آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۳» تابع داده شده را به فرم زیر بازنویسی کرده و سپس تبدیل لاپلاس آن را محاسبه می‌نماییم:

$$f(t)=(e^{at}-e^{-at})^2=e^{2at}-2e^{at}.e^{-at}+e^{-2at}=e^{2at}+e^{-2at}-2$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس می‌گیریم}} F(s)=L[(e^{at}-e^{-at})^2]=L[e^{2at}]+L[e^{-2at}]-2L[1]$$

$$F(s)=\frac{1}{s-2a}+\frac{1}{s+2a}-\frac{2}{s}=\frac{s(s+2a)+s(s-2a)-2(s-2a)(s+2a)}{s(s^2-4a^2)}=\frac{s^2+2as+s^2-2as-2(s^2-4a^2)}{s(s^2-4a^2)}=\frac{8a^2}{s(s^2-4a^2)}$$

۲ـ گزینه «۱» طبق قضیه انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس داریم:

$$L[\frac{\sin\alpha x}{x}]=\int_s^\infty L[\sin\alpha x]ds=\int_s^\infty\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}ds=\tan^{-1}\frac{s}{\alpha}\Big|_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s}{\alpha}$$

۳ـ گزینه «۲» عبارت داده شده را بازنویسی کرده و سپس لاپلاس معکوس آن را محاسبه می‌نماییم:

$$L^{-1}[\frac{6s-4}{s^2-4s-12}]=L^{-1}[\frac{6s-4}{(s-2)^2-4-12}]=L^{-1}[\frac{6s-4}{(s-2)^2-16}]=L^{-1}[\frac{6(s-2+2)-4}{(s-2)^2-16}]$$

$$\Rightarrow L^{-1}[\frac{6s-4}{s^2-4s-12}]=L^{-1}[\frac{6(s-2)+8}{(s-2)^2-16}]\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]}$$

$$L^{-1}[\frac{6(s-2)+8}{(s-2)^2-16}]=e^{2t}L^{-1}[\frac{6s+8}{s^2-16}]=e^{2t}(6L^{-1}[\frac{s}{s^2-16}]+2L^{-1}[\frac{4}{s^2-16}])=e^{2t}(6\cosh 4t+2\sinh 4t)$$

۴ـ گزینه «۱» از خواص تابع Ln استفاده کرده و تابع صورت مسأله را به فرم $\mathrm{Ln}\,s-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(s^2-9)$ بازنویسی می‌کنیم. طبق نکته گفته شده در کتاب، در مواجهه با تبدیل معکوس توابع Ln، باید از قضیه مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس استفاده کرد. پس داریم:

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s)]=-\frac{1}{t}L^{-1}[F'(s)]} f(t)=L^{-1}[\mathrm{Ln}\,s-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(s^2-9)]=-\frac{1}{t}L^{-1}[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2-9}]=-\frac{1}{t}(L^{-1}[\frac{1}{s}]-L^{-1}[\frac{s}{s^2-9}])$$

$$f(t)=-\frac{1}{t}(1-\cosh 3t)=\frac{\cosh 3t-1}{t}$$

۵ـ گزینه «۲» بنابر تعریف تبدیل لاپلاس $L[f(t)]=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$، در نتیجه داریم:

$$I=\int_0^\infty e^{-4t}\sin^2(2t)dt=L[\sin^2(2t)]\big|_{s=4}\xrightarrow{\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} L[\frac{1-\cos(4t)}{2}]=\frac{1}{2}L[1]-\frac{1}{2}L[\cos(4t)]=\frac{1}{2}(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+16})$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\,\frac{s^2+16-s^2}{s(s^2+16)}\Big|_{s=4}=\frac{8}{s(s^2+16)}\Big|_{s=4}\Rightarrow I=\frac{8}{4(16+16)}=\frac{1}{16}$$

۶ـ گزینه «۱» از طرفین معادله، تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L[\frac{d^2y}{dx^2}]+L[y]=L[1]\xrightarrow{L[f'']=s^2L[f]-sf(0)-f'(0)} s^2L[y]-sy(0)-y'(0)+L[y]=\frac{1}{s}$$

$$\xrightarrow{y(0)=1\,,\,y'(0)=0}(s^2+1)L[y]=s+\frac{1}{s}\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } s^2+1} L[y]=\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s(s^2+1)}\Rightarrow Y(s)=L[y]=\frac{s^2+1}{s(s^2+1)}=\frac{1}{s}$$

۷ـ گزینه «۱» از طرفین معادله، تبدیل لاپلاس می‌گیریم و از قضیه تبدیل لاپلاس مشتقات تابع کمک می‌گیریم:

$$L[y'']-L[y]=2L[\delta(t-1)]\xrightarrow{L[f'']=s^2L[f]-sy(0)-y'(0)} s^2L[y]-sy(0)-y'(0)-L[y]=2e^{-s}$$

$$\xrightarrow{y(0)=1\,,\,y'(0)=0} s^2L[y]-s-L[y]=2e^{-s}\Rightarrow L[y](s^2-1)=s+2e^{-s}\Rightarrow L[y]=\frac{s+2e^{-s}}{s^2-1}$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}} y(t)=L^{-1}[\frac{s}{s^2-1}+2\frac{e^{-s}}{s^2-1}]\xrightarrow{L^{-1}[e^{-as}F(s)]=u_a(t)L^{-1}[F(s)]|_{t\to t-a}}$$

$$y(t)=\cosh t+2u_1(t)L^{-1}[\frac{1}{s^2-1}]\Big|_{t\to t-1}=\cosh t+2u_1(t)\sinh(t-1)$$

۸ـ گزینه «۲» با نوشتن انتگرال داده شده با کمی جابه‌جایی داریم:

$$I=\int_{0}^{\infty}e^{-3t}\left(\int_{0}^{t}x^{2}\sin(t-x)\,dx\right)dt\xrightarrow{L[f(t)]=\int_{0}^{\infty}e^{-st}f(t)\,dt}I=L\left[\int_{0}^{t}x^{2}\sin(t-x)\,dx\right]\Big|_{s=3}$$

با توجه به تعریف ضرب پیچشی خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{L[\int_{0}^{t}f(x)g(t-x)dx=f*g}I=L[t^{2}*\sin t]\big|_{s=3}\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]}I=(L[t^{2}]L[\sin t])\big|_{s=3}$$

$$I=\left(\frac{2}{s^{3}}\cdot\frac{1}{s^{2}+1}\right)\Big|_{s=3}=\frac{2}{27}\times\frac{1}{9+1}=\frac{1}{135}$$

۹ـ گزینه «۱» بنا بر تعریف ضرب پیچشی داریم:

$$f(t)=\int_{0}^{t}(t-x)^{3}\sin 2x\,dx=t^{3}*\sin 2t\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس می‌گیریم}}L[f(t)]=L[t^{3}*\sin 2t]$$

$$\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]}L[f(t)]=L[t^{3}]L[\sin 2t]=\frac{3!}{s^{4}}\cdot\frac{2}{s^{2}+4}=\frac{12}{s^{4}(s^{2}+4)}$$

۱۰ـ گزینه «۲» با انتقال جمله e^{t} به داخل انتگرال داریم:

$$F(s)=L\left[\int_{0}^{t}e^{t-u}y(u)\,du\right]=L[e^{t}*y(t)]\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]}F(s)=L[e^{t}]L[y(t)]=\frac{Y(s)}{s-1}$$

۱۱ـ گزینه «۱» ابتدا از $f(t)$ تبدیل لاپلاس گرفته و سپس از خواص تبدیل لاپلاس پیچش استفاده می‌کنیم:

$$L[f(t)]=L[t*t*t]\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]}L[f(t)]=L[t]L[t]L[t]=(L[t])^{3}$$

$$\xrightarrow{L[t]=\frac{1}{s^{2}}}L[f(t)]=\left(\frac{1}{s^{2}}\right)^{3}=\frac{1}{s^{6}}\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}}f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s^{6}}\right]=\frac{t^{5}}{5!}$$

۱۲ـ گزینه «۳» از معادله داده شده، تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L\left[\frac{dy}{dt}\right]+L\left[\int_{0}^{t}y(t)\,dt\right]=L[1]\xrightarrow[L[\int_{0}^{t}y(t)dt=\frac{L[y]}{s}]{L[\frac{dy}{dt}]=sL[y]-y(0)}sL[y]-y(0)+\frac{L[y]}{s}=\frac{1}{s}$$

$$\left(s+\frac{1}{s}\right)L[y]=y(0)+\frac{1}{s}\xrightarrow{y(0)=1}\frac{s^{2}+1}{s}L[y]=1+\frac{1}{s}\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر }\frac{s}{s^{2}+1}}L[y]=\frac{s}{s^{2}+1}+\frac{1}{s^{2}+1}$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}}y(t)=L^{-1}\left[\frac{s}{s^{2}+1}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{s^{2}+1}\right]=\cos t+\sin t$$

۱۳ـ گزینه «۲» با به‌کارگیری رابطه انتگرالی داده شده داریم:

$$F(s)=L[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-4s}}\int_{0}^{1}te^{-st}dt=\frac{1}{1-e^{-4s}}\left(-\frac{(st+1)e^{-st}}{s^{2}}\right)\Big|_{0}^{1}\Rightarrow F(s)=\frac{1}{s^{2}(1-e^{-4s})}(1-(s+1)e^{-s})=\frac{1-(s+1)e^{-s}}{s^{2}(1-e^{-4s})}$$

۱۴ـ گزینه «۱» می‌دانیم که ضرب پیچشی $f*g$ را می‌توان به فرم انتگرالی $\int_{0}^{t}f(t-x)g(x)\,dx$ نوشت. از مقایسه این فرم نمایش پیچش با جمله انتگرالی معادله پی می‌بریم که $\int_{0}^{t}(t-x)\,y(x)\,dx=t*y(t)$. حالا ضمن جایگذاری $t*y(t)$ در معادله، از طرفین تساوی تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$y(t)+t*y(t)=\sin 2t\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس می‌گیریم}}L[y(t)]+L[t*y(t)]=L[\sin 2t]$$

$$\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]}Y(s)+L[t]L[y(t)]=\frac{2}{s^{2}+4}\Rightarrow Y(s)+\frac{1}{s^{2}}Y(s)=\frac{2}{s^{2}+4}$$

$$\Rightarrow Y(s)\left(1+\frac{1}{s^{2}}\right)=\frac{2}{s^{2}+4}\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر }s^{2}}Y(s)(s^{2}+1)=\frac{2s^{2}}{s^{2}+4}\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر }s^{2}+1}Y(s)=\frac{2s^{2}}{(s^{2}+1)(s^{2}+4)}$$

حالا باید $Y(s)$ را به کسرهای جزئی تجزیه کنیم، برای این منظور داریم:

$$\frac{2s^{2}}{(s^{2}+1)(s^{2}+4)}=\frac{As+B}{s^{2}+1}+\frac{Cs+D}{s^{2}+4}$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک می‌گیریم}}\frac{2s^{2}}{(s^{2}+1)(s^{2}+4)}=\frac{(As+B)(s^{2}+4)+(Cs+D)(s^{2}+1)}{(s^{2}+1)(s^{2}+4)}=\frac{(A+C)s^{3}+(B+D)s^{2}+(4A+C)s+(4B+D)}{(s^{2}+1)(s^{2}+4)}$$

حالا با مقایسه صورت کسرهای طرفین تساوی داریم:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=2 \\ 4A+C=0 \\ 4B+D=0 \end{cases} \Rightarrow A=0\ ,\ B=-\frac{2}{3}\ ,\ C=0\ ,\ D=\frac{8}{3} \Rightarrow Y(s)=\frac{-\frac{2}{3}}{s^2+1}+\frac{\frac{8}{3}}{s^2+4}$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}} y(t)=L^{-1}[\frac{-\frac{2}{3}}{s^2+1}+\frac{\frac{8}{3}}{s^2+4}]=-\frac{2}{3}\sin t+\frac{8}{3}\frac{\sin 2t}{2}=-\frac{2}{3}\sin t+\frac{4}{3}\sin 2t$$

۱۵ـ گزینه «۳» از طرفین معادله، تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L[y(t)]=L[1]+L[\int_0^t y(x)\sin(t-x)dx] \Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s}+L[y(t)*\sin t] \Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s}+L[y(t)]L[\sin t] \Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s}+Y(s)\frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow (1-\frac{1}{s^2+1})Y(s)=\frac{1}{s} \Rightarrow \frac{s^2}{s^2+1}Y(s)=\frac{1}{s} \Rightarrow Y(s)=\frac{s^2+1}{s^3}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^3} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}} y(t)=L^{-1}[\frac{1}{s}+\frac{1}{s^3}]=1+\frac{t^2}{2}$$

۱۶ـ گزینه «۱» با توجه به قضیه مقدار نهایی در لاپلاس داریم: $f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)$. پس می‌توان نوشت:

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{10(s+1)}{s(s^2+2s+2)}=10\lim_{s\to 0}\frac{s+1}{s^2+2s+2}=10\times\frac{1}{2}=5$$

۱۷ـ گزینه «۳» طبق قضیه تبدیل لاپلاس مشتقات تابع داریم:

$$\xrightarrow{L[f']=sL[f]-f(0)} L[s'(t-\pi)]=sL[\delta(t-\pi)]-\delta(0-\pi) \xrightarrow{t\neq a\ \Rightarrow\ \delta(t-a)=0} L[\delta'(t-\pi)]=se^{-\pi s}-0=se^{-\pi s}$$

۱۸ـ گزینه «۴» انتگرال خواسته شده برابر با تبدیل لاپلاس تابع $\frac{\sin ax}{x}$ به ازای $s=0$ است:

$$L[\frac{\sin ax}{x}]=\int_s^\infty L[\sin ax]dx=\int_s^\infty \frac{a}{s^2+a^2}dx=tg^{-1}\frac{s}{a}\Big|_s^\infty=\frac{\pi}{2}-tg^{-1}(\frac{s}{a}) \xrightarrow{s=0} \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

۱۹ـ گزینه «۱» به کمک قضیه دوم انتقال داریم $\left(L^{-1}[e^{-as}F(s)]=u_a(t)L^{-1}[F(s)]\Big|_{t\to t-a}\right)$:

$$g(t)=L^{-1}[e^{-4s}(\frac{2}{s^2}+\frac{5}{s})]=u_4(t)L^{-1}[\frac{2}{s^2}+\frac{5}{s}]\Big|_{t\to t-4}=u_4(t)\ (2t+5)\Big|_{t\to t-4}$$

$$\Rightarrow g(t)=u_4(t)\ (2(t-4)+5)=u_4(t)\ (2t-3)=\begin{cases}0 & 0<t<4 \\ 2t-3 & t>4\end{cases}$$

۲۰ـ گزینه «۱» انتگرال سمت راست تساوی، ضرب پیچشی $y(t)*\sin t$ است. بنابراین معادله به صورت $y(t)=t^2+y(t)*\sin t$ قابل نوشتن است.
حالا از طرفین معادله جدید تبدیل لاپلاس گرفته و توجه داریم که $L[f*g]=L[f]L[g]$.

$$L[y(t)]=L[t^2]+L[y(t)]L[\sin t] \Rightarrow L[y(t)]=\frac{2}{s^3}+L[y]\frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow L[y(t)](1-\frac{1}{s^2+1})=\frac{2}{s^3} \Rightarrow L[y(t)]\ (\frac{s^2+1-1}{s^2+1})=\frac{2}{s^3} \Rightarrow \frac{s^2}{s^2+1}L[y(t)]=\frac{2}{s^3} \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } \frac{s^2+1}{s^2}} L[y(t)]=\frac{2(s^2+1)}{s^5}$$

$$\Rightarrow L[y(t)]=\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^5} \xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس معکوس می‌گیریم}} y(t)=L^{-1}[\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^5}]=\frac{2t^2}{2}+\frac{2t^4}{4!} \Rightarrow y(t)=t^2+\frac{t^4}{12}$$

آزمون (۲)

۱ــ گزینه «۳» می‌دانیم که تبدیل لاپلاس تابع $\sin t$ برابر $\dfrac{1}{s^2+1}$ است. همچنین از قضیه اول انتقال، $L[e^{at}f(t)]=F(s-a)$؛ تبدیل لاپلاس $e^{at}\sin t$ نیز برابر $\dfrac{1}{(s-a)^2+1}$ است. حالا این دو عبارت را برابر هم قرار می‌دهیم و داریم:

$$\frac{1}{(s-a)^2+1}=\frac{1}{s^2-2as+a^2+1}=\frac{1}{s^2-6s+b}\Rightarrow\begin{cases}-2a=-6\Rightarrow a=3\\ a^2+1=b\xrightarrow{a=3}b=10\end{cases}$$

۲ــ گزینه «۳» ضابطه تابع $f(t)$ به صورت زیر است:

$$f(t)=\begin{cases}-t+2 & 0<t<1\\ 1 & 1<t<2\\ -1 & 2<t<3\\ 3 & t>3\end{cases}=(-t+2)(1-u_1)+(u_1-u_2)-(u_2-u_3)+3u_3\Rightarrow f(t)=2+(t-1)u_1-2u_2+4u_3-t$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس می‌گیریم}}L[f(t)]=L[2+(t-1)u_1-2u_2+4u_3-t]=2L[1]+L[u_1(t-1)]-2L[u_2]+4L[u_3]-L[t]$$

$$\xrightarrow{L[u_a(t)f(t)]=e^{-as}L[f(t+a)]}L[f(t)]=\frac{2}{s}+e^{-s}L[t]-2\frac{e^{-2s}}{s}+4\frac{e^{-3s}}{s}-\frac{1}{s^2}\Rightarrow L[f(t)]=\frac{2}{s}+e^{-s}(\frac{1}{s^2})-\frac{2}{s}e^{-2s}+\frac{4}{s}e^{-3s}-\frac{1}{s^2}$$

۳ــ گزینه «۱» ابتدا کسر را تجزیه می‌کنیم و سپس تبدیل معکوس می‌گیریم:

$$F(s)=\frac{1}{s^3(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{Ds+E}{s^2+1}\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } s^3(s^2+1)}1=As^2(s^2+1)+Bs(s^2+1)+C(s^2+1)+(Ds+E)s^3$$

$$\Rightarrow 1=(A+D)s^4+(B+E)s^3+(A+C)s^2+Bs+C$$

حالا ضرایب s^0، s^1 تا s^4 را در دو طرف تساوی برابر قرار داده و ثابت‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}s^0\Rightarrow C=1\\ s^1\Rightarrow B=0\\ s^2\Rightarrow A+C=0\Rightarrow A=-C\xrightarrow{C=1}A=-1\\ s^3\Rightarrow B+E=0\Rightarrow B=-E\xrightarrow{B=0}E=0\\ s^4\Rightarrow A+D=0\Rightarrow A=-D\xrightarrow{A=-1}D=1\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{s^3(s^2+1)}=\frac{-1}{s}+\frac{1}{s^3}+\frac{s}{s^2+1}$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}}L^{-1}[\frac{-1}{s}+\frac{1}{s^3}+\frac{s}{s^2+1}]=-L^{-1}[\frac{1}{s}]+L^{-1}[\frac{1}{s^3}]+L^{-1}[\frac{s}{s^2+1}]=-1+\frac{t^2}{2}+\cos t$$

۴ــ گزینه «۴» کسر داده شده را ساده می‌کنیم (چون دلتای مخرج کوچک‌تر از صفر است ($16-20=-4<0$)، باید مخرج را به صورت مربع کامل بنویسیم):

$$F(s)=\frac{s^2+4s+3}{(s^2+4s+5)^2}=\frac{(s+1)(s+3)}{((s+2)^2+1)^2}=\frac{(s+2-2+1)+(s+2+1)}{((s+2)^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow F(s)=\frac{((s+2)-1)(s+2+1)}{((s+2)^2+1)^2}\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}}f(t)=L^{-1}[\frac{(s+2)-1}{(s+2)^2+1}\times\frac{(s+2)+1}{(s+2)^2+1}]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]}f(t)=e^{-2t}L^{-1}[\frac{s-1}{s^2+1}\times\frac{s+1}{s^2+1}]=e^{-2t}L^{-1}[\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}]$$

عبارت درون پرانتز برابر $-\dfrac{d}{ds}(\dfrac{s}{s^2+1})$ است. از طرفی طبق قضیه مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس داریم:

$$\xrightarrow{L^{-1}[F'(s)]=-tL^{-1}[F(s)]}f(t)=e^{-2t}L^{-1}[\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}]=e^{-2t}(-tL^{-1}[\frac{-s}{s^2+1}])=te^{-2t}L^{-1}[\frac{s}{s^2+1}]\Rightarrow f(t)=te^{-2t}\cos t$$

۵ـ گزینه «۴» می‌دانیم که طبق قضیه تبدیل لاپلاس مشتقات تابع، $L[f'''] = s^3 L[f] - s^2 f(0) - sf(0) - f''(0)$ است.

در صورت حدگیری از طرفین تساوی به‌ازای $s \to \infty$ به $\lim\limits_{s\to\infty} L[f'''] = \lim\limits_{s\to\infty} (s^3 L[f] - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0))$ می‌رسیم که مطابق با آنچه که در درسنامه دوم گفته شد، سمت چپ تساوی برابر صفر است و با ساده‌سازی سمت راست آن داریم:

$$\lim_{s\to\infty} (s^3 L[f] - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)) = 0 \Rightarrow f''(0) = \lim_{s\to\infty} (s^3 L[f] - s^2 f(0) - sf'(0))$$

حالا باید $f(0)$ و $f'(0)$ را محاسبه نماییم:

$$\begin{cases} f(0) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s) = \lim\limits_{s\to\infty} s \dfrac{1}{s^2(s-4)} = 0 \\ f'(0) = \lim\limits_{s\to\infty} (s^2 L[f] - sf(0)) \xrightarrow{f(0)=0} f'(0) = \lim\limits_{s\to\infty} s^2 L[f] = \lim\limits_{s\to\infty} s^2 \dfrac{1}{s^2(s-4)} = 0 \end{cases}$$

بنابراین رابطه $f''(0)$ به $f''(0) = \lim\limits_{s\to\infty} s^3 L[f]$ ساده می‌شود. در نتیجه با محاسبه این حد، به $f''(0)$ دست پیدا می‌کنیم:

$$f''(0) = \lim_{s\to\infty} s^3 \frac{1}{s^2(s-4)} = 1$$

۶ـ گزینه «۱» با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$، انتگرال مفروض برابر است با:

$$I = \int_0^\infty e^{-2t} \frac{e^t - \cos t}{t} dt = L[\frac{e^t - \cos t}{t}]|_{s=2} \xrightarrow{L[\frac{f(t)}{t}] = \int_s^\infty L[f(t)]ds} I = (\int_s^\infty L[e^t - \cos t]ds)|_{s=2}$$

$$I = (\int_s^\infty (\frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+1})ds)|_{s=2} = ([\mathrm{Ln}(s-1) - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(s^2+1)]|_s^\infty)|_{s=2} = -\mathrm{Ln}\frac{s-1}{\sqrt{s^2+1}}|_{s=2} = -\mathrm{Ln}\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow I = \mathrm{Ln}\sqrt{5} = \mathrm{Ln}\,5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,5$$

۷ـ گزینه «۲» اگر تبدیل لاپلاس y را به‌صورت $\int_0^\infty e^{-st} y(t)\,dt$ تعریف کنیم، انتگرال $\int_0^\infty y(t)$ همان $L[y(t)]|_{s=0}$ است. از معادله داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L[y''] + L[y'] + 2L[y] = L[(2+\sin t)\delta(t - \frac{\pi}{2})] \frac{L[y''] = s^2 L[y] - sy(0) - y'(0)}{L[y'] = sL[y] - y(0)}$$

$$\Rightarrow s^2 L[y] - sy(0) - y'(0) + sL[y] - y(0) + 2L[y] = e^{-\frac{\pi}{2}s}(2 + \sin\frac{\pi}{2})$$

$$\xrightarrow{y(0)=y'(0)=1} (s^2 + s + 2)L[y] - s - 2 = 3e^{-\frac{\pi}{2}s} \Rightarrow L[y] = \frac{s + 2 + 3e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2 + s + 2}$$

حالا در $L[y]$ به s مقدار صفر می‌دهیم:

$$\int_0^\infty y(t)\,dt = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$$

۸ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ است، پس انتگرال خواسته شده تبدیل لاپلاس $5y(t)$ به ازای $s=1$ است. با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین معادله دیفرانسیل داریم:

$$y'' + 2y' + 2y = t(1 - u_\pi(t)) \Rightarrow L[y''] + 2L[y'] + 2L[y] = L[t(1 - u_\pi(t))]$$

از قضیه تبدیل لاپلاس مشتقات تابع، $L[y'] = sL[y] - y(0)$ و $L[y''] = s^2 L[y] - sy(0) - y'(0)$ می‌باشد که با توجه به شرایط اولیه داده شده، $L[y'] = sL[y] - 1$ و $L[y''] = s^2 L[y] - s$ حاصل می‌شوند. با قرار دادن این دو در تساوی فوق داریم:

$$s^2 L[y] - s + 2sL[y] - 2 + 2L[y] = \frac{1}{s^2} - L[tu_\pi(t)] \xrightarrow{L[u_a(t)f(t)] = e^{-as}L[f(t+a)]} (s^2 + 2s + 2)L[y] - s - 2 = \frac{1}{s^2} - e^{-\pi s}L[t+\pi]$$

$$\Rightarrow (s^2 + 2s + 2)L[y] = \frac{1}{s^2} + s + 2 - e^{-\pi s}(\frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s}) \xrightarrow{\text{جایگذاری } s=1} 5L[y] = 1 + 1 + 2 - e^{-\pi}(1+\pi) = 4 - e^{-\pi}(1+\pi)$$

۹ـ گزینه «۲» با کمی ساده‌سازی انتگرال داخلی را به فرم ضرب پیچشی نوشته و داریم:

$$I=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{x} e^{6(x-t)}.e^{-5x}\sin t\,dtdx=\int_{0}^{\infty}e^{-5x}\left(\int_{0}^{x}e^{6(x-t)}\sin t\,dt\right)dx$$

$$\xrightarrow{f*g=\int_0^x f(x-t)g(t)dt} I=\int_{0}^{\infty}e^{-5x}(e^{6x}*\sin x)\,dx \xrightarrow{\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=F(s)} I=L[e^{6x}*\sin x]\big|_{s=5}$$

$$\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} I=(L[e^{6x}]L[\sin x])\big|_{s=5}=\left(\frac{1}{s-6}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right)\Big|_{s=5}=-\frac{1}{25+1}=-\frac{1}{26}$$

۱۰ـ گزینه «۳» برای محاسبه تبدیل لاپلاس تابع مفروض به کمک قضایای تبدیل لاپلاس، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{L[\frac{f(t)}{t}]=\int_s^\infty L[f(t)]ds} L\left[\frac{\cos x-e^x}{x}\right]=\int_{s}^{\infty}L[\cos x-e^x]ds=\int_{s}^{\infty}\left(\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s-1}\right)ds$$

$$=\left[\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(s^2+1)-\mathrm{Ln}(s-1)\right]\Big|_s^\infty=\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{s^2+1}}{s-1}\Big|_s^\infty=0-\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{s^2+1}}{s-1}=\mathrm{Ln}\frac{s-1}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$\xrightarrow{L[\int_0^t f(t)dt]=\frac{L[f(t)]}{s}} L\left[\int_{0}^{t}\left(\frac{\cos x-e^x}{x}\right)dx\right]=\frac{1}{s}L\left[\frac{\cos x-e^x}{x}\right]=\frac{1}{s}\mathrm{Ln}\frac{s-1}{\sqrt{s^2+1}}$$

۱۱ـ گزینه «۱» برای حل این سؤال از قضایای اول انتقال، تبدیل لاپلاس مشتقات تابع و تبدیل لاپلاس پیچش استفاده کرده و داریم:

$$F(s)=L\left[e^t\frac{d}{dt}(\sin t*\cos t)\right]\xrightarrow{L[e^{at}f(t)]=F(s-a)}F(s)=L\left[\frac{d}{dt}(\sin t*\cos t)\right]\Big|_{s\to s-1}$$

$$\xrightarrow{L[f']=sL[f]-f(0)} F(s)=(sL[\sin t*\cos t]-\sin(0)*\cos(0))\big|_{s\to s-1}$$

$$\xrightarrow{\sin(0)*\cos(0)=0} F(s)=(s-1)(L[\sin t*\cos t]\big|_{s\to s-1})\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]}$$

$$F(s)=(s-1)(L[\sin t]L[\cos t])\big|_{s\to s-1}=(s-1)\left(\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1}\right)\Big|_{s\to s-1}=(s-1)\frac{s-1}{((s-1)^2+1)^2}\Rightarrow F(s)=\frac{(s-1)^2}{[(s-1)^2+1]^2}=\left(\frac{s-1}{s^2-2s+2}\right)^2$$

۱۲ـ گزینه «۲» از معادله دیفرانسیل انتگرالی داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم و داریم:

$$L[y']+2L[y]+L\left[\int_{0}^{x}y(t)\,dt\right]=0$$

از قضیه تبدیل لاپلاس مشتقات تابع، $L[y']=sL[y]-y(0)$ است که با فرض $y(0)=1$، نتیجه $L[y']=sL[y]-1$ است. همچنین طبق قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال $L[\int_0^x y(t)dt]=\frac{L[y(x)]}{s}$ است. پس داریم:

$$sL[y]-1+2L[y]+\frac{L[y]}{s}=0\Rightarrow L[y]\left(s+2+\frac{1}{s}\right)=1\Rightarrow L[y]\left(\frac{s^2+2s+1}{s}\right)=1\Rightarrow L[y]=\frac{s}{s^2+2s+1}=\frac{s}{(s+1)^2}$$

۱۳ـ گزینه «۱» این تابع متناوب با دوره تناوب $T=4$ است و ضابطه آن در یک دوره تناوبش برابر $\begin{cases}2 & 0<t<2\\ -2 & 2<t<4\end{cases}$ است. حالا از رابطه تبدیل لاپلاس توابع متناوب استفاده کرده و داریم:

$$\xrightarrow{F(s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt} F(s)=\frac{1}{1-e^{-4s}}\left(\int_{0}^{2}2e^{-st}dt-\int_{2}^{4}2e^{-st}dt\right)$$

$$\Rightarrow F(s)=\frac{1}{1-e^{-4s}}\left(\frac{2e^{-st}}{-s}\Big|_0^2+\frac{2e^{-st}}{s}\Big|_2^4\right)=\frac{1}{1-e^{-4s}}\left(\frac{2}{s}(1-e^{-2s})+\frac{2}{s}(e^{-4s}-e^{-2s})\right)$$

$$\Rightarrow F(s)=\frac{2}{s(1-e^{-4s})}(1-e^{-2s}+e^{-4s}-e^{-2s})=\frac{2}{s(1-e^{-4s})}(1-2e^{-2s}+e^{-4s})$$

$$\Rightarrow F(s)=\frac{2}{s(1-e^{-4s})}(1-e^{-2s})^2\xrightarrow{1-e^{-4s}=(1+e^{-2s})(1-e^{-2s})}F(s)=\frac{2(1-e^{-2s})^2}{s(1+e^{-2s})(1-e^{-2s})}\Rightarrow F(s)=\frac{2(1-e^{-2s})}{s(1+e^{-2s})}$$

۱۴ـ گزینه «۲» با بازنویسی جمله انتگرالی $\int_0^t e^{t-x}y(x)\,dx$ به فرم ضرب پیچشی $e^t * y(t)$ در معادله، از طرفین تساوی تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$y(t)+e^t*y(t)=2t-3 \xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس می‌گیریم}} L[y(t)]+L[e^t*y(t)]=L[2t-3]$$

$$\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} L[y(t)]+L[e^t]L[y(t)]=2L[t]-3L[1] \xrightarrow{L[y(t)]=Y(s)} Y(s)+\frac{1}{s-1}Y(s)=\frac{2}{s^2}-\frac{3}{s} \Rightarrow$$

$$Y(s)(1+\frac{1}{s-1})=\frac{2-3s}{s^2} \Rightarrow Y(s)\,(\frac{s-1+1}{s-1})=\frac{2-3s}{s^2}$$

$$Y(s)\,\frac{s}{s-1}=\frac{2-3s}{s^2} \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } \frac{s-1}{s}} Y(s)=\frac{(2-3s)(s-1)}{s^3}=\frac{-3s^2+5s-2}{s^3}=-\frac{3}{s}+\frac{5}{s^2}-\frac{2}{s^3}$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}} y(t)=L^{-1}[-\frac{3}{s}+\frac{5}{s^2}-\frac{2}{s^3}]=-3+5t-\frac{2t^2}{2}=-3+5t-t^2$$

۱۵ـ گزینه «۲» از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L[f(t)]=L[te^{-t}]+L[\int_0^t \alpha f(t-\alpha)e^{-\alpha}d\alpha] \Rightarrow F(s)=-\frac{d}{ds}L[e^{-t}]+L[f(t)*te^{-t}] \Rightarrow F(s)=-\frac{d}{ds}(\frac{1}{s+1})+F(s)L[te^{-t}]$$

$$\Rightarrow F(s)=\frac{1}{(s+1)^2}+F(s)(-\frac{d}{ds}L[e^{-t}]) \Rightarrow F(s)=\frac{1}{(s+1)^2}+F(s)(-(\frac{1}{s+1})')$$

$$\Rightarrow F(s)=\frac{1}{(s+1)^2}+F(s)(\frac{1}{(s+1)^2}) \Rightarrow F(s)(1-\frac{1}{(s+1)^2})=\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{s^2+2s+1-1}{(s+1)^2}F(s)=\frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow \frac{s(s+2)}{(s+1)^2}F(s)=\frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow F(s)=\frac{1}{s(s+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2})$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}} f(t)=\frac{1}{2}L^{-1}[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}]=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})$$

۱۶ـ گزینه «۲» به کمک خواص کانولوشن داریم:

$$\xrightarrow{L^{-1}[FG]=L^{-1}[F]*L^{-1}[G]} f(t)=L^{-1}[e^{-3s}\cot^{-1}(s+2)]=L^{-1}[e^{-3s}]*L^{-1}[\cot^{-1}(s+2)]=\delta_3(t)*L^{-1}[\cot^{-1}(s+2)]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s)]=-\frac{1}{t}L^{-1}[F'(s)]} f(t)=\delta_3(t)*(-\frac{1}{t}L^{-1}[\frac{d}{ds}\cot^{-1}(s+2)])=-\delta_3(t)*(\frac{1}{t}L^{-1}[\frac{-1}{(s+2)^2+1}])$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]} f(t)=-\delta_3(t)*\frac{e^{-2t}}{t}L^{-1}[\frac{-1}{s^2+1}]=-\delta_3(t)*\frac{e^{-2t}}{t}(-\sin t) \Rightarrow f(t)=\delta_3(t)*e^{-2t}\frac{\sin t}{t}$$

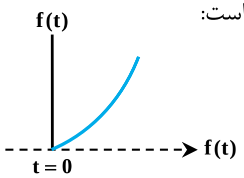
۱۷ـ گزینه «۳» از قضیه مقدار نهایی داریم:

$$\xrightarrow{\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)} \lim_{t\to\infty} i(t)=\lim_{s\to 0} s\frac{10s+4}{s(s+1)(s^2+4s+5)}=\frac{4}{1\times(5)}=\frac{4}{5}$$

۱۸ـ گزینه «۳» به کمک نکات گفته شده در درسنامه دوم به محاسبه $f(0)$، $f'(0)$ و $f''(0)$ می‌پردازیم:

$$\begin{cases} f(0)=\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)=\lim\limits_{s\to\infty} s\dfrac{e^{-\pi s^2}+1}{s^3}=0 \\ f'(0)=\lim\limits_{s\to\infty}(s^2F(s)-sf(0)) \xrightarrow{f(0)=0} f'(0)=\lim\limits_{s\to\infty} s^2F(s)=\lim\limits_{s\to\infty} s^2\dfrac{e^{-\pi s^2}+1}{s^3}=0 \\ f''(0)=\lim\limits_{s\to\infty}(s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)) \xrightarrow{f(0)=f'(0)=0} f''(0)=\lim\limits_{s\to\infty} s^3F(s)=\lim\limits_{s\to\infty} s^3\dfrac{e^{-\pi s^2}+1}{s^3}=\lim\limits_{s\to\infty}(1+e^{-\pi s^2})=1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار در مبدأ دارای تقعر رو به بالا و مینیمم نسبی است. یعنی $f(t)$ اکیداً صعودی است و شکل آن به‌صورت روبه‌رو است:



۱۹ـ گزینه «۲» از معادله دیفرانسیل اول نسبت به t مشتق گرفته و سپس معادله جدید را با معادله دوم از دستگاه جمع می‌کنیم:

$$x''' + 2y'' + y' = 1 - \cos t \xrightarrow{\text{جمع با معادله دوم}} x''' + x' + (2y'' + y') - (2y'' + y') = 1 - \cos t + \cos t \Rightarrow x''' + x' = 1$$

حالا باید از معادله، تبدیل لاپلاس گرفته و تبدیل لاپلاس مشتقات را برحسب لاپلاس x بنویسیم:

$$L[x'''] + L[x'] = L[1] \xrightarrow[L[x''']=s^3L[x]-s^2x(0)-sx'(0)-x''(0)]{L[x']=sL[x]-x(0)} s^3L[x] - s^2x(0) - sx'(0) - x''(0) + sL[x] - x(0) = \frac{1}{s}$$

$$\xrightarrow{x(0)=0\ ,\ x'(0)=1} (s^3 + s)L[x] = \frac{1}{s} + s + x''(0)$$

با جایگذاری $t = 0$ در معادله اول دستگاه داده شده، $x''(0) = 0$ به‌دست می‌آید.

$$s(s^2 + 1)L[x] = \frac{1}{s} + s \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } s(s^2+1)} L[x] = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} + \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\Rightarrow L[x] = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{s^2} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}} x(t) = L^{-1}[\frac{1}{s^2}] = t$$

۲۰ـ گزینه «۱» با انتقال جمله e^{4t} به داخل انتگرال و ساده‌سازی داریم:

$$f(t) = \int_0^t e^{4(t-x)} \frac{\delta(x - \frac{\pi}{2})\sin 3x}{x} dx \xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)dx = f*g} f(t) = e^{4t} * \frac{\delta(x - \frac{\pi}{2})\sin 3x}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس می‌گیریم}} L[f(t)] = L[e^{4t} * \frac{\delta(x - \frac{\pi}{2})\sin 3x}{x}] \xrightarrow{L[f*g]=[f]L[g]} L[f(t)] = L[e^{4t}]L[\frac{\delta(x - \frac{\pi}{2})\sin 3x}{x}]$$

$$\Rightarrow L[f(t)] = \frac{1}{s-4} L[\delta(x - \frac{\pi}{2})\frac{\sin 3x}{x}] \xrightarrow{L[\delta_a(t)f(t)]=e^{-as}f(a)} L[f(t)] = \frac{1}{s-4} e^{-\frac{\pi}{2}s} (\frac{\sin 3\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}) \Rightarrow L[f(t)] = -\frac{2}{\pi}\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s-4}$$

آزمون (۳)

۱ـ گزینه «۲» با استفاده از قضیه انتقال داریم:

$$F(s)=L[e^{3t}(2\cos 5t-3\sin 5t)]=(2L[\cos 5t]-3L[\sin 5t])|_{s\to s-3}$$

$$\Rightarrow F(s)=(2\frac{s}{s^2+25}-3\frac{5}{s^2+25})|_{s\to s-3}=\frac{2s-15}{s^2+25}|_{s\to s-3}\quad \Rightarrow F(s)=\frac{2(s-3)-15}{(s-3)^2+25}=\frac{2s-6-15}{s^2-6s+9+25}=\frac{2s-21}{s^2-6s+34}$$

۲ـ گزینه «۲» در رابطه داده شده در صورت مسأله به‌جای ν مقدار ۰ قرار می‌دهیم:

$$\frac{d}{dx}J_0(x)=J_1(x)$$

حالا با لاپلاس‌گیری داریم:

$$L[J_1(x)]=L[-\frac{d}{dx}J_0(x)]\xrightarrow{L[f']=sL[f]-f(0)}L[J_1(x)]=-sL[J_0(x)]+J_0(0)$$

$$\xrightarrow[L[J_0(x)]=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}]{J_0(0)=1} L[J_1(x)]=-s\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}+1=1-\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$$

۳ـ گزینه «۴» با ساده‌سازی تابع $F(s)$ داده شده داریم:

$$F(s)=6e\,e^s\frac{s-4}{(s^2-8s+25)^2}=6e\,e^s\frac{s-4}{((s-4)^2+9)^2}\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}} f(t)=6eL^{-1}[e^s\frac{s-4}{((s-4)^2+9)^2}]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[e^{-as}F(s)]=u_a(t)L^{-1}[F(s)]|_{t\to t-a}} f(t)=6e\,u_{-1}(t)L^{-1}[\frac{s-4}{((s-4)^2+9)^2}]|_{t\to t+1}$$

حالا باید لاپلاس معکوس $\frac{s-4}{((s-4)^2+9)^2}$ را محاسبه نماییم. طبق قضیه اول انتقال، $L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]$. پس $L^{-1}[\frac{s-4}{((s-4)^2+9)^2}]=e^{4t}L^{-1}[\frac{s}{(s^2+9)^2}]$. در گام بعدی باید لاپلاس معکوس $\frac{s}{(s^2+9)^2}$ را به‌دست آوریم. توجه کنید که این عبارت، مشتق $\frac{-\frac{1}{2}}{s^2+9}$ است. پس از قضیه مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس بهره می‌گیریم و داریم:

$$\xrightarrow{L^{-1}[F'(s)]=-tL^{-1}[F(s)]}L^{-1}[\frac{s}{(s^2+9)^2}]=-tL^{-1}[\frac{-\frac{1}{2}}{s^2+9}]=\frac{t}{2}\,\frac{\sin 3t}{3}=\frac{1}{6}t\sin 3t$$

حالا جواب نهایی مسأله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(t)=6eu_{-1}(t)\ (e^{4t}\times\frac{1}{6}t\sin 3t)|_{t\to t+1}=eu(t+1)e^{4(t+1)}(t+1)\sin 3(t+1)$$

$$\Rightarrow f(t)=u(t+1)e^{4t+5}(t+1)\sin 3(t+1)=u(t+1)e^{4t+5}(t+1)\sin 3(t+1)$$

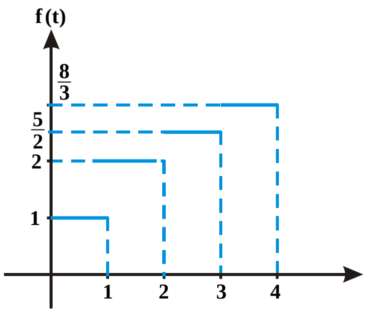
۴ـ گزینه «۱» از آنجا که $|e^{-s}|<1$ است پس می‌توان عبارت $\frac{1}{1+e^{-s}}$ را به صورت سری نمایش داد.

$$\frac{1}{1+e^{-s}}=1+e^{-s}+\frac{e^{-2s}}{2!}+\frac{e^{-3s}}{3!}+\frac{e^{-4s}}{4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-ns}}{n!}$$

حالا $\frac{1}{s}(\frac{1}{1+e^{-s}})$ نیز برابر $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{e^{-ns}}{s}$ است. و تبدیل معکوس آن برابر است با:

$$f(t)=L^{-1}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{e^{-ns}}{s}]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}L^{-1}[\frac{e^{-ns}}{s}]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n(t)}{n!}$$

$$f(t)=u_0+u_1+\frac{u_2}{2}+\frac{u_3}{6}+\cdots=\begin{cases}1 & 0<t<1\\ 2 & 1<t<2\\ 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2} & 3<t<3\\ \frac{5}{2}+\frac{1}{6}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3} & 3<t<4\end{cases}$$



بنابراین $f(t)$ به صورت پلکانی است.

۵ـ گزینه «۳» با توجه به فرم انتگرالی تعریف تبدیل لاپلاس داریم:

$$I=\int_0^{\infty} e^{-t}\frac{\sin^2 t}{t}dt = L[\frac{\sin^2 t}{t}]\Big|_{s=1}$$

پس باید لاپلاس $\frac{\sin^2 t}{t}$ را در $s=1$ محاسبه نماییم:

$$\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}\Rightarrow L^{-1}[\sin^2 t]=\frac{1}{2}L^{-1}[1-\cos 2t]=\frac{1}{2}(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4})$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[\frac{f(t)}{t}]=\int_s^{\infty}L[f(t)]ds} L[\frac{\sin^2 t}{t}]=\int_s^{\infty}L[\sin^2 t]ds=\frac{1}{2}\int_s^{\infty}(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4})ds$$

$$\Rightarrow L[\frac{\sin^2 t}{t}]=\frac{1}{2}[\mathrm{Ln}\,s-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(s^2+4)]\Big|_s^{\infty}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}\Big|_s^{\infty}=\frac{1}{2}(0-\mathrm{Ln}\frac{s}{\sqrt{s^2+4}})=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}$$

حالا حاصل عبارت فوق را به ازای $s=1$ محاسبه می‌کنیم:

$$\int_0^{\infty}e^{-t}\frac{\sin^2 t}{t}dt=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}\Big|_{s=1}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\sqrt{5}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,5^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\mathrm{Ln}\,5$$

۶ـ گزینه «۲» از معادله دیفرانسیل داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

$$L[ty'']+L[y']+L[ty]=L[\delta_{\pi}(t)]\xrightarrow{L[tf(t)]=-\frac{d}{ds}L[f(t)]}$$

$$-\frac{d}{ds}L[y'']+L[y']-\frac{d}{ds}L[y]=e^{-\pi s}\Rightarrow -\frac{d}{ds}(L[y'']+L[y])+L[y']=e^{-\pi s}$$

حالا از قضیه تبدیل لاپلاس مشتقات تابع استفاده می‌کنیم:

$$\xrightarrow[L[f']=sL[f]-f(0)]{L[f'']=s^2L[f]-sf(0)-f'(0)} -\frac{d}{ds}(s^2L[y]-sy(0)-y'(0)+L[y])+sL[y]-y(0)=e^{-\pi s}$$

$$\xrightarrow{y(0)=1,\ y'(0)=0} -\frac{d}{ds}(s^2L[y]+L[y]-s)+sL[y]-1=e^{-\pi s}$$

$$\xrightarrow{L[y]=Y} -\frac{d}{ds}((s^2+1)Y-s)+sY-1=e^{-\pi s}\Rightarrow -(2sY+(s^2+1)Y'-1)+sY-1=e^{-\pi s}$$

$$-(s^2+1)Y'-2sY+sY+1-1=e^{-\pi s}\Rightarrow -(s^2+1)Y'-sY=e^{-\pi s}\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } -(s^2+1)} Y'+\frac{s}{s^2+1}Y=-\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

۷ـ گزینه «۳» از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L[y'']+4L[y]=5L[\delta_3(t)]+L[\cos 2t]$$

$$\xrightarrow{L[f'']=s^2L[f]-sf(0)-f'(0)} s^2L[y]-sy(0)-y'(0)+4L[y]=5e^{-3s}+\frac{s}{s^2+4}$$

$$\xrightarrow{y(0)=y'(0)=0} s^2L[y]+4L[y]=5e^{-3s}+\frac{s}{s^2+4}\Rightarrow L[y](s^2+4)=5e^{-3s}+\frac{s}{s^2+4}\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } s^2+4} L[y]=\frac{5e^{-3s}}{s^2+4}+\frac{s}{(s^2+4)^2}$$

حالا طبق قضیه تغییر مقیاس؛ $L[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$؛ در نتیجه داریم:

$$\xrightarrow{a=\frac{1}{2}} L[y(\frac{t}{2})]=\frac{1}{\frac{1}{2}}L[y(t)]\Big|_{s\to\frac{s}{\frac{1}{2}}=2s}\Rightarrow L[y(\frac{t}{2})]=2\frac{5e^{-6s}}{(2s)^2+4}+\frac{2s}{((2s)^2+4)^2}$$

$$\Rightarrow L[y(\frac{t}{2})]=\frac{10e^{-6s}}{4(s^2+1)}+\frac{2s}{16(s^2+1)^2}=\frac{5}{2}\frac{e^{-6s}}{s^2+1}+\frac{1}{8}\frac{s}{(s^2+1)^2}$$

۸ـ گزینه «۲» طبق خاصیت تابع دلتای دیراک $\int\delta(t-a)g(t)dt=g(a)$ داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^2(t)\delta(t-\frac{\pi}{4})dt=\sin^2(\frac{\pi}{4})=(\frac{1}{\sqrt{2}})^2=\frac{1}{2}$$

۹ـ گزینه «۱» با به‌کارگیری قضایای انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس، تبدیل لاپلاس از انتگرال، و قضیه اول انتقال به محاسبه تبدیل لاپلاس تابع داده شده می‌پردازیم:

$$\xrightarrow{L[\frac{f(t)}{t}]=\int_s^\infty L[f(t)]ds} L[\frac{e^{-2t}-e^{-t}}{t}]=\int_s^\infty L[e^{-2t}-e^{-t}]ds=\int_s^\infty(\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+1})ds=\mathrm{Ln}\frac{s+2}{s+1}\Big|_s^\infty=0-\mathrm{Ln}\frac{s+2}{s+1}=\mathrm{Ln}\frac{s+1}{s+2}$$

$$\xrightarrow{L[\int_0^t f(t)dt]=\frac{L[f(t)]}{s}} L[\int_0^t\frac{e^{-2u}-e^{-u}}{u}du]=\frac{1}{s}L[\frac{e^{-2u}-e^{-u}}{u}]=\frac{1}{s}\mathrm{Ln}\frac{s+1}{s+2}$$

$$\xrightarrow{L[e^{at}f(t)]=L[f(t)]|_{s\to s-a}} L[e^{3t}\int_0^t\frac{e^{-2u}-e^{-u}}{u}du]=L[\int_0^t\frac{e^{-2u}-e^{-u}}{u}du]|_{s\to s-3}$$

$$\Rightarrow L[e^{3t}\int_0^t\frac{e^{-2u}-e^{-u}}{u}du]=\frac{1}{s-3}\mathrm{Ln}\frac{(s-3)+1}{(s-3)+2}=\frac{1}{s-3}\mathrm{Ln}\frac{s-2}{s-1}$$

۱۰ـ گزینه «۴» انتگرال به‌کار رفته در معادله انتگرالی، ضرب پیچشی $\sin t*y'(t)$ است. همچنین تابع سمت راست تساوی به کمک تابع پله به‌صورت $1-u_{2\pi}(t)+\cos t\,u_{2\pi}(t)$ نوشته می‌شود. با جایگذاری این موارد در معادله، از طرفین تساوی تبدیل لاپلاس گرفته و با قضایای حاکم بر تبدیل لاپلاس، $y(t)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$y'(t)-\sin t*y'(t)=1-u_{2\pi}(t)+\cos t\,u_{2\pi}(t)\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس می‌گیریم}}L[y']-L[\sin t*y']=L[1]-L[u_{2\pi}(t)]+L[\cos t\,u_{2\pi}(t)]$$

حالا از قضایای تبدیل لاپلاس از مشتقات تابع ($L[f']=sL[f]-f(0)$)، تبدیل لاپلاس ضرب پیچشی توابع ($L[f*g]=L[f]L[g]$) و قضیه دوم انتقال ($L[u_a(t)f(t)]=e^{-as}L[f(t+a)]$) استفاده می‌کنیم:

$$sL[y]-y(0)-L[\sin t]L[y']=\frac{1}{s}-e^{-2\pi s}+e^{-2\pi s}L[\cos(t+2\pi)]\xrightarrow[\cos(\alpha+2\pi)=\cos\alpha]{y(0)=0}$$

$$sL[y]-\frac{1}{s^2+1}(sL[y])=\frac{1}{s}-\frac{e^{-2\pi s}}{s}+e^{-2\pi s}L[\cos t]\Rightarrow L[y](s-\frac{s}{s^2+1})=\frac{1}{s}-\frac{e^{-2\pi s}}{s}+e^{-2\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow L[y](\frac{s^3+s-s}{s^2+1})=\frac{1}{s}+e^{-2\pi s}(\frac{-1}{s}+\frac{s}{s^2+1})\Rightarrow L[y]\frac{s^3}{s^2+1}=\frac{1}{s}+e^{-2\pi s}(\frac{-1}{s}+\frac{s}{s^2+1})=\frac{1}{s}+e^{-2\pi s}\frac{-1}{s(s^2+1)}\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر }\frac{s^2+1}{s^3}}$$

$$L[y]=\frac{s^2+1}{s^4}+e^{-2\pi s}(-\frac{1}{s^4})=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^4}-e^{-2\pi s}\frac{1}{s^4}$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}}y=L^{-1}[\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^4}-e^{-2\pi s}\frac{1}{s^4}]\xrightarrow{L^{-1}[e^{-as}F(s)]=u_a(t)L^{-1}[F(s)]|_{t\to t-a}}$$

$$y=t+\frac{t^3}{3!}-u_{2\pi}(t)L^{-1}[\frac{1}{s^4}]|_{t\to t-2\pi}=t+\frac{t^3}{6}-u_{2\pi}(t)(\frac{t^3}{6})|_{t\to t-2\pi}=t+\frac{t^3}{6}-u_{2\pi}(t)\frac{(t-2\pi)^3}{6}$$

۱۱ــ گزینه «۳» با توجه به نمودار متناوب داده شده، تابع $f(t)$ برابر $|\cos t|$ است. واضح است که دوره تناوب $f(t)$ نیز $T=\pi$ است. بنـابراین از تعریـف تبدیل لاپلاس توابع متناوب یعنی $L[f(t)]=\dfrac{\int_{۰}^{T} e^{-st} f(t)\,dt}{۱-e^{-sT}}$ استفاده کرده و $F(s)$ را محاسبه می‌نماییم:

$$F(s)=\frac{۱}{۱-e^{-\pi s}}\int_{۰}^{\pi} e^{-st}\,|\cos t|\,dt=\frac{۱}{۱-e^{-\pi s}}\left[\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} e^{-st}\cos t\,dt-\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} e^{-st}\cos t\,dt\right]$$

برای محاسبه انتگرال $\int e^{-st}\cos t\,dt$ از روش جدول استفاده می‌کنیم:

مشتق	انتگرال
e^{-st}	$\cos t$
$-se^{-st}$	$+\ \sin t$
$s^{۲}e^{-st}$	$-\ -\cos t$

$$\int e^{-st}\cos t\,dt=e^{-st}\sin t-se^{-st}\cos t-s^{۲}\int e^{-st}\cos t\,dt$$

$$\Rightarrow (s^{۲}+۱)\int e^{-st}\cos t\,dt=e^{-st}(\sin t-s\cos t)\ \Rightarrow\ \int e^{-st}\cos t\,dt=\frac{e^{-st}}{s^{۲}+۱}(\sin t-s\cos t)$$

حالا از جواب انتگرال نامعین فوق استفاده کرده و جواب را در محدوده $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ و $[\frac{\pi}{۲},\pi]$ به‌دست می‌آوریم:

$$\text{I)}\ \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} e^{-st}\cos t\,dt=\frac{e^{-st}}{s^{۲}+۱}(\sin t-s\cos t)\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۱}{s^{۲}+۱}\left(e^{-\frac{\pi}{۲}s}-(-s)\right)=\frac{e^{-\frac{\pi}{۲}s}+s}{s^{۲}+۱}$$

$$\text{II)}\ \int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} e^{-st}\cos t\,dt=\frac{e^{-st}}{s^{۲}+۱}(\sin t-s\cos t)\Big|_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}=\frac{۱}{s^{۲}+۱}\left(se^{-\pi s}-e^{-\frac{\pi}{۲}s}\right)=\frac{se^{-\pi s}-e^{-\frac{\pi}{۲}s}}{s^{۲}+۱}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در } F(s)} F(s)=\frac{۱}{۱-e^{-\pi s}}\left(\frac{s+e^{-\frac{\pi}{۲}s}}{s^{۲}+۱}-\frac{se^{-\pi s}-e^{-\frac{\pi}{۲}s}}{s^{۲}+۱}\right)$$

$$F(s)=\frac{۱}{۱-e^{-\pi s}}\times\frac{۱}{s^{۲}+۱}\left(s(۱-e^{-\pi s})+۲e^{-\frac{\pi}{۲}s}\right)=\frac{s}{s^{۲}+۱}+\frac{۲e^{-\frac{\pi}{۲}s}}{(۱-e^{-\pi s})(s^{۲}+۱)}$$

۱۲ــ گزینه «۳» جمله سمت چپ تساوی، ضرب پیچشی $\frac{۱}{\sqrt{t}}*g(t)$ است. این عبارت را در معادله جایگزین کرده و با لاپلاس‌گیری از معادله، تـابع $g(t)$ را محاسبه می‌نماییم:

$$\frac{۱}{\sqrt{t}}*g(t)=۱+t+t^{۲}\ \xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس می‌گیریم}}\ L\left[\frac{۱}{\sqrt{t}}*g(t)\right]=L[۱]+L[t]+L[t^{۲}]$$

$$\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} L\left[\frac{۱}{\sqrt{t}}\right]L[g(t)]=\frac{۱}{s}+\frac{۱}{s^{۲}}+\frac{۲}{s^{۳}}\ \xrightarrow{L[\frac{۱}{\sqrt{t}}]=L[t^{-\frac{۱}{۲}}]=\frac{\Gamma(-\frac{۱}{۲}+۱)}{s^{-\frac{۱}{۲}+۱}}=\frac{\Gamma(\frac{۱}{۲})}{s^{\frac{۱}{۲}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{۱}{۲}}}}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{۱}{۲}}}L[g(t)]=\frac{۱}{s}+\frac{۱}{s^{۲}}+\frac{۲}{s^{۳}}\ \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } \frac{s^{\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{\pi}}}\ L[g(t)]=\frac{۱}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{s^{\frac{۱}{۲}}}{s}+\frac{s^{\frac{۱}{۲}}}{s^{۲}}+\frac{۲s^{\frac{۱}{۲}}}{s^{۳}}\right)=\frac{۱}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{۱}{s^{\frac{۱}{۲}}}+\frac{۱}{s^{\frac{۳}{۲}}}+\frac{۲}{s^{\frac{۵}{۲}}}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}} g(t)=\frac{۱}{\sqrt{\pi}}L^{-۱}\left[\frac{۱}{s^{۱-\frac{۱}{۲}}}+\frac{۱}{s^{۱+\frac{۱}{۲}}}+\frac{۲}{s^{۱+\frac{۳}{۲}}}\right]\ \xrightarrow{L^{-۱}[\frac{۱}{s^{\alpha+۱}}]=\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+۱)}}\ g(t)=\frac{۱}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{t^{-\frac{۱}{۲}}}{\Gamma(\frac{۱}{۲})}+\frac{t^{\frac{۱}{۲}}}{\Gamma(\frac{۳}{۲})}+\frac{۲t^{\frac{۳}{۲}}}{\Gamma(\frac{۵}{۲})}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\pi}\ ,\ \Gamma(\frac{۳}{۲})=\frac{۱}{۲}\Gamma(\frac{۱}{۲})=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}\ ,\ \Gamma(\frac{۵}{۲})=\frac{۳}{۲}\Gamma(\frac{۳}{۲})=\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۲}\Gamma(\frac{۱}{۲})=\frac{۳\sqrt{\pi}}{۴}} g(t)=\frac{۱}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{۱}{\sqrt{\pi}\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{\frac{۱}{۲}\sqrt{\pi}}+\frac{۲t\sqrt{t}}{\frac{۳}{۴}\sqrt{\pi}}\right)=\frac{۱}{\pi}\left(\frac{۱}{\sqrt{t}}+۲\sqrt{t}+\frac{۸}{۳}t\sqrt{t}\right)$$

۱۳ـ گزینه «۲» از طرفین معادله، تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L[f(t)] = L[e^{-t}] + L[\int_{0}^{t}(t-\tau)f(\tau)d\tau] \xrightarrow{\int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau = t*f(t)} F(s) = \frac{1}{s+1} + L[t*f(t)]$$

$$\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} F(s) = \frac{1}{s+1} + L[t]L[f(t)] \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2}F(s) \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } s^2} s^2F(s) = \frac{s^2}{s+1} + F(s)$$

$$\Rightarrow (s^2-1)F(s) = \frac{s^2}{s+1} \Rightarrow F(s) = \frac{s^2}{(s^2-1)(s+1)} = \frac{s^2}{(s-1)(s+1)^2}$$

تابع $F(s)$ را به صورت کسرهای جزئی می‌نویسیم:

$$F(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} = \frac{A(s+1)^2 + B(s-1)(s+1) + C(s-1)}{(s-1)(s+1)^2} = \frac{(A+B)s^2 + (2A+C)s + A - B - C}{(s-1)(s+1)^2}$$

$$\begin{cases} s^2: A+B=1 \\ s^1: 2A+C=0 \\ s^0: A-B-C=0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{4}, B = \frac{3}{4}, C = -\frac{1}{2} \Rightarrow F(s) = \frac{\frac{1}{4}}{s-1} + \frac{\frac{3}{4}}{s+1} - \frac{\frac{1}{2}}{(s+1)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}} f(t) = L^{-1}[\frac{\frac{1}{4}}{s-1} + \frac{\frac{3}{4}}{s+1} - \frac{\frac{1}{2}}{(s+1)^2}] = \frac{1}{4}e^{t} + \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}L^{-1}[\frac{1}{(s+1)^2}]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[\frac{1}{(s+1)^2}] = -L^{-1}[(\frac{1}{s+1})'] = -te^{-t}} f(t) = \frac{1}{4}e^{t} + \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t} = (\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t)e^{-t} + \frac{1}{4}e^{t}$$

۱۴ـ گزینه «۱» فرض کنید که $F(3s+4)$ ابتدا به صورت $G(s) = F(s+4)$ است و سپس با تغییر مقیاس به $F(3s+4) = G(3s)$ تبدیل می‌شود. بنابراین از قضیه اول انتقال داریم:

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)] = e^{at}L^{-1}[F(s)] = e^{at}f(t)} L^{-1}[F(s+4)] = e^{-4t}L^{-1}[F(s)] = e^{-4t}f(t)$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(as)] = \frac{1}{a}L^{-1}[F(s)]\big|_{t\to\frac{t}{a}} = \frac{1}{a}f(\frac{t}{a})} L^{-1}[F(3s+4)] = L^{-1}[G(3s)] = \frac{1}{3}L^{-1}[G(s)]\big|_{t\to\frac{t}{3}}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[G(s)] = L^{-1}[F(s+4)]} L^{-1}[F(3s+4)] = \frac{1}{3}(e^{-4t}f(t))\big|_{t\to\frac{t}{3}} = \frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}t}f(\frac{t}{3})$$

$$\xrightarrow{f(t) = t^3 + \int_0^t \cos^3 u\,du} L^{-1}[F(3s+4)] = \frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}t}(\frac{t^3}{27} + \int_0^{\frac{t}{3}} \cos^3 u\,du)$$

۱۵ـ گزینه «۱» از دستگاه معادلات داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم و داریم:

$$\begin{cases} L[y_1'']-L[y_2']=L[e^t]+2L[t]=\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{2}{s^2} \\ L[y_2'']+4L[y_2]=-4L[t^2]-10L[1]=-4\dfrac{2}{s^3}-\dfrac{10}{s} \end{cases}$$

حالا از قضیه تبدیل لاپلاس مشتقات تابع داریم:

$$\begin{cases} L[y_2']=sL[y_2]-y_2(0)\xrightarrow{y_2(0)=0}L[y_2']=sL[y_2] \\ L[y_2'']=s^2L[y_2]-sy_2(0)-y_2'(0)\xrightarrow{y_2(0)=y_2'(0)=0}L[y_2'']=s^2L[y_2] \\ L[y_1'']=s^2L[y_1]-sy_1(0)-y_1'(0)\xrightarrow{y_1(0)=0\ ,\ y_1'(0)=3}L[y_1'']=s^2L[y_1]-3 \end{cases}$$

روابط فوق را در دستگاه قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} s^2L[y_1]-3-sL[y_2]=\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{2}{s^2} \\ s^2L[y_2]+4L[y_2]=\dfrac{-8}{s^3}-\dfrac{10}{s} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} s^2L[y_1]=sL[y_2]+\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{2}{s^2}+3 \\ L[y_2]=\dfrac{1}{s^2+4}(\dfrac{-8}{s^3}-\dfrac{10}{s}) \end{cases}$$

معادله دوم را در معادله اول قرار می‌دهیم و داریم:

$$s^2L[y_1]=\frac{s}{s^2+4}(\frac{-8}{s^3}-\frac{10}{s})+\frac{1}{s-1}+\frac{2}{s^2}+3=\frac{s}{s^2+4}(\frac{-8-10s^2}{s^3})+\frac{1}{s-1}+\frac{2}{s^2}+3$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } s^2}L[y_1]=-\frac{8+10s^2}{s^4(s^2+4)}+\frac{1}{s^2(s-1)}+\frac{2}{s^4}+\frac{3}{s^2}$$

برای محاسبه لاپلاس معکوس عبارت فوق نیاز به تفکیک کردن کسر اول و دوم به کسرهای جزئی داریم:

$$\text{I)}\ \frac{-8-10s^2}{s^4(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D}{s^4}+\frac{Es+F}{s^2+4}=\frac{As^3(s^2+4)+Bs^2(s^2+4)+Cs(s^2+4)+D(s^2+4)+(Es+F)s^4}{s^4(s^2+4)}$$

$$=\frac{(A+E)s^5+(B+F)s^4+(4A+C)s^3+(4B+D)s^2+4Cs+4D}{s^4(s^2+4)}$$

$$\begin{cases} s^5: & A+E=0\xrightarrow{A=0}E=0 \\ s^4: & B+F=0\xrightarrow{B=-2}F=2 \\ s^3: & 4A+C=0\xrightarrow{C=0}A=0 \\ s^2: & 4B+D=-10\xrightarrow{D=-2}B=-2 \\ s^1: & 4C=0\Rightarrow C=0 \\ s^0: & 4D=-8\Rightarrow D=-2 \end{cases}\Rightarrow\frac{-8-10s^2}{s^4(s^2+4)}=\frac{-2}{s^2}-\frac{2}{s^4}+\frac{2}{s^2+4}$$

$$\text{II)}\ \frac{1}{s^2(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-1}=\frac{As(s-1)+B(s-1)+Cs^2}{s^2(s-1)}=\frac{(A+C)s^2+(B-A)s-B}{s^2(s-1)}$$

$$\begin{cases} -B=1 \\ B-A=0 \\ A+C=0 \end{cases}\Rightarrow B=-1\ ,\ A=-1\ ,\ C=1\Rightarrow\frac{1}{s^2(s-1)}=\frac{-1}{s}+\frac{-1}{s^2}+\frac{1}{s-1}$$

با داشتن کسرهای تفکیک شده، $L[y_1]$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$L[y_1]=(-\frac{2}{s^2}-\frac{2}{s^4}+\frac{2}{s^2+4})+(-\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s-1})+\frac{2}{s^4}+\frac{3}{s^2}=-\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2+4}+\frac{1}{s-1}$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}}y_1(t)=L^{-1}[-\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2+4}+\frac{1}{s-1}]=-L^{-1}[\frac{1}{s}]+L^{-1}[\frac{2}{s^2+4}]+L^{-1}[\frac{1}{s-1}]$$

$$\Rightarrow y_1(t)=-1+\sin 2t+e^t=\sin 2t+e^t-1$$

۱۶ـ گزینه «۴» جمله e^{-t} را به داخل انتگرال منتقل کرده و فرم کلی انتگرال را به صورت انتگرال پیچشی $f*g=\int_۰^t f(t-x)g(x)dx$ بازنویسی کرده و سپس تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$f(t)=t\int_۰^t e^{-(t-x)}x\,\delta_{\frac{\pi}{۲}}(x)\sin x\,dx = t(e^{-t}*\delta_{\frac{\pi}{۲}}(t)t\sin t)$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس می‌گیریم}} F(s)=L[f(t)]=L[t(e^{-t}*\delta_{\frac{\pi}{۲}}(t)t\sin t)] \xrightarrow{L[tf(t)]=-\frac{d}{ds}L[f(t)]}$$

$$F(s)=-\frac{d}{ds}L[e^{-t}*\delta_{\frac{\pi}{۲}}(t)t\sin t] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} F(s)=-\frac{d}{ds}(L[e^{-t}]L[\delta_{\frac{\pi}{۲}}(t)t\sin t])$$

$$\xrightarrow{L[\delta_a(t)f(t)]=e^{-as}f(a)} F(s)=-\frac{d}{ds}(\frac{۱}{s+۱}.e^{-\frac{\pi}{۲}s}(\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi}{۲}))=-\frac{\pi}{۲}(\frac{e^{-\frac{\pi}{۲}s}}{s+۱})'$$

$$\Rightarrow F(s)=-\frac{\pi}{۲}\,\frac{-\frac{\pi}{۲}e^{-\frac{\pi}{۲}s}(s+۱)-e^{-\frac{\pi}{۲}s}}{(s+۱)^۲}=\frac{\pi^۲}{۴}\,\frac{e^{-\frac{\pi}{۲}s}(s+۱+\frac{۲}{\pi})}{(s+۱)^۲}$$

۱۷ـ گزینه «۲» با انتقال جمله e^t به داخل انتگرال، به انتگرال $\int_۰^t e^{t-u}y''(u)du$ می‌رسیم که همان ضرب پیچشی $e^t*y''(t)$ است. حالا معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$y'-e^t*y''=y+u_۱(t)$$

حالا باید از معادله فوق تبدیل لاپلاس بگیریم. توجه کنید که $L[f*g]=L[f]L[g]$.

$$L[y']-L[e^t]L[y'']=L[y]+L[u_۱(t)] \xrightarrow[L[f'']=s^۲L[f]-sf(۰)-f'(۰)]{L[f']=sL[f]-f(۰)} sL[y]-y(۰)-\frac{۱}{s-۱}(s^۲L[y]-sy(۰)-y'(۰))=L[y]+\frac{e^{-s}}{s}$$

$$\xrightarrow{y(۰)=y'(۰)=۰} sL[y]-\frac{s^۲}{s-۱}L[y]=L[y]+\frac{e^{-s}}{s} \Rightarrow (s-\frac{s^۲}{s-۱}-۱)L[y]=\frac{e^{-s}}{s}\Rightarrow \frac{s(s-۱)-s^۲-(s-۱)}{s-۱}L[y]=\frac{e^{-s}}{s}$$

$$\Rightarrow \frac{s^۲-s-s^۲-s+۱}{s-۱}L[y]=\frac{e^{-s}}{s}\Rightarrow\frac{-۲s+۱}{s-۱}L[y]=\frac{e^{-s}}{s}\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } \frac{s-۱}{-۲s+۱}} L[y]=\frac{e^{-s}(s-۱)}{s(-۲s+۱)}\Rightarrow L[y]=-\frac{۱}{۲}e^{-s}(\frac{s-۱}{s(s-\frac{۱}{۲})})$$

عبارت درون پرانتز را به کسرهای جزئی تفکیک می‌کنیم:

$$\frac{s-۱}{s(s-\frac{۱}{۲})}\equiv\frac{A}{s}+\frac{B}{s-\frac{۱}{۲}}=\frac{(A+B)s-\frac{A}{۲}}{s(s-\frac{۱}{۲})}\Rightarrow\begin{cases}A=۲\\B=-۱\end{cases}$$

پس $L[y]=-\frac{۱}{۲}e^{-s}(\frac{۲}{s}-\frac{۱}{s-\frac{۱}{۲}})$ و لاپلاس معکوس آن برابر خواهد بود با:

$$y(t)=-\frac{۱}{۲}L^{-۱}[e^{-s}(\frac{۲}{s}-\frac{۱}{s-\frac{۱}{۲}})]\xrightarrow{L^{-۱}[e^{-as}F(s)]=u_a(t)L^{-۱}[F(s)]|_{t\to t-a}} y(t)=-\frac{۱}{۲}u_۱(t)L^{-۱}[\frac{۲}{s}-\frac{۱}{s-\frac{۱}{۲}}]|_{t\to t-۱}=-\frac{۱}{۲}u_۱(t)\,(۲-e^{\frac{t}{۲}})|_{t\to t-۱}$$

$$\Rightarrow y(t)=-\frac{۱}{۲}u_۱(t)[۲-e^{\frac{۱}{۲}(t-۱)}]=u_۱(t)(-۱+\frac{۱}{۲}e^{\frac{۱}{۲}(t-۱)})$$

۱۸ـ گزینه «۳» واضح است که باید تابع $f(t)$ را تعیین کنیم. با کمی ساده‌سازی و استفاده از قضایای تبدیل لاپلاس داریم:

$$f(t)=L^{-۱}[\frac{۴+۲e^{-۲s}-۶e^{-۳s}-۳e^{-۵s}}{s}]=۴L^{-۱}[\frac{۱}{s}]+۲L^{-۱}[\frac{e^{-۲s}}{s}]-۶L^{-۱}[\frac{e^{-۳s}}{s}]-۳L^{-۱}[\frac{e^{-۵s}}{s}]$$

$$\xrightarrow{L^{-۱}[e^{-as}F(s)]=U_a(t)L^{-۱}[F(s)]|_{t\to t-a}} f(t)=۴+۲u_۲(t)L^{-۱}[\frac{۱}{s}]|_{t\to t-۲}-۶u_۳(t)L^{-۱}[\frac{۱}{s}]|_{t\to t-۳}-۳u_۵(t)L^{-۱}[\frac{۱}{s}]|_{t\to t-۵}$$

$$\Rightarrow f(t)=۴+۲u_۲(t)-۶u_۳(t)-۳u_۵(t)$$

حالا در عبارت فوق، به‌جای t، عدد ۱ قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{u_۲(۱)=u_۳(۱)=u_۵(۱)=۰} f(t)=۴$$

۱۹ـ گزینه «۴» طبق قضیه دوم انتقال، $L^{-1}[e^{-as}F(s)] = u_a(t)L^{-1}[F(s)]\big|_{t\to t-a}$، در نتیجه داریم:

$$L^{-1}[e^{-2s}\frac{s+2}{s^2+s+3}] = u_2(t)L^{-1}[\frac{s+2}{s^2+s+3}]\Big|_{t\to t-2}.$$

حالا باید لاپلاس معکوس $\frac{s+2}{s^2+s+3}$ را محاسبه نماییم. برای این منظور، مخرج کسر را به فرم مربع کامل می‌نویسیم. (چون دلتای مخرج منفی بوده و غیرقابل تجزیه است):

$$\frac{s+2}{s^2+s+3} = \frac{(s+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}+2}{(s+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+3} = \frac{(s+\frac{1}{2})+\frac{3}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس می‌گیریم}} f(t) = L^{-1}[\frac{(s+\frac{1}{2})+\frac{3}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}}]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]} f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}L^{-1}[\frac{s+\frac{3}{2}}{s^2+\frac{11}{4}}] = e^{-\frac{1}{2}t}(\cos\frac{\sqrt{11}}{2}t+\frac{3}{2}\frac{\sin\frac{\sqrt{11}}{2}t}{\frac{\sqrt{11}}{2}}) = e^{-\frac{1}{2}t}(\cos\frac{\sqrt{11}}{2}t+\frac{3}{\sqrt{11}}\sin\frac{\sqrt{11}}{2}t)$$

پس از محاسبه لاپلاس معکوس $\frac{s+2}{s^2+s+3}$، باید در آن t را تبدیل به $t-2$ کنیم: $\xrightarrow{t\to t-2} e^{-\frac{1}{2}(t-2)}(\cos\frac{\sqrt{11}}{2}(t-2)+\frac{3}{\sqrt{11}}\sin\frac{\sqrt{11}}{2}(t-2))$

در نتیجه، تبدیل معکوس $e^{-2s}\frac{s+2}{s^2+s+3}$ با جایگذاری عبارت فوق در $u_2(t)L^{-1}[\frac{s+2}{s^2+s+3}]\Big|_{t\to t-2}$ برابر خواهد بود با:

$$f(t) = u_2(t)e^{-\frac{1}{2}(t-2)}(\cos(\frac{\sqrt{11}}{2}(t-2))+\frac{3}{\sqrt{11}}\sin(\frac{\sqrt{11}}{2}(t-2)))$$

۲۰ـ گزینه «۲» با محاسبه مشتق $F(s)$ داریم:

$$F'(s) = \frac{-\frac{1}{s^2}}{\sqrt{1+(\frac{1}{s})^2}} = -\frac{1}{s\sqrt{1+s^2}} \xrightarrow{L^{-1}[\frac{F(s)}{s}]=\int_0^t L^{-1}[F(s)]dt} L^{-1}[-\frac{1}{s\sqrt{1+s^2}}] = -\int_0^t L^{-1}[\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}]dt \Rightarrow L^{-1}[F'(s)] = -\int_0^t J_0(t)\,dt$$

از طرفی طبق قضیه مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس داریم:

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s)]=-\frac{1}{t}L[F'(s)]} L^{-1}[\sinh^{-1}(\frac{1}{s})] = -\frac{1}{t}L^{-1}[F'(s)] = -\frac{1}{t}(-\int_0^t J_0(t)\,dt) \Rightarrow L^{-1}[\sinh^{-1}(\frac{1}{s})] = \frac{1}{t}\int_0^t J_0(t)\,dt$$