جواب دالامبر معادله موج

یک روش دیگر برای حل معادله موج، خصوصاً در مسائلی که مقدار جواب در نقطه‌ای خاص سؤال می‌شود، روش دالامبر است. ابتدا معادله‌ی موج متناهی را بررسی می‌کنیم. برای معادله موج $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ در صورتی که $u(x,0) = f(x)$ و $u_t(x,0) = g(x)$، در فاصله $0 \le x \le L$ با شرط مرزی همگن (شرایط مرزی صفر) جواب دالامبر معادله موج به صورت زیر است:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

معمولاً در محاسبه‌ی فوق به دوره تناوب توابع f و g و همچنین به دانستن نوع گسترش توابع f و g نیاز پیدا می‌کنیم. با توجه به شرایط مرزی نوع گسترش و دوره تناوب فرق می‌کند. بنابراین ابتدا این موارد را آموزش می‌دهیم.

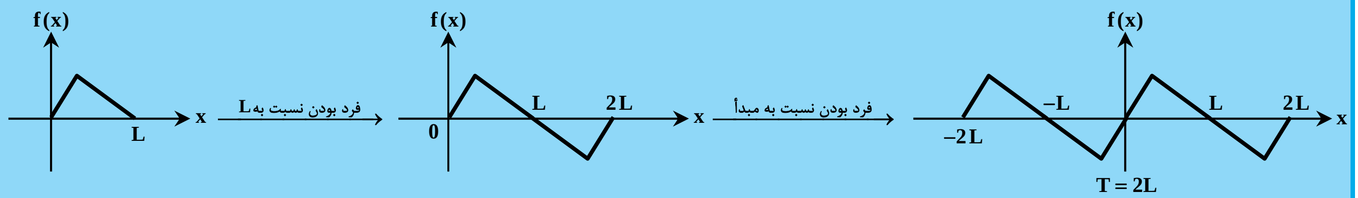
نوع گسترش توابع f و g با توجه به شرایط مرزی معادله موج: با توجه به نوع شرایط مرزی، دوره تناوب و گسترش توابع f و g فرق می‌کند که نکات زیر به خوبی این موضوع را روشن می‌کند:

۱) اگر در $x = 0$ یا $x = L$، شرایط روی u باشد، باید f و g را نسبت به $x = 0$ یا $x = L$ گسترش فرد دهیم.

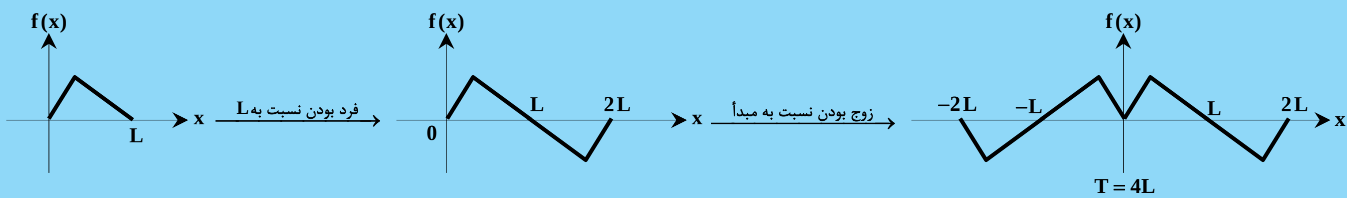
۲) اگر در $x = 0$ یا $x = L$ شرایط روی u_x باشد، باید f و g را نسبت به $x = 0$ یا $x = L$ گسترش زوج دهیم.

۳) در حالتی که هر دوی شرایط مرزی بر حسب u و یا هر دوی آن‌ها بر حسب u_x باشند، دوره تناوب $2L$ در نظر گرفته می‌شود. اما اگر شرایط مرزی یکی بر حسب u و دیگری بر حسب u_x داده شود، دوره تناوب برابر $4L$ در نظر گرفته می‌شود.

در واقع هرگاه هر دو شرط مرزی روی u باشند، توابع f و g نسبت به $x = 0$ و نسبت به $x = L$ فرد هستند؛ بنابراین نمودارهای f و g در بازه‌ی $[L, 2L]$ قرینه‌ی نمودارهای خود در بازه‌ی $[0, L]$ است. همچنین نمودار g و f را در بازه‌ی $[-2L, 0]$ قرینه‌ی نمودار آن در فاصله‌ی $[0, 2L]$ در نظر می‌گیریم تا یک دوره تناوب کامل حاصل شود. پس دوره‌ی تناوب $T = 2L$ است (مطابق شکل زیر). همین حالت زمانی که هر دو شرط مرزی روی u_x باشند رخ می‌دهد و باعث می‌شود دوره تناوب $T = 2L$ باشد.



اما اگر دو شرط مرزی متفاوت داشته باشیم، مثلاً اگر شرایط مرزی به‌صورت $u_x(0,t) = u(L,t) = 0$ باشد، چون در $x = 0$ شرایط مرزی روی u_x و در $x = L$ شرایط مرزی روی u است، لذا گسترش تابع f نسبت به $x = 0$ زوج و نسبت به $x = L$ فرد است. ابتدا نمودار f در بازه $[0, L]$ رسم می‌شود؛ سپس نمودار f در فاصله‌ی $[L, 2L]$ با توجه به فرد بودن f نسبت به نقطه‌ی $x = L$، قرینه‌ی آن است. در نهایت نمودار f در بازه‌ی $[-2L, 0]$ با استفاده از زوج بودن f در $x = 0$ مشخص می‌شود.



اگر به نمودار دقت کنید دیگر دوره‌ی تناوب $2L$ نیست بلکه $T = 4L$ است.

۴) اگر $0 < x < \infty$، باشد، آنگاه با توجه به شرط مرزی در $x = 0$، توابع f و g را گسترش زوج یا فرد می‌دهیم. اگر $u(0,t) = 0$ باشد، توابع f و g را گسترش فرد و اگر $u_x(0,t) = 0$ باشد، توابع f و g را گسترش زوج می‌دهیم.

۵) در مسأله‌ی موج نامتناهی، چون $-\infty < x < +\infty$ است، لذا نیازی به گسترش f و g نداریم و جواب دالامبر برای تمام x ها صادق است.

روش جبری: در حل دالامبر معادله‌ی موج می‌توانیم از روش دیگری که من آن را روش جبری می‌نامم نیز استفاده کنیم (لازم به ذکر است که در طول سال‌های گذشته برای اولین بار در حوزه کتاب‌های کمک آموزشی در کشور، بنده این روش را مدون و شیوه‌های به کار بردن آن را ارائه کردم).

جواب دالامبر معادله‌ی موج در این روش به صورت زیر قابل بیان است که در این معادله $G(x) = \int_0^x g(x)dx$ است.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f^*(x+ct) + f^*(x-ct)] + \frac{1}{2c}[G^*(x+ct) - G^*(x-ct)]$$

نمادهای f^* و G^* برای گسترش توابع f و G استفاده شده‌اند. مقدار f^* در بازه‌ی $0 < x < L$ برابر با خودِ $f(x)$ است و در سایر نقاط با توجه به گسترش زوج یا فرد f به دست می‌آید، همین وضعیت را بین G^* و G داریم. در این کتاب بیشتر از روش جبری مسائل را حل می‌کنیم، چون اگر به آن مسلط شوید، بسیار آسان‌تر و قابل فهم‌تر است.

تذکر مهم: روش جبری در مسائلی که **هر دو شرط مرزی بر روی u_x است،** فقط در شرایطی خاص منجر به جواب صحیح می‌شود و بنابراین در برخی مسائل که هر دو شرط مرزی روی u_x است، باید از همان روش انتگرال کمک بگیریم. اما در سایر شرایط مرزی می‌توانید با استفاده از روش جبری سریع‌تر به جواب برسید و دیگر لازم نیست از روش انتگرال استفاده کنید.

دستورالعمل حل دالامبر معادله موج به روش جبری

در این قسمت روش حل مسائلی را شرح می‌دهیم که جواب معادله موج همگن و متناهی در نقطه‌ای خاص سؤال شده است.

گام اول: ابتدا فرمول $u(x,t)$ را برحسب f^* و G^* تشکیل داده و به جای x، t و c مقدار موردنظر مسأله را قرار دهید. توجه داشته باشید اگر در مسأله‌ای مثلاً $g(x)$ صفر بود، دیگر نیازی نیست کروشه دوم (کروشه شامل G^*) را بنویسید.

گام دوم: حالا باید مقادیر $f^*()$ و $G^*()$ را حساب کنیم. (دقت کنید عمداً داخل پرانتزها چیزی ننوشتم، چون برای هر مسأله بسته به مقادیر x، t و c فرق می‌کند).
برای این منظور، ابتدا دقت کنید که عدد داخل پرانتزها در بازه‌ای که در صورت مسأله برای x تعیین شده قرار دارد یا نه؟ بنابراین دو حالت زیر را داریم:

الف) عدد داخل پرانتزها درون بازه قرار دارد: اگر این عدد در بازه قرار داشت، بـه راحتـی مقـادیر $f^*()$ و $G^*()$ را تعیـین کنیـد (در ایـن حالـت بـه جای f^* و G^* می‌توانید f و G را لحاظ کنید).

ب) عدد داخل پرانتزها درون بازه قرار ندارد: اگر عدد داخل پرانتز در بازه داده شده برای x قرار نداشت چه‌کار کنیم؟ خُب اینجاست کـه ابتـدا بایـد از دوره تناوب کمک بگیریم؛ در واقع با اضافه یا کم کردن دوره تناوب یا مضربی از دوره تناوب کاری می‌کنیم که عدد داخل پرانتز سر به‌راه شـود! یعنـی ایـن عدد درون بازه داده شده برای x در صورت سؤال قرار گیرد. توجه داشته باشید که معمولاً در این حالت دوره تناوب به تنهایی نمی‌تواند عبارت داخل پرانتز را سر به راه کند؛ و باید از نوع گسترش f^* و g^* هم برای این منظور کمک بگیریم. دقت داشته باشید که در روش جبری منظور از گسترش فرد ایـن اسـت که $f^*(-a)=-f^*(a)$ و منظور از گسترش زوج f این است که $f^*(a)=f^*(-a)$ و این‌ها همان تعاریفی هستند که برای توابع زوج و فرد از دبیرستان بلد هستیم! (این تعریف زوج یا فرد بودن برای تابع G^* هم صادق است).

تذکر بسیار مهم: حواستان باشد همان‌طور که گفتیم، هر جا شرط مرزی روی u بود، باید f و g را گسترش فرد و وقتی هر دو شرط مرزی روی u_x بـود، باید f و g را گسترش زوج دهیم. این موضوع برای حفظ کردن راحت است و به ذهن بسپارید؛ فقط دقت داشته باشید که برای G^* ماجرا بـرعکس اسـت، یعنـی اگر g قرار است گسترش فرد یابد، باید G^* را تابعی زوج در نظر بگیرید و اگر g قرار است گسترش زوج یابد، باید G^* را تابعی فرد در نظر بگیرید.

مثال ۸: از روی معادله موج زیر مقدار $u(1,3)$ کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}\ ,\ 0<x<4\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=0\ ,\ u_t(x,0)=x(4-x)\ ,\ 0\le x\le 4 \\ u(0,t)=u(4,t)=0 \end{cases}$$

۱) $-\frac{22}{3}$ ۲) $-\frac{11}{6}$ ۳) $-\frac{11}{3}$ ۴) $\frac{33}{12}$

پاسخ: گزینه «۲» اولاً توجه کنید که در این سؤال $f(x)$ برابر با صفر اسـت و لـذا نوشـتن کروشـه اول نیـازی نیسـت و فقـط کروشـه شـامل G^* را می‌نویسیم. از طرفی در این سؤال $c=2$، $x=1$ و $t=3$ است. لذا داریم:

$$u(1,3)=\frac{1}{2\times 2}[G^*(1+2\times 3)-G^*(1-2\times 3)]=\frac{1}{4}[G^*(7)-G^*(-5)]$$

خُب، همان‌طور که می‌بینید اعداد داخل پرانتز $\underline{\underline{-5}}$ و $\underline{7}$ هستند؛ اما ضابطه‌ی g در بازه $[0,4]$ اعتبار دارد. پس نمـی‌توانیم مسـتقیم از جایگـذاری اسـتفاده کنیم. باید این اعداد را داخل بـازه $[0,4]$ بیـاوریم. ابتـدا سـراغ دوره تنـاوب مـی‌رویـم؛ چـون هـر دو شـرط مـرزی روی u اسـت، پـس دوره تنـاوب برابـر با $T=2\times 4=8$ است. می‌توانیم دوره تناوب را به عدد داخل پرانتز اضافه و یا از آن کم کنیم و حاصل تغییری نخواهد کرد، لذا داریم:

$$u(1,3)=\frac{1}{4}[G^*(7-8)-G^*(-5+8)]=\frac{1}{4}[G^*(-1)-G^*(3)]$$

عدد داخل پرانتز دوم، $\underline{\underline{3}}$ شد، پس با آن مشکلی نداریم (چون داخل بازه $[0,4]$ قرار دارد) اما عدد داخـل پرانتـز اول $\underline{-1}$ اسـت، پـس هنـوز مشـکل داریـم. اینجاست که باید به گسترش G^* توجه کنیم؛ چون هر دو شرط مرزی روی u است، پس گسترش g فرد و لذا گسترش G زوج است و این یعنی می‌توانیم بگوییم $G^*(-1)=G^*(1)$، بنابراین رابطه به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$u(1,3)=\frac{1}{4}[G^*(1)-G^*(3)]$$

همان‌طور که می‌بینید، هر دو عدد داخل پرانتز درون بازه $[0,4]$ قرار دارند، بنابراین مـی‌تـوانیم بـا خیـال راحـت از ضـابطه‌ی $G(x)$ اسـتفاده کنـیم؛ ابتـدا ضابطه‌ی $G(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$G(x)=\int_0^x x(4-x)dx=[\frac{4x^2}{2}-\frac{x^3}{3}]_0^x=2x^2-\frac{x^3}{3}$$

$$u(1,3)=\frac{1}{4}[G(1)-G(3)]=\frac{1}{4}[(2\times 1^2-\frac{1^3}{3})-(2\times 3^2-\frac{3^3}{3})]=\frac{1}{4}(\frac{5}{3}-9)=\frac{1}{4}(\frac{-22}{3})=-\frac{11}{6}$$

مثال ۹: در معادله موج $\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}\ ,\ 0<x<17\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=x\ ,\ u_t(x,0)=6x^2\ ,\ 0\le x\le 17 \\ u(0,t)=u(17,t)=0\ ,\ t\ge 0 \end{cases}$، مقدار $u(5,19)$ کدام است؟

۱) ۳۷۰ ۲) ۳۶۹/۵ ۳) ۳۶۸ ۴) ۳۶۹

پاسخ: گزینه «۴» در گام اول به جای x عدد ۵، به جای t عدد ۱۹ و به جای c عدد ۲ را قرار می‌دهیم:

$$u(5,19)=\frac{1}{2}[f^*(5+2\times19)+f^*(5-2\times19)]+\frac{1}{2\times2}[G^*(5+2\times19)-G^*(5-2\times19)]=\frac{1}{2}[f^*(43)+f^*(-33)]+\frac{1}{4}[G^*(43)-G^*(-33)]$$

حالا خوب دقت کنید که اعداد ۴۳ و ۳۳− هیچ‌کدام در بازه $0<x<17$ قرار ندارند. اینجاست که باید دست به دامن دوره تناوب شویم! چون هر دو شرط روی u است، بنابراین $T=2L=2\times17=34$ است، پس می‌توانیم عبارت را با اضافه و کم کردن دوره تناوب به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\frac{1}{2}[f^*(43-34)+f^*(-33+34)]+\frac{1}{4}[G^*(43-34)-G^*(-33+34)]=\frac{1}{2}[f^*(9)+f^*(1)]+\frac{1}{4}[G^*(9)-G^*(1)]=\frac{1}{2}[f(9)+f(1)]+\frac{1}{4}[G(9)-G(1)]$$

حالا دقت کنید که $f(x)=x$ و $G(x)=\int_0^x 6x^2dx=2x^3$، لذا داریم: $u(5,19)=\frac{1}{2}(9+1)+\frac{1}{4}(2\times(9)^3-2\times1)=5+\frac{1}{2}(729-1)=5+364=369$

همان‌طور که دیدید در این مسأله نیازی به استفاده از نوع گسترش f^* و G^* نداشتیم! ولی همیشه این‌طور نیست و در بیش از ۷۰ درصد سؤالات آزمون‌ها نیاز به گسترش توابع f^* و G^* وجود دارد.

مثال ۱۰: با استفاده از روش دالامبر مقدار $u(23,12)$ برای مسأله زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt}=16u_{xx}\quad ;\quad 0<x<29\ ,\ t>0 \\ u(0,t)=u(29,t)=0 \\ u(x,0)=x\ ,\ u_t(x,0)=3x^2+4x \end{cases}$$

۱) ۱۸۰۴/۵−
۲) ۱۷۹۲/۵−
۳) ۱۷۹۸/۵
۴) ۱۷۹۸/۵−

پاسخ: گزینه «۴» در این سؤال $c=4$، $x=23$ و $t=12$ می‌باشد، لذا داریم:

$$u(23,12)=\frac{1}{2}[f^*(23+4\times12)+f^*(23-4\times12)]+\frac{1}{2\times4}[G^*(23+4\times12)-G^*(23-4\times12)]=\frac{1}{2}[f^*(71)+f^*(-25)]+\frac{1}{8}[G^*(71)-G^*(-25)]$$

چون هر دو شرط مرزی روی u است، بنابراین $T=2\times29=58$. حالا با اضافه و کم کردن دوره تناوب در موارد موردنیاز داریم:

$$u(23,12)=\frac{1}{2}[f^*(71-58)+f^*(-25)]+\frac{1}{8}[G^*(71-58)-G^*(-25)]=\frac{1}{2}[f^*(13)+f^*(-25)]+\frac{1}{8}[G^*(13)-G^*(-25)]$$

مقادیر $f^*(13)$ و $G^*(13)$ به راحتی با توجه به این که عدد ۱۳ در بازه $0<x<29$ قرار دارد، حساب می‌شوند. اما با توجه به گسترش فرد تابع f^*، مقدار $f^*(-25)$ برابر $-f^*(25)$ نوشته می‌شود، تا بتوان آن را نیز حساب کرد، از طرفی چون G^* دارای گسترش زوج می‌باشد، لذا $G^*(-25)=G^*(25)$، پس داریم:

$$u(23,12)=\frac{1}{2}[f^*(13)-f(25)]+\frac{1}{8}[G^*(13)-G(25)]$$

از طرفی $G(x)=\int_0^x g(x)dx=\int_0^x(3x^2+4x)dx=x^3+2x^2$ و $f(x)=x$، بنابراین داریم:

$$u(23,12)=\frac{1}{2}(13-25)+\frac{1}{8}[(13)^3+2(13)^2-(25)^3-2\times(25)^2]=-6+\frac{1}{8}[2197+338-15625-1250]=-6-1792/5=-1798/5$$

مثال ۱۱: برای مسأله مقدار اولیه ـ کرانه‌ای زیر، مقدار $u(\frac{L}{3}\ و\ \frac{11L}{4})$ را پیدا کنید. (از سؤالات ریاضی مهندسی دانشگاه Berkeley)

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\ ,\ 0<x<L\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=x(L-x)\ ,\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=0=u(L,t)\ ,\ t>0 \end{cases}$$

۱) $-\frac{23L^2}{144}$ ۲) $-\frac{23L^2}{72}$
۳) $\frac{23L^2}{72}$ ۴) $\frac{23L^2}{144}$

پاسخ: گزینه «۱» در این سؤال $x=\frac{L}{3}$، $t=\frac{11L}{4}$ و $c=1$ است، همچنین $g(x)=0$، پس نوشتن فرمول برای G^* لازم نیست.

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-ct)+f(x+ct)]=\frac{1}{2}[f(\frac{L}{3}-\frac{11L}{4})+f(\frac{L}{3}+\frac{11L}{4})]=\frac{1}{2}[f(\frac{-29}{12}L)+f(\frac{37L}{12})]$$

از طرفی $u(x,0)=x(L-x)$ فقط در بازه $0\le x\le L$ داده شده است. در صورتی که $\frac{-29L}{12}<0$ و $\frac{37L}{12}>L$ می‌باشند، بنابراین باید از دوره تناوب کمک بگیریم. با توجه به اینکه هر دو شرط مرزی روی u است، پس $T=2L$، از طرفی با توجه به شرایط مرزی باید تابع $f(x)=x(L-x)$ را که فقط در بازه $0\le x\le L$ تعریف شده، گسترش فرد بدهیم:

$$\left.\begin{aligned}&f(\frac{-29L}{12})=-f(\frac{29L}{12})=-f(\underbrace{2L}_{\text{طول دوره تناوب}}+\frac{5L}{12})=-f(\frac{5L}{12})\\&f(\frac{37L}{12})=f(\frac{37L}{12}-\underbrace{4L}_{\text{مضرب صحیحی از طول دوره تناوب}})=f(\frac{-11L}{12})=-f(\frac{11L}{12})\end{aligned}\right\}\Rightarrow u(\frac{L}{3},\frac{11L}{4})=\frac{1}{2}[-(\frac{5L}{12}(L-\frac{5L}{12}))-(\frac{11L}{12}(L-\frac{11L}{12}))]=\frac{1}{2}[\frac{-35L^2}{144}-\frac{11L^2}{144}]=\frac{-23L^2}{144}$$

مثال ۱۲: با توجه به معادله موج زیر، مقدار $u(\frac{3}{8},3)$ کدام است؟

$$\begin{cases}u_{tt}=u_{xx}\ ,\quad 0<x<1\ ,\ t>0\\u(x,0)=(1-x)^3\quad ,\ 0\le x\le 1\\u_t(x,0)=(1-x)^2\quad ,\ 0\le x\le 1\\u_x(0,t)=u(1,t)=0\end{cases}$$

۱) $-\frac{9}{512}$ ۲) $-\frac{485}{1536}$

۳) $\frac{9}{512}$ ۴) $-\frac{485}{768}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به اینکه $x=\frac{3}{8}$، $t=3$ و $c=1$ لذا داریم:

$$u(\frac{3}{8},3)=\frac{1}{2}[f^*(\frac{3}{8}+3\times1)+f^*(\frac{3}{8}-3\times1)]+\frac{1}{2\times1}[G^*(\frac{3}{8}+3\times1)-G^*(\frac{3}{8}-3\times1)]$$

حالا چون اعداد داخل پرانتز در بازه $(0,1)$ قرار ندارند، لذا از دوره تناوب کمک می‌گیریم؛ چون یک شرط روی u و شرط دیگر روی u_x است، بنابراین دوره تناوب برابر با $4L$ یعنی $T=4\times1=4$ است، پس داریم:

$$u(\frac{3}{8},3)=\frac{1}{2}[f^*(\frac{3}{8}+3-4)+f^*(\frac{3}{8}-3+4)]+\frac{1}{2}[G^*(\frac{3}{8}+3-4)-G^*(\frac{3}{8}-3+4)]$$

$$\Rightarrow u(\frac{3}{8},3)=\frac{1}{2}[f^*(\frac{3}{8}-1)+f^*(\frac{3}{8}+1)]+\frac{1}{2}[G^*(\frac{3}{8}-1)-G^*(\frac{3}{8}+1)]=\frac{1}{2}[f^*(-\frac{5}{8})+f^*(1+\frac{3}{8})]+\frac{1}{2}[G^*(-\frac{5}{8})-G^*(1+\frac{3}{8})]$$

حالا خوب دقت کنید؛ ابتدا تکلیف $f^*(-\frac{5}{8})$ و $G^*(-\frac{5}{8})$ را معلوم می‌کنیم؛ چون شرط مرزی در $x=0$ روی u_x است، پس f و g هر دو باید نسبت به $x=0$ گسترش زوج یابند. بنابراین f^* گسترش زوج و G^* گسترش فرد (برعکس g) نسبت به $x=0$ دارد:

$$f^*(-\frac{5}{8})=f^*(\frac{5}{8})\ \text{و}\ G^*(-\frac{5}{8})=-G^*(\frac{5}{8})$$

خُب مشکل این دو تا حل شد؛ اما برای $f^*(1+\frac{3}{8})$ و $G^*(1+\frac{3}{8})$ چه تدبیری داریم؟ دقت کنید در مسائل قبل نیازی به گسترش نسبت به $x=L$ (برای این سؤال $x=1$) نداشتیم و اکثر گسترش‌ها نسبت به $x=0$ بود. اما این سؤال کمی فرق می‌کند؛ چون نتوانستیم با دوره تناوب مقادیر داخل پرانتز را به بازه $(0,1)$ بیاوریم. بنابراین از گسترش نسبت به $x=1$ هم باید کمک بگیریم. چون در $x=1$ شرط مرزی روی u است، پس f^* نسبت به $x=1$ گسترش فرد و G^* نسبت به $x=1$ گسترش زوج دارد. لذا داریم:

$$f^*(1+\frac{3}{8})=-f^*(1-\frac{3}{8})=-f^*(\frac{5}{8})\quad,\quad G^*(1+\frac{3}{8})=G^*(1-\frac{3}{8})=G^*(\frac{5}{8})$$

یادآوری: وقتی تابعی مانند $h(x)$ نسبت به خط $x=\alpha$ فرد باشد، $h(\alpha+x)=-h(\alpha-x)$ و اگر نسبت به خط $x=\alpha$ زوج باشد $h(\alpha+x)=h(\alpha-x)$ می‌باشد.

حالا برگردیم به ادامه‌ی حل سؤال؛ با جایگزین کردن مقادیر به‌دست آمده در رابطه‌ی * داریم:

$$u(\frac{3}{8},3)=\frac{1}{2}[f^*(-\frac{5}{8})-f^*(\frac{5}{8})]+\frac{1}{2}[G^*(-\frac{5}{8})-G^*(\frac{5}{8})]$$

حالا با توجه به اینکه f^* نسبت به $x=0$ گسترش زوج و G^* نسبت به $x=0$ گسترش فرد دارد، لذا داریم:

$$f^*(-\frac{5}{8})=f^*(\frac{5}{8})\ \text{و}\ G^*(-\frac{5}{8})=-G^*(\frac{5}{8})\Rightarrow u(\frac{3}{8},3)=\frac{1}{2}[f^*(\frac{5}{8})-f^*(\frac{5}{8})]+\frac{1}{2}[-G^*(\frac{5}{8})-G^*(\frac{5}{8})]=\frac{1}{2}[-2G^*(\frac{5}{8})]=-G^*(\frac{5}{8})$$

حالا کافی است $-G^*(\frac{5}{8})$ حساب شود:

$$g(x)=(1-x)^2\Rightarrow G(x)=\int_0^x(1-x)^2dx=[-\frac{1}{3}(1-x)^3]_0^x=-\frac{1}{3}(1-x)^3+\frac{1}{3}$$

بنابراین داریم:

$$u(\frac{3}{8},3)=-G^*(\frac{5}{8})=\frac{1}{3}(1-\frac{5}{8})^3-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(\frac{3}{8})^3-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}[\frac{27}{512}-1]=-\frac{485}{1536}$$

توجه مهم: در بسیاری از کتاب‌ها ضابطه‌ی $G(x)$ به صورت $G(x)=\int g(x)dx$ نوشته می‌شود؛ یعنی از $g(x)$ انتگرال گرفته و ضابطه $G(x)$ تعیین می‌شود. اما این موضوع در برخی از مسائل به **غلط علمی** منجر می‌شود، برای همین ما در این کتاب انتگرال معین $g(x)$ را حساب می‌کنیم؛ یعنی می‌نویسیم: $G(x)=\int_0^x g(x)dx$. مثلاً در این مثال اگر $G(x)=\int(1-x)^2dx$ می‌نوشتیم به ضابطه‌ی $G(x)=-\frac{1}{3}(1-x)^3$ می‌رسیدیم (یعنی جمله‌ی دوم یا همان عدد $\frac{1}{3}$ وجود نداشت) که منجر به رسیدن به جواب غلط (یعنی گزینه ۳) می‌شد.

مثال ۱۳: اگر تابع $u(x,t)$ جواب مسأله $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0\ ,\ 0<x<1\ ,\ t>0\\ u(x,0)=0\ ,\ u_t(x,0)=x(1-x)\ ,\ 0\le x\le 1\\ u_x(0,t)=u(1,t)=0\ ,\ t\ge 0\end{cases}$ باشد، آنگاه $u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{24}$ ۲) صفر ۳) $-\frac{1}{24}$ ۴) $\frac{1}{8}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» سؤال را به دو روش، یکبار با استفاده از فرمول شامل انتگرال و بار دوم با استفاده از روش جبری حل می‌کنیم:

روش اول: با توجه به اینکه $f(x)=0$ و $c=1$ است، لذا جواب دالامبر معادله موج به صورت زیر است:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(s)ds\ \Rightarrow u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}g(s)ds=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{1}g(s)ds$$

توجه شود تابع $g(x)$ در فاصله $0\le x\le 1$ به صورت $x(1-x)$ تعریف شده است و در این انتگرال به مقدار تابع $g(x)$ در فاصله $[-\frac{1}{2},1]$ نیاز داریم. پس باید با انجام عملیاتی به هدف خود برسیم. در واقع مشکل ما نداشتن ضابطه‌ی $g(x)$ در بازه $[-\frac{1}{2},0)$ است؛ پس برای شروع، بازه انتگرال‌گیری را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم:

$$u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}g(s)ds+\frac{1}{2}\int_0^1 g(s)ds$$

تکلیف انتگرال دوم که معلوم است؛ چون بازه ۰ تا ۱ است، می‌توانیم به جای g همان ضابطه‌ی آن یعنی $x(1-x)$ را قرار دهیم؛ اما برای رفع مشکل انتگرال اول از خاصیت زوج بودن نسبت به $x=0$ استفاده می‌کنیم (دقت کنید شرط مرزی در $x=0$ روی u_x است، پس g گسترش زوج نسبت به $x=0$ را داراست) اما وقتی تابعی مانند $g(s)$ نسبت به $x=0$ گسترش زوج داشته باشد، همواره رابطه‌ی $\int_0^a g(s)ds=\int_{-a}^0 g(s)ds$ را خواهیم داشت، پس انتگرال اول برابر با $\int_0^{\frac{1}{2}}g(s)ds$ است، پس داریم:

$$u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}g(s)ds+\frac{1}{2}\int_0^1 g(s)ds$$

خُب حالا می‌توانیم با خیال راحت به جای g ضابطه‌ی آن یعنی $x(1-x)$ را در هر دو انتگرال جایگزین کنیم:

$$u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\frac{1}{2}[\int_0^{\frac{1}{2}}x(1-x)dx+\int_0^1 x(1-x)dx]=\frac{1}{2}[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}]_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}]_0^1=\frac{1}{2}[\frac{(\frac{1}{2})^2}{2}-\frac{(\frac{1}{2})^3}{3}]+\frac{1}{2}[\frac{(1)^2}{2}-\frac{(1)^3}{3}]=\frac{1}{2}[\frac{1}{8}-\frac{1}{24}]+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})$$

$$\Rightarrow u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\frac{1}{2}(\frac{3-1}{24})+\frac{1}{2}(\frac{3-2}{6})=\frac{1}{24}+\frac{1}{12}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

روش دوم: ابتدا فرمول را نوشته و به جای x عدد $\frac{1}{4}$ و به جای t عدد $\frac{3}{4}$ قرار می‌دهیم، دقت کنید که $f(x)=0$ و بنابراین نوشتن آن در فرمول لازم نیست.

$$u(x,t)=\frac{1}{2\times 1}[G^*(x+ct)-G^*(x-ct)]\ \Rightarrow u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\frac{1}{2}[G^*(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})-G^*(\frac{1}{4}-\frac{3}{4})]$$

$$\Rightarrow u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\frac{1}{2}[G^*(1)-G^*(-\frac{1}{2})]=\frac{1}{2}[G^*(1)+G^*(\frac{1}{2})]=\frac{1}{2}[(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{8}-\frac{1}{24})]=\frac{1}{8}$$

توجه کنید که $G(x)=\int_0^x g(x)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$، از طرفی با توجه به این که شرایط مرزی در $x=0$، روی u_x است، لذا g گسترش زوج نسبت به $x=0$ را دارد و لذا $G^*(x)$ گسترش فرد نسبت به $x=0$ را داراست. لذا در محاسبات فوق $G(\frac{1}{2})=-G(-\frac{1}{2})$ در نظر گرفته شده است.

توضیح مهم: دقت کنید در برخی مسائل مانند این مثال، باید مقادیر G^* و f^* در نقاط ابتدا و انتهای بازه داده شده برای x حساب شود. در اینگونه مسائل اگر f^* و G^* پیوسته بودند، مشکلی ایجاد نمی‌شود و با جایگذاری به جواب می‌رسیم (مانند همین سؤال که $G^*(1)$ را حساب کردیم). ولی اگر f^* و یا G^* ناپیوسته بودند، باید میانگین حد چپ و حد راست تابع ناپیوسته در نقطه‌ی مورد نظر حساب شود.

تذکر مهم: همان‌طور که قبلاً گفتیم، روش جبری دالامبر، در تمامی مسائل غیر از حالتی که هر دو شرط مرزی روی u_x باشند، قابل استفاده است. البته اگر هر دو شرط مرزی روی u_x بود و مسأله جزو دو حالت زیر بود، هنوز هم می‌توان از روش جبری کمک گرفت؛ اما اگر مسأله جزو دو حالت زیر نبود، ناگزیر باید از فرمول شامل انتگرال برای محاسبه‌ی قسمت دوم فرمول دالامبر استفاده کنید.

الف) در مسائلی که $g(x)=k$ تابع ثابت است، باز هم می‌توان از روش جبری مسأله را حل کرد. توجه نمایید که در این حالت با استفاده از ضابطه‌ی $G(x)=kx$ حاصل کروشه‌ی دوم همواره برابر با $G(x+ct)-G(x-ct)=2kct$ است.

ب) در مسائلی که $x+ct$ و $x-ct$ هر دو در بازه‌ی $[0,L]$ باشند یا فقط با استفاده از گسترش فرد G نسبت به $x=0$ و $x=L$ و **بدون استفاده از دوره تناوب** بتوانیم این نقاط را به بازه‌ی $[0,L]$ منتقل کنیم، باز هم روش جبری قابل استفاده است.

مثال‌های بعد، مطلب را به خوبی آموزش می‌دهند. اما قبل از آن به یادآوری زیر توجه کنید:

یادآوری: اگر تابع $g(s)$ نسبت به $x=0$ زوج باشد، آن‌گاه می‌توان گفت $\int_{-a}^{0} g(s)ds=\int_{0}^{a} g(s)ds$ و اگر تابع $g(s)$ نسبت به $x=0$ فرد باشد، آن‌گاه می‌توان گفت: $\int_{-a}^{0} g(s)ds=-\int_{0}^{a} g(s)ds$. در همین فرمول‌ها اگر همه‌ی حدود را با L جمع کنید، روابط مربوط به نقطه‌ی L را پیدا می‌کنید. یعنی اگر $g(s)$ نسبت به L زوج باشد، داریم: $\int_{L-a}^{L} g(s)ds=\int_{L}^{L+a} g(s)ds$ و اگر $g(s)$ نسبت به L فرد باشد، داریم: $\int_{L-a}^{L} g(s)ds=-\int_{L}^{L+a} g(s)ds$.

(توجه کنید که تا سال ۹۴ سؤالی که هر دو شرط مرزی روی u_x باشد، مطرح نشده است، اما احتمال طرح آن در سال‌های آینده وجود دارد.)

مثال ۱۴: در مسأله زیر، مقدار $u(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2})$ برابر با چند است؟ ($\sin 4$ برحسب رادیان می‌باشد.)

$$\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0 \quad ; \quad 0<x<\pi \\ u(x,0)=3\cos x \; ; \quad u_t(x,0)=1-\cos 4x \\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$$

۱) $\frac{1}{8}\sin(4)-\frac{1}{2}$
۲) $1-\frac{1}{4}\sin 4$
۳) $\frac{1}{8}\sin(4)+\frac{1}{2}$
۴) $-\frac{1}{8}\sin(4)+\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» در این سؤال $x=\frac{\pi}{2}$، $t=\frac{1}{2}$ و $c=2$ است، با محاسبه‌ای ساده می‌توان فهمید مقادیر $x+ct$ و $x-ct$ هر دو در بازه $[0,\pi]$ قرار دارند. پس می‌توان از روش جبری کمک گرفت. به راحتی با جایگزینی داریم:

$$u(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}[f^*(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\times 2)+f^*(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\times 2)]+\frac{1}{2\times 2}[G^*(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\times 2)-G^*(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\times 2)]=\frac{1}{2}[f^*(\frac{\pi}{2}+1)+f^*(\frac{\pi}{2}-1)]+\frac{1}{4}[G^*(\frac{\pi}{2}+1)-G^*(\frac{\pi}{2}-1)]$$

همان‌طور که می‌بینید اعداد $\frac{\pi}{2}-1$ و $\frac{\pi}{2}+1$ هر دو در بازه $(0,\pi)$ قرار دارند، بنابراین حتی لازم نیست از دوره تناوب کمک بگیریم. حالا دقت کنید که طبق صورت سؤال $f(x)=3\cos x$ و $g(x)=1-\cos 4x$، لذا $G(x)=\int_0^x g(x)dx=(x-\frac{\sin 4x}{4})$ است، بنابراین داریم:

$$u(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}[3\cos(\frac{\pi}{2}+1)+3\cos(\frac{\pi}{2}-1)]+\frac{1}{4}[(\frac{\pi}{2}+1-\frac{1}{4}\sin 4(\frac{\pi}{2}+1))-(\frac{\pi}{2}-1-\frac{1}{4}\sin 4(\frac{\pi}{2}-1))]$$

می‌دانیم که $\sin 4(\frac{\pi}{2}-1)=\sin(2\pi-4)=\sin(-4)=-\sin 4$ و $\sin 4(\frac{\pi}{2}+1)=\sin(2\pi+4)=\sin 4$ است.

همچنین $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$ و $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$. پس داریم:

$$u(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2})=\frac{3}{2}[\underbrace{-\sin 1+\sin 1}_{\text{صفر}}]+\frac{1}{2\times 2}[2-\frac{1}{2}\sin 4]=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\sin(4)$$

مثال ۱۵: مقدار $u(\frac{1}{2},2)$ برای معادله‌ی موج زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 \; ; \; 0<x<1 \; , \; t>0 \\ u(x,0)=1 \; , \; u_t(x,0)=\sin^3\pi x \; ; \; 0\le x\le 1 \\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=0 \; ; \; t\ge 0 \end{cases}$$

۱) $\frac{8}{3\pi}$
۲) $1+\frac{8}{3\pi}$
۳) $1+\frac{16}{3\pi}$
۴) ۱

پاسخ: گزینه «۲» همان‌طور که ملاحظه می‌کنید هر دو شرط مرزی روی u_x است. از طرفی $u_t(x,0)$ (یا همان $g(x)$ خودمان!) مقداری ثابت ندارد؛ از طرفی $x+ct$ و $x-ct$ نه تنها در بازه $[0,1]$ قرار ندارند، بلکه صرفاً با استفاده از گسترش هم نمی‌توان آن‌ها را به بازه $[0,1]$ آورد. بنابراین تنها راه‌حل، استفاده از فرمول شامل انتگرال است. در این سؤال $c=1$، $t=2$ و $x=\frac{1}{2}$ است، بنابراین داریم:

$$u(\frac{1}{2},2)=\frac{1}{2}[f(\frac{1}{2}+1\times 2)+f(\frac{1}{2}-1\times 2)]+\frac{1}{2\times 1}\int_{\frac{1}{2}-2}^{\frac{1}{2}+2} g(s)ds$$

اول تکلیف کروشه اول را معلوم می‌کنیم؛ چون هر دو شرط مرزی روی u_x است، پس دوره تناوب $T=2\times 1=2$ است، بنابراین داریم:

$$f(\frac{1}{2}+2)=f(\frac{1}{2}+2-2)=f(\frac{1}{2})\ ,\ f(\frac{1}{2}-2)=f(\frac{1}{2}-2+2)=f(\frac{1}{2})$$

همان‌طور که می‌بینید $f(\frac{1}{2}+2)$ با $f(\frac{1}{2}-2)$ مساوی شد؛ پس کروشه اول برابر با $2f(\frac{1}{2})$ که با ضرب آن در $\frac{1}{2}$ برابر با $f(\frac{1}{2})$ می‌شود و چون $f(x)$ همواره برابر با یک است، پس $f(\frac{1}{2})=1$، پس تا این‌جا قسمت اول برابر با ۱ است. حالا برویم سراغ به دست آوردن حاصل انتگرال! دقت کنید که انتگرال به صورت $\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} g(s)ds$ است. اما ما نمی‌دانیم g قبل از صفر و یا بعد از ۱ چه مقادیری دارد (در صورت سؤال $g(x)$ برای بازه $[0,1]$ ضابطه‌ی $\sin^3(\pi x)$ را دارد.) پس باید کاری کنیم که بازه انتگرال‌گیری همان $[0,1]$ شود. ابتدا یک بازه‌ی متقارن به صورت $[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$ از انتگرال جدا می‌کنیم؛ این کار برای خلاصی موقت از بازه قسمت منفی بازه است! در واقع با این کار می‌توانیم از خاصیت زوج بودن نسبت به $x=0$ استفاده کرده و به جای $\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} g(s)ds$ بنویسیم $2\int_0^{\frac{3}{2}} g(s)ds$.

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} g(s)ds=\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} g(s)ds+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} g(s)ds=2\int_0^{\frac{3}{2}} g(s)ds+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} g(s)ds$$

برای انتگرال $\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}$ با کم کردن دوره‌ی تناوب از حدود انتگرال داریم:

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} g(s)ds=\int_{\frac{3}{2}-2}^{\frac{5}{2}-2} g(s)ds=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(s)ds=2\int_0^{\frac{1}{2}} g(s)ds$$

بنابراین عبارت به صورت مقابل بازنویسی می‌شود:

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} g(s)ds=2\int_0^{\frac{3}{2}} g(s)ds+2\int_0^{\frac{1}{2}} g(s)ds \qquad (*)$$

حالا در انتگرال اول قسمت‌هایی که از بازه‌ی $[0,1]$ خارج شده‌اند را جدا می‌کنیم:

$$\int_0^{\frac{3}{2}} g(s)ds=\int_0^1 g(s)ds+\int_1^{\frac{3}{2}} g(s)ds$$

برای بازه‌ی $[1,\frac{3}{2}]$ از زوج بودن نسبت به $x=1$ استفاده می‌کنیم. وقتی $g(x)$ نسبت به $x=1$ به صورت زوج گسترش یابد داریم:

$$\int_1^{1+\alpha} g(s)ds=\int_{1-\alpha}^1 g(s)ds \xrightarrow{\alpha=\frac{1}{2}} \int_1^{\frac{3}{2}} g(s)ds=\int_{1-\frac{1}{2}}^1 g(s)ds=\int_{\frac{1}{2}}^1 g(s)ds$$

با جایگذاری این موارد در رابطه‌ی (*) داریم:

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} g(s)ds=2[\int_0^1 g(s)ds+\int_{\frac{1}{2}}^1 g(s)ds]+2\int_0^{\frac{1}{2}} g(s)ds=2[\int_0^1 g(s)ds+\int_0^{\frac{1}{2}} g(s)ds+\int_{\frac{1}{2}}^1 g(s)ds]=2[\int_0^1 g(s)ds+\int_0^1 g(s)ds]=4\int_0^1 g(s)ds$$

دقت کنید که در محاسبات فوق به جای مجموع دو انتگرال $\int_0^{\frac{1}{2}} g(s)ds$ و $\int_{\frac{1}{2}}^1 g(s)ds$ نوشتیم: $\int_0^1 g(s)ds$.

حالا کافی است حاصل $4\int_0^1 \sin^3 \pi x dx$ تعیین شود؛ از فرمول $\sin^3\theta=\frac{3}{4}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin 3\theta$ کمک می‌گیریم:

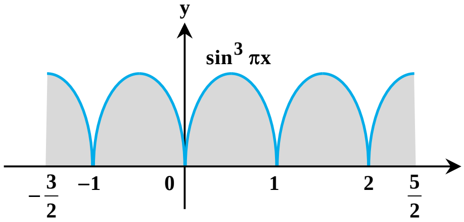
$$4\int_0^1 \sin^3 \pi x dx=4\int_0^1[\frac{3}{4}\sin(\pi x)-\frac{1}{4}\sin(3\pi x)]dx=4[-\frac{3}{4\pi}\cos\pi x+\frac{1}{12\pi}\cos 3\pi x]_0^1$$

$$=4[\frac{3}{4\pi}-\frac{1}{12\pi}+\frac{3}{4\pi}-\frac{1}{12\pi}]=\frac{3}{\pi}-\frac{1}{3\pi}+\frac{3}{\pi}-\frac{1}{3\pi}=\frac{9-1+9-1}{3\pi}=\frac{16}{3\pi}\xrightarrow{\text{چون پشت انتگرال ضریب } \frac{1}{2} \text{ داریم}}\text{حاصل قسمت دوم}=\frac{1}{2}\times\frac{16}{3\pi}=\frac{8}{3\pi}$$

با توجه به این که در ابتدا حاصل قسمت اول در فرمول دالامبر برابر با ۱ به دست آمده بود، پس حاصل کل برابر با $1+\frac{8}{3\pi}$ می‌شود.

توجه: اگر نمودار $g(x)=\sin^3 \pi x$ را نسبت به $x=1$ و $x=0$ گسترش زوج دهید، بدون انجام محاسبات زیاد واضح است که داریم:

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} g(x)dx=4\int_0^1 g(x)dx$$



در واقع مساحت زیر منحنی در بازه‌ی $[-\frac{3}{2},\frac{5}{2}]$ شامل ۳ قطعه‌ی کامل به اندازه‌ی آنچه در بازه $0\le x\le 1$ داریم و دو تا نیم قطعه است که روی هم می‌شود ۴ برابر مساحت واقع در فاصله‌ی $0\le x\le 1$.

مثال ۱۶: با توجه به معادله موج زیر، مقدار $u(\frac{۳}{۴},\frac{۷}{۲})$ کدام است؟ (از سؤالات ریاضی مهندسی دانشگاه Standford)

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} \ , \ ۰<x<۱ \ , \ t>۰ \\ u(x,۰)=x^۲(۱-x)^۲ \ , \ ۰\le x\le ۱ \\ u_x(۰,t)=u_x(۱,t)=۰ \\ u_t(x,۰)=g(x)=۱ \ , \ ۰\le x\le ۱ \end{cases}$$

۱) $\frac{۹۰۵}{۲۵۶}$
۲) $\frac{۹۰۵}{۱۲۸}$
۳) $\frac{۹۰۵}{۶۴}$
۴) $\frac{۱۸۰۱}{۲۵۶}$

پاسخ: گزینه «۱» هر دو شرط مرزی در $x=۰$ و $x=۱$ روی u_x هستند، بنابراین توابع $f(x)=x^۲(۱-x^۲)$ و $g(x)=۱$ را در هر دو نقطه‌ی $x=۰$ و $x=۱$ به صورت زوج گسترش می‌دهیم و دوره‌ی تناوب هم $T=۲\times۱=۲$ است.

در ضمن به دلیل آن‌که هر دو شرط مرزی همگن روی u_x داده شده‌اند، فعلاً از روش جبری دالامبر استفاده نمی‌کنیم:

$$c=۱ \Rightarrow u(\frac{۳}{۴},\frac{۷}{۲})=\frac{۱}{۲}[f^*(\frac{۳}{۴}+\frac{۷}{۲})+f^*(\frac{۳}{۴}-\frac{۷}{۲})]+\frac{۱}{۲}\int_{\frac{۳}{۴}-\frac{۷}{۲}}^{\frac{۳}{۴}+\frac{۷}{۲}} g(x)dx$$

معمولاً برای محاسبه‌ی این انتگرال، آن را به صورت مناسبی به چند بازه تقسیم کرده و از زوج یا فرد بودن g استفاده می‌کنیم. اما در این مثال خاص، با توجه به آن‌که در بازه‌ی $۰<x<۱$ داریم: $g(x)=۱$ و این تابع نسبت به هر دو نقطه‌ی $x=۰$ و $x=۱$ گسترش زوج پیدا می‌کند، پس در سایر بازه‌ها هم به وضوح $g(x)=۱$ تابع ثابت یک است. بنابراین می‌توانیم یک انتگرال معین معمولی به این صورت حساب کنیم:

$$\int_{\frac{۳}{۴}-\frac{۷}{۲}}^{\frac{۳}{۴}+\frac{۷}{۲}} g(x)dx=\int_{\frac{۳}{۴}-\frac{۷}{۲}}^{\frac{۳}{۴}+\frac{۷}{۲}}(۱)dx=(\frac{۳}{۴}+\frac{۷}{۲})-(\frac{۳}{۴}-\frac{۷}{۲})=۷$$

حالا مقادیر مورد نیاز برای f^* را حساب می‌کنیم؛ دقت کنید در قسمت اول، ۲ برابر دوره تناوب را کم و در قسمت دوم، خودِ دوره تناوب را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{cases} f^*(\frac{۳}{۴}+\frac{۷}{۲})=f^*(\frac{۱۷}{۴})=f^*(\frac{۱۷}{۴}-۲\times۲)=f^*(\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۱۶}(۱-\frac{۱}{۴})^۲=\frac{۹}{۲۵۶} \\ f^*(\frac{۳}{۴}-\frac{۷}{۲})=f^*(-\frac{۱۱}{۴})=f^*(-\frac{۱۱}{۴}+۲)=f^*(-\frac{۳}{۴})=f^*(\frac{۳}{۴})=\frac{۹}{۱۶}(۱-\frac{۳}{۴})^۲=\frac{۹}{۲۵۶} \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر به دست آمده در فرمول دالامبر داریم:

$$u(\frac{۳}{۴},\frac{۷}{۲})=\frac{۱}{۲}[\frac{۹}{۲۵۶}+\frac{۹}{۲۵۶}]+\frac{۱}{۲}(۷)=\frac{۹}{۲۵۶}+\frac{۷}{۲}=\frac{۹+۸۹۶}{۲۵۶}=\frac{۹۰۵}{۲۵۶}$$

توضیح: در این سؤال هر دو شرط مرزی روی u_x هستند، ولی ما می‌توانیم از روش جبری هم استفاده کنیم؛ به این دلیل که $g(x)$ مقداری ثابت دارد. برای تمرین از روش جبری هم به جواب می‌رسیم. دقت کنید که فقط مراحل به دست آوردن کروشه دوم تفاوت دارد؛ آن هم به راحتی حساب می‌شود؛ نظر به این که $G(x)=x$ است، با جایگذاری $\frac{۱۷}{۴}$ و $-\frac{۱۱}{۴}$ به جای x داریم:

$$G(x)=x \Rightarrow G(\frac{۱۷}{۴})-G(-\frac{۱۱}{۴})=\frac{۱۷}{۴}-(-\frac{۱۱}{۴})=\frac{۲۸}{۴}=۷$$

توجه داشته باشید که در این حالت‌ها $G(x)$ مقداری ثابت دارد، باید همان مقادیر به دست آمده (در این مثال اعداد $\frac{۱۷}{۴}$ و $-\frac{۱۱}{۴}$) را قرار دهیم و دیگر نباید از دوره تناوب و یا گسترش تابع، عدد را تغییر دهیم.

توجه: البته با توجه به آن که $g(x)=۱$ تابع ثابت است، می‌توانستیم از نکته‌ی متن درس استفاده کرده و بدون انجام محاسبه حاصل کروشه‌ی دوم را به صورت $۲kct=۲\times۱\times۱\times\frac{۷}{۲}=۷$ به دست آوریم.

نکته۱: گاهی اوقات در مسائلی که هر دو شرط مرزی روی u_x نیست، به اختلاف $(x+ct)-(x-ct)$ توجه کنید؛ اگر این اختلاف مضربی صحیح از دوره تناوب باشد، آن‌گاه بدون محاسبه می‌توانید بگویید حاصل کروشه دوم صفر است و فقط باید کروشه اول در فرمول دالامبر محاسبه شود. در ضمن حاصل کروشه اول هم همواره برابر $f^*(x+ct)$ می‌شود؛ یعنی فقط کافیست در ضابطه $f^*(x)$ به جای x مقدار $x+ct$ را جایگزین کرده و سپس با استفاده از دوره تناوب و گسترش تابع f همانند سایر مسائل جواب را تعیین کنیم.

مثال ۱۷: مقدار $u(\frac{۱}{۳},\frac{۱۳}{۲})$ از روی معادله موج زیر کدام است؟ ($g(x)$ تابع تکه‌ای پیوسته است.)

$$\begin{cases} u_{tt}-۴u_{xx}=۰ \ , \ ۰<x<۱ \ , \ t>۰ \\ u(x,۰)=۱-x \ , \ u_t(x,۰)=g(x) \ , \ ۰\le x\le ۱ \\ u(۰,t)=u(۱,t)=۰ \ , \ t>۰ \end{cases}$$

۱) ۰
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $-\frac{۱}{۳}$
۴) نمی‌توان گفت چون $g(x)$ نامشخص است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در این سؤال $x=\frac{1}{3}$، $c=2$ و $t=\frac{13}{2}$ است. ابتدا توجه کنید که اختلاف $(x+ct)-(x-ct)$ برابر مقدار زیر است:

$$(x+ct)-(x-ct)=(\frac{1}{3}+2\times\frac{13}{2})-(\frac{1}{3}-2\times\frac{13}{2})=13-(-13)=26=13\times 2=13\times(\text{دوره تناوب})$$

چون اختلاف موردنظر مضرب صحیحی از دوره تناوب شد، لذا با توجه به نکته قبل می‌توان گفت که گزینه (۴) غلط است (چون حاصل کروشه دوم همواره صفر است و مهم نیست ضابطه‌ی $g(x)$ چه باشد.) پس فقط کافی است $f^*(x+ct)$ حساب شود. لذا داریم:

$$u(\frac{1}{3},\frac{13}{2})=f^*(\frac{1}{3}+2\times\frac{13}{2})=f^*(\frac{1}{3}+13)=f^*(\frac{40}{3})=f^*(14-\frac{2}{3})=f^*(-\frac{2}{3})$$

چون هر دو شرط مرزی روی u است، پس f باید نسبت به $x=0$ گسترش فرد داشته باشد؛ لذا $f^*(-\frac{2}{3})=-f^*(\frac{2}{3})$، پس داریم:

$$u(\frac{1}{3},\frac{13}{2})=-f(\frac{2}{3})=-(1-\frac{2}{3})=-\frac{1}{3}$$

توجه: دقت داشته باشید که اگر مثلاً در این سؤال هر دو شرط مرزی روی u_x بود، آن وقت دیگر **نمی‌شد گفت**: حاصل کروشه دوم صفر است و حاصل به $g(x)$ بستگی ندارد؛ بلکه حاصل به $g(x)$ هم بستگی داشت و گزینه (۴) جواب سؤال بود.

مثال ۱۸: در مسأله مقدار مرزی زیر، مقدار $u(0,1)$ برابر کدام گزینه است؟

$$\begin{cases} u_{xx}=u_{tt} \;,\; 0\le x\le 4 \;,\; t>0 \\ u_x(0,t)=u_x(4,t)=0 \\ u(x,0)=2\cos(\pi x)+5 \;,\; u_t(x,0)=1-\cos(2\pi x)\end{cases}$$

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای تمرین بیشتر، این سؤال را به دو روش (دالامبر و روش ضربی) حل می‌کنیم، تا یکسان بودن جواب‌ها را ببینید.

روش اول: از روش دالامبر استفاده می‌کنیم (دقت کنید که در این سؤال هر دو شرط مرزی روی u_x است؛ اما چون $(x+ct)$ در بازه $[0,4]$ قرار دارد و $(x-ct)$ هم بدون نیاز به دوره تناوب و صرفاً با توجه به گسترش در بازه $[0,4]$ قرار می‌گیرد، می‌توان از روش دالامبر جبری کمک گرفت):

$$u(0,1)=\frac{1}{2}[f^*(0+1)+f^*(0-1)]+\frac{1}{2}[G^*(0+1)-G^*(0-1)]=\frac{1}{2}[f^*(1)+f^*(-1)]+\frac{1}{2}[G^*(1)-G^*(-1)]$$

با توجه به شرایط مرزی، باید f نسبت به $x=0$ گسترش زوج یابد، بنابراین $f^*(1)=f^*(-1)$ و همچنین g، نسبت به $x=0$، گسترش زوج و در نتیجه G باید نسبت به $x=0$ گسترش فرد یابد، لذا $G^*(1)=-G^*(-1)$، پس جواب به شکل مقابل خلاصه می‌شود: $u(0,1)=\frac{1}{2}[2f(1)]+\frac{1}{2}[2G(1)]=f(1)+G(1)$

اما $G(x)$ از رابطه‌ی مقابل حساب می‌شود: $G(x)=\int_0^x g(x)dx=\int_0^x(1-\cos 2\pi x)dx=x-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x$

بنابراین $G(1)=1$ و لذا داریم:

$$u(0,1)=2\cos(\pi\times 1)+5+1-\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi\times 1)=2\times(-1)+5+1+0=4$$

روش دوم: با استفاده از روش جداسازی متغیرها داریم:

$$u(x,t)=F(x).G(t)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{F''(x)}{F(x)}=-\lambda\\[2mm] \dfrac{G''(t)}{G(t)}=-\lambda\end{cases}$$

جواب معادله‌ی $F''(x)+\lambda F(x)=0$ به شکل $F(x)=a\cos\sqrt{\lambda}x+b\sin\sqrt{\lambda}x$ است. در $x=0$ شرط $u_x(0,t)=0$ نتیجه می‌دهد که $F'(0)=0$ است بنابراین $\sqrt{\lambda_n}b=0$ است.

اگر $\lambda=0$ باشد که مقدار ویژه‌ای نخواهیم داشت، پس $b=0$ است و $F(x)=a\cos\sqrt{\lambda}x$ خواهد بود. اکنون شرط $u_x(4,t)=0$ را اعمال می‌کنیم که طبق آن $F'(4)=0$ است، پس $\sin 4\sqrt{\lambda}=0$. از این جا داریم $4\sqrt{\lambda_n}=n\pi$ و در نتیجه تساوی $\sqrt{\lambda_n}=\frac{n\pi}{4}$ مقادیر ویژه را می‌دهد. اکنون می‌دانیم که جواب‌های ویژه به صورت $\cos\frac{n\pi}{4}x$ هستند. معادله‌ی مربوط به $G(t)$ را حل می‌کنیم. دقت کنید که چون $F_n(x)$ کسینوسی شده است، $n=0,1,2,\ldots$ خواهد بود. یعنی جمله‌ی ثابت a_0 هم خواهیم داشت.

$$\frac{G''(t)}{G(t)}=-(\frac{n\pi}{4})^2\xrightarrow{\text{برای } n\neq 0}G_n(t)=A_n\sin(\frac{n\pi}{4}t)+B_n\cos(\frac{n\pi}{4}t)$$

اما برای $n=0$ داریم:
$$\frac{G''(t)}{G(t)}=0 \Rightarrow G''(t)=0 \Rightarrow G(t)=at+b$$

بنابراین جواب کلی به صورت مقابل است:
$$u(x,t)=at+b+\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\frac{n\pi x}{4})[A_n\sin(\frac{n\pi t}{4})+B_n\cos(\frac{n\pi t}{4})] \qquad (*)$$

حالا شرایط اولیه را لحاظ می‌کنیم. با توجه به شرط $u(x,0)$، لازم است در رابطه‌ی (*) به جای تمام t ها صفر قرار دهیم:
$$u(x,0)=2\cos(\pi x)+5 \xrightarrow{t=0} 2\cos(\pi x)+5=b+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos(\frac{n\pi x}{4}) \Rightarrow \begin{cases} b=5 \\ B_n=0 \ , \ n\neq 4 \\ B_n=2 \ , \ n=4 \end{cases}$$

با توجه به شرط $u_t(x,0)$، ابتدا از رابطه (*) نسبت به t مشتق می‌گیریم، بعد به جای تمام t ها صفر قرار می‌دهیم:
$$u_t(x,0)=1-\cos(2\pi x) \xrightarrow{t=0} 1-\cos 2\pi x=a+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n\pi}{4})A_n\cos(\frac{n\pi}{4}x) \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ A_n=0 \ , \ n\neq 8 \\ A_n=-\frac{1}{2\pi} \ , \ n=8 \end{cases}$$

بنابراین جواب نهایی به شکل زیر نشان داده می‌شود:
$$\mathbf{u(x,t)=5+t+2\cos(\pi x)\cos(\pi t)-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x)\sin(2\pi t)}$$

با توجه به مقدار خواسته شده داریم:
$$u(0,1)=5+1+2\cos(0)\cos\pi-\frac{1}{2\pi}[\cos(0)\sin 2\pi]=5+1-2=4$$

ملاحظاتی مفهومی درباره‌ی حل دالامبر معادله موج متناهی

وقتی معادله‌ی موج متناهی را با روش دالامبر حل می‌کنیم، جواب $u(x,t)$ بستگی به این دارد که $x+ct$ و $x-ct$ در کدام محدوده قرار می‌گیرند. اگر $x+ct$ و $x-ct$ هر دو در بازه‌ی $(0,L)$ باشند، نیازی به گسترش توابع f و g نداریم، زیرا در این بازه، f^* با f و g^* با g برابر است. اما در سایر حالات باید به نحوه‌ی گسترش f و g نسبت به $x=0$ و $x=L$ توجه کنیم. گاهاً مشاهده شده که طراح سؤال بدون مشخص کردن محدوده‌ی $x\pm ct$ ضابطه‌ی $u(x,t)$ را خواسته است که در این صورت با فرض $0<x\pm ct<L$ مسأله را حل می‌کنیم.

مثال ۱۹: جواب دالامبر (D'Alembert) معادله موج $u_{tt}=c^2u_{xx}$ همراه با شرایط: $u(0,t)=u(L,t)=0, u(x,0)=e^x, u_t(x,0)=e^x$ عبارتست از:

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۸)

۱) $u(x,t)=e^x(\cosh ct+\frac{1}{c}\sinh ct)$

۲) $u(x,y)=e^x(\cosh ct+\sinh ct)$

۳) $u(x,t)=e^x(\frac{1}{c}\cosh ct+\sinh ct)$

۴) $u(x,t)=\frac{e^x}{c}(\cosh ct+\sinh ct)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» متأسفانه این سؤال هم کمی دارای اشکال است، ولی با توجه به توضیحات داده شده ظاهراً نظر طراح این بوده که جواب را در حالتی که $x\pm ct$ هر دو در بازه‌ی $(0,L)$ هستند، پیدا کنیم. ابتدا براساس نظر طراح سؤال را حل می‌کنیم و در پایان فرم صحیح‌تر را توضیح می‌دهیم.

از حل دالامبر موج به روش جبری استفاده می‌کنیم. در این مثال داریم $f(x)=u(x,0)=e^x$ و $g(x)=u_t(x,0)=e^x$. بنابراین $G(x)$ برابر است با:
$$G(x)=\int_0^x g(x)dx=\int_0^x e^x dx=e^x-1$$

اگر f^* و G^* گسترش‌های f و G باشند، خواهیم داشت:
$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)]+\frac{1}{2c}[G^*(x+ct)-G^*(x-ct)]$$

اگر فرض کنیم $x+ct$ و $x-ct$ هر دو در بازه‌ی $(0,L)$ باشند، خواهیم داشت:
$$u(x,t)=\frac{1}{2}[e^{x+ct}+e^{x-ct}]+\frac{1}{2c}[e^{x+ct}-1-e^{x-ct}+1]=e^x[\frac{e^{ct}+e^{-ct}}{2}]+\frac{1}{c}e^x[\frac{e^{ct}-e^{-ct}}{2}]=e^x(\cosh ct+\frac{1}{c}\sinh ct)$$

توضیح: در حقیقت جواب این معادله در بازه‌های مختلف، به صورت متفاوتی به دست می‌آید. شرایط مرزی $u(0,t)=u(L,t)=0$ نشان می‌دهند که f^* و g^* نسبت به هر دو نقطه‌ی $x=0$ و $x=L$ فرد هستند. اکنون دو حالت خواهیم داشت:

حالت اول: اگر $x+ct$ و $x-ct$ هر دو در بازه‌ی $(0,L)$ باشند، یعنی داشته باشیم $0<x-ct<x+ct<L$، آن‌گاه همان‌طور که نشان دادیم $u(x,t)=e^x(\cosh ct+\frac{1}{c}\sinh ct)$ است.

حالت دوم: اگر $x+ct$ در بازه‌ی $(0,L)$ و $x-ct$ در بازه‌ی $(-L,0)$ باشد، آن‌گاه $f^*(x+ct)$ با $f(x+ct)$ و $G^*(x+ct)$ با $G(x+ct)$ برابر است؛

اما برای محاسبه‌ی $f^*(x-ct)$ از فرد بودن f^* نسبت به $x=0$ استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت: $f^*(x-ct)=-f^*(ct-x)$

همچنین برای محاسبه‌ی $G^*(x-ct)$ از زوج بودن G^* نسبت به $x=0$ استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت: $G^*(x-ct)=G^*(ct-x)$

بنابراین در این حالت جواب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)-f(ct-x)]+\frac{1}{2c}[G(x+ct)-G(ct-x)]=\frac{1}{2}[e^{x+ct}-e^{ct-x}]+\frac{1}{2c}[e^{x+ct}-1-e^{ct-x}+1]$$

$$\Rightarrow u(x,t)=e^{ct}\sinh x+\frac{e^{ct}}{c}\sinh x=(1+\frac{1}{c})e^{ct}\sinh x$$

به این ترتیب ضابطه‌ی $u(x,t)$ به این صورت نوشته می‌شود:

$$u(x,t)=\begin{cases} e^x(\cosh ct+\frac{1}{c}\sinh ct) \ , \ 0<x-ct<x+ct<L \\ (1+\frac{1}{c})e^{ct}\sinh x \ , \ -L<x-ct<0<x+ct<L \end{cases}$$

ما ضابطه‌ی $u(x,t)$ را برای یک دوره‌ی تناوب آن نوشته‌ایم. توجه داشته باشید که $x+ct$ همواره مثبت است و نیازی نیست حالت $-L<x-ct<x+ct<0$ را در نظر بگیریم.

نکته ۲: گاهی اوقات نحوه‌ی گسترش توابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x=0$ و $x=L$ با ویژگی‌های ذاتی این توابع یکسان است. برای مثال نمودار تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{L}x$ نسبت به $x=0$ و $x=L$ فرد است، حالا اگر شرایط مرزی معادله موج به صورت $u(0,t)=u(L,t)=0$ باشند، باید $f(x)$ را در $x=0$ و $x=L$ به صورت فرد گسترش دهیم، اما تابع $f(x)$ خودش هم نسبت به این نقاط فرد است بنابراین $f^*(x)$ با $f(x)$ برابر می‌شود و در این حالت خاص جواب $u(x,t)$ که از روش دالامبر به دست می‌آوریم برای همه‌ی نواحی یکسان خواهد بود.

مثال ۲۰: پاسخ عمومی معادله‌ی موج متناهی زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_{xx}-u_{tt}=0 \ , \ 0<x<L \ , \ t>0 \\ u(x,0)=\sin\frac{\pi}{L}x \ , \ u_t(x,0)=-\sin\frac{\pi}{L}x \ , \ x>0 \\ u(0,t)=u(L,t)=0 \end{cases}$$

۱) $(\cos\frac{\pi}{L}t-\frac{L}{\pi}\sin\frac{\pi}{L}t)\sin\frac{\pi}{L}x$

۲) $(\frac{L}{\pi}\cos\frac{\pi}{L}t-\sin\frac{\pi}{L}t)\sin\frac{\pi}{L}x$

۳) $(\cos\frac{\pi}{L}t-\sin\frac{\pi}{L}t)\sin\frac{\pi}{L}x$

۴) $\frac{L}{\pi}(\cos\frac{\pi}{L}t-\sin\frac{\pi}{L}t)\sin\frac{\pi}{L}x$

پاسخ: گزینه «۱» توابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{L}x$ و $g(x)=-\sin\frac{\pi}{L}x$ نسبت به نقاط $x=0$ و $x=L$ فرد هستند، به همین دلیل مقدار f^* و g^* در همه‌ی نواحی با f و g برابر می‌شود. در نتیجه می‌توانیم جواب این معادله‌ی موج را برای همه‌ی نواحی مختلف به صورت زیر به دست آوریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+t)+f(x-t)]+\frac{1}{2}[G(x+t)-G(x-t)]$$

$$G(x)=\int_0^x g(x)dx=-\int_0^x \sin\frac{\pi}{L}x dx=\frac{L}{\pi}\cos\frac{\pi}{L}x\Big|_0^x=\frac{L}{\pi}(\cos\frac{\pi}{L}x-1)$$

با توجه به ضابطه‌ی $f(x)$ و $G(x)$ خواهیم داشت:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\sin\frac{\pi}{L}(x+t)+\sin\frac{\pi}{L}(x-t)]+\frac{L}{2\pi}[\cos\frac{\pi}{L}(x+t)-1-\cos\frac{\pi}{L}(x-t)+1]$$

با استفاده از فرمول‌های مثلثاتی تبدیل جمع به ضرب داریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\sin\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi}{L}t+\sin\frac{\pi}{L}t\cos\frac{\pi}{L}x+\sin\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi}{L}t-\sin\frac{\pi}{L}t\cos\frac{\pi}{L}x]$$

$$+\frac{L}{2\pi}[\cos\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi}{L}t-\sin\frac{\pi}{L}x\sin\frac{\pi}{L}t-\cos\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi}{L}t-\sin\frac{\pi}{L}x\sin\frac{\pi}{L}t]\Rightarrow u(x,t)=(\cos\frac{\pi}{L}t-\frac{L}{\pi}\sin\frac{\pi}{L}t)\sin\frac{\pi}{L}x$$

البته توجه کنید که اگر ما نمی‌توانستیم از ابتدا تشخیص دهیم که نمودارهای f و g با نمودارهای f^* و g^* یکسان می‌شوند، بدون استفاده از نکته ذکر شده هم می‌توانستیم از روش معمولی دالامبر (مانند مسائل قبلی) استفاده کنیم و با توجه به گسترش زوج یا فرد f و g به جواب برسیم.