{\frac{۱}{۳}} = -۲^{\frac{۱}{۲}} = -\sqrt{۲}$$

مثال۵: از رابطه $(a - ۲b)^۲ + (b - ۲c)^۲ = ۰$ مقدار $\frac{(b + c - a)^۳}{abc}$ چقدر است؟ (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۸)

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) ۸ ۳) $-\frac{۱}{۸}$ ۴) -۸

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» برای برقرار تساوی داده شده در صورت سؤال لازم است $a - ۲b = ۰$ و $b - ۲c = ۰$ باشد. بنابراین $a = ۲b$ و $b = ۲c$ حاصل می‌شود که با جایگزینی در عبارت موردنظر نتیجه می‌شود:

$$a = ۲b = ۴c \Rightarrow \frac{(b + c - a)^۳}{abc} = \frac{(۲c + c - ۴c)^۳}{(۴c)(۲c)(c)} = \frac{-۱}{۸}$$

مثال۶: مختصات مرکز تقارن منحنی به معادله $x + xy - ۳ = ۰$ کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۸)

۱) $(۰,-۱)$ ۲) $(-۱,۰)$ ۳) $(۱,۰)$ ۴) $(۰,۱)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$x + xy - ۳ = ۰ \Rightarrow xy = -x + ۳ \Rightarrow y = \frac{-x + ۳}{x}$$

بنابراین نقطه $(۰,-۱)$ مرکز تقارن منحنی داده شده می‌باشد.

یادآوری: در تابع هموگرافیک $y = \frac{ax + b}{cx + d}$، نقطه $(\frac{-d}{c}, \frac{a}{c})$ مرکز تقارن منحنی می‌باشد، که این نقطه محل تلاقی مجانب‌های منحنی نیز هست.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مدرسان شریف

فصل دوم

« مجموعه‌ها و بسط دو جمله‌ای»

مثال۱: مجموعه‌ای n عضو دارد و به آن سه عنصر دیگر اضافه شد. در این صورت تعداد زیر مجموعه‌های آن چند برابر زیر مجموعه اولیه است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تعداد زیرمجموعه‌های، مجموعه جدید $۲^۳$ برابر مجموعه اولیه می‌باشد.

مثال۲: مجموعه‌های A، B و C مفروضند، به طوری که $A \subset B \subset C$ است، حاصل مجموعه $C' \cap (A' \cap B')$ کدام است؟

۱) A' ۲) B' ۳) C' ۴) ϕ

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

روش اول: از رابطه $A \subset B \subset C$ نتیجه می‌شود $C' \subset B' \subset A'$، بنابراین:

$$C' \cap \underbrace{(A' \cap B')}_{\text{چون } B' \subset A'} = C' \cap B' = C'$$

روش دوم:

$$C' \cap (A' \cap B') = C' \cap (A \cup B)' = C' \cap B' = (C \cup B)' = C'$$

مثال۳: مجموعه $(A \cup B) \cap (A \cup B')$ برابر کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) $A \cup B$ ۴) $A \cup B'$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$(A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup (B \cap B') = A \cup \phi = A$$

مثال۴: اگر M و N دو مجموعه باشند $(M \cup N) \cap N'$ کدام است؟

۱) N' ۲) M ۳) $M \cap N'$ ۴) $(M \cup N')$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

روش اول:

$$(M \cup N) \cap N' = (M \cap N') \cup (N \cap N') = (M \cap N') \cup \phi = M \cap N'$$

روش دوم: قانون شبه جذب

$$(M \cup N) \cap N' = N' \cap M = M \cap N'$$

مثال۵: «ارقام فرد یک رقمی» مجموعه A و «اعداد اول یک رقمی» مجموعه B بوده، زیرمجموعه‌های A-B «چه تعداد» است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$A = \{۱,۳,۵,۷,۹\} \quad B = \{۲,۳,۵,۷\}$$

$$A - B = \{۱,۹\} \Rightarrow \text{تعداد زیر مجموعه‌ها} = ۲^{n(A-B)} = ۲^۲ = ۴$$

توضیح: منظور از $n(A-B)$ تعداد عضوهای مجموعه $A-B$ است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۶: اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند $(A-B)'$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) $A\cup B'$ ۲) $A'\cup B$ ۳) $A'\cup B'$ ۴) $A'\cap B'$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» $(A-B)'=(A\cap B')'=A'\cup B$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۷: اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی و $A-B=A$ باشد، آنگاه $B\cap A'$ کدام مجموعه است؟

۱) A ۲) B ۳) $A\cup B$ ۴) $A\cap B$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از رابطه $A-B=A$ نتیجه می‌شود A و B دو مجموعه جدا از هم می‌باشند، بنابراین: $B\cap A'=B-A=B$

یادآوری: A و B دو مجموعه جدا از هم می‌باشند، اگر و تنها اگر $A-B=A$ و یا $B-A=B$ باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۸: اگر $A\cap B=A-B$ باشد، آنگاه A برابر کدام است؟

۱) B ۲) B' ۳) M ۴) ϕ

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» $A\cap B=A\cap B'\rightarrow A=\phi$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۹: اگر $A\subset B$ باشد، مجموعهٔ $(A-B)'\cap B$ برابر است با :

۱) A ۲) B ۳) M ۴) ϕ

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» $A\subset B\Rightarrow A-B=\phi\Rightarrow(\phi)'\cap B=M\cap B=B$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۰: اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشد، مجموعه $(A\cup B)-A$ کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) $B-A$ ۴) $A-B$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» $(A\cup B)-A=(A\cup B)\cap A'\underline{\text{قانون شبه جذب}}B\cap A'=B-A$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۱: کدام یک از روابط زیر نادرست است؟

۱) $A\cup(A-B)=A$ ۲) $(A-B)=A\cap B'$ ۳) $(A\cup B)'\cup A=A\cup B'$ ۴) $B\cap(B-A)=A\cup B$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» $B\cap(B-A)=B\cap(B\cap A')=B\cap A'$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۲: اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ باشد، $A^۵=A\times A\times A\times A\times A$ چند عضو دارد؟

۱) ۲۴۳ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۵ ۴) ۴۵

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» مجموعهٔ A سه عضو دارد، بنابراین $A^۵$ دارای $۳^۵=۲۴۳$ عضو است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۱۳: اگر $A=\{x|۲\le x<۴\}$ و $B=\{x|۳\le x<۶\}$ بوده و A ، $B\subset N$ باشد $(A-B)\times A$ چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به تعریف مجموعه‌های A و B و اینکه A و B دو زیر مجموعه اعداد طبیعی هستند، داریم:

$A=\{۲,۳\}, B=\{۳,۴,۵\}\Rightarrow A-B=\{۲\}$

در نتیجه مجموعه $(A-B)\times A$، دو عضو دارد که به ترتیب روبرو می‌باشند. $(A-B)\times A=\{(۲,۲),(۲,۳)\}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۴: اگر مجموعه جهانی $U=\{۱,۲,۳,....,۱۰\}$ و A مجموعه اعداد فرد و B مجموعه اعداد بخش‌پذیر بر ۳ باشد، مجموعه $(A-B)$ چند زیر مجموعه دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» $A=\{۱,۳,۵,۷,۹\}\ ,\ B=\{۳,۶,۹\} \Rightarrow A-B=\{۱,۵,۷\}$

چون مجموعه $(A-B)$ سه عضو دارد پس دارای $۸=۲^{۳}$ زیر مجموعه است.

مثال۱۵: اگر $n(A)=۷$ ،$n(A\cup B)=۱۰$ و $n(A\cap B)=۵$، آنگاه $n(B)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \Rightarrow ۱۰=۷+n(B)-۵ \Rightarrow n(B)=۸$

مثال۱۶: اگر داشته باشیم $n(A)=۱۰$ (تعداد عناصر مجموعه A) و $n(B)=۱۵$ و $n(A\cup B)=۱۹$ باشد، $n(A\cap B)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۲۵ ۴) ۲۹

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \Rightarrow ۱۹=۱۰+۱۵-n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B)=۶$

مثال۱۷: اگر تعداد عناصر مجموعه‌های A، B، $A\cap B$ به ترتیب برابر ۵ و ۷ و ۳ باشند، تعداد عناصر $A\cup B$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق فرض $n(A)=۵$، $n(B)=۷$ و $n(A\cap B)=۳$، بنابراین:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۷+۵-۳=۹$$

مثال۱۸: اگر تعداد عناصر مجموعه‌های A و $(A\cap B)$ و $A\cup B$ به ترتیب برابر ۱۰ ، ۴ و ۱۸ باشد تعداد عناصر B کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق فرض $n(A)=۱۰$، $n(A\cap B)=۴$ و $n(A\cup B)=۱۸$، بنابراین داریم:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \Rightarrow ۱۸=۱۰+n(B)-۴ \Rightarrow n(B)=۱۲$$

مثال۱۹: اگر مجموع مرجع دارای ۸ عضو و $n(A)=۵$ و $n(B')=۶$، $n(A\cup B)=۶$ باشد، در این صورت $n(A\cap B)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\left.\begin{matrix} n(M)=۸ \\ n(B')=۶ \end{matrix}\right\} \Rightarrow n(B)=۸-۶=۲$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \Rightarrow ۶=۵+۲-n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B)=۱$$

مثال۲۰: در یک کلاس، ۳۰ نفر شیرازی و ۴۵ نفر پسر می‌باشند. چنانچه ۲۰ نفر از شیرازیها پسر باشند تعداد پسرها یا شیرازیها مجموعاً چند نفر می‌باشد.

۱) ۷۵ ۲) ۵۵ ۳) ۶۵ ۴) ۷۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر شیرازی‌ها را با مجموعه A و پسرها را با مجموعه B نمایش دهیم، در این صورت:

$$n(A\cap B)=۲۰\ ,\ n(B)=۴۵\ ,\ n(A)=۳۰$$

$$\Rightarrow \text{تعداد پسرها یا شیرازی‌ها} = n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۳۰+۴۵-۲۰=۵۵$$

$$Z=\{\cdots,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\cdots\}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۲۱: حاصل عبارت $A=\frac{\binom{۵}{۳}\times n!}{\binom{۶}{۳}\times(n-۲)!}$ کدام است ؟

۱) $۲(n-۲)$ ۲) $n(n-۱)$ ۳) $\frac{n(n-۲)}{۲}$ ۴) $\frac{n(n-۱)}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{(۵-۳)!\times ۳!}=\frac{۴!\times ۵}{۲!\times ۳!}=\frac{۳!\times ۴\times ۵}{۳!\times ۱\times ۲}=۱۰$$

$$\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{(۶-۳)!\times ۳!}=\frac{۵!\times ۶}{۳!\times ۳!}=\frac{۳!\times ۴\times ۵\times ۶}{۳!\times ۱\times ۲\times ۳}=۲۰$$

$$\Rightarrow A=\frac{۱۰\times(n-۲)!\times(n-۱)\times n}{۲۰\times(n-۲)!}=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

مثال۲۲: اگر مجموعه A دارای ۵ عضو باشد، آنگاه تعداد زیر مجموعه‌های ۲ عضوی آن کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون ترتیب انتخاب مهم نیست، لذا از فرمول مقابل استفاده می‌کنیم: $\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{(۵-۲)!(۲!)}=\frac{۳!\times ۴\times ۵}{۳!\times ۱\times ۲}=\frac{۲۰}{۲۰}=۱۰$

مثال۲۳: مجموع جبری ضرائب بسط عبارت $۳+(x-۱)^۶(۲x^۳+x^۲-x-۱)^{۹۹}+(۲x^۲+x-۲)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$[۲\times(۱)^۲+۱-۲]^{۹۹}+[۲(۱)^۳+(۱)^۲-۱-۱]^۶+۳=۱+۱+۳=۵$$

مثال۲۴: ضریب $x^{-۱۷}$ در بسط عبارت $(x^۴-\frac{۱}{x^۳})^{۱۵}$ کدام است؟

۱) ۱۳۸۳ ۲) -۱۳۶۵ ۳) -۱۳۸۳ ۴) ۱۳۶۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا فرمول جمله $(k+۱)$ را می‌نویسیم:

$$T_{k+۱}=(-۱)^k\binom{۱۵}{k}(x^۴)^{۱۵-k}(\frac{۱}{x^۳})^k=(-۱)^k\binom{۱۵}{k}x^{(۶۰-۴k)}.x^{-۳k}=(-۱)^k\binom{۱۵}{k}x^{۶۰-۷k}\Rightarrow ۶۰-۷k=-۱۷\Rightarrow \boxed{k=۱۱}$$

$$\Rightarrow T_{۱۲}=(-۱)^{۱۱}\binom{۱۵}{۱۱}x^{-۱۷}=(-۱)\times\frac{۱۵!}{(۱۵-۱۱)!\times ۱۱!}x^{-۱۷}=-\frac{۱۵!}{۴!\times ۱۱!}x^{-۱۷}=(-\frac{۱۱!\times ۱۲\times ۱۳\times ۱۴\times ۱۵}{۴!\times ۱۱!})x^{-۱۷}=-۱۳۶۵x^{-۱۷}$$

مثال۲۵: در بسط دو جمله‌ای $(\sqrt{x}-\frac{۱}{x})^{۱۰}$ ضریب $x^۲$ چند است؟

۱) ۴۵ ۲) ۸! ۳) ۲! ۴) ۹۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$T_{k+۱}=(-۱)^k\binom{۱۰}{k}(\sqrt{x})^{۱۰-k}\left(\frac{۱}{x}\right)^k=\binom{۱۰}{k}(-۱)^k x^{۵-\frac{۳k}{۲}}$$

برای به دست آوردن جمله شامل $x^۲$ قرار می‌دهیم $۵-\frac{۳k}{۲}=۲$، که از آن $k=۲$ به دست می‌آید. در نتیجه:

$$T_۳=\binom{۱۰}{۲}(-۱)^۲x^۲=\frac{۱۰!}{۸!۲!}x^۲=۴۵x^۲$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۲۶: ضریب جملهٔ $x^{۴}$ در بسط دو جمله‌ای $(\sqrt{۲}x-\frac{۱}{۲\sqrt{x}})^{۱۰}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}C_{۱۰}^{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}C_{۱۰}^{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}C_{۱۰}^{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}C_{۱۰}^{۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا جمله عمومی بسط را بدست می‌آوریم:

$$T_{k+۱}=(-۱)^{k}\binom{۱۰}{k}(\sqrt{۲}x)^{۱۰-k}\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)^{k}=\binom{۱۰}{k}(-۱)^{k}۲^{\frac{۱۰-k}{۲}}\times ۲^{-k}\times x^{۱۰-k}\times x^{\frac{-k}{۲}}\Rightarrow\binom{۱۰}{k}(-۱)^{k}۲^{\frac{۱۰-۳k}{۲}}x^{۱۰-\frac{۳k}{۲}}$$

برای بدست آوردن جمله شامل $x^{۴}$ قرار می‌دهیم $۱۰-\frac{۳k}{۲}=۴$ که از آن نتیجه می‌شود $k=۴$.

$$\text{ضریب جمله } x^{۴}=\binom{۱۰}{۴}(-۱)^{۴}۲^{\frac{۱۰-۳\times ۴}{۲}}=\frac{۱}{۲}\binom{۱۰}{۴}=\frac{۱}{۲}\binom{۱۰}{۶}=\frac{۱}{۲}C_{۱۰}^{۶}$$

مثال۲۷: در بسط $(a\sqrt[۳]{\frac{۱}{a}}+\frac{۱}{\sqrt[۷]{a^{۲}}})^{۱۰}$ جمله مستقل از a جمله چندم است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۳ ۴) ۹

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$T_{k+۱}=\binom{۱۰}{k}(a^{\frac{۲}{۳}})^{۱۰-k}(a^{-\frac{۲}{۷}})^{k}=\binom{۱۰}{k}a^{\frac{۲}{۳}(۱۰-k)-\frac{۲}{۷}k}$$

باید توان a صفر شود تا جمله مستقل از a باشد لذا داریم: (جمله هشتم) $\frac{۲}{۳}(۱۰-k)-\frac{۲}{۷}k=۰\Rightarrow k=۷\Rightarrow k+۱=۸\Rightarrow$

مثال۲۸: تعداد جملات بسط $(x+y+z+t)^{۳}$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۶۴ ۴) ۱۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\text{تعداد جملات}=\binom{۳+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!۳!}=۲۰$$

مثال۲۹: اگر تعداد عناصر مجموعه‌های A، B، $A\cap B$ به ترتیب برابر ۵ و ۷ و ۳ باشند، تعداد عناصر $A\cup B$ کدام است؟

(حسابداری ـ سراسری ۷۵)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق فرض $n(A)=۵$، $n(B)=۷$ و $n(A\cap B)=۳$، بنابراین:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۷+۵-۳=۹$$

مثال۳۰: ضریب جمله $x^{۴}$ در بسط دو جمله‌ای $(۲x-\frac{۱}{۴})^{۸}$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۵)

۱) $\frac{۳۵}{۸}$ ۲) $\frac{۱۵}{۳۲}$ ۳) $\frac{۷}{۳۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۶}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» جملهٔ $(k+۱)$ام بسط $(a+b)^{n}$ از فرمول مقابل بدست می‌آید: $T_{k+۱}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}$

بنابراین جمله $(k+۱)$ام در بسط $(۲x-\frac{۱}{۴})^{۸}$ بصورت زیر می‌باشد:

$$T_{k+۱}=\binom{۸}{k}(۲x)^{۸-k}\left(\frac{-۱}{۴}\right)^{k}=\binom{۸}{k}۲^{۸-k}(-۴)^{-k}x^{۸-k}$$

برای بدست آوردن جمله $x^{۴}$، لازم است $x^{۸-k}=x^{۴}$، بنابراین $k=۴$. در اینصورت با جایگزینی $k=۴$، در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$T_{۵}=\binom{۸}{۴}۲^{۸-۴}(-۴)^{-۴}x^{۴}=\frac{۸!}{۴!۴!}\times ۲^{۴}\times\frac{۱}{۴^{۴}}x^{۴}=\frac{۸\times ۷\times ۶\times ۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱}{۴\times ۳\times ۲\times ۱\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱}\times\frac{۱}{۲^{۴}}x^{۴}=\frac{۸\times ۷\times ۶\times ۵}{۴\times ۳\times ۲\times ۱}\times\frac{۱}{۱۶}x^{۴}=\frac{۳۵}{۸}x^{۴}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۳۱: اگر به مجموعه A سه عضو اضافه شود ، تعداد زیرمجموعه‌های آن چند برابر می‌شود؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۶)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» بطور کلی اگر به مجموعه‌ای k عضو اضافه شود، تعداد زیر مجموعه‌های آن ۲^k برابر می‌شود. بنابراین تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه جدید $۲^۳$ برابر می‌شود.

مثال۳۲: ضریب جملهٔ $x^۲$ در بسط دو جمله‌ای $(x-\frac{۱}{۲\sqrt{x}})^۸$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۶)

۱) $-\frac{۳۵}{۸}$ ۲) $-\frac{۳۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{۳۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳۵}{۸}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$T_{k+۱}=\binom{۸}{k}x^{۸-k}\left(\frac{-۱}{۲\sqrt{x}}\right)^k=\binom{۸}{k}\left(\frac{-۱}{۲}\right)^k x^{۸-k}.x^{\frac{-k}{۲}}=\binom{۸}{k}\left(\frac{-۱}{۲}\right)^k x^{۸-\frac{۳k}{۲}}$$

برای بدست آوردن جمله شامل $x^۲$ قرار می‌دهیم $x^{۸-\frac{۳k}{۲}}=x^۲$، که از آن نتیجه می‌شود: $۸-\frac{۳k}{۲}=۲ \Rightarrow \frac{۳k}{۲}=۶ \Rightarrow k=۴$

$$T_۵=\binom{۸}{۴}\left(\frac{-۱}{۲}\right)^۴ x^۲=\frac{۸!}{۴!۴!}\times\frac{۱}{۱۶}x^۲=\frac{۳۵}{۸}x^۲$$

مثال۳۳: مجموعه $(A\cap B)\cap(A-B)'$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۶)

۱) A ۲) B ۳) $A\cap B$ ۴) $A\cup B$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

روش اول:

$$(A\cap B)\cap(A-B)'=(A\cap B)\cap(A\cap B')'=(A\cap B)\cap(A'\cup B)=A\cap[B\cap(A'\cup B)]\overset{\text{قانون جذب}}{=\!=\!=}A\cap B$$

روش دوم:

$$(A\cap B)\cap(A-B)'\overset{\text{تعریف تفاضل دو مجموعه}}{=\!=\!=}(A\cap B)-(A-B)=A\cap B$$

مثال۳۴: ضریب $x^۲$ در بسط دو جمله‌ای $(x+\frac{۱}{\sqrt{x}})^۸$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۶)

۱) ۶۴ ۲) ۷۰ ۳) ۷۲ ۴) ۸۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$T_{k+۱}=\binom{۸}{k}x^{۸-k}\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)^k=\binom{۸}{k}x^{۸-k}x^{\frac{-k}{۲}}=\binom{۸}{k}x^{۸-\frac{۳k}{۲}}$$

برای بدست آوردن جمله $x^۲$ لازم است $x^{۸-\frac{۳k}{۲}}=x^۲$ باشد، که از آن نتیجه می‌شود $k=۴$. بنابراین: $T_۵=\binom{۸}{۴}x^۲=\frac{۸!}{۴!۴!}=۷۰x^۲$

مثال۳۵: حاصل عبارت $(A'\cup B)\cap(A\cup B)$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۶)

۱) A ۲) B ۳) $A\cup B$ ۴) $A'\cup B$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$(A\cup B)\cap(A'\cup B)=B\cup(A\cap A')=B\cup\phi=B$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۳۶: اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند $(A-B)'$ با کدام مجموعه برابر است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۷)

۱) $A\cup B'$ ۲) $A'\cup B$ ۳) $A'\cup B'$ ۴) $A'\cap B'$

پاسخ: گزینه «۲»

$$(A-B)'=(A\cap B')'=A'\cup B$$

مثال ۳۷: اجتماع دو مجموعه A و B، ۲۰ عضو دارد. به مجموعه A، ۸ عضو جدید اضافه کردیم به اشتراک آنها ۶ عضو اضافه شد. اجتماع مجموعه B و مجموعه جدید A چند عضو دارد؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۷)

۱) ۲۲ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۸

پاسخ: گزینه «۱» مجموعه جدید را با A' نشان می‌دهیم، در این صورت روابط زیر برقرار است:

$$n(A\cup B)=20,\quad n(A'\cap B)=n(A\cap B)+6 \quad و \quad n(A')=n(A)+8$$

بنابراین:

$$n(A'\cup B)=n(A')+n(B)-n(A'\cap B)=(n(A)+8)+n(B)-(n(A\cap B)+6)$$
$$=\underbrace{(n(A)+n(B)-n(A\cap B))}_{n(A\cup B)=20}+2=22$$

مثال ۳۸: در بسط دو جمله‌ای $(x-\sqrt{x})^{16}$، ضریب جمله x^9 کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۷)

۱) -189 ۲) -120 ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۸۹

پاسخ: گزینه «۳»

$$T_{k+1}=\binom{16}{k}x^{16-k}(-\sqrt{x})^k=(-1)^k\binom{16}{k}x^{16-k}.x^{\frac{k}{2}}=(-1)^k\binom{16}{k}x^{16-\frac{k}{2}}$$

برای بدست آوردن جمله شامل x^9 قرار می‌دهیم $16-\frac{k}{2}=9$، که از آن نتیجه می‌شود $k=14$. بنابراین:

$$T_{15}=(-1)^{14}\binom{16}{14}x^9=\frac{16!}{14!2!}x^9=120x^9$$

مثال ۳۹: اگر A و B دو مجموعه باشند، $A'\cap[A\cup(B\cap A)]$ برابر کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۸)

۱) A ۲) B ۳) A' ۴) ϕ

پاسخ: گزینه «۴»

$$A'\cap\underbrace{[A\cup(B\cap A)]}_{\text{قانون جذب}}=A'\cap A=\phi$$

مثال ۴۰: در بسط $(x-\frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$، ضریب جمله شامل x^4 کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۸)

۱) ۱۸۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۴۰

پاسخ: گزینه «۳»

$$T_{k+1}=\binom{10}{k}x^{10-k}\left(\frac{-1}{\sqrt{x}}\right)^k=(-1)^k\binom{10}{k}x^{10-k}x^{-\frac{k}{2}}=(-1)^k\binom{10}{k}x^{10-\frac{3k}{2}}$$

برای بدست آوردن جمله شامل x^4 قرار می‌دهیم $10-\frac{3k}{2}=4$، که از آن بدست می‌آید $k=4$، بنابراین:

$$T_5=(-1)^4\binom{10}{4}x^4=\frac{10!}{6!4!}x^4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2}x^4=210x^4$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۴۱: اگر A و B دو مجموعه ناتهی باشد، مجموعه $A-(A\cap B)$ ، کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۸)

۱) $A\cap B$ ۲) $A\cap B'$ ۳) $B\cap A'$ ۴) $(A\cup B)'$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$A-(A\cap B)=A\cap(A'\cup B') \overset{\text{قانون شبه جذب}}{=\!=\!=} A\cap B'$$

مثال۴۲: در بسط $(x-\frac{۱}{۲x})^{۸}$ مجموع ضرایب کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{۱}{۲۵۶}$ ۲) $\frac{۱}{۶۴}$ ۳) ۲۴ ۴) ۳۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» یادآوری: برای بدست آوردن مجموع ضرایب بسط، کافی است به جای متغیرها عدد ۱ را جایگزین کنیم.

$$x=۱ \Rightarrow \text{مجموع ضرایب} = (۱-\frac{۱}{۲})^{۸}=\frac{۱}{۲۵۶}$$

مثال۴۳: اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشد، مجموعه $(A\cup B)-A$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۸)

۱) A ۲) B ۳) $B-A$ ۴) $A-B$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$(A\cup B)-A=(A\cup B)\cap A' \overset{\text{قانون شبه جذب}}{=\!=\!=} B\cap A'=B-A$$

مثال۴۴: اگر A و B و C سه مجموعه و $A\subset B$ باشد ، حاصل $[(B'\cap A)\cap C]\cup C'$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۹)

۱) B' ۲) A ۳) C' ۴) B

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون $A\subset B$، بنابراین $A-B=\phi$ و یا $A\cap B'=\phi$، لذا:

$$[(B'\cap A)\cap C]\cup C'=[\phi\cap C]\cup C'=\phi\cup C'=C'$$

مثال۴۵: ضریب $x^{۳}$ در بسط دو جمله‌ای $(۲x^{۲}-\frac{۱}{۳\sqrt{x^{۳}}})^{۱۲}$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۹)

۱) $C_{۱۲}^{۶}(\frac{۲}{۳})^{۶}$ ۲) $C_{۱۲}^{۳}(\frac{۲}{۳})^{۳}$ ۳) $C_{۱۲}^{۳}\frac{۲^{۳}}{۳^{۹}}$ ۴) $C_{۱۲}^{۹}\frac{۲^{۹}}{۳^{۳}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$T_{k+۱}=\binom{۱۲}{k}(۲x^{۲})^{۱۲-k}\left(\frac{-۱}{۳\sqrt{x^{۳}}}\right)^{k}=\binom{۱۲}{k}۲^{۱۲-k}\left(\frac{-۱}{۳}\right)^{k}x^{۲۴-۲k}x^{\frac{-۳k}{۲}}=\binom{۱۲}{k}۲^{۱۲-k}\left(\frac{-۱}{۳}\right)^{k}x^{۲۴-\frac{۷k}{۲}}$$

برای بدست آوردن جمله شامل $x^{۳}$، قرار می‌دهیم $۲۴-\frac{۷k}{۲}=۳$، که نتیجه می‌شود $k=۶$، بنابراین:

$$T_{۷}=\binom{۱۲}{۶}۲^{۶}\times\left(\frac{-۱}{۳}\right)^{۶}x^{۳}=\binom{۱۲}{۶}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۶}x^{۳}=C_{۱۲}^{۶}\times\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۶}x^{۳}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۴۶: اگر A و B و C سه مجموعه باشند، به طوری که $A \subset B \subset C$ آنگاه $[(A \cap B) \cup C] \cap (A \cup B)]$ کدام است؟

(مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۹)

۱) $A \cap B$ ۲) $A \cup B$ ۳) B ۴) C

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از رابطه $A \subset B \subset C$ نتیجه می‌شود $A \cap B = A$ و $A \cup B = B$. بنابراین:

$$[(A \cap B) \cup C] \cap (A \cup B) = \underbrace{(A \cup C)}_{A \subset C} \cap B = \underbrace{C \cap B}_{B \subset C} = B$$

مثال۴۷: مجموعه‌های A، B و C مفروضند، به طوری که $A \subset B \subset C$ است، حاصل مجموعه $C' \cap (A' \cap B')$ کدام است؟

(حسابداری ـ سراسری ۸۰)

۱) A' ۲) B' ۳) C' ۴) ϕ

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

روش اول: از رابطه $A \subset B \subset C$ نتیجه می‌شود $C' \subset B' \subset A'$، بنابراین:

$$C' \cap \underbrace{(A' \cap B')}_{\text{چون } B' \subset A'} = C' \cap B' = C'$$

روش دوم:

$$C' \cap (A' \cap B') = C' \cap (A \cup B)' = C' \cap B' = (C \cup B)' = C'$$

مثال۴۸: جمله‌ی مستقل از x در بسط $(x^۲ + \frac{۱}{x^۴})^۶$ برابر است با: (حسابداری ـ آزاد ۸۰)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$T_{k+۱} = \binom{۶}{k} (x^۲)^{۶-k} \left(\frac{۱}{x^۴}\right)^k = \binom{۶}{k} x^{۱۲-۲k}.x^{-۴k} = \binom{۶}{k} x^{۱۲-۶k}$$

برای بدست آوردن جمله مستقل از x قرار می‌دهیم $۱۲ - ۶k = ۰$، که از آن نتیجه می‌شود $k = ۲$، بنابراین: $T_۳ = \binom{۶}{۲} = \frac{۶!}{۲!۴!} = ۱۵$

مثال۴۹: اگر A و B دو مجموعه باشند، حاصل عبارت $A - [(A \cap B) \cup A]$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۰)

۱) A ۲) B ۳) $A - B$ ۴) ϕ

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$A - \underbrace{[(A \cap B) \cup A]}_{\text{قانون جذب}} = A - A = \phi$$

مثال۵۰: در بسط $(x + \frac{۱}{x})^۸$ ضریب جمله مستقل از x کدام است؟ $(x \neq ۰)$ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۰)

۱) ۳۵ ۲) ۴۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$T_{k+۱} = \binom{۸}{k} x^{۸-k} \left(\frac{۱}{x}\right)^k = \binom{۸}{k} x^{۸-۲k}$$

برای بدست آوردن جمله مستقل از x قرار می‌دهیم. $۸ - ۲k = ۰$، که در این صورت $k = ۴$. درنتیجه: $T_۵ = \binom{۸}{۴} = \frac{۸!}{۴!۴!} = ۷۰$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۵۱: در مجموعه‌ی جهانی $U=\{x|x\in N, x\le ۱۵\}$، اگر A مجموعهٔ اعداد فرد و B مجموعه‌ی اعداد بخش‌پذیر بر ۳ باشد، مجموعه $(A\cap B)$ چند زیرمجموعه دارد؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه «۴»

$$A=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵\}\ ,\ B=\{۳,۶,۹,۱۲,۱۵\}\Rightarrow A\cap B=\{۳,۹,۱۵\}$$

بنابراین مجموعه $A\cap B$، ۳ عضو دارد پس دارای $۸=۲^{۳}$ زیر مجموعه است.

مثال۵۲: مجموعهٔ $A'\cap\big[(A-B)\cup(A\cap B)\big]$، برابر کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۱)

۱) A ۲) B ۳) ϕ ۴) $A\cup B$

پاسخ: گزینه «۳»

$$[(A\cap B)\cup(A-B)]\cap A'=[(A\cap B)\cup(A\cap B')]\cap A'=[A\cap(B\cup B')]\cap A'=(A\cap M)\cap A'=A\cap A'=\phi$$

مثال۵۳: اگر A و B دو مجموعه در U بوده و $B\subset A$ باشد، مکمل مجموعهٔ $A'-B$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۱)

۱) $A'\cap B'$ ۲) A ۳) $A\cap B$ ۴) B

پاسخ: گزینه «۲»

$$(A'-B)'=(A'\cap B')'=A\cup B=A$$

مثال۵۴: در $\left(۲x+\frac{۱}{x}\right)^{۸}$ ضریب $x^{-۲}$ در بسط آن کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۱)

۱) ۵۶ ۲) ۳۲ ۳) ۳۳۶ ۴) ۴۴۸

پاسخ: گزینه «۴»

$$T_{k+۱}=\binom{۸}{k}(۲x)^{۸-k}\left(\frac{۱}{x}\right)^{k}=\binom{۸}{k}۲^{۸-k}x^{۸-۲k}$$

برای بدست آوردن ضریب $x^{-۲}$ قرار می‌دهیم $x^{۸-۲k}=x^{-۲}$، که از آن $k=۵$ بدست می‌آید، بنابراین:

$$T_{۶}=\binom{۸}{۵}۲^{۳}x^{-۲}=\frac{۸!}{۵!۳!}\times۸\times x^{-۲}=۴۴۸x^{-۲}$$

مثال۵۵: کدام یک از روابط زیر نادرست است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۲)

۱) $A\cup(A-B)=A$ ۲) $(A-B)=A\cap B'$

۳) $(A\cup B)'\cup A=A\cup B'$ ۴) $B\cap(B-A)=A\cup B$

پاسخ: گزینه «۴»

$$B\cap(B-A)=B\cap(B\cap A')=B\cap A'$$

مثال۵۶: در بسط $(\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{۱}{x})^{۹}$، ضریب جمله‌ای که فاقد x است، کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{-۷}{۲}$ ۳) $\frac{۲۱}{۲}$ ۴) $\frac{-۲۱}{۲}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$T_{k+۱}=\binom{۹}{k}\left(\frac{x^{۲}}{۲}\right)^{۹-k}\left(\frac{-۱}{x}\right)^{k}=\binom{۹}{k}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۹-k}(-۱)^{k}x^{۱۸-۳k}$$

برای بدست آوردن جمله فاقد x قرار می‌دهیم. $۱۸-۳k=۰$، که از آنجا $k=۶$ بدست می‌آید. بنابراین:

$$T_{۷}=\binom{۹}{۶}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}(-۱)^{۶}=\frac{۹!}{۶!۳!}\times\frac{۱}{۸}=\frac{۲۱}{۲}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۵۷: اگر $A=\{a,b\}$ ، آنگاه A^5 دارای چند عضو است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۲)

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۸ ۴) ۶۴

پاسخ: گزینه «۲» بطور کلی اگر مجموعه A دارای n عضو باشد، آنگاه مجموعه A^m دارای n^m عضو خواهد بود. بنابراین مجموعه A^5، دارای 2^5 عضو است.

مثال ۵۸: اگر $A\cap B=\{3\}$ و $A\cup B=\{1,2,3\}$ و B تک عضوی باشد، آنگاه $A^2 * B$ چند عضو دارد؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۲)

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه «۳» باتوجه به اطلاعات داده شده در مسأله نتیجه می‌گیریم $n(B)=1$، $n(A\cap B)=1$، $n(A\cup B)=3$. با جایگزینی این مقادیر در رابطهٔ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ نتیجه می‌شود:

$$3=n(A)+1-1 \Rightarrow n(A)=3$$

$$n(A^2*B)=n(A^2)n(B)=n(A)n(A)n(B)=3\times 3\times 1=9$$

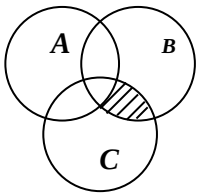
مثال ۵۹: حاصل $[A\cup(B\cap C)]\cap[A\cup B'\cup C']$ در مجموعه‌ها برابر است با: (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۲)

۱) $A\cup B$ ۲) ϕ ۳) A' ۴) A

پاسخ: گزینه «۴»

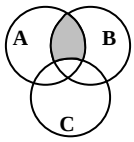
$$[A\cup(B'\cup C')]\cap[A\cup(B\cap C)]=A\cup[(B'\cup C')\cap(B\cap C)]=A\cup[(B\cap C)'\cap(B\cap C)]=A\cup\phi=A$$

مثال ۶۰: در شکل زیر برای منطقه هاشور زده کدام پاسخ نادرست است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۲)



۱) $(A\cap B)-C$
۲) $(B\cap C)-A$
۳) $(B-A)\cap C$
۴) $(C-A)\cap B$

پاسخ: گزینه «۱» مجموعهٔ $(A\cap B)-C$ در شکل روبرو به صورت هاشور زده مشخص شده است.



مثال ۶۱: مجموع ضرایب در بسط $(a+b+c)^5$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۵۰ ۳) ۲۲۵ ۴) ۲۴۳

پاسخ: گزینه «۴» برای بدست آوردن مجموع ضرایب بسط به جای تمام متغیرها مقدار ۱ را قرار می‌دهیم، بنابراین:

$$\text{مجموع ضرایب بسط} = (1+1+1)^5 = 3^5 = 243$$

مثال ۶۲: تعداد جملات بسط $(a+b+c)^5$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۳)

۱) ۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

پاسخ: گزینه «۴» بطور کلی تعداد جملات بسط $(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n$ برابر $\binom{n+k-1}{k-1}$ می‌باشد، بنابراین تعداد جملات بسط $(a+b+c)^5$ برابر است با:

$$\text{تعداد جملات} = \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = 21$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۶۳: عبارت $(a+b+c)^{۴}$، چند جمله دارد؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه «۲»

$$\text{تعداد جملات} = \binom{۴+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۶}{۲} = \frac{۶!}{۲!۴!} = ۱۵$$

مثال ۶۴: اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند و $A-B=A$ ، در این صورت $A' \cap B$ کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۴)

۱) $A \cap B$ ۲) $A \cup B$ ۳) A ۴) B

پاسخ: گزینه «۴» از رابطه $A-B=A$ نتیجه می‌شود A و B دو مجموعه جدا از هم می‌باشند. $A' \cap B = B \cap A' = B - A = B$

$$= A \cap (A' \cup B) \underset{\text{قانون شبه جذب}}{=\!=\!=} A \cap B$$

مثال ۶۵: اگر u مجموعه مرجع و A و B دو مجموعه در u باشند به طوری که $A \subset B$ باشد در این صورت برای $A'-B'$ کدام گزینه را مناسب می‌دانید. (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۴)

۱) $A-B$ ۲) $B-A$ ۳) A ۴) B

پاسخ: گزینه «۲»

$$A'-B' = A' \cap B = B \cap A' = B - A$$

مثال ۶۶: با استفاده از حروف کلمه بازرگان بدون توجه به معنا چند کلمه سه حرفی می‌توان ساخت؟ (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۴۰ ۴) ۱۳۵

پاسخ: گزینه «۴» برای محاسبه تعداد حالات ممکن سه حالت مختلف در نظر می‌گیریم.

الف) کلمه سه حرفی بدون حرف «الف»

$$\text{تعداد حالات} = \boxed{۵} \times \boxed{۴} \times \boxed{۳} = ۶۰$$

ب) کلمه سه حرفی شامل یک حرف «الف»: حرف «الف» می‌تواند در سه محل مختلف قرار گیرد، و دو حرف دیگر را می‌توان از پنج حرف «ب، ز، ر، گ، ن» انتخاب کرد. پس تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$\text{تعداد حالات} = ۳ \times ۵ \times ۴ = ۶۰$$

ج) کلمه سه حرفی شامل دو حرف «الف»: دو حرف «الف» به سه حالت مختلف می‌توانند در کلمه سه حرفی ظاهر شوند و حرف سوم کلمه را می‌توان از بین پنج حرف «ب، ز، ر، گ، ن» انتخاب کرد.

$$\text{تعداد حالات} = ۳ \times ۵ = ۱۵$$

پس تعداد کل حالات ممکن برای ساختن کلمه سه حرفی برابر است با:

$$\text{تعداد کلمات} = ۶۰ + ۶۰ + ۱۵ = ۱۳۵$$

مثال ۶۷: اگر مجموعه جهانی $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ باشد و دو مجموعه $A=\{۲,۴,۶\}$ و $B=\{۱,۳,۷\}$ مفروض باشند $(A \cap B) \cup A'$ چند عضو دارد؟ (حسابداری ـ آزاد ۸۵)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۷

پاسخ: گزینه «۱» توجه کنید که $A \cap B = \phi$ و $A' = \{۱,۳,۵,۷\}$ می‌باشد.

مثال ۶۸: در بسط $(\sqrt{x}+\frac{۱}{x})^{۱۰}$ ضریب جمله سوم بسط کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۵)

۱) ۱۲۰ ۲) ۴۵ ۳) ۹۰ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینه «۲»

$$T_۳ = \binom{۱۰}{۲} (\sqrt{x})^{۸} (\frac{۱}{x})^{۲} = ۴۵x^{۲}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۶۹: کدامیک از مجموعه‌های زیر، مجموعه کرانهای پائین مجموعه $A=(1,7]$ است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۵)

۱) $(-\infty,1]$ ۲) $(-\infty,1)$ ۳) $[7,+\infty)$ ۴) $(7,+\infty)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

مثال۷۰: اگر مجموعه جهانی $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ باشد و $A=\{2,4,6\}$ و $B=\{1,3,7\}$ باشند، تعداد زیر مجموعه‌های $(A\cap B)\cup A'$ چند است؟ (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۵)

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» واضح است که $A\cap B=\phi$، بنابراین: $(A\cap B)\cup A'=\phi\cup A'=A'=\{1,3,5,7\}$

با توجه به اینکه مجموعه $(A\cap B)\cup A'$، ۴ عضو دارد، پس تعداد زیر مجموعه‌های آن برابر 2^4 است.

مثال۷۱: اگر A و B دو مجموعه باشند $B-(A-B)$ کدام است؟ (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۵)

۱) B ۲) A ۳) $A-B$ ۴) $B-A$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» $B-(A-B)=B-(A\cap B')=B\cap(A\cap B')'=B\cap(A'\cup B)=B$

مثال۷۲: اگر $A\subset B$ باشد، کدام رابطه نادرست است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۶)

۱) $A'\cap B'=B'$ ۲) $A'\cup B'=A'$

۳) $(A\cup B)\cup(A\cap B)=A$ ۴) $(A\cup B)\cap(A\cap B)=A$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از $A\subset B$ نتیجه می‌شود: $A\cup B=B$ و $A\cap B=A$، بنابراین:

$$(A\cup B)\cup(A\cap B)=B\cup A=B$$

مثال۷۳: اگر $A\cap C=\phi$ و $B\cap C=C$ و $B\neq C$ باشد در این صورت $C\cap(A-B)$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۷)

۱) ϕ ۲) $A\cap B$ ۳) B ۴) C

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» $C\cap(A-B)=C\cap(A\cap B')\overset{\text{شرکت پذیری}}{=\!=}(\underbrace{C\cap A}_{\phi})\cap B'=\phi\cap B'=\phi$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مدرسان شریف

فصل سوم

«تابع»

مثال۱: کدامیک از روابط زیر می‌تواند بیانگر ضابطه یک تابع باشد؟

۱) $|y|+(x-۱)^۲=۱$ ۲) $\sin y = x$ ۳) $(y-۱)^۲+(x-۱)^۲=۰$ ۴) $\lfloor y \rfloor = x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به تذکر فوق ضابطه گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ تابع نمی‌باشد اما در رابطه گزینه «۳»درست است که توان y زوج است ولی تنها زوج مرتب $A(۱,۱)$ متعلق به رابطه بوده و ضابطه داده شده، تابع می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲: اگر $f(x)=\frac{x}{x+۱}$، آنگاه مطلوبست:

۱) $f(-۲)$ ۲) $f(a)$ ۳) $f(\frac{۱}{x})$ ۴) $f(-x)$ ۵) $f(x)+f(\frac{۱}{x})$

☑ **پاسخ :** کافی است در ضابطه تابع f مقادیر داده شده را قرار دهیم.

۱) $f(-۲)=\frac{-۲}{-۲+۱}=\frac{-۲}{-۱}=۲$

۲) $f(a)=\frac{a}{a+۱}$; (به جای x در تابع f، a قرار می‌دهیم)

۳) $f(\frac{۱}{x})=\frac{\frac{۱}{x}}{\frac{۱}{x}+۱}=\frac{\frac{۱}{x}}{\frac{۱+x}{x}}=\frac{۱}{۱+x}$; (به جای x در تابع f، $\frac{۱}{x}$ قرار می‌دهیم)

۴) $f(-x)=\frac{-x}{-x+۱}=\frac{x}{x-۱}$; (به جای x در تابع f، $-x$ قرار می‌دهیم)

۵) $f(x)+f(\frac{۱}{x})=\frac{x}{x+۱}+\frac{\frac{۱}{x}}{\frac{۱}{x}+۱}=\frac{x}{x+۱}+\frac{\frac{۱}{x}}{\frac{۱+x}{x}}=\frac{x}{x+۱}+\frac{۱}{x+۱}=\frac{x+۱}{x+۱}=۱$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳: اگر $f(\frac{۱}{۳x-۲})=\frac{x-۱}{x+۱}$ باشد، مقدار $f(x)$ کدامیک از عبارات زیر است:

۱) $f(x)=\frac{x}{x-۱}$ ۲) $f(x)=\frac{۱-x}{۱+۵x}$ ۳) $f(x)=\frac{x-۳}{x}$ ۴) $f(x)=x-۱$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$t=\frac{۱}{۳x-۲} \Rightarrow ۳xt-۲t=۱ \Rightarrow ۳xt=۱+۲t \Rightarrow x=\frac{۱+۲t}{۳t}$$

حال با جایگزینی x برحسب t در ضابطه داده شده نتیجه می‌شود:

$$f(t)=\frac{\frac{۱+۲t}{۳t}-۱}{\frac{۱+۲t}{۳t}+۱}=\frac{\frac{۱+۲t-۳t}{۳t}}{\frac{۱+۲t+۳t}{۳t}}=\frac{۱-t}{۱+۵t} \Rightarrow f(x)=\frac{۱-x}{۱+۵x}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۴: هرگاه $f(\text{Arcsin}(x-1))=\frac{x-1}{x}$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

۱) $\sin x-2$ ۲) $\frac{1+\sin x}{\sin x}$ ۳) $\frac{1-\sin x}{\sin x}$ ۴) $\frac{\sin x}{1+\sin x}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» **روش اول:**

$$t=\text{Arcsin}(x-1) \xrightarrow{\text{از طرفین رابطه sin می‌گیریم}} \sin t=x-1 \Rightarrow x=1+\sin t$$

با جایگزینی در ضابطه داده شده نتیجه می‌شود:

$$f(t)=\frac{(1+\sin t)-1}{1+\sin t} \Rightarrow f(t)=\frac{\sin t}{1+\sin t}$$

روش دوم: در رابطه داده شده به جای x، مقدار ۱ را قرار می‌دهیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$f(\text{Arcsin}(1-1))=\frac{1-1}{1} \Rightarrow f(\text{Arcsin}\,0)=0 \Rightarrow f(0)=0$$

بنابراین گزینه‌ای می‌تواند صحیح باشد که در آن $f(0)=0$ باشد، و تنها گزینه (۴) در این شرط صدق می‌کند.

مثال ۵: دامنه تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{x}{2-x}}$ ، کدام بازه است؟

۱) $(-\infty,0]$ ۲) $[1,2)$ ۳) $[0,2)$ ۴) $(2,\infty)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$\begin{cases} 2-x\neq 0 \Rightarrow x\neq 2 \\ \frac{x}{2-x}\geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0\leq x<2 \end{cases} \Rightarrow D_f=[0,2)$$

مثال ۶: دامنه تابع $f(x)=\sqrt{x^2-|x|}$ کدام فاصله است؟

۱) $R-(-1,1)$ ۲) $R-(0,1)$ ۳) $R-(-1,0)$ ۴) $(R-(-1,1))\cup\{0\}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد، یعنی: $x^2-|x|\geq 0$

برای حل نامساوی فوق دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x\geq 0 \Rightarrow x^2-x\geq 0 \Rightarrow x(x-1)\geq 0 \Rightarrow x\geq 1 \\ x<0 \Rightarrow x^2+x\geq 0 \Rightarrow x(x+1)\geq 0 \Rightarrow x\leq -1 \end{cases}$$

البته واضح است که $x=0$ نیز در دامنه تابع قرار دارد.

مثال ۷: تعداد ریشه‌های معادلهٔ $|x|=x-5$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای از بین بردن قدر مطلق دو حالت در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} x\geq 0 \Rightarrow x=x-5 \Rightarrow & \text{غیرممکن} \\ x<0 \Rightarrow -x=x-5 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2} & \text{(جواب به دست آمده قابل قبول نیست چون در شرط } x<0 \text{ صدق نمی‌کند.)} \end{cases}$$

بنابراین معادله در هیچکدام از حالات جواب ندارد.

مثال ۸: اگر $-1\leq x\leq 2$ آنگاه حاصل $|x-2|+|x-3|+|2x+5|$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) $2x+4$ ۳) $2x+10$ ۴) $4x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» در فاصله $-1\leq x\leq 2$، عبارت $2x+5$ مثبت، عبارت $x-3$ منفی و عبارت $x-2$ مثبت است، بنابراین:

$$|2x+5|+|x-3|+|2-x|=(2x+5)-(x-3)+(2-x)=10$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۹: عبارت صحیح کدام است؟

۱) $|x\pm y|\geq|x|+|y|$ ۲) $|x\pm y|\leq|x|+|y|$ ۳) $|x\pm y|=|x|+|y|$ ۴) $|x\pm y|>|x|+|y|$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» باتوجه به خاصیت ۸ قدر مطلق

مثال۱۰: اگر $|x|\leq a$ آنگاه :

۱) $-a<x<a$ ۲) $x\leq -a$ یا $x\geq a$ ۳) $-a\geq x\geq a$ ۴) $-a\leq x\leq a$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» باتوجه به خاصیت ۴ قدرمطلق.

مثال۱۱: حاصل $\left|\lfloor|\lfloor ۵x\rfloor|-\lfloor ۷x\rfloor\right|$ به ازای $x=-\frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» $\Rightarrow \left|\left|\lfloor -\frac{۷}{۲}\rfloor-\left|\lfloor -\frac{۵}{۲}\rfloor\right|\right|=\left|\lfloor -۳/۵\rfloor-\left|\lfloor -۲/۵\rfloor\right|\right|=|-۴-۳|=|-۷|=۷$

مثال۱۲: تابع $f(x)=\frac{x}{\lfloor x\rfloor-۱}$ در کدام فاصله تعریف نشده است؟

۱) $(۰,۱]$ ۲) $[۱,۲)$ ۳) $(۱,۲]$ ۴) $[۰,۱)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» توابع کسری در نقاطی که مخرج صفر شود تعریف نشده هستند، بنابراین:

$$\lfloor x\rfloor-۱=۰ \Rightarrow \lfloor x\rfloor=۱ \Rightarrow ۱\leq x<۲$$

مثال۱۳: دامنه تعریف تابع $\frac{x^۳}{۳\lfloor x\rfloor-۱}$ کدام است؟

۱) $[۰,+\infty[$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۳}\}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» $۳\lfloor x\rfloor-۱=۰\Rightarrow ۳\lfloor x\rfloor=۱\xrightarrow{\div ۳}\lfloor x\rfloor=\frac{۱}{۳}$

به ازای x هایی که جزء صحیح آنها برابر $\frac{۱}{۳}$ می‌شود، مخرج کسر صفر می‌شود ولی می‌دانیم جزء صحیح هر عددی برابر یک عدد صحیح می‌شود و امکان ندارد جزء صحیح عددی برابر عدد $\frac{۱}{۳}$ شود، یعنی دامنه تابع فوق تمام اعداد حقیقی هستند.

مثال۱۴: حاصل عبارت $\frac{۱}{Log_{۲}۲۱۶}+\frac{۱}{Log_{۳}۲۱۶}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) $\frac{۱}{۳}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» طبق خاصیت (۶) داریم:

$$\frac{۱}{Log_{۳}۲۱۶}+\frac{۱}{Log_{۲}۲۱۶}=Log_{۲۱۶}۳+Log_{۲۱۶}۲\overset{\text{خاصیت (۳)}}{=\!=}Log_{۲۱۶}۶=Log_{۶^۳}۶=\frac{۱}{۳}$$

مثال۱۵: حاصل $Logx+Log\frac{۱}{x}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $Log(x+\frac{۱}{x})$ ۴) $LogxLog\frac{۱}{x}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» طبق خاصیت (۲) و (۳) داریم: $Logx+Log\frac{۱}{x}=Log(x\times\frac{۱}{x})=Log۱=۰$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۱۶: اگر $f(x)=\frac{e^{۳x}+e^{-x}}{e^{x}-۱}$ و $g(x)=Lnx$، آنگاه $(fog)(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{x^{۳}}{x-۱}$ ۲) $\frac{x^{۴}+۱}{x^{۲}-x}$ ۳) $\frac{x^{۳}+۱}{x-۱}$ ۴) $\frac{x^{۲}}{x-۱}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(Lnx)=\frac{e^{۳Lnx}+e^{-Lnx}}{e^{Lnx}-۱}=\frac{e^{Lnx^{۳}}+e^{Lnx^{-۱}}}{e^{Lnx}-۱}$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت (۵)}}(fog)(x)=\frac{x^{۳}+\frac{۱}{x}}{x-۱}=\frac{\frac{x^{۴}+۱}{x}}{x-۱}=\frac{x^{۴}+۱}{x^{۲}-x}$$

مثال ۱۷: جواب معادلهٔ $\frac{e^{۲x}-۱}{e^{۲x}+۱}=\frac{۱}{۳}$ کدام است؟

۱) $Ln۲$ ۲) $\frac{۱}{۲}Ln۳$ ۳) $\frac{۱}{۲}Ln۲$ ۴) معادله جواب ندارد.

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا معادله را طرفین وسطین کرده و مجهولات را به یک طرف منتقل می‌کنیم.

$$۳e^{۲x}-۳=e^{۲x}+۱\Rightarrow ۲e^{۲x}=۴\Rightarrow e^{۲x}=۲\Rightarrow ۲x=Ln۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}Ln۲$$

مثال ۱۸: اگر $Ln۲=۰/۷$، آنگاه مقدار $Ln\frac{۴}{e}$ کدام است؟

۱) ۱/۴ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۴۹

پاسخ : گزینه «۳»

$$Ln\frac{۴}{e}=Ln۴-Lne=۲Ln۲-۱=۲\times ۰/۷-۱=۰/۴$$

مثال ۱۹: در صورتیکه $f(x)=Lnx^{۹}$ و $g(x)=\sqrt[۳]{x^{۲}}$ و $h(x)=e^{x}$، ضابطه $f(g(h(x)))$ کدام است؟

۱) $x^{۶}$ ۲) $۶x$ ۳) $۹x$ ۴) $۲x^{۹}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$f(g(h(x)))=f(g(e^{x}))=f(\sqrt[۳]{e^{۲x}})=Ln(\sqrt[۳]{e^{۲x}})^{۹}=Lne^{۶x}=۶x$$

مثال ۲۰: اگر $Ln۲=A$ باشد، مقدار $Ln\frac{۲}{e}$ کدام است؟

۱) $A-۱$ ۲) $A-۲$ ۳) $۱-A$ ۴) $۲-A$

پاسخ : گزینه «۱»

$$Ln\frac{۲}{e}=Ln۲-Lne=A-۱$$

مثال ۲۱: حاصل $\frac{x^{Lny}}{y^{Lnx}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $Log_{y}x$ ۳) $Log_{x}y$ ۴) $Log\frac{x}{y}$

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به خاصیت (۸) لگاریتم می‌توانیم جای x و y را با هم عوض کنیم، پس صورت و مخرج کسر موردنظر با هم برابرند.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۲۲: حوزه تعریف تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{\log\frac{5x-x^2}{4}}$ کدام است؟

۱) $x\geq 4$ ۲) $x\leq 1$ و $x\geq 4$ ۳) $x\leq -1$ ۴) $1\leq x\leq 4$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

روش اول : خود لگاریتم چون زیر رادیکال می‌باشد، باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد، پس داریم :

$$\begin{cases}\frac{5x-x^2}{4}>0\\ \log\frac{5x-x^2}{4}\geq 0\end{cases}\rightarrow \log\frac{5x-x^2}{4}\geq\log 1\Rightarrow\frac{5x-x^2}{4}\geq 1\rightarrow x^2-5x+4\leq 0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}1\leq x\leq 4$$

روش دوم : اگر $x=5$ را در نظر بگیریم آنگاه : $f(5)=\sqrt{\log 0}$ می‌شود و می‌دانیم که $\log 0$ وجود ندارد و به ازای $x=-1$ نیز $f(-1)=\sqrt{\log(-1)}$ و مانند حالت قبل $\log(-1)$ نیز وجود ندارد.

توجه شود که حالت (۱) گزینه ۱ و ۲ و حالت (۲) گزینه ۳ را از مجموعه جوابها خارج می‌کند، این روش با کمی تمرین و دقت روش مناسبی در تعیین دامنه توابع می‌باشد.

تذکر: توجه شود که در اکثر تستهای مربوط به تعیین دامنه توابع می‌توان از روش سریع عددگذاری در ضابطه تابع استفاده کرد.

مثال۲۳: دامنه تابع با ضابطه $y=\log_x(x-2)$ کدام است؟

۱) $D_y=\{x\,|\,x\in R\,,\,x>2\}$ ۲) $D_y=R-\{2\}$

۳) $D_y=R-\{-2\}$ ۴) $D_y=(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» مشخص است که اعداد منفی جزء جواب نیستند، لذا گزینه ۱ صحیح است.

مثال۲۴: دامنه تابع به ضابطه $y=\text{Ln}(-x^2+2x+3)$ کدام است؟

۱) $(-1,2)$ ۲) $[-1,3]$ ۳) $(-1,3)$ ۴) $(2,3)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» می‌دانیم عبارت مقابل Ln باید بزرگتر از صفر باشد، بنابراین: $-x^2+2x+3>0$

برای تعیین علامت عبارت $-x^2+2x+3$، ابتدا ریشه‌های آن را بدست می‌آوریم که برابر ۱- و ۳ می‌باشند. بنابراین جدول تعیین علامت بصورت زیر خواهد بود:

x		-1		3	
$-x^2+2x+3$	$-$	0	$+$	0	$-$

با توجه به جدول فوق $D_f=(-1,3)$.

مثال۲۵: دامنه تابع با $f(x)=\frac{\sqrt{1-\log(x^2+1)}}{3+\lfloor x\rfloor}$ کدام است؟

۱) $(-2,3)$ ۲) $[-2,3]$ ۳) $[-1,3]$ ۴) $[0,3]$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر و همچنین مخرج کسر باید مخالف صفر باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\lfloor x\rfloor+3=0\Rightarrow\lfloor x\rfloor=-3\Rightarrow -3\leq x<-2 & (1)\\ 1-\log(x^2+1)\geq 0\Rightarrow\log(x^2+1)\leq 1\Rightarrow\log_{10}(x^2+1)\leq\log_{10}10\Rightarrow x^2+1\leq 10\Rightarrow -3\leq x\leq 3 & (2)\end{cases}$$

با مقایسه (۱) و (۲) دامنه تابع f بازهٔ $[-2,3]$ خواهد بود.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۲۶: دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(9-x^2)}$ کدام است؟

۱) $[2\sqrt{2}\ ,\ 3\sqrt{2})$ ۲) $(-3,-2\sqrt{2}]$ ۳) $[-3,-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},3)$ ۴) $(-3,-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},3)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با توجه به حالت دوم بیان شده در بالا خواهیم داشت.

$$\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}} 9-x^2\geq 0\to 0<9-x^2\leq 1\to x^2\geq 8\to x\geq 2\sqrt{2}\ \text{یا}\ x\leq -2\sqrt{2} & (1)\\ 9-x^2>0\to\ x^2<9\to -3<x<3 & (2)\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک }(2),(1)} D_f=(-3,-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},3)$$

مثال ۲۷: دامنه تابع $f(x)=\log_3(\log_2(\log_3(\log_2 x)))$ کدام است؟

۱) $D_f=(8,+\infty)$ ۲) $D_f=[5,+\infty)$ ۳) $D_f=(9,+\infty)$ ۴) $D_f=[9,+\infty)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$\log_2(\log_3(\log_2 x))>0\xrightarrow{\log_2^1=0}\log_3(\log_2 x)>1\xrightarrow{\log_3^3=1}\log_2 x>3\Rightarrow x>2^3\Rightarrow x>8\Rightarrow D_f=(8,+\infty)$$

مثال ۲۸: دامنهٔ تابع $y=\frac{1}{\sqrt{\text{Ln}x}}$ کدام است؟

۱) R^+ ۲) $(1,+\infty)$ ۳) $[e,+\infty)$ ۴) $R^+-\{1\}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» عبارت زیر رادیکال که در مخرج کسر واقع است باید مثبت باشد.

$$\text{Ln}x>0\Rightarrow x>e^0=1\Rightarrow\ \text{دامنه}=(1,+\infty)$$

مثال ۲۹: قلمرو تابع مقابل، کدام یک از چهار فاصله داده شده زیر است؟ $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\frac{\text{Ln}x}{\sqrt{x+1}}$

۱) $]-1,1[$ ۲) $[-1,0[$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $]0,1]$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\Rightarrow x^2\leq 1\Rightarrow -1\leq x\leq 1\\ x+1>0\Rightarrow x>-1\\ x>0\quad (\text{عبارت مقابل Ln})\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}\text{دامنه}=(0,1]$$

نکته: اگر دامنه تابع $y=f(x)$، فاصله $[a\ ,\ b]$ باشد برای تعیین دامنه تابع $y=f(u)$ باید u رادر فاصله a و b در نظر گرفته و حدود تغییرات x را پیدا کنیم. (u تابعی برحسب x است).

مثال ۳۰: در فاصله $[-1,2]$ کدامیک از توابع زیر زوج‌اند؟

۱) $y=\cos x$ ۲) $y=x^3-1$ ۳) $y=x^2+1$ ۴) هیچکدام

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» شرط لازم برای زوج یا فرد بودن یک تابع، آن است که دامنه تابع متقارن باشد و چون فاصله داده شده متقارن نمی‌باشد، لذا هیچکدام از توابع داده شده نمی‌توانند زوج یا فرد باشند. لازم به ذکر است که اگر فاصله داده شده متقارن باشد، آنگاه گزینه (۱) و (۳) زوج و گزینه (۲)، نه فرد و نه زوج خواهد بود.

مثال ۳۱: تابع f به معادله $y=x^2+\cos x$ مفروض است، این تابع دارای کدام یک از خواص زیر است؟

۱) فرد ۲) زوج ۳) نه زوج و نه فرد ۴) متناوب

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» قرار می‌دهیم $f(x)=x^2+\cos x$، در اینصورت:

$$f(-x)=(-x)^2+\cos(-x)=x^2+\cos x=f(x)\Rightarrow f\ \text{زوج است}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۳۲: تابع $y = x^3 + x\sin x$ کدام وضعیت را دارد؟

۱) نه زوج و نه فرد ۲) هم زوج ، هم فرد ۳) فرد ۴) زوج

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» قرار میدهیم $f(x) = x^3 + x\sin x$ ، در اینصورت: $f(-x) = (-x)^3 + (-x)\sin(-x) = -x^3 + x\sin x$

مثال ۳۳: کدام یک از توابع زیر زوج است؟

۱) $y = \sin x$ ۲) $y = \sin x + \cos x$ ۳) $y = |x|(x^2+1)$ ۴) $y = x^3 + x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

(۱) گزینه : $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x) \Rightarrow$ فرد

(۲) گزینه : $f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x \Rightarrow$ نه زوج نه فرد

(۳) گزینه : $f(-x) = |-x|((-x)^2+1) = |x|(x^2+1) = f(x) \Rightarrow$ زوج

(۴) گزینه : $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -f(x) \Rightarrow$ فرد

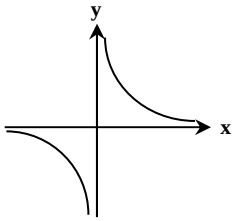
مثال ۳۴: نمودار یک تابع فرد ، دارای کدام خاصیت است؟

۱) محور y ها محور تقارن آن است. ۲) محور x ها محور تقارن آن است.

۳) مبدأ مرکز تقارن آن است. ۴) فاقد مرکز تقارن است.

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» یادآوری: محور yها، محور تقارن توابع زوج است و مبدأ مختصات مرکز تقارن توابع فرد می‌باشد.

مثال ۳۵: در مورد رابطهٔ f با شکل مقابل کدام مورد صحیح است؟



۱) نه زوج و نه فرد

۲) فرد

۳) زوج

۴) تابع نیست

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به شکل، مبدأ مرکز تقارن نمودار می‌باشد، پس تابع فرد است.

مثال ۳۶: کدامیک از توابع زیر زوج است؟

۱) $y = x\sin x$ ۲) $y = x\cos x$ ۳) $y = x^3$ ۴) $y = \log(3x + \sqrt{9x^2+1})$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» باتوجه به نکته ۱۰، گزینه ۴ تابعی فرد است.

(۱) گزینه : $f(x) = x\sin x \Rightarrow f(-x) = (-x)\sin(-x) = x\sin x = f(x) \Rightarrow f$ زوج

(۲) گزینه : $f(x) = x\cos x \Rightarrow f(-x) = (-x)\cos(-x) = -x\cos x = -f(x) \Rightarrow f$ فرد

(۳) گزینه : $f(x) = x^3 \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 = -f(x) \Rightarrow f$ فرد

مثال ۳۷: کدامیک از توابع زیر بر بازه $(0,1)$ یک به یک است؟

۱) $f(x) = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ ۲) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ۳) $f(x) = \sin 4x$ ۴) $f(x) = |2x-1|$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

چون به ازای هر $x \in (0,1)$ ، $f'(x) < 0$ بنابراین f اکیداً نزولی است و در نتیجه یک به یک است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

حال نشان می‌دهیم چرا سایر گزینه‌ها یک به یک نیستند.

$$f(x)=\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=\begin{cases}0 & x\in(0,\frac{1}{2})\\ 1 & x\in[\frac{1}{2},1)\end{cases}\Rightarrow f \text{ یک به یک نیست.}$$

$$f(x)=\sin 4x \Rightarrow f(\frac{\pi}{16})=f(\frac{3\pi}{16})=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow f \text{ یک به یک نیست.}$$

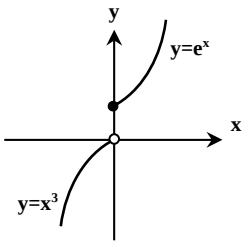
$$f(x)=|2x-1| \Rightarrow f(\frac{1}{4})=f(\frac{3}{4})=\frac{1}{2}\Rightarrow f \text{ یک به یک نیست.}$$

نکته: اغلب اگر در ضابطه تابع، x داخل قدرمطلق یا جزء صحیح یا نسبت مثلثاتی باشد و یا x دارای توان زوج باشد، آن تابع یک به یک نیست.

مثال۳۸: تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\begin{cases}e^x & ; x\geq 0\\ x^3 & ; x<0\end{cases}$، چگونه است؟

۱) یک به یک ـ نزولی ـ پوشا　　۲) یک به یک ـ صعودی ـ غیرپوشا

۳) غیر یک به یک ـ صعودی ـ پوشا　　۴) غیر یک به یک ـ نزولی ـ غیر پوشا



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با رسم نمودار تابع $y=e^x$ در فاصله $x\geq 0$ و همچنین نمودار تابع $y=x^3$ در فاصله $x<0$ شکل مقابل را داریم ملاحظه می‌کنیم، تابع یک به یک است چون اگر خطی موازی محور xها رسم کنیم، نمودار را **حداکثر** در یک نقطه قطع می‌کند. از طرفی در هر دو نمودار با افزایش x ملاحظه می‌شود که مقدار y هم زیاد می‌شود. پس تابع صعودی است. اگر خطی موازی محور xها در فاصله $0\leq y<1$ رسم کنیم، آنگاه این خط نمودار تابع را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند، لذا این تابع پوشا نیست. (برد تابع f، $\mathbb{R}$ داده شده است اما این تابع تمام $\mathbb{R}$ را غیر از فاصله $0\leq y<1$ می‌پوشاند.)

نکته: تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ یک به یک است ولی پوشا نیست.

مثال۳۹: معکوس تابع $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$، کدام است؟ آیا این معکوس یک تابع است؟

۱) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$، بلی　　۲) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$، خیر　　۳) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$، بلی　　۴) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$، خیر

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\Rightarrow y^2=\frac{1-x}{1+x}\Rightarrow y^2+y^2x=1-x\Rightarrow y^2x+x=1-y^2$$

$$\Rightarrow x(y^2+1)=1-y^2\Rightarrow x=\frac{1-y^2}{1+y^2}\Rightarrow y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

ضابطه بدست آمده در بالا یک تابع است، زیرا به ازای هر x، حداکثر یک y به دست می‌آید.

مثال۴۰: اگر $f(x)=x\sqrt{x}+1$، ضابطه تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{(x-1)^2}$ ، $x\geq 1$　　۲) $\sqrt[3]{(x-1)^2}$ ، $x\in\mathbb{R}$　　۳) $\sqrt[3]{x^2-1}$ ، $x>1$　　۴) $\sqrt[3]{x^2-1}$ ، $x\in\mathbb{R}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$y=x\sqrt{x}+1\Rightarrow y-1=x\sqrt{x}\Rightarrow x^3=(y-1)^2\Rightarrow x=\sqrt[3]{(x-1)^2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$$

چون دامنه f بازه $[0,+\infty)$ می‌باشد، پس می‌توان نتیجه گرفت برد f بازهٔ $[1,+\infty)$ می‌باشد. بنابراین دامنه تابع f^{-1} که همان برد f است بازه $[1,+\infty)$ می‌باشد.

نکته: اگر نقطه $A(a,b)$ روی منحنی f باشد، نقطه $A'(b,a)$ روی منحنی f^{-1} خواهد بود.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۴۱: معکوس تابع $f(x)=\frac{x}{x-1}$ را $f^{-1}(x)$ نامیده، $f^{-1}(3)$ چقدر است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{2}{3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» برای محاسبه $f^{-1}(3)$ کافی است در ضابطه تابع f به جای $f(x)$ مقدار ۳ را قرار دهیم.

$$3=\frac{x}{x-1} \Rightarrow 3x-3=x \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

مثال۴۲: تابع $y=\frac{e^x}{e^x+1}$ مفروض است ، اگر معکوس تابع $y=f^{-1}(x)$ باشد ، $f^{-1}(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) e ۴) $Ln\,2$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

روش اول: وارون تابع f را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{e^x}{e^x+1} \Rightarrow ye^x+y=e^x \Rightarrow e^x-ye^x=y \Rightarrow e^x(1-y)=y$$

$$\Rightarrow e^x=\frac{y}{1-y} \xrightarrow{\text{از طرفین رابطه Ln می‌گیریم}} Lne^x=Ln\frac{y}{1-y} \Rightarrow x=Ln\frac{y}{1-y}$$

بنابراین تابع وارون به صورت مقابل می‌باشد:

$$f^{-1}(x)=Ln\frac{x}{1-x} \Rightarrow f^{-1}(\frac{1}{2})=Ln\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=Ln1=0$$

روش دوم: می‌دانیم طول تابع وارون برابر عرض تابع اصلی می‌باشد، و بالعکس. بنابراین در تابع اولیه به جای y، مقدار $\frac{1}{2}$ را قرار می‌دهیم و x مربوط به آن را به دست می‌آوریم.

$$\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2e^x=e^x+1 \Rightarrow e^x=1 \Rightarrow x=0$$

مثال۴۳: اگر $f(x)=Ln\frac{x+1}{x}$ باشد، مقدار $f^{-1}(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{e-1}$ ۲) $Ln\frac{1}{2}$ ۳) $e-1$ ۴) $Ln2$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» طول تابع وارون عرض تابع اولیه می‌باشد، بنابراین:

$$Ln\frac{x+1}{x}=1 \Rightarrow \frac{x+1}{x}=e \Rightarrow x+1=ex \Rightarrow x+1=ex \Rightarrow ex-x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{e-1}$$

مثال۴۴: اگر $f(x)=\frac{5^x-1}{5^x+1}$ آنگاه $f^{-1}(\frac{2}{3})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» طول تابع وارون، عرض تابع اولیه می‌باشد، بنابراین: $x=1 \Rightarrow 5^x=5 \Rightarrow 3\times5^x-3=2\times5^x+2 \Rightarrow \frac{5^x-1}{5^x+1}=\frac{2}{3}$

مثال۴۵: در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{e^x+2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$، مقدار $f^{-1}(\frac{3}{2})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» طول تابع وارون، برابر عرض تابع اولیه می‌باشد، بنابراین:

$$\frac{e^x+2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{3}{2} \Rightarrow 2e^x+4e^{-x}=3e^x+3e^{-x} \Rightarrow e^x=e^{-x} \Rightarrow x=0$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۴۶: در معکوس تابع $f(x)=Ln(x+۴)$ مقدار $f^{-۱}(۰)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴- ۳) صفر ۴) ۳-

پاسخ : گزینه «۴»

$$Ln(x+۴)=۰ \Rightarrow x+۴=۱ \Rightarrow x=-۳$$

مثال۴۷: معکوس تابع $y=e^x+۲$ کدام است؟

۱) $y=e^x+۲$ ۲) $y=Ln(x-۲)$ ۳) $y=Ln(x+۲)$ ۴) $y=e^x-۲$

پاسخ : گزینه «۲»

$$y=e^x+۲ \Rightarrow e^x=y-۲ \Rightarrow x=Ln(y-۲) \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y=Ln(x-۲)$$

مثال۴۸: معکوس تابع $y=b^x$ برابر است با:

۱) $Log_b x$ ۲) $Log_x b$ ۳) $bLnx$ ۴) $xLnb$

پاسخ : گزینه «۱»

$$y=b^x \xrightarrow{\text{از طرفین رابطه } \log_b \text{ می‌گیریم}} \log_b y=\log_b b^x \Rightarrow x=\log_b y \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y=\log_b x$$

مثال۴۹: اگر $f(x)=Arcsin\frac{۱}{x+۱}$ باشد، $f^{-۱}(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱+\sin x}{x}$ ۲) $\frac{۱+\sin x}{۱-\sin x}$ ۳) $\frac{\sin x}{۱-\sin x}$ ۴) $\frac{۱-\sin x}{\sin x}$

پاسخ : گزینه «۴»

روش اول : باتوجه به نکته ۲۲ فرض می‌کنیم، نقطه‌ای به طول $x=۰$ روی منحنی f باشد، خواهیم داشت :

$$y=Arcsin\frac{۱}{۱+۰}=Arcsin۱=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow A(۰,\frac{\pi}{۲})\in f \Rightarrow A'(\frac{\pi}{۲},۰)\in f^{-۱}$$

تنها گزینه‌ای که اگر $x=\frac{\pi}{۲}$ را قرار دهیم آنگاه $y=۰$ خواهد شد، گزینه ۴ است.

روش دوم:

$$y=Arcsin\frac{۱}{۱+x} \Rightarrow \sin y=\frac{۱}{۱+x} \Rightarrow \sin y+x\sin y=۱ \Rightarrow x=\frac{۱-\sin y}{\sin y} \xrightarrow{\text{نقش } x \text{ و } y \text{ عوض می‌شود}} y=f^{-۱}(x)=\frac{۱-\sin x}{\sin x}$$

مثال۵۰: اگر $x>۱ ; f(x)=x^۲-۲x+۴$، آنگاه معادلهٔ $f^{-۱}$ ، کدام است؟

۱) $y=۱+\sqrt{x-۳}$ ۲) $y=۱+\sqrt{x+۳}$ ۳) $y=۱\pm\sqrt{x-۳}$ ۴) $y=-۱+\sqrt{x-۳}$

پاسخ : گزینه «۱»

روش اول:

$$y=x^۲-۲x+۴ \Rightarrow x^۲-۲x+(۴-y)=۰ \Rightarrow x=\frac{+۲\pm\sqrt{۴-۴(۴-y)}}{۲} \Rightarrow x=\frac{۲\pm\sqrt{۴y-۱۲}}{۲} \Rightarrow x=۱\pm\sqrt{y-۳}$$

با توجه به شرط $x>۱$، نتیجه می‌شود فقط $x=۱+\sqrt{y-۳}$ قابل قبول است و در نتیجه: $f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{x-۳}$

روش دوم: (روش تستی) ابتدا توجه کنید که: $f(۲)=۲^۲-۲\times۲+۴=۴ \Rightarrow (۲,۴)\in f \Rightarrow (۴,۲)\in f^{-۱}$

بنابراین گزینه‌ای می‌تواند صحیح باشد که به ازای $x=۴$، مقدار $y=۲$ بدست آید و فقط گزینه (۱) در این شرط صدق می‌کند.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۵۱: اگر $f(x)=\frac{x}{x-1}$ و $g(x)=\frac{2x}{x+1}$ باشد، $(fog)(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{2x^2}{x^2-1}$ ۲) $\frac{2x}{2x-1}$ ۳) $\frac{2x}{x-1}$ ۴) $\frac{2x}{x+1}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$fog(x)=f(g(x))=f(\frac{2x}{x+1})=\frac{\frac{2x}{x+1}}{\frac{2x}{x+1}-1}=\frac{\frac{2x}{x+1}}{\frac{2x-x-1}{x+1}}=\frac{2x}{x-1}$$

مثال۵۲: اگر $f(x)=e^{-x}$ و $g(x)=Ln\sqrt{x}$ ، آنگاه $g(f(x))$ کدام است؟

۱) $-x$ ۲) $\frac{2}{x}$ ۳) $-\frac{x}{2}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$g(f(x))=g(e^{-x})=Ln\sqrt{e^{-x}}=\frac{1}{2}Lne^{-x}=\frac{1}{2}(-x)=\frac{-x}{2}$$

مثال۵۳: اگر $f(x)=\begin{cases}2x & x\le -1\\ 3 & x>-1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x+1 & x>-1\\ -2 & x\le -1\end{cases}$ باشد مقدار $gof(-1)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) -4 ۴) 3

پاسخ: گزینه «۱»

$$f(-1)=2(-1)=-2\Rightarrow gof(-1)=g[f(-1)]=g(-2)=-2$$

مثال۵۴: تابع $f(x)=|x|$ مفروض است تابع $f[g(x)]$ برابر است با (در صورتیکه $g(x)<0$ باشد).

۱) $g(x)$ ۲) $g(x^2)$ ۳) $-g(x)$ ۴) $|g^2(x)|$

پاسخ: گزینه «۳»

$$f(g(x))=|g(x)| \xrightarrow{\text{چون } g(x)<0 \text{ است}} f(g(x))=-g(x)$$

مثال۵۵ اگر $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ و $g(x)=\cos^2 x$، تابع $f^{-1}(g(x))$ برای $0<x<\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) $Lntgx$ ۲) $Ln\,cotg\,x$ ۳) $2Ln\,cotg\,x$ ۴) $2Lntgx$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{e^x}{e^x+1}\Rightarrow ye^x+y=e^x\Rightarrow ye^x-e^x=-y\Rightarrow e^x=\frac{y}{1-y}\Rightarrow x=Ln\frac{y}{1-y}$$

بنابراین $f^{-1}(x)=Ln\frac{x}{1-x}$. حال به جای x در f^{-1}، مقدار تابع $g(x)$ را جایگزین می‌کنیم:

$$f^{-1}(g(x))=f^{-1}(\cos^2 x)=Ln\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=Ln\cot g^2 x=2Ln\,cotg\,x$$

مثال۵۶: اگر $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ و $g(x)=tgx$، ضابطه $(fog)(x)$ کدام است؟

۱) $\cos^2 x$ ۲) $\sec^2 x$ ۳) $\sin^2 x$ ۴) $\csc^2 x$

پاسخ: گزینه «۱»

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(tgx)=\frac{1}{1+tg^2 x}=\cos^2 x$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۵۷: تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۵}$ و $g(x)=\frac{x}{x+۱}$ مفروض هستند، D_{fog} کدام است؟

۱) $D_{fog}=R-\{-۱,۵\}$ ۲) $D_{fog}=R-\{۱-,۵\}$ ۳) $D_f=R-\{-\frac{۵}{۴}\}$ ۴) $D_{fog}=R-\{-۱,\frac{-۵}{۴}\}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

روش اول :

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{۱}{\frac{x}{x+۱}-۵}$$

توجه شود که $x\neq -۱$ باید باشد تا ضابطه $fog(x)$ تعریف شود.

$$fog(x)=\frac{x+۱}{x-۵x-۵}=\frac{x+۱}{-۴x-۵}\rightarrow D_{fog}=R-\{-۱,-\frac{۵}{۴}\}$$

روش دوم :

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in(R-\{-۱\}) \mid \frac{x}{x+۱}\neq ۵\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid x\neq -۱, x\neq -\frac{۵}{۴}\}=R-\{-۱,-\frac{۵}{۴}\}$$

مثال۵۸: اگر $f(x)=\frac{x}{x-۱}$ و باشد، دامنه تعریف $fog(x)$ کدام است؟

۱) R ۲) $g(x)=\frac{x+۲}{x}\ R^+$ ۳) $R-\{۰\}$ ۴) $R-\{۱,۰\}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» برای محاسبه دامنه fog، ابتدا ضابطه fog را بدست می‌آوریم ولی ضابطه را ساده نمی‌کنیم، سپس به محاسبهٔ دامنه آن می‌پردازیم.

$$fog(x)=f(g(x))=f(\frac{x+۲}{x})=\frac{\frac{x+۲}{x}}{\frac{x+۲}{x}-۱}$$

می‌دانیم ریشه‌های مخرج کسر جزء دامنه تابع نمی‌باشند، بنابراین ریشه‌های مخرج کسرها را بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x=۰ \\ \frac{x+۲}{x}-۱=۰ \Rightarrow \frac{x+۲}{x}=۱ \Rightarrow x+۲=x \Rightarrow \text{غیر ممکن} \end{cases}$$

بنابراین فقط $x=۰$ در دامنه تابع نمی‌باشد و در نتیجه $D_f=R-\{۰\}$.

مثال۵۹: اگر $f(x)=\sqrt{\frac{۱-x}{x}}$ و $g(x)=e^x$ باشد دامنه تابع fog کدام است؟

۱) $(-\infty,۰]$ ۲) $(-۱,۱]$ ۳) $(۰,۱]$ ۴) $[۰,+\infty)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(e^x)=\sqrt{\frac{۱-e^x}{e^x}}\Rightarrow \frac{۱-e^x}{e^x}\geq ۰$$

$$\xrightarrow{\text{عبارت } e^x \text{ همواره مثبت است}} ۱-e^x\geq ۰\rightarrow e^x\leq ۱\Rightarrow x\leq Ln۱\Rightarrow x\leq ۰$$

مثال۶۰: برد یا حوزه مقادیر رابطه، $f=\{(x,y)\mid \frac{x^۲}{۴}+y^۲=۱, x\in R\}$ کدام است؟

۱) $-۲\leq x<۲$ ۲) $-۱\leq y\leq ۱$ ۳) R^+ ۴) $R-\{۱,-۱\}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» برای محاسبه برد تابع، x را برحسب y بدست می‌آوریم.

$$\frac{x^۲}{۴}+y^۲=۱\Rightarrow \frac{x^۲}{۴}=۱-y^۲\Rightarrow x^۲=۴(۱-y^۲)\Rightarrow x=\pm ۲\sqrt{۱-y^۲}$$

$$۱-y^۲\geq ۰\Rightarrow y^۲\leq ۱\Rightarrow -۱\leq y\leq ۱$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۶۱: برد یا حوزه مقادیر (Range) تابع $y=\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}$ کدام است؟

۱) R ۲) R^+ ۳) $[-۱ \text{ و } ۱)$ ۴) $R^+ \cup \{۰\}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» برای محاسبه برد، از روش تابع وارون استفاده می‌کنیم.

$$y=\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱} \Rightarrow yx^۲+y=x^۲-۱ \Rightarrow x^۲-yx^۲=y+۱ \Rightarrow x^۲(۱-y)=y+۱ \Rightarrow x^۲=\frac{y+۱}{۱-y} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{y+۱}{۱-y}} \Rightarrow \frac{y+۱}{۱-y}\geq ۰$$

حال بایستی عبارت $\frac{y+۱}{۱-y}$ را تعیین علامت کنیم، ریشه‌های صورت و مخرج کسر به ترتیب ۱- و ۱+ می‌باشند. بنابراین جدول تعیین علامت به صورت مقابل خواهد بود.

y		-۱		۱	
$y+۱$	$-$	۰	$+$		$+$
$۱-y$	$+$		$+$	۰	$-$
$\frac{y+۱}{۱-y}$	$-$	۰	$+$	∄	$-$

با توجه به جدول فوق برد تابع فاصله $[-۱,۱)$ می‌باشد.

مثال۶۲: برد تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x^۲+۱}{۲x}$ کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $R-(-۱,۱)$ ۴) $R-[-۱,۱]$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» باتوجه به فرمول ۴ گزینه ۳ صحیح است.

مثال۶۳: اگر $f(x)=\sqrt{x-|x|}$ باشد برد یا حوزه مقادیر تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) R^+ ۲) $\{۰\}$ ۳) R ۴) $[۰,۱]$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به تعریف قدر مطلق:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-|x|}=\sqrt{x-x}=۰ & ; \ x\geq ۰\\ \sqrt{x-|x|}=\sqrt{x-(x)}=\sqrt{\underbrace{۲x}_{\text{منفی}}} & ; \ x<۰\end{cases}$$

بنابراین تابع f فقط به ازای $x\geq ۰$ تعریف شده است و مقدار آن فقط برابر ۰ است.

مثال۶۴: برد تابع $y=۲^{\lfloor |x| \rfloor}$ برابر است با:

۱) $R-Z$ ۲) R^+ ۳) $\{۱,۲,۴,۸,...\}$ ۴) $\{۲,۴,۸,...\}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» عبارت $\lfloor |x| \rfloor$ مقداری صحیح و غیرمنفی می‌باشد، یعنی:

$$\lfloor |x| \rfloor=\{۰,۱,۲,۳,...\} \Rightarrow ۲^{\lfloor |x| \rfloor}=\{۲^۰,۲^۱,۲^۲,۲^۳,.....\}$$

مثال۶۵: برد تابع $y=\left\lfloor \sqrt{۱-x^۲} \right\rfloor$ کدام است؟

۱) $\{۰,۱\}$ ۲) $\{۰\}$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$\begin{cases} y=\sqrt{۱-x^۲} \Rightarrow y^۲=۱-x^۲ \Rightarrow x^۲=۱-y^۲ \xrightarrow{x^۲\geq ۰} ۱-y^۲\geq ۰ \Rightarrow -۱\leq y\leq ۱ \quad (۲) \xrightarrow{۲,۱} \boxed{۰\leq y\leq ۱} \\ y\geq ۰ \Rightarrow \text{ شرط واضح} \qquad (۱) \end{cases}$$

در این حالت اعداد صحیح این فاصله باید جدا شود که اعداد ۱ و ۰ هستند.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۶۶: برد تابع $y = Ln\sin x$ را به دست آورید.

پاسخ : چون $\sin x$ مقابل Ln قرار دارد، پس: $\circ < \sin x \leq ۱ \Rightarrow Ln\circ < Ln\sin x \leq Ln۱ \Rightarrow -\infty < y \leq \circ \Rightarrow R_f = (-\infty, \circ]$

مثال۶۷: برد تابع $y = e^{x-|x|}$ کدام است؟

۱) R^+ ۲) R^- ۳) $(\circ, ۱]$ ۴) $[۱, +\infty)$

پاسخ : گزینه «۳» چون تابع داده شده یک تابع نمایی است، پس برد تابع زیر مجموعه اعداد مثبت می‌باشد و از طرفی $x - |x| \leq \circ$، بنابراین $y = e^{x-|x|} \leq e^{\circ} = ۱$.

مثال۶۸: برد تابع $y = e^{۲x} - ۴e^x$ کدام است؟

۱) R^+ ۲) $(-۴, +\infty)$ ۳) $[-۴, +\infty)$ ۴) $[-۲, +\infty)$

پاسخ : گزینه «۳»

روش اول: از روش تابع وارون استفاده می‌کنیم. $(e^x)^۲ - ۴e^x - y = \circ \Rightarrow e^x = \frac{۴ \pm \sqrt{۱۶ + ۴y}}{۲} \Rightarrow x = Ln(۲ \pm \sqrt{۴ + y})$

باید $y + ۴ \geq \circ$ و یا $y \geq -۴$ باشد.

روش دوم: $y = e^{۲x} - ۴e^x = \underbrace{(e^x - ۲)^۲}_{\geq \circ} - ۴ \Rightarrow y \geq -۴$

مثال۶۹: برد تابع f به ضابطه $f(x) = \frac{e^x - ۱}{e^x + ۱}$ کدام است؟

۱) $(-۱, ۱)$ ۲) R ۳) $[-۱, ۱]$ ۴) $R - \{\circ\}$

پاسخ : گزینه «۱» وارون تابع را بدست می‌آوریم و سپس دامنه وارون را به دست می‌آوریم.

$$y = \frac{e^x - ۱}{e^x + ۱} \Rightarrow ye^x + y = e^x - ۱ \Rightarrow e^x - ye^x = y + ۱ \Rightarrow e^x(۱ - y) = y + ۱ \Rightarrow e^x = \frac{y + ۱}{۱ - y} \Rightarrow x = Ln\frac{y + ۱}{۱ - y} \Rightarrow \frac{y + ۱}{۱ - y} > \circ$$

با توجه به جدول تعیین علامت برد f فاصله $(-۱, ۱)$ می‌باشد.

y		-۱		۱	
$y+۱$	$-$	$\circ$	$+$		$+$
$۱-y$	$+$		$+$	$\circ$	$-$
$\frac{y+۱}{۱-y}$	$-$	$\circ$	$+$	∄	$-$

مثال۷۰: برد یا حوزه مقادیر تابع حقیقی با ضابطه $f(x) = Ln(\frac{x^۲}{x^۲ + ۱})$ کدام است؟

۱) R ۲) R^+ ۳) $(-\infty, \circ]$ ۴) $(-\infty, \circ)$

پاسخ : گزینه «۴»

روش اول: $y = Ln\frac{x^۲}{x^۲ + ۱} \Rightarrow e^y = \frac{x^۲}{x^۲ + ۱} \Rightarrow x^۲e^y + e^y = x^۲ \Rightarrow x^۲ - x^۲e^y = e^y \Rightarrow x^۲(۱ - e^y) = e^y \Rightarrow$

$$x^۲ = \frac{e^y}{۱ - e^y} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{e^y}{۱ - e^y}} \Rightarrow \frac{e^y}{۱ - e^y} \geq \circ$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

در کسر $\frac{e^y}{1-e^y}$، صورت کسر یعنی e^y همواره مثبت می‌باشد، بنابراین:

$$1-e^y>0 \Rightarrow e^y<1 \Rightarrow y<\text{Ln}1 \Rightarrow y<0 \Rightarrow \text{برد}=(-\infty,0)$$

روش دوم: می‌دانیم $0\le\frac{x^2}{x^2+1}<1$، بنابراین:

$$0\le\frac{x^2}{x^2+1}<1 \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} \text{Ln}0\le\text{Ln}\frac{x^2}{x^2+1}<\text{Ln}1 \Rightarrow -\infty<\text{Ln}\frac{x^2}{x^2+1}<0 \Rightarrow \text{برد}=(-\infty,0)$$

مثال۷۱: برد (Range) تابع حقیقی f، به معادله $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{4}$، کدام است؟

۱) R ۲) $[\frac{1}{2},\infty]$ ۳) R^+ ۴) $[1,\infty]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

روش اول:

$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{4} \Rightarrow 4y=e^x+\frac{1}{e^x} \Rightarrow e^x=\frac{4y\pm\sqrt{16y^2-4}}{2} \Rightarrow 16y^2-4\ge0 \Rightarrow y^2\ge\frac{1}{4}$$

از رابطه اخیر نتیجه می‌شود $y\ge\frac{1}{2}$ یا $y\le\frac{-1}{2}$. ولی با توجه به ضابطهٔ اولیه تابع واضح است که y نمی‌تواند منفی باشد (چون y برابر مجموع دو تابع نمایی است و مقدار توابع نمایی همواره مثبت می‌باشد).

روش دوم:

$$y=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})=\frac{1}{4}(e^x+\frac{1}{e^x})$$

می‌دانیم اگر $a>0$، آنگاه $a+\frac{1}{a}\ge2$ و اگر $a<0$، آنگاه $a+\frac{1}{a}\le-2$. چون $e^x>0$، بنابراین $e^x+\frac{1}{e^x}\ge2$ و در نتیجه

$$y=\frac{1}{4}(e^x+\frac{1}{e^x})\ge\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2}.$$

مثال۷۲: اگر f تابعی حقیقی به معادله $y=2-e^{-x+1}$ باشد، آنگاه برد (Range) این تابع برابر است با:

۱) R ۲) R^- ۳) $(-\infty,1]$ ۴) $(-\infty,2)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از روش تابع وارون استفاده می‌کنیم.

$$y=2-e^{-x+1} \Rightarrow e^{-x+1}=2-y \Rightarrow -x+1=\text{Ln}(2-y) \Rightarrow x=1-\text{Ln}(2-y) \Rightarrow 2-y>0 \Rightarrow y<2$$

مثال۷۳: حوزه‌ی تعریف $y=\sqrt{3-x}+\arccos(\frac{x-2}{3})$ کدام است؟

۱) $(-1,3]$ ۲) $[-1,3]$ ۳) $]-1,3]$ ۴) $(1,-3)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم برای تابع $y=\text{Arc}\cos\beta$ باید $-1\le\beta\le1$ باشد و داریم:

$$\begin{cases}3-x\ge0 \Rightarrow x\le3\\ -1\le\frac{x-2}{3}\le1 \Rightarrow -3\le x-2\le3 \Rightarrow -1\le x\le5\end{cases} \Rightarrow \text{دامنه}=[-1,3]$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۷۴: دامنه و برد تابع $g(x) = \csc x$، کدام است؟

۱) $R_g = \mathbb{R} - (-1,1)$ و $D_g = \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

۲) $R_g = \mathbb{R} - [-1,1]$ و $D_g = \mathbb{R} - \{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

۳) $R_g = [-1,1]$ و $D_g = \mathbb{R}$

۴) $R_g = \mathbb{R}$ و $D_g = [-1,1]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$g(x) = \csc(x) = \frac{1}{\sin x}$$

واضح است دامنه تابع $g(x)$، x هایی هستند که مخرج را صفر نکنند و با توجه به گزینه‌ها فقط گزینه (۱) صحیح است یعنی $D_g = R - \{k\pi \mid k \in Z\}$ و دیگر نیازی به محاسبه برد نیست.

مثال ۷۵: حوزه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{\text{Arcsin}(\log_2 x)}$ کدام است؟

۱) $1 \le x \le 2$ ۲) $x \le 1$ ۳) $x \ge 2$ ۴) $-2 \le x \le 1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» می‌دانیم دامنه توابع $y = \text{Arcsin}\, f(x)$ به شکل $-1 \le f(x) \le 1$ می‌باشد اما چون خود $\text{Arcsin}\, \text{Log}_2^x$ زیر رادیکال است لذا باید داشته باشیم: $\text{Arcsin}\log_2^x \ge 0$ پس داریم:

$$\begin{cases} \text{Log}_2^x \ge 0 \Rightarrow x \ge 1 \\ \text{Log}_2^x \le 1 \Rightarrow x \le 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{1 \le x \le 2}$$

مثال ۷۶: حوزه تعریف $f(x) = \text{Arccos}\frac{3}{4 + 2\sin x}$ کدام است؟

۱) $2k\pi - \frac{\pi}{6} \le x \le 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$ ۲) $2k\pi - \frac{\pi}{6} \le x \le 2k\pi + \frac{\pi}{6}$

۳) $0 < x < \infty$ ۴) $0 \le x \le 2\pi$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» دامنه توابع به شکل $\text{Arccos}[f(x)]$ جواب نامعادله $-1 \le f(x) \le 1$ می‌باشد لذا خواهیم داشت؛

$$-1 \le \frac{3}{4 + 2\sin x} \le 1 \rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4 + 2\sin x} \ge -1 \Rightarrow 3 \ge -4 - 2\sin x \rightarrow 2\sin x \ge -7 \rightarrow x \in R \\ \frac{3}{4 + 2\sin x} \le 1 \Rightarrow 4 + 2\sin x \ge 3 \rightarrow \sin x \ge -\frac{1}{2} \rightarrow \sin x \ge \sin(-\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} & (1) \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} & (2) \end{cases} \rightarrow 2k\pi - \frac{\pi}{6} \le x < 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$$

مثال ۷۷: برد یا حوزه مقادیر (Range) تابع $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۵)

۱) R ۲) R^+ ۳) [-۱ و ۱) ۴) $R^+ \cup \{0\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای محاسبه برد، از روش تابع وارون استفاده می‌کنیم.

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \Rightarrow yx^2 + y = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 - yx^2 = y + 1 \Rightarrow x^2(1 - y) = y + 1$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{y+1}{1-y} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{y+1}{1-y}} \Rightarrow \frac{y+1}{1-y} \ge 0$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

حال بایستی عبارت $\frac{y+1}{1-y}$ را تعیین علامت کنیم، ریشه‌های صورت و مخرج کسر به ترتیب ۱- و ۱+ می‌باشند. بنابراین جدول تعیین علامت به صورت زیر خواهد بود.

y	-1		1	
$y+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$1-y$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\frac{y+1}{1-y}$	$-$	$+$	‖	$-$

با توجه به جدول فوق برد تابع فاصله $[-1,1)$ می‌باشد.

تذکر: لازم به ذکر است برخی اساتید در کتب و جزوات خود، مقدار یک کسر را به ازای ریشهٔ مخرج برابر ∞ فرض می‌کنند، که این مطلب به لحاظ علمی کاملاً غلط است. یک کسر به ازای ریشه مخرج تعریف نشده می‌باشد نه بی‌نهایت.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۷۸: تابع $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$ چگونه است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۵)

۱) همگن و فرد ۲) نه زوج و نه فرد ۳) زوج ۴) فرد

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$f(-x)=\sqrt[3]{(-x+1)^2}+\sqrt[3]{(-x-1)^2}=\sqrt[3]{(-(x-1))^2}+\sqrt[3]{(-(x+1))^2}=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}=f(x)$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۷۹: مقدار تابع معکوس $y=\text{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})$ به ازای $x=\text{Ln}(1+\sqrt{2})$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۵)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

روش اول: طول تابع وارون برابر عرض تابع اصلی می‌باشد، بنابراین: $\text{Ln}(1+\sqrt{2})=\text{Ln}(x+\sqrt{x^2+1}) \Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}=1+\sqrt{2}$

با توجه به مقادیر داده شده در گزینه‌ها، تساوی فوق به ازای $x=1$ حاصل می‌شود. برای محاسبه x بدون توجه به گزینه‌ها به محاسبات زیر توجه کنید:

$$x+\sqrt{x^2+1}=1+\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x^2+1}-1=\sqrt{2}-x \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^2+1+1-2\sqrt{x^2+1}=2+x^2-2\sqrt{2}x$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{x^2+1}=-2\sqrt{2}x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}=\sqrt{2}x \Rightarrow x^2+1=2x^2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

روش دوم: وارون تابع را به دست می‌آوریم:

$$y=\text{Ln}(x+\sqrt{x^2+1}) \Rightarrow e^y=x+\sqrt{x^2+1} \Rightarrow e^y-x=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow e^{2y}+x^2-2xe^y=x^2+1$$

$$\Rightarrow e^{2y}-2xe^y=1 \Rightarrow 2xe^y=e^{2y}-1 \Rightarrow x=\frac{e^{2y}-1}{2e^y} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}$$

$$f^{-1}(\text{Ln}(1+\sqrt{2}))=\frac{e^{2\text{Ln}(1+\sqrt{2})}-1}{2e^{\text{Ln}(1+\sqrt{2})}}=\frac{e^{\text{Ln}(1+\sqrt{2})^2}-1}{2(1+\sqrt{2})}=\frac{(1+\sqrt{2})^2-1}{2+2\sqrt{2}}=\frac{1+2+2\sqrt{2}-1}{2+2\sqrt{2}}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}=1$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۸۰: اگر $f(x)=\frac{3e^x-e^{-x}}{2}$ و $g(x)=\text{Ln}x$ باشد، مقدار $fog(1)$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۶)

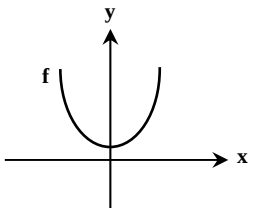
۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که $g(1)=\text{Ln}1=0$، بنابراین: $fog(1)=f(g(1))=f(0)=\frac{3e^0-e^0}{2}=\frac{3-1}{2}=1$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

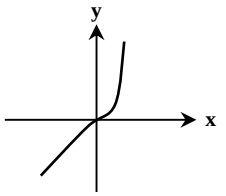
مثال۸۱: در مورد تابع f با شکل مقابل کدام مورد صحیح است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۶)



۱) زوج
۲) فرد
۳) نه فرد و نه زوج
۴) یک به یک

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» نمودار داده شده نسبت به محور yها متقارن می‌باشد، بنابراین تابع f زوج می‌باشد.

مثال۸۲: در مورد رابطه f با شکل مقابل، کدام مورد صحیح نیست؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۶)



۱) تابع
۲) فرد
۳) معکوس‌پذیر
۴) یک به یک

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون نمودار f نسبت به مبدأ مختصات متقارن نیست، لذا تابع f، فرد نمی‌باشد. ضمناً نمودار f، یک تابع اکیداً صعودی می‌باشد پس یک به یک و معکوس‌پذیر خواهد بود.

مثال۸۳: دامنه تابع به ضابطه $y = \mathrm{Ln}(-x^2 + 2x + 3)$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۶)

۱) $(-1,2)$ ۲) $[-1,3]$ ۳) $(-1,3)$ ۴) $(2,3)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم عبارت مقابل Ln باید بزرگتر از صفر باشد، بنابراین: $-x^2 + 2x + 3 > 0$

برای تعیین علامت عبارت $-x^2 + 2x + 3$، ابتدا ریشه‌های آن را بدست می‌آوریم که برابر ۱- و ۳ می‌باشند. بنابراین جدول تعیین علامت بصورت زیر خواهد بود:

x		-۱		۳	
$-x^2 + 2x + 3$	−	۰	+	۰	−

با توجه به جدول فوق $D_f = (-1,3)$.

مثال۸۴: اگر $f(x) = \frac{1}{x+1}$ باشد، (۱) fofof کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۷)

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که $f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ و $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}$، بنابراین:

$$\mathrm{fofof}(1) = f(f(f(1))) = f(f(\tfrac{1}{2})) = f(\tfrac{2}{3}) = \frac{1}{\frac{2}{3}+1} = \frac{3}{5}$$

مثال۸۵: برد (Range) تابع حقیقی f با ضابطه $f(x) = \mathrm{Ln}(x+1)$ ، کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۸)

۱) R ۲) R^+ ۳) $R - \{1\}$ ۴) $R - \{0\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» دامنه تابع معکوس همان برد تابع اولیه می‌باشد.

$$y = \mathrm{Ln}(x+1) \Rightarrow e^y = x+1 \Rightarrow x = e^y - 1$$

ملاحظه می‌کنید که y هیچ محدودیتی ندارد پس برد تابع R می‌باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۸۶: دامنه تعریف (Domain) تابع حقیقی f به معادله $y=\frac{Ln(x+1)}{x}$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۸)

۱) $x\neq 0, R$ ۲) $x\neq 0, (-1,\infty)$ ۳) $R-\{0,1\}$ ۴) R^+

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» عبارت مقابل Ln باید بزرگتر از صفر باشد و مخرج کسر مخالف صفر، بنابراین: $x+1>0 \Rightarrow x>-1, x\neq 0$

مثال۸۷: دامنه تعریف (Domain)، تابع حقیقی f به معادله $f(x)=Ln(\sin x)$ به کدام صورت است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۸)

۱) R ۲) R^+ ۳) $2k\pi<x<2k\pi+\pi$ ۴) $2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» $y=Ln(\sin x) \Rightarrow \sin x>0 \Rightarrow 0<x<\pi \xrightarrow{\text{جواب کلی}} 2k\pi<x<2k\pi+\pi$

یادآوری: در ناحیه اول و دوم مثلثاتی سینوس مثبت و در ناحیه سوم و چهارم مثلثاتی سینوس منفی است.

مثال۸۸: دامنه تابع $y=\frac{Ln(x+1)}{5^x-1}$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۹)

۱) $(-1,+\infty)$ ۲) $R-\{-1,0\}$ ۳) R^+ ۴) $(-1,+\infty)-\{0\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» عبارت مقابل Ln باید بزرگتر از صفر باشد، مخرج کسر مخالف صفر.

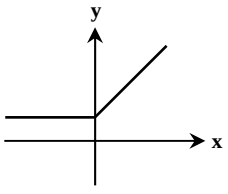
$$y=\frac{Ln(x+1)}{5^x-1} \Rightarrow \begin{cases} x+1>0 \Rightarrow x>-1 \\ 5^x-1=0 \Rightarrow 5^x=1 \Rightarrow x=0 \end{cases} \Rightarrow \text{دامنه}=(-1,+\infty)-\{0\}$$

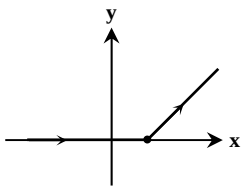
مثال۸۹: برد تابع $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۹)

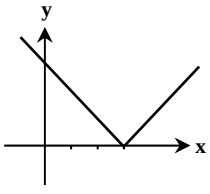
۱) $(-1,1)$ ۲) $[-1,1]$ ۳) R ۴) R^+

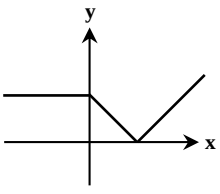
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» $y=\frac{e^x-1}{e^x+1} \Rightarrow ye^x+y=e^x-1 \Rightarrow e^x=\frac{y+1}{1-y} \Rightarrow \text{برد}=(-1,1)$

مثال۹۰: نمایش منحنی $y=|x-3|$ بصورت زیر است: (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۰)

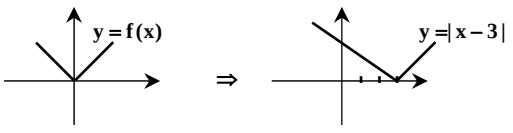
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از روش انتقال داریم:



مثال۹۱: اگر f تابعی حقیقی به معادله $y=4+e^{x-2}$ باشد، برد (Range) این تابع برابر است با: (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۰)

۱) R ۲) R^+ ۳) $(-4,4)$ ۴) $(4,+\infty)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» $y=4+e^{x-2} \Rightarrow e^{x-2}=y-4 \Rightarrow x-2=Ln(y-4) \Rightarrow x=2+Ln(y-4) \Rightarrow y-4>0 \rightarrow y>4$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۹۲: برد تابع $y=\sqrt{۱-x^۲}$، کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۱)

۱) $R-(-۱,۱)$ ۲) $[۰,۵]$ ۳) $[۰,۱]$ ۴) $[-۱,۱]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

روش اول: با توجه به ضابطه داده شده، واضح است که $y\geq ۰$. همچنین بیشترین مقدار عبارت زیر رادیکال برابر ۱ می‌باشد، بنابراین $y\leq \sqrt{۱}=۱$. در نتیجه برد تابع فاصلهٔ $[۰,۱]$ می‌باشد.

روش دوم: از ضابطه تابع بلافاصله نتیجه می‌شود $y\geq ۰$.

$$y=\sqrt{۱-x^۲}\Rightarrow y^۲=۱-x^۲\Rightarrow x^۲=۱-y^۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۱-y^۲}\Rightarrow ۱-y^۲\geq ۰\Rightarrow -۱\leq y\leq ۱$$

با توجه به نتیجه فوق و شرط $y\geq ۰$، نتیجه می‌شود: $R_f=[۰,۱]$.

مثال ۹۳: اگر $f(x)=Ln\lfloor x+۲\rfloor$ باشد، دامنه f کدام است؟ (منظور از $\lfloor x\rfloor$ جزء صحیح است.) (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۱)

۱) $(-۱,\infty)$ ۲) $(-۲,+\infty)$ ۳) $(۱,+\infty)$ ۴) $[-۱,+\infty)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$\lfloor x+۲\rfloor>۰\Rightarrow x+۲\geq ۱\Rightarrow x\geq -۱$$

مثال ۹۴: دامنهٔ تابع $y=\sqrt{x-|x|}+\sqrt{x-\sin x}$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۲)

۱) $x\geq ۰$ ۲) $۰\leq x\leq \frac{\pi}{۲}$ ۳) $-\frac{\pi}{۲}\leq x\leq ۰$ ۴) R (مجموعه اعداد حقیقی)

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» **روش اول:**

$$x-|x|\geq ۰\Rightarrow x\geq |x|\Rightarrow x\geq ۰$$

$$x-\sin x\geq ۰\Rightarrow x\geq \sin x$$

رابطهٔ $x\geq \sin x$ به ازای تمام مقادیر $x\geq ۰$ برقرار می‌باشد، لذا دامنه تابع همان فاصله $[۰,+\infty)$ خواهد بود.

روش دوم: نقطه $x=-۱$ در دامنه تابع صدق نمی‌کند، زیرا عبارت زیر رادیکال اول منفی می‌شود. پس گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست می‌باشند. همچنین توجه کنید که $x=۲$ در دامنه تابع صدق می‌کند، لذا گزینه (۲) نیز نادرست می‌باشد. در نتیجه فقط گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۹۵: اگر $F(\text{Arcsin}\frac{x-۱}{x+۱})=x+۲$ باشد، آنگاه $F(x)$ برابر است با: (حسابداری ـ سراسری ۸۲)

۱) $F(x)=\frac{\sin x-۱}{۱+\sin x}$ ۲) $F(x)=\frac{۱+\sin x}{۱-\sin x}$ ۳) $F(x)=\frac{۲+\sin x}{۱-\sin x}$ ۴) $F(x)=\frac{۳-\sin x}{۱-\sin x}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

روش اول:

$$t=\text{Arcsin}\frac{x-۱}{x+۱}\Rightarrow \sin t=\frac{x-۱}{x+۱}\Rightarrow x\sin t+\sin t=x-۱$$

$$x-x\sin t=\sin t+۱\Rightarrow x(۱-\sin t)=\sin t+۱\Rightarrow x=\frac{\sin t+۱}{۱-\sin t}$$

با جایگذاری x برحسب t در رابطه داده شده، نتیجه می‌شود. $F(t)=\frac{\sin t+۱}{۱-\sin t}+۲=\frac{\sin t+۱+۲-۲\sin t}{۱-\sin t}=\frac{۳-\sin t}{۱-\sin t}$

روش دوم (عددگذاری): با جایگذاری $x=۱$ در رابطه داده شده نتیجه می‌شود:

$$F(\text{Arcsin}\frac{۱-۱}{۱+۱})=۱+۲\Rightarrow F(\text{Arcsin}\,۰)=۳\Rightarrow F(۰)=۳$$

بنابراین تنها گزینه‌ای می‌تواند صحیح باشد که در شرط $F(۰)=۳$ صدق کند و فقط گزینه (۴) در این شرط صدق می‌کند.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۹۶: دامنه تابع حقیقی f با ضابطه $f(x)=\frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{x(x+1)}}$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۲)

۱) $(-\infty,0)$ ۲) $(0,+\infty)$ ۳) $(-1,+\infty)$ ۴) $(-\frac{1}{2},0)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» **روش اول:** عبارت مقابل Ln باید بزرگتر از صفر و عبارت زیر رادیکال در مخرج کسر نیز باید بزرگتر از صفر باشد، یعنی:

$$\begin{cases} 2x+1>0 \Rightarrow 2x>-1 \Rightarrow x>\frac{-1}{2} \\ x(x+1)>0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & -1 & & 0 & \\ \hline x(x+1) & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow x<-1 \text{ یا } x>0 \end{cases}$$

با توجه به نتایج فوق دامنه تابع بازه $(0,+\infty)$ می‌باشد.

روش دوم (عددگذاری): مقدار $x=1$ در دامنه تابع صدق می‌کند، لذا گزینه (۱) و (۴) نمی‌توانند صحیح باشند و چون $x=0$ در دامنه تابع صدق نمی‌کند پس گزینه (۳) نیز صحیح نخواهد بود. پس فقط گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۹۷: اگر $\frac{1}{x}-\frac{y^2}{x^2}=1$ باشد، برد آن کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۲)

۱) $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ ۲) $[0,\frac{1}{2}]$ ۳) $[\frac{1}{4},+\infty)$ ۴) $[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\frac{1}{x}-\frac{y^2}{x^2}=1 \Rightarrow \frac{x-y^2}{x^2}=1 \Rightarrow x-y^2=x^2 \Rightarrow x^2-x+y^2=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-4y^2}}{2} \Rightarrow 1-4y^2\geq 0 \Rightarrow y^2\leq\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۹۸: هزینه پاکت‌های پستی به مقصد معلومی به اساس جدول زیر است؟

x وزن پاکت به گرم	$[0-5)$	$[5-10)$	$[10,15)$	$[15,20)$	...
c هزینه پست	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	...

تابع هزینه پاکتی به وزن $x>0$ گرم کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۳)

۱) $200\left\lfloor\frac{x}{5}\right\rfloor+100$ ۲) $100\left(\frac{x}{5}\right)+100$ ۳) $100\left(\left\lfloor\frac{x}{5}+1\right\rfloor+1\right)$ ۴) $300\left\lfloor\frac{x}{5}\right\rfloor-100$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» فرض می‌کنیم وزن پاکت ۱ گرم باشد، در این صورت طبق جدول داده شده هزینه پستی برابر ۲۰۰ خواهد بود. با جایگزینی $x=1$ در ضابطه‌های داده شده مشخص می‌شود که فقط گزینه (۳) به ازای $x=1$ مقداری برابر ۲۰۰ خواهد داشت.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۹۹: کدام تابع بر روی دامنه خود، یک به یک است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۴)

۱) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ ۲) $f(x)=x+\sqrt{x}$ ۳) $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ ۴) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

گزینه (۱): $f(2)=\frac{5}{2}, f(\frac{1}{2})=\frac{5}{2} \Rightarrow$ تابع یک به یک نمی‌باشد

گزینه (۲): $f(x)=x+\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$ تابع صعودی و بنابراین یک به یک است

گزینه (۳): $f(-2)=0, f(-1)=0 \Rightarrow$ تابع یک به یک نمی‌باشد

گزینه (۴): $f(2)=\frac{2}{5}, f(\frac{1}{2})=\frac{2}{5} \Rightarrow$ تابع یک به یک نمی‌باشد

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۱۰۰: کدام تابع زیر زوج می‌باشد؟ (مدیریت ـ آزاد ۸۴)

۱) $g(x)=\log(2x+\sqrt{1+4x^2})$ ۲) $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

۳) $h(x)=|x-1|-|x+1|$ ۴) $I(x)=|x-1|+|x|+|x+1|$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» توابع داده شده درگزینه (۱)، (۲) و (۳)، توابع فرد می‌باشد.

مثال ۱۰۱: اگر $f(x)=\frac{Ln(x-2)}{x+3}+\sqrt{x^2-4}$ باشد D_f کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۵)

۱) $(2,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ ۳) $[2,+\infty)$ ۴) $R-\{3\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون $x=2$ در دامنه تابع f قرار ندارد، پس گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) نمی‌توانند صحیح باشند.

مثال ۱۰۲: معادله $|x+1|=2x-7$ چند جواب دارد؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۵)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

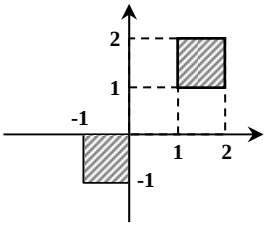
☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$\begin{cases} x\geq -1 \Rightarrow 2x-7=x+1 \Rightarrow x=8 \\ x<-1 \Rightarrow 2x-7=-x-1 \Rightarrow x=2 \quad \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

مثال ۱۰۳: مساحت نمودار رابطه $\lfloor y\rfloor\lfloor x\rfloor=1$ کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۵)

۱) ۲ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» نمودار رابطهٔ $\lfloor y\rfloor\lfloor x\rfloor=1$ به شکل زیر است:



$\Rightarrow$ مساحت $=1\times1+1\times1=2$

مثال ۱۰۴: اگر $F(x)=Ln(x+4)$ باشد، آنگاه مقدار $[F^{-1}(0)]^2$ کدام است؟ (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۵)

۱) ۳ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) صفر ۴) ۹

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» نیازی به محاسبه تابع وارون نمی‌باشد، و کافی است مقدار ۰ داده شده را به جای $F(x)$ قرار دهیم.

$$Ln(x+4)=0 \Rightarrow x+4=1 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow F^{-1}(0)=-3 \Rightarrow (F^{-1}(0))^2=9$$

مثال ۱۰۵: به ازای کدام مقادیر از a، منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{ax+1}{x+2a}$ به صورت یک خط راست در می‌آید؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۵)

۱) $\pm\frac{\sqrt{4}}{3}$ ۲) ±2 ۳) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) ±1

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$\frac{a}{1}=\frac{1}{2a} \Rightarrow 2a^2=1 \Rightarrow a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۱۰۶: n عددی فرد است، حاصل $\left[\frac{n^۲}{۴}\right]$ کدام است؟ (مدیریت تکنولوژی ـ آزاد ۸۵)

۱) $\frac{n^۲}{۴}$ ۲) $\frac{(n-۱)(n+۱)}{۲}$ ۳) $\frac{n(n-۱)}{۴}$ ۴) $\frac{n^۲-۱}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» چون n فرد است پس می‌توانیم آن را به صورت $n=۲k+۱$ فرض کنیم.

$$\Rightarrow [\frac{n^۲}{۴}]=[\frac{(۲k+۱)^۲}{۴}]=[\frac{۴k^۲+۴k+۱}{۴}]=[k^۲+k+\frac{۱}{۴}]=k^۲+k=k(k+۱)=\frac{n-۱}{۲}\times(\frac{n-۱}{۲}+۱)=\frac{n^۲-۱}{۴}$$

مثال ۱۰۷: اگر $f(x)=x-\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=\sin \pi x$ باشد، برد تابع gof کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۶)

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $[-۱,۰]$ ۳) $[۰,۱]$ ۴) $[۰,\frac{۱}{۲}]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا تابع gof را به دست می‌آوریم.

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(x-\lfloor x\rfloor)=\sin(\pi(x-\lfloor x\rfloor))$$

حال برای محاسبه برد gof به ترتیب زیر عمل می‌کنیم، از خواص تابع جزء صحیح داریم: $۰\le x-\lfloor x\rfloor<۱ \Rightarrow ۰\le \pi(x-\lfloor x\rfloor)<\pi$

بنابراین کمان تابع سینوس همواره در فاصلهٔ $[۰,\pi)$ قرار دارد و در این فاصله سینوس نامنفی است و بیشترین مقدار سینوس در این فاصله برابر یک است که به ازای $\frac{\pi}{۲}$ حاصل می‌شود، در نتیجه برد تابع gof بازهٔ $[۰,۱]$ است.

مثال ۱۰۸: اگر $x>۰;f(x)=x-\frac{۱}{x}$ باشد، مقدار $f^{-۱}(\frac{۳}{۲})$، کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۶)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» نیازی به محاسبهٔ تابع وارون نیست، و کافی است $\frac{۳}{۲}$ را به جای $f(x)$ قرار دهیم.

$$x-\frac{۱}{x}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{x^۲-۱}{x}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲x^۲-۲=۳x \Rightarrow ۲x^۲-۳x-۲=۰ \Rightarrow x=\frac{۳\pm\sqrt{۹+۱۶}}{۴}=۲,\frac{-۱}{۲}$$

مثال ۱۰۹: اگر $f(x)=\frac{Ln(۲-x)}{x-۴}+\frac{۱}{\sqrt{۹-x^۲}}$ باشد کدام گزینه D_f است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۶)

۱) $(-۳,۳)$ ۲) $(-۳,۲)$ ۳) $[-۳,۳]$ ۴) $[-۳,۲]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» عبارت مقابل Ln باید مثبت باشد یعنی: $(۲-x>۰ \rightarrow x<۲)$ تنها گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۱۱۰: دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=Arcsin\frac{۱+x^۲}{۲x}$، کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۷)

۱) $\{-۱,۱\}$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $R-(-۱,۱)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» بایستی $-۱\le\frac{x^۲+۱}{۲x}\le ۱$ باشد که از آن نتیجه می‌شود $x=\pm ۱$

یادآوری: می‌دانیم همواره $\frac{x^۲+۱}{۲x}\ge ۱$ یا $\frac{x^۲+۱}{۲x}\le -۱$ می‌باشد و تساوی تنها زمانی رخ می‌دهد که $x=۱$ یا $x=-۱$ باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۱۱۱: معادله $\frac{۲}{۳}x = \lfloor x \rfloor$ چند جواب دارد؟ (حسابداری ـ آزاد ۸۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ریشه‌های معادله داده شده $x = ۰$ و $x = \frac{۳}{۲}$ می‌باشند.

مثال ۱۱۲: اگر $f(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{\lfloor x \rfloor}$ باشد دامنه f کدم است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۷)

۱) R^+ ۲) $[۱, +\infty)$ ۳) $(۱, +\infty)$ ۴) $R - [۰, ۱]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، یعنی $x \geq ۰$. همچنین ریشه مخرج کسر جزء دامنه نیست.

$$\lfloor x \rfloor = ۰ \Rightarrow ۰ \leq x < ۱ \Rightarrow \text{دامنه} = [۱, +\infty)$$

مثال ۱۱۳: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ۲^x + (\frac{۱}{۲})^x$ محور تقارن خود را در نقطه A قطع می‌کند. فاصله A از نقطه $(\frac{۳}{۲}, ۰)$، کدام است؟

(حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۸)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تابع $f(x) = ۲^x + ۲^{-x}$، تابع زوج می‌باشد و محور yها $(x = ۰)$ محور تقارن توابع زوج می‌باشد. پس خط $x = ۰$ محور تقارن تابع f می‌باشد و بنابراین نقطه $A(۰, ۲)$ نقطه تلاقی تابع f با محور تقارن خود می‌باشد.

$$\Rightarrow (\frac{۳}{۲}, ۰) \text{ فاصله نقطه } A \text{ از نقطه } = \sqrt{(۰ - \frac{۳}{۲})^۲ + (۲ - ۰)^۲} = \frac{۵}{۲}$$

مثال ۱۱۴: برد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{e^x - ۱}{e^x + ۱}$، کدام بازه است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۸)

۱) $(-\infty, +\infty)$ ۲) $(-۱, ۱)$ ۳) $[۰, +\infty)$ ۴) $[-۱, ۱)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از تابع وارون استفاده می‌کنیم، می‌دانیم دامنه تابع وارون بر تابع است.

$$y = \frac{e^x - ۱}{e^x + ۱} \Rightarrow ye^x + y = e^x - ۱ \Rightarrow ye^x - e^x = -y - ۱ \Rightarrow e^x = \frac{-y - ۱}{y - ۱} \Rightarrow e^x = \frac{y + ۱}{۱ - y} \Rightarrow x = \text{Ln}\frac{y + ۱}{۱ - y}$$

عبارت مقابل Ln یعنی $\frac{y + ۱}{۱ - y}$ باید مثبت باشد که به کمک تعیین علامت $-۱ < y < ۱$ حاصل می‌شود.

مثال ۱۱۵: برد تابع $y = \frac{x}{\sqrt{x^۲ + ۱}}$ کدام است؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۸)

۱) R^+ ۲) $[-۱, ۰)$ ۳) $[۰, ۱)$ ۴) $(-۱, ۱)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

روش اول: ابتدا تابع را وارون می‌کنیم و دامنه وارون را بدست می‌آوریم.

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^۲ + ۱}} \Rightarrow y^۲ = \frac{x^۲}{x^۲ + ۱} \Rightarrow y^۲x^۲ + y^۲ = x^۲ \Rightarrow x^۲ - x^۲y^۲ = y^۲ \Rightarrow x^۲ = \frac{y^۲}{۱ - y^۲} \geq ۰ \Rightarrow \pm\sqrt{\frac{y^۲}{۱ - y^۲}}$$

باید عبارت زیرا رادیکال نامنفی باشد، صورت کسر زیر رادیکال همواره نامنفی است پس مخرج کسر یعنی $۱ - y^۲$ باید مثبت باشد، از $۱ - y^۲ > ۰$ نتیجه می‌شود $-۱ < y < ۱$

روش دوم: واضح است که همواره صورت کسر کوچکتر از مخرج است، پس $|y| < ۱$ و در نتیجه $-۱ < y < ۱$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۱۱۶: اگر مبداء مختصات مرکز تقارن نمودار تابع $y = ax^۳ + bx^۲ + dx + e$ باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟ (مدیریت فن‌آوری اطلاعات ـ آزاد ۸۸)

۱) $be = ۰$ ۲) $d = e = ۰$ ۳) $de = ۰$ ۴) $b = e = ۰$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» می‌دانیم مبدأ مختصات مرکز تقارن توابع فرد است، پس باید ضریب عوامل زوج در تابع f برابر صفر باشد، یعنی $b = e = ۰$.

مثال ۱۱۷: اگر $f(x+۲) = x^۲ + ۲x$ باشد، نمودار تابع $y = f(x-۲)$ از کدام نقطه می‌گذرد؟ (مدیریت فن‌آوری اطلاعات ـ آزاد ۸۸)

۱) (۲،۳) ۲) (۱،۳) ۳) (۲،۱) ۴) (۳،۱)

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» قرار میدهیم $t = x + ۲$، در این صورت $x = t - ۲$، بنابراین: $f(t) = (t-۲)^۲ + ۲(t-۲) = t^۲ - ۲t$

حال با توجه به اینکه $f(t) = t^۲ - ۲t$ می‌باشد، پس: $f(x-۲) = (x-۲)^۲ - ۲(x-۲) = x^۲ - ۶x + ۸$

واضح است که اگر در رابطه $f(x-۲) = x^۲ - ۶x + ۸$، به x مقدار بدهیم $y = ۳$ بدست می‌آید.

مثال ۱۱۸: اگر $f(x) = \lfloor x \rfloor - x$ و $g(x) = \ln\frac{۱-x}{۱+x}$ باشد، برد تابع gof، کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۹)

۱) $(-۱, ۰]$ ۲) $[۰, ۱)$ ۳) $(-\infty, ۰]$ ۴) $[۰, +\infty)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

روش اول: ابتدا ضابطه gof را بدست می‌آوریم:

$$gof = g(f(x)) = g(\lfloor x \rfloor - x) = \ln\frac{۱ + x - \lfloor x \rfloor}{۱ - (x - \lfloor x \rfloor)}$$

برای بدست آوردن برد gof، وارون آن را بدست می‌آوریم:

$$y = \ln\frac{۱ + x - \lfloor x \rfloor}{۱ - (x - \lfloor x \rfloor)} \Rightarrow e^y = \frac{۱ + (x - \lfloor x \rfloor)}{۱ - (x - \lfloor x \rfloor)}$$

$$\Rightarrow e^y - e^y(x - \lfloor x \rfloor) = ۱ + (x - \lfloor x \rfloor) \Rightarrow (x - \lfloor x \rfloor)(e^y + ۱) = e^y - ۱ \Rightarrow x - \lfloor x \rfloor = \frac{e^y - ۱}{e^y + ۱}$$

حال با توجه به اینکه $۰ \le x - \lfloor x \rfloor < ۱$ می‌باشد، پس بایستی: $۰ \le \frac{e^y - ۱}{e^y + ۱} < ۱ \xrightarrow{\text{چون } e^y + ۱ \text{ همواره مثبت است}} e^y - ۱ \ge ۰ \Rightarrow e^y \ge ۱ \Rightarrow y \ge ۰$

توضیح: نامساوی $\frac{e^y - ۱}{e^y + ۱} < ۱$، به ازای تمام مقادیر y برقرار است، زیرا صورت کسر کوچکتر از مخرج کسر می‌باشد.

روش دوم: می‌دانیم همواره $۰ \le x - \lfloor x \rfloor < ۱$ بنابراین: $-۱ < \lfloor x \rfloor - x \le ۰$ می‌باشد اگر فرض کنیم $\lfloor x \rfloor - x = a$ باشد. آنگاه:

$$-۱ < a \le ۰ \rightarrow \begin{cases} ۱ \le ۱ - a < ۲ \\ ۰ < ۱ + a \le ۱ \end{cases} \Rightarrow \frac{۱-a}{۱+a} \ge ۱ \Rightarrow \ln\frac{۱-a}{۱+a} \ge ۰ \Rightarrow \text{برد} = [۰, +\infty)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مدرسان شریف

فصل چهارم

« حد و پیوستگی»

مثال۱: به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & , x<۱ \\ ax^۲+a & , x\geq ۱ \end{cases}$ در $x=۱$ دارای حد است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» لازم است حد چپ و راست تابع در $x=۱$ با هم برابر باشند.

$$f(۱^+)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(ax^۲+a)=a+a=۲a$$

$$f(۱^-)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(۲x+۱)=۲+۱=۳$$

در نتیجه $۲a=۳$ و یا $a=\frac{۳}{۲}$

مثال۲: حاصل عبارت $\lim_{x\to ۰^-}\frac{۳+x}{۲+۲^{۱/x}}$ ، (حد چپ در نقطه $x=۰$) کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» می‌دانیم $\frac{۱}{۰^-}$ برابر $-\infty$ می‌شود:

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{۳+x}{\frac{۱}{۲+۲^x}}=\frac{۳+۰}{۲+۲^{-\infty}}=\frac{۳}{۲+۰}=\frac{۳}{۲}$$

مثال۳: حاصل $\lim_{x\to ۰}(tgx).\sin\frac{۱}{x}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ∞ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) حد ندارد

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» چون $\lim_{x\to ۰} tgx=۰$ می‌باشدو تابع sin نیز تابعی کراندار است، درنتیجه با توجه به قضیهٔ فوق $\lim_{x\to ۰}(tgx)\sin\frac{۱}{x}=۰$.

مثال۴: حاصل $A=\lim_{x\to\infty}(۱۰۰+\frac{\sin x}{x})$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ∞ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» زیرا با توجه به قضیهٔ فوق و محدود بودن تابع sinx و توجه به اینکه $\lim_{x\to\infty} x=\infty$ پس $A=۱۰۰+۰=۱۰۰$.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۵: مقدار $\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{\lfloor x\rfloor^۲-۹}{\lfloor x\rfloor-۳}$ برابر است با :

۱) وجود ندارد ۲) ۰ ۳) ۶ ۴) ∞

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» چون تابع در همسایگی (۳^+) $۳\le x<۴$ نامعین است (مخرج برابر صفر مطلق است) پس حد ندارد .

مثال۶: حد $A=\frac{|x-۳|}{x-۳}\lfloor x\rfloor$ وقتی $x\to ۳^+$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) ۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{|x-۳|}{x-۳}\lfloor x\rfloor=\lim_{x\to ۳^+}\frac{(x-۳)}{(x-۳)}\lfloor ۳^+\rfloor=۱\times ۳=۳$$

مثال۷: مقدار $\lim\limits_{x\to -۱^+}\frac{|x|}{\lfloor x\rfloor}\operatorname{sgn}(x+۱)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) -۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{|x|}{\lfloor x\rfloor}\operatorname{sgn}(x+۱)=\frac{|-۱|}{-۱}\times\operatorname{sgn}(۰^+)=-۱\times ۱=-۱$$

توضیح: مقدار $\operatorname{sgn}(x+۱)$ وقتی $x\to(-۱)^+$ برابر $\operatorname{sgn}(۰^+)$ می‌شود که با توجه به تعریف تابع علامت می‌دانیم که به ازای $x>۰$ مقدار تابع برابر عدد ثابت ۱ می‌باشد.

مثال۸: اگر $|f(x)+۷|<\frac{۳^{\frac{۱}{x}}}{x-۱}$ آنگاه، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) ۷ ۳) ۰ ۴) -۷

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$|f(x)+۷|<\frac{۳^{\frac{۱}{x}}}{x-۱}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}|f(x)+۷|\le\lim_{x\to+\infty}\frac{۳^{\frac{۱}{x}}}{x-۱}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳^{\frac{۱}{x}}}{x-۱}=\frac{۳^۰}{\infty}=۰\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}|f(x)+۷|\le ۰\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}|f(x)+۷|=۰\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=-۷}$$

مثال۹: حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}(\frac{\cot gx}{\cot g۳x})$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\cot gx}{\cot g۳x}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow A=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{-(۱+\cot g^۲x)}{-۳(۱+\cot g^۲۳x)}=\frac{-۱}{-۳}=\frac{۱}{۳}$$

مثال۱۰: به ازای کدام مقدار n و m دو تابع $f(x)=۲x$ و $g(x)=mx^n$ وقتی $x\to ۰$ هم‌ارزند؟

۱) $n=\frac{۱}{۲}$ و $m=۱$ ۲) $n=۲$ و $m=۱$ ۳) $n=۱$ و $m=۲$ ۴) $n=۱$ و $m=\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به تعریف دو تابع هم‌ارز داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{g(x)}=۱\Rightarrow\lim_{x\to ۰}\frac{۲x}{mx^n}=۱\Rightarrow m=۲\ ,\ n=۱$$

الف) در حالتهایی که $x\to ۰^+$، جمله با کوچکترین مرتبه حاکم است (البته زمانی که عدد ثابت در عبارت موجود نباشد)

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

به مثالهای زیر توجه کنید:

از $۲x$ زیر رادیکال در صورت کسر در مقابل $\sqrt{۲x}$ صرف‌نظر کردیم (حاکم $\sqrt{۲x}$ است!)

$$۱)\ \lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{۲x+\sqrt{۲x}}}{\sqrt[۴]{۲x}}\simeq\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{\sqrt{۲x}}}{\sqrt[۴]{۲x}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt[۴]{۲x}}{\sqrt[۴]{۲x}}=۱$$

در مخرج کسر از $x^۳$ در مقابل $۲\sqrt{x}$ و در صورت کسر از دو جمله $x^۲$ و همچنین $x^۴$ در مقابل $\sqrt{x}$ صرف‌نظر می‌کنیم.

$$۲)\ \lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۴+\sqrt{x}+x^۲}{x^۳+۲\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}}=\frac{۱}{۲}$$

مثال۱۱: حد عبارت $\frac{۲\text{Arcsin}\,x}{۳x}$ وقتی $x\to ۰$ برابر است با:

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌باشد.

روش اول: وقتی $x\to ۰$، می‌توانیم از هم‌ارزی $\text{Arcsin}\,x\sim x$ استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲\text{Arcsin}\,x}{۳x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲x}{۳x}=\frac{۲}{۳}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲\text{Arcsin}\,x}{۳x}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۲}{\sqrt{۱-x^۲}}}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

مثال۱۲: حاصل $A=\lim_{x\to ۰}\frac{\text{tg}۳x-\text{tg}۲x-\text{tg}x}{\sin^۳x}$ برابر است با:

۱) ۳- ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۶-

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» به حالت $\frac{۰}{۰}$ برخورد می‌کنیم لذا داریم:

$$A=\lim_{x\to ۰}\frac{۳x+۹x^۳-۲x-\frac{۸}{۳}x^۳-x-\frac{۱}{۳}x^۳}{x^۳}\Rightarrow A=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱۸}{۳}x^۳}{x^۳}=+۶$$

مثال۱۳: حاصل $A=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos(\text{Arcsin}\,x)}{\sin^۲x}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$A=\frac{۱-\cos(\text{Arcsin}(۰))}{\sin^۲(۰)}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{x\to ۰}\begin{cases}\text{Arcsin}\,x\sim x\\ \sin^۲x\sim x^۲\end{cases}\Rightarrow A=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x^۲}{۲}}{x^۲}=\frac{۱}{۲}$$

مثال۱۴: حاصل حد $\lim_{x\to ۱}\frac{\text{Arcsin}(x^۲-۳x+۲)}{x-۱}$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌باشد. چون عبارت مقابل Arcsin به سمت صفر میل می‌کند، لذا می‌توانیم از هم ارزی $\text{Arcsin}\,u\sim u$ استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\text{Arcsin}(x^۲-۳x+۲)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۳x+۲}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-۲)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}(x-۲)=-۱$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

تذکر: اگر x به mx تبدیل شود، در کلیه بسط‌های گفته شده به جای x در طرفین mx را قرار می‌دهیم، برای مثال برای cosx داریم:

$$\cos x \sim 1-\frac{x^2}{2} \rightarrow \boxed{\cos mx \sim 1-\frac{m^2x^2}{2}}$$

به مثال مقابل توجه کنید: $A=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(mx)-1+\frac{m^2x^2}{2}}{\frac{x^4}{4!}}=\frac{0}{0}\Rightarrow A=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{m^2x^2}{2}+\frac{m^4x^4}{4!}-1+\frac{m^2x^2}{2}}{\frac{x^4}{4!}}=\lim_{x\to 0}\frac{m^4x^4}{x^4}=m^4$

نکته: اگر $u\to 0$ آنگاه هم‌ارزی $1-\cos^m u \simeq \frac{mu^2}{2}$، برقرار است.

مثال ۱۵: مقدار $\lim_{n\to\infty}\frac{n!(2n)^2}{(n+1)!(n+2)}$ برابر کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۳»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!(2n)^2}{(n+1)!(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\times 4n^2}{(n+1)n!(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{n^2}=4$$

مثال ۱۶: حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{2n^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{2}}{2n^2}=\frac{1}{4}$$

مثال ۱۷: حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{nC_n^2}{C_n^3}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) ۰

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از نکته قبل نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nC_n^2}{C_n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\times\frac{n^2}{2}}{\frac{n^3}{6}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^3}{2n^3}=3$$

مثال ۱۸: مقدار حد $\lim_{n\to\infty}\frac{n(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)}{(C_n^2)^2}$ چقدر است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۶ ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۴»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\times\frac{n^4}{4}}{(\frac{n^2}{2})^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^5}{4}}{\frac{n^4}{4}}=\lim_{n\to\infty}n=\infty$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۹: مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ∞ ۳) e ۴) $\frac{۱}{e}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با استفاده از فرمول استرلینگ نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(\frac{n}{e})^n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{e}}{n}=\frac{۱}{e}$$

مثال۲۰: حد تابع $y=\frac{(n+۲)!+(n+۱)!}{(n+۲)!-(n+۱)!}$ هنگامی که n به سمت ∞ میل کند، مساوی است با:

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+۲)!+(n+۱)!}{(n+۲)!-(n+۱)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+۲)(n+۱)!+(n+۱)!}{(n+۲)(n+۱)!-(n+۱)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+۱)!((n+۲)+۱)}{(n+۱)!((n+۲)-۱)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+۳}{n+۱}=۱$$

مثال۲۱: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱+۲+۳+\cdots+n}{C_n^۲}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که: $C_n^۲=\frac{n!}{۲!(n-۲)!}=\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{۲!(n-۲)!}=\frac{n(n-۱)}{۲}$, $۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱+۲+۳+\cdots+n}{C_n^۲}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+۱)}{۲}}{\frac{n(n-۱)}{۲}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+۱}{n-۱}=۱$$

مثال۲۲: حاصل حد $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{۱}{n^{۱۶}}(۱^{۱۵}+۲^{۱۵}+\cdots+n^{۱۵})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n^{۱۶}}(۱^{۱۵}+۲^{۱۵}+\cdots+n^{۱۵})\sim\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n^{۱۶}}(\frac{n^{۱۶}}{۱۶})=\frac{۱}{۱۶}$$

۵) وقتی $u\to\infty$، آنگاه همواره هم‌ارزی $\lim\lfloor u\rfloor=\lim u$ برقرار است. (یعنی می‌توانیم علامت جزء صحیح را برداریم)

مثال۲۳: حاصل $C=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^۵}}{\sqrt[n]{۶n+۳}}$ کدام است ؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $+\infty$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» دقت شود همواره اگر زیر رادیکال یک چند جمله‌ای مانند $f(n)$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(n)}=۱$ است:

$$\begin{cases}A=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^۵}\quad\Rightarrow A=۱\\ B=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{۶n+۳}\simeq\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{۶n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{۶}\times\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=۱\times۱=۱\end{cases}\Rightarrow C=\frac{A}{B}=\frac{۱}{۱}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۲۴: حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{۲^{n+۱}+۳^{n+۱}}{۲^{n}+۳^{n}}$ برابر است با :

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۳ ۴) ۱۳

پاسخ : گزینه «۳»

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۲^{n+۱}+۳^{n+۱}}{۲^{n}+۳^{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۳^{n+۱}}{۳^{n}}=۳$$

مثال۲۵: مقدار $\lim\limits_{x\to\infty}x^{۲}[\cosh\frac{a}{x}-۱]$ کدام است ؟

۱) $\frac{a}{۲}$ ۲) $\frac{a^{۲}}{۲}$ ۳) ۰ ۴) ۱

پاسخ : گزینه «۲» حالت $\infty\times۰$ می‌باشد لذا داریم :

$$\lim_{x\to\infty}x^{۲}[\cosh\frac{a}{x}-۱]=\lim_{x\to\infty}\frac{\cosh\frac{a}{x}-۱}{\frac{۱}{x^{۲}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-\frac{a}{x^{۲}})\sinh\frac{a}{x}}{-\frac{۲}{x^{۳}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-\frac{a}{x^{۲}})(\frac{a}{x})}{-\frac{۲}{x^{۳}}}=\frac{a^{۲}}{۲}$$

مثال۲۶: $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})(\sqrt{n+\frac{۱}{۲}})$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۲» همان‌طور که مشاهده می‌شود، حالت مبهم $\infty\times(\infty-\infty)$ می‌باشد و با توجه به اینکه رادیکال داریم و اگر در پرانتز اول بخواهیم از هم‌ارزی رادیکال‌ها استفاده کنیم، جمع جبری صفر می‌شود و می‌دانیم در این شرایط استفاده از هم‌ارزی صحیح نیست لذا صورت و مخرج را در مزدوج عبارت $\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})\sqrt{n+\frac{۱}{۲}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})(\sqrt{n+۱}+\sqrt{n})\sqrt{n+\frac{۱}{۲}}}{(\sqrt{n+۱}+\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+۱)-n)\sqrt{n+\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}\simeq\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{۱}{۲}$$

مثال۲۷: حدّ تابع $y=(۱+\frac{۲}{x})^{۱+x}$ وقتی که $x\to\infty$ چیست؟

۱) e ۲) $e^{۲}$ ۳) $e^{۲}-۱$ ۴) $e-۱$

پاسخ : گزینه «۲» صورت مبهم ۱^{∞} است.

$$\lim_{x\to\infty}(۱+\frac{۲}{x})^{۱+x}=\lim_{x\to\infty}e^{(۱+x)(۱+\frac{۲}{x}-۱)}=\lim_{x\to\infty}e^{(۱+x)(\frac{۲}{x})}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{۲+۲x}{x}}=e^{۲}$$

مثال۲۸: حد عبارت $\lim\limits_{x\to\infty}(۱-\frac{۲}{x})^{۲x}$ ، کدام است؟

۱) ۱ ۲) e ۳) $e^{-۲}$ ۴) $e^{-۴}$

پاسخ : گزینه «۴»

روش اول: صورت مبهم ۱^{∞} می‌باشد، بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty}(۱-\frac{۲}{x})^{۲x}=\lim_{x\to\infty}e^{۲x(۱-\frac{۲}{x}-۱)}=\lim_{x\to\infty}e^{۲x(\frac{-۲}{x})}=e^{-۴}$$

روش دوم: از فرمول $\lim\limits_{x\to\infty}(۱+\frac{a}{x})^{bx}=e^{ab}$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty}(۱-\frac{۲}{x})^{۲x}=e^{(-۲)(۲)}=e^{-۴}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۲۹: حد عبارت $\lim_{x\to ۰}(۱+x)^{\frac{۱}{۲x}}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{e}$ ۳) $e^{۲}$ ۴) ∞

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

روش اول: صورت مبهم ۱^{∞} می باشد. $\lim_{x\to ۰}(۱+x)^{\frac{۱}{۲x}}=\lim_{x\to ۰}e^{\frac{۱}{۲x}(۱+x-۱)}=\lim_{x\to ۰}e^{\frac{۱}{۲x}\times x}=e^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{e}$

روش دوم: با استفاده از فرمول $\lim_{x\to ۰}(۱+ax)^{\frac{b}{x}}=e^{ab}$، نتیجه می‌شود: $\lim_{x\to ۰}(۱+x)^{\frac{۱}{۲x}}=e^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{e}$

مثال۳۰: اگر $\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{an})^{n}=e^{۳}$ ، باشد مقدار a کدام است؟

۱) e ۲) $\frac{۱}{e}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۳

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با استفاده از فرمول $\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{a}{n})^{bn}=e^{ab}$ ، نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{an})^{n}=e^{\frac{۱}{a}}\Rightarrow e^{\frac{۱}{a}}=e^{۳}\Rightarrow\frac{۱}{a}=۳\Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

مثال۳۱: حد عبارت $\lim_{x\to ۰^{+}}\left(\frac{۲^{x}+۳^{x}}{۲}\right)^{\frac{۱}{x}}$ را به دست آورید:

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» صورت مبهم ۱^{∞} است.

$$\lim_{x\to ۰^{+}}(\frac{۲^{x}+۳^{x}}{۲})^{\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to ۰^{+}}e^{\frac{۱}{x}(\frac{۲^{x}+۳^{x}}{۲}-۱)}=\lim_{x\to ۰^{+}}e^{\frac{۱}{x}(\frac{۲^{x}+۳^{x}-۲}{۲})}=\lim_{x\to ۰^{+}}e^{\frac{۲^{x}+۳^{x}-۲}{۲x}}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}$$

$$\lim_{x\to ۰^{+}}e^{\frac{۲^{x}\ln ۲+۳^{x}\ln ۳}{۲}}=e^{\frac{۲^{۰}\ln ۲+۳^{۰}\ln ۳}{۲}}=e^{\frac{\ln ۲+\ln ۳}{۲}}=e^{\frac{\ln ۶}{۲}}=e^{\ln\sqrt{۶}}=\sqrt{۶}$$

مثال۳۲: مقدار $\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{\ln x}{x}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) ۱ ۳) $-\infty$ ۴) -۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» $\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to ۰^{+}}(\ln x)\times\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۱}{x}\xrightarrow{\text{طبق خاصیت (۶)}}A=(-\infty)(+\infty)=(-\infty)$

مثال۳۳: حد چپ تابعی به معادله $y=\frac{۲-۲x}{۱+۴^{۱/x}}$ در $x=۰$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» $\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{۲-۲x}{۱+۴^{\frac{۱}{x}}}=\frac{۲-۲\times ۰}{۱+۴^{\frac{۱}{۰^{-}}}}=\frac{۲}{۱+۴^{-\infty}}=\frac{۲}{۱+۰}=۲$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۳۴: اگر $f(x)=e^{\frac{۱}{x}}-e^{-x}$ باشد، مقدار حد زیر چند است؟

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۱ ۴) صفر

☑ **پاسخ** : گزینه «۳»

$$\lim_{x\to+\infty}(e^{\frac{۱}{x}}-e^{-x})=e^{\frac{۱}{\infty}}-e^{-\infty}=e^{۰}-e^{-\infty}=۱-۰=۱$$

مثال۳۵: تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{bx}{tgx}+Ln(e+x) & x>۰\\ ۳a+\lfloor x+۲\rfloor & x=۰\\ \frac{Arc\sin ax}{x}+|x-۳| & x<۰\end{cases}$ در $x_۰=۰$ پیوسته است. حاصل عبارت $(a+b)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳- ۳) ۲- ۴) ۳

☑ **پاسخ** : گزینه «۴»

$$\left.\begin{aligned} f(۰)&=۳a+\lfloor ۰+۲\rfloor=۳a+۲\\ f(۰^+)&=\lim_{x\to۰^+}[\frac{bx}{tgx}+Ln(e+x)]=b+۱\\ f(۰^-)&=\lim_{x\to۰^-}\frac{Arc\sin ax}{x}+|x-۳|=a+۳\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}۳a+۲=a+۳\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\\ ۳a+۲=b+۱\Rightarrow b=\frac{۵}{۲}\end{cases}\Rightarrow a+b=۳$$

مثال۳۶: مقدار a چقدر باشد تا تابع $f(x)=\begin{cases}a\log_۳(x+۱)^{\pi} & x\geq ۲\\ ۱+a\,Arc\sin(\frac{x}{۲}) & -۱\leq x\leq ۲\end{cases}$ در $x=۲$ پیوسته باشد؟

۱) ۱- ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{\pi}$ ۴) π

☑ **پاسخ** : گزینه «۳»

$$f(x)=\begin{cases}a\log_۳(x+۱)^{\pi} & ;\ x\geq ۲\\ ۱+a\,Arc\sin(\frac{x}{۲}) & ;\ -۱\leq x\leq ۲\end{cases}\xrightarrow{\text{ضابطه را کمی ساده می‌کنیم}}f(x)=\begin{cases}\pi a\log_۳(x+۱) & ;\ x\geq ۲\\ ۱+a\,Arc\sin(\frac{x}{۲}) & ;\ -۱\leq x\leq ۲\end{cases}$$

برای اینکه تابع $f(x)$ در نقطه $x=۲$ پیوسته باشد، باید حد چپ و راست تابع در نقطه $x=۲$ با هم برابر باشند:

$$\lim_{x\to۲^+}f(x)=\pi a\log_۳(۲+۱)=\pi a\times\log_۳ ۳=\pi a\ ,\ \lim_{x\to۲^-}f(x)=۱+a\,Arc\sin\frac{۲}{۲}=۱+a\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow \pi a=۱+a\times\frac{\pi}{۲}\Rightarrow a(\pi-\frac{\pi}{۲})=۱\Rightarrow a(\frac{\pi}{۲})=۱\Rightarrow a=\frac{۲}{\pi}$$

مثال۳۷: تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۴-x^۲} & ,\ |x|\leq ۲\\ \frac{۱}{۲}x-۱ & ,\ |x|>۲\end{cases}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به نکته فوق تابع در دامنه خود یعنی $[-۲,۲]$ پیوسته می‌باشد اما در نقاط مرزی باید پیوستگی بررسی شود:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-} \sqrt{۴-x^۲} = ۰ \\ \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^+} (\frac{۱}{۲}x - ۱) = ۰ \end{cases} , \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to (-۲)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to (-۲)^-} (\frac{x}{۲} - ۱) = -۲ \\ \lim\limits_{x\to (-۲)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to (-۲)^+} \sqrt{۴-x^۲} = ۰ \end{cases}$$

در نقطه $x=-۲$ حدود چپ و راست با هم برابر نیستند بنابراین تابع در این نقطه پیوسته نیست.

مثال۳۸: طول نقطه گسستگی تابع f به ضابطه $y=\frac{x}{e^x-۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $Ln۲$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$e^x - ۲ = ۰ \Rightarrow e^x = ۲ \Rightarrow x = Ln۲$$

مثال۳۹: طول نقطه انفصال نمودار تابع $f(x)=\frac{x-۲}{\ln(x+۲\sqrt{x})}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $-۱+\sqrt{۲}$ ۳) $۳+۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳-۲\sqrt{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» ریشه‌های مخرج کسر نقاط انفصال تابع می‌باشند.

$$Ln(x+۲\sqrt{x}) = ۰ \Rightarrow x+۲\sqrt{x} = ۱ \Rightarrow ۲\sqrt{x} = ۱-x \Rightarrow (۲\sqrt{x})^۲ = (۱-x)^۲$$

$$۴x = ۱ + x^۲ - ۲x \Rightarrow x^۲ - ۶x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۶ \pm \sqrt{۳۶-۴}}{۲} = ۳ \pm ۲\sqrt{۲}$$

توجه کنید که تنها ریشه $x=۳-۲\sqrt{۲}$ قابل قبول است و $x=۳+۲\sqrt{۲}$ غیر قابل قبول است.

مثال۴۰: در فاصله $[۰,۲]$ تابع $f(x)=\lfloor x \rfloor (x-۱)+۱$ چند نقطه گسستگی دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» نقاط درون بازه که عبارت درون جزء صحیح یعنی x به ازای آنها صحیح شود، اغلب نقاط گسستگی می‌باشند، بنابراین نقاط $x=۰,۱,۲$ می‌توانند نقاط انفصال باشند.

به دلیل وجود عامل $(x-۱)$ که در $\lfloor x \rfloor$ ضرب شده باید نقطه $x=۱$ را مورد بررسی قرار داد و نقاط $x=۰$ و $x=۲$ نیز به دلیل اینکه نقاط انتهایی بازه می‌باشند، باید مورد بررسی قرار گیرند.

$$f(۰)=۱ \,,\, f(۰^+) = \lim_{x\to ۰^+} (\lfloor x \rfloor (x-۱)+۱) = \lim_{x\to ۰^+} (\lfloor ۰^+ \rfloor (x-۱)+۱) = ۱ \Rightarrow f \text{ در } ۰ \text{ پیوسته}$$

$$f(۱)=۱ \,,\, f(۱^+) = \lim_{x\to ۱^+} (\lfloor x \rfloor (x-۱)+۱) = ۱ , f(۱^-) = \lim_{x\to ۱^-} (\lfloor x \rfloor (x-۱)+۱) = ۱ \Rightarrow f \text{ در } ۱ \text{ پیوسته}$$

$$f(۲)=۳ \,,\, f(۲^-) = \lim_{x\to ۲^-} (\lfloor x \rfloor (x-۱)+۱) = \lim_{x\to ۲^-} (\lfloor ۲^- \rfloor \underbrace{(x-۱)}_{\text{یک}}+۱) = ۲ \Rightarrow f \text{ در } ۲ \text{ ناپیوسته}$$

مثال۴۱: تابع $y=x-\cos x$ در کدام بازه ریشه دارد؟

۱) $[۰,\frac{\pi}{۶}]$ ۲) $[\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۴}]$ ۳) $[\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۳}]$ ۴) $[\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۲}]$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$f(۰) = -۱ \;,\; f(\frac{\pi}{۶}) \approx -۰.۳ < ۰ \;,\; f(\frac{\pi}{۴}) \approx ۰.۰۸ > ۰ \Rightarrow x \in [\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۴}] \Rightarrow f(x) = ۰$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۴۲: اگر معادله مجانب افقی نمودار تابع با ضابطه $y=\sqrt{x^۲-x+۱}-ax-b$ وقتی $x\to-\infty$ برابر $y=۰$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^۲-x+۱}-ax-b)=\lim_{x\to-\infty}(|x-\frac{۱}{۲}|-ax-b)=\lim_{x\to-\infty}(\frac{۱}{۲}-x-ax-b)$$

$$\lim_{x\to-\infty}[(-۱-a)x+\frac{۱}{۲}-b]\xrightarrow{\text{مجانب افقی است } y=۰}\begin{cases}-a-۱=۰\\ \frac{۱}{۲}-b=۰\end{cases}\Rightarrow a=-۱\ ,\ b=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a+b=-\frac{۱}{۲}$$

مثال۴۳: مجانب‌های تابع $f(x)=\log\frac{۱-x}{۱+x}$ خط $y=\frac{۳}{۴}x$ را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. اندازه پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» می‌دانیم وقتی $x\to۱^-$ آنگاه $\frac{۱-x}{۱+x}\to۰^+$ و در واقع $f(۱)=\log(۰^+)=-\infty$ خواهد شد. همچنین وقتی $x\to(-۱)^+$ آنگاه $(\frac{۱-x}{۱+x})\to+\infty$ و در واقع $f(-۱)=\log(+\infty)=+\infty$ خواهد شد. پس $x=۱$ و $x=-۱$ هر دو مجانب قائم تابع هستند. تابع مجانب افقی و مایل ندارد (چون اگر $x\to\pm\infty$ میل کند آنگاه عبارت جلوی لگاریتم مقداری منفی می‌شود) پس تابع همان دو مجانب $x=\pm۱$ را دارد و باید محل برخورد دو نقطه را با خط $y=\frac{۳}{۴}x$ به‌دست بیاوریم:

$$x=۱\Rightarrow y=\frac{۳}{۴}\times۱=\frac{۳}{۴}\Rightarrow A(۱,\frac{۳}{۴})$$

$$x=-۱\Rightarrow y=\frac{۳}{۴}(-۱)=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow B(-۱,-\frac{۳}{۴})$$

$$\overline{AB}=\sqrt{(y_B-y_A)^۲+(x_B-x_A)^۲}=\sqrt{[\frac{۳}{۴}-(-\frac{۳}{۴})]^۲+[۱-(-۱)]^۲}=\sqrt{(\frac{۶}{۴})^۲+۲^۲}=\sqrt{(۴+\frac{۹}{۴})}=\sqrt{\frac{۲۵}{۴}}=\frac{۵}{۲}$$

مثال۴۴: نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۱+x^۲}\,\text{Arcsin}\frac{۱}{x}$ از نظر خط مجانب کدام وضعیت را دارد؟

۱) فاقد مجانب ۲) دو خط مایل ۳) دو خط افقی ۴) یک خط افقی و یک خط مایل

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» اولاً به ازای هیچ عددی برای x، $f(x)$ به سمت $\pm\infty$ نمی‌رود پس تابع مجانب قائم ندارد.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}[\sqrt{۱+x^۲}\ \text{Arcsin}(\frac{۱}{x})]=+\infty\times۰$$

دقت کنید اگر $u\to۰$ آنگاه $\text{Arcsin}\,u\sim u$ در این تست وقتی $x\to\infty$ آنگاه $\frac{۱}{x}\to۰$ و لذا داریم:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{۱+x^۲}.\text{Arcsin}(\frac{۱}{x}))=\lim_{x\to\infty}|x|.\frac{۱}{x}=\begin{cases}۱ & x\to+\infty \text{ اگر}\\ -۱ & x\to-\infty \text{ اگر}\end{cases}$$

پس تابع دو مجانب افقی دارد.

مثال۴۵: خط مجانب منحنی به معادلهٔ $y^۳-۸x^۳+۲x^۲=۰$ خود منحنی را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱}{۲۴}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$y^۳=۸x^۳-۲x^۲\Rightarrow y=\sqrt[۳]{۸x^۳-۲x^۲}\sim۲(x-\frac{۲}{۲۴})$$

بنابراین معادله مجانب مایل منحنی $y=۲x-\frac{۱}{۶}$ می‌باشد.

$$\begin{cases}y=۲x-\frac{۱}{۶}\\ y^۳=۸x^۳-۲x^۲\end{cases}\Rightarrow ۸x^۳-۲x^۲=(۲x-\frac{۱}{۶})^۳\Rightarrow\frac{۱}{۶}x-\frac{۱}{۲۱۶}=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۳۶}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۴۶: اگر $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ و $g(x)=2^x$ آنگاه تعداد خطوط مجانب نمودار تابع fog کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به ضابطه تابع fog داریم:

$$fog(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} fog(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x-1}{2^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x}{2^x}=1 & \Rightarrow y=1 \quad \text{مجانب افقی} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} fog(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{2^x-1}{2^x+1})=\frac{2^{-\infty}-1}{2^{-\infty}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1 & \Rightarrow y=-1 \quad \text{مجانب افقی} \end{cases}$$

با توجه به اینکه مخرج کسر هیچگاه صفر نمی‌شود، لذا تابع مجانب قائم ندارد.

مثال ۴۷: منحنی به معادله $y=\frac{\sqrt{-x^2+2x}}{x^2-1}$ چند خط مجانب دارد ؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مجانبهای قائم منحنی : $x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \to x=1 \ , \ x=-1$

$x=-1$ مقدار زیر رادیکال صورت را منفی می‌کند لذا $x=-1$ نمی‌تواند مجانب قائم باشد از طرفی x نمی‌تواند به سمت بی نهایت میل کند لذا تابع مجانب مایل و افقی ندارد.

مثال ۴۸: حد عبارت $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{2x}$ ، کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۵)

۱) ۱ ۲) e ۳) e^{-2} ۴) e^{-4}

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

روش اول: صورت مبهم 1^∞می‌باشد، بنابراین: $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{2x(1-\frac{2}{x}-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{2x(\frac{-2}{x})}=e^{-4}$

روش دوم: از فرمول $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^{bx}=e^{ab}$ استفاده می‌کنیم: $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{2x}=e^{(-2)(2)}=e^{-4}$

مثال ۴۹: حد عبارت $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{2x}}$، کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۵)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{e}$ ۳) e^2 ۴) ∞

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

روش اول: صورت مبهم 1^∞ می باشد. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{2x}(1+x-1)}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{2x}\times x}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

روش دوم: با استفاده از فرمول $\lim\limits_{x\to0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}=e^{ab}$، نتیجه می‌شود: $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{2x}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

مثال ۵۰: حد عبارت $\lim\limits_{x\to-1}\frac{Ln(x+2)}{x+\sqrt[3]{x}}$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۶)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{Ln(x+2)}{x+\sqrt[3]{x}}=\frac{Ln(-1+2)}{-1+\sqrt[3]{-1}}=\frac{Ln1}{-1-1}=\frac{0}{2}=0$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۵۱: حد چپ تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x+1}$ در $x=1$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۶)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) ۰ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x+1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-\lfloor 1^-\rfloor}{x+1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x+1}\overset{x=1}{=\!=}\frac{1}{2}$$

مثال۵۲: حد راست تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x-1}$ در $x=1$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-\lfloor 1^+\rfloor}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=1$$

مثال۵۳: مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x}{1+x})^{x^2}$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۷)

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) e

پاسخ: گزینه «۲» صورت مبهم 1^∞ می‌باشد.

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{x}{1+x})^{x^2}=1^\infty=\lim_{x\to\infty}e^{x^2(\frac{x}{1+x}-1)}=\lim_{x\to\infty}e^{x^2(\frac{x-1-x}{1+x})}=\lim_{x\to\infty}e^{x^2(\frac{-1}{1+x})}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-x^2}{1+x}}=\lim_{x\to\infty}e^{-x}=e^{-\infty}=0$$

مثال۵۴: نقطه گسستگی تابع حقیقی به معادله $y=\frac{2+2x}{x-4^{1/x}}$ با کدام طول است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۷)

۱) ۰٫۲ ۲) ۰٫۱ ۳) $-1,1$ ۴) $-1,2$

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم ریشه‌های مخرج کسر، نقاط گسستگی تابع می‌باشند. $x-4^{\frac{1}{x}}=0\Rightarrow 4^{\frac{1}{x}}=x\Rightarrow x^x=4=2^2\Rightarrow x=2$

و ریشه مخرج کسر $\frac{1}{x}$، $x=0$ است. پس نقاط گسستگی ۲ و $x=0$ می‌باشند.

مثال۵۵: مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!(2n)^2}{(n+1)!(n+2)}$ برابر کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۸)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۳»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!(2n)^2}{(n+1)!(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\times 4n^2}{(n+1)n!(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{n^2}=4$$

مثال۵۶: مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}C_n^2}{1+2+\cdots+n}$، برابر کدام است؟ $(C_n^2=\binom{n}{2})$ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۸)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۱»

روش اول: ابتدا توجه کنید که:

$$C_n^2=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2},\quad 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}C_n^2}{1+2+\cdots+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}.\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n-1}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

روش دوم: وقتی $n \to \infty$، هم ارزیهای $C_n^2 \sim \frac{n^2}{2}$ و $1+2+\cdots+n \sim \frac{n^2}{2}$ برقرارند، لذا:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}C_n^2}{1+2+\cdots+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}.\frac{n^2}{2}}{\frac{n^2}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

مثال۵۷: نقطه گسستگی تابع $y = \frac{3^x - 1}{4^x - 8}$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\ln 2$ ۳) $2 \ln 3$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۱»

$$4^x - 8 = 0 \Rightarrow 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

مثال۵۸: طول نقاط گسستگی تابع $y = \frac{x^2}{e^{x^2} - e^{2x}}$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۹)

۱) ۲ و۱ ۲) ۲ و ۰ ۳) ۲- و ۰ ۴) ۲- و۱-

پاسخ: گزینه «۲»

$$e^{x^2} - e^{2x} = 0 \Rightarrow e^{x^2} = e^{2x} \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x = 0, 2$$

مثال۵۹: حد عبارت $\frac{tg7x}{tg2x}$ وقتی $x \to 0$ برابر است با: (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۰)

۱) ۵۰۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{7}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌باشد.

روش اول:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg7x}{tg2x} \xrightarrow{\text{هم ارزی}} \lim_{x\to 0} \frac{7x}{2x} = \frac{7}{2}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg7x}{tg2x} \xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x\to 0} \frac{7(1+tg^2 7x)}{2(1+tg^2 2x)} = \frac{7}{2}$$

مثال۶۰: اگر $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} u_n$ برابر است با: (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۰)

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱- ۴) حد ندارد

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $-|u_n| \le u_n \le |u_n|$، بنابراین طبق قضیه ساندویچ $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

مثال۶۱: مقدار حد، $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$ ، کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۱)

۱) e ۲) ∞ ۳) ۱ ۴) e^2

پاسخ: گزینه «۳» صورت مبهم 1^∞ است، لذا:

$$\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x^2})^x = \lim_{x\to\infty} e^{x.\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

مثال۶۲: حاصل $\lim_{x\to\infty} (\frac{x+1}{x-1})^x$، کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) e ۳) e^{-1} ۴) e^2

پاسخ: گزینه «۴» صورت مبهم 1^∞ می‌باشد.

$$\lim_{x\to\infty} (\frac{x+1}{x-1})^x = \lim_{x\to\infty} x(\frac{x+1}{x-1}-1) = \lim_{x\to\infty} e^{x(\frac{x+1-x+1}{x-1})} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2x}{x-1}} = e^2$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۶۳: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+3x)^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۲)

۱) e ۲) e^2 ۳) e^3 ۴) e^4

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» صورت مبهم 1^∞ می‌باشد.

$$\lim_{x\to 0}(e^x+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}(e^x+3x-1)}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{e^x+3x-1}{x}}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to 0}e^{\frac{e^x+3-0}{1}}=e^4$$

مثال ۶۴: حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{1+x})^{x^2}$ برابر است با: (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۲)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) e ۴) $\frac{1}{e}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» صورت مبهم 1^∞ است.

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{1+x})=\lim_{x\to\infty}e^{x^2(\frac{x}{x+1}-1)}=\lim_{x\to\infty}e^{x^2(\frac{x-x-1}{x+1})}=\lim_{x\to\infty}e^{x^2(\frac{-1}{x+1})}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-x^2}{x+1}}=\lim_{x\to\infty}e^{-x}=e^{-\infty}=0$$

مثال ۶۵: اگر $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$ برای هر x حقیقی و... ۳ و ۲ و ۱ $= n$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۲)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) موجود نیست

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» می‌دانیم تابع سینوس همواره مقداری بین ۱- و ۱ دارد، بنابراین $-1\le \sin nx\le 1$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\text{عبارتی محدود بین ۱- و ۱}}{\infty}=0$$

مثال ۶۶: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\ln(x+1)}$ چقدر است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۲)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) تعریف نشده است

☑ **پاسخ:** هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\ln(x+1)}=\frac{\sqrt{0^2+1}}{\ln(0+1)}=\frac{\sqrt{1}}{\ln 1}=\frac{1}{0}=\infty$

توجه: خواننده ممکن است تصور کند که گزینه (۴) می‌تواند گزینه درست باشد، ولی مابین تعریف نشده و بینهایت تفاوت وجود دارد.

مثال ۶۷: مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ وقتی $n\to\infty$ کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۲)

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) ∞

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» وقتی $n\to\infty$ ، $\frac{1}{n}\to 0$ و بنابراین هم‌ارزی $\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$ برقرار است.

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim_{n\to\infty}n\times\frac{1}{n}=1$$

مثال ۶۸: مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x-3}{x+1})^{x+2}$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۲)

۱) $1-e^2$ ۲) $1-e$ ۳) e^{-4} ۴) e^{-2}

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» صورت مبهم 1^∞ است.

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x-3}{x+1})^{x+2}=\lim_{x\to\infty}e^{(x+2)(\frac{x-3}{x+1}-1)}=\lim_{x\to\infty}e^{(x+2)(\frac{x-3-x-1}{x+1})}=\lim_{x\to\infty}^{(x+2)(\frac{-4}{x+1})}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-4x-8}{x+1}}=e^{-4}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۶۹: کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۲)

۱) اگر $p>0$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1$

۲) اگر $p>0$ و α حقیقی باشد، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{(1+p)^n}=0$

۳) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

۴) $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$ برای x حقیقی

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اگر $-1<x\le 0$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$ و اگر $x>1$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$، لازم به ذکر است که اگر $x<0$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}x^n$ وجود ندارد.

مثال۷۰: حد عبارت $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{3x})^{\frac{1}{4}x}$ برابر است با: (حسابداری ـ آزاد ۸۳)

۱) $e^{\frac{1}{4}}$ ۲) $e^{\frac{1}{3}}$ ۳) e ۴) $e^{\frac{1}{12}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از فرمول $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^{bx}=e^{ab}$، نتیجه می‌شود: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{3x})^{\frac{1}{4}x}=e^{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}=e^{\frac{1}{12}}$

مثال۷۱: به ازاء چه مقداری از a تابع $f(x)$ روی فاصلهٔ $(0$ و $+\infty)$ پیوسته است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۳)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}} & 0<x<a\\ \frac{1}{4}x\sqrt{x} & x\ge a\end{cases}$$

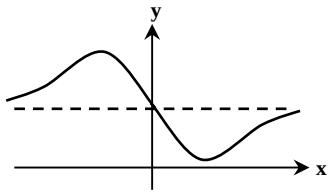
۱) $a=1$ ۲) $a=\pm 2$ ۳) $a=2$ ۴) $a=3$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای پیوستگی تابع f در $x=a$، لازم است حد چپ و راست f در a با برابر باشد.

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^-}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}\frac{1}{4}x\sqrt{x}=\frac{1}{4}a\sqrt{a}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{4}a\sqrt{a}\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=2,-2\Rightarrow a=2$$ قابل قبول

مثال۷۲: شکل زیر نمایش تابعی با ضابطهٔ $y=\frac{x^2+ax+b}{2x^2+x+1}$ است مقدار a کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۳)



۱) ۲

۲) $\sqrt{2}$

۳) $-\sqrt{2}$

۴) -2

☑ **پاسخ:** هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

مثال۷۳: حد عبارت $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x-2})^{2x+1}$ برابر است با: (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱ ۲) e ۳) e^2 ۴) e^6

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» صورت مبهم 1^{∞} است.

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x-2})^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}e^{(2x+1)(\frac{x+1}{x-2}-1)}=\lim_{x\to\infty}e^{(2x+1)(\frac{x+1-x+2}{x-2})}=\lim_{x\to\infty}e^{(2x+1)(\frac{3}{x-2})}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{6x+3}{x-2}}=e^6$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۷۴: حاصل $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{x+\sqrt{۲-x}}{x^۲+۲x}$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۴)

۱) $-\dfrac{۳}{۴}$ ۲) $-\dfrac{۳}{۸}$ ۳) $\dfrac{۳}{۴}$ ۴) $\dfrac{۳}{۸}$

پاسخ: گزینه «۲» صورت مبهم $\dfrac{۰}{۰}$ است.

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x+\sqrt{۲-x}}{x^۲+۲x}\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to -۲}\frac{۱+\frac{-۱}{۲\sqrt{۲-x}}}{۲x+۲}=\frac{۱+\frac{-۱}{۲\sqrt{۲-(-۲)}}}{۲(-۲)+۲}=\frac{-۳}{۸}$$

مثال۷۵: اگر $f(x)=\sqrt[۳]{(x^۲-۲x)^۲}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۴+h)-f(۴)}{h}$ برابر کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۴)

۱) $\dfrac{۱}{۳}$ ۲) $\dfrac{۲}{۳}$ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۴»

روش اول: حد موردنظر برابر $f'(۴)$ می‌باشد، لذا:

$$f(x)=(x^۲-۲x)^{\frac{۲}{۳}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲}{۳}(x^۲-۲x)^{\frac{-۱}{۳}}(۲x-۲)\Rightarrow f'(۴)=۲$$

روش دوم: حد داده شده به صورت مبهم $\dfrac{۰}{۰}$ است، لذا برای محاسبه آن از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۴+h)-f(۴)}{h}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{h\to ۰}\frac{f'(۴+h)}{۱}=f'(۴)$$

مثال۷۶: حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}(۱+\dfrac{۱}{x^۲})^x$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۴)

۱) ۱ ۲) e ۳) $\dfrac{۱}{e}$ ۴) $\dfrac{۱}{۲e}$

پاسخ: گزینه «۱» صورت مبهم ۱^∞ است.

$$\lim_{x\to\infty}(۱+\frac{۱}{x^۲})=\lim_{x\to\infty}e^{x(۱+\frac{۱}{x^۲}-۱)}=\lim_{x\to\infty}e^{x(\frac{۱}{x^۲})}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{۱}{x}}=e^۰=۱$$

مثال۷۷: طول نقطه انفصال نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x-۲}{\ln(x+۲\sqrt{x})}$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۴)

۱) ۲ ۲) $-۱+\sqrt{۲}$ ۳) $۳+۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳-۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه «۴» ریشه‌های مخرج کسر نقاط انفصال تابع می‌باشند.

$$\ln(x+۲\sqrt{x})=۰\Rightarrow x+۲\sqrt{x}=۱\Rightarrow ۲\sqrt{x}=۱-x\Rightarrow(۲\sqrt{x})^۲=(۱-x)^۲$$

$$۴x=۱+x^۲-۲x\Rightarrow x^۲-۶x+۱=۰\Rightarrow x=\frac{۶\pm\sqrt{۳۶-۴}}{۲}=۳\pm۲\sqrt{۲}$$

توجه کنید که تنها ریشه $x=۳-۲\sqrt{۲}$ قابل قبول است و $x=۳+۲\sqrt{۲}$ غیر قابل قبول است.

مثال۷۸: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{۱+۲+۳+\cdots+n}{C_n^۲}$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۴)

۱) ۰ ۲) $\dfrac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۳»

ابتدا توجه کنید که:

$$۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}\quad,\quad C_n^۲=\frac{n!}{۲!(n-۲)!}=\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{۲!(n-۲)!}=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱+۲+۳+\cdots+n}{C_n^۲}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+۱)}{۲}}{\frac{n(n-۱)}{۲}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+۱}{n-۱}=۱$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۷۹: حاصل $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{3x}}$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۵)

۱) $e^{\frac{3}{4}}$ ۲) $e^{\frac{4}{3}}$ ۳) $\sqrt[3]{e}$ ۴) $\sqrt[4]{e}$

پاسخ: گزینه «۴» احتمالاً منظور طراح $x\to 0$ بوده است، در این صورت حد به صورت مبهم 1^{∞} در می‌آید و برای محاسبه آن از فرمول $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}=e^{ab}$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0}(1+\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{3x}}=e^{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{e}$$

مثال۸۰: اگر تابع $F(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 1\\ ax^2+x & x>1\end{cases}$ در $x=1$ پیوسته باشد، مقدار **a** چیست؟ (حسابداری ـ آزاد ۸۵)

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱»

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}F(x)&=\lim_{x\to 1^-}(2x-1)=2\times 1-1=1\\ \lim_{x\to 1^+}F(x)&=\lim_{x\to 1^+}(ax^2+x)=a+1\end{aligned}\right\}\Rightarrow a+1=1\Rightarrow a=0$$

مثال۸۱: مقدار $\lim_{n\to\infty}\frac{4-3^{n+1}}{5-2\times 3^n}$ کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۵)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4-3^{n+1}}{5-2\times 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3^{n+1}}{-2\times 3^n}=\frac{3}{2}$$

مثال۸۲: مقدار $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}\sin(2^n\pi)}{(2-n)(n+1)}$ کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۵)

۱) ۲ ۲) صفر ۳) $\sin 2n$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» توجه کنید که وقتی $n\to\infty$ میل کند، رشد مخرج کسر از صورت کسر بیشتر است.

مثال۸۳: چند تا از حدهای زیر وجود دارد؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۵)

الف) $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-6x+9}$ ب) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x-3}$ ج) $\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x^2-3x+2}$ د) $\lim_{x\to 0}\frac{2x-5x^2}{x}$

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۴» حدهای (ب)، (ج) و(د) وجود دارند ولی مقدار حد الف وجود ندارد.

بررسی گزینه (الف):
$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-6x+9}\overset{\frac{0}{0}}{\overset{HOP}{=}}\lim_{x\to 3}\frac{1}{2x-6}=\pm\infty$$

بررسی گزینه (ب):
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x-3}\overset{\frac{0}{0}}{\overset{HOP}{=}}\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{1}=0$$

بررسی گزینه (ج):
$$\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x^2-3x+2}=\frac{3-2}{9-9+2}=\frac{1}{2}$$

بررسی گزینه (د):
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-5x^2}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\overset{HOP}{=}}\lim_{x\to 0}=\frac{2-10}{1}=2$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۸۴: تابع $f(x)=\begin{cases} x & x\in z \\ ۱ & x\notin z \end{cases}$ در کدامیک از نقاط زیر پیوسته است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۵)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» توابع به شکل $h(x)=\begin{cases} f(x) & x\in Z \\ g(x) & x\notin Z \end{cases}$ در ریشه‌های $f(x)=g(x)$ پیوسته می‌باشند. بنابراین تابع f در $x=۱$ پیوسته است.

مثال۸۵: طول نقطه گسستگی تابع $y=Ln(x^۳-۱)^۲$ چیست؟ (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۵)

۱) -۱ ۲) صفر ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴» $(x^۳-۱)^۲=۰\Rightarrow x^۳-۱=۰\Rightarrow x^۳=۱\Rightarrow x=۱$

مثال۸۶: مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{۵^n+۳^{۲n}-۷^n}$ کدام است؟ (مدیریت تکنولوژی ـ آزاد ۸۵)

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۱» $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{۵^n+۳^{۲n}-۷^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{۳^{۲n}}=۹$

مثال۸۷: مقدار $\lim\limits_{k\to۰}\frac{۱-\frac{۱}{k^۲}}{۱-\frac{۱}{k}}$ کدام است؟ (مدیریت تکنولوژی ـ آزاد ۸۵)

۱) صفر ۲) -۱ ۳) وجود ندارد. ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۳» $\lim\limits_{k\to۰}\frac{۱-\frac{۱}{k^۲}}{۱-\frac{۱}{k}}=\lim\limits_{k\to۰}\frac{\frac{k^۲-۱}{k^۲}}{\frac{k-۱}{k}}=\lim\limits_{k\to۰}\frac{k(k^۲-۱)}{k^۲(k-۱)}=\lim\limits_{k\to۰}\frac{k+۱}{k}=\frac{۱}{۰}=\infty$

مثال۸۸: حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to۰}(۱+\frac{\sin x}{x})^{\frac{۱}{x}}$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۶)

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) e ۴) $\frac{۱}{e}$

پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشند. می‌دانیم $\lim\limits_{x\to۰}\frac{\sin x}{x}=۱$ بنابراین:

$\lim\limits_{x\to۰^-}(۱+\frac{\sin x}{x})^{\frac{۱}{x}}=۲^{-\infty}=۰$ $\lim\limits_{x\to۰^+}(۱+\frac{\sin x}{x})^{\frac{۱}{x}}=۲^{+\infty}=+\infty$

چون حد چپ و راست تابع در $x=۰$ با هم برابر نیست، پس حد وجود ندارد.

مثال۸۹: حد عبارت $Ln(\frac{۲-h}{۲})^{\frac{۱}{h}}$، وقتی $h\to۰$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۶)

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا $\lim\limits_{h\to۰}(\frac{۲-h}{۲})^{\frac{۱}{h}}$ را به دست می‌آوریم.

$\lim\limits_{h\to۰}(\frac{۲-h}{۲})^{\frac{۱}{h}}=\lim\limits_{h\to۰}(۱-\frac{h}{۲})^{\frac{۱}{h}}=e^{\frac{۱}{h}(\frac{-h}{۲})}=e^{\frac{-۱}{۲}}$

بنابراین $\lim\limits_{h\to۰}Ln(\frac{۲-h}{۲})^{\frac{۱}{h}}=Lne^{\frac{-۱}{۲}}=\frac{-۱}{۲}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۹۰: فرض کنید $F(x)=\begin{cases}\frac{x\cos x}{e^x-1} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ کدام عبارت زیر صحیح است؟ (حسابداری ـ آزاد ۸۶)

۱) F در $x=0$ ناپیوسته است.
۲) F در $x=0$ از سمت راست پیوسته است.
۳) F در $x=0$ از سمت چپ پیوسته است.
۴) F در $x=0$ پیوسته است.

پاسخ: گزینه «۴» واضح است که $F(0)=1$، از طرفی:

$$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{e^x-1}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x}{e^x}=1$$

پس F در $x=0$ پیوسته است.

مثال۹۱: مقدار $\lim\limits_{x\to(\sqrt[3]{3})^-}(-1)^{\lfloor x^3+1\rfloor}$ کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۶)

۱) a ۲) صفر ۳) -۱ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» چون $x\to(\sqrt[3]{3})^-$ پس $x^3\to 3^-$ و بنابراین $\lfloor x^3+1\rfloor=3$.

مثال۹۲: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax+\tg x}{x+x^2}$ کدام است؟ (a یک عدد حقیقی ثابت است) (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۶)

۱) a ۲) $a+1$ ۳) صفر ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax+\tg x}{x+x^2}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{ax+x}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(a+1)x}{x(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{a+1}{x+1}=a+1$$

مثال۹۳: به ازاء کدام مقدار A تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+|x|}{x^2-2|x|} & x\neq 0\\ A & x=0\end{cases}$ در نقطه $x=0$ پیوسته است؟ (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۶)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -2

پاسخ: گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+|x|}{x^2-2|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{-2|x|}=\frac{-1}{2}$$

مثال۹۴: حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x+1})^{x+1}$ کدام است؟ (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۶)

۱) e^2 ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) $\frac{1}{e^2}$ ۴) e

پاسخ: گزینه «۴» صورت مبهم 1^∞ است.

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x+1})^{x+1}=\lim_{x\to\infty}e^{(x+1)(\frac{2x+3}{2x+1}-1)}=e$$

مثال۹۵: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{\sin\pi x}$ کدام است؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۶)

۱) $\frac{-1}{\pi}$ ۲) $-\pi$ ۳) $\frac{-2}{\pi}$ ۴) $-\infty$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\sin\pi x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\frac{\frac{1}{x}}{\pi\cos\pi x}=\frac{-1}{\pi}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۹۶: حاصل عبارت $\frac{۱}{x^۲}(Ln(۱+x)+Ln(۱-x))$ وقتی $x \to ۰$، کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۷)

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) e

پاسخ: گزینه «۱» صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌باشد.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\ln(۱+x)+\ln(۱-x)}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{\ln(۱-x^۲)}{x^۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{-۲x}{۱-x^۲}}{۲x}=-۱$$

مثال۹۷: حاصل $\lim_{x\to ۰^-}(۱+\frac{\sin x}{۲x})^{\frac{۱}{x}}$، کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۷)

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{e}$ ۳) e ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\lim_{x\to ۰^-}(۱+\frac{\sin x}{۲x})^{\frac{۱}{x}}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\lim_{x\to ۰^-}(۱+\frac{x}{۲x})^{\frac{۱}{x}}=(\frac{۳}{۲})^{-\infty}=۰$$

مثال۹۸: مجموع حد چپ و راست تابع $f(x)=x(\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor)$ در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟ (حسابداری ـ آزاد ۸۷)

۱) ۴ ۲) ۳- ۳) ۴- ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم $\lim_{x\to x_۰}(\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor)=-۱$ می‌باشد، بنابراین:

$$\lim_{x\to ۲^+}x(\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor)=۲(-۱)=-۲ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۲^-}x(\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor)=۲(-۱)=-۲$$

پس مجموع حد چپ و حد راست برابر ۴ـ می‌باشد.

مثال۹۹: کدام یک از توابع زیر در $x=۰$ ناپیوستگی‌شان قابل رفع است؟ (حسابداری ـ آزاد ۸۷)

۱) $y=(-۱)^{\lfloor x\rfloor}$ ۲) $y=\frac{x}{\sin(x)}$ ۳) $y=\frac{|x|}{x}$ ۴) $y=\lfloor x\rfloor$

پاسخ: گزینه «۲» تابع $y=\frac{x}{\sin x}$ در $x=۰$ دارای حد است. ولی سایر گزینه‌ها در $x=۰$ حد ندارد (حد چپ و راست آن‌ها با هم برابر نیست)، پس ناپیوستگی آن‌ها قابل رفع نیست.

مثال۱۰۰: حد $L=\lim_{n\to\infty}\frac{(۴n+۱)^۲-(۴n)^۲}{n}$ را محاسبه کنید. (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۷)

۱) ۱۱ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۳» صورت کسر را با استفاده از اتحاد مزدوج $(a^۲-b^۲=(a-b)(a+b))$ تجزیه می‌کنیم.

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{(۴n+۱)^۲-(۴n)^۲}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{((۴n+۱)-(۴n))((۴n+۱)+(۴n))}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{۸n+۱}{n}=۸$$

مثال۱۰۱: شرط صادق بودن $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$ این است که: (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۷)

۱) x بر حسب درجه باشد. ۲) مقیاس زاویه مهم نیست. ۳) x بر حسب رادیان باشد. ۴) x بر حسب گراد باشد.

پاسخ: گزینه «۳» در تمام بحث حساب دیفرانسیل و انتگرال در فرمول‌های مربوط به حد، مشتق و انتگرال فرض بر این است که x بر حسب رادیان باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۱۰۲: اگر تابع $f(x)=\frac{(x-\frac{\pi}{۲})^۲}{۱+\cos ۲x}$ در $x_۰=\frac{\pi}{۲}$ پیوسته باشد، آنگاه $f(\frac{\pi}{۲})$ کدام است؟ (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$f(\frac{\pi}{۲})=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{(x-\frac{\pi}{۲})^۲}{۱+\cos ۲x}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۲(x-\frac{\pi}{۲})}{-۲\sin ۲x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۲}{-۴\cos ۲x}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۱۰۳: $\lim\frac{\tan^۲(x-\frac{\pi}{۴})}{۱-\cos(۲x-۲\pi)}$ وقتی $x\to\frac{\pi}{۴}$ کدام است؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) صفر ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۱» چون کمان تانژانت و کسینوس به سمت صفر میل می‌کند، پس می‌توانیم برای محاسبه حد از هم ارزی‌ها استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{tg^۲(x-\frac{\pi}{۴})}{۱-\cos(۲x-\frac{\pi}{۲})}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{(x-\frac{\pi}{۴})^۲}{\frac{(۲x-\frac{\pi}{۲})^۲}{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۱۰۴: تابع عرضه و تابع تقاضا به ترتیب به صورت‌های $y=Ln(x+۱), y=۴-Ln(x+۱)$ داده شده‌اند، x مقدار و y قیمت است. مقدار تعادلی x_e کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۸)

۱) $e^۲-۱$ ۲) $e^۲+۱$ ۳) $e-۱$ ۴) $e+۱$

پاسخ: گزینه «۱» برای بدست آوردن مقدار تعادلی تابع عرضه و تقاضا را برابر هم قرار می‌دهیم.

$$Ln(x+۱)=۴-Ln(x+۱)\Rightarrow Ln(x+۱)=۲\Rightarrow x+۱=e^۲\Rightarrow x=e^۲-۱$$

مثال ۱۰۵: اگر $\lim_{x\to۲}\frac{ax+b}{x-\sqrt{۲x}}=۳$ باشد، مقدار b کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۹)

۱) -۲ ۲) ۱ ۳) -۳ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه «۳» توجه کنید که وقتی $x=۲$ باشد، مخرج کسر برابر صفر می‌شود پس برای اینکه حد به صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ شود لازم است به ازای $x=۲$ صورت کسر نیز برابر صفر شود. که در این صورت نتیجه می‌شود $۲a+b=۰$. برای محاسبه مقدار حد مورد نظر از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۲}\frac{ax+b}{x-\sqrt{۲x}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۲}\frac{a}{۱-\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}}=۲a$$

چون طبق فرض مساله مقدار حد برابر ۳ می‌باشد، پس $۲a=۳$ که از آن $a=\frac{۳}{۲}$ بدست می‌آید. با جایگزینی $a=\frac{۳}{۲}$ در رابطه $۲a+b=۰$ مقدار $b=-۳$ بدست می‌آید.

مثال ۱۰۶: حد تابع $y=(\frac{x+۳}{x-۱})^{x+۳}$ هنگامی که x به سمت بی‌نهایت میل کند، کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۹)

۱) $e^۴$ ۲) $e^۲$ ۳) صفر ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۱» حد مورد نظر به صورت مبهم ۱^∞ است.

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+۳}{x-۱})^{x+۳}=\lim_{x\to\infty}e^{(x+۳)(\frac{x+۳}{x-۱}-۱)}=\lim_{x\to\infty}e^{(x+۳)(\frac{۴}{x-۱})}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{۴x+۱۲}{x-۱}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{۴x}{x}}=e^۴$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مدرسان شریف

فصل پنجم

« مشتق »

مثال۱: مقدار $A = \lim_{h\to 0} \frac{Arctg(x+h) - Arctgx}{h}$ برابر است با :

۱) $-\frac{۱}{x^۲+۱}$ ۲) $\frac{۱}{x^۲+۱}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به تعریف مشتق حد فوق، مشتق تابع $f(x) = Arctgx$ در نقطه $x_۰ = x$ می‌باشد، لذا داریم :

$$\Rightarrow A = f'(x) = (Arctgx)' = \frac{۱}{۱+x^۲}$$

مثال۲: شیب وتر گذرنده از دو نقطه $x = ۱$ و $x = h+۱$ واقع بر منحنی $y = ۴x^۲ - ۶x$ هنگامی که h به سمت صفر میل می‌کند، کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» شیب وتر گذرنده از دو نقطه $x = ۱$ و $x = ۱+h$ وقتی $h \to ۰$، برابر مشتق تابع در نقطه $x = ۱$ است.

$$y = ۴x^۲ - ۶x \Rightarrow y' = ۸x - ۶ \Rightarrow y'(۱) = ۸ - ۶ = ۲$$

مثال۳: در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x+a & , \ x \le ۱ \\ b\sqrt[۳]{x} & , \ x > ۱ \end{cases}$ مقدار $f'(۱)$ موجود است، مقدار $\frac{۲b-a}{۲}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» چون تابع در نقطه $x=۱$ مشتق‌پذیر است لذا پیوسته نیز خواهد بود در نتیجه خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} f(x) \to ۱ + a = b \qquad (۱)$$

و چون تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است لذا مشتق چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابرند لذا خواهیم داشت :

$$f'(x) = \begin{cases} ۱ & , \ x \le ۱ \\ \frac{b}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} & , \ x > ۱ \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{۳} = ۱ \Rightarrow b = ۳ \xrightarrow{(۱)} a = ۲ \Rightarrow \frac{۲b-a}{۲} = ۲$$

مثال۴: چنانچه $F(x) = e^{\sin ۲x}$ باشد، مقدار $F'(۰)$ چیست؟

۱) ۱ ۲) $\sin ۲x$ ۳) e ۴) ۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» $F(x) = e^{\sin ۲x} \Rightarrow F'(x) = ۲\cos ۲x e^{\sin ۲x} \Rightarrow F'(۰) = ۲\cos(۰)e^{۰} = ۲ \times ۱ \times ۱ = ۲$

مثال۵: مشتق عبارت $y = \cos(Arctgx)$ برابر است با:

۱) $y' = \frac{-x}{۱+x^۲}\sin(Arctgx)$ ۲) $y' = \frac{x}{۱+x^۲}\sin(Arctgx)$ ۳) $y' = \frac{۱}{۱+x^۲}\sin(Arctgx)$ ۴) $y' = \frac{-۱}{۱+x^۲}\sin(Arctgx)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$y = \cos(Arctgx) \Rightarrow y' = \frac{-۱}{۱+x^۲}.\sin(Arctgx)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۶: اگر $y = x[Arctg(1-x^2)]$ باشد، مقدار y' در $x = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{4} - 2$ ۴) $\frac{\pi}{4} - 1$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$y = xArctg(1-x^2) \Rightarrow y' = 1 \times Arctg(1-x^2) + \frac{-2x}{1+(1-x^2)^2} \times x \Rightarrow y'(0) = Arctg1 + 0 = \frac{\pi}{4}$$

مثال۷: اگر $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n$، آنگاه مقدار $C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n$ چقدر است؟

۱) $2^n Ln2$ ۲) $(n+1)2^n$ ۳) $n2^{n-1}$ ۴) $n2^n$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» از طرفین رابطه داده شده مشتق می‌گیریم، در این صورت:

$$n(1+x)^{n-1} = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + \cdots + nC_nx^{n-1}$$

با جایگزینی $x = 1$ در رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n = n2^{n-1}$$

مثال۸: با فرض اینکه y تابعی از x باشد، مشتق تابع $y - x^2y + xy = 1$ کدام است؟

۱) $y' = \frac{x-2xy}{y^2-y-1}$ ۲) $\frac{x-2xy}{x^2+x-1}$ ۳) $\frac{y-2xy}{x^2+x-1}$ ۴) $\frac{y-2xy}{x^2-x-1}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$y' = -\frac{(-2xy)+y}{1-x^2+x} = \frac{2xy-y}{1-x^2+x} = \frac{y-2xy}{x^2-x-1}$$

مثال۹: فرض کنید $x^2y^3 - xy^2 + 4y + 2Lnx = 4$، در این صورت مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $x = 1$ و $y = 1$ چقدر است؟

۱) $-\frac{3}{5}$ ۲) $-\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{5}{3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» از روش مشتق‌گیری ضمنی نتیجه می‌شود:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^3 - y^2 + \frac{2}{x}}{3x^2y^2 - 2xy + 4}\Bigg|_{(1,1)} = -\frac{3}{5}$$

مثال۱۰: از رابطه $Lny + yLnx + 2xy - x - y = 0$ مقدار y'_x در نقطه $(1,1)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» از قاعده مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنیم. $-1 = -\frac{1+2-1}{1+Ln1+2-1}$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{y}{x} + 2y - 1}{\frac{1}{y} + Lnx + 2x - 1}\Bigg|_{(1,1)}$$

مثال۱۱: با فرض اینکه y تابعی از x است مشتق تابع $Arctany - y + x = 0$ کدام است؟

۱) $y' = 1 + y^2$ ۲) $y' = 1 + y^{-2}$ ۳) $y' = 1 - y^{+2}$ ۴) $y' = 1 - y^{-2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$y' = -\frac{1}{\frac{1}{1+y^2} - 1} = \frac{-1}{\frac{-y^2}{1+y^2}} = \frac{1+y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} + 1 \Rightarrow y' = 1 + y^{-2}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۱۲: چنانچه $\cos x = e^y$ باشد، $\frac{dy}{dx}$ برابر است با:

۱) $-tg\,x$ ۲) $-\sin x$ ۳) $-\frac{\cos x}{x}$ ۴) $x\sin x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

روش اول:
$$e^y = \cos x \Rightarrow y = Ln\cos x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tgx$$

روش دوم: مشتق‌گیری ضمنی:
$$e^y - \cos x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{e^y} \xrightarrow{e^y=\cos x} \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -tgx$$

مثال ۱۳: اگر $x = Ln(\sqrt{\cos 2y})$ فرض شود، $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟

۱) $-tg2y$ ۲) $-\cot g2y$ ۳) $\sin 2y/\sqrt{\cos 2y}$ ۴) $-\sin 2y/\sqrt{\cos 2y}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

روش اول:
$$x = Ln\sqrt{\cos 2y} = \frac{1}{2}Ln\cos 2y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\times\frac{-2\sin 2y}{\cos 2y} = -tg2y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\cot g2y$$

روش دوم:
$$x = Ln\sqrt{\cos 2y} \Rightarrow e^x = \sqrt{\cos 2y} \Rightarrow e^{2x} = \cos 2y \Rightarrow e^{2x} - \cos 2y = 0 \quad (1)$$

با مشتق‌گیری ضمنی از رابطه (۱) نتیجه می‌شود:
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2e^{2x}}{2\sin 2y} \xrightarrow{e^{2x}=\cos 2y} \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos 2y}{\sin 2y} = -\cot g2y$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

مثال ۱۴: اگر $Ln\frac{x-y}{x+y} = 6$ باشد حاصل $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}$ کدام است؟

۱) $-\frac{x}{y}$ ۲) $-\frac{y}{x}$ ۳) $\frac{y}{x}$ ۴) $\frac{x}{y}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که حد موردنظر برابر $\frac{dx}{dy}$ می‌باشد. حال برای سادگی محاسبهٔ $\frac{dx}{dy}$، تابع را به شکل زیر در می‌آوریم.

$$Ln\frac{x-y}{x+y} = 6 \Rightarrow Ln(x-y) - Ln(x+y) = 6 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{-1}{x-y}-\frac{1}{x+y}}{\frac{+1}{x-y}-\frac{1}{x+y}} = -\frac{\frac{-x-y-x+y}{x^2-y^2}}{\frac{+x+y-x+y}{x^2-y^2}} = -\frac{-2x}{2y} = \frac{x}{y}$$

مثال ۱۵: اگر $f(x) = |2x^3 - 8x|$ در این صورت دامنه تابع f' کدام است؟

۱) $R-\{0\}$ ۲) R ۳) $[0,4]$ ۴) $R-\{-2,0,2\}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» تابع f در نقاط ۲ و ۰ و $x=-2$ مشتق‌پذیر نیست.

مثال ۱۶: اگر $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h+2)-f(2)}{h} = -\frac{2}{3}$ باشد مقدار مشتق $f(\sqrt{1-3x})$ به ازای $x=-1$ کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $+2$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به تعریف مشتق حد فوق مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x=2$ می‌باشد و یا $f'(2) = -\frac{2}{3}$ لذا داریم :

$$f'(2) = -\frac{2}{3} \to A = \left[f(\sqrt{1-3x})\right]' = \frac{-3}{2\sqrt{1-3x}}f'(\sqrt{1-3x}) \xrightarrow{x=-1} A = \frac{-3}{2\sqrt{4}}f'(2) = \frac{-3}{4}\times(-\frac{2}{3}) = \frac{1}{2}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۷: مشتق دوم منحنی پارامتری $\begin{cases} x = t^۳ + ۳t + ۱ \\ y = t^۳ - ۳t + ۱ \end{cases}$ نسبت به x کدام است؟

۱) $\frac{t^۲ - ۱}{t^۲ + ۱}$ ۲) $۴t$ ۳) $\frac{۴}{۳(t^۲+۱)^۳}$ ۴) $\frac{۴t}{۳(t^۲+۱)^۳}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{۳t^۲ - ۳}{۳t^۲ + ۳} = \frac{t^۲ - ۱}{t^۲ + ۱} \Rightarrow y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{۲t(t^۲+۱) - ۲t(t^۲-۱)}{(t^۲+۱)^۲}}{۳(t^۲+۱)} = \frac{۴t}{۳(t^۲+۱)^۳}$$

توضیح: در محاسبه مشتق دوم منحنی عبارت $(y'_x)'_t$ به این معنی است که از تابع y'_x (که عبارتی بر حسب t می‌باشد) نسبت به t مشتق بگیریم.

مثال۱۸: مشتق مرتبه n ام تابع $y = \frac{۱}{۱-x}$ در نقطه $x = ۰$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $n!$ ۴) $(n-۱)!$

پاسخ: گزینه «۳» مطابق فرمول فوق داریم:

$$y = \frac{۱}{۱-x} \Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-۱)^n (-۱)^n n!}{(۱-x)^{n+۱}} = \frac{n!}{(۱-x)^{n+۱}} \Rightarrow y^n(۰) = n!$$

مثال۱۹: اگر داشته باشیم $y = \ln(۱+x)$ ، مشتق n ام این تابع در $x = ۰$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $(-۱)^n.n!$ ۴) $(-۱)^{n-۱}(n-۱)!$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که:

$$y = Ln(x+۱) \Rightarrow y' = \frac{۱}{x+۱}$$

بنابراین کافی است $(n-۱)$ مرتبه از $\frac{۱}{x+۱}$ مشتق بگیریم: (از فرمول $y = \frac{۱}{ax+b}$ آنگاه $y^{(n)} = \frac{(-۱)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+۱}}$ استفاده می‌کنیم)

$$y' = \frac{۱}{x+۱} \Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-۱)^{n-۱} \times (n-۱)!}{(x+۱)^n} \Rightarrow y^{(n)}(۰) = (-۱)^{n-۱}(n-۱)!$$

مثال۲۰: در تابع f به ضابطه $y = \frac{x}{۱-x}$ مشتق مرتبه نهم به ازای $x = ۲$ برابر است با:

۱) $۹!$ ۲) $۱۰!$ ۳) $-(۹!)$ ۴) $-(۱۰!)$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به فرمول فوق داریم:

$$y = \frac{x}{۱-x} \Rightarrow y^{(۹)} = \frac{(-(-۱))^۸ (۱ \times ۱ - ۰ \times (-۱)) \times ۹!}{(۱-x)^{۱۰}} = \frac{۹!}{(۱-x)^{۱۰}} \Big|_{x=۲} = ۹!$$

مثال۲۱: مشتق مرتبه صدم تابع $y = \sin ۲x \cos x$ در $x = \frac{\pi}{۳}$ چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{۳^{۱۰۰}}{۲}$ ۳) $\frac{۳^{۵۰}}{۲^{۱۰۰}}$ ۴) $(\frac{۳}{۲})^{۱۰۰}$

پاسخ: گزینه «۱» به کمک فرمول $\sin\alpha\cos\beta = \frac{۱}{۲}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$ نتیجه می‌شود:

$$y = \frac{۱}{۲}(\sin(۲x+x) + \sin(۲x-x)) = \frac{۱}{۲}(\sin ۳x + \sin x)$$

$$\Rightarrow y^{(۱۰۰)} = \frac{۱}{۲}(۳^{۱۰۰} \sin ۳x + \sin x) \Rightarrow y^{(۱۰۰)}(\frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲}(۳^{۱۰۰} \sin \pi + \sin \frac{\pi}{۳}) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

نکته: مشتق مرتبه n ام تابع $y = \sin^۴ x + \cos^۴ x$ برابر است با: $y^{(n)} = ۴^{n-۱} \cos(۴x + \frac{n\pi}{۲})$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۲۲: مشتق دهم تابع با ضابطه $f(x)=x\sin x$ کدام است؟

۱) $x\sin x+۱۰\cos x$ ۲) $۱۰\cos x-x\sin x$ ۳) $۱۰-x\sin x$ ۴) $\sin x+x\cos x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» در این تست $u=x$ و $v=\sin x$ می‌باشد، لذا داریم:

$$y^{(۱۰)}=\binom{۱۰}{۰}x.(\sin x)^{(۱۰)}+\binom{۱۰}{۱}۱.(\sin x)^{(۹)}+\cdots=۱\times x.\sin(۵\pi+x)+۱۰\times\sin(\frac{۹\pi}{۲}+x)=۱۰\cos x-x\sin x$$

توضیح: از جمله دوم به بعد چون مشتق u برابر صفر است، لذا دیگر نوشتن بقیه عبارات لازم نبود. دقت کنید، مشتق مرتبه دهم $\sin x$ طبق فرمول برابر $\sin(۵\pi+x)$ و مشتق مرتبه نهم $\sin x$ طبق فرمول برابر $\sin(\frac{۹\pi}{۲}+x)$ می‌باشد.

مثال۲۳: نرخ تغییر $\sqrt{x^۲+۸}$ نسبت به $\frac{x}{x+۱}$ در نقطه $x=۱$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۶

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با تعریف f و g به شکل مقابل داریم: $f(x)=\sqrt{x^۲+۸}\ ,\ g(x)=\frac{x}{x+۱}$

$$\text{نرخ تغییر}=\frac{f'(x)}{g'(x)}=\left.\frac{\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۸}}}{\frac{۱\times(x+۱)-x}{(x+۱)^۲}}\right|_{x=۱}=\frac{\frac{۲}{۶}}{\frac{۱}{۴}}=\frac{۴}{۳}$$

مثال۲۴: نسبت تغییرات عبارت $x^۴+۵x-\sqrt[۵]{x}$ به تغییر عبارت $x^۲+۳x+۱$ در نقطه‌ی $x=۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۴۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۴۴}{۲۵}$ ۳) $\frac{۲۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۲۲}{۱۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر $f(x)=x^۴+۵x-\sqrt[۵]{x}$ و $g(x)=x^۲+۳x+۱$ آنگاه داریم:

$$\text{نسبت تغییرات}=\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{۴x^۳+۵-\frac{۱}{۵\sqrt[۵]{x}}}{۲x+۳}=\frac{۴\times۱+۵-\frac{۱}{۵}}{۲\times۱+۳}=\frac{۹-\frac{۱}{۵}}{۵}=\frac{۴۴}{۲۵}$$

مثال۲۵: اگر $y=(\tan x)^{\cos x}$ آنگاه $\frac{۱}{y'}$ در نقطه $x=\frac{\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) ۰ ۴) ۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با در نظر گرفتن $v=\cos x, u=tgx$ خواهیم داشت $u'=۱+tg^۲x$, $v'=-\sin x$ پس خواهیم داشت :

$$y'=(tgx)^{\cos x}[-\sin x\,Ln(tg\,x)+\frac{(۱+tg^۲x)(\cos x)}{tg\,x}]$$

$$\Rightarrow y'(\frac{\pi}{۴})=۱\times[-\sin(\frac{\pi}{۴})Ln(\cancel{tg}^{\,۰}\frac{\pi}{۴})+\frac{(۱+tg^۲\frac{\pi}{۴})(\cos\frac{\pi}{۴})}{tg(\frac{\pi}{۴})}]=\sqrt{۲}\ \Rightarrow\frac{۱}{y'}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

مثال۲۶: در تابع $y=\sin x$ مقدار $y'_x\times x'_y$ در نقطه $x=\frac{\pi}{۴}$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۵)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» بطور کلی می‌دانیم $y'_x=\frac{dy}{dx}$ و $x'_y=\frac{dx}{dy}$، بنابراین: $y'_x\times x'_y=\frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{dy}=۱$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۲۷: اگر $y=\frac{۲x^۲-۱}{x^۲+۱}$ باشد، مقدار $\frac{dx}{dy}=x_y$ در نقطه $x=۱$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۵)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{۴x(x^۲+۱)-۲x(۲x^۲-۱)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۶x}{(x^۲+۱)^۲}\Rightarrow y'_x(۱)=\frac{۶\times ۱}{(۱+۱)^۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x'_y=\frac{۱}{y'_x}=\frac{۱}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۲}{۳}$$

مثال۲۸: فرض کنید $x^۲y^۳-xy^۲+۴y+۲Lnx=۴$، در این صورت مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $x=۱$ و $y=۱$ چقدر است؟

(علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۶)

۱) $-\frac{۳}{۵}$ ۲) $-\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

پاسخ: گزینه «۱» از روش مشتق‌گیری ضمنی نتیجه می‌شود:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{۲xy^۳-y^۲+\frac{۲}{x}}{۳x^۲y^۲-۲xy+۴}\Bigg|_{(۱,۱)}=-\frac{۳}{۵}$$

مثال۲۹: مشتق مرتبه دهم $y=e^{۲x}$ در $x=۰$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۷)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $۲^{۱۰}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$y=e^{۲x}\Rightarrow y'=۲e^{۲x}\Rightarrow y''=۲^۲e^{۲x}\Rightarrow y'''=۲^۳e^{۲x}\Rightarrow\cdots$$

بنابراین می‌توان حدس زد $y^{(۱۰)}=۲^{۱۰}e^{۲x}$ و در نتیجه $y^{(۱۰)}(۰)=۲^{۱۰}$

مثال۳۰: اگر داشته باشیم $y=\frac{e^{۲x}-۲x}{x+۲}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $x=۰$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{-۱}{۴}$ ۲) -۲ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۱»

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(۲e^{۲x}-۲)(x+۲)-۱\times(e^{۲x}-۲x)}{(x+۲)^۲}\xrightarrow{x=۰}\frac{dy}{dx}=\frac{(۲e^{۰}-۲)(۰+۲)-(e^{۰}-۰)}{(۰+۲)^۲}=\frac{-۱}{۴}$$

مثال۳۱: اگر $y=xe^{۲x}$ باشد، مشتق مرتبه nام این تابع به ازای $x=۰$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۹)

۱) ۲^n ۲) $n.۲^{n-۱}$ ۳) $n.۲^n$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۲»

روش اول:

$$y=xe^{۲x}\Rightarrow y'=e^{۲x}+۲xe^{۲x}=(۱+۲x)e^{۲x}$$
$$\Rightarrow y''=۲e^{۲x}+۲(۱+۲x)e^{۲x}=(۴+۴x)e^{۲x}=۲(۲+۲x)e^{۲x}$$
$$\Rightarrow y'''=۴e^{۲x}+۲(۴+۴x)e^{۲x}=(۱۲+۸x)e^{۲x}=۴(۳+۲x)e^{۲x}$$
$$\Rightarrow y^{(۴)}=۸e^{۲x}+۲(۱۲+۸x)e^{۲x}=(۳۲+۱۶x)e^{۲x}=۸(۴+۲x)e^{۲x}$$

با توجه به مشتقات بدست آمده می‌توان حدس زد که $y^{(n)}=۲^{n-۱}(n+۲x)e^{۲x}$ می‌باشد. در نتیجه: $y^{(n)}(۰)=۲^{n-۱}(n+۰)e^{۰}=n۲^{n-۱}$

روش دوم: (قاعده لایب نیتز): اگر u و v توابع مشتق‌پذیر باشند، آنگاه مشتق مرتبه nام تابع uv از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}=\binom{n}{۰}u^{(n)}+\binom{n}{۱}u^{(n-۱)}v'+\cdots+\binom{n}{n}v^{(n)}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

بنابراین برای حل سئوال موردنظر فرض می‌کنیم $u = e^{۲x}$ و $v = x$. در این صورت:

$$(uv)^{(n)} = (e^{۲x}.x)^{(n)} = \binom{n}{۰}(e^{۲x})^{(n)}x + \binom{n}{۱}(e^{۲x})^{(n-۱)}(x)' + ۰ + \cdots + ۰ = ۲^n e^{۲x}x + n.۲^{n-۱}e^{۲x} = ۲^{n-۱}(۲x+n)e^{۲x}$$

روش سوم (روش تستی): ابتدا توجه کنید که: $y = xe^{۲x} \Rightarrow y' = e^{۲x} + ۲xe^{۲x} \Rightarrow y'' = ۲e^{۲x} + ۲e^{۲x} + ۴xe^{۲x} \Rightarrow y''(۰) = ۴$

بنابراین مشتق مرتبه دوم تابع برابر ۴ است. با توجه به گزینه‌ها، فقط گزینه (۲) به ازای $n = ۲$ برابر ۴ می‌شود، پس فقط همین گزینه می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

مثال ۳۲: با محاسبه مشتق مرتبه n ام تابع $f(x) = \frac{x}{x-۱}$، مقدار $f^{(n)}(-۱)$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{n!}{۲^{n+۱}}$ ۲) $\frac{(n-۱)!}{۲^n}$ ۳) $\frac{-n!}{۲^{n+۱}}$ ۴) $-\frac{(n-۱)!}{۲^n}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$، آنگاه $f^{(n)}(x) = \frac{(-c)^{n-۱}(ad-bc)n!}{(cx+d)^{n+۱}}$ بنابراین:

$$f(x) = \frac{x}{x-۱} \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-۱)^{n-۱}(۱\times(-۱) - ۰\times۱)n!}{(x-۱)^{n+۱}} = \frac{(-۱)^n n!}{(x-۱)^{n+۱}}$$

$$f^{(n)}(-۱) = \frac{(-۱)^n n!}{(-۲)^{n+۱}} = \frac{(-۱)^n n!}{(-۱)^{n+۱}\times ۲^{n+۱}} = -\frac{n!}{۲^{n+۱}}$$

مثال ۳۳: مشتق تابع $y = e^{|x|}$ عبارت است از: (حسابداری ـ آزاد ۸۰)

۱) $y' = \frac{x}{|x|}e^{|x|}$ ۲) $y' = |x|e^{|x|}$ ۳) $y' = \frac{۱}{x}e^{|x|}$ ۴) $y' = \frac{۱}{|x|}e^{x}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اگر $y = |u|$، آنگاه $y' = \frac{uu'}{|u|}$ بنابراین: $y = e^{|x|} \Rightarrow y' = \frac{x}{|x|}e^{|x|}$

مثال ۳۴: مشتق تابع $y = Ln(\sin x + \cos x)$ برابر است با: (حسابداری ـ آزاد ۸۰)

۱) $y' = \frac{۱}{\sin x + \cos x}$ ۲) $y' = \frac{۲\sin x}{\sin x + \cos x}$ ۳) $y' = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$ ۴) $y' = \frac{۲\cos x}{\sin x + \cos x}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» $y = Ln(\sin x + \cos x) \Rightarrow y' = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$

مثال ۳۵: مشتق مرتبه دهم تابع $f(x) = Ln(۱+x)$ در $x = ۰$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۰)

۱) $-۱۰!$ ۲) $-۹!$ ۳) $+۹!$ ۴) $۱۰!$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در ابتدا توجه کنید که: $y = Ln(۱+x) \Rightarrow y' = \frac{۱}{۱+x}$

حال کافی است از $y' = \frac{۱}{۱+x}$، ۹ بار دیگر مشتق بگیریم. $y' = \frac{۱}{۱+x} \Rightarrow y^{(۱۰)} = \frac{(-۱)^۹ \times ۹!}{(۱+x)^{۱۰}} \Rightarrow y^{(۱۰)}(۰) = -۹!$

مثال ۳۶: مشتق عبارت $y = (Arc\sin x)^۲$ برابر است با: (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۰)

۱) $۲\cos x\, Arc\sin x$ ۲) $۲\sin x . Arc\sin x$ ۳) $\frac{۲Arc\sin x}{\sqrt{۱-x^۲}}$ ۴) $\frac{۲\cos x \sin x}{\sqrt{۱-x^۲}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» $y = (Arc\sin x)^۲ \Rightarrow y' = ۲Arc\sin x.\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۳۷: در تابع به معادله $y=(x^۲+۱)^x$ مقدار dy در نقطه $x=۱$ با شرط $dx=\frac{۱}{۲}$ برابر است با: (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $Ln۲$ ۴) $(۱+Ln۲)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» می‌دانیم $dy=y'dx$، بنابراین:

$$dy=(x^۲+۱)^x(۱\times Ln(x^۲+۱)+x\times\frac{۲x}{x^۲+۱})dx \Rightarrow dy=(۱+۱)^۱(Ln۲+۱\times\frac{۲}{۱+۱})\times\frac{۱}{۲}=Ln۲+۱$$

یادآوری: اگر $y=u^v$، آنگاه $y'=u^v(v'Lnu+v\times\frac{u'}{u})$.

مثال۳۸: در معادله $x^۳+y^۳=xy+۱$ مقدار $\frac{dx}{dy}$ در نقطه $x=۱$ واقع در ناحیه اول کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با قرار دادن $x=۱$ در معادله داده شده نتیجه می‌شود $y^۳=y$، که از این معادله مقادیر ۱ و ۰ و $y=-۱$ بدست می‌آیند. چون طبق فرض نقطه در ناحیه اول واقع است پس فقط $y=۱$ قابل قبول است.

$$x^۳+y^۳-xy=۱ \Rightarrow \frac{dx}{dy}=-\frac{۳y^۲-x}{۳x^۲-y}\Big|_{(۱,۱)}=-\frac{۳-۱}{۳-۱}=-۱$$

مثال۳۹: اگر داشته باشیم $y=x^x$، مقدار مشتق این تابع در $x=e$ برابر است با: (حسابداری ـ سراسری ۸۱)

۱) e ۲) $e^{e-۱}$ ۳) $۲e^e$ ۴) $ee^{e-۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$y=x^x \Rightarrow y'=x^x(Lnx+x\times\frac{۱}{x})=x^x(Lnx+۱) \Rightarrow y'(e)=e^e(Lne+۱)=۲e^e$$

مثال۴۰: مشتق مرتبه اول تابع $y=\frac{۱}{x}$ به ازاء $x=۲$ چه مقدار است؟ (حسابداری ـ آزاد ۸۱)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$y=\frac{۱}{x} \Rightarrow y'=\frac{-۱}{x^۲} \Rightarrow y'(۲)=\frac{-۱}{۴}$$

مثال۴۱: مشتق تابع $y=Ln(Arcsin x)$ عبارت است از: (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{Arccos x}{Arcsin x}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}\,Arcsin x}$ ۳) $\frac{-۱}{\sqrt{۱-x^۲}}.\frac{۱}{Arcsin x}$ ۴) $\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}Arcsin x$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$y=Ln(Arcsin x) \Rightarrow y'=\frac{\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}}{Arcsin x}=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}\,Arcsin x}$$

مثال۴۲: مشتق تابع $y=tg(e^x+\sin x)$ برابر است با: (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۱)

۱) $y'=(e^x+\cos x)\left(۱+tg^۲(e^x+\sin x)\right)$ ۲) $y'=(e^x-\cos x)\left(۱+tg^۲(e^x+\sin x)\right)$

۳) $y'=(-e^{-x}+\cos x)\left(۱+tg^۲(e^x+\sin x)\right)$ ۴) $y'=(-e^{-x}-\cos x)\left(۱+tg^۲(e^x+\sin x)\right)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$y=tg(e^x+\sin x) \Rightarrow y'=(e^x+\cos x)(۱+tg^۲(e^x+\sin x))$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۴۳: مشتق عبارت $y = \cos(\text{Arc tg } x)$ برابر است با: (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۱)

۱) $y' = \frac{-x}{1+x^2}\sin(\text{Arc tg } x)$ ۲) $y' = \frac{x}{1+x^2}\sin(\text{Arc tg } x)$

۳) $y' = \frac{1}{1+x^2}\sin(\text{Arc tg } x)$ ۴) $y' = \frac{-1}{1+x^2}\sin(\text{Arc tg } x)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$y = \cos(\text{Arctg}x) \Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}.\sin(\text{Arctg}x)$$

مثال ۴۴: اگر $y = x(\text{Arctg}(1-x^2))$ باشد، مقدار y' در $x = 0$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{4} - 2$ ۴) $\frac{\pi}{4} - 1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$y = x\text{Arctg}(1-x^2) \Rightarrow y' = \text{Arctg}(1-x^2) + \frac{-2x}{1+(1-x^2)^2} \times x \Rightarrow y'(0) = \text{Arctg}1 + 0 = \frac{\pi}{4}$$

مثال ۴۵: حد تابع $f'(x)$ در تابع $f(x) = e^{x^2+2x+1}$ وقتی که $x \to -1$ برابر است با: (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۲)

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) -۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$f(x) = e^{x^2+2x+1} \Rightarrow f'(x) = (2x+2)e^{x^2+2x+1}$$

$$\lim_{x \to -1} f'(x) = \lim_{x \to -1} (2x+2)e^{x^2+2x+1} = (-2+2)e^{1-2+1} = 0$$

مثال ۴۶: اگر $\sin\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x^2-1}{y+1}$ باشد، در نقطه $(0,1)$ مقدار y' کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۲)

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) -۴

☑ **پاسخ:** هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. ابتدا تابع داده شده را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$(y+1)\sin\frac{x}{y} - x^2 = -1 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\left.\frac{(y+1)\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} - 2x}{\sin\frac{x}{y} + (y+1)\frac{-x}{y^2}\cos\frac{x}{y}}\right|_{(0,1)} = -\frac{2}{0} = \text{تعریف نشده}$$

توجه: نقطه $(0,1)$ در رابطه داده شده صدق نمی‌کند.

مثال ۴۷: اگر $f(x^2-1) = 6x^2 + 1$ و $x \neq 0$ باشد، مقدار $f'(x^2-1)$ کدام گزینه است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۲)

۱) ۱۲ ۲) $12x$ ۳) ۶ ۴) $6x$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از طرفین رابطه داده شده مشتق می‌گیریم.

$$f(x^2-1) = 6x^2 + 1 \Rightarrow 2xf'(x^2-1) = 12x \Rightarrow f'(x^2-1) = 6$$

مثال ۴۸: هرگاه برای $x > 0$ ، $f'(x) = \frac{1}{x}$ باشد مشتق تابع $f(|x|)$ کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{1}{x^2}$ ۲) $\frac{1}{x}$ ۳) ۱ ۴) $|x|$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$y = f(|x|) \Rightarrow y' = \frac{x}{|x|}f'(|x|) = \frac{x}{|x|} \times \frac{1}{|x|} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۴۹: اگر $f(\sqrt{x})=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ باشد، $f'(1)$ چند است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{۳}{\sqrt{۲}}$ ۲) $\frac{۳}{۴\sqrt{۲}}$ ۳) $\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از طرفین رابطه داده شده مشتق می‌گیریم.

$$f(\sqrt{x})=\sqrt{x+\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})=\frac{۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۲\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

با جایگزینی $x=۱$ در رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$\frac{۱}{۲}f'(۱)=\frac{۱+\frac{۱}{۲}}{۲\sqrt{۱+۱}} \Rightarrow \frac{۱}{۲}f'(۱)=\frac{۳}{۴\sqrt{۲}} \Rightarrow f'(۱)=\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}$$

مثال۵۰: اگر $y=x\ln(x+۱)$ باشد، در $x=۱$ مقدار عبارت $y+y'-y''$ چند است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۳)

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

☑ **پاسخ:** هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$y=xLn(x+۱) \Rightarrow y(۱)=Ln۲$$

$$y'=Ln(x+۱)+\frac{x}{x+۱} \Rightarrow y'(۱)=Ln۲+\frac{۱}{۲}$$

$$y''=\frac{۱}{x+۱}+\frac{x+۱-x}{(x+۱)^۲}=\frac{x+۲}{(x+۱)^۲} \Rightarrow y''(۱)=\frac{۳}{۴} \Rightarrow y''-y'+y=\frac{۳}{۴}-Ln۲-\frac{۱}{۲}+Ln۲=\frac{۱}{۴}$$

مثال۵۱: مشتق مرتبه اول تابع $y=x^{e^x}$ در $x=۱$ برابر است با: (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۴)

۱) $e+۱$ ۲) $e-۱$ ۳) e ۴) $-e$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» $y=u^v=x^{e^x}$، بنابراین:

$$y'=x^{e^x}(e^xLnx+e^x\times\frac{۱}{x}) \Rightarrow y'(۱)=۱(eLn۱+e\times۱)=e$$

یادآوری: اگر $y=u^v$، آنگاه $y'=u^v(v'Lnu+v\times\frac{u'}{u})$.

مثال۵۲: فرض کنید $f(x)=x\lfloor ۲^x \rfloor$ در این صورت مقدار $f'(\log_{۲}^{۵})$ کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۵)

۱) ۱۲ ۲) وجود ندارد. ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تابع f در نقطه $x=\log_{۲}۵$ پیوسته نمی‌باشد، پس مشتق‌پذیرنیز نیست.

مثال۵۳: اگر $f(x)=|۱۰-۳x^۲|$ باشد، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟ (مدیریت تکنولوژی ـ آزاد ۸۵)

۱) وجود ندارد. ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در همسایگی نقطه $x=۲$، عبارت $۱۰-۳x^۲$ منفی است، بنابراین تابع f به صورت زیر در می‌آید:

$$f(x)=-(۱۰-۳x^۲)=۳x^۲-۱۰ \Rightarrow f'(x)=۶x \Rightarrow f'(۲)=۱۲$$

مثال۵۴: مقدار مشتق مرتبه دهم تابع $y=xe^{۲x}$، در $x=۱$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۶)

۱) $۹(۲)^{۱۰}.e^۲$ ۲) $۵\times۱۰^۴e^۲$ ۳) $۶(۲)^{۱۰}.e^۲$ ۴) $۵\times۲^۹e^۲$

☑ پاسخ: گزینه «۳» از قاعده لایب‌نیتز استفاده می‌کنیم:

$$y^{(۱۰)}=x\times۲^{۱۰}e^{۲x}+۱۰\times۲^۹e^{۲x} \Rightarrow y^{(۱۰)}(۱)=۲^{۱۰}e^۲+۱۰\times۲^۹e^۲=۲^{۱۰}e^۲+۵\times۲^{۱۰}e^۲=۶\times۲^{۱۰}e^۲$$

تذکر: قاعده لایب‌نیتز در حالت خاص:

$$y=xf(x) \Rightarrow y^{(n)}=xf^{(n)}(x)+nf^{(n-۱)}(x)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۵۵: مشتق تابع $y=(\sin x)e^x$ در نقطه $x=0$ برابر است با: (حسابداری ـ آزاد ۸۶)

۱) -1 ۲) 1 ۳) صفر ۴) e

پاسخ: گزینه «۲»

$$y=e^x\sin x \Rightarrow y'=e^x\sin x+e^x\cos x \Rightarrow y'(0)=1$$

مثال۵۶: در رابطه $e^{xy}+\sin(xy)=0$، مقدار y'_x با فرض آن که $e^{xy}+\cos(xy)\neq 0$ باشد، کدام گزینه زیر است؟ (حسابداری ـ آزاد ۸۶)

۱) $-\frac{y}{x}$ ۲) $-\frac{x}{y}$ ۳) $\frac{y}{x}$ ۴) $\frac{x}{y}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$e^{xy}+\sin(xy)=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{ye^{xy}+y\cos xy}{xe^{xy}+x\cos xy}=-\frac{y}{x}$$

مثال۵۷: اگر $f(1-x^2)=3+2x^4$ باشد $f'(0)$ کدام گزینه است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۶)

۱) ۸ ۲) صفر ۳) ۴ ۴) -4

پاسخ: گزینه «۴»

$$-2xf'(1-x^2)=8x^3 \Rightarrow f'(1-x^2)=-4x^2 \xrightarrow{x=1} f'(0)=-4$$

مثال۵۸: در رابطه ضمنی $\text{Arcsin}\frac{y}{x}=x$ حاصل $y'(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۶)

۱) -1 ۲) $1-\pi$ ۳) $\pi-1$ ۴) 1

پاسخ: گزینه «۴»

$$\text{Arc}\sin\frac{y}{x}=x \Rightarrow \frac{y}{x}=\sin x \Rightarrow y=x\sin x \Rightarrow y'=\sin x+x\cos x \Rightarrow y'(\frac{\pi}{2})=1$$

مثال۵۹: اگر $f(\frac{x+1}{x})=x^3$ باشد $f'(2)$ کدام است؟ (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۶)

۱) -15 ۲) -3 ۳) 15 ۴) 12

پاسخ: گزینه «۲» از طرفین رابطه داده شده در صورت سوال مشتق می‌گیریم:

$$f(\frac{x+1}{x})=x^3 \Rightarrow \frac{-1}{x^2}f'(\frac{x+1}{x})=3x^2 \xrightarrow{x=1} (-1)f'(2)=3 \Rightarrow f'(2)=-3$$

مثال۶۰: اگر $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=2\sqrt{x}$ باشد $f'(4)$ کدام است؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۶)

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) 4 ۳) 2 ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» حد داده شده برابر $2f'(x)$ می‌باشد، بنابراین:

$$f'(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(4)=2$$

مثال۶۱: مقدار مشتق عبارت $\frac{x+\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ در نقطه $x_0=\pi^2$ کدام است؟ (حسابداری ـ آزاد ۸۷)

۱) $\frac{\pi-1}{2\pi^2}$ ۲) $\frac{1}{\pi}$ ۳) $\frac{\pi-1}{\pi}$ ۴) $\frac{\pi-1}{\pi^2}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$y=\frac{x+\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \Rightarrow y'=\frac{(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x})\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+\sin\sqrt{x})}{x}$$

$$\Rightarrow y'(\pi^2)=\frac{(1+\frac{1}{2\pi}\cos\pi)\pi-\frac{1}{2\pi}(\pi^2+\sin\pi)}{\pi^2}=\frac{\pi-1}{2\pi^2}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۶۲: چند نقطه روی منحنی $۶y=(x+y)^۳$ وجود دارد که مماس بر منحنی در آن نقاط، موازی نیمساز ناحیه اول یا سوم است؟

(مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بیشمار

پاسخ: گزینه «۲»

$$(x+y)^۳-۶y=۰\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{۳(x+y)^۲}{۳(x+y)^۲-۶}$$

برای اینکه مماس بر منحنی موازی نیمساز ناحیه اول یا سوم باشد، لازم است مشتق (شیب) منحنی در آن نقطه برابر یک باشد، بنابراین:

$$۳(x+y)^۲+=-۳(x+y)^۲+۶\Rightarrow (x+y)^۲=۱\Rightarrow x+y=\pm ۱$$

با جایگذاری رابطه بدست آمده در بالا در معادله تابع $۶y=\pm ۱$، و در نتیجه $y=\pm\frac{۱}{۶}$ و $x=\pm\frac{۵}{۶}$ بدست می‌آید. پس فقط نقاط $(\frac{۵}{۶},\frac{۱}{۶})$ و $(-\frac{۵}{۶},-\frac{۱}{۶})$ در شرط مورد نظر صدق می‌کنند.

مثال۶۳: به ازای کدام مقدار m، نمودار منحنی $y=x^۲+۳x+m$ بر نیمساز ناحیه اول مماس است؟ (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۷)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» برای اینکه دو منحنی بر هم مماس باشند، لازم است معادله حاصل از تلاقی دو منحنی ریشه مضاعف داشته باشد، بنابراین:

$$x^۲+۳x+m=x\Rightarrow x^۲+۲x+m=۰\Rightarrow \Delta=۴-۴m=۰\Rightarrow m=۱$$

مثال۶۴: اگر f تابعی پیوسته و $f(۱)=۴$ و $f'(۱)=۸$ باشد، آنگاه مشتق $\frac{۱}{f(x)}$ در $x=۱$ کدام است؟ (حسابداری ـ آزاد ۸۸)

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) -۲ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$y=\frac{۱}{f(x)}\Rightarrow y'=\frac{-f'(x)}{f^۲(x)}\Rightarrow y'(۱)=\frac{-f'(۱)}{(f(۱))^۲}=\frac{-۸}{۱۶}=\frac{-۱}{۲}$$

مثال۶۵: اگر $a\neq ۰$ و $g(x)=f(ax)$ و $g'(۰)=۲$ باشد، آنگاه $f'(۰)$ کدام است؟ (مدیریت فن‌آوری اطلاعات ـ آزاد ۸۸)

۱) $۲a$ ۲) $-\frac{۲}{a}$ ۳) $-۲a$ ۴) $\frac{۲}{a}$

پاسخ: گزینه «۴» از طرفین رابطه داده شده مشتق می‌گیریم، و سپس به جای x مقدار صفر قرار می‌دهیم.

$$g(x)=f(ax)\Rightarrow g'(x)=af'(ax)\Rightarrow g'(۰)=af'(۰)\Rightarrow f'(۰)=\frac{۲}{a}$$

مثال۶۶: وضع نمودار تابع $y=۲^{x-۱}$ کدام است؟ (مدیریت فن‌آوری اطلاعات ـ آزاد ۸۸)

۱) همواره نزولی
۲) برای $x<۱$ صعودی و برای $x>۱$ نزولی است.
۳) همواره صعودی
۴) برای $x>۱$ نزولی و برای $x<۱$ صعودی است.

پاسخ: گزینه «۳»

$$y=۲^{x-۱}\Rightarrow y'=\underbrace{۲^{x-۱}\text{Ln}۲}_{\text{همواره مثبت}}\Rightarrow \text{تابع صعودی است}$$

مثال۶۷: نرخ تغییر تابع $y=\sqrt{x^۲+۱}$ نسبت به $(۳x-۱)$ در نقطه $x=۱$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳\sqrt{۲}}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\text{نرخ تغییر}=\frac{(\sqrt{x^۲+۱})'}{(۳x-۱)'}=\frac{\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱}}}{۳}\Bigg|_{x=۱}=\frac{۱}{۳\sqrt{۲}}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مدرسان شریف

فصل ششم

« کاربرد مشتق »

مثال۱: ضریب زاویه خط مماس بر منحنی تابع $y = Arctgx$ در نقطه $x = ۰$ کدام است ؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$y = Arctgx \Rightarrow y' = \frac{۱}{۱+x^۲} \Rightarrow m = y'(۰) = ۱$$

مثال۲: اگر $f(-۳) = ۲$ و $f'(-۳) = ۵$ در این صورت معادله خط مماس در نقطه $x = -۳$ واقع بر نمودار $y = f(x)$ کدام است؟

۱) $y = ۵x + ۱۷$ ۲) $y = ۵x - ۱۰$ ۳) $y = ۵x + ۱۹$ ۴) $y = ۵x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» شیب خط و نقطه‌ی $(x_۰, y_۰)$ داده شده‌اند و داریم:

$$y - ۲ = ۵(x - (-۳)) \Rightarrow y = ۵x + ۱۷$$

مثال۳: ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $x^۳ + y^۳ - xy - ۷ = ۰$ در نقطه $A(۱,۲)$ کدام است ؟

۱) $-\frac{۱۵}{۱۱}$ ۲) $-\frac{۱}{۱۱}$ ۳) $-\frac{۱}{۱۳}$ ۴) $-\frac{۵}{۱۳}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$y' = -\frac{۳x^۲ - y}{۳y^۲ - x} \Rightarrow m = y'(۱,۲) = -\frac{۳-۲}{۳\times ۴ - ۱} = -\frac{۱}{۱۱}$$

مثال۴: معادله خط مماس بر منحنی $y = \sqrt{x + Lnx}$ در نقطه $x = ۱$ برابر است با :

۱) $y = ۲x + e$ ۲) $y = \frac{x}{e}$ ۳) $y = x$ ۴) $y = \frac{۱}{x}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$\begin{cases} y = \sqrt{Lnx + x} \Rightarrow y' = \dfrac{\frac{۱}{x} + ۱}{۲\sqrt{Lnx + x}} \Rightarrow m = y'(۱) = \frac{۲}{۲} = ۱ \Rightarrow y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y - ۱ = x - ۱ \Rightarrow y = x \\ x_۰ = ۱ \Rightarrow y_۰ = ۱ \end{cases}$$

مثال۵: معادله خط قائم بر منحنی $y = \sqrt{x}$ در نقطه به طول $x = ۴$ کدام است ؟

۱) $۴x + y - ۱۸ = ۰$ ۲) $x - ۴y + ۴ = ۰$ ۳) $x + ۴y + ۴ = ۰$ ۴) $۴y - x + ۴ = ۰$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = y'(۴) = \frac{۱}{۲\sqrt{۴}} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow m_{\text{قائم}} = -۴ \ , \ x_۰ = ۴ \Rightarrow y_۰ = \sqrt{۴} = ۲$$

$$\Rightarrow y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y - ۲ = -۴(x - ۴) \Rightarrow \boxed{y + ۴x - ۱۸ = ۰}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۶: ضریب زاویه خط مماس به منحنی پارامتری $\begin{cases} x = t^2 + 3t - 8 \\ y = 2t^2 - 2t - 5 \end{cases}$ **در نقطه** $A(2,-1)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{8}{7}$ ۲) $\frac{6}{7}$ ۳) ۶ ۴) ۸

☑ **پاسخ :** گزینه«۲» مقدار y'_x برابر است با: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4t-2}{2t+3}$ حال مقادیر متناظر t در نقطه $A(2,-1)$ را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} t^2 + 3t - 8 = 2 \\ 2t^2 - 2t - 5 = -1 \end{cases} \longrightarrow \boxed{t = 2} \qquad \text{(ریشه مشترک دو معادله)} \qquad \longrightarrow m = y'_x(2) = \frac{4(2)-2}{2(2)+3} = \frac{6}{7}$$

مثال۷: در فاصله $-2 \le x \le 1$ **برای تابع** $y = x^2 + 1$ **، مقدار مینیمم کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۵

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow y' = 2x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

چون نقطه $x = 0$ در بازهٔ $[1,2]$ قرار ندارد، لذا قابل قبول نخواهد بود. پس نقاط اکسترمم تابع همان نقاط ابتدایی و انتهایی بازه خواهند بود، حال توجه کنید که:

$$y(1) = 1^2 + 1 = 2 \quad , \quad y(2) = 2^2 + 1 = 5$$

بنابراین ۲ مقدار می‌نیمم و ۵ مقدار ماکزیمم تابع می‌باشد.

مثال۸: نقطه $x = -3$ **برای تابع** $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 5$ **چه نوع نقطه‌ای است؟**

۱) ماکسیمم نسبی ۲) مینیمم نسبی ۳) نقطه عادی ۴) مینیمم مطلق

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$f'(x) = 6x^2 + 12x - 18 \Rightarrow f''(x) = 12x + 12 \Rightarrow f''(-3) = 12 \times (-3) + 12 = -24 < 0$$

چون $f''(-3) < 0$ است پس $x = -3$ ماکزیمم نسبی می‌باشد.

مثال۹: تابع $y = xe^x$ **در چه فاصله‌ای اکیداً مقعر است؟**

۱) $(-\infty, -2)$ ۲) $(-2, +\infty)$ ۳) $R^+ \cup \{0\}$ ۴) R

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$y = xe^x \Rightarrow y' = e^x + xe^x \Rightarrow y'' = e^x + e^x + xe^x = e^x(x+2)$$

چون e^x، مثبت است پس علامت y'' به علامت $(x+2)$ بستگی دارد و بنابراین به ازای $x < -2$ تابع مقعر و به ازای $x > -2$ تابع محدب است.

مثال۱۰: عرض نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x) = xe^{-x}$ **کدام است؟**

۱) $-2e^2$ ۲) $-e^1$ ۳) e^{-1} ۴) $2e^{-2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» ابتدا مشتق مرتبه دوم تابع را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = xe^{-x} \Rightarrow f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} \Rightarrow f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(x-2) = 0 \xrightarrow{e^{-x} \text{ همواره مثبت است}} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{طول نقطه عطف}$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2e^{-2} \quad \text{عرض نقطه عطف}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۱: طول مثبت نقطه عطف تابع $y = Ln(1+x^2)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» کافیست مشتق مرتبه دوم تابع را حساب کنیم:

$$y = Ln(1+x^2) \Rightarrow y' = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow y'' = \frac{2(1+x^2)-2x\times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$y''=0 \Rightarrow \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}=0 \Rightarrow 2-2x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=-1,1$$

مثال۱۲: اگر تابع حقیقی f دارای ضابطه $f(x)=x^2.e^x$ باشد، طول نقطه عطف این تابع کدام است؟

۱) ۱− و ۲− ۲) $-2\pm\sqrt{2}$ ۳) ۲ و ۱ ۴) $1\pm\sqrt{3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$f(x)=x^2e^x \Rightarrow f'(x)=2xe^x+x^2e^x$$

$$f''(x)=2e^x+2xe^x+2xe^x+x^2e^x=e^x(x^2+4x+2)$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow e^x(x^2+4x+2)=0 \Rightarrow x^2+4x+2=0 \Rightarrow x=-2\pm\sqrt{2}$$

مثال۱۳: تابع با ضابطه $y = Ln\frac{x}{x+1}$، در فاصله [۲ , ۱] چگونه است؟

۱) محدب ۲) مقعر ۳) نزولی اکید ۴) شامل نقطه عطف

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$y = Lnx - Ln(x+1) \Rightarrow y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow y'' = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{-(x+1)^2+x^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}$$

با توجه به ضابطه y''، واضح است که در فاصله $[1,2]$، مقدار y'' منفی است و لذا تابع مقعر است.

مثال۱۴: فرض کنید f تابعی محدب بر بازه باز I باشد و $a<b<c$ داخل بازه I باشند. کدام‌یک از روابط زیر صحیح می‌باشد.

۱) $\frac{f(b)-f(c)}{b-c} \le \frac{f(a)-f(b)}{b-a}$ ۲) $\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

۳) $\frac{f(b)-f(c)}{b-c} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ۴) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» قرار می‌دهیم:

$$b = \frac{c-b}{c-a}a + \frac{b-a}{c-a}c$$

$$f(b) = f\left(\frac{c-b}{c-a}a + \frac{b-a}{c-a}c\right) \overset{f\ \text{محدب}}{\le} \frac{c-b}{c-a}f(a) + \frac{b-a}{c-a}f(c)$$

$$\Rightarrow f(b)-f(a) \le \frac{-b+a}{c-a}f(a) + \frac{b-a}{c-a}f(c) \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

مثال۱۵: در تابعی با ضابطه $y=\frac{x}{x-1}$ به ازای $x=2$ و $dx=0/1$ ، مقدار dy کدام است؟

۱) $-0/1$ ۲) $-0/2$ ۳) $0/1$ ۴) $0/2$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$dy = y'dx \Rightarrow dy = \frac{1\times(x-1)-1\times x}{(x-1)^2}dx = \frac{-1}{(x-1)^2}dx \xrightarrow[dx=0/1]{x=2} dy = \frac{-1}{(2-1)^2}\times 0/1 = -0/1$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۱۶: اگر تابع f به معادله $y = x^2 + x$ باشد، حاصل $(dy - \Delta y)$ در نقطه $x = 1$ و $\Delta x = 0/1$ برابر است با:

۱) $-0/02$ ۲) $-0/01$ ۳) $0/02$ ۴) $0/03$

پاسخ: گزینه «۲»

$$dy = y'dx = (2x+1)dx = (2\times1+1)\times0/1 = 0/3$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f(1/1) - f(1) = (1/21+1/1) - (1+1) = 0/31 \Rightarrow dy - \Delta y = 0/3 - 0/31 = -0/01$$

مثال ۱۷: مقدار تقریبی $\sqrt{146}$ را مجدداً با استفاده از نکته فوق بدست آورید.

پاسخ:

$$a = 12\ ,\ n = 2\ ,\ b = 2 \Rightarrow \sqrt{146} \simeq 12 + \frac{2}{2\times12} = 12 + \frac{1}{12} \simeq 12/0833$$

مثال ۱۸: مقدار تقریبی $\sqrt[4]{80}$ کدام است؟

۱) ۲/۷۹۵ ۲) ۲/۹۷۲ ۳) ۲/۹۱۲ ۴) ۲/۸۹۲

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases} a = 3 \\ n = 4 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[4]{80} \approx 3 + \frac{(-1)}{4\times3^3} \approx 2/972....$$

مثال ۱۹: تابع $y = e^x - 2x$ در فاصله بسته [۱ و ۰] محدب است یا مقعر؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۵)

۱) مقعر ۲) محدب

۳) ابتدا محدب سپس مقعر است. ۴) ابتدا مقعر، سپس محدب است.

پاسخ: گزینه «۲»

$y = e^x - 2x \Rightarrow y' = e^x - 2 \Rightarrow y'' = e^x$ همواره مثبت:

چون $y'' > 0$، پس تابع داده شده همواره محدب است.

مثال ۲۰: برای نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x+4)^{-\frac{2}{3}}$ در دو نقطه $x = 1$ و $x = 4$ به ترتیب کدام گزاره درست است؟

(علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۵)

۱) می‌نیمم ـ فاقد اکسترمم ۲) ماکسیمم ـ می‌نیمم ۳) می‌نیمم ـ ماکسیمم ۴) فاقد اکسترمم ـ ماکسیمم

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x+4)^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{\frac{1}{(x+4)^2}} = \sqrt[3]{\frac{x}{(x+4)^2}}$$

در این صورت:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{(x+4)^2}\right)^{-\frac{2}{3}} \times \frac{1\times(x+4)^2 - 2(x+4)x}{(x+4)^4} = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 - 2x^2 - 8x = 0$$

$$\Rightarrow 16 - x^2 = 0 \Rightarrow x = -4, 4$$

بنابراین نقاط $x = 4$ و $x = -4$، نقاط اکسترمم تابع می‌باشند و لذا نقطه $x = 1$ نقطه اکسترمم نمی‌باشد. با توجه به گزینه‌ها، گزینه (۴) می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۲۱: اگرنمودار تابع $y = x^3 + 2kx^2 + k$ در نقطه $x = 1$ از تقعر به تحدب تغییر یابد، آنگاه مقدار k کدام است؟

(علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۵)

۱) $\frac{-3}{2}$ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱» چون جهت تقعر تابع در $x = 1$ عوض می‌شود، پس $x = 1$ نقطه عطف می‌باشد.

$$y = x^3 + 2kx^2 + k \Rightarrow y' = 3x^2 + 4kx \Rightarrow y'' = 6x + 4k \Rightarrow y''(1) = 6 + 4k = 0 \Rightarrow k = \frac{-3}{2}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۲۲: کدامیک از توابع زیر برروی اعداد حقیقی نزولی است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۶)

۱) $f(x) = x.\sin x$ ۲) $f(x) = x - \sin x$ ۳) $f(x) = -x + \sin x$ ۴) $f(x) = -x + ۲\sin x$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

(۱) گزینه : $f(x) = x\sin x \Rightarrow f'(x) = \sin x + x\cos x$

(۲) گزینه : $f(x) = x - \sin x \Rightarrow f'(x) = ۱ - \cos x$

(۳) گزینه : $f(x) = -x + \sin x \Rightarrow f'(x) = -۱ + \cos x$

(۴) گزینه : $f(x) = -x + ۲\sin x \Rightarrow f'(x) = -۱ + ۲\cos x$

با توجه به مشتقات بدست آمده، تنها در گزینه (۳)، مقدار مشتق همواره منفی می‌باشد و بنابراین تابع همواره نزولی است.

مثال ۲۳: در فاصله $[-۱,۱]$ تابع $y = xe^x$ به چه صورتی است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۷)

۱) محدب مؤکد ۲) مقعر مؤکد ۳) ابتدا مقعر ، سپس محدب ۴) ابتدا محدب بعد مقعر

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$y = xe^x \Rightarrow y' = e^x + xe^x \Rightarrow y'' = e^x + e^x + xe^x = e^x(x+۲)$$

با توجه به اینکه e^x همواره مثبت است، کافی است عبارت $x+۲$ را تعیین علامت کنیم.

$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \Rightarrow$

x		-۲	
$x+۲$		$-$	$+$
		مقعر	محدب

بنابراین در فاصله $[-۱,۱]$ تابع محدب است.

مثال ۲۴: تابعی به معادله $y = Ln(x^۲+۱)$ در فاصله $[۰,۱]$ چه وضعیتی دارد؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۷)

۱) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۲) ابتدا نزولی، سپس صعودی ۳) همواره صعودی ۴) همواره نزولی

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که:

$$y = Ln(x^۲+۱) \Rightarrow y' = \frac{۲x}{x^۲+۱}$$

واضح است که در فاصله $[۰,۱]$، مقدار y' همواره مثبت است، لذا در این فاصله تابع همواره صعودی است.

مثال ۲۵: در تابعی به معادله $y = xe^{۲x} + ۵x + ۱$ ، با افزایش یک واحد برای x ، در نقطه $x = ۰$ تقریباً چه مقدار بر y اضافه می‌شود؟

(حسابداری ـ سراسری ۷۸)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» چون تغییرات تقریبی تابع موردنظر می‌باشد، لذا از دیفرانسیل استفاده می‌کنیم.

$$dy = y'dx = (e^{۲x} + ۲xe^{۲x} + ۵ + ۰)dx \xrightarrow{x=۰,\,dx=۱} dy = (e^۰ + ۰ + ۵)\times ۱ = ۶$$

مثال ۲۶: مقدار ماکزیمم تابع $y = Lnx + x$ در فاصله $[۱,۲]$، کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۸)

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $Ln\,۲ + ۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$y = Lnx + x \Rightarrow y' = \frac{۱}{x} + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱$$

چون نقطه بحرانی بدست آمده در فاصله $[۱,۲]$ قرار ندارد، پس قابل قبول نیست. لذا مقدار ماکزیمم تابع در یکی از نقاط دو سر بازه ر خ می‌دهد.

$$y(۱) = Ln۱ + ۱ = ۱, y(۲) = Ln۲ + ۲$$

با توجه به مقادیر بدست آمده، مقدار ماکزیمم تابع برابر $Ln۲ + ۲$ خواهد بود.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۲۷: در تابعی به معادله $f(x)=۲x+۵e^{۲x}$ ، در صورتی که x، یک واحد تغییر کند، مقدار f در نقطه $x=۰$ چه مقدارتغییر خواهد کرد؟

(مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۸)

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$dy=f'(x)dx=(۲+۱۰e^{۲x})dx \xrightarrow{x=۰,dx=۱} dy=(۲+۱۰)\times ۱=۱۲$$

توجه: با توجه به مقادیر داده شده در گزینه‌ها، مشخص می‌شود که منظور طراح مقدار تقریبی تغییرات f موردنظر بوده است، ولی در صورت مسأله این موضوع قید نشده است و لذا صورت مسأله اشکال دارد و شاید هم طراح محترم از تفاوت بین تغییرات تقریبی و تغییرات دقیق (نمو تابع) اطلاع نداشته است!

مثال۲۸: بیشترین مقدار تابع $y=e^{x}+۲x$ در فاصله $[-۱,۱]$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۸)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $-Ln۲$ ۴) $e+۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$y=e^{x}+۲x \Rightarrow y'=e^{x}+۲ \Rightarrow e^{x}+۲=۰ \Rightarrow$$ ریشه ندارد

بنابراین تابع نقطه بحرانی ندارد و لذا بیشترین مقدار آن در یکی از دو سر بازه رخ می‌دهد. $y(-۱)=e^{-۱}-۲\ ,\ y(۱)=e+۲$

با توجه به مقادیر بدست آمده، بیشترین مقدار تابع برابر $e+۲$ می‌باشد.

مثال۲۹: طول نقطه عطف تابع $y=Arc\,tgx$ ، کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۸)

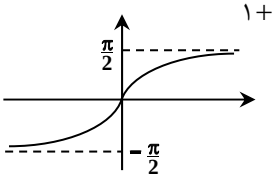
۱) ۰ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) ۱ ۴) فاقد نقطه عطف

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

روش اول:

$$y=Arctgx \Rightarrow y'=\frac{۱}{۱+x^{۲}} \Rightarrow y''=\frac{-۲x}{(۱+x^{۲})^{۲}} \Rightarrow y''=۰ \Rightarrow \frac{-۲x}{(۱+x^{۲})^{۲}}=۰ \Rightarrow -۲x=۰ \Rightarrow x=۰$$

روش دوم:



با توجه به شکل تابع $y=Arctgx$ واضح است که جهت تقعر تابع در $x=۰$ عوض می‌شود، یعنی $x=۰$ نقطه عطف تابع است.

مثال۳۰: کدام مورد برای تابع با ضابطه $f(x)=x^{۳}-۹x$ ، در فاصله $[۰\ ,۲]$ درست است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۹)

۱) صعودی ۲) مقعر ۳) محدب ۴) نزولی

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$f(x)=x^{۳}-۹x \Rightarrow f'(x)=۳x^{۲}-۹ \Rightarrow f''(x)=۶x$$

بنابراین به ازای $x<۰$ تابع مقعر و به ازای $x>۰$ تابع محدب است.

مثال۳۱: اگر f روی R دوبار مشتق‌پذیر باشد و $x_۱$ و $x_۲$ هر دو نقاط می‌نیمم نسبی f باشند، کدام گزاره درست است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۹)

۱) $f'(x_۱)f(x_۲)=۰$ ۲) $f''(x_۱)f''(x_۲)<۰$ ۳) $f(x_۱)f(x_۲)=۰$ ۴) $f''(x_۲)f(x_۱)>۰$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون نقاط $x_۱$ و $x_۲$ نقاط مینیمم هستند و تابع دو بار مشتق‌پذیر است، لذا $f'(x_۲)=۰$ و $f'(x_۱)=۰$ و همچنین طبق آزمون مشتق دوم $f''(x_۱)>۰$ و $f''(x_۲)>۰$ می‌باشد.

مثال۳۲: معادله خط مماس بر منحنی $y=e^{x-۱}$ در نقطه $x=۲$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۹)

۱) $y=e(x-۱)$ ۲) $y=e^{-۱}(x-۱)$ ۳) $y=e(x+۱)$ ۴) $y=e^{-۱}(x+۱)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$x=۲ \Rightarrow y=e^{۲-۱}=e \Rightarrow p(۲,e)$$

$$y=e^{x-۱} \Rightarrow y'=e^{x-۱} \Rightarrow y'(۲)=e=m$$ شیب خط مماس $$\Rightarrow y-e=e(x-۲) \Rightarrow y=ex-e=e(x-۱)$$

یادآوری: معادله خطی که از نقطه $p(x_۰,y_۰)$ عبور کند و شیب آن m باشد، بصورت زیر است: $y-y_۰=m(x-x_۰)$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۳۳: اگر تابع f به معادله $y = x^۲ + x$ باشد، حاصل $(dy - \Delta y)$ در نقطه $x = ۱$ و $dx = ۰/۱$ برابر است با: (حسابداری ـ سراسری ۸۰)

۱) $-۰/۰۲$ ۲) $-۰/۱$ ۳) $۰/۰۲$ ۴) $۰/۰۳$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$dy = y'dx = (۲x + ۱)dx = (۲\times ۱ + ۱)\times ۰/۱ = ۰/۳$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(۱/۱) - f(۱) = (۱/۲۱ + ۱/۱) - (۱ + ۱) = ۰/۳۱ \Rightarrow dy - \Delta y = ۰/۳ - ۰/۳۱ = -۰/۰۱$$

مثال ۳۴: تابع f به معادله $y = xe^x$ مفروض است. این تابع در چه فاصله‌ای اکیداً صعودی است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۰)

۱) R ۲) $(۱, +\infty)$ ۳) $(-۱, +\infty)$ ۴) $R^+ \cup \{۰\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$y = xe^x \Rightarrow y' = e^x + xe^x = e^x(۱ + x)$$

چون e^x همواره مثبت است، پس علامت y' به علامت $(x + ۱)$ وابسته است، در نتیجه به ازای $x < -۱$ تابع نزولی و به ازای $x > -۱$ صعودی است.

مثال ۳۵: طول مثبت نقطه عطف تابع $y = Ln(۱ + x^۲)$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$y = Ln(۱ + x^۲) \Rightarrow y' = \frac{۲x}{۱ + x^۲} \Rightarrow y'' = \frac{۲(۱ + x^۲) - ۲x \times ۲x}{(۱ + x^۲)^۲} = \frac{۲ - ۲x^۲}{(۱ + x^۲)^۲}$$

$$y'' = ۰ \Rightarrow \frac{۲ - ۲x^۲}{(۱ + x^۲)^۲} = ۰ \Rightarrow ۲ - ۲x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = -۱, ۱$$

مثال ۳۶: دیفرانسیل مرتبه دوم تابع با ضابطه $y = xe^x$ در نقطه $x = ۱$، در صورت $dx = ۰/۱$، برابر است با: (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۰)

۱) $۰/۰۲e$ ۲) $۰/۰۱e$ ۳) $۰/۰۳e$ ۴) $۰/۱e$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که:

$$y = xe^x \Rightarrow y' = e^x + xe^x \Rightarrow y'' = e^x + e^x + xe^x = (۲ + x)e^x$$

بنابراین:

$$d^۲y = y''dx^۲ = (۲ + x)e^x dx^۲ = (۲ + ۱)e^۱ \times (۰/۱)^۲ = ۰/۰۳e$$

یادآوری: $d^n y = y^{(n)} dx^n$.

مثال ۳۷: اگر f تابعی حقیقی و مشتق‌پذیر باشد و داشته باشیم $g(x) = f(x.f(x))$، آنگاه $g'(۰)$ برابر است با:

(علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۰)

۱) $f'(۰) + f(۰)$ ۲) $f'(۰).f(۰)$ ۳) $f'^۲(۰)$ ۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$g(x) = f(xf(x)) \Rightarrow g'(x) = (f(x) + xf'(x))f'(xf(x))$$

$$g'(۰) = (f(۰) + ۰f'(۰))f'(۰f(۰)) = f(۰)f'(۰)$$

یادآوری: اگر $y = f(u)$ باشد، آنگاه $y' = u'f'(u)$.

مثال ۳۸: اگر سوی تقعر منحنی نمایش تابع حقیقی به معادله $y = x^۳ + ۲ax^۲ + a$ در نقطهٔ $x = ۱$ عوض شود، مقدار a کدام است؟

(علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۰)

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) -۱ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون جهت تقعر در $x = ۱$ عوض می‌شود، پس نقطه $x = ۱$، نقطه عطف تابع است و بنابراین $y''(۱) = ۰$.

$$y' = ۳x^۲ + ۴ax \Rightarrow y'' = ۶x + ۴a \xrightarrow{y''(۱)=۰} ۶\times ۱ + ۴a = ۰ \Rightarrow a = \frac{-۳}{۲}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۳۹: طول نقطه عطف تابع $y = Ln(x^۲ + ۱)$ برابر است با: (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۱)

۱) $x = ۱ , x = -۱$ ۲) $x = ۲ , x = -۲$ ۳) $x = ۳ , x = -۳$ ۴) $x = ۴, x = -۴$

پاسخ: گزینه «۱»

$$y = Ln(x^۲ + ۱) \Rightarrow y' = \frac{۲x}{x^۲ + ۱} \Rightarrow y'' = \frac{۲(x^۲ + ۱) - ۴x^۲}{(x^۲ + ۱)^۲} = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$$

مثال۴۰: در تابع $y = x^۲ - ۴x + ۲$، به ازای $x = ۱$ و $dx = ۰/۱$ مقدار $\Delta y - dy$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۱)

۱) $۰/۰۱$ ۲) $۰/۰۲$ ۳) $-۰/۳$ ۴) $-۰/۴$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(۱/۱) - f(۱) = (۱/۱^۲ - ۴ \times ۱/۱ + ۲) - (۱ - ۴ + ۲) = -۰/۱۹$$

$$dy = y'dx = (۲x - ۴)dx = (۲ \times ۱ - ۴) \times ۰/۱ = -۰/۲$$

$$\Delta y - dy = -۰/۱۹ - (-۰/۲) = ۰/۰۱$$

مثال۴۱: شیب خط مماس بر منحنی $y = (۲x - ۱)^{\frac{x}{۲}}$ در نقطهٔ $x = ۲$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{۱}{۲}Ln۳ - ۳$ ۲) $\frac{۱}{۲}Ln۲ + ۳$ ۳) $\frac{۳}{۲}Ln۳ + ۲$ ۴) $\frac{۳}{۲}Ln۲ + ۳$

پاسخ: گزینه «۳»

$$y = (۲x - ۱)^{\frac{x}{۲}} \Rightarrow y' = (۲x - ۱)^{\frac{x}{۲}} \left(\frac{۱}{۲}Ln(۲x - ۱) + \frac{x}{۲} \times \frac{۲}{۲x - ۱}\right) \Rightarrow y'(۲) = ۳\left(\frac{۱}{۲}Ln۳ + \frac{۲}{۳}\right) = \frac{۳}{۲}Ln۳ + ۲$$

مثال۴۲: اگر تابع $y = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ از نقطه $(۰ , ۱)$ عبور کرده و در $x = ۱$ ماکزیمم و در $x = ۲$ نقطهٔ عطف داشته باشد آنگاه b کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۲)

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) ۹ ۴) -۹

پاسخ: گزینه «۳» چون منحنی از نقطه $(۰,۱)$ عبور می‌کند، لذا:

$$۱ = ۰ + a \times ۰ + b \times ۰ + c \Rightarrow c = ۱$$

نقطه $x = ۲$، نقطه عطف منحنی است، لذا مشتق دوم تابع در $x = ۲$ برابر صفر است.

$$y'' = ۶x + ۲a \Rightarrow y''(۲) = ۱۲ + ۲a = ۰ \Rightarrow a = -۶$$

با توجه به مقادیر به دست آمده برابر a و c تابع به صورت مقابل می‌باشد. $y = x^۳ - ۶x^۲ + bx + ۱$

چون نقطه $x = ۱$، نقطه ماکزیمم تابع است، بنابراین $y'(۱) = ۰$ می‌باشد.

$$y' = ۳x^۲ - ۱۲x + b \Rightarrow ۳ - ۱۲ + b = ۰ \Rightarrow b = ۹$$

مثال۴۳: اگر $۳x + ۴y = ۲۴$ باشد، ماکزیمم $x - y$ برابر است با: (حسابداری ـ آزاد ۸۲)

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۱۲ ۴) ۷

پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. ماکزیمم $x - y$ برابر بی‌نهایت است.

مثال۴۴: تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ۳ - x & x \le ۲ \\ \frac{۱}{۲}x^۲ - ۱ & x > ۲ \end{cases}$ در نقطه $x = ۲$ چگونه است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۲)

۱) ناپیوسته ۲) فاقد حدّ ۳) مشتق‌پذیر ۴) مشتق‌ناپذیر

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا پیوستگی f را در $x = ۲$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^+} \left(\frac{۱}{۲}x^۲ - ۱\right) = ۱ , \lim_{x \to ۲^-} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} (۳ - x) = ۱, f(۲) = ۱$$

بنابراین تابع در $x = ۲$ پیوسته است.

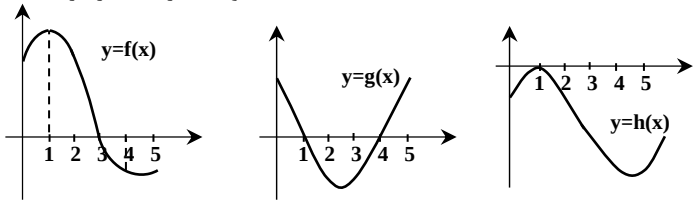
$$f(x) = \begin{cases} ۳ - x & x \le ۲ \\ \frac{۱}{۲}x^۲ - ۱ & x > ۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -۱ & x \le ۲ \\ x & x > ۲ \end{cases}$$

بنابراین $f'(۲^+) = ۲$ و $f'(۲^-) = -۱$. چون مشتق چپ و راست در $x = ۲$ با هم برابر نیست، پس تابع در $x = ۲$ مشتق‌پذیر نیست.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۴۵: با توجه به نمودارهای زیر، کدام عبارت درست است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۲)



۱) h مشتق f است.
۲) h مشتق g است.
۳) f مشتق g است.
۴) g مشتق f است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

روش اول: نقاط $x = ۱,۴$، نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع f می‌باشند. بنابراین مشتق f در این نقاط بایستی برابر صفر باشد، در نتیجه نمودار مشتق f در نقاط $x = ۱,۴$ محور xها را قطع می‌کند و نمودار g چنین ویژگی دارد.

روش دوم: تابع f در فاصله $[۰,۱]$ صعودی، در فاصله $[۱,۴]$ نزولی و در فاصله $[۴,۵]$ صعودی است، بنابراین نمودار مشتق f در فاصله $[۰,۱]$ بالای محور xها، در فاصله $[۱,۴]$ پایین محور xها و در فاصله $[۴,۵]$ بالای محور xها می‌باشد که نمودار g چنین ویژگی دارد.

مثال۴۶: بازپرداخت وام مسکن، p ، تابعی از سه متغیر است $p = f(A,r,N)$ ، که در آن A مقدار وام دریافتی به ریال، r نرخ بهره، N شمارهٔ سالهای بازپرداخت وام است کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{\partial p}{\partial N} < ۰ \;،\; \frac{\partial p}{\partial r} > ۰ \;،\; \frac{\partial p}{\partial A} > ۰$
۲) $\frac{\partial p}{\partial N} > ۰ \;،\; \frac{\partial p}{\partial r} < ۰ \;،\; \frac{\partial p}{\partial A} > ۰$
۳) $\frac{\partial p}{\partial N} < ۰ \;،\; \frac{\partial p}{\partial r} > ۰ \;،\; \frac{\partial p}{\partial A} < ۰$
۴) $\frac{\partial p}{\partial N} > ۰ \;،\; \frac{\partial p}{\partial r} < ۰ \;،\; \frac{\partial p}{\partial A} < ۰$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با افزایش مقدار وام دریافتی و مقدار نرخ بهره، مقدار بازپرداخت افزایش می‌یابد، بنابراین $\frac{\partial p}{\partial A} > ۰$ و $\frac{\partial p}{\partial r} > ۰$. ولی با افزایش تعداد سالهای بازپرداخت، مقدار بازپرداخت کاهش می‌یابد، بنابراین $\frac{\partial p}{\partial N} < ۰$ است.

مثال۴۷: طول نقطه بهینه و نوع آن در رابطه $y = Ln(-x^۲ + ۱۰x - ۲۰)$ کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۲)

۱) ۵ ، مینیمم ۲) ۵ ، ماکزیمم ۳) ۱۰، مینیمم ۴) ۱۰، ماکزیمم

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$y = Ln(-x^۲ + ۱۰x - ۲۰) \Rightarrow y' = \frac{-۲x + ۱۰}{-x^۲ + ۱۰x - ۲۰}$$

$$y' = ۰ \Rightarrow -۲x + ۱۰ \Rightarrow x = ۵ \quad \text{نقطه بحرانی}$$

برای تعیین نوع نقطه بحرانی از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم.

$$y'' = \frac{-۲(-x^۲ + ۱۰x - ۲۰) - (-۲x + ۱۰)(-۲x + ۱۰)}{(-x^۲ + ۱۰x - ۲۰)^۲} \Rightarrow y''(۵) < ۰ \Rightarrow \text{نقطه ماکزیمم}$$

مثال۴۸: داده‌های زیر را در مورد مشتق دوم تابع حقیقی f داریم. f کدام یک از توابع زیر می‌تواند باشد؟ (فرض کنید $b > ۰$ و بقیهٔ ثابتها می‌توانند مثبت یا منفی باشند.) (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۲)

x	۰	۱	۲	۳
f''	۱	−۱	−۳	−۵

۱) $ax^۲ + bx + c$ درجه دوم
۲) ae^{bx} (نمایی)
۳) $ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ (درجه سوم)
۴) $e^{\frac{-x^۲}{b}}$ (نمایی)

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

روش اول: در توابع داده شده در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) تقعر تابع همواره رو به بالا و یا همواره رو به پایین است، بنابراین f'' همواره مثبت یا همواره منفی خواهد بود که با داده‌های مسأله تطابق ندارد.

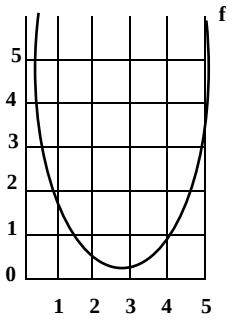
روش دوم: مقادیر f'' داده شده در صورت مسأله به صورت خطی تغییر کرده‌اند، بنابراین گزینه‌ای می‌تواند صحیح باشد، که f'' در آن تابعی خطی (درجه اول) باشد که فقط گزینه (۳) این ویژگی را دارد، یعنی مشتق مرتبه دوم آن یک عبارت درجه اول است.

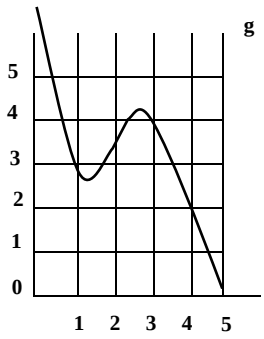
www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۴۹: نمودارهای دو تابع f و g در زیر داده شده‌اند. کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد تابع $h(x)=f(g(x))$ درست هستند؟

(علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۲)





۱) $x=۱$ و $x=۴$ نقاط می‌نیمم و $x=۳$ یک نقطهٔ ماکسیمم h است.

۲) $x=۱$ و $x=۲$ نقاط می‌نیمم و $x=۳$ یک نقطهٔ ماکسیمم h است.

۳) $x=۱$ و $x=۴$ نقاط ماکسیمم و $x=۳$ یک نقطهٔ می‌نیمم h است.

۴) $x=۴$ و $x=۲$ نقاط ماکسیمم و $x=۱$ یک نقطهٔ می‌نیمم h است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

مثال۵۰: وضعیت تابع با ضابطه $y=xLn(x+۱)$ از نظر تحدب و تقعر در دامنه خود چگونه است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۲)

۱) ابتدا محدب سپس مقعر ۲) ابتدا مقعر سپس محدب ۳) همواره محدب ۴) همواره مقعر

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» دامنه تابع، بازهٔ $(-۱,+\infty)$ می‌باشد.

$$y=xLn(x+۱) \Rightarrow y'=Ln(x+۱)+\frac{x}{x+۱} \Rightarrow y''=\frac{۱}{x+۱}+\frac{x+۱-x}{(x+۱)^۲}=\frac{x+۲}{(x+۱)^۲}$$

چون مخرج کسر همواره نامنفی است، پس کافی است صورت کسر را تعیین علامت کنیم و چون دامنهٔ تابع $x>-۱$ است پس صورت کسر نیز همواره مثبت است. در نتیجه همواره $y''>۰$ می‌باشد و تابع همواره محدب است.

مثال۵۱: تابع با ضابطه $y=Ln\frac{x}{x+۱}$، در فاصله $[۱,۲]$ چگونه است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۳)

۱) محدب ۲) مقعر ۳) نزولی اکید ۴) شامل نقطه عطف

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$y=Lnx-Ln(x+۱) \Rightarrow y'=\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x+۱} \Rightarrow y''=\frac{-۱}{x^۲}+\frac{۱}{(x+۱)^۲}$$

$$y''=\frac{-(x+۱)^۲+x^۲}{x^۲(x+۱)^۲}=\frac{-۲x-۱}{x^۲(x+۱)^۲}$$

با توجه به ضابطه y''، واضح است که در فاصله $[۱,۲]$، مقدار y'' منفی است و لذا تابع مقعر است.

مثال۵۲: ضریب زاویهٔ خط قائم بر منحنی $۳e^{xy}-y^۳+ln(۱-x)=۰$ در نقطهٔ (۱ و ۰) کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

ضریب زاویه خط مماس: $\frac{dy}{dx}=-\frac{۳ye^{xy}+\frac{-۱}{۱-x}}{۳xe^{xy}-۳y^۲}\Big|_{(۰,۱)}=-\frac{۳-۱}{۰-۳}=\frac{۲}{۳}$

$$\text{ضریب زاویه خط قائم}=\frac{-۱}{\text{ضریب زاویه خط مماس}}=\frac{-۱}{\frac{۲}{۳}}=\frac{-۳}{۲}$$

توجه: نقطه $(۰,۱)$ در روی منحنی داده شده قرار ندارد، بنابراین مسأله اشکال دارد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۵۳: در تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=a$ داریم: $y''' < 0$ و $y'=y''=0$، کدام گزینه در مورد نقطه $x=a$ مناسب است؟

(علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۳)

۱) ماکزیمم ۲) مینیمم ۳) نامعلوم ۴) عطف

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» بطور مثال تابع $y=-x^3$ در نقطه $x=0$ را در نظر بگیرید.

مثال ۵۴: تابع $f(x)=(x^2+1)e^{-x}$ در کدام بازه صعودی است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۴)

۱) $(-\infty,-1)$ ۲) $(-1,+\infty)$ ۳) R ۴) ϕ

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$f(x)=(x^2+1)e^{-x} \Rightarrow f'(x)=2xe^{-x}-(x^2+1)e^{-x}=e^{-x}(2x-x^2-1)$$

$$f'(x)=-e^{-x}(x^2-2x+1)=-e^{-x}(x-1)^2$$

چون عبارات e^{-x} و $(x-1)^2$ همواره نامنفی می‌باشند، پس $f'(x)\le 0$ و لذا تابع همواره نزولی است.

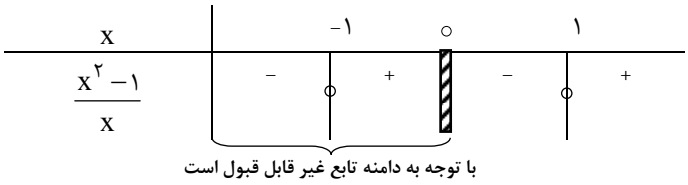
مثال ۵۵: تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x^2}{2}-\text{Ln}x$ در کدام بازه نزولی است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۴)

۱) $(-1,1)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(0,e)$ ۴) $(1,e)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» دامنه تابع $D_f=(0,+\infty)$ می‌باشد.

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-\text{Ln}x \Rightarrow f'(x)=x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}$$

حال کافی است عبارت $\frac{x^2-1}{x}$ را تعیین علامت کنیم، ریشه‌های صورت کسر ± 1 و ریشه مخرج 0 است، در نتیجه:



از جدول تعیین علامت نتیجه می‌شود در فاصله $(0,1)$ تابع f نزولی است.

مثال ۵۶: شیب خط عمود بر تابع $y=xe^x$ در نقطه $x=0$ برابر است با: (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۴)

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$y=xe^x \Rightarrow y'=e^x+xe^x \Rightarrow y'(0)=1 \text{ شیب خط مماس } \Rightarrow \text{ شیب خط عمود } = \frac{-1}{\text{شیب خط مماس}}=\frac{-1}{1}=-1$$

مثال ۵۷: در مورد $y=(2-x)^2+(3-x)^2+(4-x)^2$ کدام گزینه مناسب است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۴)

۱) دارای ماکزیممی برابر ۳ می‌باشد.
۲) دارای مینیممی برابر ۳ می‌باشد.
۳) دارای مینیممی برابر ۲ می‌باشد.
۴) دارای نقطه عطفی برابر ۲ می‌باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$y=(2-x)^2+(3-x)^2+(4-x)^2 \Rightarrow y'=-2(2-x)-2(3-x)-2(4-x)$$

$$y'=0 \Rightarrow -18+6x=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=2$$

بنابراین نقطه $(3,2)$ نقطه بحرانی تابع است. برای تعیین نوع نقطه بحرانی از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم.

$$y''=-2(-1)-2(-1)-2(-1)=6$$

چون $y''>0$ پس نقطه بحرانی مینیمم است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۵۸: تابع $y = xe^{-x}$ در چه فاصله‌ای معقر است؟ (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۵)

۱) $(-\infty, ۴)$ ۲) $(-\infty, ۳)$ ۳) $(-\infty, ۲)$ ۴) R

پاسخ: گزینه «۳»

$$y = xe^{-x} \Rightarrow y' = e^{-x} - xe^{-x} \Rightarrow y'' = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-۲)$$

برای اینکه تابع مقعر باشد، کافی است $y'' > ۰$ باشد. بنابراین:

$$e^{-x}(x-۲) < ۰ \xrightarrow{e^{-x} \text{ همواره مثبت است}} x - ۲ < ۰ \Rightarrow x < ۲$$

مثال۵۹: به ازاء کدام مقدار a تابع $y = (x+۱)e^{ax}$ در $x = ۱$ دارای نقطه عطف است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۵)

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) -۲

پاسخ: گزینه «۱»

$$y = (x+۱)e^{ax} \Rightarrow y' = e^{ax} + a(x+۱)e^{ax} \Rightarrow y'' = ae^{ax} + ae^{ax} + a^۲(x+۱)e^{ax}$$

$$y''(۱) = ۰ \Rightarrow ae^{a} + ae^{a} + ۲a^۲e^{a} = ۰ \Rightarrow e^{a}(۲a + ۲a^۲) = ۰ \Rightarrow a = ۰, -۱$$

توجه کنید که $a = ۰$ قابل قبول نیست، زیرا به ازای $a = ۰$ تابع به صورت $y = x + ۱$ در می‌آید که فاقد نقطه عطف است.

مثال۶۰: تابع $f(x) = (۱-x)(۱+x)^۳$ چند نقطه بحرانی دارد؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۵)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۱»

$$f(x) = (۱-x)(۱+x)^۳ \Rightarrow f'(x) = -۱ \times (۱+x)^۳ + ۳(۱-x)(۱+x)^۲$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow (۱+x)^۲(۳(۱-x) - (۱+x)) = ۰ \Rightarrow x = -۱, \frac{۱}{۲}$$

مثال۶۱: مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۳x^۲$ روی بازه $[۱,۴]$ کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۵)

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) -۸ ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۲»

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰, ۲$$

$$\begin{cases} f(۱) = ۱ - ۳ = -۲ \\ f(۲) = ۸ - ۱۲ = -۴ \Rightarrow \text{(مینیمم)} \\ f(۴) = ۶۴ - ۴۸ = ۱۶ \end{cases}$$

مثال۶۲: خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^۲.Ln(x-۲)$ در نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟
(حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۶)

۱) -۲۷ ۲) -۲۴ ۳) -۱۸ ۴) -۱۵

پاسخ: گزینه «۱»

$$x = ۳ \Rightarrow f(۳) = ۳^۲ Ln(۳-۲) = ۹Ln۱ = ۰ \Rightarrow P(۳, ۰)$$

$$f(x) = x^۲Ln(x-۲) \Rightarrow f'(x) = ۲xLn(x-۲) + x^۲ \times \frac{۱}{x-۲} \Rightarrow f'(۳) = ۶Ln۱ + ۹ = ۹$$

$$\xrightarrow{\text{معادله خط مماس}} y - ۰ = ۹(x-۳) \Rightarrow y = ۹x - ۲۷$$

برای به دست آوردن نقطه تلاقی خط مماس با محور yها، قرار می‌دهیم $x = ۰$ که در این صورت $y = -۲۷$ به دست می‌آید.

مثال۶۳: طول نقطه عطف تابعی به معادله $y = xe^{\frac{۱}{۲}x}$ کدام است؟ (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۶)

۱) -۲ ۲) صفر ۳) -۴ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۳»

$$y' = e^{\frac{۱}{۲}x} + \frac{۱}{۲}xe^{\frac{۱}{۲}x} \Rightarrow y'' = e^{\frac{۱}{۲}x} + \frac{۱}{۴}xe^{\frac{۱}{۲}x} \Rightarrow y'' = ۰ \Rightarrow x = -۴$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۶۴: در نقطه‌ای با کدام طول، خط مماس بر منحنی $y=\frac{۱}{\sqrt{x}}$ با خط $x+۲y=۱۰$ موازی است؟ (حسابداری ـ آزاد ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» می‌دانیم دو خط وقتی با هم موازی هستند که شیب آن‌ها با هم برابر باشد. از طرفی شیب خط مماس بر منحنی همان مشتق منحنی می‌باشد، بنابراین:

$$y=x^{-\frac{۱}{۲}}\Rightarrow y'=\frac{-۱}{۲}x^{-\frac{۳}{۲}} \quad و \quad x+۲y=۱۰\Rightarrow y=۵-\frac{x}{۲}$$

شیب خط داده شده برای $-\frac{۱}{۲}$ است و شیب خط مماس بر منحنی برابر $\frac{-۱}{۲}x^{-\frac{۳}{۲}}$ است، در نتیجه: $\frac{-۱}{۲}x^{-\frac{۳}{۲}}=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow x^{-\frac{۳}{۲}}=۱\Rightarrow x=۱$

مثال۶۵: از نقطه $M=(۴,۱)$ قائمی بر منحنی $y=-x^۲+۲x$ رسم شده است. طول پای قائم کدام است؟ (حسابداری ـ آزاد ۸۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» نقطه داده شده در صورت سؤال روی منحنی داده شده قرار ندارد، لذا می‌خواهیم از نقطه‌ای خارج از منحنی خطی قائم بر منحنی رسم کنیم، اگر طول‌های قائم را α فرض کنیم عرض آن به صورت $-\alpha^۲+۲\alpha$ خواهد بود زیرا این نقطه روی منحنی قرار دارد، از طرفی شیب خط مماس بر منحنی $y'=-۲x+۲$ است و در نتیجه شیب خط قائم بر منحنی به صورت $\frac{-۱}{-۲x+۲}$ است که در نقطه $x=\alpha$ به صورت $\frac{-۱}{-۲\alpha+۲}$ در می‌آید، بنابراین معادله خط قائم به شکل زیر است:

$$y=(-\alpha^۲+۲\alpha)-\frac{-۱}{-۲\alpha+۲}(x-\alpha)$$

چون نقطه $M(۴,۱)$ روی خط قائم قرار دارد، پس: $۱+\alpha^۲-۲\alpha=\frac{-۱}{-۲(\alpha-۱)}(۴-\alpha)\Rightarrow ۲(\alpha-۱)^۳=۴-\alpha$

با توجه به گزینه‌های داده شده در سؤال $\alpha=۲$ می‌باشد.

مثال۶۶: هرگاه $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ باشد مقدار $df(۱,۱)$ به ازاء $dx=dy=۰/۱$ کدام است؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۷)

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۱ ۳) ۱ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که: $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial x}dy=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}dx+\frac{۱}{۲\sqrt{y}}dy$

حال با جایگزینی مقادیر داده شده در صورت سئوال نتیجه می‌شود: $df(۱,۱)=\frac{۱}{۲\sqrt{۱}}(۰/۱)+\frac{۱}{۲\sqrt{۱}}(۰/۱)=۰/۱$

مثال۶۷: اگر در تابع حقیقی $y=f(x)$، همواره داشته باشیم $\forall x,x_۰\in D_f: f(x)<f(x_۰)+f'(x_۰)(x-x_۰)$ کدام یک از موارد زیر برای تابع برقرار است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۸)

۱) شبه محدب ۲) شبه مقعر ۳) اکیداً محدّب ۴) اکیداً مقعر

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۶۸: آهنگ متوسط تغییر تابع $y = x^3 + 2x$ وقتی x از ۲ به ۲/۱ می‌رسد، کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۸)

۱) ۱۴/۶۱ ۲) ۱۳/۹۱ ۳) ۱۳/۸۲ ۴) ۱۴/۵۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\Delta y = f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ) = f(2/1) - f(2) = (2/1)^3 + 2(2/1) - 2^3 - 2(2) = 1/461 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 14/61$$

مثال۶۹: در تابع $y = \sqrt{x}$ مقدار $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ در فاصله $x = 4$ به ازای $\Delta x = 0/41$ چقدر است؟ (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۸)

۱) $\frac{10}{41}$ ۲) $\frac{5}{41}$ ۳) $\frac{4}{41}$ ۴) $\frac{20}{41}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(4/41) - f(4)}{0/41} = \frac{\sqrt{4/41} - \sqrt{4}}{0/41} = \frac{2/1 - 2}{0/41} = \frac{0/1}{0/41} = \frac{10}{41}$$

مثال۷۰: شیب خط مماس بر منحنی $y = x\sin\frac{1}{x}$ در $x_\circ = \frac{1}{\pi}$ کدام است؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۸)

۱) π ۲) $-\frac{1}{\pi}$ ۳) $-\pi$ ۴) $\frac{1}{\pi}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» شیب خط مماس بر منحنی همان مشتق منحنی می‌باشد.

$$y = x\sin\frac{1}{x} \Rightarrow y' = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} \Rightarrow y'(\frac{1}{\pi}) = \sin\pi - \pi\cos\pi = \pi$$

مثال۷۱: هر گاه $z = f(x,y) = e^{4x-3y}$ در این صورت $d^n f$ (دیفرانسیل مرتبه nام f) کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۹)

۱) $3 \times 4e^{4x-3y}(4dx - 3dy)^n$ ۲) $e^{4x-3y}(4dx - 3dy)^n$

۳) $(4e^{4x-3y})^n(4dx - 3dy)^n$ ۴) $(4x - 3y)e^{4x-3y}(4dx - 3dy)^n$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dx = 4e^{4x-3y}dx - 3e^{4x-3y}dy = e^{4x-3y}(4dx - 3dy)$$

با توجه به دیفرانسیل مرتبه اول بدست آمده در بالا، فقط گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مدرسان شریف

فصل هفتم

« انتگرال و کاربرد انتگرال »

مثال۱: اگر داشته باشیم $I(x)=\int \frac{dx}{۴-x^۲}$ **، و ثابت انتگرال‌گیری** $c=۰$ **باشد،** $I(۱)$ **کدام است؟**

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}\text{Ln}\,۲$ ۴) $\frac{۱}{۴}\text{Ln}\,۳$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$I(x)=\int \frac{dx}{۴-x^۲}=-\int \frac{dx}{x^۲-۴}=-\int \frac{dx}{(x+۲)(x-۲)}=\frac{-۱}{۲\times ۲}\text{Ln}\left|\frac{x-۲}{x+۲}\right|+c \Rightarrow I(۱)=\frac{-۱}{۴}\text{Ln}\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۴}\text{Ln}۳$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲: اگر $F(x)=\int \frac{x+۱}{\sqrt[۳]{x^۲+۲x+۱}}dx$**، به ازای** $c=۰$ **مقدار** $F(۰)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$F(x)=\int \frac{x+۱}{\sqrt[۳]{x^۲+۲x+۱}}\,dx=\int \frac{x+۱}{\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}}\,dx=\int (x+۱)^{\frac{۱}{۳}}dx=\frac{۳}{۴}(x+۱)^{\frac{۴}{۳}}+c \xrightarrow{c=۰} F(۰)=\frac{۳}{۴}(۰+۱)^{\frac{۴}{۳}}=\frac{۳}{۴}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳: اگر $I(t)=\int \frac{t^۲dt}{t+۱}$ **باشد، مقدار** $I(۱)-I(۰)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۳}{۲}-\text{Ln}۲$ ۲) $۱-\text{Ln}۲$ ۳) $\frac{۱}{۲}+\text{Ln}۲$ ۴) $-\frac{۱}{۲}+\text{Ln}۲$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» چون درجه صورت کسر بیشتر از مخرج کسر می‌باشد، لذا صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم و سپس به محاسبه انتگـرال می‌پردازیم.

$$I(t)=\int (t-۱+\frac{۱}{t+۱})dt=\frac{t^۲}{۲}-t+\text{Ln}(t+۱)+c \Rightarrow I(۱)-I(۰)=(\frac{۱}{۲}-۱+\text{Ln}۲)-(۰-۰+\text{Ln}۱)=\frac{-۱}{۲}+\text{Ln}۲$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۴: اگر داشته باشیم $I(x)=\int x\cos x\,dx$ **، و ثابت انتگرال‌گیری** $c=۰$ **باشد،** $I(۰)$ **کدام است؟**

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $\sin ۱$ ۴) $۱-\sin ۱$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء به کمک جدول خواهیم داشت:

	مشتق	انتگرال
⊕	x	$\cos x$
⊖	۱	$\sin x$
⊕	۰	$-\cos x$

$$\Rightarrow I(x)=\int x\cos x dx=x\sin x+\cos x \Rightarrow I(۰)=۰\sin ۰+\cos ۰=۱$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۵: اگر $I(x)=\int xe^{2x}dx$، باشد مقدار $I(1)-I(0)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}(e^2-1)$ ۲) $\frac{1}{4}(e^2+1)$ ۳) $\frac{1}{2}(e^2-1)$ ۴) $\frac{1}{2}(e^2+1)$

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء به کمک جدول خواهیم داشت:

	مشتق	انتگرال
⊕	x	e^{2x}
⊖	1	$\frac{1}{2}e^{2x}$
⊕	0	$\frac{1}{4}e^{2x}$

$$\Rightarrow I(x)=\int xe^{2x}dx=\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x} \Rightarrow I(1)-I(0)=(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2)-(0-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

مثال۶: حاصل انتگرال $\int_0^1 (3x+2)(2xdx)$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۴»

$$\int_0^1 (3x+2)(2xdx)=\int_0^1 (6x^2+4x)dx=(6\times\frac{x^3}{3}+4\times\frac{x^2}{2})\Big|_0^1=4$$

مثال۷: مقدار انتگرال $I=\int_3^4 \frac{x-3}{x-2}dx$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $1-\ln 2$ ۳) $1-\ln 3$ ۴) $2+\ln 2$

پاسخ: گزینه «۲» چون درجه صورت و مخرج با هم برابر است، باید صورت را بر مخرج تقسیم کرد:

$$I=\int_3^4 \frac{x-3}{x-2}dx=\int_3^4 \frac{(x-2)-1}{x-2}dx=\int_3^4 (1-\frac{1}{x-2})dx=(x-\text{Ln}(x-2))\Big|_3^4=(4-\text{Ln}2)-(3-\text{Ln}1)=1-\text{Ln}2$$

مثال۸: مقدار عبارت $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}dx$ کدام است؟

۱) $2\text{Ln}2$ ۲) $1-2\text{Ln}2$ ۳) $1+2\text{Ln}2$ ۴) $-2\text{Ln}2$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\int_0^1 (\frac{x-1}{x+1})dx=\int_0^1 (1-\frac{2}{x+1})dx=\int_0^1 dx-2\int_0^1 \frac{dx}{x+1}=[x]_0^1-2[\text{Ln}(x+1)]_0^1=1-2\text{Ln}2$$

مثال۹: حاصل عبارت $I=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ کدام است؟

۱) $2-\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}-1$ ۳) $\sqrt{2}+1$ ۴) $2+\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه « ۲» عبارت زیر رادیکال را برابر u فرض می‌کنیم:

$$I=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \rightarrow \begin{cases} x^2+1=u \rightarrow 2xdx=du \Rightarrow xdx=\frac{du}{2} \\ x=0\rightarrow u=1\ ,\ x=1\rightarrow u=2 \end{cases} \Rightarrow I=\int_1^2 \frac{\frac{du}{2}}{\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u}}=[\frac{1}{2}\times 2\sqrt{u}]_1^2=\sqrt{2}-1$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۰: حاصل $\int_{۱}^{۳}\frac{dx}{(۱+x)\sqrt{x}}$ **، کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{\pi}{۳}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با استفاده از تغییر متغیر $\sqrt{x}=u$ تست را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{x}=u \Rightarrow \frac{dx}{۲\sqrt{x}}=du \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}}=۲du$$

$$\int\frac{dx}{(۱+x)\sqrt{x}}=\int\frac{۲du}{۱+u^{۲}}=۲Arctgu=۲Arctg\sqrt{x}$$

$$I=\int_{۱}^{۳}\frac{dx}{(۱+x)\sqrt{x}}=[۲Arctg\sqrt{x}]_{۱}^{۳}=۲Arctg\sqrt{۳}-۲Arctg۱=\frac{۲\pi}{۳}-۲\times\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۶}$$

مثال۱۱: حاصل $I=۶\circ\int_{۱}^{۲}(x^{۲}-۴x)(x-۲)^{۹}dx$ **کدام است؟**

۱) ۲۳ ۲) ۱۹ ۳) ۱۸ ۴) ۱۷

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$I=۶\circ\int[(x-۲)^{۲}-۴](x-۲)^{۹}dx=۶\circ\int[(x-۲)^{۱۱}-۴(x-۲)^{۹}]dx=۶\circ[\frac{(x-۲)^{۱۲}}{۱۲}-\frac{۴(x-۲)^{۱\circ}}{۱\circ}]_{۱}^{۲}=۱۹$$

مثال۱۲: اگر $\int_{۱}^{۲}\frac{dx}{x^{۳}+x}=Ln\sqrt{A}$ **باشد، عدد A کدام است؟**

۱) ۱/۶ ۲) ۱/۵ ۳) ۱/۴ ۴) ۱/۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$\int_{۱}^{۲}\frac{dx}{x^{۳}+x}=\int_{۱}^{۲}\frac{dx}{x(x^{۲}+۱)}=\int_{۱}^{۲}(\frac{۱}{x}-\frac{x}{x^{۲}+۱})dx$$

$$\int_{۱}^{۲}\frac{dx}{x}-\int_{۱}^{۲}\frac{xdx}{x^{۲}+۱}=[Lnx]_{۱}^{۲}-\frac{۱}{۲}[Ln(x^{۲}+۱)]_{۱}^{۲}=(Ln۲-\cancel{Ln۱})-\frac{۱}{۲}(Ln۵-Ln۲)=\frac{۳}{۲}Ln۲-\frac{۱}{۲}Ln۵$$

$$=Ln(۲)^{\frac{۳}{۲}}-Ln(۵)^{\frac{۱}{۲}}=Ln\sqrt{۸}-Ln\sqrt{۵}=Ln\sqrt{\frac{۸}{۵}}=Ln\sqrt{A}\Rightarrow A=\frac{۸}{۵}=۱/۶$$

در مورد محاسبه انتگرال دوم با فرض $x^{۲}+۱=u$ ، داریم:

$$x^{۲}+۱=u\Rightarrow ۲xdx=du\Rightarrow xdx=\frac{du}{۲}$$

$$\int\frac{xdx}{x^{۲}+۱}=\int\frac{۱}{u}.\frac{du}{۲}=\frac{۱}{۲}\int\frac{du}{u}=\frac{۱}{۲}Lnu=\frac{۱}{۲}Ln(x^{۲}+۱)$$

مثال۱۳: مقدار انتگرال $I=\int_{\circ}^{۱}xe^{-x}dx$ **، کدام است؟**

۱) e ۲) e -۱ ۳) $\frac{۲}{e}$ ۴) $۱-\frac{۲}{e}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» برای محاسبه انتگرال مورد نظر از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$I=\int_{\circ}^{۱}xe^{-x}dx=(-xe^{-x}-e^{-x})\Big|_{\circ}^{۱}=(-e^{-۱}-e^{-۱})-(\circ-۱)=۱-\frac{۲}{e}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۴: کدام انتگرال زیر همگراست؟

۱) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)dx$ ۲) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+1}$ ۳) $\int_{0}^{\infty} x^2 \arctan(x)dx$ ۴) $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

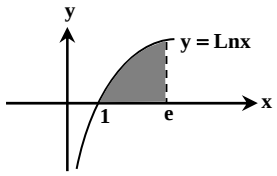
$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du = -\frac{1}{2}\times\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{u} = -\sqrt{1-x^2} \Rightarrow I = \int_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = [-\sqrt{1-x^2}]_{0}^{1} = 1$$

چون حاصل انتگرال برابر عدد ۱ می‌شود، پس انتگرال به عدد ۱ همگراست.

مثال۱۵: مساحت محدود به منحنی $y = Lnx$ و محور xها و خط $x = e$ کدام است ؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{e}{2}$ ۴) e

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»



$$Lnx = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \int_{1}^{e} Lnx\,dx = [x\,Lnx - x]_{1}^{e} = 1$$

مثال۱۶: مساحت ناحیه محدود به منحنی تابع $y = x^2.e^{-x}$ و محور xها روی بازه $[0,2]$ کدام است؟

۱) $1-\frac{1}{e^2}$ ۲) $2-\frac{10}{e^2}$ ۳) $1-\frac{4}{e^2}$ ۴) $2-\frac{5}{e^2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» از روش تشکیل جدول انتگرال را حل می‌کنیم: $S = \int_{0}^{2} x^2e^{-x}dx$

x^2	e^{-x}
$2x$ (+)	$-e^{-x}$
2 (-)	e^{-x}
0 (+)	$-e^{-x}$

$$S = [-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}]_{0}^{2} = [-4e^{-2} - 4e^{-2} - 2e^{-2}] - (-2) = 2 - 10e^{-2} = 2 - \frac{10}{e^2}$$

مثال۱۷: مساحت سطح محصور بین منحنی $y = -x^2 + 4x - 3$ و محور xها کدام است ؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$y = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \ , \ x = 3$$

$$S = \int_{1}^{3} (-x^2 + 4x - 3)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_{1}^{3} = \frac{4}{3}$$

مثال۱۸: اگر $F(x) = \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}}dx$، به ازای $c = 0$ مقدار $F(0)$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۵)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{4}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$F(x) = \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}}dx = \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}dx = \int (x+1)^{\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} + c \xrightarrow{c=0} F(0) = \frac{3}{4}(0+1)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۹: مقدار انتگرال $I=\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ به ازای $x=8$ و $c=2$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۵)

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از تغییر متغیر $u=x+1$ ، $du=dx$ نتیجه می‌شود:

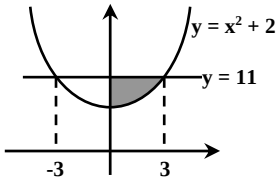
$$I=\int \frac{u-1}{\sqrt{u}}du=\int \frac{u-1}{u^{\frac{1}{2}}}du=\int (u^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{-1}{2}})du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-2u^{\frac{1}{2}}+c=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-2(x+1)^{\frac{1}{2}}+c$$

$$I(x)=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-2(x+1)^{\frac{1}{2}}+c \xrightarrow{x=8,c=2} I=\frac{2}{3}\times 9^{\frac{3}{2}}-2\times 9^{\frac{1}{2}}+2=18-6+2=14$$

مثال۲۰: سطح محصور بین منحنی $y=x^2+2$ و خطوط $y=11$ و $x=0$ واقع در ناحیه اول کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۵)

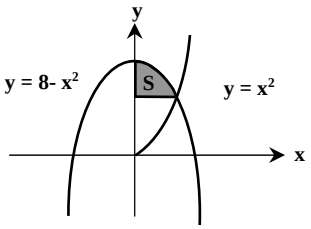
۱) ۴۸ ۲) ۳۳ ۳) ۱۸ ۴) ۱۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» سطح موردنظر در شکل مقابل هاشور خورده است که برابر سطح محصور ما بین خط $y=11$ و $y=x^2+2$ از $x=0$ تا $x=3$ می‌باشد.



$$S=\int_0^3 (11-(x^2+2))dx=\int_0^3 (9-x^2)dx=(9x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^3=18$$

مثال۲۱: در شکل مقابل مساحت S کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۶)



۱) $\frac{16}{3}$
۲) $\frac{32}{3}$
۳) ۱۲
۴) ۱۸

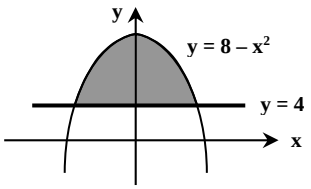
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا محل تلاقی دو منحنی $y=x^2$ و $y=8-x^2$ را بدست می‌آوریم.

$$x^2=8-x^2 \Rightarrow 2x^2=8 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2$$

به ازای $x=2$، مقدار $y=4$ بدست می‌آید. بنابراین خط افقی رسم شده در شکل، خط $y=4$ است. برای محاسبه سطح هاشور خورده موردنظر کافی است سطح محصور ما بین $y=8-x^2$ و $y=4$ را در فاصله $0\le x\le 2$ بدست آوریم.

$$S=\int_0^2 ((8-x^2)-4)dx=\int_0^2 (4-x^2)dx=(4x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^2=\frac{16}{3}$$

مثال۲۲: سطح سایه زده شده برابر کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۷)



۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{32}{3}$
۳) ۴ ۴) $\frac{16}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا محل تلاقی $y=8-x^2$ و $y=4$ را بدست می‌آوریم. $8-x^2=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

بنابراین سطح محصور ما بین $y=8-x^2$ و $y=4$ برابر است با:

$$S=\int_{-2}^2 (8-x^2-4)dx=\int_{-2}^2 (4-x^2)dx=\left[(4x-\frac{x^3}{3})\right]_{-2}^2=(8-\frac{8}{3})-(-8+\frac{8}{3})=\frac{32}{3}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۲۳: اگر $I(t)=\int ۳t^۲Lnt\,dt$ باشد، مقدار $I(e)-I(۱)$ برابر کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۷)

۱) $\frac{۱}{۳}(e^۳+۱)$ ۲) $\frac{۱}{۳}(۲e^۳-۱)$ ۳) $\frac{۱}{۳}(۲e^۳+۱)$ ۴) $\frac{۱}{۳}(e^۳-۱)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» داریم: $\int t^nLntdt=\frac{t^{n+۱}}{n+۱}Lnt-\frac{t^{n+۱}}{(n+۱)^۲}+c$ بنابراین:

$$I(t)=\int ۳t^۲Lntdt=۳\int t^۲Lntdt=۳(\frac{t^۳}{۳}Lnt-\frac{t^۳}{۹})+c=t^۳Lnt-\frac{t^۳}{۳}+c$$

$$I(e)-I(۱)=(e^۳Lne-\frac{e^۳}{۳})-(Ln۱-\frac{۱}{۳})=(e^۳-\frac{e^۳}{۳})-(\frac{-۱}{۳})=\frac{۲e^۳}{۳}+\frac{۱}{۳}$$

مثال ۲۴: اگر $I(x)=\int xe^{۲x}dx$، باشد مقدار $I(۱)-I(۰)$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۷)

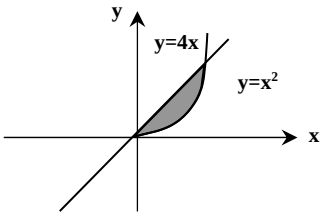
۱) $\frac{۱}{۴}(e^۲-۱)$ ۲) $\frac{۱}{۴}(e^۲+۱)$ ۳) $\frac{۱}{۲}(e^۲-۱)$ ۴) $\frac{۱}{۲}(e^۲+۱)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء به کمک جدول خواهیم داشت:

مشتق	انتگرال
$\oplus x$	$e^{۲x}$
$\ominus ۱$	$\frac{۱}{۲}e^{۲x}$
$\oplus ۰$	$\frac{۱}{۴}e^{۲x}$

$$\Rightarrow I(x)=\int xe^{۲x}dx=\frac{x}{۲}e^{۲x}-\frac{۱}{۴}e^{۲x}\Rightarrow I(۱)-I(۰)=(\frac{۱}{۲}e^۲-\frac{۱}{۴}e^۲)-(۰-\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۴}e^۲+\frac{۱}{۴}$$

مثال ۲۵: سطح سایه زده شده، کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۷)



۱) ۱۸
۲) ۱۶
۳) $\frac{۳۲}{۳}$
۴) $\frac{۱۶}{}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا محل تلاقی دو منحنی $y=x^۲$ و $y=۴x$ را بدست می‌آوریم.

$$x^۲=۴x\Rightarrow x^۲-۴x=۰\Rightarrow x(x-۴)=۰\Rightarrow x=۰,۴$$

$$S=\int_۰^۴(۴x-x^۲)dx=(۲x^۲-\frac{x^۳}{۳})\Big|_۰^۴=۳۲-\frac{۶۴}{۳}=\frac{۳۲}{۳}$$

مثال ۲۶: مقدار انتگرال $I=\int_۰^۱\frac{t}{t+۱}dt$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{۱}{۲}Ln۲-۱$ ۲) $۱-Ln۲$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

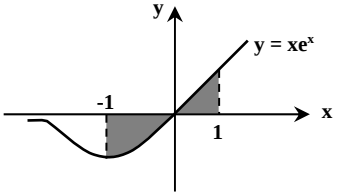
☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$I=\int_۰^۱\frac{t}{t+۱}dt=\int_۰^۱\frac{(t+۱)-۱}{t+۱}dt=\int_۰^۱(۱-\frac{۱}{t+۱})dt=(t-Ln(t+۱))\Big|_۰^۱=۱-Ln۲$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۲۷: سطح سایه زده در شکل مقابل کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۸)



۱) e

۲) $۲-\frac{۲}{e}$

۳) $e-۱$

۴) $e+۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» انتگرال را با روش جزء به جزء به کمک جدول محاسبه می‌کنیم و چون قسمتی از منحنی زیر محور xها و قسمتی از آن بالای محور xها قرار دارد. بنابراین به ناچار مساحت هر قسمت را جداگانه بدست آورده و با هم جمع می‌کنیم.

مشتق	انتگرال
$\oplus$ x	e^x
$\ominus$ ۱	e^x
$\oplus$ ۰	e^x

$$I_۱=\int_{-۱}^{۰} xe^x dx=(xe^x-e^x)\Big|_{-۱}^{۰}=(۰-۱)-(-۱e^{-۱}-e^{-۱})=\frac{۲}{e}-۱\Rightarrow S_۱=۱-\frac{۲}{e}$$

$$I_۲=\int_{۰}^{۱} xe^x dx=(xe^x-e^x)\Big|_{۰}^{۱}=(e-e)-(۰-۱)=۱\Rightarrow S_۲=۱$$

بنابراین مساحت موردنظر برابر $S=S_۱+S_۲=۲-\frac{۲}{e}$ می‌باشد.

مثال۲۸: اگر $I(x)=\int\frac{x}{\sqrt{x+۱}}dx$ باشد، مقدار $I(۳)-I(۰)$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۸)

۱) ۲

۲) $\frac{۸}{۳}$

۳) $-\frac{۴}{۳}$

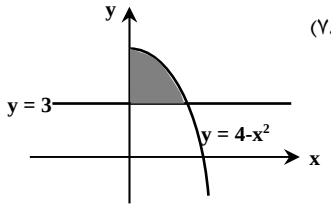
۴) -۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از تغییر متغیر $u=x+۱$، $du=dx$ و $x=u-۱$ خواهیم داشت:

$$I(x)=\int\frac{x}{\sqrt{x+۱}}dx=\int\frac{u-۱}{\sqrt{u}}du=\int(u^{\frac{۱}{۲}}-u^{\frac{-۱}{۲}})du=\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}-۲u^{\frac{۱}{۲}}+c=\frac{۲}{۳}(x+۱)^{\frac{۳}{۲}}-۲(x+۱)^{\frac{۱}{۲}}+c$$

$$I(۳)-I(۰)=(\frac{۲}{۳}\times۴^{\frac{۳}{۲}}-۲\times۴^{\frac{۱}{۲}})-(\frac{۲}{۳}\times۱^{\frac{۳}{۲}}-۲\times۱^{\frac{۱}{۲}})=(\frac{۱۶}{۳}-۴)-(\frac{۲}{۳}-۲)=\frac{۸}{۳}$$

مثال۲۹: سطح سایه زده شده در شکل مقابل برابر کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۸)



۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) ۱

۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا محل تلاقی دو منحنی را بدست می‌آوریم.

$$۴-x^۲=۳\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱$$

توجه کنید که فقط ریشه $x=۱$ قابل قبول است و بنابراین مساحت سطح موردنظر برابر است با:

$$S=\int_{۰}^{۱}((۴-x^۲)-۳)dx=\int_{۰}^{۱}(۱-x^۲)dx=(x-\frac{x^۳}{۳})\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۲}{۳}$$

مثال۳۰: مقدار انتگرال $I=\int_{۰}^{۱}\frac{x+۱}{\sqrt{x^۲+۲x}}dx$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۸)

۱) $\sqrt{۳}$

۲) ۱

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۴) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از تغییر متغیر $u=x^۲+۲x$، $du=(۲x+۲)dx$ یا $(x+۱)dx=\frac{du}{۲}$ خواهیم داشت:

$$I(x)=\int\frac{x+۱}{\sqrt{x^۲+۲x}}dx=\int\frac{\frac{۱}{۲}du}{\sqrt{u}}=\frac{۱}{۲}\int u^{\frac{-۱}{۲}}du=\frac{۱}{۲}\times۲u^{\frac{۱}{۲}}+c=u^{\frac{۱}{۲}}+c=\sqrt{x^۲+۲x}+c\Rightarrow I=\int_{۰}^{۱}\frac{x+۱}{\sqrt{x^۲+۲x}}dx=\sqrt{x^۲+۲x}\,|_{۰}^{۱}=\sqrt{۳}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۳۱: اگر $I(x)=\int e^{\sqrt{x}}dx$ ، آنگاه $I(1)-I(0)$ برابر کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱ ۲) $۲(e-۱)$ ۳) $(e-۱)$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از تغییر متغیر $u=\sqrt{x}$ ، $u^۲=x$ و $۲udu=dx$ داریم:

$$I(x)=\int e^{\sqrt{x}}dx=\int ۲ue^u du=۲\int ue^u du$$

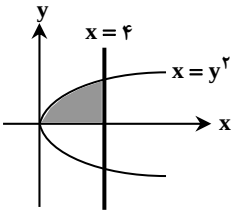
$$\int ue^u du=ue^u-e^u+c$$

برای محاسبه انتگرال اخیر از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء به کمک جدول استفاده می‌کنیم:

از روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$I(x)=\int e^{\sqrt{x}}dx=۲(ue^u-e^u)+c=۲(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x}})=۲e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-۱)\Rightarrow I(۱)-I(۰)=۲e(۱-۱)-۲e^{۰}(۰-۱)=۲$$

مثال۳۲: در شکل مقابل سطح سایه زده کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۹)



۱) $\frac{۱۶}{۳}$
۲) ۴
۳) $\frac{۸}{۳}$
۴) ۶

پاسخ: گزینه «۱» مساحت موردنظر برابر سطح زیر منحنی $y=\sqrt{x}$ و محور xها در فاصله $۰\le x\le ۴$ می‌باشد.

$$S=\int_{۰}^{۴}\sqrt{x}dx=\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}\Big|_{۰}^{۴}=\frac{۲}{۳}\times ۴^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱۶}{۳}$$

مثال۳۳: اگر $I=\int_{۰}^{۱}\frac{x}{x^۲+۱}dx$ مقدار I برابر است با : (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}Arctg۱$ ۴) $\frac{۱}{۲}Ln۲$

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از تغییر متغیر $u=x^۲+۱$ ، $du=۲xdx$ ، $xdx=\frac{du}{۲}$ نتیجه می‌شود:

$$I(x)=\int\frac{xdx}{x^۲+۱}=\int\frac{\frac{۱}{۲}du}{u}=\frac{۱}{۲}Lnu+c=\frac{۱}{۲}Ln(x^۲+۱)+c\Rightarrow I=\int_{۰}^{۱}\frac{xdx}{x^۲+۱}=\frac{۱}{۲}Ln(x^۲+۱)\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۲}Ln۲$$

مثال۳۴: سطح محصور بین منحنی $y=x^۲$ و خط $y=x$ برابر است با : (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا محل تلاقی دو منحنی را بدست می‌آوریم. $x^۲=x\Rightarrow x^۲-x=۰\Rightarrow x(x-۱)=۰\Rightarrow x=۰,۱$

$$S=\int_{۰}^{۱}(x-x^۲)dx=(\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۳})\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}$$

مثال۳۵: اگر $y=Ln(۱+x^۲)+\int_{۰}^{۱}\sin(e^x)dx$ باشد، آنگاه $y'(۱)$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۹)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $Ln۲$ ۴) $۱+\sin e$

پاسخ: گزینه «۲»

$$y=Ln(۱+x^۲)+\underbrace{\int_{۰}^{۱}\sin(e^x)dx}_{\text{عدد ثابت}}\Rightarrow y'=\frac{۲x}{۱+x^۲}+۰\Rightarrow y'(۱)=\frac{۲}{۲}=۱$$

توجه: حاصل انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ عددی ثابت است، و بنابراین مشتق آن صفر است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۳۶: اگر $I(x)=\int e^{\text{Ln}\sqrt{2x+1}}dx$ باشد، $I(1)-I(0)$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۹)

۱) $\text{Ln}3$ ۲) $\sqrt{3}-\frac{1}{3}$ ۳) $e^{\text{Ln}\sqrt{3}}-1$ ۴) $\frac{1}{3}e^{\text{Ln}\sqrt{3}}-\frac{1}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$I(x)=\int e^{\text{Ln}\sqrt{2x+1}}dx=\int\sqrt{2x+1}\,dx=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Rightarrow I(1)-I(0)=\frac{1}{3}\times3^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\times1^{\frac{3}{2}}=\sqrt{3}-\frac{1}{3}$$

مثال ۳۷: $\int_0^1 xe^{5x}dx$ برابر کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{1}{25}(1+4e^5)$ ۲) $\frac{1}{25}(4-e^5)$ ۳) $\frac{1}{5}(4+e^5)$ ۴) $\frac{1}{5}(1-4e^5)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای محاسبه انتگرال از روش جزء به جزء به کمک جدول استفاده می‌کنیم.

مشتق	انتگرال
⊕ x	e^{5x}
⊖ 1	$\frac{1}{5}e^{5x}$
⊕ 0	$\frac{1}{25}e^{5x}$

$$\Rightarrow I=\int_0^1 xe^{5x}dx=\left(\frac{x}{5}e^{5x}-\frac{1}{25}e^{5x}\right)\Big|_0^1=\left(\frac{1}{5}e^5-\frac{1}{25}e^5\right)-\left(0-\frac{1}{25}\right)=\frac{4}{25}e^5+\frac{1}{25}=\frac{1}{25}(4e^5+1)$$

مثال ۳۸: مقدار انتگرال $I=\int_0^1\frac{x}{1+x}dx$ برابر است با: (حسابداری ـ سراسری ۸۰)

۱) $\text{Ln}\,2$ ۲) $1-\text{Ln}\,2$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$I=\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\int_0^1\frac{(x+1)-1}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=\left(x-\text{Ln}(1+x)\right)\Big|_0^1=1-\text{Ln}2$$

مثال ۳۹: مقدار انتگرال $I=\int_0^1 2xe^{2x}dx$ برابر است با: (حسابداری ـ سراسری ۸۰)

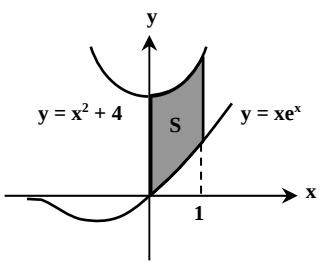
۱) $\frac{1}{2}(e^2+1)$ ۲) $\frac{1}{2}(e^2-1)$ ۳) $\frac{1}{2}e^2$ ۴) e^2

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از روش جزء به جزء به کمک جدول استفاده می‌کنیم:

مشتق	انتگرال
⊕ 2x	e^{2x}
⊖ 2	$\frac{1}{2}e^{2x}$
⊕ 0	$\frac{1}{4}e^{2x}$

$$\Rightarrow I=\int_0^1 2xe^{2x}dx=\left(xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}\right)\Big|_0^1=\left(e^2-\frac{1}{2}e^2\right)-\left(0-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(e^2+1)$$

مثال ۴۰: در شکل مقابل مقدار مساحت S کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۰)



۱) $2e$
۲) $4e$
۳) $\frac{1}{3}+e$
۴) $\frac{10}{3}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مساحت موردنظر، برابر مساحت محصور مابین نمودار $y = x^۲ + ۴$ و $y = xe^x$ در فاصله $[۰,۱]$ می‌باشد.

$$S = \int_۰^۱ (x^۲ + ۴ - xe^x)dx = (\frac{x^۳}{۳} + ۴x - xe^x + e^x)\Big|_۰^۱ = (\frac{۱}{۳} + ۴ - e + e) - (۰ + ۰ - ۰ + ۱) = \frac{۱۰}{۳}$$

✍ **مثال۴۱: مقدار انتگرال $I = \int_۰^۱ \frac{x}{\sqrt{x+۱}}dx$ برابر است با:** (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{۴-۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{-۴+۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{۱-\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{-۱+\sqrt{۲}}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

روش اول:

$$I = \int_۰^۱ \frac{x}{\sqrt{x+۱}}dx = \int_۰^۱ \frac{(x+۱)-۱}{(x+۱)^{\frac{۱}{۲}}}dx = \int_۰^۱ ((x+۱)^{\frac{۱}{۲}} - (x+۱)^{\frac{-۱}{۲}})dx = (\frac{۲}{۳}(x+۱)^{\frac{۳}{۲}} - ۲(x+۱)^{\frac{۱}{۲}})\Big|_۰^۱$$

$$= (\frac{۲}{۳} \times ۲^{\frac{۳}{۲}} - ۲ \times ۲^{\frac{۱}{۲}}) - (\frac{۲}{۳} - ۲) = (\frac{۲}{۳} \times ۲\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۲}) + \frac{۴}{۳} = \frac{-۲\sqrt{۲}}{۳} + \frac{۴}{۳} = \frac{۴-۲\sqrt{۲}}{۳}$$

روش دوم: برای محاسبه انتگرال از تغییر متغیر $u = x+۱$ و یا $u = \sqrt{x+۱}$ استفاده کنید.

✍ **مثال۴۲: مقدار انتگرال $\int_۱^۵ \frac{\sqrt{x-۱}}{x}dx$ برابر است با:** (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۰)

۱) $۲(۲ + \text{arctg } ۲)$ ۲) $۲(۲ - \text{arctg } ۲)$ ۳) $۵(۲ - \text{arctg } ۵)$ ۴) $۲(\text{arctg } ۵ - \text{arctg } ۱)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\int_۱^۵ \frac{\sqrt{x-۱}}{x}dx = ۲(\sqrt{x-۱} - \text{Arctg}\sqrt{x-۱})\Big|_۱^۵ = ۲(\sqrt{۴} - \text{Arctg}\sqrt{۴}) = ۲(۲ - \text{Arctg}۲)$$

✍ **مثال۴۳: مقدار انتگرال $\int_۰^۱ \frac{xdx}{x+۱}$ کدام است؟** (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۰)

۱) $۱ - \text{Ln}۲$ ۲) $-\text{Ln}۲$ ۳) $۱ + \text{Ln}۲$ ۴) $(\text{Ln}۲) - ۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\int_۰^۱ \frac{xdx}{x+۱} = \int_۰^۱ \frac{(x+۱)-۱}{x+۱}dx = \int_۰^۱ (۱ - \frac{۱}{x+۱})dx = (x - \text{Ln}(x+۱))\Big|_۰^۱ = ۱ - \text{Ln}۲$$

✍ **مثال۴۴: مقدار $\int_{-۱}^{۰} x^۲\sqrt{x+۱}dx$ برابر است با:** (حسابداری ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{۸}{۱۰۵}$ ۲) $-\frac{۸}{۱۰۵}$ ۳) $\frac{۱۶}{۱۰۵}$ ۴) $-\frac{۱۶}{۱۰۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای محاسبه انتگرال از تغییر متغیر $u = x+۱$، $du = dx$ استفاده می‌کنیم.

$$\int x^۲\sqrt{x+۱}dx = \int (u-۱)^۲\sqrt{u}du = \int (u^۲ - ۲u + ۱) \times u^{\frac{۱}{۲}}du = \int (u^{\frac{۵}{۲}} - ۲u^{\frac{۳}{۲}} + u^{\frac{۱}{۲}})du$$

$$= \frac{۲}{۷}u^{\frac{۷}{۲}} - \frac{۴}{۵}u^{\frac{۵}{۲}} + \frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}} + c = \frac{۲}{۷}(x+۱)^{\frac{۷}{۲}} - \frac{۴}{۵}(x+۱)^{\frac{۵}{۲}} + \frac{۲}{۳}(x+۱)^{\frac{۳}{۲}} + c$$

$$\Rightarrow \int_{-۱}^{۰} x^۲\sqrt{x+۱}dx = (\frac{۲}{۷}(x+۱)^{\frac{۷}{۲}} - \frac{۴}{۵}(x+۱)^{\frac{۵}{۲}} + \frac{۲}{۳}(x+۱)^{\frac{۳}{۲}})\Big|_{-۱}^{۰} = \frac{۲}{۷} - \frac{۴}{۵} + \frac{۲}{۳} = \frac{۳۰ - ۸۴ + ۷۰}{۱۰۵} = \frac{۱۶}{۱۰۵}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۴۵: سطح محصور بین دو منحنی $y = x^۲ - ۲x$ و $y = ۴ - x^۲$ چقدر است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۱)

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۲۰}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا محل تلاقی دو منحنی را بدست می‌آوریم.

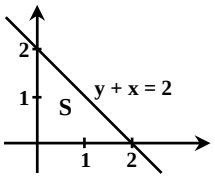
$$x^۲ - ۲x = ۴ - x^۲ \Rightarrow ۲x^۲ - ۲x - ۴ = ۰ \Rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱, ۲$$

$$S = \int_{-۱}^{۲} ((۴ - x^۲) - (x^۲ - ۲x))dx = \int_{-۱}^{۲} (۴ + ۲x - ۲x^۲)dx = (۴x + x^۲ - \frac{۲}{۳}x^۳)\Big|_{-۱}^{۲} = (۸ + ۴ - \frac{۱۶}{۳}) - (-۴ + ۱ + \frac{۲}{۳}) = \frac{۲۰}{۳} + \frac{۷}{۳} = ۹$$

مثال۴۶: سطح محصور بین خط $y + x = ۲$ و محور طول‌ها و محور عرض‌ها واقع در ربع اول چه مقدار است؟ (حسابداری ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به شکل مساحت مورد نظر برابر است با:



$$S = \frac{۲ \times ۲}{۲}$$

مثال۴۷: حاصل انتگرال $\int_{۰}^{۱} xe^x dx$ کدام است؟ (حسابداری ـ آزاد ۸۱)

۱) $e + ۱$ ۲) $e - ۱$ ۳) e ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$\int_{۰}^{۱} xe^x dx = (xe^x - e^x)\Big|_{۰}^{۱} = (e - e) - (۰ - ۱) = ۱$$

مثال۴۸: جواب انتگرال $\int \frac{Lnx}{xLnx - x}dx$ به ازای $c = ۰$ و $x = ۲$ ، کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۱)

۱) $Ln۲$ ۲) $Ln۲ + ۲$ ۳) $Ln۲ - ۲$ ۴) $Ln(۲Ln۲ - ۲)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از تغییر متغیر $u = Lnx$، $du = \frac{dx}{x}$ خواهیم داشت:

$$I(x) = \int \frac{Lnx}{xLnx - x}\,dx = \int \frac{Lnx}{Lnx - ۱}.\frac{dx}{x} = \int \frac{u}{u - ۱}.du = \int \frac{(u - ۱) + ۱}{u - ۱}.du = \int (۱ + \frac{۱}{u - ۱})du$$

$$= u + Ln(u - ۱) + c = Lnx + Ln(Lnx - ۱) + c \xrightarrow{c=۰} I(۲) = Ln۲ + Ln(Ln۲ - ۱) = Ln(۲Ln۲ - ۲)$$

مثال۴۹: مقدار انتگرال معین $I = \int_{-۳}^{۳} \sqrt{۹ - x^۲}dx$ ، برابر است با: (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۹\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

روش اول: از تغییر متغیر $x = ۳\sin t$ ، $dx = ۳\cos t dt$ استفاده می‌کنیم. فاصله تغییرات x، از $x = -۳$ تا $x = ۳$ می‌باشد، بنابراین تغییرات t از $t = \frac{-\pi}{۲}$ تا $t = \frac{\pi}{۲}$ خواهد بود.

$$\int_{-۳}^{۳} \sqrt{۹ - x^۲}dx = \int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{۹ - ۹\sin^۲ t} \times ۳\cos t dt = \int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{۹(۱ - \sin^۲ t)} \times ۳\cos t dt$$

$$= \int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} ۳\cos t \times ۳\cos t dt = ۹\int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \cos^۲ t dt = ۹\int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} (\frac{۱ + \cos ۲t}{۲})dt = \frac{۹}{۲}\int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} (۱ + \cos ۲t)dt$$

$$= \frac{۹}{۲}(t + \frac{۱}{۲}\sin ۲t)\Big|_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۹}{۲}(\frac{\pi}{۲} + \frac{۱}{۲}\sin \pi) - \frac{۹}{۲}(\frac{-\pi}{۲} + \frac{۱}{۲}\sin(-\pi)) = \frac{۹\pi}{۲}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

روش دوم: برای محاسبه انتگرال از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} u = \sqrt{۹-x^۲} \Rightarrow du = \dfrac{-x}{\sqrt{۹-x^۲}}dx \\ dv = dx \quad \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$I(x) = \int \sqrt{۹-x^۲}dx = x\sqrt{۹-x^۲} - \int \frac{-x^۲}{\sqrt{۹-x^۲}}\,dx = x\sqrt{۹-x^۲} - \int \frac{(۹-x^۲)-۹}{\sqrt{۹-x^۲}}\,dx$$

$$= x\sqrt{۹-x^۲} - \int \sqrt{۹-x^۲}dx + ۹\int \frac{dx}{\sqrt{۹-x^۲}} = x\sqrt{۹-x^۲} + ۹\text{Arcsin}\frac{x}{۳} - \underbrace{\int \sqrt{۹-x^۲}dx}_{I(x)}$$

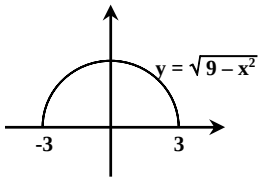
از محاسبات فوق نتیجه می‌شود:

$$I(x) = x\sqrt{۹-x^۲} + ۹\text{Arcsin}\frac{x}{۳} - I(x) \Rightarrow ۲I(x) = x\sqrt{۹-x^۲} + ۹\text{Arcsin}\frac{x}{۳}$$

$$\Rightarrow I(x) = \frac{۱}{۲}(x\sqrt{۹-x^۲} + ۹\text{Arcsin}\frac{x}{۳}) \Rightarrow I = \int_{-۳}^{۳} \sqrt{۹-x^۲}dx = \frac{۱}{۲}(x\sqrt{۹-x^۲} + ۹\text{Arcsin}\frac{x}{۳})\Big|_{-۳}^{۳}$$

$$= \frac{۱}{۲}(۰ + ۹\text{Arcsin}۱) - \frac{۱}{۲}(۰ + ۹\text{Arcsin}(-۱)) = \frac{۱}{۲}(\frac{۹\pi}{۲}) - \frac{۱}{۲}(\frac{-۹\pi}{۲}) = \frac{۹\pi}{۴} + \frac{۹\pi}{۴} = \frac{۹\pi}{۲}$$

روش سوم: انتگرال معین موردنظر برابر مساحت محصور مابین $y = \sqrt{۹-x^۲}$ و محور xها در فاصله $-۳ \le x \le ۳$ می‌باشد. توجه کنید که $y = \sqrt{۹-x^۲}$، نیم دایره‌ای به شعاع ۳ می‌باشد. بنابراین انتگرال موردنظر برابر مساحت یک نیم دایره به شعاع ۳ است.



$$\Rightarrow I = \frac{۱}{۲}\pi r^۲ = \frac{۱}{۲}\pi \times ۳^۲ = \frac{۹\pi}{۲}$$

یادآوری: معادله $x^۲ + y^۲ = r^۲$، دایره‌ای به شعاع r است.

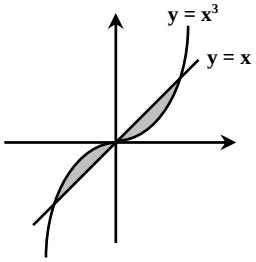
$$x^۲ + y^۲ = r^۲ \Rightarrow y^۲ = r^۲ - x^۲ \Rightarrow \begin{cases} \text{نیم دایره بالایی:} & y = \sqrt{r^۲ - x^۲} \\ \text{نیم دایره پایینی:} & y = -\sqrt{r^۲ - x^۲} \end{cases}$$

مثال۵۰: سطح محصور بین منحنی $y = x^۳$ و خط به معادله $y = x$، کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$x^۳ = x \Rightarrow x^۳ - x = ۰ \Rightarrow x(x^۲ - ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰, ۱, -۱$$



$$S_۱ = \int_{-۱}^{۰} (x^۳ - x)dx = (\frac{x^۴}{۴} - \frac{x^۲}{۲})\Big|_{-۱}^{۰} = ۰ - (\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۴}$$

$$S_۲ = \int_{۰}^{۱} (x - x^۳)dx = (\frac{x^۲}{۲} - \frac{x^۴}{۴})\Big|_{۰}^{۱} = (\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴}) - ۰ = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \text{کل } S = S_۱ + S_۲ = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

مثال۵۱: حاصل $\int_{۰}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + ۱}$، کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۱)

۱) ۲ ۲) $\text{Ln}۲$ ۳) $\text{Ln}۳$ ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{dx}{e^x + ۱} = -\text{Ln}(e^{-x} + ۱)\Big|_{۰}^{\infty} = -\text{Ln}(e^{-\infty} + ۱) + \text{Ln}(e^{۰} + ۱) = ۰ + \text{Ln}۲ = \text{Ln}۲$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۵۲: اگر $F''(x)=۱۲x^۲-۱۲x$ و $F'(۰)=۲$ و $F(۱)=۲$ باشد، آنگاه تابع $F(x)$ برابر است با: (حسابداری ـ سراسری ۸۲)

۱) $F(x)=x^۴-۲x^۳+۲x+۱$ ۲) $F(x)=x^۴-x^۳+۲x^۲$

۳) $F(x)=x^۴-۳x^۲+۲x+۲$ ۴) $F(x)=x^۴+۲x^۳-۴x+۳$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با انتگرال‌گیری از رابطه $F''(x)$ شروع می‌کنیم و از مقادیر داده شده استفاده می‌کنیم.

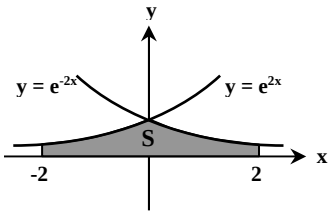
$$F''(x)=۱۲x^۲-۱۲x \Rightarrow F'(x)=\int(۱۲x^۲-۱۲x)dx=۴x^۳-۶x^۲+c$$

$$F'(x)=۴x^۳-۶x^۲+c \xrightarrow{F'(۰)=۲} ۰-۰+c=۲ \Rightarrow F'(x)=۴x^۳-۶x^۲+۲$$

$$F(x)=\int(۴x^۳-۶x^۲+۲)dx=x^۴-۲x^۳+۲x+c'$$

$$F(x)=x^۴-۲x^۳+۲x+c' \xrightarrow{F(۱)=۲} ۱-۲+۲+c'=۲ \Rightarrow c'=۱ \Rightarrow F(x)=x^۴-۲x^۳+۲x+۱$$

مثال ۵۳: مساحت S در شکل داده شده کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۲)



۱) $e^۴-۱$

۲) $۱-e^{-۴}$

۳) $e^{+۴}-e^{-۴}$

۴) $e^{-۴}-e^۴$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» **روش اول:**

$$S=\int_{-۲}^{۰}e^{۲x}dx+\int_{۰}^{۲}e^{-۲x}dx=\frac{۱}{۲}e^{۲x}\Big|_{-۲}^{۰}+\frac{-۱}{۲}e^{-۲x}\Big|_{۰}^{۲}=(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}e^{-۴})+(-\frac{۱}{۲}e^{-۴}+\frac{۱}{۲})=۱-e^{-۴}$$

روش دوم: به دلیل تقارن شکل نسبت به محور yها کافی است مساحت یک طرف را حساب کرده و حاصل را در ۲ ضرب کنیم.

$$S=۲\int_{۰}^{۲}e^{-۲x}dx=۲\times\frac{-۱}{۲}e^{-۲x}\Big|_{۰}^{۲}=-e^{-۴}+۱$$

مثال ۵۴: سطح محصور بین منحنی $y=x^۲$ و خط $y=x$ چه مقدار است؟ (حسابداری ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا نقاط تلاقی منحنی و خط را به دست می‌آوریم. $x^۲=x \Rightarrow x^۲-x=۰ \Rightarrow x(x-۱)=۰ \Rightarrow x=۰,۱$

$$S=\int_{۰}^{۱}(x-x^۲)dx=(\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۳})\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}$$

مثال ۵۵: اگر مساحت سطح زیر منحنی $y=\ln(x+۱)$ از نقطه $x=۰$ تا $x=c$ برابر $c+۲$ شود، مقدار c کدام است؟

(مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۲)

۱) $e-۱$ ۲) $e-۲$ ۳) $e^۲-۱$ ۴) $e^۲-۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که:

$$\int_{۰}^{c}\text{Ln}(x+۱)dx=((x+۱)\text{Ln}(x+۱)-x)\Big|_{۰}^{c}=((c+۱)\text{Ln}(c+۱)-c)-(\text{Ln}۱-۰)=(c+۱)\text{Ln}(c+۱)-c$$

طبق فرض مسأله:

$$(c+۱)\text{Ln}(c+۱)-c=c+۲ \Rightarrow (c+۱)\text{Ln}(c+۱)=۲c+۲=۲(c+۱) \Rightarrow \text{Ln}(c+۱)=۲ \Rightarrow c+۱=e^۲ \Rightarrow c=e^۲-۱$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۵۶: پاسخ انتگرال $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$ به ازاء $x=0$ چیست؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۲)

۱) $2+\text{Ln}2$ ۲) $2-\text{Ln}4$ ۳) $4-\text{Ln}2$ ۴) $2-\text{Ln}2$

☑ **پاسخ:** هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. برای محاسبه انتگرال از تغییر متغیر $du=e^x dx, u=1+e^x$ استفاده می‌کنیم:

$$I(x)=\int \frac{e^x}{1+e^x}dx=\int \frac{du}{u}=\text{Ln}u+c=\text{Ln}(1+e^x)+c \Rightarrow I(0)=\text{Ln}2+c$$

مثال۵۷: سطح محصور منحنی $y=x^2+7$ و خطوط $y=11$ و $x=1$ در ناحیه اول کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $-\frac{5}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا محل تلاقی منحنی $y=x^2+7$ و خط $y=11$ را در ناحیه اول به دست می‌آوریم.

$$x^2+7=11 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2$$

$$S=\int_1^2 (11-(x^2+7))dx=\int_1^2 (4-x^2)dx=(4x-\frac{x^3}{3})\Big|_1^2=(8-\frac{8}{3})-(4-\frac{1}{3})=\frac{5}{3}$$

مثال۵۸: مقدار $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۲)

۱) ۰ ۲) $\text{Ln}2$ ۳) $2\text{Ln}2$ ۴) ∞

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای محاسبه انتگرال از تغییر متغیر $u=1+\sqrt{x}$، $du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ یا $\frac{dx}{\sqrt{x}}=2du$ استفاده می‌کنیم.

$$I(x)=\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}=\int \frac{2du}{u}=2\text{Ln}u+c=2\text{Ln}(1+\sqrt{x})+c$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}=2\text{Ln}(1+\sqrt{x})\Big|_0^1=2\text{Ln}2-2\text{Ln}1=2\text{Ln}2$$

مثال۵۹: مقدار $\int_0^{\text{Ln}2} \sqrt{e^x-1}dx$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۲)

۱) $2-\frac{\pi}{2}$ ۲) $2+\frac{\pi}{2}$ ۳) $2-\frac{\pi}{4}$ ۴) $2+\frac{\pi}{4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای محاسبه انتگرال به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$u=\sqrt{e^x-1} \Rightarrow u^2=e^x-1 \Rightarrow 2udu=e^x dx \xrightarrow{e^x=u^2+1} dx=\frac{2udu}{u^2+1}$$

$$I(x)=\int \sqrt{e^x-1}dx=\int u.\frac{2udu}{u^2+1}=2\int \frac{u^2}{u^2+1}du=2\int \frac{(u^2+1)-1}{u^2+1}du=2\int (1-\frac{1}{u^2+1})du=2(u-\text{Arctg}u)+c$$

$$=2(\sqrt{e^x-1}-\text{Arctg}\sqrt{e^x-1})+c \Rightarrow \int_0^{\text{Ln}2} \sqrt{e^x-1}dx=2(\sqrt{e^x-1}-\text{Arctg}\sqrt{e^x-1})\Big|_0^{\text{Ln}2}$$

$$=2(\sqrt{e^{\text{Ln}2}-1}-\text{Arctg}\sqrt{e^{\text{Ln}2}-1})-2(\sqrt{e^0-1}-\text{Arctg}\sqrt{e^0-1})=2(1-\text{Arctg}1)-2(0-\text{Arctg}0)=2(1-\frac{\pi}{4})=2-\frac{\pi}{2}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۶۰: مقدار انتگرال $I = \int_{0}^{1} xe^{-x}dx$، کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۳)

۱) e ۲) $e-1$ ۳) $\frac{2}{e}$ ۴) $1-\frac{2}{e}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای محاسبه انتگرال مورد نظر از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$I = \int_{0}^{1} xe^{-x}dx = (-xe^{-x} - e^{-x})\Big|_{0}^{1} = (-e^{-1} - e^{-1}) - (0-1) = 1 - \frac{2}{e}$$

مثال۶۱: مقدار $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$ برابر است با: (حسابداری ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{\pi}{16}$ ۲) $\frac{3\pi}{16}$ ۳) $\frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای محاسبه انتگرال داده شده از فرمول‌های طلایی $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ و $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ استفاده می‌کنیم.

$$\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int (\frac{1-\cos 2x}{2})^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2})dx = \frac{1}{4}\int (\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x)dx = \frac{1}{4}(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x) + c$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{1}{4}(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}(\frac{3\pi}{4} - \sin\pi + \frac{1}{8}\sin 2\pi) = \frac{3\pi}{16}$$

مثال۶۲: مقدار $\int_{-2}^{+2} x|x|dx$ برابر است با: (حسابداری ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) 0 ۳) $\frac{12}{5}$ ۴) $\frac{14}{5}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون تابع زیر انتگرال ($f(x) = x|x|$)، تابع فرد است لذا مقدار انتگرال برابر صفر است.

مثال۶۳: سطح محصور به توابع $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = 1 - x^2$ را به دست آورید؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۳)

۱) ۴ ۲) $\frac{9}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا نقاط تلاقی دو منحنی را بدست می‌آوریم.

$$x^2 - 1 = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = -1, 1$$

$$S = \int_{-1}^{1} \Big((1 - x^2) - (x^2 - 1)\Big)dx = \int_{-1}^{1} (2 - 2x^2)dx = (2x - \frac{2}{3}x^3)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

مثال۶۴: اگر $f(x) = \int_{x}^{10} (t^2 - 1)e^{t+1}dt$ باشد، در شرایطی که $x = 0$ است، $\frac{\partial f}{\partial x}$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۳)

۱) e ۲) $-e$ ۳) $-e^{-1}$ ۴) e^{-1}

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$f(x) = \int_{x}^{10} (t^2 - 1)e^{t+1}dt \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0 - (x^2 - 1)e^{x+1} = -(x^2 - 1)e^{x+1} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=0} = -(0-1)e^{0+1} = e$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۶۵: اگر $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}$ باشد در شرایط اولیه $\left|\begin{matrix}x=1\\y=0\end{matrix}\right.$ کدام گزینه مناسب است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۳)

۱) $x^2+y^2=1$ ۲) $x^2-y^2=1$ ۳) $x+y=1$ ۴) $x=\ln y$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}\Rightarrow xdx=ydx\xrightarrow{\text{از طرفین رابطه انتگرال می‌گیریم}}\frac{x^2}{2}=\frac{y^2}{2}+c$$

از شرط اولیه $x=1$ ، $y=0$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{2}=\frac{0}{2}+c\Rightarrow c=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x^2}{2}=\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}\Rightarrow x^2-y^2=1$$

مثال۶۶: اگر $f(x)=\int\frac{2dx}{x^2+3}$ و ثابت انتگرال‌گیری صفر باشد، مقدار $f(\sqrt{3})$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{\pi}{8\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$f(x)=\int\frac{2dx}{x^2+3}=2\int\frac{dx}{x^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}Arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+c\xrightarrow{c=0}f(\sqrt{3})=\frac{2}{\sqrt{3}}Arctg\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+0=\frac{2}{\sqrt{3}}Arctg1=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

مثال۶۷: انتگرال $\int\frac{x+4}{x(x+2)}dx$ برابر کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۴)

۱) $\ln\frac{x}{(x+2)^2}dx$ ۲) $\ln\frac{x+2}{x^2}+c$ ۳) $\ln\frac{(x+2)^2}{x}+c$ ۴) $\ln\frac{x^2}{x+2}+c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای محاسبه انتگرال از روش تجزیه کسرها استفاده می‌کنیم.

$$\frac{x+4}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)}=\frac{(A+B)x+2A}{x(x+2)}$$

$$\Rightarrow\frac{x+4}{x(x+2)}=\frac{(A+B)x+2A}{x(x+2)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\Rightarrow 2+B=1\Rightarrow B=-1\\2A=4\Rightarrow A=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int\frac{x+4}{x(x+2)}dx=\int(\frac{2}{x}-\frac{1}{x+2})dx=2Lnx-Ln(x+2)+c=Ln\frac{x^2}{x+2}+c$$

مثال۶۸: سطح محصور بین دو منحنی $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ برابر است با: (حسابداری ـ آزاد ۸۴)

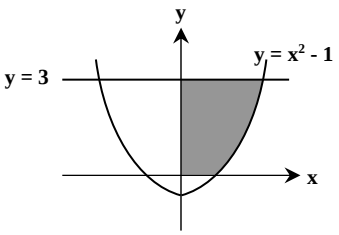
۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا محل تلاقی منحنی‌ها را به دست می‌آوریم.

$$x^2=\sqrt{x}\Rightarrow x^4=x\Rightarrow x^4-x=0\Rightarrow x(x^3-1)=0\Rightarrow x=0,1$$

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3})\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

مثال۶۹: در شکل زیر مساحت قسمت هاشور زده کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۴)



۱) ۶
۲) $\frac{8}{3}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) $\frac{14}{3}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا از رابطه داده شده x را برحسب y به دست می‌آوریم:

$$y = x^۲ - ۱ \Rightarrow x^۲ = y + ۱ \Rightarrow x = \pm\sqrt{y+۱}$$

سطح موردنظر، ناحیه محصور بین $x = \sqrt{y+۱}$ و محور yها در فاصله $۰ < y < ۳$ می‌باشد.

$$S = \int_۰^۳ \sqrt{y+۱}\,dy = \int_۰^۳ (y+۱)^{\frac{۱}{۲}}\,dy = \frac{۲}{۳}(y+۱)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_۰^۳ = \frac{۱۶}{۳} - \frac{۲}{۳} = \frac{۱۴}{۳}$$

✍ **مثال ۷۰: مقدار انتگرال $\int_۰^۱ xe^{x^۲}dx$ چه میزان است؟** (حسابداری ـ آزاد ۸۵)

۱) $e - \frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}(e-۱)$ ۳) $e^۲$ ۴) $۲e$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از تغییر متغیر $u = x^۲$ ، $du = ۲xdx$ استفاده می‌کنیم.

$$\int xe^{x^۲}dx = \int \frac{۱}{۲}e^u du = \frac{۱}{۲}e^u + c = \frac{۱}{۲}e^{x^۲} + c$$

بنابراین:

$$\int_۰^۱ xe^{x^۲}dx = \frac{۱}{۲}e^{x^۲}\Big|_۰^۱ = \frac{۱}{۲}e - \frac{۱}{۲}$$

✍ **مثال ۷۱: اگر $I(x) = \int (x+۱)e^{x-۱}dx$ و ثابت انتگرال‌گیری صفر باشد مقدار $I(۰)$ کدام گزینه است؟** (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۵)

۱) صفر ۲) $e^{-۱}$ ۳) $۲e$ ۴) $\frac{۲}{e}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$I(x) = \int (x+۱)e^{x-۱}dx = xe^{x-۱} \Rightarrow I(۰) = ۰$$

✍ **مثال ۷۲: مقدار انتگرال $\int_۰^۱ xe^{x^۲}dx$ چیست؟** (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۵)

۱) $e - \frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}(e-۱)$ ۳) e ۴) $\frac{۱}{۲}e$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از تغییر متغیر $u = x^۲$ ، $du = ۲xdx$ استفاده می‌کنیم.

$$\int xe^{x^۲}dx = \int \frac{۱}{۲}e^u du = \frac{۱}{۲}e^u + c = \frac{۱}{۲}e^{x^۲} + c$$

بنابراین:

$$\int_۰^۱ xe^{x^۲}dx = \frac{۱}{۲}e^{x^۲}\Big|_۰^۱ = \frac{۱}{۲}e - \frac{۱}{۲}$$

✍ **مثال ۷۳: مقدار $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \cos^۲ x \sin x dx$ چیست؟** (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از تغییر متغیر $u = \cos x$ ، $du = -\sin x dx$ استفاده می‌کنیم.

$$\int \cos^۲ x \sin x dx = \int -u^۲ du = \frac{-۱}{۳}u^۳ + c = \frac{-۱}{۳}\cos^۳ x + c$$

بنابراین:

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \cos^۲ x \sin x dx = \frac{-۱}{۳}\cos^۳ x\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۷۴: اگر $F(x)=\int_{۲}^{x}\frac{t^۲}{t^۲-۳}dx$ باشد، در این صورت $F'(۳)$ کدام است؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۵)

۱) ۴ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{-۲}{۳}$ ۴) $\frac{-۳}{۲}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$F'(x)=\frac{x^۲}{x^۲-۳}\Rightarrow F'(۳)=\frac{۹}{۶}=\frac{۳}{۲}$$

مثال ۷۵: مقدار $\int_{۱}^{e}\frac{(۱+Lnx)^۲}{x}dx$ کدام است؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۵)

۱) $\frac{۷}{۳}$ ۲) $۲e$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\int_{۱}^{e}\frac{(۱+Lnx)^۲}{x}dx=\frac{(۱+Lnx)^۳}{۳}\Big|_{۱}^{e}=\frac{۸}{۳}-\frac{۱}{۳}=\frac{۷}{۳}$$

مثال ۷۶: حاصل $\int\frac{۳dx}{(x^۲+۱)(x^۲+۴)}$ کدام است؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۵)

۱) $Arc\tan x-\frac{۱}{۲}Arc\tan\frac{x}{۲}+c$ ۲) $\frac{۱}{۲}Arc\tan\frac{x}{۲}-Arc\tan x+c$

۳) $Arc\tan\frac{x}{۲}-Arc\tan x+c$ ۴) $Arc\tan ۲x-Arc\tan x+c$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\int\frac{۳dx}{(x^۲+۱)(x^۲+۴)}=\int\frac{(x^۲+۴)-(x^۲+۱)}{(x^۲+۱)(x^۲+۴)}dx=\int(\frac{۱}{x^۲+۱}-\frac{۱}{x^۲+۴})dx=Arctgx-\frac{۱}{۲}Arctg\frac{x}{۲}+c$$

مثال ۷۷: حاصل $\int(tgx+\cot gx)^۲dx$ کدام است؟ (مدیریت تکنولوژی ـ آزاد ۸۵)

۱) $tgx+\cot gx+c$ ۲) $\frac{۱}{۲}(tgx+\cot gx)^۲+c$ ۳) $-\frac{۱}{۲}(tgx+\cot gx)^۲+c$ ۴) $tgx-\cot gx+c$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\int(tgx+\cot gx)^۲dx=\int(tg^۲x+\cot g^۲x+۲)dx=\int(۱+tg^۲x)dx+\int(۱+\cot g^۲x)dx=tgx-\cot gx+c$$

مثال ۷۸: حاصل $\int(۱+\sqrt{x})(۱+x-\sqrt{x})dx$ کدام است؟ (مدیریت تکنولوژی ـ آزاد ۸۵)

۱) $\frac{۲x^۲\sqrt{x}}{۵}-x+c$ ۲) $\frac{۲x^۲\sqrt{x}}{۵}+x+c$ ۳) $\frac{۲x\sqrt{x}}{۵}-x+c$ ۴) $\frac{۲x\sqrt{x}}{۵}+x+c$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\int(۱+\sqrt{x})(۱+x-\sqrt{x})dx=\int(۱+x\sqrt{x})dx=x+\frac{۲}{۵}x^۲\sqrt{x}+c$$

مثال ۷۹: اگر داشته باشیم $f(x)=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^۲+۱}}$، مقدار $f(۱)$ به ازای $c=۰$ (ثابت انتگرال‌گیری) کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۶)

۱) $Ln\sqrt{۲}$ ۲) $A-A'$ ۳) $Ln(\sqrt{۲}+۱)$ ۴) $Ln(\sqrt{۲}-۱)$

پاسخ: گزینه «۴»

$$f(x)=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^۲+۱}}=-Ln(\frac{۱+\sqrt{x^۲+۱}}{x})+c\xrightarrow{c=۰}f(۱)=-Ln(۱+\sqrt{۲})=Ln\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}=Ln(\sqrt{۲}-۱)$$

تذکر: از فرمول $\int\frac{du}{u\sqrt{u^۲+a^۲}}=\frac{-۱}{a}Ln(\frac{a+\sqrt{u^۲+a^۲}}{u})+c$ استفاده کرده‌ایم.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۸۰: مقدار انتگرال $\int_{\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{dx}{\sin x}$ برابر است با: (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۶)

۱) $\text{Ln}\sqrt{۲}$ ۲) $\text{Ln}\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\sqrt{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\int_{\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{dx}{\sin x} = \text{Ln}\left(\frac{۱}{\sin x}-\cot gx\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۲}} = \text{Ln}(۱-۰)-\text{Ln}\left(\frac{۱}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right) = -\text{Ln}\left(\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right) = -\text{Ln}\frac{\sqrt{۳}}{۳} = \text{Ln}\sqrt{۳}$$

مثال۸۱: مقدار انتگرال $\int \frac{dx}{x\sqrt{\text{Ln}x}}$ برابر است با: (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۶)

۱) $۲\sqrt{\text{Ln}x}+c$ ۲) $\sqrt{\text{Ln}x}+c$ ۳) $\frac{۱}{۲}\sqrt{\text{Ln}x}+c$ ۴) $\frac{۲}{\sqrt{\text{Ln}x}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با تغییر متغیر $u=\text{Ln}x$ و $du=\frac{dx}{x}$ نتیجه می‌شود:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\text{Ln}x}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = ۲\sqrt{u}+c = ۲\sqrt{\text{Ln}x}+c$$

مثال۸۲: اگر $\int_{۱+a}^{۳+۲a} \frac{\sin x}{۱+x^۲}dx = ۰$ باشد، **a** کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۶)

۱) $\frac{۴}{۳}, ۲$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}, -۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تابع مقابل انتگرال فرد است پس اگر کران‌ها قرینه باشند حاصل انتگرال صفر می‌شود.

$$۳+۲a=-(۱+a) \Rightarrow a=\frac{-۴}{۳}$$

همچنین اگر کران‌ها برابر باشند، حاصل انتگرال صفر است، پس: $۳+۲a=۱+a \Rightarrow a=-۲$

مثال۸۳: شیب خط مماس بر **f** در نقطه **(x,y)** از رابطه $\sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}}$ به دست می‌آید، اگر $f(۰)=۱$ باشد، آنگاه **f(۱)** چقدر است؟

(مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۶)

۱) $-\frac{\pi}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) -۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۱-x}{\sqrt{۱-x^۲}} \Rightarrow y=\int\left(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}\right)dx = \text{Arc}\sin x+\sqrt{۱-x^۲}+c$$

چون $f(۰)=۱$، پس $c=۰$ حاصل می‌شود و در نتیجه $f(۱)=\frac{\pi}{۲}$.

مثال۸۴: اگر $f(x)=\int_{۲}^{x} \frac{dt}{\sqrt{۱+t^۳}}$ و $g(x)=xe^x$ باشد $(gof)'(۲)$ کدام است؟ (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۶)

۱) $\frac{-۱}{۳}$ ۲) ۳ ۳) -۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

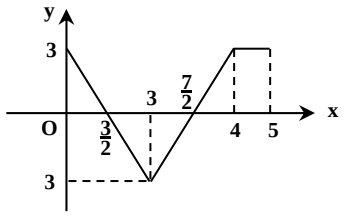
☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$(gof)'(۲)=f'(۲)g'(f(۲))=\frac{۱}{۳}\times ۱=\frac{۱}{۳}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۸۵: نمودار تابع f به شکل زیر می‌باشد $\int_{0}^{5} f(x)dx$ کدام است؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۶)



۱) ۳ ۲) $\frac{۱۵}{۴}$ ۳) ۹ ۴) $\frac{۱۲}{۷}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» توجه کنید تعبیر انتگرال مساحت زیر منحنی است. البته باید توجه داشت انتگرال مربوط به سطحی که زیر محور x هاست برابر با اندازه‌ی مساحت آن قسمت با علامت منفی می‌باشد.

مثال۸۶: اگر $F(x)=\int_{x^{۳}}^{۱۳۷۵}\frac{۱}{t}dt$ باشد $F''(x)$ کدام است؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۶)

۱) $\frac{۱۳۷۵}{x}$ ۲) $\frac{۱۳۷۵}{x^{۲}}$ ۳) $\frac{۳}{x}$ ۴) $\frac{۳}{x^{۲}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$F'(x)=\frac{-۱}{x^{۳}}\times ۳x^{۲}=\frac{-۳}{x}\Rightarrow F''(x)=\frac{۳}{x^{۲}}$$

مثال۸۷: مقدار $\int_{0}^{\frac{۲}{\sqrt{۳}}}\frac{dx}{۴+۹x^{۲}}$ کدام است؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۶)

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۱۸}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\int\frac{dx}{۴+۹x^{۲}}=\frac{۱}{۶}\text{Arctg}\frac{۳x}{۲}\Big|_{0}^{\frac{۲}{\sqrt{۳}}}=\frac{۱}{۶}\text{Arctg}\sqrt{۳}=\frac{\pi}{۱۸}$$

مثال۸۸: حاصل $\int \ln^{۲}x\,dx$ چقدر است؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۶)

۱) $(x^{۲}+۲x+۲)\ln x+c$ ۲) $(x^{۲}-۲x+۲)\ln x+c$ ۳) $x\ln^{۲}x-۲x\ln x+۲x+c$ ۴) $x\ln^{۲}x+۲x\ln x+۲x+c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از روش جزء به جزء استفاده کنید. $(dv=dx\ ,\ u=\text{Ln}^{۲}x)$

مثال۸۹: حاصل $\int_{-\infty}^{۰} e^{x}\sqrt{۱۶+۹e^{x}}dx$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{۶۱}{۹}$ ۲) $\frac{۵۲}{۹}$ ۳) $\frac{۱۲۲}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱۰۴}{۲۷}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از تغییر متغیر $u=e^{x}$ ، $du=e^{x}dx$ نتیجه می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{۰} e^{x}\sqrt{۱۶+۹e^{x}}dx=\int_{۰}^{۱}\sqrt{۱۶+۹u}du=\frac{۲}{۲۷}(۱۶+۹u)^{\frac{۳}{۲}}\Big]_{۰}^{۱}=\frac{۱۲۲}{۲۷}$$

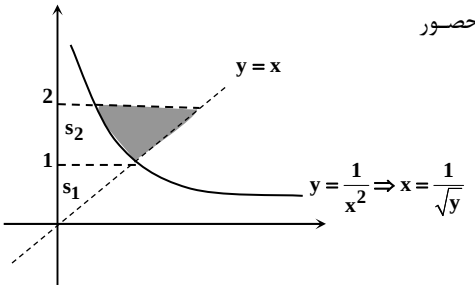
مثال۹۰: سطح محصور بین خط $y=x$ و منحنی $y=\frac{۱}{x^{۲}}$ و خط $y=۲$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۲}-۲\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}-\sqrt{۲}$ ۳) $۲-۲\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}-۲\sqrt{۲}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به شکل مقابل مساحت موردنظر برابر مساحت سطح محصور مابین منحنی $x=\frac{۱}{\sqrt{y}}$ و خط $x=y$ در بازه $۱\le y\le ۲$ می‌باشد، بنابراین:



$$s_۱=\int_۱^۲(y-\frac{۱}{\sqrt{y}})dy=\int_۱^۲(y-y^{\frac{-۱}{۲}})dy=(\frac{y^۲}{۲}-۲y^{\frac{۱}{۲}})\Big|_۱^۲$$

$$=(۲-۲\sqrt{۲})-(\frac{۱}{۲}-۲)=\frac{۷}{۲}-۲\sqrt{۲}$$

مثال۹۱: مقدار انتگرال $I=\int_۰^۱ x^۲\sqrt{۱-x^۲}dx$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{\pi}{۱۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای محاسبه انتگرال موردنظر از تغییر متغیر $x=\sin\theta,\ dx=\cos\theta d\theta$ استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$I=\int_۰^۱ x^۲\sqrt{۱-x^۲}dx=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin^۲\theta\underbrace{\sqrt{۱-\sin^۲\theta}}_{\cos\theta}\cos\theta d\theta=\frac{۱}{۴}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin^۲ ۲\theta d\theta=\frac{۱}{۴}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\cos ۴\theta}{۲}d\theta=\frac{۱}{۸}(\theta-\frac{۱}{۴}\sin ۴\theta)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{\pi}{۱۶}$$

مثال۹۲: انتگرال معین $I=\int_۰^{۲\pi}۶\sin^۳(۲x)dx$ را محاسبه کنید. (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۷)

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱۲ ۴) ۱۶-

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» حاصل انتگرال توابع متناوب سینوس و کسینوس با توان فرد در یک دوره تناوب آن‌ها برابر صفر است.

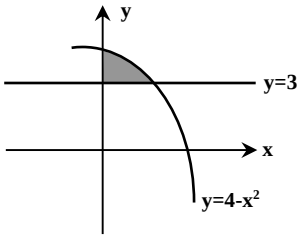
مثال۹۳: حاصل $\int_۰^۲ x^۲\lfloor x\rfloor dx$ کدام است؟ (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۷)

۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۹}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۱۰}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$\int_۰^۲ x^۲\lfloor x\rfloor dx=\int_۰^۱ x^۲(۰)dx+\int_۱^۲ x^۲(۱)dx=\frac{x^۳}{۳}\Big|_۱^۲=\frac{۷}{۳}$$

مثال۹۴: مساحت قسمت هاشورزده در شکل زیر کدام است؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۷)



۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) ۱
۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا محل تلاقی دو منحنی یعنی خط $y=۳$ و $y=۴-x^۲$ را پیدا می‌کنیم. $۴-x^۲=۳\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm ۱$

مساحت قسمت هاشور خورده همان ناحیه مابین منحنی $y=۴-x^۲$ و خط $y=۳$ در فاصله $۰\le x\le ۱$ می‌باشد، بنابراین:

$$S=\int_۰^۱((۴-x^۲)-۳)dx=\int_۰^۱(۱-x^۲)dx=(x-\frac{x^۳}{۳})\Big|_۰^۱=\frac{۲}{۳}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۹۵: مقدار انتگرال $I=\int_{0}^{1}\frac{3x+4}{x^2+3x+2}$ برابر است با: (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۷)

۱) $2\text{Ln}\frac{7}{6}$ ۲) $\text{Ln}\frac{5}{2}$ ۳) $\text{Ln}\frac{9}{2}$ ۴) $2\text{Ln}\frac{3}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$\int_{0}^{1}\frac{3x+4}{x^2+3x+2}dx=\int_{0}^{1}\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}dx=\int_{0}^{1}(\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x+1})dx$$

$$=(2\text{Ln}(x+2)+\text{Ln}(x+1))\Big|_{0}^{1}=(2\text{Ln}3+\text{Ln}2)-(2\text{Ln}2-\text{Ln}1)=2\text{Ln}3-\text{Ln}2=\text{Ln}\frac{9}{2}$$

مثال۹۶: اگر داشته باشیم $(x+1)y'=2(y+1)$ و با فرض آن که نمودار این تابع از مبدأ مختصات بگذرد، مقدار تابع y به ازای $x=3$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۸)

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

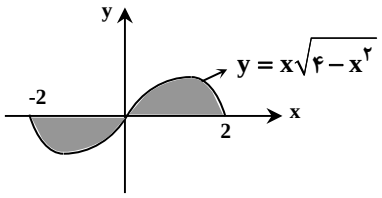
☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$(x+1)\frac{dy}{dx}=2(y+1)\Rightarrow\frac{dy}{y+1}=\frac{2dx}{x+1}\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}}\Rightarrow\text{Ln}(y+1)=2\text{Ln}(x+1)+c$$

چون طبق فرض مسأله نمودار تابع از نقطه $(0,0)$ عبور می‌کند پس $c=0$ می‌باشد.

$$\Rightarrow\text{Ln}(y+1)=2\text{Ln}(x+1)\Rightarrow\text{Ln}(y+1)=\text{Ln}(x+1)^2\Rightarrow y+1=(x+1)^2\xrightarrow{x=3}y=15$$

مثال۹۷: مساحت قسمت هاشور خورده در شکل زیر کدام است؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۸)



۱) $\frac{16}{3}$ ۲) $\frac{14}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{7}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به تقارن شکل نسبت به مبدأ کافی است مساحت ناحیه سمت راست را بدست آورده و حاصل را ۲ برابر کنیم.

$$\int x\sqrt{4-x^2}dx=\frac{-1}{2}\int\sqrt{u}du=\frac{-1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du=\frac{-1}{2}\times\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c=\frac{-1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$u=4-x^2\Rightarrow du=-2xdx$$

$$\Rightarrow S=2\int_{0}^{2}x\sqrt{4-x^2}dx=\frac{-2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{2}=\frac{16}{3}$$

مثال۹۸: اگر $f(x)=\int_{2}^{x}\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt$ ، $g(x)=xe^x$ باشد آنگاه $(gof)'(2)$ کدام است؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۸)

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) -۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که $(gof)'(2)=f'(2)g'(f(2))$ حال به محاسبه مقادیر لازم می‌پردازیم:

$$f(x)=\int_{2}^{x}\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\Rightarrow f'(2)=\frac{1}{\sqrt{1+8}}=\frac{1}{3}$$

$$f(x)=\int_{2}^{x}\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt\Rightarrow f(2)=\int_{2}^{2}\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt=0$$

$$g(x)=xe^x\Rightarrow g'(x)=e^x+xe^x\Rightarrow g'(f(2))=g'(0)=e^0+0e^0=1\Rightarrow(gof)'(2)=(\frac{1}{3})(1)=\frac{1}{3}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

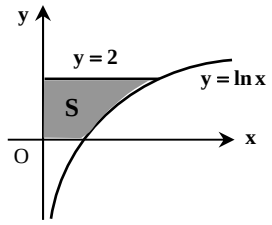
مثال۹۹: حاصل انتگرال $\int_{e}^{e^{۲}} \frac{dx}{xLnx}$ کدام است؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۸)

۱) $Ln\frac{۱}{۲}$ ۲) $۱+Ln۲$ ۳) $۱-Ln۲$ ۴) $Ln۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای محاسبه انتگرال از تغییر متغیر $u = Lnx$، $du = \frac{dx}{x}$ استفاده می‌کنیم.

$$\int \frac{dx}{xLnx} = \int \frac{du}{u} = Ln|u| + c = Ln|Lnx| + c \Rightarrow \int_{e}^{e^{۲}} \frac{dx}{xLnx} = (Ln|Lnx|)\Big|_{e}^{e^{۲}} = Ln(Lne^{۲}) - Ln(Lne) = Ln۲$$

مثال۱۰۰: در شکل داده شده، مساحت S برابر است با: (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۹)



۱) $۴\ln۲ - ۱$

۲) $e^{۲} - ۱$

۳) $e - ۲$

۴) $۲\ln۲ - ۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» سطح هاشور خورده در شکل را می‌توان مساحت محصور مابین منحنی $x = e^{y}$ (وارون تابع $y = Lnx$) و محور y در بازه $[۰,۲]$ درنظر گرفت.

$$S = \int_{۰}^{۲} e^{y}dy = e^{y}\Big|_{۰}^{۲} = e^{۲} - ۱$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مدرسان شریف

فصل هشتم

« ماتریس»

مثال۱: اگر $A=[۱,۲,۳]\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ ۲ & -۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۲\\ ۳\end{bmatrix}$ باشد مقدار A کدام است؟

۱) ۳۸　　۲) ۳۶　　۳) ۲۵　　۴) ۲۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ ۲ & -۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۲\\ ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & ۰ & ۱۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۲\\ ۳\end{bmatrix}=۸+۰+۳۰=۳۸$$

مثال۲: اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۲ & ۱ & ۳\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$ ، مجموع عناصر قطری ماتریس $A^۲$ کدام است؟

۱) ۱۵　　۲) ۱۶　　۳) ۳　　۴) ۲۳

☑ **پاسخ : گزینه «۴»**

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۲ & ۱ & ۳\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۲ & ۱ & ۳\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & ? & ?\\ ? & ۸ & ?\\ ? & ? & ۷\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲\text{ مجموع عناصر قطر اصلی}=۸+۸+۷=۲۳$$

مثال۳: حاصل دترمینان $\begin{vmatrix}۱ & a & ۲a^۲-۱\\ ۱ & b & ۲b^۲-۱\\ ۱ & c & ۲c^۲-۱\end{vmatrix}$ کدام است ؟

۱) $۲(a-b)(a-c)(c-b)$　　۲) $۲(a-b)(b-c)(a-c)$　　۳) $۲(b-a)(a-c)(c-b)$　　۴) $۲(b-a)(b-c)(c-a)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» اگر سطر اول را در یک منفی ضرب کرده و به سطرهای دوم و سوم اضافه کنیم :

$$\begin{vmatrix}۱ & a & ۲a^۲-۱\\ ۱ & b & ۲b^۲-۱\\ ۱ & c & ۲c^۲-۱\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۱ & a & ۲a^۲-۱\\ ۰ & b-a & ۲b^۲-۲a^۲\\ ۰ & c-a & ۲c^۲-۲a^۲\end{vmatrix}=(b-a)(۲c^۲-۲a^۲)-(c-a)(۲b^۲-۲a^۲)$$

$$۲(b-a)(c-a)[c+a-b-a]=۲(b-a)(c-a)(c-b)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۴: مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۹ & ۱۶ \\ ۱ & ۸ & ۲۷ & ۶۴ \end{vmatrix}$ **برابر است با**

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» برای محاسبه دترمینان فوق روش زیر ساده‌تر می‌باشد.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۸ & ۱۵ \\ ۷ & ۲۶ & ۶۳ \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{(۷-) برابر سطر اول را به سطر سوم اضافه می‌کنیم}]{\text{(۳-) برابر سطر اول را به سطر دوم اضافه می‌کنیم}} \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۶ \\ ۰ & ۱۲ & ۴۲ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{نسبت به ستون اول بسط می‌دهیم}} (-۱)^{۱+۱} \times \begin{vmatrix} ۲ & ۶ \\ ۱۲ & ۴۲ \end{vmatrix} = ۱۲$$

مثال۵: دستگاه معادلات $\begin{cases} x + ay - z = ۰ \\ ۲x - y + z = ۰ \\ x + ۲y + ۳z = ۰ \end{cases}$ **بیشمار جواب دارد، a کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» دستگاه زمانی بیشمار جواب دارد که دترمینان ضرایب دستگاه برابر صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} ۱ & a & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix} \Rightarrow [۱\times(-۱)\times(۳) + a\times۱\times۱ + (-۱)(۲)\times(۲)] - [(۱)(-۱)(-۱) + a(۲)(۳) + ۱\times۱\times۲]$$

$$\Rightarrow [a - ۳ - ۴] - [۱ + ۶a + ۲] = -۵a - ۱۰ = ۰ \Rightarrow a = -۲$$

مثال۶: به ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x + y + ۳z = ۰ \\ mx + y + ۲mz = ۰ \\ ۵y + ۲z = ۰ \end{cases}$**، جواب‌های غیر صفر دارد؟**

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» اگر دترمینان ضرایب دستگاه مساوی صفر باشد، آنگاه دستگاه جواب غیر صفر دارد.

$$\begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ m & ۱ & ۲m \\ ۰ & ۵ & ۲ \end{vmatrix} = ۲(۲ - ۱۰m) - (-۱)(۲m) + ۳(۵m) = ۴ - ۲۰m + ۲m + ۱۵m = ۰ \Rightarrow -۳m + ۴ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۴}{۳}$$

مثال۷: در دستگاه $\begin{cases} x - y + z = ۰ \\ ۲x + y + z = ۰ \\ x + ۲y + z = ۰ \end{cases}$ **مجموع ریشه‌ها کدام است؟**

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» چون دترمینان ضرایب مخالف صفر است، پس دستگاه فقط دارای جواب بدیهی $x = y = z = ۰$ است و در نتیجه $x + y + z = ۰$.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} ۱ & -۱ & ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۱ & ۲ \end{array}\right| = (۱ - ۱ + ۴) - (۱ + ۲ - ۲) = ۳$$

مثال۸: ماتریس $A = \begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۱ & ۲ \\ ۳ & -۲ & -۱ \end{vmatrix}$ **مفروض است. حاصلضرب مقادیر ویژه آن کدام است؟**

۱) ۳۷ ۲) -۳۷ ۳) -۱۵ ۴) ۱۵

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» حاصلضرب مقادیر ویژه ماتریس برابر دترمینان آن ماتریس می‌باشد.

$$|A| = \begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۱ & ۲ \\ ۳ & -۲ & -۱ \end{vmatrix} \begin{matrix} ۲ & -۱ \\ ۴ & ۱ \\ ۳ & -۲ \end{matrix} = (-۲-۶-۲۴)-(۹-۸+۴) = -۳۷$$

مثال۹: ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۸ \end{bmatrix}$ چگونه ماتریسی است؟

۱) معین مثبت ۲) معین منفی ۳) نامعین ۴) پوچ توان

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» A پوچ توان نیست زیرا $|A|$ مخالف صفر است و چون $H_۱$ و $H_۲$ هر دو مثبت هستند، بنابراین ماتریس A معین مثبت است.

مثال۱۰: اگر $A = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix}$ مفروض باشد، مجموع عناصر قطری $A^۲$، کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۵)

۱) ۳۷ ۲) ۲۶ ۳) ۲۴ ۴) ۱۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & & \\ & ۱۱ & \\ & & ۱۸ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲ \text{ مجموع عناصر قطری } = ۸+۱۱+۱۸ = ۳۷$$

مثال۱۱: اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ مفروض باشد و معکوس آن $B = [b_{ij}]$ فرض شود عنصر $b_{۲۲}$، کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۵)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) صفر ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۵}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$|A| = \begin{vmatrix} ۰ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} \begin{matrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{matrix} = (۰+۲+۰)-(۰+۰+۶) = -۴ \Rightarrow \text{همسازهٔ } a_{۲۲} = (-۱)^{۲+۲} \times \begin{vmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow b_{۲۲} = \frac{۱}{-۴} \times ۰ = ۰$$

یادآوری: (همسازهٔ در آیه a_{ji} در ماتریس A) $\times \frac{۱}{|A|}$ = درایه b_{ij} در ماتریس $A^{-۱}$

مثال۱۲: اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ مجموع عناصر قطری معکوس ماتریس A کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۵)

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$|A| = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۶-۱ = ۵ \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۵} & \frac{-۱}{۵} \\ \frac{-۱}{۵} & \frac{۲}{۵} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع عناصر قطری معکوس ماتریس} = \frac{۳}{۵}+\frac{۲}{۵} = ۱$$

یادآوری: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ آنگاه:

$$A^{-۱} = \frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۱۳: جواب دترمینان $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$ **برابر است با:** (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۵)

۱) صفر ۲) abc ۳) $ab-bc$ ۴) $ab+ac+bc$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

روش اول: ستون اول و دوم ماتریس را به ستون سوم ماتریس اضافه می‌کنیم. در این صورت:

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b-c & (c-a)+(a-b)+(b-c) \\ b-c & c-a & (a-b)+(b-c)+(c-a) \\ c-a & a-b & (b-c)+(c-a)+(a-b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b-c & 0 \\ b-c & c-a & 0 \\ c-a & a-b & 0 \end{vmatrix} = 0$$

یادآوری: اگر مضربی از یک سطر (یا یک ستون) را به سطر (یا ستون) دیگر ماتریس اضافه کنیم، دترمینان ماتریس عوض نمی‌شود.
اگر یک سطر یا یک ستون ماتریس همگی صفر باشند، دترمینان ماتریس برابر صفر است.

روش دوم: به ازای $a=b$، ماتریس داده شده به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{vmatrix} 0 & a-c & c-a \\ a-c & c-a & 0 \\ c-a & 0 & a-c \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & a-c & c-a & 0 & a-c \\ a-c & c-a & 0 & a-c & c-a \\ c-a & 0 & a-c & c-a & 0 \end{array}\right| = (0+0+0)-((c-a)^3+0+(a-c)^3)=0$$

با توجه به گزینه‌های، به ازای $a=b$ فقط گزینه (۱) برابر صفر است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۱۴: معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **را ماتریس C می‌نامیم، عنصر** C_{33} **کدام است؟** (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۵)

۱) -1 ۲) $\frac{-1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون ماتریس A بالا مثلثی است، لذا دترمینان آن برابر حاصلضرب در آیه‌های قطر اصلی است.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\times 2\times 2 = 8 \Rightarrow a_{33}\ \text{همسازهٔ} = (-1)^{3+3}\times\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow C_{33} = \frac{1}{|A|}\times(a_{33}\ \text{همسازهٔ}) = \frac{1}{8}\times 4 = \frac{1}{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۱۵: دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ 4x+y+kz=0 \end{cases}$ **به ازای کدام مقدار k جوابهای غیربدیهی (غیر صفر) دارد؟**(علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۵)

۱) -1 ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» دستگاه همگن وقتی جواب غیر بدیهی دارد که دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & k & 4 & 1 \end{array}\right| = (-k+4+1)-(-4+1+k) = 8-2k=0 \Rightarrow k=4$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۱۶: به ازای کدام مقدار n ماتریس $A=\begin{bmatrix} n & 2 & 1 \\ 2 & n & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **معکوس ندارد؟** (حسابداری ـ سراسری ۷۶)

۱) ۲- و ۱- ۲) ۲- و ۱ ۳) ۲ و ۱- ۴) ۲ و ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ماتریس A معکوس‌پذیر است، اگر و تنها اگر دترمینان A برابر صفر نباشد.

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc} n & 2 & 1 & n & 2 \\ 2 & n & 0 & 2 & n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = (n^2+0+2)-(n+0+4) = n^2-n-2=0 \Rightarrow n=-1,2$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۷: ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۴\\ -۱ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ مفروض است، در ماتریس A^{-1} درایه $a_{۴۲}$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۶)

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$|A|=\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۴ & ۱ & ۲\\ -۱ & ۲ & ۱ & -۱ & ۲\\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰\end{vmatrix}=(۲+۲+۰)-(۸+۰-۲)=-۲$$

$$a_{۳۲}\text{ همسازهٔ }=(-۱)^{۳+۲}\times\begin{vmatrix}۱ & ۴\\ -۱ & ۱\end{vmatrix}=-۵\Rightarrow A^{-۱}\text{ در آیه }a_{۲۳}\text{ در ماتریس }=\frac{۱}{|A|}\times(a_{۳۲}\text{ همسازهٔ })=\frac{۱}{-۲}\times(-۵)=\frac{۵}{۲}$$

مثال۱۸: در ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}$ مجموع مقادیر ویژه (خاص) کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷

پاسخ: گزینه «۴» مجموع مقادیر ویژه یک ماتریس برابر مجموع درآیه‌های قطر اصلی ماتریس (trA) می‌باشد. $trA=۲+۵=۷$

مثال۱۹: اگر $A=\begin{bmatrix}۵ & ۷\\ ۸ & ۹\end{bmatrix}$ باشد، مقدار دترمینان AA'، کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۶)

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۲۱ ۴) ۱۴۴

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که:

$$|A|=\begin{vmatrix}۵ & ۷\\ ۸ & ۹\end{vmatrix}=۴۵-۵۶=-۱۱$$

بنابراین:

$$|AA'|=|A||A'|=|A||A|=|A|^{۲}=(-۱۱)^{۲}=۱۲۱$$

مثال۲۰: اگر $A=\begin{bmatrix}۵ & ۷\\ ۸ & ۹\end{bmatrix}$ باشد، مجموع عناصر معکوس ماتریس A، کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۶)

۱) $-\frac{۲۹}{۱۱}$ ۲) $-\frac{۱}{۱۱}$ ۳) $\frac{۲۹}{۱۱}$ ۴) $\frac{۱}{۱۱}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$A=\begin{bmatrix}۵ & ۷\\ ۸ & ۹\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۵\times۹-۷\times۸}\times\begin{bmatrix}۹ & -۷\\ -۸ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-۹}{۱۱} & \frac{۷}{۱۱}\\ \frac{۸}{۱۱} & \frac{-۵}{۱۱}\end{bmatrix}$$

$$A^{-۱}\text{ مجموع عناصر }=\frac{-۹}{۱۱}+\frac{۷}{۱۱}+\frac{۸}{۱۱}-\frac{۵}{۱۱}=\frac{۱}{۱۱}$$

مثال۲۱: به ازای کدام مقدار a ماتریس $N=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ a & ۱ & ۲\\ a & -۱ & ۰\end{bmatrix}$ معکوس ندارد؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۶)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲»

$$|N|=\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۱ & ۱ & ۲\\ a & ۱ & ۲ & a & ۱\\ a & -۱ & ۰ & a & -۱\end{vmatrix}=(۰+۴a-a)-(a-۲+۰)=۲a+۲=۰\Rightarrow a=-۱$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۲۲: جواب معادله $\begin{vmatrix} x & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$ **، کدام است؟** (حسابداری ـ سراسری ۷۷)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۳» دترمینان را از روش ساروس حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} x & ۱ & ۲ & x & ۱ \\ ۴ & ۲ & ۴ & ۴ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = (۲x + ۴ + ۰) - (۴ + ۰ + ۴) = ۲x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

مثال۲۳: مرتبه (Rank) ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ **برابر کدام است؟** (حسابداری ـ سراسری ۷۷)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲» در ماتریس A، فقط یک سطر مستقل وجود دارد و بقیه سطرها برابر سطر اول می‌باشند و سطر صفر نیز در مرتبه ماتریس تأثیری ندارد، لذا مرتبه ماتریس برابر یک است.

مثال۲۴: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ **برابر کدام است؟** (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۷)

۱) ۶- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۱»

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۲ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = (۰ + ۲ + ۰) - (۰ + ۰ + ۸) = -۶$$

مثال۲۵: مجموع عناصر سطر اول ماتریس $A^۲$ **کدام است؟ (A ماتریس سئوال قبل است.)** (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۷)

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۶ ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۲»

$$A^۲ = A \times A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & ۲ & ۵ \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲ \text{ مجموع عناصر سطر اول ماتریس } = ۶ + ۲ + ۵ = ۱۳$$

مثال۲۶: معادله ماتریسی $AX = O$ **در کدام حالت فقط یکدسته جواب صفر دارد؟** (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۷)

۱) $|A| = ۰$ ۲) $|A| \neq ۰$ ۳) $A^{-۱} = O$ ۴) $|A^{-۱}| = ۰$

پاسخ: گزینه «۲» دستگاه همگن $AX = O$، فقط وقتی جواب بدیهی $X = O$ را دارد که $|A| \neq ۰$.

مثال۲۷: از معادله $\begin{bmatrix} x & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = ۰$**، مقدار x برابر کدام است؟** (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۷)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{bmatrix} x & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \end{bmatrix} = ۳x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -۱$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۲۸: اگر $\begin{bmatrix}۱\\۲\\۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۱\\۲ & -۱ & ۰\\۱ & ۰ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۲\\۳\end{bmatrix}=[۱,۲,۳]\mathbf{A}$ باشد مقدار $\mathbf{A}$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۸)

۱) ۳۸ ۲) ۳۶ ۳) ۲۵ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه «۱»

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۱\\۲ & -۱ & ۰\\۱ & ۰ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۲\\۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & ۰ & ۱۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۲\\۳\end{bmatrix}=۸+۰+۳۰=۳۸$$

مثال۲۹: به ازای کدام مقدار $\mathbf{k}$ دستگاه معادلات $\begin{cases}\mathbf{x}+۲\mathbf{y}+\mathbf{kz}=۰\\\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{z}=۰\\۲\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z}=۰\end{cases}$ جواب‌های غیرصفر دارد؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۸)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱» دستگاه همگن وقتی جواب غیر صفر دارد که دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد.

$$\begin{vmatrix}۱ & ۲ & k & ۱ & ۲\\۱ & -۱ & ۱ & ۱ & -۱\\۲ & ۱ & -۱ & ۲ & ۱\end{vmatrix}=(۱+۴+k)-(-۲k+۱-۲)=۳k+۶=۰\Rightarrow k=-۲$$

مثال۳۰: از رابطه ماتریس $\begin{bmatrix}۳ & ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & y\\۱ & -۱ & ۲\\۱ & x & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۲\\۱\end{bmatrix}=۰$ رابطه بین $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۸)

۱) $x+y+۱۰=۰$ ۲) $۶x+y+۱۰=۰$ ۳) $۲x-y+۴=۰$ ۴) $x+۲y+۱=۰$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & y\\۱ & -۱ & ۲\\۱ & x & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۲\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & ۳x & y+۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۲\\۱\end{bmatrix}=۶+۶x+y+۴=۰\Rightarrow ۶x+y+۱۰=۰$$

مثال۳۱: مقدار $\mathbf{x}$ از معادله $\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\۱ & x & ۱\\۲ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۲\\-۳\end{bmatrix}=۰$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا حاصل‌ضرب دو ماتریس اول را حساب کرده و سپس حاصل را در ماتریس دوم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\۱ & x & ۱\\۲ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۲\\-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۲+x & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۲\\-۳\end{bmatrix}=۴+۴+۲x-۱۵=۰\Rightarrow x=\frac{۷}{۲}$$

مثال۳۲: می‌دانیم دترمینان ماتریس $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\۲ & ۴ & ۵\\۳ & ۵ & ۶\end{bmatrix}$ برابر ۱-است، مجموع عناصر سطر اول ماتریس معکوس آن کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۹)

۱) ۲ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۳-

پاسخ: گزینه «۳»

$$a_{۱۱}\text{ همسازه}=(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix}۴ & ۵\\۵ & ۶\end{vmatrix}=-۱\Rightarrow A^{-۱}\text{ در }a_{۱۱}\text{ عنصر}=\frac{۱}{|A|}\times(a_{۱۱}\text{ همسازه})=\frac{۱}{-۱}\times(-۱)=۱$$

$$a_{۲۱}\text{ همسازه}=(-۱)^{۲+۱}\times\begin{vmatrix}۲ & ۳\\۵ & ۶\end{vmatrix}=۳\Rightarrow A^{-۱}\text{ در }a_{۱۲}\text{ عنصر}=\frac{۱}{|A|}\times(a_{۲۱}\text{ همسازه})=\frac{۱}{-۱}\times۳=-۳$$

$$a_{۳۱}\text{ همسازه}=(-۱)^{۳+۱}\times\begin{vmatrix}۲ & ۳\\۴ & ۵\end{vmatrix}=-۲\Rightarrow A^{-۱}\text{ در }a_{۱۳}\text{ عنصر}=\frac{۱}{|A|}\times(a_{۳۱}\text{ همسازه})=\frac{۱}{-۱}\times(-۲)=۲$$

$$\Rightarrow A^{-۱}\text{ مجموع عناصر سطر اول}=۱-۳+۲=۰$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۳۳: مقدار دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۱\\ -۱ & ۱ & ۲\\ ۲ & -۱ & ۱\end{bmatrix}$، کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۹)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه «۳»

$$\begin{vmatrix}۱ & ۲ & -۱ & ۱ & ۲\\ -۱ & ۱ & ۲ & -۱ & ۱\\ ۲ & -۱ & ۱ & ۲ & -۱\end{vmatrix}=(۱+۸-۱)-(-۲-۲-۲)=۱۴$$

مثال ۳۴: مرتبه (Rank) هر ماتریس به صورت $A=[a_{ij}]_{۵\times۶}$، کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۹)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) کمتر یا مساوی ۵ ۴) کمتر یا مساوی ۶

پاسخ: گزینه «۳» مرتبه هر ماتریس برابر تعداد سطرها یا ستونهای مستقل ماتریس می‌باشد. چون ماتریس A، ۵ سطر دارد پس مرتبه آن حداکثر ۵ می‌تواند باشد.

مثال ۳۵: دستگاه همگن خطی $A_{n\times n}\times X_{n\times ۱}=۰$ مفروض است. این دستگاه در چه صورت بی‌نهایت جواب دارد؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۹)

۱) $|A|=۰$ ۲) $|A|\neq ۰$ ۳) $A=A'$ ۴) $A=A^{-۱}$

پاسخ: گزینه «۱» **یادآوری:** دستگاه همگن $AX=O$، فقط زمانی بی‌نهایت جواب دارد که $|A|=۰$.

مثال ۳۶: اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۲ & ۱ & -۱\\ ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، مقدار دترمینان $|A|$ برابر است با: (حسابداری ـ سراسری ۸۰)

۱) ۸- ۲) ۶- ۳) ۴- ۴) ۲-

پاسخ: گزینه «۱»

$$|A|=\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۱ & -۱ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰\end{vmatrix}=(۱-۲+۰)-(۳+۰+۴)=-۸$$

مثال ۳۷: در ماتریس A از مسأله قبل مجموع عناصر قطری ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۰)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$a_{۱۱}\text{ همسازه }=(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix}۱ & -۱\\ ۰ & ۱\end{vmatrix}=۱\Rightarrow A^{-۱}\text{ در }a_{۱۱}\text{ عنصر }=\frac{۱}{|A|}\times(a_{۱۱}\text{ همسازه })=\frac{۱}{-۸}\times۱=\frac{-۱}{۸}$$

$$a_{۲۲}\text{ همسازه }=(-۱)^{۲+۲}\times\begin{vmatrix}۱ & ۳\\ ۱ & ۱\end{vmatrix}=-۲\Rightarrow A^{-۱}\text{ در }a_{۲۲}\text{ عنصر }=\frac{۱}{|A|}\times(a_{۲۲}\text{ همسازه })=\frac{۱}{-۸}\times(-۲)=\frac{۲}{۸}$$

$$a_{۳۳}\text{ همسازه }=(-۱)^{۳+۳}\times\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{vmatrix}=-۳\Rightarrow A^{-۱}\text{ در }a_{۳۳}\text{ عنصر }=\frac{۱}{|A|}\times(a_{۳۳}\text{ همسازه })=\frac{۱}{-۸}\times(-۳)=\frac{۳}{۸}$$

$$\Rightarrow A^{-۱}\text{ مجموع عناصر روی قطر }=\frac{-۱}{۸}+\frac{۲}{۸}+\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۳۸: دستگاه همگن $A_{n\times n}.X_{n\times ۱}=O$، در کدام حالت بیشمار جواب دارد؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۰)

۱) $|A|\neq ۰$ ۲) $A=A'$ ۳) $|A|=۰$ ۴) $A=A^{-۱}$

پاسخ: گزینه «۳» دستگاه همگن وقتی بی‌شمار جواب دارد که $|A|=۰$ باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۳۹: ریشه‌های معادله $\begin{vmatrix}(x-1)^2 & 1\\ (x-3) & 2(x-3)\end{vmatrix}=0$ برابر است با: (حسابداری ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{4\pm\sqrt{2}}{2},3$ ۲) $\frac{3\pm\sqrt{2}}{2},3$ ۳) $\frac{2\pm\sqrt{2}}{2},4$ ۴) $\frac{2\pm\sqrt{2}}{2},3$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$\begin{vmatrix}(x-1)^2 & 1\\ (x-3) & 2(x-3)\end{vmatrix}=2(x-3)(x-1)^2-(x-3)=0\Rightarrow(x-3)\times[2(x-1)^2-1]=0\Rightarrow x=3,2(x-1)^2=1$$

$$\Rightarrow(x-1)^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x-1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۴۰: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ باشد، در ماتریس $A.A'$، مجموع عناصر روی قطر کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$AA'=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & & \\ & 5 & \\ & & 5\end{bmatrix}\Rightarrow AA'\text{ مجموع عناصر روی قطر }=6+5+5=16$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۴۱: در سؤال شماره قبل مقدار دترمینان A کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۰)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» روش ساروس:

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc}1 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1\end{array}\right|=(0+8+0)-(-2+2+0)=8$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۴۲: دستگاه $\begin{cases}ax+y=10\\ -x-ay=5\end{cases}$ بازاء چه مقدار a جواب ندارد؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۰)

۱) ۲- و ۱- ۲) ۱- و ۱ ۳) ۳- و ۱- ۴) ۴ و ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\frac{a}{-1}=\frac{1}{-a}\neq\frac{10}{5}\Rightarrow -a^2=-1\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm1$$

یادآوری: دستگاه $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$، وقتی جواب ندارد که: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۴۳: اگر $\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=A\times\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۰)

۱) $A=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ ۲) $A=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ۳) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 5\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}2 & -5\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» فرض می‌کنیم $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، در این صورت:

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-a & 2a+b\\ -c & 2c+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-a=2\\ 2a+b=1\\ -c=-1\\ 2c+d=1\end{cases}\Rightarrow a=-2,b=5,c=1,d=-1$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۴۴: کدام یک از ماتریسهای زیر فاقد معکوس‌اند؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۱)

۱) $\begin{vmatrix} ۳ & -۲ \\ ۴ & ۵ \end{vmatrix}$ ۲) $\begin{vmatrix} ۲ & ۵ \\ -۲ & -۵ \end{vmatrix}$ ۳) $\begin{vmatrix} ۲ & ۵ \\ -۲ & ۴ \end{vmatrix}$ ۴) $\begin{vmatrix} -۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{vmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۲ & -۵ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۲\times(-۵)-۵\times(-۲)=۰$$

یادآوری: ماتریس A معکوس‌پذیر است، اگر و تنها اگر $|A| \neq ۰$.

مثال ۴۵: دستگاه معادلات $\begin{cases} x+y+z=۱۰ \\ x+۲y+۳z=۲۰ \\ ۲x+ay+bz=۳۰ \end{cases}$ **بازاء چه مقادیری از a و b بی‌نهایت جواب دارد؟** (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۱)

۱) $a=۲ \quad b=۳$ ۲) $a=۳ \quad b=۴$ ۳) $a=۱ \quad b=۱$ ۴) $a=۱ \quad b=۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

روش اول: ابتدا یکی از متغیرها را برحسب دو متغیر دیگر بدست آورده و در معادلات جایگزین می‌کنیم.

$$x+y+z=۱۰ \Rightarrow x=۱۰-y-z \Rightarrow \begin{cases} ۱۰-y-z+۲y+۳z=۲۰ \\ ۲(۱۰-y-z)+ay+bz=۳۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+۲z=۱۰ \\ (a-۲)y+(b-۲)z=۱۰ \end{cases}$$

دستگاه دو معادله، دو مجهول فوق وقتی بی‌نهایت جواب دارد که: $\frac{۱}{a-۲}=\frac{۲}{b-۲}=\frac{۱۰}{۱۰} \Rightarrow a-۲=۱, b-۲=۲ \Rightarrow a=۳, b=۴$

روش دوم: دستگاه غیرهمگن وقتی بی‌نهایت جواب دارد یا اصلاً جواب ندارد که دترمینان ضرایب صفر باشد.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & a & b & ۲ & a \end{array}\right| = (۲b+۶+a)-(۴+۳a+b)=b-۲a+۲=۰$$

با توجه به گزینه‌ها، فقط گزینه (۲) در رابطه فوق صدق می‌کند در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

مثال ۴۶: دستگاه $\begin{cases} x_۱+x_۲+x_۳=۰ \\ x_۱-۲x_۲-۳x_۳=۰ \\ ۲x_۱+ax_۲+bx_۳=۰ \end{cases}$ **بازاء چه مقادیری از a و b جواب مخالف صفر دارد؟** (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۱)

۱) $a=-۱ \quad , \quad b=-۲$ ۲) $a=-۲ \quad , \quad b=-۳$ ۳) $a=۱ \quad , \quad b=۱$ ۴) $a=۲ \quad , \quad b=۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱ و ۴» دستگاه همگن وقتی جواب غیرصفر دارد که دترمینان ضرایب صفر باشد.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ & -۳ & ۱ & -۲ \\ ۲ & a & b & ۲ & a \end{array}\right| = (-۲b-۶+a)-(-۴-۳a+b)=-۳b+۴a-۲=۰$$

هر دو گزینه (۱) و (۴) در رابطه فوق صدق می‌کنند و بنابراین می‌توانند صحیح باشند.

مثال ۴۷: اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ **و k عدد طبیعی باشد، حاصل** $A^{۲k}$ **کدام است؟** (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۱)

۱) A ۲) $۲^k A$ ۳) $۲^k I$ ۴) $۲^{۲k} I$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$A^۲ = A.A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = ۲I \Rightarrow A^۲ = ۲I \Rightarrow A^{۲k} = (A^۲)^k = (۲I)^k = ۲^k I$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۴۸: اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}$ **باشد، یکی از مقادیر ویژه ماتریس** $A^{-۱}$ **عبارت است از:** (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۱)

۱) ۲- ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۳» در ماتریسهای بالا مثلثی، پایین مثلثی و قطری، عناصر روی قطر اصلی همان مقادیر ویژه ماتریس می‌باشند، بنابراین مقادیر ویژه ماتریس A برابر ۱، ۲ و ۳ می‌باشد و در نتیجه مقادیر ویژه ماتریس $A^{-۱}$ برابر $\frac{۱}{۱}$، $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ خواهند بود.

مثال۴۹: اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$**، ماتریس** $A^{-۱}.B^{۲}$ **کدام است؟** (حسابداری ـ سراسری ۸۲)

۱) $\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۶ & ۵\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}\frac{۹}{۲} & ۲\\ \frac{۷}{۲} & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}\frac{۱}{۵} & -\frac{۳}{۵}\\ \frac{۲}{۵} & \frac{۷}{۵}\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}\frac{۴}{۵} & \frac{۸}{۵}\\ \frac{۸}{۵} & -\frac{۴}{۵}\end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۱\times ۱-۲\times ۳}\times\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ -۳ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-۱}{۵} & \frac{۲}{۵}\\ \frac{۳}{۵} & \frac{-۱}{۵}\end{bmatrix}$$

$$B^{۲}=B\times B=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۰\\ ۴ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}B^{۲}=\begin{bmatrix}\frac{-۱}{۵} & \frac{۲}{۵}\\ \frac{۳}{۵} & \frac{-۱}{۵}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & ۰\\ ۴ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۴}{۵} & \frac{۸}{۵}\\ \frac{۸}{۵} & \frac{-۴}{۵}\end{bmatrix}$$

مثال۵۰: به ازای چه مقدار k **دستگاه** $\begin{cases}x+۲y=k\\ ۲x+y=۵\\ x-y=۱\end{cases}$ **سازگار است؟** (حسابداری ـ سراسری ۸۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۳» از معادلات دوم و سوم مقادیر x و y را بدست می‌آوریم و در معادله اول قرار می‌دهیم تا مقدار k بدست آید.

$$\begin{cases}۲x+y=۵\\ x-y=۱\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع دو معادله}}۳x=۶\Rightarrow x=۲,y=۱\Rightarrow x+۲y=k\xrightarrow{x=۲,y=۱}۲+۲=k\Rightarrow k=۴$$

مثال۵۱: فرض کنید A **ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد. کدام یک از ماتریسهای زیر متقارن است؟** (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۲)

۱) $A-A^{-۱}$ ۲) $A-A^{t}$ ۳) $A+A^{t}$ ۴) $A+A^{-۱}$

پاسخ: گزینه «۳» بطور کلی ماتریس‌های $A+A^{T}$ و AA^{T} متقارن هستند.

مثال۵۲: از رابطه $(x\quad ۱\quad ۱)\begin{pmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۳ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ ۱\\ ۱\end{pmatrix}=۰$ **مقدار** x **کدام است؟** (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۲)

۱) $۲\pm\sqrt{۲}$ ۲) $۳\pm\sqrt{۳}$ ۳) $-۳\pm\sqrt{۵}$ ۴) $-۳\pm\sqrt{۷}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$(x\quad ۱\quad ۱)\begin{pmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۳ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ ۱\\ ۱\end{pmatrix}=(x+۳\quad ۲x+۳\quad x+۱)\begin{pmatrix}x\\ ۱\\ ۱\end{pmatrix}=x^{۲}+۳x+۲x+۳+x+۱=۰$$

$$x^{۲}+۶x+۴=۰\Rightarrow x=\frac{-۶\pm\sqrt{۲۰}}{۲}=\frac{-۶\pm ۲\sqrt{۵}}{۲}=-۳\pm\sqrt{۵}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۵۳: اگر $B=\begin{vmatrix}۲ & ۴ & ۳\\ -۱ & ۶ & ۹\\ ۳ & ۸ & ۱\end{vmatrix}$ ، آنگاه مجموع عناصر $B^۲$ برابر است با: (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۲)

۱) ۴۴۴ ۲) ۴۴۵ ۳) ۴۴۶ ۴) ۴۴۷

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$B^۲=\begin{bmatrix}۲ & ۴ & ۳\\ -۱ & ۶ & ۹\\ ۳ & ۸ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۴ & ۳\\ -۱ & ۶ & ۹\\ ۳ & ۸ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹ & ۵۶ & ۴۵\\ ۱۹ & ۱۰۴ & ۶۰\\ ۱ & ۶۸ & ۸۲\end{bmatrix}\Rightarrow B^۲ \text{ مجموع عناصر } = ۴۴۴$$

مثال ۵۴: رتبه ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۳ & ۵\\ ۱ & -\frac{۳}{۲} & -\frac{۵}{۲}\\ -۴ & ۶ & ۱۰\end{bmatrix}$ ، برابر است با: (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۲)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» سطرهای دوم و سوم ماتریس A، مضرب سطر اول می‌باشند، بنابراین ماتریس A فقط یک سطر مستقل خطی دارد. بنابراین رتبه ماتریس A برابر یک است.

مثال ۵۵: نوع ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۱ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۲)

۱) شبه معین منفی ۲) نامعین ۳) معین منفی ۴) معین مثبت

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که:

$$|H_۱|=۱\ ,\ |H_۲|=\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ ۱ & ۳\end{vmatrix}=۱\times۳-۲\times۱=۱$$

$$|H_۳|=\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۱ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{vmatrix}\begin{matrix}۱ & ۲\\ ۱ & ۳\\ ۰ & ۰\end{matrix}=(۱۲+۰+۰)-(۰+۰+۸)=۴$$

چون تمام H_iها مثبت هستند، پس ماتریس A معین مثبت است.

مثال ۵۶: دستگاه $\begin{cases}x+۲y-z=۱\\ ۳x-y+z=۳\\ x-۵y+۳z=a\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بی‌شمار جواب دارد؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۲)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا دستگاه را از سه معادله، سه مجهول به دو معادله دو مجهول تبدیل می‌کنیم. بدین منظور یکی از مجهولات را برحسب سایر مجهولات بدست آورده و در دو معادله دیگر جایگزین می‌کنیم.

$$x+۲y-z=۱\Rightarrow x=۱-۲y+z$$

$$\begin{cases}۳(۱-۲y+z)-y+z=۳\\ ۱-۲y+z-۵y+۳z=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۷y+۴z=۰\\ -۷y+۴z=a-۱\end{cases}$$

دستگاه بدست آمده در بالا وقتی بیشمار جواب دارد که $a-۱=۰$ یا $a=۱$ باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۵۷: اگر $A-2I=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&1\\0&0&2\end{bmatrix}$ باشد، یکی از مقادیر ویژه ماتریس A^{-1} کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۲)

۱) -2 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

پاسخ: گزینه «۳»

$$A-2I=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&1\\0&0&2\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&1\\0&0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-1&1\\0&2&1\\0&0&4\end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه A، یک ماتریس بالا مثلثی است، لذا عناصر قطر اصلی A همان مقادیر ویژه A می‌باشند، یعنی ۲، ۳ و ۴ مقادیر ویژه ماتریس A هستند. در نتیجه مقادیر ویژه A^{-1} عبارتند از $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$.

یادآوری: اگر λ یکی از مقادیر ویژه A باشد، آنگاه $\frac{1}{\lambda}$ یکی از مقادیر ویژه A^{-1} خواهد بود.

مثال ۵۸: اگر x و y و p ماتریس‌های $n\times n$ معکوس‌پذیر باشند و داشته باشیم $B=(x'px)^{-1}x'py^{-1}$ در این صورت ماتریس B کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۲)

۱) $x'y^{-1}$ ۲) xy ۳) $(xy)^{-1}$ ۴) $(yx)^{-1}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$B=(x'px)^{-1}x'py^{-1}=x^{-1}p^{-1}\underbrace{(x')^{-1}x'}_{\text{ماتریس همانی } I_{n\times n}}py^{-1}=x^{-1}\underbrace{p^{-1}p}_{\text{ماتریس همانی } I}y^{-1}=x^{-1}y^{-1}=(yx)^{-1}$$

مثال ۵۹: در دستگاه معادلات مقابل $\begin{cases}x+y+z=2\\4x+5y+z=10\\3+x-y+z=0\end{cases}$ اگر $z=1$ باشد، مقدار x کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۲)

۱) -5 ۲) 4 ۳) -4 ۴) 5

پاسخ: هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$z=1\Rightarrow\begin{cases}x+y+1=2&\Rightarrow x+y=1\\3+x-y+1=0&\Rightarrow x-y=-2\end{cases}\xrightarrow{+}2x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

با جایگذاری x و y در معادله دوم متوجه می‌شویم سئوال غلط است.

مثال ۶۰: مقدار x از معادله $\begin{bmatrix}1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\\1\end{bmatrix}=0$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۳)

۱) 2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{bmatrix}1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\\1\end{bmatrix}=x+2-1=0\Rightarrow x=-1$$

مثال ۶۱: اگر داشته باشیم $AX=B$, $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$، مقدار $x-y$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۳)

۱) -4 ۲) -3 ۳) 2 ۴) 4

پاسخ: گزینه «۲»

$$AX=B\xrightarrow{\text{با ضرب طرفین معادله در } A^{-1}}A^{-1}AX=A^{-1}B\Rightarrow X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}\Rightarrow x=4,y=7\Rightarrow x-y=4-7=-3$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۶۲: اگر داشته باشیم $A^{۳}=۰$ ، الزاماً ماتریس A کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۳)

۱) معکوس‌ناپذیر ۲) صفر ۳) بالامثلثی ۴) شبه متقارن

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$A^{۳}=۰ \Rightarrow \left|A^{۳}\right|=۰ \Rightarrow |A|^{۳}=۰ \Rightarrow |A|=۰$$

چون $|A|=۰$، بنابراین A معکوس‌پذیر نیست.

یادآوری: اگر $A^{k}=۰$، آنگاه A را پوچ توان می‌گوییم. ماتریس‌های پوچ توان معکوس‌پذیر نیستند.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۶۳: اگر داشته باشیم $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۲\end{bmatrix}$ ، در ماتریس الحاقی $(adjA)$ مجموع عناصر روی قطر کدام است؟

(مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» عناصر روی قطر ماتریس الحاقی $(adj\ A)$، همان عناصر روی قطر ماتریس همسازه می‌باشند، بنابراین کافی است همسازه‌های قطر اصلی A را بدست آوریم.

$$a_{۱۱}\ \text{همسازه}=(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۲\end{vmatrix}=۱ \text{ و } a_{۲۲}\ \text{همسازه}=(-۱)^{۲+۲}\times\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۲\end{vmatrix}=۱ \text{ و } a_{۳۳}\ \text{همسازه}=(-۱)^{۳+۳}\times\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{vmatrix}=-۳$$

$$\Rightarrow \text{مجموع عناصر روی قطر در ماتریس الحاقی}=۱+۱-۳=-۱$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۶۴: اگر $\begin{bmatrix}-۲\\ ۱\end{bmatrix}$ یک بردار ویژه ماتریس مرتبهٔ ۲ باشد کدام بردار نیز بردار ویژه این ماتریس است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۳)

۱) $\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۴\\ -۲\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۴\\ ۲\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-۴\\ -۲\end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر V یک بردار ویژه ماتریس A باشد، آنگاه هر مضربی از بردار V نیز یک بردار ویژه A خواهد بود.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال ۶۵: ستون چهارم ماتریس $\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳ & ۹\\ ۰ & -۳ & -۶ & -۱۲\\ ۰ & -۵ & -۱۱ & -۲۳\end{bmatrix}$ مقادیر ثابت یک دستگاه معادله خطی سه مجهولی و ماتریس حاصل از حذف ستون چهارم ماتریس ضرایب این دستگاه است، مجموع جواب این دستگاه کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۳)

۱) ۵- ۲) ۴- ۳) ۴ ۴) ۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سئوال دستگاه سه معادله سه مجهول موردنظر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases}x+۲y+۳z=۹\\ -۳y-۶z=-۱۲\\ -۵y-۱۱z=-۲۳\end{cases}\xrightarrow[x-۳]{\times ۵}\begin{cases}x+۲y+۳z=۹ & (۱)\\ -۱۵y-۳۰z=-۶۰ & (۲)\\ ۱۵y+۳۳z=۶۹ & (۳)\end{cases}$$

حال از جمع معادلات (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$۳z=۹ \Rightarrow z=۳ \xrightarrow{\text{جایگذاری در (۳)}} ۱۵y=-۳۰ \Rightarrow y=-۲ \xrightarrow{\text{جایگذاری در (۱)}} x-۴+۹=۹ \Rightarrow x=۴$$

$$\Rightarrow x+y+z=۴-۲+۳=۵$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۶۶: اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۱\\ ۳ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$ **درایه (عنصر) واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس** A^{-1} **کدام است؟** (حسابداری ـ سراسری ۸۴)

۱) $-\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$|A|=\begin{vmatrix}۲ & ۰ & ۱ & ۲ & ۰\\ ۳ & ۲ & ۰ & ۳ & ۲\\ ۰ & ۰ & ۴ & ۰ & ۰\end{vmatrix}=(۱۶+۰+۰)-(۰+۰+۰)=۱۶$$

$$a_{۳۲}\text{ همسازه}=(-۱)^{۳+۲}\times\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۰\end{vmatrix}=-۳\Rightarrow A^{-۱}\text{ در }a_{۲۳}\text{ درایه}=\frac{۱}{|A|}\times(a_{۳۲}\text{ همسازه})=\frac{۱}{۱۶}\times(-۳)=\frac{-۳}{۱۶}$$

مثال۶۷: به ازای کدام مقدار $x\neq ۰$ **حاصل دترمینان** $\begin{bmatrix}x+۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & x+۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & x+۱\end{bmatrix}$ **برابر صفر است؟** (حسابداری ـ آزاد ۸۴)

۱) ۲- ۲) ۳- ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{vmatrix}x+۱ & ۱ & ۱ & x+۱ & ۱\\ ۱ & x+۱ & ۱ & ۱ & x+۱\\ ۱ & ۱ & x+۱ & ۱ & ۱\end{vmatrix}=((x+۱)^{۳}+۱+۱)-((x+۱)+(x+۱)+(x+۱))=۰$$

$$\Rightarrow(x+۱)^{۳}-۳(x+۱)+۲=۰\Rightarrow x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۱-۳x-۳+۲=۰\Rightarrow x^{۳}+۳x^{۲}=۰\Rightarrow x^{۲}(x+۳)=۰\Rightarrow x=۰,-۳$$

مثال۶۸: از دستگاه معادلات $\frac{z+۳}{-۱}=\frac{y+۱}{۲}=\frac{۲x-۱}{۳}$ **و** $۲x+y+z=۵$ **مقدار** y **کدام است؟** (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۴)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۱- ۴) ۵-

پاسخ: گزینه «۲» دستگاه معادلات، سه معادله سه مجهول می‌باشد. ابتدا از رابطهٔ $\frac{z+۳}{-۱}=\frac{y+۱}{۲}=\frac{۲x-۱}{۳}$، متغیرهای x و z را برحسب y بدست آورده و سپس در معادلهٔ $۲x+y+z=۵$ جایگزین می‌کنیم.

$$\frac{۲x-۱}{۳}=\frac{y+۱}{۲}\Rightarrow ۲x-۱=\frac{۳}{۲}y+\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲x=\frac{۳}{۲}y+\frac{۵}{۲}\Rightarrow x=\frac{۳}{۴}y+\frac{۵}{۴}\quad (۱)$$

$$\frac{z+۳}{-۱}=\frac{y+۱}{۲}\Rightarrow z+۳=\frac{-۱}{۲}y-\frac{۱}{۲}\Rightarrow z=\frac{-۱}{۲}y-\frac{۷}{۲}\quad (۲)$$

با جایگزینی (۱) و (۲) در $۲x+y+z=۵$ نتیجه می‌شود:

$$۲(\frac{۳}{۴}y+\frac{۵}{۴})+y+(\frac{-۱}{۲}y-\frac{۷}{۲})=۵\Rightarrow\frac{۳}{۲}y+\frac{۵}{۲}+y-\frac{۱}{۲}y-\frac{۷}{۲}=۵\Rightarrow ۲y=۶\Rightarrow y=۳$$

مثال۶۹: به ازای کدام مقدار A **ماتریس** $\begin{bmatrix}A & ۲\\ A-۲ & ۱\end{bmatrix}$ **معکوس ندارد؟** (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۴)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۴» بطور کلی ماتریس A معکوس ندارد، هرگاه $|A|=۰$ باشد.

$$\begin{vmatrix}A & ۲\\ A-۲ & ۱\end{vmatrix}=A-۲(A-۲)=۰\Rightarrow A-۲A+۴=۰\Rightarrow A=۴$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۷۰: اگر A ماتریس ۲×۲ بوده و $A^{-1}=\frac{8}{|A|}.A$ در این صورت کدام پاسخ برای دترمینان A مناسب است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۴)

۱) $\sqrt[3]{2}$ ۲) $\sqrt[3]{4}$ ۳) ۲ ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از طرفین رابطه داده شده دترمینان می‌گیریم. در این صورت:

$$A^{-1}=\frac{8}{|A|}.A \Rightarrow |A^{-1}|=\left|\frac{8}{|A|}.A\right| \Rightarrow |A|^{-1}=\frac{64}{|A|^{2}}\times|A| \Rightarrow |A|^{3}=64 \Rightarrow |A|=4$$

یادآوری: اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد، آنگاه:

۱) $|A^{n}|=|A|^{n}$ ۲) $|KA|=K^{n}|A|$

مثال ۷۱: اگر ماتریس‌های $A_{3\times 2}=[i+2j]$ و $B_{2\times 3}=[2i-j]$ بوده و $A.B=[d_{ij}]$ باشد d_{23} کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۴)

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای محاسبه d_{23} فقط کافی است که سطر دوم A را در ستون سوم B ضرب کنیم که حاصل برابر ۲ می‌شود.

$$AB=\begin{bmatrix}3&5\\4&6\\5&7\end{bmatrix}_{3\times 2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\3&2&1\end{bmatrix}_{2\times 3}=\begin{bmatrix}&&\\&&2\\&&\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

مثال ۷۲: می‌دانیم که $A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}2&-2\\3&-1\end{bmatrix}$ و $AB=C$ می‌باشند در این صورت $|B|$ کدام گزینه می‌باشد؟(علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۵)

۱) $\frac{-4}{3}$ ۲) ۱۲ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به اینکه $|A|=3$ و $|C|=4$، پس $|B|=\frac{4}{3}$

مثال ۷۳: در دستگاه $\begin{cases}x+y+z=2\\x-y-2z=-1\\2x+y-z=4\end{cases}$ مقدار x چیست؟ (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۵)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود $z=2-x-y$ که با جایگزینی در معادلات دوم و سوم خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x-y-2(2-x-y)=-1\\2x+y-(2-x-y)=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+y=3\\3x+2y=6\end{cases}\Rightarrow y=3\ ,\ x=0$$

مثال ۷۴: اگر $A^{4}=I$ باشد در این صورت A^{426} برابر است با: (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۵)

۱) I ۲) A ۳) A^{3} ۴) A^{2}

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$A^{426}=A^{424}\times A^{2}=(A^{4})^{106}\times A^{2}=I\times A^{2}=A^{2}$$

مثال ۷۵: اگر A یک ماتریس مربع باشد، $A-A'$ کدام ماتریس است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۶)

۱) شبه متقارن ۲) عددی ۳) قطری ۴) متقارن

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» **یادآوری:** اگر A ماتریسی مربعی باشد، آنگاه $A-A'$ ماتریسی پادمتقارن یا شبه متقارن است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۷۶: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -k & 3\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & k & -3\end{bmatrix}$ **و** $|A|=2$ **باشد مقدار k کدام است؟** (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۶)

۱) $+2$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) -2 ۴) $-\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۳» دترمینان A را بدست آورده مساوی ۲ قرار دهید: $|A|=-k=2\Rightarrow k=-2$

مثال ۷۷: اگر A یک ماتریس ۵×۳ و B یک ماتریس ۶×۵ و C = AB باشد، درایه سطر دوم و ستون چهارم ماتریس C از کدام رابطه به دست می آید؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۶)

۱) $\sum_{k=1}^{5} a_{2k}b_{k4}$ ۲) $\sum_{k=1}^{4} a_{2k}b_{4k}$ ۳) $\sum_{k=1}^{5} a_{2k}b_{4k}$ ۴) $\sum_{k=1}^{4} a_{2k}b_{k4}$

پاسخ: گزینه «۱» طبق تعریف ضرب دو ماتریس برای محاسبه درآیه موردنظر لازم است سطر دوم ماتریس A را در ستون چهارم ماتریس B ضرب کنیم.

مثال ۷۸: اگر ماتریس A وارون‌پذیر و $2A^{-1}=A$ **باشد، وارون ماتریس** $I-A$ **کدام است؟** (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۶)

۱) $A-I$ ۲) $A+I$ ۳) $I-A$ ۴) $-A-I$

پاسخ: گزینه «۴»

در حالت کلی می‌دانیم که ماتریس B وارون ماتریس A می‌باشد هرگاه $AB=BA=I$ باشد و چون $(I-A)(-A-I)=I$ است پس $-A-I$ وارون ماتریس $I-A$ است.

مثال ۷۹: برای دو ماتریس A و B داریم $A^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ **و** $B^2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ **و** $B-A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$**، حاصل** $AB+BA$ **کدام است؟**

(مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۶)

۱) $\begin{bmatrix}2 & -6\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-2 & 6\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-5 & 6\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-4 & 0\\ -5 & -2\end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که: $(B-A)^2=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3\\ 3 & 0\end{bmatrix}$

حال با توجه به اینکه $(B-A)^2=(B-A)(B-A)=B^2+A^2-(AB+BA)$، پس نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix}3 & -3\\ 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}-(AB+BA)\Rightarrow AB+BA=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

مثال ۸۰: برای چه مقدار K دستگاه $\begin{cases}x-2y+z=4\\ kx+4y-2z=5\end{cases}$ **جواب ندارد؟** (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۶)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) -2 ۴) 2

پاسخ: گزینه «۳» $\frac{1}{k}=\frac{1}{-2}\Rightarrow k=-2$

مثال ۸۱: به ازاء چه مقادیری از a و b دستگاه $\begin{cases}x_1-2x_2=a\\ 3x_1-6x_2=b\end{cases}$ **دارای جواب است؟** (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۶)

۱) $a=3b$ ۲) $b=3a$ ۳) $a=0, b=1$ ۴) $a=1, b=0$

پاسخ: گزینه «۲» $\frac{1}{3}=\frac{a}{b}\Rightarrow b=3a$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۸۲: مقادیر ویژه ماتریس $C=\begin{bmatrix}۱ & ۴ & ۵\\ ۰ & ۲ & ۶\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}$ **کدامند؟** (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۶)

۱) ۳ و ۲ و ۱ ۲) ۳- و ۲- و ۱- ۳) ۲ و ۱ و ۰ ۴) ۱ و ۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» درایه‌های روی قطر اصلی مقادیر ویژه ماتریس‌های مثلثی هستند.

مثال ۸۳: در ماتریس $A=\begin{bmatrix}a+x & a & a\\ b & b+x & b\\ c & c & c+x\end{bmatrix}$ **اگر مجموع درایه‌ها برابر** $|A|=۸,۶$ **باشد** x **کدام است؟** (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۶)

۱) ± ۱ ۲) صفر ۳) ± ۲ ۴) ± ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» به سادگی می‌توان ملاحظه کرد اگر $x=۲$ و $a=b=c=۰$ باشد شرایط مسأله برقرار است.

مثال ۸۴: اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & -۱\\ ۲ & ۰ & ۳\\ ۱ & -۳ & ۰\end{bmatrix}$ **باشد، عنصر** $a_{۳۲}$ **در ماتریس** A^{-1}**، کدام است؟** (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $-\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $-\frac{۲}{۹}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» به کمک روش ساروس به سادگی $|A|=۹$ بدست می‌آید. $a_{۲۳}=\frac{۱}{|A|}\times(\text{همسازه درآیه } a_{۲۳})=\frac{۱}{۹}\times ۱=\frac{۱}{۹}$

مثال ۸۵: ماتریس $A=\begin{pmatrix}۳ & ۱ & -۱\\ ۱ & ۲ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۴\end{pmatrix}$ **چگونه است؟** (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۷)

۱) شبه معین مثبت ۲) شبه معین منفی ۳) معین مثبت ۴) معین منفی

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون دترمینان خود ماتریس A و زیر ماتریس‌های آن همگی مثبت هستند پس ماتریس A معین مثبت است.

مثال ۸۶: مقدار دترمینان $\begin{vmatrix}m & a-d & mb+mc\\ m & b-d & ma+mc\\ m & c-d & ma+mb\end{vmatrix}$ **کدام است؟** (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۷)

۱) ۱ ۲) m ۳) a ۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» واضح است که اگر $a=b=c=d$ باشد، ستون دوم ماتریس صفر می‌شود و بنابراین دترمینان ماتریس مساوی صفر خواهد بود و بنابراین تنها گزینه (۴) می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۸۷: مقادیر خاص ماتریس مربع A **را با** λ **نشان می‌دهیم، کدام مورد نادرست است؟** (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۷)

۱) اگر A متقارن باشد، λها حقیقی‌اند. ۲) اگر A متقارن باشد، علامت λها همان علامت A است.

۳) دترمینان A برابر مجموع λها است. ۴) دترمینان A، برابر حاصلضرب λها است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم دترمینان ماتریس برابر حاصل‌ضرب مقادیر ویژه ماتریس می‌باشد و اثر ماتریس برابر مجموع مقادیر ویژه ماتریس است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۸۸: کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟ (A و B ماتریس‌های n×n هستند و منظور از Tr اثر ماتریس است)(علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۷)

۱) $Tr(AB)=Tr(BA)$ ۲) $AB=BA$

۳) $(AB)'=A'B'$ ۴) مقادیر ویژه AB و BA قرینه‌ی یکدیگرند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» توجه کنید که ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد، پس گزینه‌ی (۲) غلط است. از طرفی $(AB)'=B'A'$ می‌باشد پس گزینه (۳) غلط است و ضمناً مقایر ویژه AB و BA با هم برابر هستند.

مثال۸۹: اگر $A.A'=I$ باشد مقادیر ویژه ماتریس $A^۲$ کدام است؟ (A ماتریس n×n) (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۷)

۱) ۱− و ۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) صفر و ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم مقادیر ویژه ماتریس‌های A و A' با هم برابر هستند. فرض می‌کنیم λ مقدار ویژه ماتریس A' وابسته به بـردار ویژه α باشد؛ لذا $A'\alpha=\lambda\alpha$ می‌باشد. حال دو طرف رابطه را از چپ در ماتریس A ضرب می‌کنیم:

$$AA'=A\lambda\alpha \xrightarrow{AA'=I} I\alpha=A\lambda\alpha \rightarrow \alpha=A\lambda\alpha \xrightarrow{A\alpha=\lambda\alpha} \alpha=\lambda.\lambda\alpha=\lambda^۲\alpha \rightarrow \lambda^۲=۱ \rightarrow \lambda=\pm ۱$$

بنابراین $\lambda=\pm ۱$ مقادیر ویژه ماتریس‌های A و A' است، لذا مقادیر ویژه ماتریس $A^۲$، $(\lambda=\pm ۱)^۲$ است یعنی $\lambda=۱$.

مثال۹۰: به ازاء چه مقد اری از α ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ \alpha & ۲ & ۱ \\ ۱ & \alpha & ۳ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر است؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۷)

۱) $\alpha \neq \frac{۵}{۲}$ ۲) $\alpha=\frac{۵}{۲}$ ۳) $\alpha \neq -\frac{۵}{۲}$ ۴) $a=-\frac{۵}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم که ماتریس وارون پذیر است اگر و فقط اگر دترمینان آن مخالف صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ \alpha & ۲ & ۱ \\ ۱ & \alpha & ۳ \end{vmatrix} \begin{matrix} ۱ & -۱ \\ \alpha & ۲ \\ ۱ & \alpha \end{matrix} = (۶-۱+۰)-(۰+\alpha-۳\alpha)=۰ \Rightarrow \alpha=\frac{-۵}{۲}$$

مثال۹۱: اگر $A_{n,}=\begin{bmatrix} a & ۱-a \\ ۱+a & -a \end{bmatrix}$ عدد فرد طبیعی باشد به ازای کدام مقادیر a رابطه ماتریسی $A^n=A$ برقرار است؟

(حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۸)

۱) فقط $a=۰$ ۲) فقط $a=۱$ ۳) هر چه باشد a ۴) هیچ مقدار a

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از طرفین رابطه $A^n=A$ دترمینان می‌گیریم: $|A|=۱$ یا $|A|=۰$ $\Rightarrow |A^n|=|A| \Rightarrow |A|^n=|A| \Rightarrow |A|=۰$

ولی با محاسبه دترمینال ماتریسی داده شده خواهیم داشت $|A|=-۱$، پس رابطه مورد نظر هرگز برقرار نمی‌شود.

مثال۹۲: از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۴ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & ۲ & y \end{bmatrix}=۰$، کدام رابطه حاصل می‌شود؟ (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۸)

۱) $y=۲۷x+۴۸$ ۲) $y=۱۲x+۱۷$ ۳) $۱۹x+۳y=۴۱$ ۴) نشدنی

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$\begin{bmatrix} x & ۲ & y \end{bmatrix}_{۱\times ۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۴ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times ۲}=\begin{bmatrix} x-۳y+۴ & ۵x+y+۸ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x-۳y+۴ & ۵x+y+۸ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}=۰ \Rightarrow ۲x-۶y+۸+۲۵x+۵y+۴۰=۰ \Rightarrow ۲۷x-y+۴۸=۰$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۹۳: از دستگاه معادلات $\begin{cases} x+y+z=۶ \\ y+z+t=۹ \\ z+t+x=۸ \\ t+x+y=۷ \end{cases}$، **مقدار** $x+y$ **چقدر است؟** (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۸)

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از جمع کردن معادله‌های داده شده در صورت سؤال نتیجه می شود. $۳x+۳y+۳z+۳t=۳۰$، و یا $x+y+z+t=۱۰$. حال با توجه به اینکه $y+z+t=۹$ می‌باشد پس $x=۱$ و با توجه به اینکه $x+y+t=۷$ می‌باشد پس $z=۴$ به دست می‌آید و در نتیجه $x+z=۵$

مثال ۹۴: وارون ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -b & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ **کدام است؟** (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۸)

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ b & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ b & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ b & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ b & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم وارون یک ماتریس پایین مثلثی، خود یک ماتریس، پایین مثلثی می‌باشد پس گزینه (۲) یا (۳) صحیح خواهد بود ولی گزینه (۳) نمی‌تواند جواب باشد زیرا دترمینان ماتریس داده شده مساوی یک است پس دترمینان ماتریس وارون آن نیز مساوی یک خواهد بود ولی دترمینال ماتریس گزینه (۳) مساوی صفر است.

مثال ۹۵: از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & x \\ -۱ & y & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \\ y \end{bmatrix}$، **مقدار** x **کدام است؟** (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۹)

۱) ۲۵- ۲) ۱۰- ۳) ۵- ۴) ۵۰-

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از رابطه داده شده در صورت سؤال نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} ۸+۱۵+xy=۳ \\ -۴+۵y+۰y=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=-۲۰ \\ ۵y=۲ \Rightarrow y=\frac{۲}{۵} \end{cases}$$

با جایگذاری $y=\frac{۲}{۵}$ در معادله $xy=-۲۰$، مقدار $x=-۵۰$ حاصل می‌شود.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

فصل نهم

«بردار»

مثال۱: اگر سه بردار $\vec{V}_1(1,1,2), \vec{V}_2(a,2,1), \vec{V}_3(2,3,4)$ وابسته خطی باشند، آنگاه a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۳» با استفاده از روش ساروس داریم: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (8+3+4a)-(6a+2+8)=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

مثال۲: فاصله نقطه $P(2,2,-3)$ از صفحه $5x+11y+2z-30=0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{4}{\sqrt{150}}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{\sqrt{150}}$

پاسخ: گزینه «۲» $d=\frac{|5\times2+11\times2+2\times(-3)-30|}{\sqrt{5^2+11^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{150}}$

مثال۳: به ازای کدام مقدار k بردارهای $a_1(1,2,1)$ و $a_2(2,3,1)$ و $a_3(4,7,k)$ وابسته خطی هستند؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۵)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۱» سه بردار وابسته خطی‌اند، هرگاه دترمینان حاصل از آنها صفر شود.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & k & 4 & 7 \end{vmatrix} = (3k+8+14)-(12+7+4k)=0 \Rightarrow -k+3=0 \Rightarrow k=3$$

مثال۴: به ازای کدام مقدار k سه بردار $\vec{a}(1,2,1)$ و $\vec{b}(0,1,2)$ و $\vec{c}(1,0,k)$ وابسته خطی‌اند؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۷)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۳

پاسخ: گزینه «۴» $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k & 1 & 0 \end{vmatrix} = (k+4+0)-(1+0+0)=0 \Rightarrow k+3=0 \Rightarrow k=-3$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۵: سه بردار $\vec{a}(1,2,3)$ و $\vec{b}(k,1,0)$ و $\vec{c}(1,1,1)$ به ازای کدام مقدار k مستقل خطی نیستند؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۸)

۱) $k \neq 1$ ۲) $k = 1$ ۳) $k \neq 2$ ۴) $k = 2$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ k & 1 & 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+0+3k)-(3+0+2k) = 0 \Rightarrow k-2=0 \Rightarrow k=2$$

مثال۶: اگر سه بردار $\vec{A}(1,2,3)$ و $\vec{B}(2,4,6)$ و $\vec{C}(0,1,a)$ وابسته خطی باشند، مجموعه مقادیر a کدام است؟(علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۹)

۱) $\{0\}$ ۲) $\{1\}$ ۳) R ۴) R^+

پاسخ: گزینه «۳»

روش اول: چون بردار B مضربی از A می‌باشد، بنابراین به ازای هر مقدار دلخواه a، سه بردار A، B و C وابسته خطی می‌باشند.

روش دوم: سه بردار وقتی وابسته خطی‌اند که دترمینان ماتریس حاصل از آنها صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & a & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4a+0+6)-(0+6+4a) = (4a+6)-(4a+6) = 0$$

چون دترمینان فوق همواره برابر صفر است، پس سه بردار به ازای هر $a \in R$ وابسته‌اند.

مثال۷: بردارهای $\vec{a}(1,2,3)$ و $\vec{b}(2,1,4)$ و $\vec{c}(m,3,7)$ به ازای کدام مقدار m وابسته خطی‌اند؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۳»

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ m & 3 & 7 & m & 3 \end{vmatrix} = (7+8m+18)-(3m+12+28) = 0 \Rightarrow 5m-15=0 \Rightarrow m=3$$

مثال۸: سه بردار $\vec{a}(k,1,5)$، $\vec{b}(2,1,3)$ و $\vec{c}(-1,2,3)$، به ازای کدام مقدار k وابسته خطی‌اند؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{16}{3}$ ۲) $-\frac{16}{3}$ ۳) $\frac{34}{3}$ ۴) $-\frac{34}{3}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 5 & k & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (3k-3+20)-(-5+6k+6) = 0 \Rightarrow -3k+16=0 \Rightarrow k=\frac{16}{3}$$

مثال۹: به ازای کدام مقدارk، سه بردار $\vec{a}(1,2,1)$ و $\vec{b}(2,1,K)$ و $\vec{c}(1,2,3)$، وابسته خطی‌اند؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۱)

۱) $K=1$ ۲) $K=2$ ۳) هر مقدار k ۴) هیچ مقدار K

پاسخ: گزینه «۴» سه بردار وابسته خطی‌اند هرگاه دترمینان ماتریس حاصل از آنها صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & k & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3+2k+4)-(1+2k+12) = (2k+7)-(2k+13) = -6$$

چون دترمینان همواره مخالف صفر است، پس سه بردار به ازای تمام مقادیر k مستقل‌اند.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۰: اگر بردارهای $\vec{a}(۱,۲,۳)$، $\vec{b}(۲,۱,۱)$ و $\vec{c}(x,y,z)$ وابسته خطی باشند، چه رابطه‌ای بین x، y و z برقرار است؟

(علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۳)

۱) $x-۵y+۳z=۰$ ۲) $x+۲y-z=۰$ ۳) $۲x-y+z=۰$ ۴) $۳x+y-۲z=۰$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۲ & ۱ \\ x & y & z & x & y \end{vmatrix} = (z+۲x+۶y)-(۳x+y+۴z)=۰ \Rightarrow -x+۵y-۳z=۰ \Rightarrow x-۵y+۳z=۰$$

مثال۱۱: به ازاء چه مقدار a خط‌های $x+y=۵$ و $x-y=۱$ و $x+۲y=a$ در یک نقطه متقاطع هستند. (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۴)

۱) ۷- ۲) ۵- ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ: گزینه «۴»

$$\begin{cases} x+y=۵ \\ x-y=۱ \end{cases} \Rightarrow ۲x=۶ \Rightarrow x=۳\ ,\ y=۲$$

برای اینکه سه خط در یک نقطه متقاطع باشند، لازم است نقطه به دست آمده در بالا در خط سوم نیز صدق کند. $۳+۲\times۲=a \Rightarrow a=۷$

مثال۱۲: اگر بردارهای $\vec{a}=(m,۱,-۱)$ و $\vec{b}=(۲,-۲,۱)$ و $\vec{c}=(-۲,۳,۱)$ و $\vec{d}=۲\vec{c}+\vec{b}$ باشد به ازاء چه مقدار m بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{d}$ عمود است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۵)

۱) ۱- ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۳-

پاسخ: گزینه «۳»

$$\vec{d}=۲\vec{c}+\vec{b}=(-۴,۶,۲)+(۲,-۲,۰)=(-۲,۴,۲)$$

دو بردار وقتی بر هم عمودند که حاصل‌ضرب داخلی آنها صفر شود.

$$\vec{a}.\vec{d}=۰ \Rightarrow (m,۱,-۱).(-۲,۴,۲)=۰ \Rightarrow -۲m+۴-۲=۰ \Rightarrow m=۱$$

مثال۱۳: اگر بردارهای $\vec{a}=(۱,m,-۱)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۱)$ و $\vec{c}=(۱,-۱,۲)$ باشد. در این صورت به ازای چه مقداری از m، بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{d}=۲\vec{b}-\vec{c}$ بر هم عمودند؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۶)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴»

$$\vec{d}=۲\vec{b}-\vec{c}=۲(۱,-۱,۱)-(۱,-۱,۲)=(۱,-۱,۰)$$

$$\vec{a}.\vec{d}=۰ \Rightarrow ۱-m=۰ \Rightarrow m=۱$$

مثال۱۴: صفحه گذرنده از نقطه $A(۳,۲,۱)$ و عمود بر بردار $\vec{n}(۱,۱,۲)$، محور z ها را در چه ارتفاعی قطع می‌کند؟(علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۷)

۱) ۲ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۳» معادله صفحه موردنظر: $۱\times(x-۳)+۱\times(y-۲)+۲(z-۱)=۰ \Rightarrow x+y+۲z=۷$

برای پیدا کردن نقطه تلاقی با محور z قرار می‌دهیم $x=y=۰$ و در نتیجه $z=\frac{۷}{۲}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مدرسان شریف

فصل دهم

« توابع چند متغیره »

مثال۱: اگر تابع $f: R^۲ \to R$ ، به معادله $z = \sqrt{۱ - x^۲ - ۲y^۲}$ فرض شود دامنه این تابع کدام است؟

۱) IR^+ ۲) $IR^۲$ ۳) $-\infty < x, y < +\infty$ ۴) $x^۲ + ۲y^۲ \le ۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد، یعنی: $۱ - x^۲ - ۲y^۲ \ge ۰ \Rightarrow x^۲ + ۲y^۲ \le ۱$

مثال۲: دیفرانسیل کامل u در صورتی که $u = xyz$ باشد، کدام است؟

۱) $xydx + xzdy + yzdz$ ۲) $yzdx + xzdy + xydz$ ۳) $xydx + zydy + xzdz$ ۴) $yzdx + xydy + xydz$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

مثال۳: اگر $z = u^۲ + v^۲ + uv$ و $u = x^۲ - y^۲$ و $v = xy$ باشد، در این صورت مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ به ازای $x = ۳$ و $y = ۲$ چقدر است؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۴۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که به ازای $x = ۳$ و $y = ۲$، مقدار $u = ۵$ و $v = ۶$ بدست می‌آید. حال با استفاده از قاعده مشتق‌گیری زنجیری داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = (۲u + v)(۲x) + (۲v + u)(y) = (۲\times ۵ + ۶)(۲\times ۳) + (۲\times ۶ + ۵)(۲) = ۱۳۰$$

مثال۴: اگر $z = u^۲ + v^۲$ و $u = e^{x^۲ + y^۲}$, $v = \frac{x}{y}$ باشد، در اینصورت $z'_x(۱,۱)$ کدام است؟

۱) $۴e^۴ + ۲e^۲$ ۲) $۴e^۴ + ۲e$ ۳) $۴e^۴ + ۲$ ۴) $۴e^۴$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} = (۲e^{x^۲+y^۲})(۲xe^{x^۲+y^۲}) + ۲(\frac{x}{y})(\frac{۱}{y}) \xrightarrow[y=۱]{x=۱} \frac{\partial z}{\partial x} = ۴e^۴ + ۲$

مثال۵: اگر $z = f(\frac{x}{y})$ آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $\begin{vmatrix} x = ۲ \\ y = ۲ \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}f'(۱)$ ۲) $\frac{۱}{۲}f'(۱)$ ۳) $f'(۱)$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به رابطه $[f(u)]' = u'f'(u)$ داریم: $z = f(\frac{x}{y}) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{۱}{y}f'(\frac{x}{y}) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(۲,۲) = \frac{۱}{۲}f'(\frac{۲}{۲}) = \frac{f'(۱)}{۲}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۶: اگر $u = ۳r + ۲s$ و $v = ۲r - ۳s$، آنگاه $\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)}$ کدام است؟

۱) -۱۳ ۲) $۶rs$ ۳) ۵ ۴) -۵

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & -۳ \end{vmatrix} = -۱۳$$

مثال۷: فرض کنید $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$، در اینصورت $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ است؟

۱) r ۲) $\frac{۱}{r}$ ۳) ۰ ۴) $r\cos۲\theta$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» طبق تعریف ژاکوبین در بالا نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^۲\theta + r\sin^۲\theta = r$$

مثال۸: اگر داشته باشیم $z = x^۲ + ۲xy + ۴y + ۱۰$ و $x + y = ۳$ باشد، نقطه بحرانی این تابع کدام است؟

۱) $(۱,۲)$ ۲) $(۲,۱)$ ۳) $(-۱,+۴)$ ۴) $(+۴,-۱)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» قرار می‌دهیم $f(x,y) = x^۲ + ۲xy + ۴y + ۱۰$ و $g(x,y) = x + y - ۳$، که در این صورت نقطه بحرانی از حل دستگاه زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} g(x\ y) = ۰ \\ \frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = ۳ \\ \frac{۲x + ۲y}{۱} = \frac{۲x + ۴}{۱} \end{cases} \Rightarrow ۲y = ۴ \Rightarrow y = ۲, x = ۱$$

بنابراین $(۱,۲)$ نقطه بحرانی تابع است.

مثال۹: در سؤال قبل، نوع نقطه کدام است؟

۱) زینی ۲) ماکزیمم ۳) می‌نیمم نسبی ۴) می‌نیمم مطلق

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» مقدار تابع $z = x^۲ + ۲xy + ۴y + ۱۰$ در نقطه $(۱,۲)$، برابر ۲۳ است. برای تعیین اینکه نقطه $(۱,۲)$ می‌نیمم یا ماکسیمم است، می‌توانیم یک نقطه که در شرط $x + y = ۳$ صدق کند را در تابع قرار دهیم و با مقایسه مقادیر z نوع نقطه بحرانی را مشخص کنیم. بطور مثال نقطه $(۳,۰)$ در شرط $x + y = ۳$ صدق می‌کند و مقدار z در این نقطه برابر ۱۹ است، با مقایسه مقادیر z مشخص می‌شود که نقطه $(۱,۲)$، نقطه ماکزیمم است.

توضیح: روش به کار رفته در حل این سئوال یک روش تستی است و نمی‌توان آنرا به عنوان یک روش دقیق و علمی پذیرفت.

مثال۱۰: در مورد تابع $F(x,y) = xy + Lnxy$ کدام گزینه صحیح است.

۱) $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$ یک مینیمم نسبی تابع است. ۲) $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$ یک ماکزیمم نسبی تابع است.

۳) $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$ یک نقطه زینی است. ۴) $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$ تعریف نشده است.

☑ **پاسخ:** هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\begin{cases} F_x = y + \frac{۱}{x} = ۰ \\ F_y = x + \frac{۱}{y} = ۰ \end{cases} \Rightarrow$$ نقطه $(\frac{-۱}{۲},\frac{-۱}{۲})$ در معادلات روبرو صدق نمی‌کند، بنابراین نقطه بحرانی نمی‌باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۱: کمترین و بیشترین فاصله مبدأ مختصات از منحنی $x^۲ + xy + y^۲ = ۹$ چقدر است؟

۱) کمترین $\sqrt{۳}$ و بیشترین $۲\sqrt{۳}$ ۲) کمترین $\sqrt{۶}$ و بیشترین $۳\sqrt{۲}$

۳) کمترین $۳\sqrt{۲}$ و بیشترین $۶\sqrt{۲}$ ۴) کمترین $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ و بیشترین $۳\sqrt{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» معادله داده شده در مختصات قطبی به صورت زیر در می‌آید:

$$r^۲ + r^۲\sin\theta\cos\theta = ۹ \Rightarrow r^۲ = \frac{۹}{۱+\sin\theta\cos\theta} = \frac{۹}{۱+\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta} = \frac{۱۸}{۲+\sin ۲\theta}$$

با توجه به اینکه فاصله از مبدأ در مختصات قطبی برابر r می‌باشد، پس لازم است مقادیر می‌نیمم و ماکزیمم تابع $r^۲ = \frac{۱۸}{۲+\sin ۲\theta}$ را بدست آوریم. برای بدست آوردن ماکزیمم r لازم است که مخرج کسر می‌نیمم شود یعنی $\sin ۲\theta = -۱$ که در اینصورت $\max(r^۲) = \frac{۱۸}{۲-۱} = ۱۸$ و یا $\max(r) = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$ بدست می‌آید. به همین ترتیب $r^۲$ وقتی می‌نیمم می‌شود که مخرج کسر ماکزیمم شود یعنی $\sin ۲\theta = ۱$ که در این صورت $\min(r^۲) = \frac{۱۸}{۲+۱} = ۶$ و یا $\min(r) = \sqrt{۶}$ بدست می‌آید.

مثال۱۲: ماکزیمم تابع $z = ۱ + x + ۲y$ تحت قید $x^۲ + y^۲ = ۵$ چقدر است؟

۱) $۱ + ۳\sqrt{۵}$ ۲) $۵\sqrt{۵} - ۱$ ۳) ۶ ۴) $۲ + ۲\sqrt{۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» مسأله را می‌توان به روش ضرایب لاگرانژ نیز حل کرد. ولی قید داده شده را می‌توان به صورت پارامتری $\begin{cases} x = \sqrt{۵}\cos t \\ y = \sqrt{۵}\sin t \end{cases}$ نوشت در این صورت تابع به شکل $z = ۱ + \sqrt{۵}\cos t + ۲\sqrt{۵}\sin t$ در می‌آید. حال با توجه به رابطه $-\sqrt{a^۲+b^۲} \le a\cos t + b\sin t \le \sqrt{a^۲+b^۲}$ نتیجه می‌شود:

$$\underbrace{-\sqrt{۵+۲۰}}_{۵} \le \sqrt{۵}\cos t + ۲\sqrt{۵}\sin t \le \underbrace{\sqrt{۵+۲۰}}_{۵} \Rightarrow -۴ \le z \le ۶$$

مثال۱۳: رابطهٔ $x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ + ۴x_۴ = ۲۰$ برقرار می‌باشد. حداکثر مقدار عبارت $x_۱x_۲^۲x_۳^۳x_۴^۴$ کدامیک از گزینه‌های زیر می‌باشد؟

۱) ۶۲۵ ۲) ۲۵۶ ۳) ۱۰۲۴ ۴) ۵۱۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$\frac{c_۱x_۱}{\alpha_۱} = \frac{c_۲x_۲}{\alpha_۲} = \frac{c_۳x_۳}{\alpha_۳} = \frac{c_۴x_۴}{\alpha_۴} \Rightarrow \frac{۲x_۱}{۲} = \frac{۲x_۲}{۲} = \frac{۳x_۳}{۳} = \frac{۴x_۴}{۴} \Rightarrow x_۱ = x_۲ = x_۳ = x_۴ = x$$

$$x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ + ۴x_۴ = ۲۰ \Rightarrow ۱۰x = ۲۰ \Rightarrow x = ۲$$

$$\Rightarrow x_۱ = x_۲ = x_۳ = x_۴ = ۲ \Rightarrow \text{Max } x_۱x_۲^۲x_۳^۳x_۴^۴ = ۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$$

مثال۱۴: اگر $x + y + z = ۸$ باشد، ماکزیمم عبارت $A = x^۳y^۳z^۲$ کدام است؟

۱) ۵۱۲۰ ۲) ۳۰۱۲ ۳) ۷۲۹ ۴) ۲۹۱۶

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» طبق نکته فوق، $p = ۲$ ، $n = ۳$ و $m = ۳$ می‌باشد:

$$k = \frac{۳^۳ \times ۳^۳ \times ۲^۲ \times ۸^۸}{۸^۸} = ۲۹۱۶$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۵: اگر $z=\frac{x}{2y}+\frac{2y}{x}$ **باشد ، مقدار** $xz'_x+yz'_y$ **، کدام است؟** (حسابداری ـ سراسری ۷۵)

۱) صفر ۲) z ۳) ۱ ۴) $2z$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تابع z، یک تابع همگن درجه صفر می‌باشد، بنابراین طبق قضیه اویلر داریم: $xz'_x+yz'_y=0z=0$

توضیح: تابع $f(x,y)=\frac{x}{2y}+\frac{2y}{x}$، تابع همگن از درجه ۰ است، زیرا: $f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda x}{2\lambda y}+\frac{2\lambda y}{\lambda x}=\frac{x}{2y}+\frac{2y}{x}=f(x,y)$

مثال۱۶: اگر تابع هدف $z=x^2+y^2$ **و قید** $x+y=4$ **باشد در نقطه بحرانی مقدار z کدام است؟** (حسابداری ـ سراسری ۷۵)

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

روش اول: ابتدا از معادله $x+y=4$، یکی از متغیرها را برحسب دیگری بدست آورده و در تابع هدف جایگزین می‌کنیم. بدین ترتیب تابع هدف به یک تابع یک متغیره تبدیل می‌شود.

$$x+y=4 \Rightarrow y=4-x \xrightarrow{\text{جایگذاری در تابع هدف}} z=x^2+(4-x)^2=2x^2-8x+16$$

$$z'=4x-8=0 \Rightarrow x=2,y=2 \Rightarrow z=2^2+2^2=8$$

روش دوم: فرض کنید $f(x,y)=x^2+y^2$ و $g(x,y)=x+y-4$، در این صورت برای بدست آوردن نقطه بحرانی کافی است دستگاه مقابل را حل کنید.

$$\begin{cases} g(x,y)=0 \\ \frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ \frac{2x}{1}=\frac{2y}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ x=y \end{cases} \Rightarrow x=y=2 \Rightarrow z=2^2+2^2=8$$

مثال۱۷: مقدار ماکزیمم تابع با ضابطه $z=20-x^2-4y^2+8y+2x$ **کدام است؟** (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۵)

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$z=20-x^2-4y^2+8y+2x$$

$$\begin{cases} z_x=-2x+2=0 \\ z_y=-8y+8=0 \end{cases} \Rightarrow x=1,y=1 \text{ نقطه بحرانی } \Rightarrow z=20-1-4+8+2=25$$

توضیح: چون تابع فقط یک نقطه بحرانی دارد، نیازی به بررسی اینکه آیا این نقطه، یک نقطه ماکزیمم یا می‌نیمم یا زینی است نمی‌باشد.

مثال۱۸: هرگاه $F(x+y+z,x^2+y^2+z^2)=0$ **باشد در این صورت** z_x **کدام است؟** (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۵)

۱) $-(F_1+2xF_2)/(F_1+2zF_2)$ ۲) $-(F_1+2yF_2)/(F_1+2zF_2)$

۳) $-(F_1+2xF_2)/F_1+2yF_2$ ۴) $-(F_1+2zF_2)/(2xF_2+F_1)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از روش مشتق‌گیری ضمنی چند متغیره استفاده می‌کنیم.

$$z_x=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}}=-\frac{F_1+2xF_2}{F_1+2zF_2}$$

با فرض $u=x+y+z$ و $v=x^2+y^2+z^2$، مشتق‌های فوق را نوشتیم.

مثال۱۹: اگر داشته باشیم $z=\frac{x^2}{2y^2}+\frac{2y^2}{x^2}$ **، مقدار** $x.\frac{\partial z}{\partial x}+y.\frac{\partial z}{\partial y}$ **کدام است؟** (حسابداری ـ سراسری ۷۶)

۱) صفر ۲) z ۳) $3z$ ۴) $3z$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تابع $z=\frac{x^2}{2y^2}+\frac{2y^2}{x^2}$، یک تابع همگن از درجه صفر می‌باشد، پس طبقه قضیه اویلر داریم: $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0\times z=0$

توضیح: تابع $f(x,y)=\frac{x^2}{2y^2}+\frac{2y^2}{x^2}$، تابع همگن از درجه صفر است زیرا: $f(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)^2}{2(\lambda y)^2}+\frac{2(\lambda y)^2}{(\lambda x)^2}=\frac{x^2}{2y^2}+\frac{2y^2}{x^2}=f(x,y)$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۲۰: در معادله ضمنی $z^۲ + x^۲ + y^۲ - ۵xy + ۳x - ۲zy = ۰$ ، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه (۲+ , ۱ , ۱) کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۶)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) صفر ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از روش مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{۲x - ۵y + ۳}{۲z - ۲y}\Big|_{(۱,۱,۲)} = -\frac{۲ - ۵ + ۳}{۴ - ۲} = ۰$$

مثال۲۱: اگر داشته باشیم $z = \frac{x^۲}{۲y^۲} + \frac{y^۲}{۲x^۲}$ مقدار $x.\frac{\partial z}{\partial x} + y.\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۶)

۱) z ۲) صفر ۳) ۲z ۴) $\frac{x^۲}{y^۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تابع داده شده یک تابع همگن درجه صفر می‌باشد، طبق قضیه اویلر حاصل عبارت موردنظر صفر می‌باشد.

مثال۲۲: مختصات نقطه بحرانی تابع $z = x^۲ + ۲y^۲ + ۲x - ۴y$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۶)

۱) $(۰,۰,۰)$ ۲) $(۱,۱,۱)$ ۳) $(۱-۱,۱)$ ۴) $(-۱,۱-۳)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$\begin{cases} z_x = ۲x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \\ z_y = ۴y - ۴ = ۰ \Rightarrow y = ۱ \end{cases} \xrightarrow[y=۱]{x=-۱} z = ۱ + ۲ - ۲ - ۴ = -۳$$

مثال۲۳: اگر داشته باشیم $z = f(k,L)$ و $k = g(x,y)$ و $L = h(x,y)$، مقدار z'_x کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۶)

۱) $z_x = z_k.k_x$ ۲) $z_x = z_k.k_x + z_L.x$ ۳) $z_x = z_L.L_x$ ۴) $z_x = ۰$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق قاعده مشتق‌گیری زنجیری چندمتغیره داریم:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial k}.\frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial L}.\frac{\partial L}{\partial x} = z_k.k_x + z_L.L_x$$

مثال۲۴: در تابع دومتغیری به معادله $z = x\,Ln(x^۲ + y^۲)$ مقدار $\frac{\partial^۲ z}{\partial x\,\partial y}$ در $y = ۱$ و $x = ۱$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۷)

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون ترتیب مشتق‌گیری اهمیت ندارد، لذا ابتدا نسبت به y و سپس نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$z = xLn(x^۲ + y^۲) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = x \times \frac{۲y}{x^۲ + y^۲} = \frac{۲xy}{x^۲ + y^۲} \Rightarrow \frac{\partial^۲ z}{\partial y \partial x} = \frac{۲y(x^۲ + y^۲) - ۲x \times ۲xy}{(x^۲ + y^۲)^۲} = \frac{۲y^۳ - ۲x^۲ y}{(x^۲ + y^۲)^۲}\Big|_{\substack{x=۱ \\ y=۱}} = ۰$$

مثال۲۵: اگر $z = u^۲ + v^۲$ و $u = g(x+y)$ و $v = h(\frac{x}{y})$ باشد، z'_x، کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۷)

۱) $۲u.g'.h'$ ۲) $۲u(۱+y) + ۲v(-\frac{x}{y^۲})$ ۳) $۲(u.g' + \frac{v}{y}h')$ ۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از قاعده مشتق‌گیری زنجیری چندمتغیره استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} = ۲u.g' + ۲v.\frac{۱}{y}h' = ۲(ug' + \frac{v}{y}h')$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۲۶: در تابع $z = Ln(u^۲ + v^۲)$ ، $u = xy$ و $v = \frac{x}{y}$ ، **مقدار** z'_x **در** $x = ۱$ و $y = ۱$ **کدام است؟** (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۷)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $Ln۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای محاسبه z'_x از قاعده مشتق‌گیری زنجیری توابع چندمتغیره استفاده می‌کنیم.

ابتدا توجه کنید که به ازای $x = ۱$ و $y = ۱$ ، مقدار $u = ۱$ و $v = ۱$ بدست می‌آید.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{۲u}{u^۲ + v^۲} \times y + \frac{۲v}{u^۲ + v^۲} \times \frac{۱}{y} \xrightarrow[u=v=۱]{x=y=۱} \frac{\partial z}{\partial x} = ۲$$

مثال۲۷: وضعیت همگن بودن تابع $z = \frac{x^۲}{y^۲} + \frac{x}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}$ **چگونه است؟** (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۷)

۱) غیرهمگن ۲) همگن با درجه ۲ ۳) همگن با درجه صفر ۴) همگن با درجه ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» قرار می‌دهیم $f(x,y) = \frac{x^۲}{y^۲} + \frac{x}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}$ ، در این صورت:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^۲ x^۲}{\lambda^۲ y^۲} + \frac{\lambda x}{\sqrt{\lambda^۲ x^۲ + \lambda^۲ y^۲}} = \frac{x^۲}{y^۲} + \frac{x}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} = \lambda^{۰} f(x\ y)$$

مثال۲۸: اگر داشته باشیم $z = f(x^۲ + ۲y^۲ , ۴x^۲y)$ **مقدار** $\frac{\partial z}{\partial x}$ **به ازای** $x = ۲$ و $y = \frac{۱}{۲}$ **کدام است؟** (حسابداری ـ سراسری ۷۸)

۱) $۸f'_۱ + ۲f'_۲$ ۲) $۴f'_۱ + ۸f'_۲$ ۳) $۶f'_۱ + ۴f'_۲$ ۴) $۴f'_۱ + ۴f'_۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» قرار می‌دهیم $u = x^۲ + ۲y^۲$ و $v = ۴x^۲y$ ، در این صورت $z = f(u,v)$. حال با استفاده از مشتق‌گیری زنجیری داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} = f'_۱ \times ۲x + f'_۲ \times ۸xy$$

به ازای $x = ۲$ و $y = \frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌شود: $\frac{\partial z}{\partial x} = ۴f'_۱ + ۸f'_۲$

مثال۲۹: اگر f تابعی حقیقی به معادله $۲x^۲ + y^۲ - z^۲ - ۲xyz = ۰$ **باشد ، در نقطه** $x = y = z = ۱$ **مقدار** z'_x **کدام است؟**

(حسابداری ـ سراسری ۷۸)

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از قاعده مشتق‌گیری ضمنی نتیجه می‌شود: $z'_x = -\frac{f'_x}{f'_z} = -\frac{۴x - ۲yz}{-۲z - ۲xy}\Big|_{(۱,۱,۱)} = -\frac{۴ - ۲}{-۲ - ۲} = \frac{۱}{۲}$

مثال۳۰: اگر داشته باشیم $\begin{cases} z = x^۲ - y^۲ \\ x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}$ ، $\frac{dz}{dt}$ **در نقطه** $t = \frac{\pi}{۴}$ ، **کدام است؟** (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۸)

۱) $-\frac{\pi^۲}{۸}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) π

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» **روش اول:** با استفاده از قاعده مشتق‌گیری زنجیری نتیجه می‌شود:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt} = ۲x.(\cos t - t\sin t) - ۲y(\sin t + t\cos t)$$

$$\frac{dz}{dt} = ۲t\cos t(\cos t - t\sin t) - ۲t\sin t(\sin t + t\cos t)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

حال می‌توانیم در رابطه فوق به جای t، $\frac{\pi}{۴}$ قرار دهیم و مقدار موردنظر را بدست آوریم ولی ساده کردن عبارت فوق شاید جالبتر باشد.

$$\frac{dz}{dt} = ۲t\cos^۲ t - ۲t^۲ \sin t\cos t - ۲t\sin^۲ t - ۲t^۲ \sin t\cos t = ۲t(\cos^۲ t - \sin^۲ t) - ۴t^۲ \sin t\cos t$$

$$= ۲t\cos ۲t - ۲t^۲ \sin ۲t \Rightarrow \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{۴}} = \frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi}{۲} - ۲\times(\frac{\pi}{۴})^۲ \sin\frac{\pi}{۲} = ۰ - \frac{\pi^۲}{۸} = \frac{-\pi^۲}{۸}$$

روش دوم: (جایگزینی x و y برحسب t و سپس مشتق‌گیری)

$$z = x^۲ - y^۲ = t^۲\cos^۲ t - t^۲\sin^۲ t = t^۲(\cos^۲ t - \sin^۲ t) = t^۲\cos ۲t \Rightarrow \frac{dz}{dt} = ۲t\cos ۲t - ۲t^۲\sin ۲t \Rightarrow \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{۴}} = \frac{-\pi^۲}{۸}$$

مثال۳۱: برد یا حوزه مقادیر تابع حقیقی f به معادله $z = \sqrt{۱۰ - x^۲ - ۲y^۲}$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۸)

۱) R ۲) R^+ ۳) $R^+ \cup \{۰\}$ ۴) $[۰, \sqrt{۱۰}]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» واضح است که $z \geq ۰$ و حداکثر عبارت زیر رادیکال ۱۰ می‌باشد پس حداکثر مقدار z برابر $\sqrt{۱۰}$ می‌باشد.

مثال۳۲: در تابع حقیقی دو متغیری $z = x^۲ + ۲xy + ۴y^۲$، به ازای $dx = dy = ۰/۱$ مقدار $d^۲z$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۸)

۱) ۰/۰۷ ۲) ۰/۱۲ ۳) ۰/۱۴ ۴) ۰/۷

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$z = x^۲ + ۲xy + ۴y^۲ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = ۲x + ۲y, \frac{\partial z}{\partial y} = ۲x + ۸y$$

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} = ۲ , \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} = ۸ , \frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y} = ۲$$

$$d^۲z = \frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}dx^۲ + \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}dy^۲ + ۲\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}dxdy = ۲dx^۲ + ۸dy^۲ + ۴dxdy$$

$$\xrightarrow{dx=dy=۰/۱} d^۲z = ۲(۰/۱)^۲ + ۸(۰/۱)^۲ + ۴(۰/۱)(۰/۱) = ۰/۱۴$$

مثال۳۳: اگر $z = f(x^۲ + y^۲, \frac{x}{y})$ باشد z'_x کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۸)

۱) $f'_۱ + f'_۲$ ۲) $f'_x + f_{x/y}$ ۳) $(x^۲ + y^۲)f'_x + \frac{x}{y}f'_y$ ۴) $۲xf'_۱ + \frac{۱}{y}f'_۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» قرار می‌دهیم $u = x^۲ + y^۲$ و $v = \frac{x}{y}$، در این صورت $z = f(u, v)$. با استفاده از قاعده مشتق‌گیری زنجیری برای توابع چند متغیره نتیجه می شود:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} = ۲xf'_۱ + \frac{۱}{y}f'_۲$$

مثال۳۴: برد تابع دو متغیری $z = \sqrt{۹ - ۲x^۲ - y}$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۹)

۱) $[-۳, ۳]$ ۲) $R^+ \cup \{۰\}$ ۳) R ۴) $[۰, ۳]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» واضح است که $z \geq ۰$ می‌باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۳۵: در تابع دو متغیری $z=\frac{2x+y-1}{x+2y}$ ، مجموع طول و عرض نقطه اکسترمم آن کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۹)

۱) ۲ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\begin{cases} z_x=\frac{2(x+2y)-(2x+y-1)}{(x+2y)^2}=0 \\ z_y=\frac{x+2y-2(2x+y-1)}{(x+2y)^2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y+1=0 \Rightarrow y=\frac{-1}{3} \\ -3x+2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3} \end{cases}$$

بنابراین مجموع طول و عرض نقطه اکسترمم برابر $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ خواهد بود.

توجه: موضوعی که شاید کمتر کسی به آن توجه کند این است که در واقع تست غلط است. زیرا نقطه $(\frac{2}{3},\frac{-1}{3})$ که به عنوان نقطه اکسترمم معرفی می‌شود نمی‌تواند نقطه اکسترمم تابع باشد چون در دامنه تابع صدق نمی‌کند (مخرج کسر مساوی صفر می‌شود). به هر حال بهتر است طراحان سئوال بیشتر به این نکات توجه داشته باشند.

مثال۳۶: اگر داشته باشیم $z=10-x^2+2x-2y^2+8y$ ، مقدار z در نقطه اکسترمم این تابع کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۷ ۴) ۲۱

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{cases} z_x=-2x+2=0 \Rightarrow x=1 \\ z_y=-4y+8 \Rightarrow y=2 \end{cases} \Rightarrow z=10-1+2-8+16=19$$

مثال۳۷: در مسأله شماره قبل نوع نقطه اکسترمم چیست؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۹)

۱) مکرر ۲) زینی ۳) ماکزیمم ۴) می‌نیمم

پاسخ: گزینه «۳»

$$z_{xx}=-2<0\ ,\ \Delta=z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=(-2)(-4)-0=8>0$$

چون $\Delta>0$ و $z_{xx}<0$، پس نقطه اکسترمم ماکزیمم است.

مثال۳۸: اگر می‌نیمم تابع $z=x^2+y^2$ باتوجه به قید $x+2y=5$ را با استفاده از روش ضریب لاگرانژ تعیین کنیم ، مقدار λ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» قرار می‌دهیم $f(x,y)=x^2+y^2$ و $g(x,y)=x+2y-5$. در این صورت برای بدست آوردن نقطه می‌نیمم و مقدار λ کافی است دستگاه زیر را حل کنیم.

$$\begin{cases} g(x,y)=0 \\ \frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g^y}=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=5 \\ \frac{2x}{1}=\frac{2y}{2}=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=5 \\ 2x=y=\lambda \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق به سادگی $x=1$ ، $y=2$ و $\lambda=2$ بدست می‌آید.

مثال۳۹: اگر $z=\frac{x+2y}{x-y+3}$ باشد، مجموع طول و عرض نقطه بحرانی کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۹)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases} z_x=\frac{1\times(x-y+3)-1\times(x+2y)}{(x-y+3)^2}=0 \\ z_y=\frac{2(x-y+3)-(-1)(x+2y)}{(x-y+3)^2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3y+3=0 \rightarrow y=1 \\ 3x+6=0 \rightarrow x=-2 \end{cases} \Rightarrow x+y=-1$$

بنابراین به نظر می‌رسد که گزینه (۲) صحیح باشد، چرا که نقطهٔ $\begin{vmatrix} x=-2 \\ y=1 \end{vmatrix}$ در دامنه تابع نمی‌باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۴۰: اگر $z=f(x-y,y-x)$ آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ برابر کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۹)

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» قرار می‌دهیم $u=x-y$ و $v=y-x$، در این صورت $z=f(u,v)$. حال با استفاده از قاعده مشتق‌گیری زنجیری نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}.(1)+\frac{\partial z}{\partial v}(-1)=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}(-1)+\frac{\partial z}{\partial v}(1)=-\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

از جمع کردن روابط بالا نتیجه می‌شود $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

مثال۴۱: در تابع دو متغیره $f(x,y)=x^3+y^3-4xy-11y$ نقطه بحرانی $(1,-2,-)$ چگونه است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۹)

۱) اکسترمم ۲) می‌نیمم ۳) ماکسیمم ۴) زینی

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$f(x,y)=x^2+y^2-4xy-11y \Rightarrow f_x=2x-4y\ ,\ f_y=3y^2-4x-11$$
$$f_{xx}=2>0\ ,\ \Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=2\times 6y-(-4)^2=12y-16$$

چون در نقطه بحرانی $(-1,-2)$، $\Delta=12\times(-1)-16<0$ می‌باشد، پس نقطه زینی است.

مثال۴۲: برد تابع دو متغیره $z=\sqrt{100-2x^2-y^2}$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۰)

۱) R ۲) R^+ ۳) $[0,10]$ ۴) $R^+\cup\{0\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» به وضوح $z\geq 0$ می‌باشد و همچنین حداکثر مقدار عبارت زیر رادیکال ۱۰۰ می‌باشد پس حداکثر z، ۱۰ می‌باشد.

مثال۴۳: در تابع مقید $Maxz=xy$ نسبت به $x+2y=100$ با استفاده از روش لاگرانژ، مقدار λ ضریب لاگرانژ برابر است با:

(حسابداری ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» قرار می‌دهیم $g(x,y)=x+2y-100$، در این صورت برای بدست آوردن نقطه اکسترمم و مقدار λ کافی است دستگاه روبرو را حل کنیم.

$$\begin{cases} g(x,y)=0 \\ \frac{z_x}{g_x}=\frac{z_y}{g_y}=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=100 \\ \frac{y}{1}=\frac{x}{2}=\lambda \end{cases}$$

از حل دستگاه بالا نتیجه می‌شود $x=50$، $y=25$ و $\lambda=25$.

مثال۴۴: در سئوال قبل، مقدار ماکزیمم z کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱۳۵۰ ۲) ۱۳۰۰ ۳) ۱۲۵۰ ۴) ۱۰۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به اینکه $x=50$، $y=25$ بدست آمد، ماکزیمم z برابر است با: $z=xy=50\times 25=1250$

مثال۴۵: نقطه بحرانی تابع حقیقی f با ضابطه $z=xy-x^2-2y^2+7y$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۰)

۱) $(1,2,7)$ ۲) $(0,1,1)$ ۳) $(-1,-2,1)$ ۴) $(-1,1,3)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\begin{cases} z_x=y-2x=0 \\ z_y=x-4y+7=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2x \\ x-4y=-7 \end{cases} \Rightarrow x=1,\ y=2 \Rightarrow z=7$$

بنابراین $(1,2,7)$ نقطه بحرانی f است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۴۶: در سؤال شماره قبل، نوع نقطه بحرانی کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۰)

۱) زینی ۲) می‌نیمم مطلق ۳) می‌نیمم نسبی ۴) ماکزیمم مطلق

پاسخ: گزینه «۴» $z_{xx} = -۲ < ۰ \ , \ \Delta = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^۲ = (-۲)(-۴) - ۱^۲ = ۷$

چون $\Delta > ۰$ و $z_{xx} < ۰$، بنابراین نقطه بحرانی ماکزیمم مطلق است.

مثال۴۷: طول و عرض نقطه بحرانی تابع f به معادله $z = xy + ۲x - Ln(x^۲y)$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۰)

۱) $(\frac{۱}{۲}, ۲)$ ۲) $(۳, \frac{۱}{۳})$ ۳) $(۴, \frac{۱}{۴})$ ۴) $(۱,۱)$

پاسخ: گزینه «۱» $z = xy + ۲x - Ln(x^۲y)$

$$\begin{cases} z_x = y + ۲ - \frac{۲xy}{x^۲y} = ۰ \\ z_y = x - \frac{x^۲}{x^۲y} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + ۲ - \frac{۲}{x} = ۰ \\ x - \frac{۱}{y} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - \frac{۲}{x} = -۲ \\ x = \frac{۱}{y} \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق $x = \frac{۱}{۲}$ و $y = ۲$ بدست می‌آید.

توضیح: نیازی به حل دستگاه نیست، با توجه به گزینه‌ها به سادگی می‌توان متوجه شد که فقط گزینه (۱) در معادله $y - \frac{۱}{x} = -۲$ صدق می‌کند. ضمناً اگر بخواهیم دستگاه را حل کنیم کافی است در معادلهٔ $y - \frac{۲}{x} = -۲$ به جای x، $\frac{۱}{y}$ قرار دهیم:

$$\Rightarrow y - \frac{۲}{\frac{۱}{y}} = -۲ \Rightarrow y - ۲y = -۲ \Rightarrow -y = -۲ \Rightarrow y = ۲ \ , \ x = \frac{۱}{۲}$$

مثال۴۸: تابع حقیقی f به معادله $z = \sqrt{۲۵ - x^۲ - y}$ مفروض است، برد این تابع کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۱)

۱) R ۲) $R^۲$ ۳) $[۰, \infty)$ ۴) $[۰,۵]$

پاسخ: گزینه «۳» $x^۲ + y$ می‌تواند هر علامتی داشته باشد، لذا فقط می‌توان گفت $z \geq ۰$.

مثال۴۹: برای تابع $z = x \ . \ Lny + y \ . \ Lnx$ مقدار $\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}$ برابر است با: (حسابداری ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{x}{x+y}$ ۲) $\frac{y}{x+y}$ ۳) $\frac{xy}{x+y}$ ۴) $\frac{x+y}{xy}$

پاسخ: گزینه «۴» $z = xLny + yLnx \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = Lny + \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y} = \frac{۱}{y} + \frac{۱}{x} = \frac{x+y}{xy}$

مثال۵۰: اکسترمم تابع $z = xy$ تحت شرط $۲x + ۳y - ۵ = ۰$، کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۱)

۱) $(\frac{۵}{۴}, \frac{۵}{۶})$ ۲) $(\frac{۵}{۶}, \frac{۵}{۶})$ ۳) $(\frac{۵}{۱۲}, \frac{۵}{۴})$ ۴) $(-\frac{۵}{۱۲}, \frac{۵}{۶})$

پاسخ: گزینه «۱» قرارمی‌دهیم $f(x,y) = xy$ و $g(x\ y) = ۲x + ۳y - ۵$، در این صورت نقطه اکسترمم تابع از حل دستگاه روبرو بدست می‌آید.

$$\begin{cases} g(x,y) = ۰ \\ \frac{f_x}{g_x} = \frac{f_x}{g_y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x + ۳y = ۵ \\ \frac{y}{۲} = \frac{x}{۳} \Rightarrow y = \frac{۲x}{۳} \end{cases}$$

با جایگزینی $y = \frac{۲x}{۳}$ در معادله $۲x + ۳y = ۵$، مقدار $x = \frac{۵}{۴}$ بدست می‌آید و از آنجا $y = \frac{۵}{۶}$.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۵۱: تابع f به معادله $z=\sqrt{\frac{x-y}{x^۲+y^۲}}$ مفروض است. دامنه (Range) این تابع کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۱)

۱) $R^۲$ ۲) R^+ ۳) $R-\{x\,|\,x<y\}$ ۴) $\{(x,y)|x,y\in R, x\geq y\}$

☑ **پاسخ:** هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد، و ریشه کسر جزء دامنه تابع نیست.

$$\frac{x-y}{x^۲+y^۲}\geq ۰ \xrightarrow{\text{مخرج کسر نامنفی است}} x-y\geq ۰ \Rightarrow x\geq y$$

ریشه مخرج کسر: $x^۲+y^۲=۰ \Rightarrow x=y=۰$

بنابراین دامنه f، مقادیر از x و y می‌باشد که $x\geq y$ باشد به جز نقطه $(۰,۰)$، یعنی: $\text{دامنه}=\{(x,y)\,|\,x,y\in R, x\geq y\}-\{(۰,۰)\}$

توضیح: در صورت سئوال دامنه تابع Range تابع در نظر گرفته شده که کاملاً غلط است، Range تابع یعنی برد تابع و Domain تابع یعنی دامنه تابع.

مثال۵۲: نقطه بحرانی تابع f به معادله $z=x^۲+xy+y^۲-۳x-۶y$ به کدام صورت است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۱)

۱) $(۳,۰)$ ، زینی ۲) $(۰,۳)$، می‌نیمم ۳) $(۳,۰)$، ماکزیمم نسبی ۴) $(۳,۰)$، ماکزیمم مطلق

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\begin{cases} z_x=۲x+y-۳=۰ \\ z_y=x+۲y-۶=۰ \xrightarrow{x(-۲)} \end{cases} \begin{cases} ۲x+y=۳ \\ -۲x-۴y=-۱۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو معادله}} -۳y=-۹ \Rightarrow y=۳, x=۰$$

بنابراین $(۰,۳)$ نقطه بحرانی تابع است. $z_{xx}=۲>۰\ ,\ \Delta=z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^۲=۲\times ۲-۱^۲=۳$

چون $\Delta>۰$ و $z_{xx}>۰$، بنابراین نقطه بحرانی می‌نیمم است.

مثال۵۳: برد تابع حقیقی f به معادله $z=\sqrt{۱۰۰-x^۲-۲y^۲}$ برابر است با: (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۱)

۱) R^+ ۲) $R^{+۲}$ ۳) $[۰,۱۰]$ ۴) $[-\infty,۱۰]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون رادیکال با فرجه زوج همواره مثبت است لذا: $z=\sqrt{۱۰۰-\underbrace{(x^۲+۲y^۲)}_{\geq ۰}} \Rightarrow ۰\leq z\leq ۱۰$

مثال۵۴: اگر داشته باشیم $z=\frac{x^۲}{y^۲}+e^{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}$ درجه همگنی این تابع کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۱)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) همگن نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» $f(x,y)=\frac{x^۲}{y^۲}+e^{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x} \Rightarrow f(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)^۲}{(\lambda y)^۲}+e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}-\frac{\lambda y}{\lambda x}=\frac{x^۲}{y^۲}+e^{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}=\lambda^۰ f(x,y)$

مثال۵۵: اگر $y=x\,tgz$ باشد مقدار z'_x در شرایطی که $x=y=۱$ باشند، کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۱)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) -۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» به ازای $x=y=۱$، نتیجه می‌شود $tgz=۱$.

برای محاسبه z'_x، رابطه داده شده را بصورت $xtgz-y=۰$ می‌نویسیم و از روش مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنیم.

$$z'_x=-\frac{f_x}{f_z}=-\frac{tgz}{x(۱+tg^۲z)} \xrightarrow[tgz=۱]{x=y=۱} z'_x=-\frac{۱}{۱\times(۱+۱)}=-\frac{۱}{۲}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۵۶: برد تابع $z=\sqrt{\frac{x^۲+y^۲}{x^۲-y^۲}}$ برابر است با: (حسابداری ـ سراسری ۸۲)

۱) R ۲) R^+ ۳) $[۱,\infty)$ ۴) $R^+\cup\{۰\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» واضح است که در کسر $\frac{x^۲+y^۲}{x^۲-y^۲}$، صورت کسر بزرگتر یا مساوی مخرج کسر می‌باشد، بنابراین:

$$\frac{x^۲+y^۲}{x^۲-y^۲}\geq ۱ \Rightarrow \sqrt{\frac{x^۲+y^۲}{x^۲-y^۲}}\geq ۱ \Rightarrow z\geq ۱$$

مثال۵۷: به ازای چه مقداری از a نقطه بحرانی $z=x^۲+ay^۲$ یک نقطه زینی است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۲)

۱) $a>۰$ ۲) $a<۰$ ۳) $a<۱$ ۴) $a>۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$z=x^۲+ay^۲ \Rightarrow z_x=۲x\ ,\ z_y=۲ay\ ,\ z_{xy}=۰$$

$$\Delta=z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^۲=۲\times ۲a-۰=۴a$$

برای اینکه نقطه بحرانی، زینی باشد، لازم است $\Delta<۰$ باشد، در نتیجه:

$$\Delta=۴a<۰ \Rightarrow a<۰$$

مثال۵۸: اگر داشته باشیم $x^۲+y^۲+z^۲-۵xyz+۲z=۰$، در نقطه (۱ , ۱ , ۱) مقدار $z'_x+z'_y$ برابر است با: (حسابداری ـ سراسری ۸۲)

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۶ ۴) -۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای محاسبه z'_x و z'_y از قاعده مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنیم.

$$\left.\begin{aligned} z'_x=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{۲x-۵yz}{۲z-۵xy+۲}\Big|_{(۱,۱,۱)}=-\frac{۲-۵}{۲-۵+۲}=-\frac{-۳}{-۱}=-۳\\ z'_y=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{۲y-۵xz}{۲z-۵xy+۲}\Big|_{(۱,۱,۱)}=-\frac{۲-۵}{۲-۵+۲}=-\frac{-۳}{-۱}=-۳\end{aligned}\right\} \Rightarrow z'_x+z'_y=-۳-۳=-۶$$

مثال۵۹: تابع سود تولیدکننده‌ای برای دو نوع کالای x و y بصورت زیر و حداکثر ظرفیت تولیدی آن ۱۲ واحد است. چه مقادیری از x و y سود او را به حداکثر می‌رسانند؟ $(\Pi=۸۰x-۲x^۲-xy-۳y^۲+۱۰۰y)$ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۲)

۱) $x=۱$ و $y=۳$ ۲) $x=۳$ و $y=۴$ ۳) $x=۲$ و $y=۵$ ۴) $x=۵$ و $y=۷$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

روش اول: می‌خواهیم تابع $f(x,y)=۸۰x-۲x^۲-xy-۳y^۲+۱۰۰y$ را تحت قید $x+y=۱۲$، ماکزیمم کنیم. در این صورت با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x+y=۱۲\\ \frac{۸۰-۴x-y}{۱}=\frac{-x-۶y+۱۰۰}{۱}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=۱۲ \xrightarrow{\times ۳} \\ ۵y-۳x=۲۰\end{cases} \begin{cases} ۳x+۳y=۳۶\\ ۵y-۳x=۲۰\end{cases}$$

از جمع دو معادله اخیر $۸y=۵۶$، $y=۷$ بدست می‌آید که با جایگزینی در معادله $x+y=۱۲$، $x=۵$ بدست می‌آید.

روش دوم: از رابطه $x+y=۱۲$ نتیجه می‌شود $y=۱۲-x$، با جایگزینی y برحسب x در تابع f تابعی شامل متغیر x حاصل می‌شود که برای بدست آوردن نقطه اکسترمم کافی است معادله $f'(x)=۰$ حل شود.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۶۰: اگر $w=\frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}$ باشد، آنگاه $\frac{\partial^۲w}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲w}{\partial y^۲}+\frac{\partial^۲w}{\partial z^۲}$ برابر است با: (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۲)

۱) ۰ ۲) $x+y+z$ ۳) $(x^۲+y^۲+z^۲)^{-\frac{۳}{۲}}$ ۴) $xyz(x^۲+y^۲+z^۲)^{-\frac{۳}{۲}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$w=\frac{۱}{(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{۱}{۲}}}\Rightarrow w=(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{-۱}{۲}}$$

حال $\frac{\partial w}{\partial x}$ و $\frac{\partial^۲w}{\partial x^۲}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{-۱}{۲}\times ۲x\times(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{-۳}{۲}}=-x(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{-۳}{۲}}$$

$$\frac{\partial^۲w}{\partial x^۲}=-(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{-۳}{۲}}+\frac{۳}{۲}x\times(۲x)\times(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{-۵}{۲}}=-(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{-۳}{۲}}+۳x^۲(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{-۵}{۲}}$$

بطور مشابه $\frac{\partial^۲w}{\partial y^۲}$ و $\frac{\partial^۲w}{\partial z^۲}$ بدست می‌آیند:

$$\frac{\partial^۲w}{\partial z^۲}=-(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{-۳}{۲}}+۳z^۲(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{-۵}{۲}}\quad\text{و}\quad\frac{\partial^۲w}{\partial y^۲}=-(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{-۳}{۲}}+۳y^۲(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{-۵}{۲}}$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial^۲w}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲w}{\partial y^۲}+\frac{\partial^۲w}{\partial z^۲}=-۳(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{-۳}{۲}}+(۳x^۲+۳y^۲+۳z^۲)(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{-۵}{۲}}$$

$$=-۳(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{-۳}{۲}}+۳(x^۲+y^۲+z^۲)(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{-۵}{۲}}=-۳(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{-۳}{۲}}+۳(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{-۳}{۲}}=۰$$

مثال ۶۱: در تابع $t=-x_۱^۲+۴x_۱-۴x_۲^۲-۱۶x_۲+۱۸$ مقدار بهینه t در نقطه ماکزیمم کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۲)

۱) ۴۰ ۲) ۴۲ ۳) ۳۸ ۴) ۳۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$\frac{\partial t}{\partial x_۱}=-۲x+۴=۰\Rightarrow x_۱=۲\quad,\quad\frac{\partial t}{\partial x_۲}=-۸x-۱۶=۰\Rightarrow x_۲=-۲$$

با جایگزینی مقادیر بدست آمده در t نتیجه می‌شود:

$$t=-۴+۸-۱۶+۳۲+۱۸=۳۸$$

مثال ۶۲: اگر تابع $f:R^۲\to R$ به معادله $z=\frac{۲x^۲-y^۲}{۲x^۲+y^۲}$ باشد، برد تابع کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۳)

۱) R ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $R^+\cup\{۰\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» واضح است که صورت کسر از مخرج کسر کوچکتر است، یعنی: $۲x^۲-y^۲\le ۲x^۲+y^۲\Rightarrow\frac{۲x^۲-y^۲}{۲x^۲+y^۲}\le ۱\Rightarrow z\le ۱$

بنابراین گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نادرست می‌باشند و فقط گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد. همچنین توجه کنید که z مقادیر ۱- و ۱+ را می‌تواند اتخاذ کند، به ازای $y=۰$ ، $z=۱$ بدست می‌آید و به ازای $x=۰$ ، $z=-۱$ حاصل می‌شود.

مثال ۶۳: اگر داشته باشیم $\begin{cases}z=u^۲-v^۲\\u=x^۲+y^۲\\v=\frac{x}{y}\end{cases}$ آنگاه $\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{-۴ux}{y^۲}$ ۲) $۴uy-\frac{۲vx}{y^۲}$ ۳) $۴uy+\frac{۲vx}{y^۲}$ ۴) $(۲u-۲v)(۲xy-\frac{x}{y^۲})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از مشتق‌گیری زنجیری داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}=۲u\times ۲y+(-۲v)\times\frac{-x}{y^۲}=۴uy+\frac{۲vx}{y^۲}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۶۴: در تابع $z = x^۲ + ۴xy + ۲y^۲ - ۴x - ۶y$ ، مختصات نقطه بحرانی کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۳)

۱) $(۲ , ۱)$ ۲) $(۱ , \frac{۱}{۲})$ ۳) $(\frac{۱}{۲} , ۱)$ ۴) $(۱ , ۲)$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases} z_x = ۲x + ۴y - ۴ = ۰ \\ z_y = ۴x + ۴y - ۶ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + ۲y = ۲ \\ ۲x + ۲y = ۳ \end{cases} \Rightarrow x = ۱ \ , \ y = \frac{۱}{۲}$$

مثال۶۵: اگر داشته باشیم، $z = \frac{x^۲ - y^۲}{x^۲ + y^۲}$ ، $\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}$ در نقطه (۲, ۱) ، کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{۱۶}{۱۲۵}$ ۲) $\frac{۲۴}{۱۲۵}$ ۳) $\frac{۳۲}{۱۲۵}$ ۴) $\frac{۴۸}{۱۲۵}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$z = \frac{x^۲ - y^۲}{x^۲ + y^۲} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{۲x(x^۲ + y^۲) - ۲x(x^۲ - y^۲)}{(x^۲ - y^۲)^۲} = \frac{۴xy^۲}{(x^۲ + y^۲)^۲}$$

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y} = \frac{۸xy(x^۲ + y^۲)^۲ - ۲(۲y)(x^۲ + y^۲) \times ۴xy^۲}{(x^۲ + y^۲)^۴} \xrightarrow{x=۲ \ , \ y=۱} \frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y} = \frac{۱۶ \times ۵^۲ - ۳۲ \times ۵}{۵^۴} = \frac{۴۸}{۱۲۵}$$

مثال۶۶: در تابع $z = x^۲ + ۴xy + ۲y^۲ - ۴x - ۶y$ ، وضعیت نقطه بحرانی چگونه است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۳)

۱) ماکزیمم مطلق ۲) ماکزیمم نسبی ۳) می‌نیمم مطلق ۴) زینی

پاسخ: گزینه «۴»

$$z = x^۲ + ۴xy + ۲y^۲ - ۴x - ۶y \Rightarrow z_x = ۲x + ۴y - ۴ \quad , \quad z_y = ۴x + ۴y - ۶$$

$$\Delta = z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^۲ = ۲ \times ۴ - ۴^۲ = -۸$$

چون $\Delta < ۰$، پس نقطه بحرانی، نقطه زینی است.

مثال۶۷: ماکسیمم مقدار تابع دو متغیری $z = x^۲ + ۲xy$ با شرط $۲x + y = ۱۲$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۳)

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

پاسخ: گزینه «۳» قرار می‌دهیم $f(x,y) = x^۲ + ۲xy$ و $g(x,y) = ۲x + y - ۱۲$، در این صورت برای بدست آوردن ماکزیمم f تحت شرط $g(x,y) = ۰$ کافی است دستگاه مقابل را حل کنیم:

$$\begin{cases} g(x,y) = ۰ \\ \frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x + y = ۱۲ \\ \frac{۲x + ۲y}{۲} = \frac{۲x}{۱} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x + y = ۱۲ \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = y = ۴$$

با قرار دادن $x = y = ۴$ در تابع $z = x^۲ + ۲xy$، ماکزیمم z برابر ۴۸ بدست می‌آید.

مثال۶۸: اگر $z = \ln \sqrt{\frac{x}{y}}$ باشد dz کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{۱}{۲}\left(\frac{x^۲dy - y^۲dx}{x^۲y^۲}\right)$ ۲) $\frac{۱}{۲}\left(\frac{ydx - xdy}{xy}\right)$ ۳) $\frac{۱}{۲}\left(\frac{xdx + ydy}{xy}\right)$ ۴) $\frac{۱}{۲}\left(\frac{x^۲dy - y^۲dx}{x + y}\right)$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$$z = Ln\sqrt{\frac{x}{y}} \Leftrightarrow z = \frac{۱}{۲} Ln \frac{x}{y} = \frac{۱}{۲}(Lnx - Lny)$$

بنابراین:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{x}dx + \frac{۱}{۲} \times \frac{-۱}{y}dy = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{x}dx - \frac{۱}{y})dy = \frac{۱}{۲}(\frac{ydx - xdy}{xy})$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۶۹: اگر $z = y.f(x^۲y)$ باشد، به ازاء $x = y = ۱$ عبارت $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۳)

۱) $۳f'(۱) - f(۱)$ ۲) $۲f'(۱) - f(۱)$ ۳) $۲f'(۱) + ۲f(۱)$ ۴) $۳f'(۱) + f(۱)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$\begin{cases} z = yf(x^۲y) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = y \times ۲xyf'(x^۲y) \xrightarrow{x=y=۱} \frac{\partial z}{\partial x} = ۲f'(۱) \\ z = yf(x^۲y) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = ۱ \times f(x^۲y) + x^۲f'(x^۲y) \times y \xrightarrow{x=y=۱} \frac{\partial z}{\partial y} = f(۱) + f'(۱) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = ۳f'(۱) + f(۱)$$

مثال۷۰: حد تابع $z = \frac{x^۲ + y^۲}{xy}$ در نقطه $(۰,۰)$ در امتداد $y = ۲x$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۳)

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۵}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در امتداد خط $y = ۲x$، تابع داده شده بصورت زیر در می‌آید: $z = \frac{x^۲ + (۲x)^۲}{x(۲x)} = \frac{x^۲ + ۴x^۲}{۲x^۲} = \frac{۵x^۲}{۲x^۲} = \frac{۵}{۲}$

بنابراین در امتداد این خط تابع به تابع ثابت تبدیل می‌شود و حد آن همان عدد $\frac{۵}{۲}$ می‌باشد.

مثال۷۱: وضعیت تابع $z = x^۲ + ۲xy + ۴y^۲ + x - ۲y$، از لحاظ تقعر و تحدب کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۳)

۱) اکیداً مقعر ۲) اکیداً محدب ۳) ابتدا محدب، سپس مقعر ۴) ابتدا مقعر، سپس محدب

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» $z_x = ۲x + ۲y + ۱$, $z_y = ۲x + ۸y - ۲$, $z_{xx} = ۲$, $\Delta = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^۲ = ۲ \times ۸ - ۲^۲ = ۱۲$

چون $z_{xx} > ۰$ و $\Delta > ۰$، پس تابع محدب است.

یادآوری: اگر $z_{xx} > ۰$ و $\Delta > ۰$، آنگاه تابع محدب است، و اگر $z_{xx} < ۰$ و $\Delta > ۰$ آنگاه تابع مقعر است.

مثال۷۲: در صورتی که $f(x,y,z) = \frac{x^۳}{z^۲y^۲} + \frac{y^۲}{xz^۲}$ باشد، مقدار عبارت $xf_x + yf_y + zf_z$ کدام گزینه است؟ علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۳)

۱) صفر ۲) f ۳) $-f$ ۴) $۳f$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» تابع f تابع همگن از درجه ۱- است، زیرا:

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \frac{(\lambda x)^۳}{(\lambda z)^۲(\lambda y)^۲} + \frac{(\lambda y)^۲}{(\lambda x)(\lambda z)^۲} = \frac{x^۳}{\lambda z^۲y^۲} + \frac{y^۲}{\lambda xz^۲} = \frac{۱}{\lambda}(\frac{x^۳}{z^۲y^۲} + \frac{y^۲}{xz^۲}) = \lambda^{-۱}f(x,y,z)$$

بنابراین طبق قضیه اویلر داریم: $xf_x + yf_y + zf_z = -f(x,y,z)$

مثال۷۳: اگر $z = x(y-۱) + y(x-۲)$ باشد، وضعیت نقطه اکسترمم چیست؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۳)

۱) $\text{Max}(۱, \frac{۱}{۲})$ ۲) $\text{Min}(\frac{۱}{۲}, ۱)$ ۳) $(۱, \frac{۱}{۲})$ زینی ۴) فاقد اکسترمم است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» $z = ۲xy - x - ۲y$

$$\begin{cases} z_x = ۲y - ۱ = ۰ \Rightarrow y = \frac{۱}{۲} \\ z_y = ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \end{cases} \Rightarrow \text{نقطه } (۱, \frac{۱}{۲}) \text{، نقطه بحرانی است}$$

$$\Delta = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^۲ = ۰ \times ۰ - ۲^۲ = -۴$$

چون $\Delta < ۰$، بنابراین نقطه بحرانی، زینی است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۷۴: نقطه بحرانی تابع $z = x^۲ + ۲y^۲ - ۳xy - x + ۲y$ چگونه است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۴)

۱) زینی ۲) ماکسیمم ۳) می‌نیمم ۴) عطف

پاسخ: گزینه «۱»

$$z = x^۲ + ۲y^۲ - ۳xy - x + ۲y \Rightarrow z_x = ۲x - ۳y - ۱ , z_y = ۴y - ۳x + ۲$$

$$\Delta = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^۲ = ۲ \times ۴ - (-۳)^۲ = ۸ - ۹ = -۱$$

چون $\Delta < ۰$، بنابراین نقطه بحرانی تابع زینی است.

مثال ۷۵: اگر $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x-۲}$ و $x = ۲s - t$ و $y = t - s^۲$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial s}$ به ازای $t = ۲$ و $s = ۱$ کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۴)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ: گزینه «۴» به ازای $s = ۱$ و $t = ۲$، مقادیر $x = ۰$ و $y = ۱$ بدست می‌آیند.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s} = (\frac{۱}{y} + \frac{-y}{(x-۲)^۲}) \times ۲ + (\frac{-x}{y^۲} + \frac{۱}{x-۲})(-۲s) \xrightarrow{s=۱, t=۲, x=۰, y=۱}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = (۱ - \frac{۱}{۴}) \times ۲ + (۰ - \frac{۱}{۲})(-۲) = \frac{۵}{۲}$$

مثال ۷۶: کمترین مقدار تابع $z = x^۲ - xy$ با شرط $y + ۲x = ۶$ کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۴)

۱) -۵ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

پاسخ: گزینه «۲» از شرط داده شده $y = ۶ - ۲x$ بدست می‌آید که با جایگزینی در تابع z خواهیم داشت:

$$z = x^۲ - x(۶ - ۲x) = ۳x^۲ - ۶x \Rightarrow z' = ۶x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۱, y = ۴$$

با جایگزینی مقادیر بدست آمده در تابع $z = ۱^۲ - ۱ \times ۴ = -۳$ بدست می‌آید.

مثال ۷۷: اگر $z = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ باشد نسبت $\frac{z_x}{z_y}$ کدام گزینه است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۴)

۱) $-e^z$ ۲) Lnz ۳) z ۴) e^z

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$z = Ln\frac{y}{x} = Lny - Lnx \Rightarrow z_x = \frac{-۱}{x}, z_y = \frac{۱}{y} \Rightarrow \frac{z_x}{z_y} = \frac{\frac{-۱}{x}}{\frac{۱}{y}} = -\frac{y}{x}$$

از طرفی از رابطه $z = Ln\frac{y}{x}$ بدست می‌آید $\frac{y}{x} = e^z$، که با جایگزینی در رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$\frac{z_x}{z_y} = -\frac{y}{x} = -e^z$$

مثال ۷۸: اگر $z = xf(\frac{y}{x}) + yg(\frac{x}{y})$، در این صورت $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$، کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۵)

۱) z ۲) $۲z$ ۳) $-\frac{y}{x}f'(\frac{y}{x}) + g'(\frac{x}{y})$ ۴) $-\frac{y}{x^۲}f'(\frac{y}{x}) + g'(\frac{x}{y})$

پاسخ: گزینه «۱» تابع داده شده، یک تابع همگن از مرتبه یک است، بنابراین طبق قضیه اویلر گزینه (۱) صحیح است.

$$z(\lambda x, \lambda y) = \lambda x f(\frac{\lambda y}{\lambda x}) + \lambda y g(\frac{\lambda x}{\lambda y}) = \lambda x f(\frac{y}{x}) + \lambda y g(\frac{x}{y}) = \lambda z$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۷۹: طول و عرض نقطه بحرانی تابع با ضابطه $z = x^۲ + xy + ۴y - x$، کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۵)

۱) $(-۱,-۲)$ ۲) $(-۲,۳)$ ۳) $(-۳,-۱)$ ۴) $(-۴,۹)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$\begin{cases} z_x = ۰ \\ z_y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x + y - ۱ = ۰ \\ x + ۴ = ۰ \end{cases} \Rightarrow x = -۴ \ , \ y = ۹$$

مثال۸۰: اگر داشته باشیم $x^۳ + y^۳ - ۳xy + xyz = ۰$ مقدار $z'_x + z'_y$ در نقطه $(۱,۱,۱)$ کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۵)

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از روش مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنیم. با در نظر گرفتن $u = x^۳ + y^۳ - ۳xy + xyz$ خواهیم داشت:

$$z'_x = -\frac{u_x}{u_y} = -\frac{۳x^۲ - ۳y + yz}{xy} \xrightarrow{x=y=z=۱} z'_x = -۱ \qquad z'_y = -\frac{u_y}{u_z} = -\frac{۲y - ۳x + xz}{xy} \xrightarrow{x=y=z=۱} z'_y = ۰$$

بنابراین $z'_x + z'_y = -۱$ که در هیچ گزینه‌ای نیست.

مثال۸۱: تابع $z = ۴x^۲ + ۲xy + ۳y^۲ - x - ۱۴y$ مفروض است. از نظر تحدب و تقعر این تابع چگونه است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۵)

۱) اکیداً محدب ۲) اکیداً مقعر ۳) نه محدب و نه مقعر ۴) مقعر

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$z_x = ۸x + ۲y - ۱ \ , \ z_y = ۲x + ۶y - ۱۴ \ , \ z_{xx} = ۸ \ , \ z_{yy} = ۶ \ , \ z_{xy} = ۲$$

$$\Rightarrow \Delta = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^۲ = ۸ \times ۶ - ۲^۲ = ۴۴$$

چون $\Delta > ۰$ و $z_{xx} > ۰$ بنابراین تابع اکیداً محدب است.

مثال۸۲: طول و عرض نقطه بحرانی تابع $z = ۴x^۲ + ۲xy + ۳y^۲ - x - ۱۴y$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۵)

۱) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲})$ ۲) $(-۱,۵)$ ۳) $(۲,-۳)$ ۴) $(۲,۳)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\begin{cases} z_x = ۸x + ۲y - ۱ = ۰ \\ z_y = ۲x + ۶y - ۱۴ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۸x + ۲y = ۱ \\ x + ۳y = ۷ \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-۱}{۲} \ , \ y = \frac{۵}{۲}$$

مثال۸۳: تابع مطلوبیت مصرف‌کننده‌ای $U = ۲q_۱q_۲$، خط بودجه $۴q_۱ + q_۲ = ۲۰۰$، مقدار مطلوبیت ماکزیمم کدام است؟

(علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۲۵۰۰ ۲) ۵۰۰۰ ۳) ۷۵۰۰ ۴) ۱۰۰۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

روش اول: از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۴q_۱ + q_۲ = ۲۰۰ \\ \frac{۲q_۲}{۴} = \frac{۲q_۱}{۱} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴q_۱ + q_۲ = ۲۰۰ \\ q_۲ = ۴q_۱ \end{cases} \Rightarrow q_۱ = ۲۵ \ , \ q_۲ = ۱۰۰$$

روش دوم: از معادله $۴q_۱ + q_۲ = ۲۰۰$ نتیجه می‌شود $q_۲ = ۲۰۰ - ۴q_۱$، که با جایگزینی در تابع U نتیجه می‌شود:

$$U = ۲q_۱(۲۰۰ - ۴q_۱) = ۴۰۰q_۱ - ۸q_۱^۲$$

$$U' = ۴۰۰ - ۱۶q_۱ = ۰ \Rightarrow q_۱ = ۲۵ \ , \ q_۲ = ۱۰۰ \Rightarrow U = ۲ \times ۲۵ \times ۱۰۰ = ۵۰۰۰$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۸۴: اگر $z=u^۲-\frac{v^۲}{۴}$ و $u=x^۲y+y^۲$ و $v=۲yLn(x+۱)$ باشند در $(x=۱,y=۱)$ مقدار z_x کدام گزینه است؟

(علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۵)

۱) $۴-\frac{۱}{۲}Ln۲$ ۲) $۸-Ln۲$ ۳) $۴+\frac{۱}{۲}Ln۲$ ۴) $۸+۲Ln۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به ازای $x=۱$ و $y=۱$ مقدار $u=۲$ و $v=۲Ln۲$ به دست می‌آید. برای محاسبه z_x از قاعده مشتق‌گیری زنجیری توابع چند متغیره استفاده می‌کنیم.

$$z_x=۲u\times ۲xy+\frac{-v}{۲}\times\frac{۲y}{x+۱}=۸-Ln۲$$

مثال۸۵: اگر $z=\frac{Ln(x+y)}{x+y}$ باشد در نقطهٔ اکسترمم مقدار z کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۵)

۱) $e^{-۱}$ ۲) e ۳) صفر ۴) $\frac{۲}{e}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\begin{cases} z_x=\dfrac{\frac{۱}{x+y}\times(x+y)-Ln(x+y)}{(x+y)^۲}=۰ \Rightarrow Ln(x+y)=۱ \Rightarrow x+y=e \\ z_y=\dfrac{\frac{۱}{x+y}\times(x+y)-Ln(x+y)}{(x+y)^۲}=۰ \Rightarrow Ln(x+y)=۱ \Rightarrow x+y=e \end{cases}$$

بنابراین در نقاط اکسترمم $x+y=e$، پس $z=\frac{Lne}{e}$.

مثال۸۶: در تابع $f(x,y)=۳x^۳+\frac{۳}{۲}y^۲-۱۸xy+۱۷$ نقطهٔ $(۱۲,۷۲)$ کدامیک می‌باشد؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۵)

۱) ماکزیمم نسبی ۲) مینیمم نسبی ۳) نقطه عطف ۴) نقطه زینی

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$z_x=۹x^۲-۱۸y\ ,\ z_y=۳y-۱۸x$$

$$\Delta=z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^۲=۱۸x\times ۳-(-۱۸)^۲=۵۴x-۳۲۴$$

به ازای $x=۱۲$، مقدار $z_{xx}=۶۴۸>۰$ و $\Delta=۳۲۴>۰$ به دست می‌آید، پس نقطه بحرانی داده شده نقطه می‌نیمم نسبی است.

مثال۸۷: هرگاه $z=f(x^۲Lny^۲,y^۲Lnx^۲)$ حاصل $\frac{\partial z}{\partial x}=z_x$ کدام است؟ $\begin{pmatrix} u=x^۲Lny^۲ \\ v=y^۲Lnx^۲ \end{pmatrix}$ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۶)

۱) $z_x=۴xLny+۲\frac{y^۲}{x}$ ۲) $z_x=(\frac{۴x}{y}+۴yLnx)z_u$

۳) $z_x=(۴xLny)z_u+(\frac{۲y^۲}{x})z_v$ ۴) $z_x=(۴x+Lny)z_u+(۲y^۲+\frac{۱}{x})z_v$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از روش مشتق‌گیری زنجیری توابع چند متغیره استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=۴xLny.z_u+\frac{۲y^۲}{x}z_v$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۸۸: مجموعه نقاط ناپیوسته $z=\frac{۱}{۲\sin^۲\pi x+۳\sin^۲\pi y}$ به کدام صورت است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۶)

۱) $x=k\ ,\ y=k'\ ,\ k,k'\in Z$ ۲) $x=۲k\ ,\ y=۲k'\ ,\ k,k'\in Z$

۳) $x=۲k\ ,\ y=۲k'\ ,\ k,k'\in Z$ ۴) $x=k\ ,\ y=k'\ ,\ k,k'\in N$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ریشه‌های مخرج کسر نقاط ناپیوستگی (گسستگی) تابع می‌باشند.

$$۲\sin^۲\pi x+۳\sin^۲\pi y=۰\Rightarrow \sin\pi x=۰\ ,\ \sin\pi y=۰\Rightarrow \pi x=k\pi,\pi y=k'\pi\Rightarrow x=k,y=k'$$

که در رابطه فوق $k,k'\in Z$ هستند.

مثال۸۹: اگر $z=f(۲x+۳y,۲x-۳y)$ باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۶)

۱) $z_{xx}=z_{yy}$ ۲) $۴z_{xx}=۹z_{yy}$ ۳) $۲z_{xx}=۳z_{yy}$ ۴) $۹z_{xx}=۴z_{yy}$

☑ **پاسخ:** هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$z=f(\underbrace{۲x+۳y}_{u},\underbrace{۲x-۳y}_{v})$$

$$z_x=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=۲\frac{\partial f}{\partial u}+۲\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$z_{xx}=۲(\frac{\partial^۲ f}{\partial u^۲})\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^۲ f}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})+۲(\frac{\partial^۲ f}{\partial v^۲}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^۲ f}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x})$$

$$=۲(\frac{\partial^۲ f}{\partial u^۲}\times ۲+\frac{\partial^۲ f}{\partial u\partial v}\times ۲)+۲(\frac{\partial^۲ f}{\partial v^۲}\times ۲+\frac{\partial^۲ f}{\partial v\partial u}\times ۲)=۴\frac{\partial^۲ f}{\partial u^۲}+۴\frac{\partial^۲ f}{\partial v^۲}+۸\frac{\partial^۲ f}{\partial u\partial v}$$

$$z_y=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=۳\frac{\partial f}{\partial u}-۳\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$z_{yy}=۳(\frac{\partial^۲ f}{\partial u^۲}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^۲ f}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y})-۳(\frac{\partial^۲ f}{\partial v^۲}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^۲ f}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y})$$

$$=۳(\frac{\partial^۲ f}{\partial u^۲}\times ۳+\frac{\partial^۲ f}{\partial u\partial v}\times(-۳))-۳(\frac{\partial^۲ f}{\partial v^۲}(-۳)+\frac{\partial^۲ f}{\partial v\partial u}\times ۳)=۹\frac{\partial^۲ f}{\partial u^۲}+۹\frac{\partial^۲ f}{\partial v^۲}-۱۸\frac{\partial^۲ f}{\partial u\partial v}$$

مثال۹۰: اگر $f(x,y,z)=x^۲e^{۲y}\cos ۳z$ باشد و داشته باشیم $x=\cos t$، $y=\ln(t+۲)$ و $z=t$ مقدار $\frac{df}{dt}$ در نقطه $(۱,\ln ۲,۰)$ را به دست آورید؟ (مدیریت دولتی ـ آزاد ۸۶)

۱) ۴- ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۳-

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$\frac{df}{dt}=۲xe^{۲y}\cos ۳z\times(-\sin t)+۲x^۲e^{۲y}\cos ۳z\times\frac{۱}{t+۲}-۳x^۲e^{۲y}\sin ۳z\times ۱$$

پس از عددگذاری مقدار $\frac{df}{dt}$ برابر ۴ به دست می‌آید.

مثال۹۱: اگر $y=\frac{۲x+۱}{x-۲}$ و $x=t^۲-t$، $t=\sqrt{۲p+۱}$ باشد، مقدار $\frac{dp}{dy}$ به ازای $p=۴$، کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۷)

۱) ۱/۹۲- ۲) ۱/۳۶- ۳) ۱/۰۸ ۴) ۱/۷۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از قاعده مشتق‌گیری زنجیری استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که به ازای $p=۴$، $t=۳$ و $x=۶$ بدست می‌آید.

$$\frac{dy}{dp}=\frac{۲(x-۲)-(۲x+۱)}{(x-۲)^۲}\times(۲t-۱)\times\frac{۲}{۲\sqrt{۲p+۱}}=\frac{-۴۸}{۲۵}\Rightarrow\frac{dp}{dy}=-۱/۹۲$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۹۲: در تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ با توجه به علامت دیفرانسیل مرتبه دوم بر روی D_f، کدام مورد نادرست است؟

(علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۷)

۱) اگر $d^2z \le 0$ تابع محدب است، ولی موکد نیست.

۲) اگر d^2z هم علامت نباشد، تابع نه مقعر است و نه محدب.

۳) اگر $d^2z < 0$، تابع اکیداً مقعر است.

۴) اگر $d^2z > 0$، تابع اکیداً محدب است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

مثال۹۳: مقدار تابع $z=xy-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ در نقطه بحرانی کدام است؟

(علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\begin{cases} z_x = y+\frac{1}{x^2}=0 \\ z_y = x+\frac{1}{y^2}=0 \end{cases} \Rightarrow \text{نقطه بحرانی } P(-1,-1) \text{ می‌باشد}$$

پس مقدار تابع در نقطه بحرانی $z=3$ می‌شود.

مثال۹۴: برای این که $z=3xy-2x^2-ay^2$ دارای ماکزیمم باشد کدام پاسخ برای a مناسب است؟

(علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۷)

۱) $a<-\frac{8}{9}$ ۲) $a>\frac{9}{8}$ ۳) $a>-\frac{8}{9}$ ۴) $a>\frac{-9}{8}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای این‌که تابع داده شده دارای نقطه ماکزیمم باشد، لازم است $\Delta>0$ و $z_{xx}<0$ باشد.

$$\Delta = z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2 = (-4)(-2a)-3^2 = 8a-9>0 \Rightarrow a>\frac{9}{8}$$

مثال۹۵: کمترین مقدار تابع $z=x^2+y^2$ با شرط $2x+3y=26$، کدام است؟

(حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۸)

۱) ۳۸ ۲) ۴۱ ۳) ۴۲ ۴) ۵۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} 2x+3y=26 \\ \frac{2x}{2}=\frac{2y}{3} \end{cases} \Rightarrow x=4, y=6 \Rightarrow Z=4^2+6^2=52$$

مثال۹۶: تابع دو متغیری $z=4x^3+2y^3-4xy$، در نقطه (۱،۲) از نظر تحدّب و تقعر کدام وضعیت را دارد؟

(علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۸)

۱) شبه مقعر ۲) مقعر ۳) محدّب ۴) نه محدّب و نه مقعر

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$z_x = 12x^2-4y, z_y = 6y^2-4x$$
$$z_{xx}=24x, z_{yy}=12y, z_{xy}=-4$$

چون در نقطه $A(1,2)$ مقدار $\Delta = z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2$ مثبت و z_{xx} نیز مثبت است پس تابع در نقطه A، محدب است.

مثال۹۷: اگر u,v دو تابع از دو متغیر x,y باشند به طوری که:

(علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۸)

$F(u,v,x,y)=u^2+v^2-x^2-y^2=0$ و $G(u,v,x,y)=u^2-v^2+xy-x+y=0$ حاصل $\frac{\partial u}{\partial x}$ کدام است؟

۱) $\frac{2x-y+1}{4u}$ ۲) $\frac{x-u+1}{4uv}$ ۳) $\frac{uv-x-y}{2v}$ ۴) $\frac{y-x+v}{2u}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}-2x & 2v\\ y-1 & -2v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2u & 2v\\ 2u & -2v\end{vmatrix}}=-\frac{4xv-2yv+2v}{-4uv-4uv}=-\frac{2v(2x-y+1)}{-8uv}=-\frac{2x-y+1}{-8uv}=\frac{2x-y+1}{4u}$$

مثال۹۸: تابع $z=2x^2+4y^2$ را در نظر بگیرید. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۸)

۱) تابع نسبت به مبدأ مختصات مقعر است.
۲) تابع نسبت به مبدأ مختصات محدب است.
۳) تابع دارای نقطه عطف است.
۴) تابع دارای نقطه زینی است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\Delta=z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=6\times8-0^2=48$$

چون $z_{xx}>0$ و $\Delta>0$ پس تابع محدب است.

مثال۹۹: تابع تولید CES: $Q=A[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}]^{\frac{-1}{\rho}}$, $A>0$, $0<\delta<1$, $\rho>-1$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه در مورد این تابع صحیح است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۹)

۱) همگن نمی‌باشد.
۲) یک تابع همگن درجه ρ می‌باشد.
۳) یک تابع غیرخطی درجه $\rho+1$ می‌باشد.
۴) یک تابع همگن درجه اول است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$Q(\lambda k,\lambda L)=A[\delta(\lambda k)^{-\rho}+(1-\delta)(\lambda L)^{-\rho}]^{\frac{-1}{\rho}}=A[\lambda^{-\rho}(\delta k^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}]^{\frac{-1}{\rho}}=\lambda A[\delta k^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}]^{\frac{-1}{\rho}}$$

بنابراین Q یک تابع همگن درجه اول است.

مثال۱۰۰: تابع $z=2x^2+4y^2-xy-2x-2y$ مفروض است. کدام یک از موارد زیر درمورد این تابع حقیقی صادق است؟

(علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۹)

۱) محدب ۲) مقعر ۳) اکیداً محدب ۴) اکیداً مقعر

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» هرگاه $\Delta>0, z_{xx}>0$، تقعر تابع روبه بالاست یعنی تابع اکیداً محدب است.

$$\Delta=z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=4\times8-(-1)^2=31 \quad \text{و} \quad z_{xx}=4, z_{yy}=8, z_{xy}=-1 \quad \text{و} \quad z_x=4x-y-2, z_y=8y-x-2$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مدرسان شریف

فصل یازدهم

«کاربرد ریاضیات در اقتصاد»

مثال۱: اگر تابع درآمد کل $TR = ۱۰x - x^۲$ و هزینه کل $TC = ۴ + ۲x$ باشد به ازای کدام مقدار x، سود ماکزیمم است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۳»

تابع سود $\pi = TR - TC$

$$\pi = (۱۰x - x^۲) - (۴ + ۲x) = -۴ + ۸x - x^۲$$

$$\frac{d\pi}{dx} = ۸ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۴$$

مثال۲: در تابع تولید کل $z = ax^۲y$ که در آن x و y عوامل تولیدند، تولید نهایی نسبت به x در x = ۲ و y = ۲ چه مقدار است؟

(حسابداری ـ سراسری ۷۵)

۱) a ۲) ۲a ۳) ۴a ۴) ۸a

پاسخ: گزینه «۴»

$$MP = \frac{dz}{dx} = ۲axy \xrightarrow{x=y=۲} MP = ۲a(۲)(۲) = ۸a$$

مثال۳: اگر تابع هزینه کل $TC = ۷x^۲ + ۴$ باشد، که در آن x مقدار تولید است، با افزایش یک واحد تولید هزینه نهائی چه مقدار تغییر می‌کند؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۵)

۱) ۷ ۲) ۷x ۳) ۱۴ ۴) ۱۴x

پاسخ: گزینه «۴»

$$TC = ۷x^۲ + ۴ \Rightarrow MC = \frac{dTC}{dx} = ۱۴x$$

مثال۴: بهای هر واحد از کالایی ۱۰۰ تومان است. اگر تولید روزانه x واحد و هزینهٔ کل تولید در هر روز $TC = x^۲ + ۲۰x + ۷۰۰$ تومان باشد، آنگاه به ازای چه مقدار x سود ماکسیمم می‌شود؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۵)

۱) ۸۰ ۲) ۷۰ ۳) ۶۰ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به اینکه قیمت هر واحد کالا ۱۰۰ و تولید روزانه x واحد است، تابع درآمد کل بصورت زیر است:

$$TR = ۱۰۰x \Rightarrow \text{تابع سود}: \pi = TR - TC = ۱۰۰x - (x^۲ + ۲۰x + ۷۰۰)$$

$$\pi = ۸۰x - x^۲ - ۷۰۰ \Rightarrow \frac{d\pi}{dx} = ۸۰ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۴۰$$

مثال۵: اگر سود بطور پیوسته برسرمایه اضافه شود، ارزش فعلی یک میلیون ریال که قابل دریافت ۱۰ سال آینده با نرخ سود ۱۰% کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۶)

۱) $\frac{۱۰^۶}{e}$ ۲) $۱۰^۷$ ۳) $۱۰^۶ e$ ۴) ۲×۱۰^۶

پاسخ: گزینه «۱» ارزش فعلی را $P_۰$ فرض می‌کنیم، در این صورت:

$$P_t = P_۰e^{rt} \Rightarrow ۱۰۰۰۰۰۰ = P_۰e^{۰/۱\times۱۰} \Rightarrow P_۰ = \frac{۱۰۰۰۰۰۰}{e} = \frac{۱۰^۶}{e}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۶: اگر درآمد تابعی از زمان به صورت $TR = t^2 + 1$ باشد، نرخ رشد درآمد در $t = 2$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۶)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{4}{5}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\text{نرخ رشد درآمد} = \frac{(TR)'}{TR} = \frac{2t}{t^2+1} \xrightarrow{t=2} \text{نرخ رشد درآمد} = \frac{4}{5}$$

مثال۷: اگر هزینه ثابت تولید ۶۰/۰۰۰ ریال ، هزینه متغیر ۴۰ درصد قیمت فروش و قیمت فروش هر واحد ۵۰ ریال است ، نقطه سربه سر کدام است؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۷)

۱) ۱۵۰۰ ۲) ۲۰۰۰ ۳) ۲۵۰۰ ۴) ۳۰۰۰

پاسخ: گزینه «۲» اگر هزینه ثابت راFC، هزینه متغیر را v و قیمت فروش را p فرض کنیم، نقطه سر به سر از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$x = \frac{FC}{p - v}$$

$$v = 0/4p = 0/4 \times 50 = 20 \quad \text{(طبق فرض هزینه متغیر ۴۰ درصد فروش است)} \Rightarrow x = \frac{60000}{50-20} = \frac{60000}{30} = 2000 \quad : \text{هزینه متغیر}$$

مثال۸: اگر $TR = xLnx$ و $TC = 2x$ باشد، نقطه سر به سر کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۷)

۱) a ۲) e^2 ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۲»

$$xLnx = 2x \Rightarrow Lnx = 2 \Rightarrow x = e^2$$

مثال۹: تابع مطلوبیت مصرف‌کننده‌ای $U = q_1q_2$ و خط بودجه $2q_1 + q_2 = 100$ است. در مطلوبیت ماکزیمم، نسبت مطلوبیت‌های نهایی کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۷)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

پاسخ: گزینه «۱»

$$\text{نسبت مطلوبیت نهایی} = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{q_2}{q_1}$$

اگر معادله (شرط) خط بودجه را $g(q_1, q_2) = 2q_1 + q_2 - 100$ فرض کنیم، برای بدست آوردن مطلوبیت ماکزیمم لازم است شرایط روبرو برقرار باشند.

$$\begin{cases} g(q_1, q_2) = 0 \\ \frac{U_{q_1}}{g_{q_1}} = \frac{U_{q_2}}{g_{q_2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2q_1 + q_2 = 100 \\ \frac{q_2}{2} = \frac{q_1}{1} \Rightarrow \frac{q_2}{q_1} = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{نسبت مطلوبیت نهایی} = 2$$

مثال۱۰: در سپرده بانکی سود در پایان هر ماه بر سرمایه اضافه می‌شود ، با نرخ سود مشارکت ۱۲% سرمایه‌ای پس از ۳ سال چند برابر می‌شود؟ (حسابداری ـ سراسری ۷۸)

۱) $(1/012)^{36}$ ۲) $(1/01)^{36}$ ۳) $(1/12)^3$ ۴) $(1/03)^{12}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$p_t = p_0(1 + \frac{r}{n})^{nt} \Rightarrow p_3 = p_0(1 + \frac{0/12}{12})^{12 \times 3} = p_0(1 + 0/01)^{36} = p_0(1/01)^{36}$$

مثال۱۱: هزینه کل به صورت $TC = 5e^x + Ln(x+1)$ است، هزینه ثابت کدام است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۷۸)

۱) ۰ ۲) $Ln2$ ۳) ۵ ۴) $5e$

پاسخ: گزینه «۳» هزینه ثابت به ازای تولید برابر صفر $(x = 0)$ بدست می‌آید.

$$TC = 5e^x + Ln(x+1) \xrightarrow{x=0} TC = 5e^0 + Ln1 = 5$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۲: اگر تابع هزینه کل $TC = x^۲ + ۴x + ۹$ باشد، مقدار می‌نیمم هزینه متوسط کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۸)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» هزینه متوسط برابر هزینه کل تقسیم بر مقدار تولید می‌باشد.

$$AC = \frac{TC}{x} \Rightarrow AC = \frac{x^۲ + ۴x + ۹}{x} = x + ۴ + \frac{۹}{x}$$

$$\frac{dAC}{dx} = ۰ \Rightarrow ۱ - \frac{۹}{x^۲} = ۰ \Rightarrow x = ۳$$ (چون مقدار تولید نمی‌تواند منفی باشد پس $x = -۳$ قابل قبول نیست)

$$x = ۳ \Rightarrow AC = ۳ + ۴ + \frac{۹}{۳} = ۱۰$$

مثال۱۳: اگر نرخ جریان سرمایه‌گذاری $I(t) = te^t$ باشد، مقدار موجودی سرمایه $k(t)$ کدام است؟ در صورتی که $k(۰) = ۰$ باشد.

(علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۸)

۱) te^t ۲) $e^t + ۱$ ۳) $e^t - ۱$ ۴) $te^t - e^t + ۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$k(t) = \int te^t dt = te^t - e^t + c \Rightarrow k(t) = te^t - e^t + c$$

با توجه به اینکه $k(۰) = ۰$، نتیجه می‌شود:

$$۰e^۰ - e^۰ + c = ۰ \Rightarrow -۱ + c = ۰ \Rightarrow c = ۱ \Rightarrow k(t) = te^t - e^t + ۱$$

مثال۱۴: اگر تابع عرضه $y = x^۲$ و تابع تقاضا $y = -x + ۲$ باشد که در آن y قیمت و x مقدار، مازاد مصرف‌کننده کدام است؟

(علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۹)

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا نقطه تعادل را بدست می‌آوریم.

$$x^۲ = -x + ۲ \Rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = ۱$$

$$= \int_۰^۱ ((-x + ۲) - ۱)dx = \int_۰^۱ (-x + ۱)\,dx = \left(\frac{-x^۲}{۲} + x\right)\Big|_۰^۱ = \frac{۱}{۲}$$

مثال۱۵: در سرمایه‌گذاری بنگاهی ، سود به طور پیوسته بر سرمایه اضافه می‌شود. اگر نرخ سود ۲۰ درصد باشد پس از چند سال سرمایه دو برابر می‌شود؟ (حسابداری ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{۱۵}{۴}$ ۲) $\frac{۱۰}{۳}$ ۳) ۵ Ln ۲ ۴) ۸ Ln ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$p_t = p_۰e^{rt} \Rightarrow ۲p_۰ = p_۰e^{۰/۲t} \Rightarrow e^{۰/۲t} = ۲ \Rightarrow ۰/۲t = Ln۲ \Rightarrow t = ۵Ln۲$$

مثال۱۶: جمعیت تهران در سال ۷۰ برابر ۷ میلیون نفر و در سال ۸۰ برابر ۸/۴ میلیون نفر است. نرخ رشد جمعیت در تهران به طور متوسط چند درصد است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۰)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۴ ۳) $\frac{۱}{۱۰}Ln۱/۲$ ۴) $۱/۱e^{۱۰}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$p_t = p_۰e^{rt} \Rightarrow ۸/۴ = ۷e^{r\times ۱۰} \Rightarrow e^{۱۰r} = ۱/۲ \Rightarrow ۱۰r = Ln۱/۲ \Rightarrow r = \frac{۱}{۱۰}Ln۱/۲$$

مثال۱۷: هزینه نهایی بنگاهی $MC = xe^x$ است، هزینه کل بنگاه، TC ، کدام است؟ در صورتی که هزینه ثابت ۱۰۰ باشد.

(مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۰)

۱) $TC = xe^x - x + ۱۰۰$ ۲) $TC = x + e^x + ۹۹$ ۳) $TC = xe^x + ۱۰۰$ ۴) $TC = xe^x - e^x + ۱۰۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$TC = \int MC \Rightarrow TC = \int xe^x dx = xe^x - e^x + c$$

با توجه به اینکه هزینه ثابت برابر ۱۰۰ می‌باشد، پس به ازای $x = ۰$، مقدار $TC = ۱۰۰$ است.

$$\Rightarrow ۱۰۰ = ۰e^۰ - e^۰ + c \Rightarrow c = ۱۰۱ \Rightarrow TC = xe^x - e^x + ۱۰۱$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۸: توابع تقاضای دو کالای ۱ و ۲ عبارتند از $Q_۲ = ۲۰۰ - p_۱ - ۳p_۲$ و $Q_۱ = ۱۵۰ - ۲p_۱ - p_۲$ انحصارگر چه قیمتی را برای دو کالا تعیین نماید تا درآمدش به حداکثر برسد؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۰)

۱) $p_۱ = p_۲ = ۲۵$ ۲) $p_۱ = ۲۰ \;\; p_۲ = ۲۵$ ۳) $p_۱ = ۲۰ \;\; p_۲ = ۱۰$ ۴) $p_۱ = ۲۵ \;\; p_۲ = ۱۰$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$TR = p_۱Q_۱ + p_۲Q_۲ = p_۱(۱۵۰ - ۲p_۱ - p_۲) + p_۲(۲۰۰ - p_۱ - ۳p_۲) = ۱۵۰p_۱ + ۲۰۰p_۲ - ۲p_۱^۲ - ۳p_۲^۲ - ۲p_۱p_۲$$

$$\begin{cases} \frac{dTR}{dp_۱} = ۰ \\ \frac{dTR}{dp_۲} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۵۰ - ۴p_۱ - ۲p_۲ = ۰ \\ ۲۰۰ - ۶p_۲ - ۲p_۱ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲p_۱ + p_۲ = ۷۵ \\ p_۱ + ۳p_۲ = ۱۰۰ \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق $p_۱ = p_۲ = ۲۵$ حاصل می‌شود.

مثال۱۹: اگر سود بطور پیوسته بر سرمایه اضافه شود و سرمایه‌ای پس از ۱۵ سال سه برابر شود، نرخ سرمایه‌گذاری کدام است؟

(علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۱)

۱) $e^{\frac{۱}{۵}}$ ۲) $۱۵e^{-۳}$ ۳) $Ln\sqrt[۳]{۱۵}$ ۴) $Ln\sqrt[۱۵]{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$p_t = p_۰e^{rt} \Rightarrow ۳p_۰ = p_۰e^{r\times ۱۵} \Rightarrow e^{۱۵r} = ۳ \Rightarrow ۱۵r = Ln۳ \Rightarrow r = \frac{۱}{۱۵}Ln۳ = Ln\sqrt[۱۵]{۳}$$

مثال۲۰: اگر تابع تقاضا $y = ۱۰ - x$ و هزینه کل $TC = ۴ + ۲x$ باشد، که در آن x مقدار و y قیمت است به ازای چه مقداری از تولید، سود بنگاه ماکزیمم است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۱)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$TR = y.x = (۱۰ - x)x = ۱۰x - x^۲ \;\; , \;\; TC = ۴ + ۲x$$

$$\pi = TR - TC = (۱۰x - x^۲) - (۴ + ۲x) = -x^۲ + ۸x - ۴$$

$$\frac{d\pi}{dx} = ۰ \Rightarrow -۲x + ۸ = ۰ \Rightarrow x = ۴$$

مثال۲۱: اگر تابع مطلوبیت مصرف‌کننده $U = ۴q_۱q_۲$ و قیمت کالاها $p_۱ = ۵$ و $p_۲ = ۱۰$ و بودجه ۴۰۰ باشد، از هر یک از کالاها چه مقدار خریداری کند تا مطلوبیت او ماکزیمم گردد؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۱)

۱) $q_۲ = ۲۰$ و $q_۱ = ۴۰$ ۲) $q_۲ = ۳۰$ و $q_۱ = ۲۰$ ۳) $q_۲ = ۱۵$ و $q_۱ = ۵۰$ ۴) $q_۲ = ۱۰$ و $q_۱ = ۶۰$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» می‌خواهیم $U = ۴q_۱q_۲$ را تحت شرط $۵q_۱ + ۱۰q_۲ = ۴۰۰$ ماکزیمم کنیم.

از شرط داده شده نتیجه می‌شود $q_۱ = ۸۰ - ۲q_۲$، که با جایگزینی در U نتیجه می‌شود: $U = ۴(۸۰ - ۲q_۲)q_۲ = ۴(۸۰q_۲ - ۲q_۲^۲)$

$$\frac{dU}{dq_۲} = ۴(۸۰ - ۴q_۲) = ۰ \Rightarrow q_۲ = ۲۰ \;\; , \;\; q_۱ = ۴۰$$

مثال۲۲: اگر $r(t)$ نرخ رشد بدهی یک کشور در زمان t باشد، افزایش بدهی این کشور بین سالهای ۱۳۶۰ و ۱۳۷۰ برابر است با:

(علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۲)

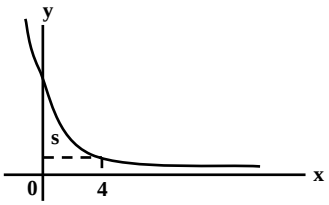
۱) $r(۱۳۷۰) - r(۱۳۶۰)$ ۲) $\frac{r(۱۳۷۰) - r(۱۳۶۰)}{۱۳۷۰ - ۱۳۶۰}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}\int_{۱۳۶۰}^{۱۳۷۰} r(t)dt$ ۴) $\int_{۱۳۶۰}^{۱۳۷۰} r(t)dt$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» میزان کل بدهی را می‌توان با انتگرال‌گیری از نرخ رشد بدهی بین سالهای موردنظر به دست آورد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۲۳: اگر تابع تقاضا $y=\frac{۵}{x+۱}$ و مقدار تعادلی $x=۴$ باشد، مازاد مصرف‌کننده کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۲)



۱) ۱
۲) ۲
۳) $۵Ln۵-۴$
۴) $۵Ln۴-۱$

پاسخ: گزینه «۳»

$$x=۴ \Rightarrow y=\frac{۵}{۴+۱}=۱$$

$$S=\int_{۰}^{۴}(\frac{۵}{x+۱}-۱)dx=(۵Ln(x+۱)-x)\Big|_{۰}^{۴}=۵Ln۵-۴$$

مثال۲۴: هزینه تولید هر واحد کالا ۱۰۰ تومان و هزینه ثابت ۱۰۰/۰۰۰ تومان است، در صورتی که هر واحد کالا ۱۲۰ تومان فروخته شود، به ازای چه مقدار تولید، سود بنگاه به ۱۰۰/۰۰۰ تومان می‌رسد؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱۰/۰۰۰ ۲) ۱۲/۰۰۰ ۳) ۲۰/۰۰۰ ۴) ۲۴/۰۰۰

پاسخ: گزینه «۱»

$$TC=۱۰۰۰۰۰+۱۰۰x \ , \ TR=۱۲۰x$$

$$\pi=TR-TC \Rightarrow ۱۰۰۰۰۰=۱۲۰x-(۱۰۰۰۰۰+۱۰۰x) \Rightarrow ۲۰x=۲۰۰۰۰۰ \Rightarrow x=۱۰۰۰۰$$

مثال۲۵: قرار است بعد از گذشت ۴ سال مبلغ ۱/۵۰۰/۰۰۰ تومان دریافت کنیم در صورتی که ارزش فعلی این مبلغ یک میلیون تومان و سود به طور پیوسته بر سرمایه افزوده شود، نرخ سود سرمایه‌گذاری چقدر است؟ (مجموعه مدیریت ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{۱}{۴}\ln ۱/۵$ ۲) $\ln\frac{۱/۵}{۴}$ ۳) $۴\ln ۱/۵$ ۴) $\ln ۶$

پاسخ: گزینه «۱»

$$p_t=p_۰e^{rt} \Rightarrow ۱۵۰۰۰۰۰=۱۰۰۰۰۰۰e^{۴r} \Rightarrow e^{۴r}=۱/۵ \Rightarrow ۴r=Ln۱/۵ \Rightarrow r=\frac{۱}{۴}Ln۱/۵$$

مثال۲۶: اگر تابع مطلوبیت مصرف‌کننده $u=۴q_۱q_۲$ و خط بودجه $q_۱+q_۲=۱۰$ باشد، مقدار ماکزیمم مطلوبیت کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۳)

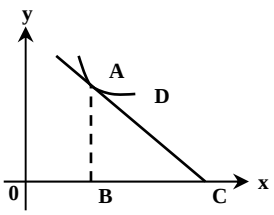
۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۴۰۰

پاسخ: گزینه «۱»

$$q_۱+q_۲=۱۰ \Rightarrow q_۲=۱۰-q_۱ \Rightarrow U=۴q_۱(۱۰-q_۱)=۴۰q_۱-۴q_۱^۲$$

$$\frac{dU}{dq_۱}=۰ \Rightarrow ۴۰-۸q_۱=۰ \Rightarrow q_۱=۵ \ , \ q_۲=۵ \Rightarrow U=۴\times۵\times۵=۱۰۰$$

مثال۲۷: اگر در شکل مقابل **D** تابع تقاضا باشد، که در آن x مقدار و y قیمت می‌باشد، مقدار کشش در روی شکل کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۴)



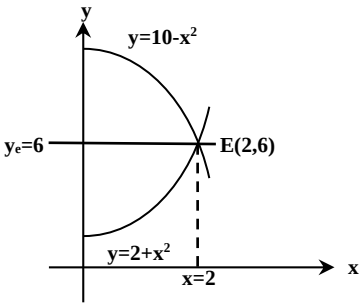
۱) $-\frac{OB}{CB}$ ۲) $-\frac{OC}{AC}$
۳) $-\frac{BC}{OB}$ ۴) $-\frac{AC}{OC}$

پاسخ: گزینه «۳»

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۲۸: در شکل داده شده مقدار مازاد مصرف‌کننده، کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۴)



۱) $\frac{۴}{۳}$

۲) $\frac{۱۰}{۳}$

۳) $\frac{۱۶}{۳}$

۴) $\frac{۳۲}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$\text{مازاد مصرف کننده} = \int_{۰}^{۲}((۱۰-x^۲)-۶)dx = \int_{۰}^{۲}(۴-x^۲)dx = (۴x-\frac{x^۳}{۳})\Big|_{۰}^{۲} = \frac{۱۶}{۳}$$

مثال۲۹: در تابع تولید $z = xy$ مقادیر x و y عوامل تولید و z محصول است، اگر قیمت عوامل تولید $p_x = ۱۰$ و $p_y = ۵$ و هزینه کل تخصیصی ۱۰۰ باشد، از هر یک از عوامل تولید چه مقدار به کار گیریم تا مقدار محصول z ماکزیمم گردد؟

(علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\begin{matrix} x = ۴/۵ \\ y = ۱۱ \end{matrix}$

۲) $\begin{matrix} x = ۸ \\ y = ۴ \end{matrix}$

۳) $\begin{matrix} x = ۲/۵ \\ y = ۱۵ \end{matrix}$

۴) $\begin{matrix} x = ۵ \\ y = ۱۰ \end{matrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» درواقع می‌خواهیم تابع $z = f(x,y) = xy$ را تحت قید $g(x,y) = ۱۰x + ۵y - ۱۰۰ = ۰$ ماکزیمم کنیم. بدین منظور از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} g(x,y) = ۰ \\ \frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۰x + ۵y = ۱۰۰ \\ \frac{y}{۱۰} = \frac{x}{۵} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x + y = ۲۰ \\ y = ۲x \end{cases} \Rightarrow x = ۵ \ , \ y = ۱۰$$

مثال۳۰: اگر هزینه کل تولید $TC = x^۲ + ۴$ باشد، مینیمم هزینه متوسط کدام است و بر روی کدام تابع قرار دارد؟

(حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۵)

۱) (۲ و ۱)، هزینه نهایی ۲) (۴ و ۲)، هزینه کل ۳) (۴ و ۲)، هزینه نهایی ۴) (۵ و ۱)، هزینه کل

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$AC = \frac{TC}{x} \Rightarrow AC = \frac{x^۲ + ۴}{x} = x + \frac{۴}{x}$$

$$(AC)' = ۰ \Rightarrow ۱ - \frac{۴}{x^۲} = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow AC = ۲ + \frac{۴}{۲} = ۴$$

$$TC = x^۲ + ۴ \Rightarrow MC = ۲x$$

چون نقطه $(۲,۴)$ بر تابع MC قرار دارد، پس گزینه (۳) صحیح است.

مثال۳۱: در تابع تقاضا $y = ۸ - x^۲$ و تابع عرضه $y = ۱ + ۲x$ (x مقدار، y قیمت)، اگر دولت مالیاتی برای هر واحد برابر t وضع نماید، به ازای چه مقداری از x درآمد مالیاتی دولت ماکزیمم است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای به دست آوردن قیمت واقعی مالیات را به تابع عرضه اضافه می‌کنیم، یعنی $y = ۱ + ۲x + t$. سپس تابع تقاضا و عرضه را با هم مساوی قرار می‌دهیم، در این صورت:

$$۱ + ۲x + t = ۸ - x^۲ \Rightarrow t = ۷ - ۲x - x^۲$$

می‌دانیم درآمد مالیاتی دولت برابر مقدار عرضه ضربدر مقدار مالیات هر واحد می‌باشد. بنابراین:

$$\text{درآمد مالیاتی} = f(x) = tx = (۷ - ۲x - x^۲)x = ۷x - ۲x^۲ - x^۳$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۷ - ۴x - ۳x^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

www.modaresanesharif.ac.ir

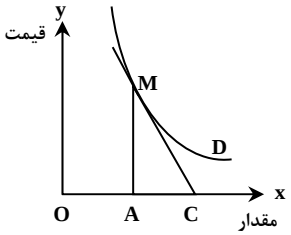
www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۳۲: در سوال قبل، درآمد مالیاتی دولت چه مقدار است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۴» به ازای $x = ۱$ درآمد مالیاتی دولت برابر است با: $f(۱) = ۷ - ۲ - ۱ = ۴$

مثال ۳۳: تابع تقاضا در شکل روبرو رسم شده است، مقدار کشش تقاضا نسبت به قیمت در روی شکل کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۶)



۱) $-\frac{OA}{AC}$ ۲) $-\frac{AC}{OA}$

۳) $-\frac{MA}{CA}$ ۴) $-\frac{CA}{MA}$

پاسخ: گزینه «۲» این تست در سالهای (۷۸) و (۸۴) نیز آمده است.

مثال ۳۴: تغییر در مصرف کالای خاص (c) هنگامی که درآمد (y) تغییر می‌کند به صورت $\frac{dc}{dy} = c + \alpha e^{y}$ است. تابع مصرف در حالت $y = ۰$ و $c = ۱۰۰$، کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۶)

۱) $c = ۱۰۰ + e^{y}\alpha y$ ۲) $c = e^{y}(۱۰۰ + \alpha y)$ ۳) $c = ۱۰۰e^{y} + \alpha y$ ۴) $c = e^{y}(۱۱۰ + ۱۰۰\alpha y)$

پاسخ: گزینه «۲» معادله دیفرانسیل داده شده، معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است.

$$\frac{dc}{dy} - c = \alpha e^{y} \xrightarrow{\text{فرمول}} c = e^{-\int -۱dy}\left(\int \alpha e^{y} \times e^{\int -۱dy} dy + c'\right)$$

$$\Rightarrow c = e^{y}\left(\int \alpha e^{y} \times e^{-y} dy + c'\right) = e^{y}\left(\int \alpha dy + c'\right) = e^{y}(\alpha y + c')$$

توجه کنید که نیازی به به دست آوردن مقدار c' نیست و فقط گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۳۵: شرکتی کالایی را تولید می‌کند، اگر فروش هر واحد ۱۲۰۰ ریال و هزینه ثابت ۵/۰۰۰/۰۰۰ ریال و هزینه تولید هر واحد ۱۰۰۰ ریال باشد، چه تعداد کالا تولید شود تا به نقطه سربه‌سر برسد؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۷)

۱) ۵۰/۰۰۰ ۲) ۴۰/۰۰۰ ۳) ۳۰/۰۰۰ ۴) ۲۵/۰۰۰

پاسخ: گزینه «۴»

$$x = \frac{۵/۰۰۰/۰۰۰}{۱۲۰۰ - ۱۰۰۰} = \frac{۵۰۰۰۰۰۰}{۲۰۰} = ۲۵۰۰۰$$

مثال ۳۶: تابع هزینه کل یک تولیدکننده به صورت $TC = x^{۲} + ۶x + ۹$ است. تابع هزینه نهایی، در کدام نقطه، تابع هزینه متوسط را قطع می‌کند؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۷)

۱) (۲,۱۰) ۲) (۲,۲۵) ۳) (۳,۱۲) ۴) (۳,۳۶)

پاسخ: گزینه «۳»

$$MC = (TC)' = ۲x + ۶, AC = \frac{TC}{x} = \frac{x^{۲} + ۶x + ۹}{x}$$

$$MC = AC \Rightarrow \frac{x^{۲} + ۶x + ۹}{x} = ۲x + ۶ \Rightarrow x^{۲} = ۹ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow MC = ۱۲$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۳۷: با شرط سرمایه‌گذاری، تابعی پیوسته از زمان و نرخ جریان سرمایه‌گذاری $I(t)=\frac{t}{\sqrt{t+1}}$ باشد، افزایش موجودی طی سه سال برابر کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۱۰}{۳}$ ۳) $\frac{۱۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱۳}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\int_{۰}^{۳}\frac{t}{\sqrt{t+۱}}dt=\int_{۰}^{۳}\frac{(t+۱)-۱}{\sqrt{t+۱}}dt=\int_{۰}^{۳}(\sqrt{t+۱}-\frac{۱}{\sqrt{t+۱}})dt=(\frac{۲}{۳}(t+۱)^{\frac{۳}{۲}}-۲\sqrt{t+۱})\Big|_{۰}^{۳}=(\frac{۱۶}{۳}-۴)-(\frac{۲}{۳}-۲)=\frac{۴}{۳}+\frac{۴}{۳}=\frac{۸}{۳}$$

مثال ۳۸: تابع تقاضای کالایی به صورت $P=۲۰-۲Q$ است. مقدار فروشی که درآمد را حداکثر می‌کند عبارتست از:

(علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۸)

۱) $Q=۱۰$ ۲) $Q=۴$ ۳) $Q=۵$ ۴) درآمد حداکثر نمی‌شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر تابع در آمد را با R نمایش دهیم: $R=P.Q=(۲۰-۲Q)Q=۲۰Q-۲Q^{۲}$

از تابع درآمد نسبت به Q مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم تا ماکزیمم درآمد به دست آید: $\frac{dR}{dQ}=۰ \Rightarrow ۲۰-۴Q=۰ \Rightarrow Q=۵$

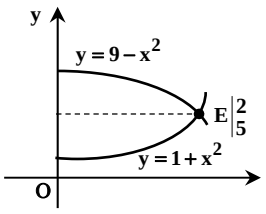
مثال ۳۹: تابع $\ln Y=\alpha+\beta X$ مفروض است. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۸)

۱) شیب تابع برابر β است.
۲) کشش تابع برابر β است.
۳) کشش تابع برابر است با βX
۴) β تغییر Y به ازاء یک درصد تغییر در X را نشان می‌دهد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از رابطه $Lny=\alpha+\beta x$ نتیجه می‌شود $y=e^{\alpha+\beta x}$، بنابراین: $E=\frac{x}{y}.\frac{dy}{dx}=\frac{x}{e^{\alpha+\beta x}}.\beta e^{\alpha+\beta x}=\beta x$

مثال ۴۰: در شکل داده شده منحنی‌های عرضه و تقاضا رسم شده است. اختلاف بین مازاد مصرف کننده و تولید کننده کدام است؟

(علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۹)



۱) $\frac{۴۸}{۳}$ ۲) $\frac{۱۶}{۳}$
۳) صفر ۴) ۱۰

☑ **پاسخ:** هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

اختلاف بین مازاد مصرف‌کننده و تولیدکننده $=\int_{۰}^{۲}((۹-x^{۲})-(۱+x^{۲}))dx=\int_{۰}^{۲}(۸-۲x^{۲})dx=(۸x-\frac{۲}{۳}x^{۳})\Big|_{۰}^{۲}=\frac{۳۲}{۳}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مدرسان شریف

فصل دوازدهم

« دنباله و سری »

مثال۱: مجموع $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$ **کدام است؟** (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۶)

۱) ۳ ۲) ∞ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۳» سری داده شده سری تلسکوپی می‌باشد.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1-0=1$$

مثال۲: شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}2^n x^n=\cdots+2^n x^n+\cdots+8x^3+4x^2+2x$ **برابر است با: (R شعاع همگرایی است)**(حسابداری ـ آزاد ۸۰)

۱) $R=1$ ۲) $R=\frac{1}{2}$ ۳) $R=2$ ۴) $R=\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n}{2^{n+1}}\right|=\frac{1}{2}$$

یادآوری: بطورکلی شعاع همگرایی سری توانی $\sum a_n x^n$ از فرمول‌های روبرو بدست می‌آید: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ یا $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

مثال۳: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$ **بازاء چه مقادیری از x همگراست؟ (متقارب است)** (حسابداری ـ آزاد ۸۰)

۱) $|x|<1$ ۲) $|x|<e$ ۳) $|x|<\frac{1}{e}$ ۴) $|x|<\sqrt{e}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا شعاع همگرایی سری توانی را بدست می‌آوریم:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\times(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\times n^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\times(n+1)\times(n+1)^n}{(n+1)\times n!\times n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

بنابراین فاصله همگرایی $|x|<e$ می‌باشد.

یادآوری: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{bn}=e^{ab}$.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۴: ۳ جمله از بسط مکلورن $e^{۲x}$ برابر است با: (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۰)

۱) $۱+x+\frac{x^۲}{۲!}$ ۲) $۱+۲x+۲x^۲$ ۳) $۱+x-\frac{۲x^۲}{۳}$ ۴) $۱-x+\frac{x^۲}{۲!}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$f(x)=e^{۲x} \Rightarrow f(۰)=e^{۰}=۱$$
$$f'(x)=۲e^{۲x} \Rightarrow f'(۰)=۲e^{۰}=۲$$
$$f''(x)=۴e^{۲x} \Rightarrow f''(۰)=۴e^{۰}=۴$$
$$\Rightarrow e^{۲x} \approx f(۰)+\frac{f'(۰)}{۱!}x+\frac{f''(۰)}{۲!}x^۲=۱+۲x+۲x^۲$$

یادآوری: بطورکلی بسط مک‌لورن $y=f(x)$ از فرمول روبرو بدست می‌آید. $f(x)=f(۰)+\frac{f'(۰)}{۱!}x+\frac{f''(۰)}{۲!}x^۲+\cdots+\frac{f^{(n)}(۰)}{n!}x^n$

مثال۵: حاصل $\sum_{n=۱}^{۲۹} Ln(۱+\frac{۱}{n})$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۰)

۱) $۱+Ln۱۵$ ۲) $Ln۳۰$ ۳) $Ln۲۹$ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\sum_{n=۱}^{۲۹} Ln(۱+\frac{۱}{n})=\sum_{n=۱}^{۲۹} Ln(\frac{n+۱}{n})=\sum_{n=۱}^{۲۹} (Ln(n+۱)-Lnn)$$
$$=(Ln۲-Ln۱)+(Ln۳-Ln۲)+(Ln۴-Ln۳)+\cdots+(Ln۳۰-Ln۲۹)=Ln۳۰-Ln۱=Ln۳۰-۰=Ln۳۰$$

مثال۶: دنبالهٔ $a_n=\frac{e^n}{n}$ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۰)

۱) صعودی و کراندار است. ۲) نزولی و کراندار است. ۳) نزولی و بی‌کران است. ۴) صعودی و بی‌کران است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$\lim_{x\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n}=+\infty$$

مثال۷: اگر $y_t+y_{t-۱}=۱۰$ و $y(۰)=۲۰$ باشند مقدار $y(۱۰)$ کدام گزینه است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۵)

۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) -۱۰ ۴) -۲۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$y(۰)=۲۰ \Rightarrow y(۱)=-۱۰ \Rightarrow y(۲)=۲۰ \Rightarrow y(۳)=-۱۰ \Rightarrow \cdots \Rightarrow y(۱۰)=۲۰$$

مثال۸: کدامیک از دنباله‌های زیر همگراست؟ (مدیریت تکنولوژی ـ آزاد ۸۵)

۱) $\{(\frac{۵}{۴})^n\}$ ۲) $\{(\frac{۴۷}{۲۵})^n\}$ ۳) $\{(\frac{\pi^n}{۴^n})\}$ ۴) $\{(\sec\frac{\pi}{۵})^n\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» بطور کلی می‌دانیم، هرگاه $-۱<a\le ۰$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a^n=۰$ و اگر $a>۱$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} a^n=\infty$.

مثال۹: در یک تصاعد حسابی $a_۶=۲۰$ و $a_{۱۱}=۳۰$ آنگاه $a_{۱۷}$ کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۶)

۱) ۴۲ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۴۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» می‌دانیم $a_n=a_۱+(n-۱)d$، بنابراین:

$$\begin{cases} a_۱+۵d=۲۰ \\ a_۱+۱۰d=۳۰ \end{cases} \Rightarrow d=۲, a_۱=۱۰$$

در نتیجه $a_{۱۷}=a_۱+۱۶d=۴۲$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱۰: حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+2n}$، کدام است؟ (حسابداری و مدیریت ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» سری داده شده، یک‌سری تلسکوپی می‌باشد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

مثال۱۱: چند جمله دنباله $a_n = \frac{2n+12}{n+1}$ خارج از بازه (۰،۳) قرار دارند؟ (حسابداری ـ آزاد ۸۷)

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه «۲» تمام جملات دنباله موردنظر مثبت و دنباله نزولی است همچنین $a_1 = 7$ می‌باشد. بنابراین مقدار از n را که به ازای آن $a_n = 3$ می‌شود را به دست می‌آوریم.

$$a_n = \frac{2n+12}{n+1} = 3 \rightarrow n = 9$$

در نتیجه با توجه به نزولی بودن دنباله و $a_1 = 7$، ۹ جمله از این دنباله بزرگتر از ۳ هستند.

مثال۱۲: حاصل سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+2}{(k^2+k)^2}$ چقدر است؟ (حسابداری ـ آزاد ۸۷)

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۴»

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+2}{(k^2+k)2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+2}{(k+1)^2 k^2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}) = 2(\frac{1}{1} - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)^2}) = 2$$

مثال۱۳: چند جمله دنباله $a_n = \frac{2n-3}{3n-70}$ منفی است؟ (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۷)

۱) ۲۲ ۲) ۲۱ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه «۱» جملات منفی از جمله دوم به بعد ایجاد می‌شوند، یعنی $n \geq 2$، که در این صورت صورت کسر همواره مثبت خواهد بود، پس لازم است مخرج کسر منفی باشد.

$$\Rightarrow 3n - 70 < 0 \Rightarrow 3n < 70 \Rightarrow n < \frac{70}{3}$$

تعداد اعداد صحیحی که بزرگتر مساوی ۲ و کوچکتر از $\frac{70}{3}$ باشند، ۲۲ تا می‌باشد.

مثال۱۴: دنباله $\left\lfloor \frac{(-1)^n + \cos n}{n} \right\rfloor = a_n$، دنباله‌ای است: (مدیریت بازرگانی ـ آزاد ۸۷)

۱) همگرا به ۱− ۲) همگرا به ۱ ۳) واگرا ۴) همگرا به صفر

پاسخ: گزینه «۱» عبارت درون جزء صحیح همواره بین ۱− و صفر می‌باشد پس جزء صحیح آن برابر ۱− می‌باشد، یعنی تمام جملات این دنباله برابر ۱− هستند.

مثال۱۵: اگر $\sum_{i=1}^{n} (ai+b) = k$ باشد، مقدار $\sum_{i=1}^{n} i$ کدام است؟ (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۸)

۱) $\frac{k+b}{a}$ ۲) $k+nb$ ۳) $\frac{k-nb}{a}$ ۴) $\frac{k+nb}{a}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\sum_{i=1}^{n} (ai+b) = k \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} ai + \sum_{i=1}^{n} b = k \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} ai = k - nb \Rightarrow a\sum_{i=1}^{n} i = k - nb \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i = \frac{k-nb}{a}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مدرسان شریف

فصل سیزدهم

« دستگاه مختصات قطبی و اعداد مختلط »

مثال۱: حاصل عدد مختلط $(32-32\sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}}$ کدام است؟

۱) $4+6/92i$ ۲) $6/92+4i$ ۳) $-6/92+4i$ ۴) $5/65-7/44i$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$\begin{cases} x=32 \\ y=-32\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{(32)^2+(-32\sqrt{3})^2}=\sqrt{(32)^2\times 2^2}=\sqrt{64^2}=64 \\ \theta=\text{Arctg}(\frac{-32\sqrt{3}}{32})=\text{Arc tg}(-\sqrt{3}) \xrightarrow{\theta \text{ در ربع چهارم}} \boxed{\theta=\frac{5\pi}{3}} \end{cases}$$

$$(32-i32\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{64}[\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}]^{\frac{1}{2}}=8(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})=-4\sqrt{3}+4i=-6/92+4i$$

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۲: یکی از جواب‌های معادله $z^4+iz^3-z^2-iz+1=0$ به صورت $\cos\alpha+i\sin\alpha$ است، کمترین مقدار α در بازه $[0,2\pi]$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{5}$ ۲) $\frac{\pi}{10}$ ۳) $\frac{2\pi}{5}$ ۴) $\frac{3\pi}{10}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا طرفین معادله را در $(1+iz)$ ضرب می‌کنیم، داریم:

$$(1+iz)(1-iz-z^2+iz^3+z^4)=0 \Rightarrow 1+(iz)^5=0 \Rightarrow 1+iz^5=0 \Rightarrow z^5=\frac{-1}{i}=i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow z=\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}$$

یادآوری: اگر n فرد باشد آنگاه داریم: $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-ba^{n-2}+\cdots+b^{n-1})$.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۳: معادله مکان هندسی نقاطی که در رابطهٔ $|z-1|=1$ صدق کند کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۵)

۱) $x^2+y^2=1$ ۲) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ ۳) $x^2+(y-1)^2=1$ ۴) $(x-1)^2+y^2=1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» عدد مختلط z را بصورت $z=x+iy$ در نظر می‌گیریم، در این صورت:

$$|z-1|=1 \Rightarrow |x+iy-1|=1 \Rightarrow |(x-1)+iy|=1 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}=1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$$

یادآوری: قدر مطلق عدد $z=x+iy$ بصورت $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ است و بطور کلی $|z-z_0|=R$ معادله دایره‌ای به شعاع R و مرکز z_0 است.

◆ ◆ ◆ ◆

مثال۴: کدام نقطه در درون نمودار $|z|=2$ قرار دارد؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۶)

۱) $(3,0)$ ۲) $(1,1)$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(0,3)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» نمودار $|z|=2$ دایره‌ای به شعاع ۲ و به مرکز مبدأ می‌باشد و نقاطی درون آن قرار دارند که فاصله آنها از مبدأ کمتر از ۲ باشد.

گزینه (۱): $(3,0)$ $\Rightarrow d=\sqrt{3^2+0^2}=3$

گزینه (۲): $(1,1)$ $\Rightarrow d=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

گزینه (۳): $(1,2)$ $\Rightarrow d=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

گزینه (۴): $(0,3)$ $\Rightarrow d=\sqrt{0^2+3^2}=3$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۵: کدامیک از اعداد مختلط یکی از ریشه‌های عدد $\sqrt[۵]{i}$ است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۸)

۱) $۱-i$ ۲) $-i$ ۳) $\cos\frac{۳\pi}{۵}+i\sin\frac{۳\pi}{۵}$ ۴) $\cos\frac{۹\pi}{۱۰}+i\sin\frac{۹\pi}{۱۰}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا عدد مختلط $z=i$ را در مختصات قطبی می‌نویسیم.

$$r=\sqrt{۰^۲+۱^۲}=۱\ ,\ \tan\theta=\frac{۱}{۰}\ \Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow\sqrt[۵]{i}=\sqrt[۵]{۱}(\cos(\frac{۲k\pi+\frac{\pi}{۲}}{۵})+i\sin(\frac{۲k\pi+\frac{\pi}{۲}}{۵}))\quad ;\quad k=۰,۱,۲,۳,۴$$

$$k=۰\ \Rightarrow\sqrt[۵]{i}=\cos\frac{\pi}{۱۰}+i\sin\frac{\pi}{۱۰}$$

$$k=۱\ \Rightarrow\sqrt[۵]{i}=\cos\frac{۵\pi}{۱۰}+i\sin\frac{۵\pi}{۱۰}$$

$$k=۲\ \sqrt[۵]{i}=\cos\frac{۹\pi}{۱۰}+i\sin\frac{۹\pi}{۱۰}$$

مثال۶: یکی از ریشه‌های معادله $z^۲-۲z+۲=۰$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۸)

۱) i ۲) $۱-i$ ۳) $۲-i$ ۴) $-۱+i$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$z^۲-۲z+۲=۰\ \Rightarrow z=\frac{۲\pm\sqrt{۴-۸}}{۲}=\frac{۲\pm\sqrt{-۴}}{۲}=\frac{۲\pm۲i}{۲}=۱\pm i$$

مثال۷: اگر $z=a+ib$ و $u=x+iy$ باشد و داشته باشیم $z=\frac{۱}{u+۱}$، مقدار y برحسب a و b کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{a-b}{a^۲+b^۲}$ ۲) $\frac{a+b}{a^۲+b^۲}$ ۳) $\frac{-b}{a^۲+b^۲}$ ۴) $\frac{-ab}{a^۲+b^۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$a+bi=\frac{۱}{x+iy+۱}\ \Rightarrow(x+۱)+iy=\frac{۱}{a+bi}\times\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{a}{a^۲+b^۲}+\frac{-b}{a^۲+b^۲}i$$

از رابطه فوق نتیجه می‌شود $y=\frac{-b}{a^۲+b^۲}$.

مثال۸: هرگاه $\sum_{k=۰}^{۱۰۰} i^k=x+iy$، آنگاه y و x عبارتند از: (علوم اقتصادی ـ سراسری ۸۱)

۱) $y=۰,x=۰$ ۲) $y=۱,x=۰$ ۳) $y=۰,x=۱$ ۴) $y=۱,x=۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

روش اول: سری $\sum_{k=۰}^{۱۰۰} i^k$ یک سری هندسی است که جمله اول آن ۱ و قدر نسبت آن i می‌باشد، بنابراین:

$$\sum_{k=۰}^{۱۰۰} i^k=۱+i+i^۲+\ldots+i^{۱۰۰}=\frac{۱\times(۱-i^{۱۰۱})}{۱-i}=\frac{۱-i}{۱-i}=۱\ \Rightarrow x+iy=۱\ \Rightarrow x=۱\ ,\ y=۰$$

یادآوری: مجموع جملات سری هندسی $\sum_{k=۱}^{n} aq^{n-۱}$ از فرمول روبرو بدست می‌آید: $S=\frac{a(۱-q^n)}{۱-q}$

روش دوم:

$$\sum_{k=۰}^{۱۰۰} i^k=۱+i+i^۲+i^۳+i^۴+\ldots+i^{۱۰۰}=۱+\underbrace{(i+i^۳)}_{۰}+\underbrace{(i^۲+i^۴)}_{۰}+\ldots+\underbrace{(i^{۹۷}+i^{۹۹})}_{۰}+\underbrace{(i^{۹۸}+i^{۱۰۰})}_{۰}=۱$$

$$\Rightarrow x+iy=۱\ \Rightarrow x=۱\ ,\ y=۰$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مدرسان شریف

فصل چهاردهم

« معادلات دیفرانسیل »

مثال۱: با فرض آنکه تابع f از نقطهٔ (۰،۱) می‌گذرد و داشته باشیم: $e^x.dy + ye^x.dx + x^۲dy + ۲xy.dx = ۰$ مقدار y به ازای $x = ۱$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ سراسری ۷۵)

۱) $-(۱+e)$ ۲) $۱+e$ ۳) $-\frac{۱}{۱+e}$ ۴) $\frac{۱}{۱+e}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا معادله دیفرانسیل داده شده را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$(ye^x + ۲xy)dx + (e^x + x^۲)dy = ۰$$

معادله دیفرانسل فوق کامل است زیرا:

$$\frac{\partial}{\partial y}(ye^x + ۲xy) = e^x + ۲x \ , \ \frac{\partial}{\partial x}(e^x + x^۲) = e^x + ۲x$$

بنابراین جواب معادله دیفرانسیل کامل فوق بصورت زیر است:

$$\int \underbrace{(۰ \times e^x + ۲x \times ۰)dx}_{\text{صفر}} + \int (e^x + x^۲)dy = c \ \Rightarrow ye^x + yx^۲ = c$$

با توجه به اینکه جواب معادله دیفرانسیل از نقطه (۰،۱) عبور می‌کند، با جایگزینی $x = ۰$ و $y = ۱$ در جواب بدست آمده نتیجه می‌شود:

$$۱ \times e^۰ + ۱ \times ۰^۲ = c \ \Rightarrow c = ۱ \ \Rightarrow ye^x + yx^۲ = ۱$$

حال با جایگزینی $x = ۱$ در رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$ye + y = ۱ \ \Rightarrow y(۱+e) = ۱ \ \Rightarrow y = \frac{۱}{۱+e}$$

یادآوری: معادله دیفرانسیل $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = ۰$ را کامل می‌گوییم اگر $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ باشد. و جواب این معادله دیفرانسیل را می‌توان از فرمول مقابل بدست آورد: $\int P(x,۰)dx + \int Q(x,y)dy = c$

مثال۲: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - y = ۰$ عبارت است از: (مدیریت صنعتی ـ آزاد ۸۱)

۱) $y = c_۱e^{-x} + c_۲e^x$ ۲) $y = c_۱e^{-x} + c_۲xe^x$ ۳) $y = c_۱xe^{-x} + c_۲e^x$ ۴) $y = (c_۱x + c_۲x^۲)e^x$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت است.

$$y'' - y = ۰ \ \Rightarrow \lambda^۲ - ۱ = ۰ \ \Rightarrow \lambda = \pm ۱ \ \Rightarrow y = c_۱e^x + c_۲e^{-x}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۳: اگر $\frac{dx}{dt}+۵x=۰$ و $x(۱)=۱$ باشند مقدار $x(۰)$ کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۵)

۱) $e^{-۵}$ ۲) صفر ۳) $e^{۵}$ ۴) ۱-

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$\frac{dx}{dt}=-۵x \Rightarrow \frac{dx}{x}=-۵dt \Rightarrow Lnx=-۵t+c$$

از فرض $x(۱)=۱$ نتیجه می‌شود :

$$Ln۱=-۵\times ۱+c \Rightarrow c=۵ \Rightarrow Lnx=-۵t+۵ \Rightarrow x=e^{۵-۵t} \Rightarrow x(۰)=e^{۵}$$

مثال ۴: جواب عمومی معادله $xydy+(y^{۲}+۱)dx=۰$ کدام گزینه می‌باشد. (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۵)

۱) $\sqrt{y^{۲}+۱}+Lnx=c$ ۲) $x\sqrt{y^{۲}+۱}=c$ ۳) $\frac{۱}{۲}Arctgy+Lnx=c$ ۴) $y+\frac{۱}{y}+Lnx=c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$xydy+(y^{۲}+۱)dx=۰ \Rightarrow \frac{ydy}{y^{۲}+۱}=\frac{-dx}{x} \Rightarrow \frac{۱}{۲}Ln(y^{۲}+۱)=-Lnx+c \Rightarrow Ln\sqrt{y^{۲}+۱}+Lnx=c$$

$$\Rightarrow Lnx\sqrt{y^{۲}+۱}=c \Rightarrow x\sqrt{y^{۲}+۱}=e^{c}=c'$$

مثال ۵: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y}=۰$ کدام گزینه است؟ (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۶)

۱) $x^{۲}-y^{۲}=c$ ۲) $x^{۲}+y^{۲}=c$ ۳) $Ln(xy)=c$ ۴) $e^{xy}=c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$ydy=-xdx \Rightarrow \frac{y^{۲}}{۲}=\frac{-x^{۲}}{۲}+c_{۱} \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}=۲c_{۱}=c$$

مثال ۶: اگر $\frac{dx}{dt}-۲xt=۰$ در $x(۰)=۱$ باشد در $x(۱)$ برابر است با: (علوم اقتصادی ـ آزاد ۸۶)

۱) $\sqrt{e}$ ۲) $e^{۲}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{e}}$ ۴) e

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$\frac{dx}{x}=۲tdt \Rightarrow \ln x=t^{۲}+c \Rightarrow x=e^{t^{۲}+c}$$

با توجه به شرط $x(۰)=۱$، مقدار $c=۰$ به دست می‌آید.

$$x=e^{t^{۲}} \Rightarrow x(۱)=e$$

www.modaresanesharif.ac.ir