فصل اول

«مدل‌های شبکه»

مقدمــه

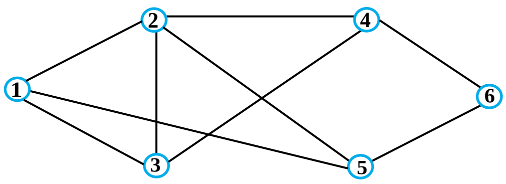
شبکه یکی از حوزه‌های پرکاربرد تحقیق در عملیات است. مطالعات جدید پژوهشگران نشان می‌دهد که ۷۰٪ مسائل برنامه‌ریـزی ریاضـی در دنیـای واقعـی می‌توانند با مدل‌های مرتبط با شبکه نشان داده شوند. اگرچه عمده‌ی مسائل شبکه به صورت برنامه‌ریزی خطی هستند و می‌توانند با روش سیمپلکس حـل شوند، ساختار خاص این گونه مسائل به قسمتی است که روش‌های ساده‌تری برای حل آن‌ها وجود دارد.

این فصل شامل بخش‌های زیر است:

۱ـ مینیمم درخت فراگیر (در برگیرنده، گسترنده، پوشا) ۲ـ کوتاه‌ترین مسیر ۳ـ ماکسیمم جریان

تعاریف شبکه

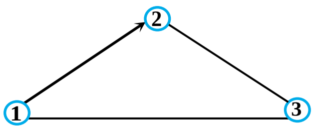
شبکه: یک شبکه، شامل مجموعه‌ای از گره‌ها است که به وسیله‌ی کمان‌ها (شـاخه‌ها) بـه هم متصل شده‌اند. شبکه را با (N, A) نمایش می‌دهند که در آن N مجموعه‌ی گـره‌هـا و A مجموعه‌ی کمان‌ها است. در شکل روبه‌رو دایره‌هایی که با اعداد نشان داده شده‌اند گـره هستند که به صورت مجموعه‌ی $N=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ نمایش داده مـی‌شـوند و کمـان‌هـا خطـوطی هســتند کــه ایــن گــره‌هــا را بــه هــم متصــل مــی‌کننــد و بــا مجموعــه‌ی $A=\{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۵),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶),(۵,۶)\}$ توصیف می‌شوند.



مثال شبکه (N, A)

جریان: متناظر با هر شبکه، نوعی جریان وجود دارد و این جریان به ظرفیت کمان‌های آن محدود است که ممکن است متناهی و یا نامتناهی باشد.

کمان جهت‌دار: اگر جریان در کمان تنها در یک جهت مجاز باشد، یعنی جریان مثبت در یک جهت و جریان صفر در جهت مخالف وجود داشته باشد، به آن کمان، کمـان جهـت‌دار گفته می‌شود. در **شبکه جهت‌دار** همه‌ی کمان‌ها جهت دارند.



کمان جهت‌دار

در شکل روبه‌رو کمان $(۱,۲)$ جهت‌دار است.

مسیر: مسیر دنباله‌ای از کمان‌های مجزا است که دو گره را، صرف‌نظر از جهت جریان در هر کمان، به هم وصل می‌کند.

مسیر جهت‌دار، مسیری است که همه‌ی کمان‌های آن در یک جهت باشند.

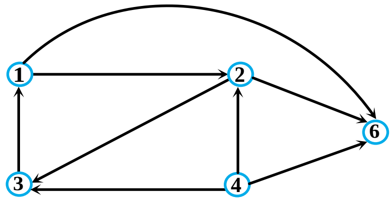
حلقه (دور): مسیری است که یک گره را به خودش متصل می‌کند.

حلقه‌ی جهت‌دار (مدار)، حلقه‌ای است که همه‌ی کمان‌های آن در یک جهت باشند.

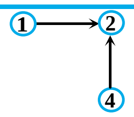
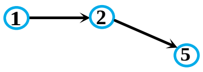
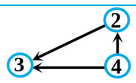
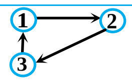
شبکه همبند: شبکه‌ای است که هر *دو گره‌ی متمایز* آن با *حداقل* یک مسیر به هم متصل باشند.

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۱: برای درک بهتر این تعاریف به شکل زیر توجه کنید.



در این شکل داریم:

مسیر	۱→۲→۴	
مسیر جهت‌دار	۱→۲→۵	
حلقه	۲→۳→۴→۲	
حلقه جهت‌دار	۱→۲→۳→۱	

درخت: شبکه‌ی همبندی است که *زیر مجموعه‌ای* از همه گره‌های شبکه را بدون وجود حلقه شامل شود.

درخت فراگیر: شبکه همبندی است که شامل همه‌ی گره‌های شبکه باشد و هیچ حلقه‌ای نداشته باشد.

درخت یکی از مفاهیم اساسی در شبکه است که خواص بسیار جالبی دارد.

نکته۱: درخت، شبکه همبند با مینیمم تعداد کمان‌ها است. یعنی اگر یکی از کمان‌های درخت را حذف کنیم شبکه‌ی حاصل همبند نخواهد بود.

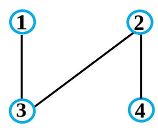
نکته۲: درخت فراگیر، شبکه‌ای بدون حلقه و دارای $n-۱$ کمان است. $(N=\{۱,۲,\dots,n\})$

نکته۳: با اضافه کردن یک کمان به درخت *دقیقاً* یک حلقه‌ی منحصر به فرد ایجاد می‌شود.

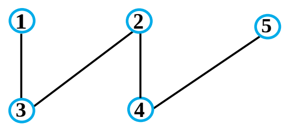
نکته۴: هر دو گره در درخت با یک مسیر *منحصر به فرد* به هم متصل هستند.

نکته۵: درخت حداقل ۲ گره‌ی پایانی دارد (گره‌ی پایانی گره‌ای است که فقط ۱ کمان به آن متصل باشد)

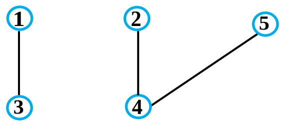
شکل مثال ۱ را در نظر می‌گیریم، در این شبکه داریم:



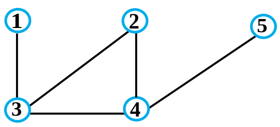
درخت



درخت فراگیر



با حذف یک کمان از درخت فراگیر، شبکه حاصل همبند نخواهد بود.



با اضافه کردن یک کمان به درخت فراگیر دقیقاً یک حلقه ایجاد می‌شود.

مثال۲: شبکه‌ای شامل ۱۰ گره است. درخت فراگیر آن به ترتیب از راست به چپ شامل چند گره و چند کمان است؟

۱) ۱۰ و ۱۰ ۲) ۱۰ و ۹ ۳) ۹ و ۱۰ ۴) ۹ و ۹

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» درخت فراگیر شامل n گره و $n-۱$ کمان باشد.

مثال۳: با توجه به تعریف درخت فراگیر:

۱) با اضافه کردن یک کمان به درخت دقیقاً یک حلقه ایجاد می‌شود.

۲) هر دو گره در درخت با یک مسیر منحصر به فرد به هم متصل هستند.

۳) درخت، شبکه‌ای بدون حلقه و دارای $n-۱$ کمان است.

۴) همه موارد

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۴: در یک شبکه بدون جهت با n گره حداکثر تعداد کمان‌ها برابر است با:

۱) $n-1$ ۲) $(n-1)^2$ ۳) $\frac{n(n-1)}{2}$ ۴) $n(n-1)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» حداکثر تعداد کمان‌ها زمانی به وجود می‌آید که بین هر دو گره یک کمان وجود داشته باشد یعنی: $C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}$

مثال ۵: در یک شبکه همبند با n گره حداقل تعداد کمان‌ها برابر است با:

۱) n ۲) $n-1$ ۳) $\frac{n}{2}$ ۴) $n(n-1)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» حداقل تعداد کمان‌ها در یک شبکه همبند، درخت فراگیر است که $n-1$ کمان دارد.

مثال ۶: اگر یک شبکه بدون جهت با n گره و m کمان، به یک شبکه جهت‌دار تبدیل گردد، آن گاه تعداد گره‌ها و کمان‌ها (به ترتیب از راست به چپ) برابر است با:

۱) $2n$ و $2m$ ۲) $2n$ و m ۳) n و $2m$ ۴) n و m

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در تبدیل شبکه جهت‌دار، تعداد گره‌ها ثابت باقی می‌ماند و تنها به ازای هر کمان بدون جهت، دو کمان جهت‌دار جایگزین می‌کنیم. پس تعداد کمان‌ها دو برابر می‌شود.

الگوریتم مینیمم درخت فراگیر

همان طور که قبلاً اشاره شد در حالت کلی یک شبکه همبند می‌تواند شامل چند درخت فراگیر باشد. درخت فراگیری که مجموع طول (وزن) کمان‌های آن مینیمم باشد، **مینیمم درخت فراگیر** نامیده می‌شود. به‌عبارت دیگر شبکه مینیمم درخت فراگیر، شبکه‌ای است متصل شده، که همه‌ی گره‌ها را در بر گرفته و دارای کمترین مقدار (هزینه، زمان، مسافت و ...) است.

فرض کنید $N = \{1, 2, ..., n\}$ مجموعه‌ی گره‌های شبکه مورد نظر باشد.

تعاریف:

S_k = مجموعه‌ی گره‌هایی است که در تکرار kام به هم مرتبط شده‌اند.

S'_k = مجموعه‌ی گره‌هایی که هنوز به هم مرتبط نشده‌اند $(S'_k = N - S_k)$.

d_{ij} = طول کمان (i, j).

الگوریتم به دست آوردن مینیمم درخت فراگیر شامل گام‌های زیر است:

گام ۰: قرار دهید $S_0 = \phi$ و $S'_0 = N$.

گام ۱: قرار دهید $S_1 = \{1\}$، $S'_1 = N - \{1\}$ و $k = 2$.

گام کلی k: فرض کنید:

$$d_{pq} = \min\{d_{ij} : i \in S_{k-1} , j \in S'_{k-1}\}$$

قرار دهید:

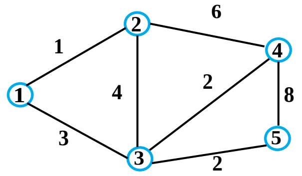
$$S_k = S_{k-1} + \{q\}$$
$$S'_k = S'_{k-1} - \{q\}$$

اگر $S_k = N - 1$، توقف کنید. در غیر این صورت قرار دهید: $k = k + 1$ و این گام را تکرار کنید.

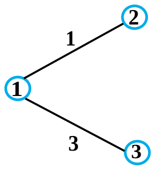
(اگر این مینیمم در بیش از یک اندیس رخ دهد یکی را به دلخواه انتخاب کنید.) در این حالت احتمال به‌وجود آمدن جواب چندگانه وجود دارد.

برای روشن شدن این مطلب مثال زیر را در نظر بگیرید:

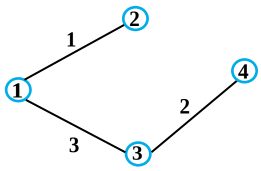
مثال ۷: مینیمم درخت فراگیر شبکه زیر را به دست آورید.



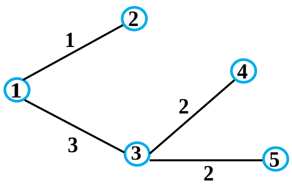
پاسخ: در این مسأله بعد از ۲ تکرار خواهیم داشت:



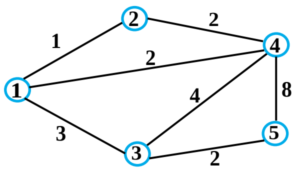
و در تکرار سوم داریم: $S_{۱}=\{۱,۲,۳\}, S'_{۱}=\{۴,۵\}$ و با توجه به این‌که $d_{۳۴}=d_{۳۵}=۲$ است، یکـی را به دلخواه انتخاب می‌کنیم (مثلاً $d_{۳۴}$) و داریم:



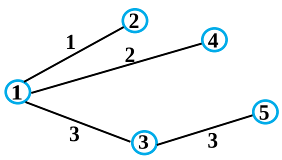
در تکرار بعدی هم داریم: $S_{۱}=\{۱,۲,۳,۴\}, S'_{۱}=\{۵\}$ و $d_{۳۵}$ انتخاب می‌شود؛ در این مسـأله مشـاهده می‌شود با وجود این‌که مینیمم در بیش از یک اندیس رخ داد ولی جواب چندگانه نشد.



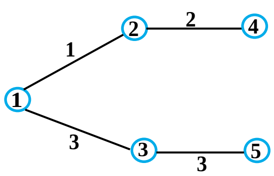
حالا شبکه مقابل را در نظر بگیرید. می‌خواهیم درخت مینیمم فراگیـر آن را رسـم کـنیم. بعـد از رسـم کمان $d_{۱۲}$، داریم: $S_{۲}=\{۱,۲\}, S'_{۲}=\{۳,۴,۵\}$. مینیمم کمان‌های خروجی $d_{۱۴}$ و $d_{۲۴}$ است.



اگر $d_{۱۴}$ را انتخاب کنیم، در نهایت درخت مینیمم فراگیر به‌صورت مقابل خواهد شد:



و اگر $d_{۲۴}$ را انتخاب کنیم، درخت مینیمم فراگیر به‌صورت زیر می‌شود:

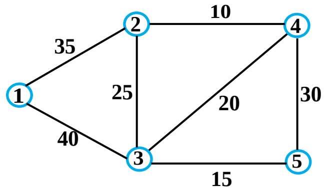


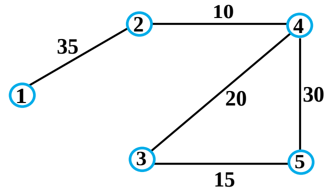
در این حالت دو درخت فراگیر بهینه داریم. در نتیجه این مسأله دارای جواب بهینه چندگانه است.

نکته۶: الگوریتم مینیمم درخت فراگیر دقیقاً در یک درخت با n گره، در $n-۱$ تکرار به جواب می‌رسد. زیرا در هر تکرار یک کمان رسم می‌شـود و درخت با n گره، $n-۱$ کمان دارد.

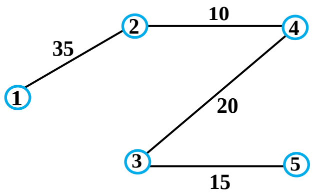
www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۸: مینیمم درخت فراگیر را برای شکل زیر پیدا کنید.

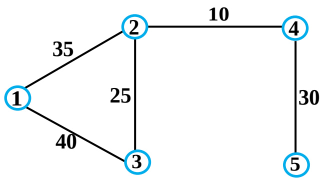




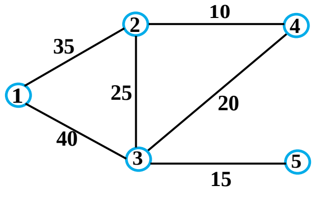
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

پاسخ: گزینه «۲»

تکرار ۱:

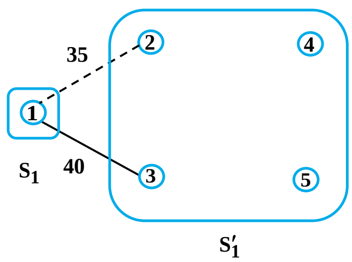
گام ۰: $S'_{۰}=\{۱,۲,۳,۴,۵\}\ ,\ S_{۰}=\phi$

گام ۱: قرار دهید $S_{۱}=\{۱\}\ ,\ S'_{۱}=\{۲,۳,۴,۵\}$, $k=۲$

گام ۲: $d_{۱۲}=\min\{d_{ij}: i\in S_{۱},\ j\in S'_{۱}\}$

$S_{۲}=S_{۱}+\{۲\}=\{۱,۲\}$

$S'_{۲}=S'_{۱}-\{۲\}=\{۳,۴,۵\}$

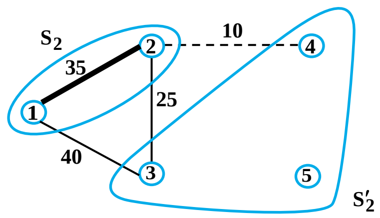


در واقع در این تکرار گره ۱ را درون مجموعه‌ی $S_{۱}$ قرار می‌دهیم و سایر گره‌ها را در مجموعه‌ی $S'_{۱}$ (دقت کنید که قرار دادن گره ۱ درون مجموعه‌ی $S_{۱}$ کاملاً دلخواه است و شما می‌توانید هر گره دیگر را درون مجموعه‌ی $S_{۱}$ قرار دهید.)

کمان‌هایی که یک سر آن‌ها در $S_{۱}$ و سر دیگر آن‌ها در $S'_{۱}$ است را در نظر بگیرید. این کمان‌ها عبارتند از (۱,۲) و (۱,۳) و طول (وزن) آن‌ها به ترتیب ۳۵ و ۴۰ است. کمانی که دارای کوتاه‌ترین طول (کمترین وزن) است را انتخاب کنید (این کمان (۱,۲) است). بنابراین گره انتهایی این کمان که گره (۲) است را از $S'_{۱}$ حذف و به $S_{۱}$ اضافه می‌کنیم و این مجموعه‌ها را به ترتیب $S'_{۲}$ و $S_{۲}$ می‌نامیم.

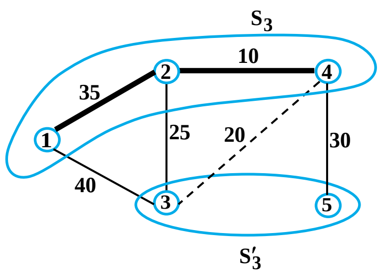
تکرار ۲:

در این تکرار نیز کمان‌هایی که یک سر آن‌ها در $S_{۲}=\{۱,۲\}$ و سر دیگر آن‌ها در $S'_{۲}=\{۳,۴,۵\}$ است را در نظر بگیرید. این کمان‌ها عبارتند از: (۲,۴)، (۲,۳)، و (۱,۳) و طول (وزن) آن‌ها به ترتیب ۱۰، ۲۵ و ۴۰ است. کمان (۲,۴) را انتخاب می‌کنیم زیرا دارای کوتاه‌ترین طول (کمترین وزن) است. گره انتهایی این کمان گره ۴ است که آن را از $S'_{۲}$ حذف و به $S_{۲}$ اضافه می‌کنیم و این مجموعه‌ها را به ترتیب $S'_{۳}$ و $S_{۳}$ می‌نامیم. تا این مرحله کمان‌های (۱,۲) و (۲,۴) انتخاب شده‌اند.

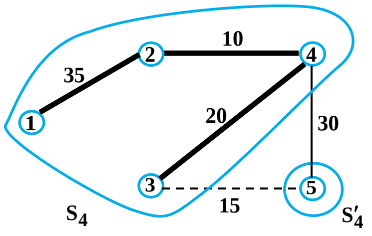


تکرار ۳:

در این تکرار $S_{۳}=\{۱,۲,۴\}$ و $S'_{۳}=\{۳,۵\}$ است. مجدداً کمان‌هایی که یک سر آن در $S_{۳}$ و سر دیگر آن‌ها در $S'_{۳}$ است را در نظر می‌گیریم. این کمان‌ها عبارتند از: (۱,۳)، (۲,۳)، (۴,۳) و (۴,۵) و طول (وزن) آن‌ها به ترتیب برابر ۴۰، ۲۵، ۲۰ و ۳۰ است. کمان (۴,۳) را با طول (وزن) مینیمم انتخاب می‌کنیم. گره ۴ به $S_{۳}$ تعلق دارد بنابراین گره ۳ را به $S_{۳}$ اضافه و از $S'_{۳}$ حذف می‌کنیم و مجموعه‌های جدید را به ترتیب $S_{۴}$ و $S'_{۴}$ می‌نامیم.

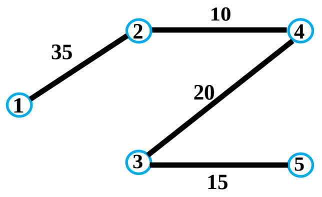


تکرار ۴:



کمان‌های $(۳,۵)$ و $(۴,۵)$ کمان‌هایی هستند که یک سر آن‌ها در $S_{۴}=\{۱,۲,۳,۴\}$ و سر دیگر آن‌ها در $S'_{۴}=\{۵\}$ است. طول (وزن) این کمان‌ها به ترتیب ۱۵ و ۳۰ است و بنابراین کمان $(۳,۵)$ انتخاب می‌شود. با توجه به این که $n-۱$ تکرار انجام دادیم و $(n-۱)=۵$ کمان رسم شد، توقف می‌کنیم.

تکرار ۵:



با توجه به این که $S_{۵}=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ توقف کنید.

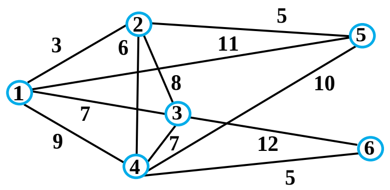
توجه داشته باشید که درخت فراگیر، شبکه همبندی است که هیچ حلقه‌ای ندارد. لذا با توجه به این که شبکه‌های موجود در گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ دارای حلقه هستند، هیچ کدام نمی‌تواند درخت فراگیر باشد و به این ترتیب از همان ابتدا می‌توانستیم گزینه ۲ را بدون حل مسأله به عنوان پاسخ صحیح انتخاب کنیم.

مثال ۹: الگوریتم مینیمم درخت فراگیر برای شبکه‌ای با ۱۰ گره و ۳۰ کمان در چند تکرار به جواب می‌رسد؟

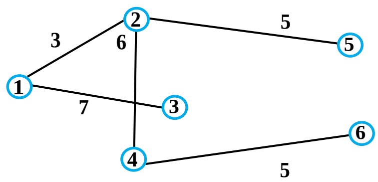
۱) ۹ تکرار ۲) ۳۰ تکرار ۳) ۲۹ تکرار ۴) ۱۰ تکرار

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مینیمم درخت فراگیر با $n=۱۰$ گره در $n-۱=۱۰-۱=۹$ تکرار به پایان می‌رسد.

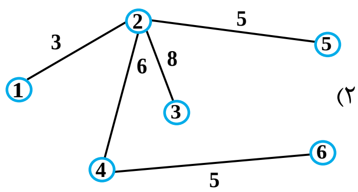
مثال ۱۰: مینیمم درخت فراگیر برای شبکه روبه‌رو کدام است؟



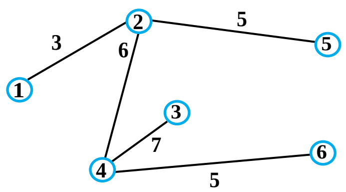
۱)



۲)



۳)



۴) ۱ و ۳

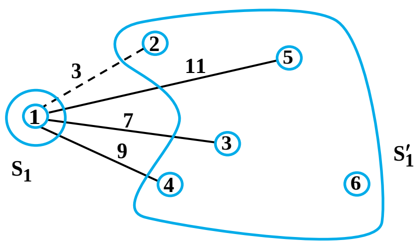
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» الگوریتم از گره ۱ شروع می‌شود.

تکرار ۱:

گام ۰: $S_{۰}=\phi \quad , \quad S'_{۰}=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

گام ۱: $S_{۱}=\{۱\} \quad , \quad S'_{۱}=\{۲,۳,۴,۵,۶\}$

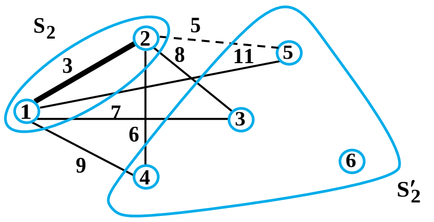
گام ۲: کمان‌های $(۱,۲)$، $(۱,۳)$، $(۱,۴)$ و $(۱,۵)$ با وزن‌های به ترتیب ۳، ۷، ۹ و ۱۱ را در نظر بگیرید. کمان $(۱,۲)$ کمترین وزن را دارد که در شکل با نقطه‌چین مشخص شده است.



$S_{۲}=\{۱,۲\} \quad , \quad S'_{۲}=\{۳,۴,۵,۶\}$

تکرار ۲:

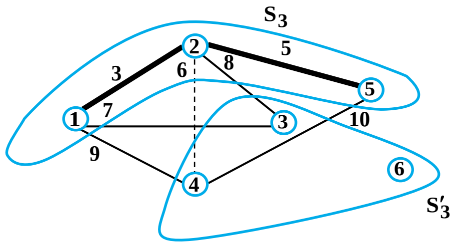
گام ۲: کمان‌های (۱,۳)، (۱,۴)، (۱,۵)، (۲,۳)، (۲,۴)، و (۲,۵) با وزن‌های بـه ترتیـب ۷، ۹، ۱۱، ۸، ۶ و ۵ را در نظر بگیرید. کمان (۲,۵) کمتـرین وزن را دارد کـه در شـکل بـا نقطـه چین مشخص شده است.



$S'_{۳} = \{۳,۴,۶\} \quad , \quad S_{۳}\{۱,۲,۵\}$

تکرار ۳:

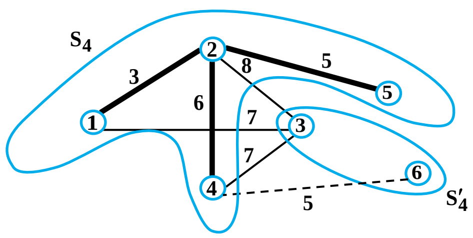
گام ۲: از بین کمان‌های (۱,۳)، (۱,۴)، (۲,۳)، (۲,۴) و (۵,۴) با وزن‌های بـه ترتیـب ۷، ۹، ۸، ۶ و ۱۰ کمان (۲,۴) را با کمترین وزن انتخاب می‌کنیم. این کمان در شکل بـا نقطـه‌چـین مشخص شده است.



$S'_{۴} = \{۳,۶\} \quad , \quad S_{۴} = \{۱,۲,۴,۵\}$

تکرار ۴:

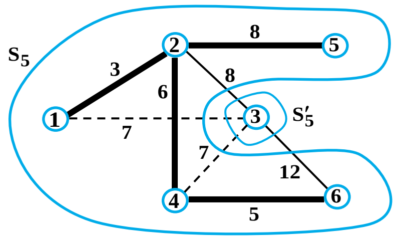
گام ۲: کمـان‌هـایی کـه یـک سـر آن‌هـا در $S_{۴}$ و سـر دیگـر آن‌هـا در $S'_{۴}$ اسـت عبارتنـد از: (۱,۳)، (۲,۳)، (۴,۳) و (۴,۶). وزن این کمان‌ها به ترتیب ۷، ۸، ۷ و ۵ است. در ایـن حالـت مینیمم وزن روی کمان (۴,۶) رخ می‌دهد و این کمان انتخاب می‌شود. این کمان در شـکل بـا نقطه چین مشخص می‌شود:



$S'_{۵} = \{۳\} \quad , \quad S_{۵} = \{۱,۲,۴,۵,۶\}$

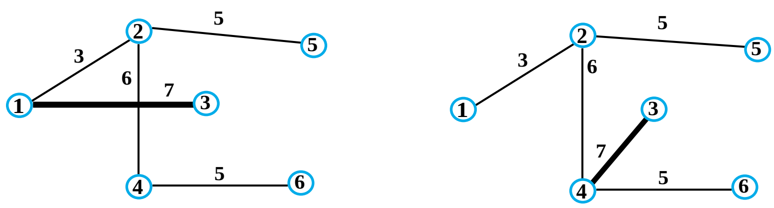
تکرار ۵:

گام ۲: کمان‌های (۱,۳)، (۲,۳)، (۴,۳) و (۳,۶) بـا وزن‌هـای بـه ترتیـب ۷، ۸، ۷ و ۱۲ را در نظر بگیرید. در این حالت مینیمم وزن در بیش از یک اندیس رخ می‌دهد. به عبارت دیگـر هـر دو کمان (۱,۳) و (۴,۳) می‌توانند به عنوان آخرین کمان درخت مینیمم فراگیر انتخاب شوند.

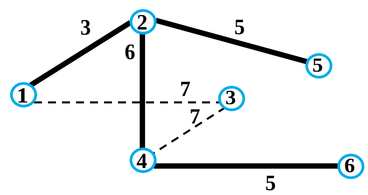


$S'_{۶} = \phi \quad , \quad S_{۶} = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

در نتیجه این مسأله دو درخت فراگیر مینیمم دارد یعنی جواب بهینه چندگانه داریم:



این دو درخت در شکل زیر ادغام شده‌اند.



روش دوم: گزینه‌های ۱، ۲، و ۳ درخت فراگیر هستند. مجموع وزن‌های درخت فراگیر ۲ از درخت‌های فراگیر دیگر بیشتر است پس نمی‌تواند جواب باشد. از طرف دیگر وزن درخت فراگیر ۱ و ۳ با هم برابر و ۲۶ هستند.

www.modaresanesharif.ac.ir

روش صفحه‌ی برشی برای مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح مختلط

مبنای این روش، همان روش صفحه‌ی برشی برای برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح محض است، تنها تفاوت این دو روش در نحوه‌ی محاسبه‌ی محدودیت برش آن‌ها است.

نحوه‌ی محاسبه‌ی محدودیت برش برای مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح مختلط

فرض کنید معادله‌ی سطر iام جدول بهینه‌ی برنامه‌ریزی خطی ساده شده به صورت روبه‌رو است:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij}x_j + x_{B_i} = \bar{b}_i$$

قرار دهید $\bar{b}_i = [\bar{b}_i] + (\bar{b}_i)$، خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij}x_j + x_{B_i} = [\bar{b}_i] + (\bar{b}_i)$$

در نتیجه:

$$x_{B_i} - [\bar{b}_i] = (\bar{b}_i) - \sum_{j=1}^{n} y_{ij}x_j$$

همه‌ی x_jها عدد صحیح نیستند، بنابراین به کار بردن برش گوموری برای این سطر منبع مناسب نیست. برای این که x_{B_i} عددی صحیح باشد باید یکی از دو شرط زیر برقرار باشد.

$$x_{B_i} \le [\bar{b}_i] \quad \text{یا} \quad x_{B_i} \ge [\bar{b}_i] + 1$$

زیرا در غیر این صورت $[\bar{b}_i] < x_{B_i} < [\bar{b}_i] + 1$. در این حالت با توجه به این که بین $[\bar{b}_i]$ و $[\bar{b}_i]+1$ عدد صحیح وجود ندارد x_{B_i} عدد صحیح نخواهد بود.

این شرایط معادل با شرایط زیر است:

$$(\bar{b}_i) \le \sum_{j=1}^{n} y_{ij}x_j \quad \text{یا} \quad \sum_{j=1}^{n} y_{ij}x_j \le (\bar{b}_i) - 1$$

تعریف کنید:

$$J^+ = \{j : y_{ij} \ge 0\}$$

$$J^- = \{j : y_{ij} < 0\}$$

با این تعریف، خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij}x_j = \sum_{j\in J^+} y_{ij}x_j + \sum_{j\in J^-} y_{ij}x_j$$

در نتیجه:

$$\sum_{j\in J^-} y_{ij}x_j \le \sum_{j=1}^{n} y_{ij}x_j \le \sum_{j\in J^+} y_{ij}x_j$$

شرایط بالا معادل با شرایط زیر هستند:

$$(\bar{b}_i) \le \sum_{j\in J^+} y_{ij}x_j \quad \text{یا} \quad \frac{(\bar{b}_i)}{(\bar{b}_i)-1} \sum_{j\in J^-} y_{ij}x_j \ge (\bar{b}_i)$$

شرایط فوق را می‌توان در یک محدودیت برشی مختلط به صورت زیر ترکیب کرد:

$$s_i - \{\sum_{j\in J^+} y_{ij}x_j + \frac{(\bar{b}_i)}{(\bar{b}_i)-1} \sum_{j\in J^-} y_{ij}x_j\} = -(\bar{b}_i)$$

که در آن s_i متغیر کمکی و دارای مقداری بزرگتر یا مساوی صفر است. پس از اضافه کردن محدودیت برش به جدول بهینه‌ی مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی ساده شده، مسأله را با استفاده از روش سیمپلکس دوگان حل کنید.

نکته۱۵: اگر در سطح منبع i به ازای هر j داشته باشیم $\circ \le y_{ij} \le ۱$، آن‌گاه معادله‌ی برش کسری (گوموری) با معادله‌ی برش مختلط برابر است.

مثال۲۵: مقدار بهینه‌ی مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح مختلط زیر را با استفاده از روش صفحه‌ی برشی به دست آورید.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = ۷x_۱ + ۱\circ x_۲ \\ s.t. \quad & -x_۱ + ۳x_۲ \le ۶ \\ & ۷x_۱ + x_۲ \le ۳۵ \\ & x_۱ , x_۲ \ge \circ \\ & x_۲ \ \text{عدد صحیح} \end{aligned}$$

۱) ۱۳۳

۲) ۵۸

۳) ۶۲

۴) ۶۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی ساده شده را با استفاده از روش سیمپلکس حل می‌کنیم. جدول بهینه‌ی این مسأله به صورت زیر است:

	z	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	R.H.S
z	۱	∘	∘	$\frac{۶۳}{۲۲}$	$\frac{۳۱}{۲۲}$	$۶۶\frac{۱}{۲}$
$x_۲$	∘	∘	۱	$\frac{۷}{۲۲}$	$\frac{۱}{۲۲}$	$۳\frac{۱}{۲}$
$x_۱$	∘	۱	∘	$\frac{-۱}{۲۲}$	$\frac{۳}{۲۲}$	$۴\frac{۱}{۲}$

با توجه به این که در این مسأله، تنها متغیر $x_۲$ دارای شرط عدد صحیح بودن است، این سطر را به عنوان سطر منبع انتخاب کرده و معادلـه‌ی بـرش آن را به صورت روبه‌رو به دست می‌آوریم:

$$\text{سطر منبع}: x_۲ + \frac{۷}{۲۲}x_۳ + \frac{۱}{۲۲}x_۴ = ۳\frac{۱}{۲}$$

در این مسأله $J^+ = \{۳,۴\}$ و $J^- = \phi$. بنابراین محدودیت برش آن عبارت است از:

$$s_۱ - \frac{۷}{۲۲}x_۳ - \frac{۱}{۲۲}x_۴ = -\frac{۱}{۲}$$

با اضافه کردن این سطر به جدول بهینه داریم:

	z	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$s_۱$	R.H.S
z	۱	∘	∘	$\frac{۶۳}{۲۲}$	$\frac{۳۱}{۲۲}$	∘	$۶۶\frac{۱}{۲}$
$x_۲$	∘	∘	۱	$\frac{۷}{۲۲}$	$\frac{۱}{۲۲}$	∘	$۳\frac{۱}{۲}$
$x_۱$	∘	۱	∘	$\frac{-۱}{۲۲}$	$\frac{۳}{۲۲}$	∘	$۴\frac{۱}{۲}$
$s_۱$	∘	∘	∘	$\frac{-۷}{۲۲}$	$\frac{-۱}{۲۲}$	۱	$-\frac{۱}{۲}$

این جدول بهینه اما نشدنی است، برای تبدیل آن به شدنی بودن، از روش سیمپلکس دوگان استفاده می‌کنیم. با انتخاب متغیر $x_۳$ به عنوان متغیـر ورودی و $s_۱$ به عنوان متغیر خروجی، داریم:

	z	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$s_۱$	R.H.S
z	۱	∘	∘	∘	۱	۹	۶۲
$x_۲$	∘	∘	۱	∘	∘	۱	۳
$x_۱$	∘	۱	∘	∘	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{-۱}{۷}$	$۴\frac{۴}{۷}$
$x_۳$	∘	∘	∘	۱	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{-۱}{۷}$	$۱\frac{۴}{۷}$

نقطه‌ی $(x_۱^* = ۴\frac{۴}{۷}, x_۲^* = ۳)$ نقطه‌ی بهینه و $z^* = ۶۲$ مقدار بهینه است.

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۲۶: مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح مختلط به همراه جدول بهینه‌ی برنامه‌ریزی خطی ساده شده‌ی آن داده شده است.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \le 56 \\ & x_1 + 4x_2 \le 65 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

x_1 عدد صحیح

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	R.H.S
z	1	0	0	$\frac{11}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1071}{10}$
x_1	0	1	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{47}{5}$
x_2	0	0	1	$\frac{-1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{139}{10}$

معادله‌ی سطر منبع کدام گزینه است؟

۱) $x_2 - \frac{1}{10}x_3 + \frac{3}{10}x_4 = \frac{139}{10}$

۲) $x_1 + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = \frac{47}{5}$

۳) $S_2 - \frac{9}{10}x_3 - \frac{3}{10}x_4 = -\frac{9}{10}$

۴) $S_1 - \frac{2}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4 = -\frac{2}{5}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون در این مسأله تنها متغیر x_1، شرط عدد صحیح بودن را دارد، بنابراین این سطر را به عنوان سطر منبع انتخاب می‌کنیم و معادله‌ی مربوط به آن به صورت روبه‌رو است:

$$x_1 + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = \frac{47}{5}$$

مثال ۲۷: در یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح مختلط فرض کنید سطر منبع $x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{4}{3}x_3 = \frac{7}{2}$ باشد. کدام‌یک از معادلات زیر محدودیت برشی مختلط آن است؟

۱) $S_1 + \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{4}x_2 = \frac{1}{2}$

۲) $S_1 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{4}x_2 = -\frac{1}{2}$

۳) $S_1 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{4}x_2 = -\frac{1}{2}$

۴) $S_1 - \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{4}x_2 = -\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در این مسأله داریم $J^+ = \{3\}$ و $J^- = \{2\}$. بنابراین محدودیت برشی مختلط آن عبارت است از:

$$S_1 - \{\frac{4}{3}x_3 + (\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1})(-\frac{1}{4})x_2\} = -\frac{1}{2} \Rightarrow S_1 - \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{4}x_2 = -\frac{1}{2}$$

مثال ۲۸: در یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح مختلط، فرض کنید که $x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_5 = \frac{7}{5}$ باشد. کدام‌یک از معادلات زیر محدودیت برشی مختلط آن است؟

۱) $S_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{3}{2}x_5 - \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = -\frac{2}{5}$

۲) $S_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{3}{2}x_5 + \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{2}{5}$

۳) $S_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{3}{2}x_5 + \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = -\frac{2}{5}$

۴) $S_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 = -\frac{2}{5}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در این مسأله $J^+ = \{2,5\}$ و $J^- = \{3,4\}$ است. بنابراین محدودیت برش مختلط آن عبارت است از:

$$S_1 - \{\frac{1}{3}x_2 + \frac{3}{2}x_5 + (\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}-1})(-\frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4)\} = -\frac{2}{5} \Rightarrow S_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{3}{2}x_5 - \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = -\frac{2}{5}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۲۹: معادله‌ی برش کسری و مختلط کدام‌یک از سطرهای منبع زیر با یکدیگر برابرند؟

۱) $x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{2}{5}x_3 = \frac{2}{3}$ ۲) $x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{5}x_3 = \frac{2}{3}$ ۳) $x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{2}{5}x_3 = \frac{2}{3}$ ۴) $x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{5}x_3 = \frac{2}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

مثال۳۰: کدام عبارت در مورد روش صفحه برشی گوموری برای یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح نادرست است؟

۱) در هر تکرار، نیاز به انجام روش سیمپلکس است.

۲) در هر تکرار، نیاز به انجام روش سیمپلکس دوگان (ثانویه) است.

۳) تعداد تکرارهای روش برای به دست آوردن جواب عدد صحیح نامشخص است.

۴) در هر تکرار، یک محدودیت به مسأله اضافه می‌شود که قسمتی از ناحیه‌ی غیرعدد صحیح را حذف می‌کند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در روش صفحه برشی گوموری، با اضافه کردن یک محدودیت به مسأله، شرط بهینگی در تابع هدف برقرار شده ولی جواب نشدنی است که برای حل آن نمی‌توان از روش سیمپلکس استفاده کرد. بنابراین گزینه «۱» نادرست است.

روش جستجو

روش جستجو، از ایده‌ی ساده‌ی بررسی همه‌ی نقاط صحیح شدنی فضای موجه مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی ساده شده، سرچشمه می‌گیرد. این روش طوری طراحی شده است که برای به دست آوردن جواب بهینه، تنها قسمت کوچکی از جواب‌های صحیح شدنی را بررسی می‌کند. در این قسمت به معرفی یکی از متداول‌ترین روش‌های جستجو، یعنی روش شاخه و کران، می‌پردازیم. این روش در حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح کاربرد فراوان دارد.

روش شاخه وکران برای مسائل برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح محض

هر مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح محض در واقع یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی است که متغیرهای آن دارای شرط عدد صحیح بودن هستند. فرم کلی مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح محض به صورت

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} y_{ij} x_j \le b_i \qquad i = 1, \dots, m \\ & x_j \ge 0, \quad \text{عدد صحیح} \end{aligned}$$

است. با توجه به این که فضای شدنی مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح زیر مجموعه‌ای (نامحدب) از فضای شدنی مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی است، همواره رابطه‌ای $z_{IP}^* \le z_{LP}^*$ در مسائل ماکسیمم‌سازی و رابطه‌ی $z_{LP}^* \le z_{IP}^*$ در مسائل مینیمم‌سازی بین این دو مسأله برقرار است که در آن z_{LP}^*، مقدار بهینه‌ی مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی ساده شده و z_{IP}^* مقدار بهینه‌ی مسأله برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح است.

الگوریتم شاخه و کران یک روش جستجو برای پیدا کردن جواب بهینه‌ی مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح است. این الگوریتم فضای شدنی مسأله را به نواحی کوچکتر تقسیم کرده و امکان وجود جواب بهینه با عدد صحیح را در نواحی تقسیم شده بررسی می‌کند و این روند را تا رسیدن به جواب بهینه با عدد صحیح ادامه می‌دهد. مدلی که بیانگر فضای شدنی تقسیم شده است را **مسأله‌ی فرعی** می‌نامند. در این روش، از حل تعداد متناهی مسأله‌ی فرعی برای رسیدن به جواب استفاده می‌شود.

نکته۱۶: در حل مسائل دو متغیره می‌توان از روش ترسیمی شاخه و کران استفاده کرد اما مسائل n متغیره تنها با استفاده از روش سیمپلکس قابل حل هستند.

www.modaresanesharif.ac.ir

روش شاخه و کران به صورت ترسیمی

روش شاخه و کران به صورت ترسیمی برای حل مسائل دو متغیره کاربرد دارد. در این روش، ابتدا مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی ساده شده حل می‌گردد و مقادیر بهینه به دست می‌آید. اگر جواب به دست آمده عدد صحیح باشد، جواب بهینه با عدد صحیح مسأله به دست آمده است. در غیر این صورت اگر مسأله ماکسیمم‌سازی باشد، مقدار اولیه تابع هدف را برابر $\overline{z}=-\infty$ قرار داده و آن را کران پایین مقدار تابع هدف می‌نامند، پس از حل مسائل فرعی، اگر مقدار تابع هدف هر یک از این مسائل بیشتر از $-\infty$ باشد آن را جایگزین $\overline{z}=-\infty$ کرده و شرایط عدد صحیح بودن آن را بررسی کنید.

در این روش، در هر تکرار فضای شدنی با افزودن محدودیت‌های جدید به دو ناحیه تقسیم می‌شود، محدودیت‌های جدید از میان یکی از متغیرهای تصمیمی که دارای مقداری غیرعدد صحیح است انتخاب می‌شود، به این متغیر، **متغیر شاخه‌ای** گفته می‌شود. فرض کنید متغیر x_j (که قطعاً دارای مقداری غیرعدد صحیح است) به عنوان متغیر شاخه‌ای انتخاب شود. مسائل فرعی جدید با استفاده از محدودیت‌های $x_j \le [x_j^*]$ و $x_j \ge [x_j^*]+۱$ تشکیل می‌شود.

نکته۱۷: اگر تابع هدف از نوع مینیمم‌سازی باشد، مقدار اولیه تابع هدف را برابر $\overline{z}=+\infty$ قرار می‌دهیم.

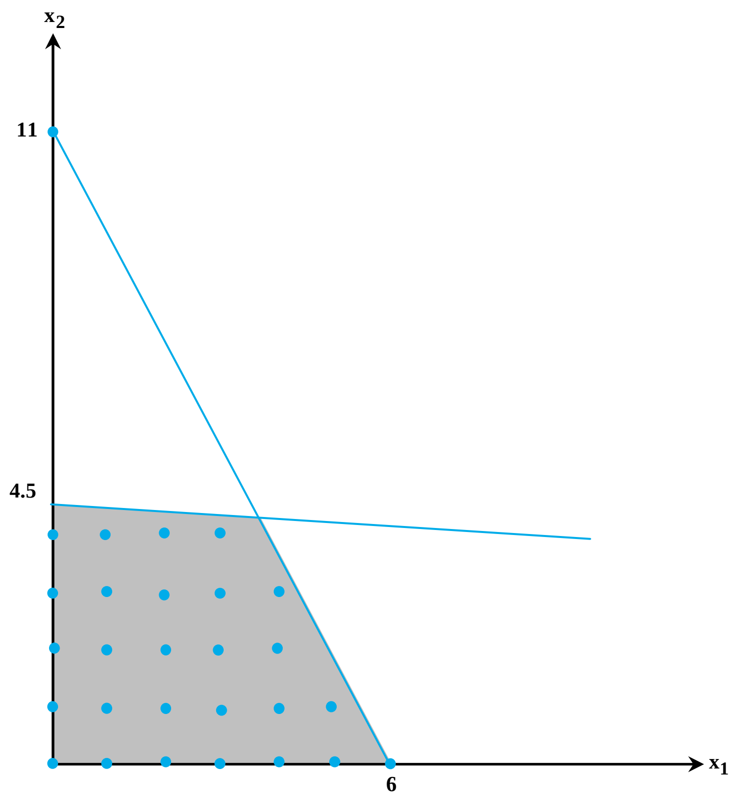
مثال۳۱: مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_۱ + ۵x_۲ \\ \text{s.t.} \quad & ۱۱x_۱ + ۶x_۲ \le ۶۶ \\ & ۵x_۱ + ۵۰x_۲ \le ۲۲۵ \\ & x_۱, x_۲ \ge ۰, \quad \text{عدد صحیح} \end{aligned}$$

با استفاده از روش شاخه و کران به صورت ترسیمی مقدار بهینه را محاسبه کنید.

۱) ۲۴/۳ ۲) ۲۲/۳۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۳

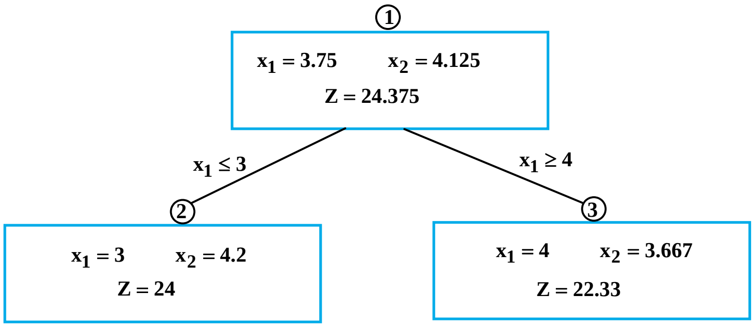
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ناحیه‌ی شدنی این مسأله در شکل زیر آورده شده است.



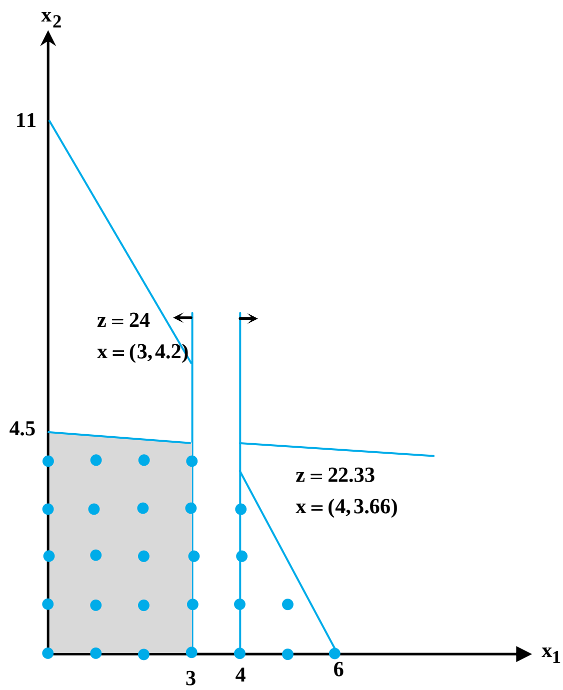
مسأله برنامه‌ریزی خطی ساده شده متناظر این مسأله دارای جواب بهینه (۴/۱۲۵ , ۳/۷۵) با مقدار بهینه ۲۴/۳۷۵ است.

www.modaresanesharif.ac.ir

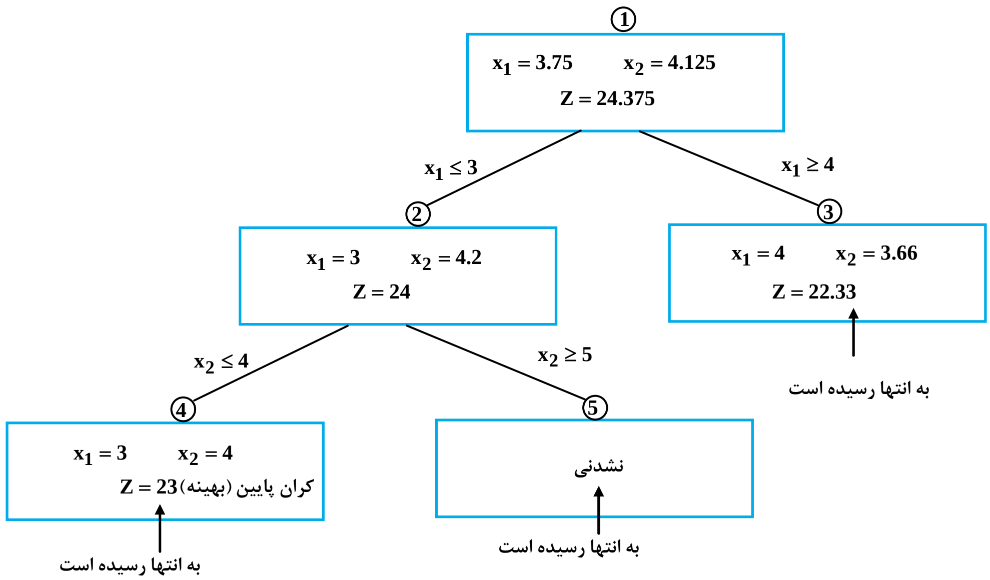
با انتخاب x_1 به عنوان متغیر شاخه‌ای (به دلخواه) دو محدودیت $x_1 \geq ۴$ و $x_1 \leq ۳$ به مسأله اضافه می‌شود، نمودار درختی حاصل از اضافه کردن این دو محدودیت به صورت زیر است:



نمایش ترسیمی این دو مسأله به صورت زیر است:



با توجه به اینکه مسأله از نوع ماکسیمم‌سازی است و مقدار تابع هدف در گره ۲ بزرگ‌تر از مقدار تابع هدف در گره ۳ است، مسأله‌ی فرعی ۲ را برای حل انتخاب می‌کنیم. در این گره $x_۲$ را به عنوان متغیر شاخه‌ای انتخاب کرده و دو محدودیت $x_۲ \leq ۴$ و $x_۲ \geq ۵$ را به مسأله اضافه می‌کنیم. مسأله‌ی فرعی حاصل از اضافه کردن محدودیت $x_۲ \geq ۵$، گره ۵، نشدنی است. مسأله‌ی فرعی متناظر گره ۴ دارای جواب بهینه $(x_۱^* = ۳ , x_۲^* = ۴)$ با مقدار $z^* = ۲۳$ است. مقدار بهینه در گره ۳ کوچک‌تر از مقدار بهینه در گره ۴ است بنابراین در هر ۳ گره به انتها می‌رسیم.



www.modaresanesharif.ac.ir

مدرسان شریف

فصل چهارم

«برنامه‌ریزی پویا»

مقدمه

برنامه‌ریزی پویا یک فن ریاضی برای گرفتن یک دنباله از تصمیمات **مرتبط به** هم است. در برنامه‌ریزی پویا جواب بهینه‌ی یک مسأله‌ی n متغیره با تجزیه‌ی آن به n مرحله تعیین می‌شود که هر مرحله از یک مسأله جزئی با یک متغیر تشکیل می‌شود. از نظر محاسباتی حل n مسأله با یک متغیر می‌تواند ساده‌تر از حل یک مسأله با n متغیر باشد. متأسفانه برخلاف برنامه‌ریزی خطی یک روش استاندارد برای حل کلی مسائل برنامه‌ریزی پویا وجود ندارد، اما خوشبختانه ماهیت بازگشتی محاسبات در برنامه‌ریزی پویا، که اجازه می‌دهد جواب بهینه‌ی یک مسأله‌ی جزئی به عنوان ورودی برای مسأله جزئی بعدی باشد، محاسبات برنامه‌ریزی پویا را ساده‌تر می‌کند. در این محاسبات وقتی آخرین مسأله‌ی جزئی حل می‌گردد جواب بهینه‌ی کل مسأله در دسترس خواهد بود. نکته‌ی حائز اهمیت این است که این n مسأله‌ی جزئی مستقل از هم نبوده و دارای تابع هدف و محدودیت وابسته به‌هم هستند.

سه عنصر پایه‌ای یک مدل برنامه‌ریزی پویا عبارتند از:

۱ـ تعریف *مراحل* ۲ـ تعریف *گزینه‌ها*، در هر مرحله ۳ـ تعریف *حالت‌ها*، در هر مرحله

تعریف مراحل و گزینه‌ها کار پیچیده‌ای نیست، اما مشکل اساسی در تعریف حالت‌ها به گونه‌ای است که به هم مرتبط باشند. به همین دلیل در این فصل روی درک مفهوم حالت بیشتر تأکید می‌گردد.

نکته۱: حالت در هر مرحله باید به گونه‌ای تعریف شود که *مرتبط* به حالات در مراحل قبلی باشد. به عبارت دیگر حالت‌ها نباید مستقل از هم باشند.

نکته۲: حالت در مرحله‌ی $n=1$ باید مقداری معلوم و مشخص باشد.

مثال۱: کدام‌یک از موارد زیر درباره یک مسأله برنامه‌ریزی پویا صحت دارد؟

۱) حالت در مرحله‌ی $n=1$ باید مقداری معلوم و مشخص باشد.

۲) حالت در هر مرحله مرتبط به حالات مراحل قبلی است.

۳) هر مسأله‌ی برنامه‌ریزی پویا شامل چندین مرحله و هر مرحله شامل چندین حالت است.

۴) همه‌ی موارد

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» همان‌طور که اشاره شد برنامه‌ریزی پویا در برگیرنده‌ی مسائلی است که شامل چندین مرحله است و هر یک از مراحل نیز شامل چندین حالت است. حالت‌های هر مرحله مرتبط به‌هم هستند و نمی‌توانند مستقل از هم باشند. حالت‌ها باید طوری تعریف شوند که در مرحله اول تنها یک حالت داشته باشیم که مقدار آن معلوم و مشخص باشد. بنابراین گزینه (۴) یعنی همه موارد درباره‌ی مسأله‌ی برنامه‌ریزی پویا صادق است.

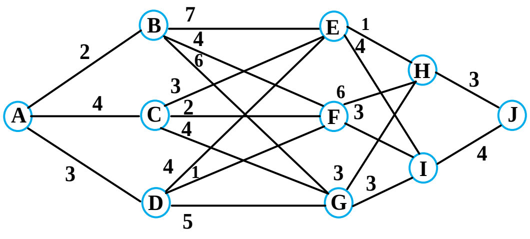
مثال۲: در یک مسأله برنامه‌ریزی پویا، مسأله به تعدادی مسأله‌ی جزئی تقسیم می‌شود که هر کدام را یک .... می‌نامند.

۱) متغیر تصمیم ۲) مرحله (stage) ۳) حالت (state) ۴) هیچ‌کدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» هر مسأله‌ی برنامه‌ریزی پویا در حالت کلی شامل یک تصمیم‌گیری n متغیره است. به ازای هر یک از این متغیرها یک مرحله تعریف می‌شود که مسائل جزئی را تشکیل می‌دهند. بنابراین گزینه (۲) درست است.

مثال ۳: مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر (مسأله‌ی دلیجان) مسأله‌ی دلیجان یکی از مهمترین مسائل در درک مفاهیم و ویژگی های برنامه‌ریزی پویا است. دراین مسأله هدف یافتن کوتاه‌ترین مسیر بین دو شهر است.

فرض کنید که می‌خواهید کوتاه‌ترین مسیر از شهر A برای رسیدن به شهر J را انتخاب کنید. در شکل روبه‌رو مسیرهای ممکن بین این دو شهر نشان داده شده است.



کوتاه‌ترین مسیر شبکه

همان‌طور که از شکل بالا پیدا است، طول مسافت بین شهر i تا شهر j که با d_{ij} نمایش می‌دهیم به صورت زیر است.

	B	C	D
A	۲	۴	۳

	E	F	G
B	۷	۴	۶
C	۳	۲	۴
D	۴	۱	۵

	H	I
E	۱	۴
F	۶	۳
G	۳	۳

	J
H	۳
I	۴

کوتاه‌ترین مسیر بین شهرهای A و J را بیابید.

☑ **پاسخ:** یک تصور اشتباه این است که در هر مرحله کم‌هزینه‌ترین مسیر را رسم کنیم، که در این صورت مسیر $۱ \to ۲ \to ۶ \to ۹ \to ۱۰$ را با هزینه ۱۳ خواهیم داشت، اما در ادامه حل مسأله خواهیم دید که مسیر مذکور کم‌هزینه‌ترین مسیر نیست. این مثال ساده نشان می‌دهد که در مسأله‌ی برنامه‌ریزی پویا جواب بهینه‌ی همه‌ی مراحل لزوماً جواب بهینه‌ی کل مسأله را به ما نمی‌دهد. یکی از روش‌های ممکن برای حل این مسأله، روش آزمایش و خطا است. به این صورت که همه‌ی راه‌های بین گره A و J بررسی شوند، اما با توجه به این که، تعداد راه‌های احتمالی خیلی زیاد (۱۸) است و بررسی تک‌تک این مسیرها کاری دشوار است و احتیاج به زمان زیادی دارد بنابراین از برنامه‌ریزی پویا برای حل این مسأله استفاده می‌کنیم. برنامه‌ریزی پویا، با حل یک جزء کوچک از مسأله‌ی اصلی شروع شده و جواب بهینه‌ی این مسأله جزئی را محاسبه می‌کند و سپس با کنار هم قراردادن جواب‌های بهینه‌ی این مسائل جزئی جواب بهینه‌ی مسأله‌ی اصلی را محاسبه می‌کند.

فرمول‌بندی:

در این مسأله ۴ مرحله وجود دارد. فرض کنید متغیر تصمیم x_n $(n=۱,۲,۳,۴)$ شهری باشد که در مرحله n فروشنده از آن خواهد گذشت.

بنابراین مسیر انتخاب به صورت $A \to x_۱ \to x_۲ \to x_۳ \to x_۴$ است که در آن $x_۴ = J$ است.

به علاوه، فرض کنید $f_n(s_n, x_n)$ مقدار بهینه‌ی هدف مورد نظر برای مراحل باقی‌مانده $(n, n+۱, ..., ۴)$ است، وقتی فروشنده در حالت s در مرحله‌ی n است، که در آن تصمیم x_n را اتخاذ می‌کند.

s و n داده شده است، فرض کنید x_n^* نشان‌دهنده هر مقداری از x_n باشد که تابع $f_n(s_n, x_n)$ را مینیمم می‌کند، هم‌چنین فرض کنید $f_n^*(s)$، مینیمم مقدار متناظر $f_n(s_n, x_n)$ باشد. بنابراین:

$$f_n^*(s) = \min_{x_n} f_n(s, x_n) = f_n(s, x_n^*)$$

به طوری که:

$$f_n(s, x_n) = d_{s_n x_n} + f_{n+۱}^*(x_n)$$

مقدار $d_{s_n x_n}$ طول مسیر بین گره $i = s$ تا گره $j = x_n$ را نشان می‌دهد. از آن جایی که مقصد نهایی (حالت J)، در انتهای مرحله‌ی ۴ به دست می‌آید، داریم:

$$f_۵^*(J) = ۰$$

هدف این مسأله پیدا کردن $f_۱^*(A)$ و مسیر متناظر آن است. برنامه‌ریزی پویا با حل مسائل جزئی $f_۴^*(s_۴)$، $f_۳^*(s_۳)$ و $f_۲^*(s_۲)$ برای هر حالت احتمالی s، این مقدار بهینه را محاسبه می‌کند.

فرآیند حل:

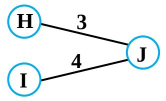
وقتی تنها یک مرحله برای رسیدن به مقصد مانده باشد $(n=۴)$ یعنی فروشنده یا در حالت H و یا در حالت I است. اگر $x_۴ = J$ باشد مسیر او عبارت است از $s \to J$، بنابراین داریم:

$$f_۴^*(s) = f_۴(s, J) = d_{s,J}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

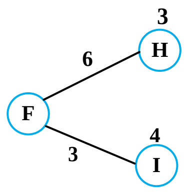
جواب مسأله‌ی جزئی برای $n=۴$ به صورت زیر است:

$n=۴$



s \ $x_۴$	$f_۴(s,x_۴)=d_{sx_۴}$	$f_۴^*(s)$	$x_۴^*$
	J		
H	۳	۳	J
I	۴	۴	J

اگر دو مرحله از سفر فروشنده باقی مانده باشد، $n=۳$، جواب با اندکی محاسبه به دست خواهد آمد، به طور مثال، فرض کنید فروشنده در حالت F باشد. آن‌گاه مسیر بعدی فروشنده، به ترتیب حالت‌های H یا I با هزینه‌های $d_{FH}=۶$ یا $d_{FI}=۳$ است.

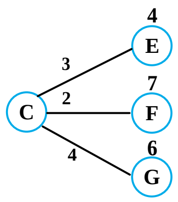


اگر حالت H انتخاب شود، کوتاه‌ترین فاصله‌ای که باید برای سفرش متحمل شود، برابر با $f_۴^*(H)=۳$ است، در نتیجه طول کوتاه‌ترین مسیر ناشی از این تصمیم برابر $۹=۳+۶$ است. اگر به جای حالت H، حالت I انتخاب شود، این مسافت برابر $۷=۴+۳$ خواهد بود. بنابراین انتخاب بهینه $x_۳^*=I$ است، زیرا کوتاه‌ترین فاصله $f_۳^*(F)=۷$ است.

با دنبال کردن همین روش برای هر حالت ممکن دیگر $s=E$ و $s=G$ داریم:

$n=۳$

s \ $x_۳$	$f_۳(s,x_۳)=d_{sx_۳}+f_۴^*(x_۳)$		$f_۳^*(s)$	$x_۳^*$
	H	I		
E	**۱+۳=۴**	۴+۴=۸	۴	H
F	۶+۳=۹	**۳+۴=۷**	۷	I
G	**۳+۳=۶**	۳+۴=۷	۶	H



جواب مسأله‌ی جزئی مرحله‌ی دوم $(n=۲)$ برای زمانی که سه مرحله برای رفتن دارد نیز به همین ترتیب محاسبه می‌شود. در این مرحله، $f_۲(s,x_۲)=d_{sx_۲}+f_۳^*(x_۲)$ است. به طور مثال فرض کنید، فروشنده در شهر E باشد.

مسیرهای بعدی او حالت‌های E، F و G به ترتیب با طول‌های $d_{C,E}=۳$، $d_{C,F}=۲$ یا $d_{C,G}=۴$ است. داریم:

$x_۲=E$: $f_۲(C,E)=d_{CE}+f_۳^*(E)=۳+۴=۷$

$x_۲=F$: $f_۲(C,F)=d_{CF}+f_۳^*(F)=۲+۷=۹$

$x_۲=G$: $f_۲(C,G)=d_{CG}+f_۳^*(G)=۴+۶=۱۰$

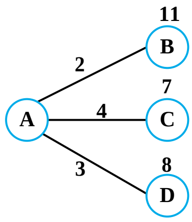
کوتاه‌ترین مسیر در میان این سه حالت، ۷ است، بنابراین کوتاه ترین مسیر از حالت C تا انتهای مسیر $f_۲^*(c)=۷$ با گذشتن از شهر E است. برای حالت‌های B و D نیز داریم:

$n=۲$

s \ $x_۲$	$f_۲(s,x_۲)=d_{sx_۲}+f_۳^*(x_۲)$			$f_۲^*(s)$	$x_۲^*$
	E	F	G		
B	**۷+۴=۱۱**	**۴+۷=۱۱**	۶+۶=۱۲	۱۱	E یا F
C	**۳+۴=۷**	۲+۷=۹	۴+۶=۱۰	۷	E
D	**۴+۴=۸**	**۱+۷=۸**	۵+۶=۱۱	۸	E یا F

www.modaresanesharif.ac.ir

برای مرحله $n=1$، باید کوتاه‌ترین مسیر برای گذشتن از ۴ مرحله محاسبه شود.



داریم:

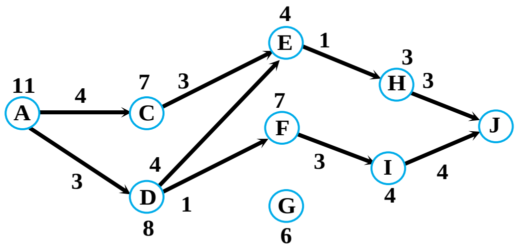
$$x_1 = B: \quad f_1(A,B) = d_{AB} + f_2^*(B) = ۲ + ۱۱ = ۱۳$$
$$x_1 = C: \quad f_1(A,C) = d_{AC} + f_2^*(C) = ۴ + ۷ = ۱۱$$
$$x_1 = D: \quad f_1(A,D) = d_{AD} + f_2^*(D) = ۳ + ۸ = ۱۱$$

از آن‌جایی که کوتاه‌ترین مسیر $f_1^*(A) = ۱۱$ و $x_1^* = C, D$ است، پس داریم: $n = 1$

x_1 \ s	$f_1(s,x_1) = d_{sx_1} + f_2^*(x_1)$			$f_1^*(s)$	x_1^*
	B	C	D		
A	۲+۱۱=۱۳	**۴+۷=۱۱**	**۳+۸=۱۱**	۱۱	C یا D

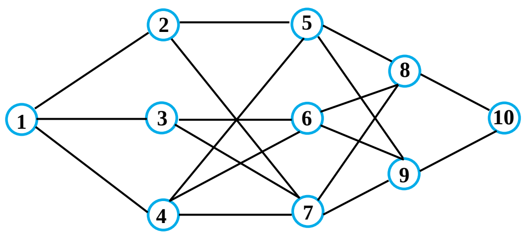
اکنون می‌توان جواب بهینه‌ی کل مسأله را مشخص کرد. برای $n=1$، فروشنده ابتدا باید به یکی از شهرهای C یا D برود. فرض کنید $x_1^* = C$ باشد. به ازای $n=2$ و $s=C$، جواب بهینه عبارت است از $x_2^* = E$. در مرحله‌ی $n=3$، $x_3^* = H$ برای $s=E$ است و با استفاده از $n=4$، $x_4^* = J$ به دست می‌آید. بنابراین کوتاه‌ترین مسیر $A \to C \to E \to H \to J$ است. اگر $x_1^* = D$ انتخاب شود، مسیر بهینه عبارت خواهد بود از: $A \to D \to E \to H \to J$ و $A \to D \to F \to I \to J$. که همه‌ی این مسیرها منجر به جواب بهینه‌ی $f_1^*(A) = ۱۱$ می‌شوند.

: حالت



مثال ۴: با توجه به شکل اگر فردی بخواهد از مبدأ ۱ به مقصد ۱۰ برود، چند مرحله باید طی کند؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۳
۴) ۶



پاسخ: گزینه «۱»

مرحله‌ی ۱: از گره ۱ به گره‌های ۲، ۳ یا ۴

مرحله‌ی ۲: از گره های ۲، ۳ یا ۴ به گره‌های ۵، ۶ یا ۷

مرحله‌ی ۳: از گره‌های ۵، ۶ یا ۷ به گره‌های ۸ یا ۹

مرحله‌ی ۴: از گره‌های ۸ یا ۹ به گره ۱۰

www.modaresanesharif.ac.ir

مشخصه‌های مساله‌ی برنامه‌ریزی پویا

ویژگی‌های اساسی که مسائل برنامه‌ریزی پویا را مشخص می‌کنند، عبارتند از:

۱ـ مسأله می‌تواند به **مراحل** تقسیم شود، که هر مرحله یک **متغیر تصمیم** دارد.

در مسأله‌ی دلیجان ۴ مرحله وجود دارد که متغیر تصمیم هر مرحله، کمانی است که انتخاب می‌شود. به طور مشابه سایر مسائل برنامه‌ریزی پویا، نیازمند گرفتن یک دنباله از تصمیمات مرتبط به هم است که هر (متغیر) تصمیم متناظر یک مرحله مسأله است.

۲ـ هر مرحله دارای تعدادی حالت وابسته به خود است. در مسأله‌ی دلیجان، حالت‌های متناظر هر مرحله، شهرهایی بودند که می‌توان در آن قسمت از سفر از آن‌ها عبور کرد. به طور کلی، حالت‌ها عبارتند از شرایط ممکن که دستگاه می‌تواند در آن مرحله داشته باشد. تعداد حالت‌ها در هر مرحله می‌تواند متناهی (مانند مسأله‌ی دلیجان) و یا نامتناهی (در این باره بعداً صحبت خواهیم کرد) باشد. هم‌چنین حالت‌ها در یک مرحله می‌توانند پیوسته و یا گسسته باشند.

۳ـ تأثیر متغیر تصمیم در هر مرحله، تبدیل حالت جاری به حالتی است که وابسته به مرحله‌ی بعدی باشد.

متغیر تصمیم به عنوان مقصد بعدی منجر به انتقال از حالت جاری به حالت بعدی است. بنابراین مسأله‌ی برنامه‌ریزی پویا می‌تواند بر حسب شبکه‌ها تعبیر شود. هر گره متناظر یک حالت و هر لایه نشان دهنده‌ی مرحله است. به این معنا که جریان از یک گره تنها می‌تواند به یک گره در لایه‌ی بعدی ارسال شود.

۴ـ فرآیند حل برای پیدا کردن متغیر تصمیم بهینه‌ی کل مسأله طراحی شده است.

در مسأله‌ی دلیجان، فرآیند حل، جدولی برای هر مرحله (n) می‌سازد که متغیر تصمیم بهینه (x_n^*) برای هر حالت (s) نشان داده می‌شود.

۵ـ با معلوم بودن حالت جاری، متغیر تصمیم بهینه برای حالت‌های باقی مانده مستقل از متغیرهای تصمیم در مراحل قبلی است. متغیر تصمیم در هر لحظه تنها به حالت جاری بستگی دارد نه به آن که چگونه به این جا رسیده‌ایم، این **اصل بهینگی** در برنامه‌ریزی پویا است. (این خاصیت، خاصیت *مارکوفی* نیز نامیده می‌شود). هر مسأله‌ای که این خاصیت را نداشته باشد، نمی‌تواند به عنوان یک مسأله برنامه‌ریزی پویا در نظر گرفته شود.

۶ـ فرآیند حل با پیداکردن متغیر تصمیم آخرین مرحله شروع می‌شود.

متغیر تصمیم آخرین مرحله، متغیر تصمیم بهینه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن در آن مرحله را نشان می‌دهد. جواب این مسأله‌ی یک مرحله‌ای، معمولاً بدیهی است.

۷ـ یک رابطه‌ی بازگشتی با فرض معلوم بودن متغیر تصمیم مرحله‌ی $n+1$، متغیر تصمیم بهینه‌ی مرحله‌ی n را تعریف می‌کند.

در مسأله‌ی دلیجان، رابطه‌ی بازگشتی

$$f_n^*(s) = \min_{x_n}\{d_{sx_n} + f_{n+1}^*(x_n)\}$$

بود. بنابراین پیدا کردن متغیر تصمیم بهینه با شروع از حالت s در مرحله‌ی n نیازمند پیدا کردن مینیمم مقدار x_n است.

رابطه‌ی بازگشتی برای مسائل برنامه‌ریزی پویا یکسان نیست، اما می‌توان از یک نمادگذاری استاندارد استفاده کرد:

$N =$ تعداد حالت‌ها

$n =$ برچسب حالت جاری $(n = 1, 2, \dots, N)$

$s_n =$ حالت جاری در مرحله‌ی n.

$x_n =$ متغیر تصمیم در مرحله‌ی n.

$x_n^* =$ مقدار بهینه‌ی x_n (برای s_n داده شده).

$f_n(s_n, x_n) =$ سهم مراحل n، $n+1$،...، و N در تابع هدف، وقتی که در حالت s_n تصمیم x_n گرفته شده است.

با این تعاریف داریم:

$$f_n^*(s_n) = f_n(s_n, x_n^*)$$

رابطه‌ی بازگشتی یکی از دو صورت زیر را دارد.

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n}\{f_n(s_n, x_n)\} \quad \text{یا} \quad f_n^*(s_n) = \min_{x_n}\{f_n(s_n, x_n)\}$$

که در آن $f_n(s_n, x_n)$ باید بر حسب s_n، x_n ، و $f_{n+1}^*(s_{n+1})$ نوشته شود. تعریف $f_n^*(s_n)$ بر حسب $f_{n+1}^*(s_{n+1})$ یک رابطه‌ای بازگشتی برای $f_n^*(s_n)$ می‌سازد.

www.modaresanesharif.ac.ir

فرض کنید در هر مرحله‌ی n هستیم و به سمت مرحله‌ی ۱ حرکت می‌کنیم، تابع $f_n^*(s_n)$ جدید با استفاده از $f_{n+1}^*(s_{n+1})$ به دست می‌آید که از تکرار قبلی به دست آمده است و این فرآیند تکرار می‌شود.

۸ـ با استفاده از رابطه‌ی بازگشتی، فرآیند حل از انتها شروع می‌شود و مرحله به مرحله به عقب برمی‌گردد تا تعیین مقدار بهینه‌ی متغیر تصمیم آغازین در مرحله‌ی شروع ادامه می‌یابد. این متغیر تصمیم، جواب بهینه‌ی کل مسأله را به ما می‌دهد.

در همه‌ی مسائل برنامه‌ریزی پویا، برای هر مرحله $(n = N, N-1, ..., 1)$ باید جدولی شبیه جدول زیر حاصل شود.

s_n \ x_n	$f_n(s_n, x_n)$	$f_n^*(s)$	x_n^*

وقتی که این جدول برای مرحله‌ی آغازین $(n=1)$ به دست آمد، مسأله حل شده است. از آن جا که حالت طوری تعریف شده است که برای $n=1$ مقدار معلومی است، در جدول $n=1$ مقدار بهینه‌ی x_1 (x_1^*) مشخص می‌شود. با معلوم بودن x_1^*، حالت برای $n=2$ محاسبه می‌گردد و با معلوم بودن آن مقدار بهینه‌ی x_2 (x_2^*) تعیین می‌شود. این فرآیند تا مرحله‌ی آخر ادامه می‌یابد.

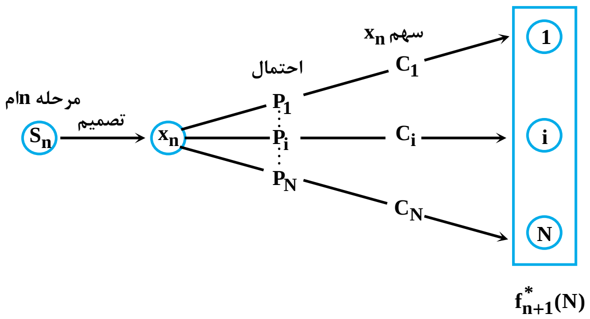
۹ـ مسائل برنامه‌ریزی پویا به دو صورت پسرو (برگشت به عقب) و پیشرو (پیشرفت به جلو) حل می‌شوند. روش پسرو از انتهای مسأله (مقصد) شروع شده و مرحله به مرحله به ابتدای مسأله (مبدأ) نزدیک می‌شود.

در حالی که در روش پیشرو از ابتدای مسأله مرحله به مرحله شروع می‌کنیم تا به انتهای آن برسیم.

۱۰ـ از برنامه‌ریزی پویا می‌توان در حل مسائل برنامه‌ریزی خطی (LP)، برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP)، برنامه‌ریزی عدد صحیح (ILP) و شبکه‌ها نیز استفاده کرد.

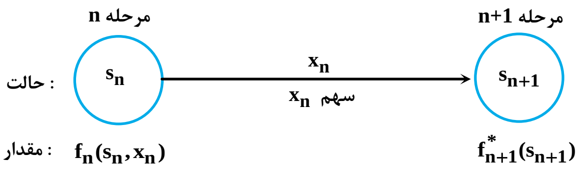
۱۱ـ مسائل برنامه‌ریزی پویا دو حالت قطعی و احتمالی دارند.

در برنامه‌ریزی پویای قطعی با معلوم بودن حالت و متغیر تصمیم هر مرحله، حالت مرحله‌ی بعد کاملاً مشخص خواهد بود. در حالی که در برنامه‌ریزی پویای احتمالی با معلوم بودن حالت و متغیر تصمیم تنها به واسطه‌ی یک تابع توزیع می‌توان دریافت که با چه احتمالی در کدام حالت از مرحله بعد قرار خواهیم گرفت. شکل زیر ساختار اساسی مسأله برنامه‌ریزی پویای احتمالی را نشان می‌دهد.



به عبارت دیگر در برنامه‌ریزی پویای قطعی با گرفتن تصمیم در یک مرحله، فقط به یک حالت مشخص از مرحله‌ی بعدی خواهیم رفت ولی در برنامه‌ریزی پویای احتمالی با گرفتن یک تصمیم در یک مرحله با احتمالاتی، به حالت‌های متفاوتی در مرحله‌ی بعدی خواهیم رفت. یعنی متغیر وضعیت آن‌ها دارای یک تابع توزیع داده شده است. در این بخش تأکید بر برنامه‌ریزی پویای قطعی است. بنابراین از توضیح بیشتر درباره‌ی برنامه‌ریزی پویای احتمالی اجتناب می‌کنیم.

در حالت کلی ساختار اساسی برنامه‌ریزی پویای قطعی را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.



www.modaresanesharif.ac.ir

همان‌طور که مشخص است، در مرحله‌ی n، فرآیند در حالت s_n است. با اتخاذ تصمیم x_n، فرآیند از حالت s_n به حالت s_{n+1} در مرحله‌ی $n+1$ انتقال خواهد یافت.

مقدار تابع هدف بر اساس سیاست بهینه، یعنی $f^*_{n+1}(s_{n+1})$، پیش‌تر محاسبه شده است. متغیر تصمیم x_n، نیز در محاسبه‌ی تابع هدف سهمی دارد. با ترکیب مناسب این دو کمیت مقدار $f_n(s_n, x_n)$، در ابتدای مرحله‌ی n مشخص می‌شود.

اگر تابع را نسبت به x_n بهینه کنیم، داریم:

$$f^*_n(s_n) = f_n(s_n, x^*_n)$$

پس از به دست آوردن x^*_n و $f^*_n(s_n)$ برای همه‌ی مقادیر احتمالی s_n، فرآیند حل آماده‌ی انتقال به مرحله‌ی قبل است.

یکی از روش‌های دسته‌بندی کردن برنامه‌ریزی پویای قطعی، بر اساس نوع تابع هدف است. به طور مثال، فرض کنید هدف مینیمم کردن (ماکسیمم کردن) مجموع سهم مراحل مختلف است. نوع دیگر دسته‌بندی بر اساس ماهیت مجموعه حالات است. بدین معنا که، حالت s_n، می‌تواند با استفاده از متغیر گسسته (مانند مسأله‌ی دلیجان) یا با متغیر پیوسته و یا متغیر برداری نمایش داده شود. به طور مشابه، متغیرهای تصمیم $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ نیز می‌توانند پیوسته و یا گسسته باشند. همه‌ی این موارد با چندین مثال بررسی خواهند شد. نکته‌ی حائز اهمیت در همه‌ی این مثال‌ها این است که با وجود همه‌ی تفاوت‌های ظاهری حل آن‌ها یکسان است، در واقع ساختار اساسی همه آن‌ها مشابه هم هستند.

مثال ۵: (فرستادن گروه‌های پزشکی به کشورهای در حال توسعه)

سازمان بهداشت جهانی برای بهبود بهداشت و آموزش نکات بهداشتی در کشورهای در حال توسعه، تصمیم به ارسال ۵ گروه پزشکی به ۳ کشور درحال توسعه دارد. این سازمان باید تعیین کند که به هر کشور چند گروه پزشکی باید اختصاص داده شود تا افزایش طول عمر در این سه کشور ماکسیمم شود. در مورد هر کشور افزایش طول عمر بر حسب نفر ـ سال برابر با حاصل‌ضرب جمعیت آن کشور در میانگین افزایش طول عمر سالیانه است.

گروه‌های پزشکی	افزایش طول عمر (نفر ـ سال)		
	کشور		
	۱	۲	۳
۰	۰	۰	۰
۱	۴۵	۲۰	۵۰
۲	۷۰	۴۵	۷۰
۳	۹۰	۷۵	۸۰
۴	۱۰۵	۱۱۰	۱۰۰
۵	۱۲۰	۱۵۰	۱۳۰

پاسخ: فرمول‌سازی

این مسأله نیازمند اتخاذ سه تصمیم مرتبط به هم است. یعنی، چه تعداد گروه پزشکی باید در این سه کشور مستقر شوند. از این رو، در مسأله‌ی برنامه‌ریزی پویای قطعی، هر کشور می‌تواند به‌عنوان یک مرحله در نظر گرفته شود. متغیر تصمیم x_n $(n = 1,2,3)$ تعداد گروه‌های پزشکی اختصاص‌یافته به مرحله‌ی n است و حالت در این سیستم عبارت است از تعداد گروه‌های پزشکی که می‌توان به مرحله‌ی n و مراحل بعد تخصیص داد.

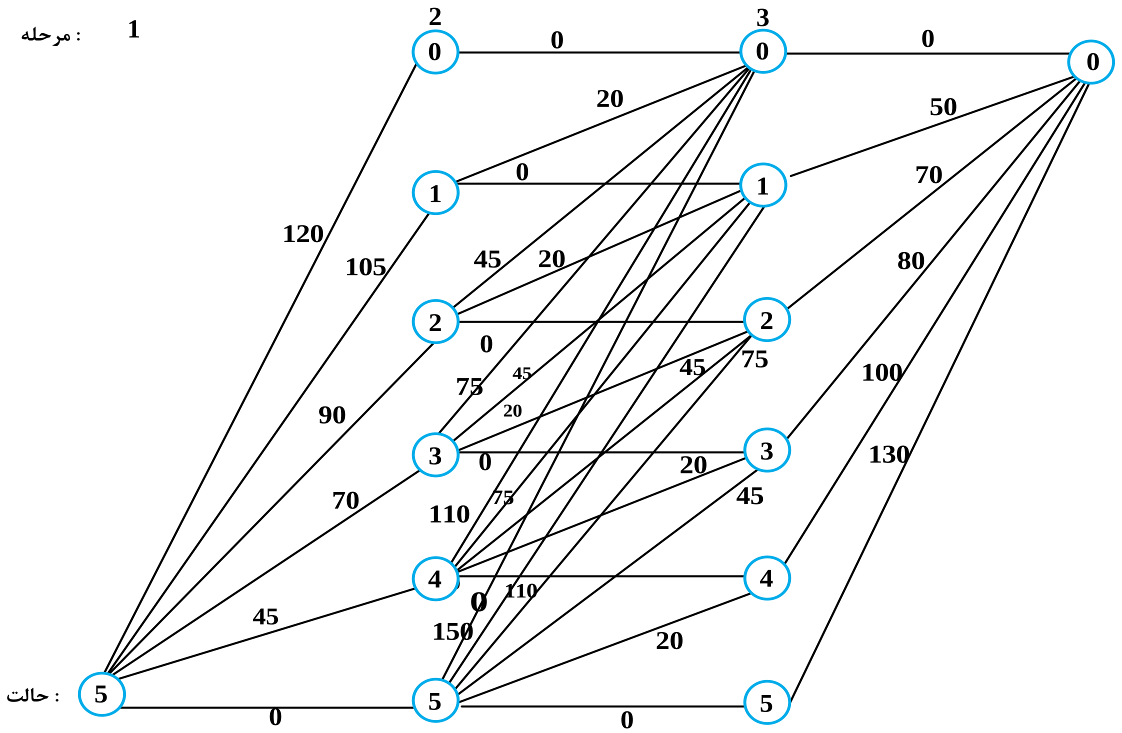
$S_n =$ تعداد گروه‌های پزشکی در دسترس (باقیمانده) برای استقرار در کشورهای باقی‌مانده $N = 3$ $(n, n+1, \ldots, 3)$.

بنابراین در مرحله ۱ (کشور ۱) که هر سه کشور برای تخصیص گروه‌های پزشکی به آن‌ها باقی مانده‌اند، $s_1 = 5$ است.

و در مراحل ۲ و ۳ (کشورهای ۲ و ۳)، حالات عبارتند از:

$$s_2 = s_1 - x_1 \quad , \quad s_3 = s_2 - x_2$$

www.modaresanesharif.ac.ir



نکته۳: همان‌طور که قبلاً اشاره شد حالت‌ها باید طوری تعریف شوند که برای $n=1$، مقادیر مستقل و معلومی باشند به‌عبارت دیگر، برای $n=1$، s_1 نمایانگر کل منبع برای همه‌ی مراحل است. به عنوان مثال در مسأله‌ی (فرستادن گروه‌های پزشکی به کشورهای در حال توسعه)، s_1 تعداد کل گروه‌های پزشکی برای ۳ کشور است که این مقدار برابر ۵ است.

فرض کنید: $P_i(x_i)$، افزایش طول عمر حاصل از اختصاص x_i گروه پزشکی به کشور i باشد. بنابراین، هدف انتخاب x_1، x_2 و x_3 است:

$$\max \sum_{i=1}^{3} P_i(x_i)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{3} x_i = 5$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ و عدد صحیح

داریم:

$$f_n(s_n, x_n) = P_n(x_n) + \max \sum_{i=n+1}^{3} P_i(x_i)$$

که در آن max روی متغیرهای $x_{n+1}, \ldots, x_3$ طوری محاسبه می‌شود که:

$$\sum_{i=n}^{3} x_i = s_n$$

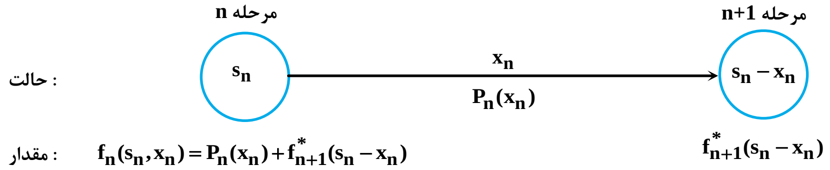
و x_i متغیرهای صحیح نامنفی برای $n=1,2,3$ هستند. علاوه بر این،

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n=0,1,\ldots,s_n} f_n(s_n, x_n)$$

بنابراین:

$$f_n(s_n, x_n) = P_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n)$$

$(f_4^* = 0)$. رابطه‌ای اساسی این روابط در شکل زیر نشان داده شده است.



www.modaresanesharif.ac.ir

بنابراین، رابطه‌ای بازگشتی مربوط به توابع f_1^*، f_2^*، و f_3^* این مسأله به‌صورت زیر است:

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n=0,1,\ldots,s_n} \{P_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n)\}, \qquad n = 1,2$$

برای آخرین مرحله $(n=3)$ چون $f_4^*(0)$ برابر صفر است، داریم:

$$f_3^*(s_3) = \max_{x_3=0,1,\ldots,s_3} P_3(x_3)$$

فرآیند حل: نتایج محاسبات برنامه‌ریزی پویا به‌صورت زیر ارائه شده است:

برای $n=3$ جدول زیر را داریم:

$n=3$

s_3	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
۰	۰	۰
۱	۵۰	۱
۲	۷۰	۲
۳	۸۰	۳
۴	۱۰۰	۴
۵	۱۳۰	۵

در همه‌ی مسائل برنامه‌ریزی پویا در حالت $n=N$ (که همان حالت شروع محاسبات است) فرض می‌شود:

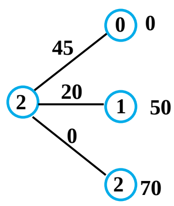
$$f_N^*(s_N) = P_n(x_n)$$

بنابراین $x_n^* = s_n$. در نتیجه در این مرحله هیچ محاسبه‌ی خاصی لازم نیست و جدول این مرحله همواره از روی داده‌های مسأله آورده می‌شود. در حالت کلی داریم:

S_N	$f_N^*(s_N)$	$x_N^*(=s_N)$
داده‌های مسأله	داده‌های مسأله	برابر ستون اول

در مرحله‌ی $n=2$، حالت $s_2=2$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

حالت :



زیرا $s_2=2$ یعنی دو گروه پزشکی داریم برای کشورهای ۲ و ۳. بنابراین اگر x_2 را تعداد گروه‌های پزشکی اختصاص داده شده به کشورهای ۲ و ۳ در نظر بگیریم ۳ حالت رخ می‌دهد.

حالت اول $(x_2=2)$ در این حالت هر دو گروه پزشکی به کشور دوم اختصاص داده می‌شود و هیچ گروه پزشکی برای کشور سوم باقی نمی‌ماند. افزایش طول عمر حاصل از این اختصاص با توجه به داده‌های مسأله ۴۵ است.

حالت دوم $(x_2=1)$ در این حالت یک گروه پزشکی برای کشور دوم اختصاص داده می‌شود و برای کشور سوم (با توجه به این‌که $s_2=2$) یک گروه پزشکی باقی می‌ماند. اختصاص یک گروه پزشکی به کشور دوم ۲۰ و یک گروه پزشکی به کشور سوم ۵۰ نفر ـ سال افزایش طول عمر به همراه خواهد داشت.

حالت سوم $(x_2=0)$ در این حالت هیچ گروه پزشکی‌ای به کشور دوم اختصاص داده نمی‌شود و همه گروه‌های پزشکی موجود برای کشور سوم باقی می‌ماند. افزایش طول عمر حاصل از این تخصیص برابر ۷۰ است.

فرمول مربوط به این حالت به‌صورت روبه‌رو محاسبه می‌شود. $f_2(2,x_2) = P_2(x_2) + f_3^*(2-x_2)$

www.modaresanesharif.ac.ir

که در آن

$x_۲ = ۰ \qquad f_۲(۲,۰) = P_۲(۰) + f_۳^*(۲) = ۰ + ۷۰ = ۷۰$

$x_۲ = ۱ \qquad f_۲(۲,۱) = P_۲(۱) + f_۳^*(۱) = ۲۰ + ۵۰ = ۷۰$

$x_۲ = ۲ \qquad f_۲(۲,۲) = P_۲(۲) + f_۳^*(۰) = ۴۵ + ۰ = ۴۵$

است. چون هدف در این مسأله، ماکسیمم کردن است، در نتیجه برای ۱ یا $x_۲^* = ۰$، $f_۲^*(۲) = ۷۰$ است.

$n = ۲$

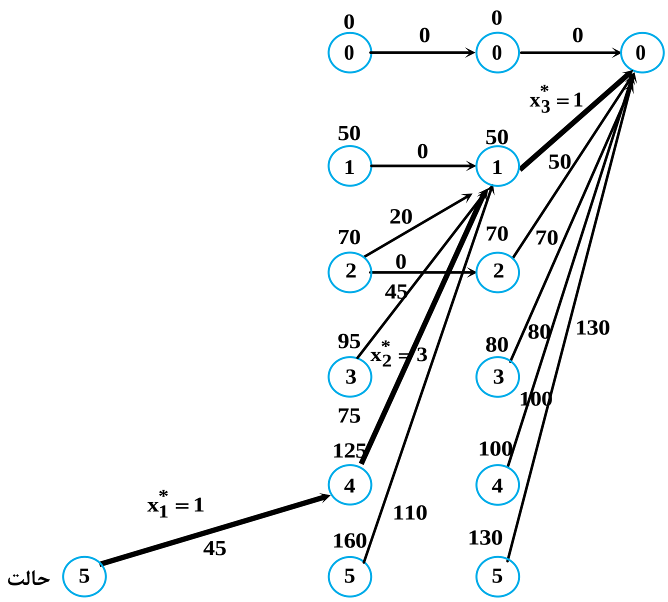
$s_۲$ \ $x_۲$	$f_۲(s_۲,x_۲) = P_۲(x_۲) + f_۳^*(s_۲ - x_۲)$						$f_۲^*(s_۲)$	$x_۲^*$
	۰	۱	۲	۳	۴	۵		
۰	۰						۰	۰
۱	۵۰	۲۰					۵۰	۰
۲	۷۰	۷۰	۴۵				۷۰	۱ یا ۰
۳	۸۰	۹۰	۹۵	۷۵			۹۵	۲
۴	۱۰۰	۱۰۰	۱۱۵	۱۲۵	۱۱۰		۱۲۵	۳
۵	۱۳۰	۱۲۰	۱۲۵	۱۴۵	۱۶۰	۱۵۰	۱۶۰	۴

جدول مربوط برای مرحله $n = ۱$ به صورت زیر است:

$n = ۱$

$s_۱$ \ $x_۱$	$f_۱(s_۱,x_۱) = P_۱(x_۱) + f_۲^*(s_۱ - x_۱)$						$f_۱^*(s_۱)$	$x_۱^*$
	۰	۱	۲	۳	۴	۵		
۵	۱۶۰	۱۷۰	۱۶۵	۱۶۰	۱۵۵	۱۲۰	۱۷۰	۱

بنابراین، جواب بهینه مرحله‌ی ۱، $x_۱^* = ۱$ است، با در نظر گرفتن $s_۲ = ۵ - ۱ = ۴$، جواب بهینه‌ی مرحله‌ی ۲، $x_۲^* = ۳$ است. به همین ترتیب برای $s_۳ = ۴ - ۳ = ۱$، $x_۳^* = ۱$ است. از آنجا که $f_۱^*(۵) = ۱۷۰$ است، در نتیجه اختصاص گروه‌های پزشکی به صورت (۱,۳,۱) باعث افزایش طول عمر جمعیت این سه کشور می‌شود.



◆ ◆ ◆ ◆

تذکر ۱: در اکثر مسائل برنامه‌ریزی پویا یک منبع وجود دارد که باید توزیع شود. در این مثال تعدادی پزشک به عنوان منبع وجود دارند که باید بین سه کشور توزیع گردد.

www.modaresanesharif.ac.ir

روش گرادیان

در این قسمت روشی برای بهینه‌سازی توابعی که دوبار مشتق‌پذیرند و مشتق‌های پیوسته دارند، ارائه می‌شود. ایده‌ی کلی **روش گرادیان** عبارت است از ایجاد نقاط متوالی در جهت گرادیان تابع.

روش نیوتن ـ رافسن که در قسمت قبل آن را توضیح دادیم، یک روش گرادیان برای حل معادلات همزمان است. در این قسمت روش دیگری به نام **روش تندترین افزایش (کاهش)**، که در مسائل ماکسیمم‌سازی بیشترین افزایش و در مسائل مینیمم‌سازی بیشترین کاهش است، بررسی می‌شود. روش گرادیان در نقطه‌ای متوقف می‌شود که بردار گرادیان تابع در آن نقطه برابر صفر باشد. البته باید توجه داشت که این شرط، تنها یک شرط لازم برای بهینگی است اما شرط کافی نیست. بهینگی در صورتی حاصل می‌شود که محدب یا مقعر بودن تابع از قبل مشخص باشد. فرض کنید می‌خواهیم $f(x)$ را ماکسیمم کنیم و x° نقطه‌ی شروع باشد. همچنین فرض کنید $\nabla f(x^k)$ گرادیان تابع در نقطه‌ی x^k باشد. هدف از روش تندترین افزایش، تعیین مسیر p است که $\frac{\partial f}{\partial p}$ در طول آن در نقطه‌ی داده شده ماکسیمم شود. این نتیجه زمانی حاصل می‌شود که نقاط متوالی x^k و x^{k+1} طوری انتخاب شوند که

$$x^{k+1} = x^k + r^k \nabla f(x^k)$$

در رابطه بالا r^k طول گام بهینه در x^k است.

طول گام r^k به قسمی تعیین می‌شود که نقطه‌ی بعدی، x^{k+1}، بیشترین مقدار افزایش را به تابع $f(x)$ بدهد. به عبارت دیگر اگر تابع تک‌متغیره‌ی $h(r)$ را به صورت

$$h(r) = f[x^k + r\nabla f(x^k)]$$

تعریف کنیم، $r = r^k$ را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که تابع $h(r)$ ماکسیمم شود.

روش تندترین افزایش زمانی پایان می‌پذیرد که دو نقطه‌ی متوالی تولید شده‌ی x^k و x^{k+1} تقریباً مساوی باشند. شرط معادل

$$r^k \nabla f(x^k) \approx \circ$$

است. با فرض آن که $r^k \neq \circ$ ، شرط لازم $\nabla f(x^k) = \circ$ در x^k صدق می‌کند.

نکته۱۵: در این روش، حل را با یک نقطه حدس اولیه شروع می‌کنیم. جهت پیدا کردن بیشترین افزایش در تابع هدف مسائل ماکسیمم‌سازی باید در جهت بردار گرادیان حرکت کنیم و برای پیدا کردن بیشترین کاهش در تابع هدف مسائل مینیمم‌سازی در خلاف جهت بردار گرادیان حرکت می‌کنیم.

مثال۴۱: مسأله‌ی $\max f(x_۱, x_۲) = ۴x_۱ + ۶x_۲ - ۲x_۱^۲ - ۲x_۱x_۲ - ۲x_۲^۲$

را در نظر بگیرید. از روش تندترین افزایش برای تقریب جواب استفاده کنید.

☑ **پاسخ:** به طور اختیاری نقطه‌ی $\mathbf{x}^{\circ} = (۱,۱)$ را به عنوان نقطه‌ی شروع انتخاب می‌کنیم، داریم:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (۴ - ۴x_۱ - ۲x_۲, ۶ - ۲x_۱ - ۴x_۲)$$

تکرار اول.

$$\nabla f(\mathbf{x}^{\circ}) = (-۲, \circ)$$

نقطه‌ی بعدی، $\mathbf{x}^۱$، با در نظر گرفتن $\mathbf{x}^۱ = (۱,۱) + r(-۲,\circ) = (۱ - ۲r, ۱)$ به‌دست می‌آید. بنابراین رابطه زیر را داریم:

$$h(r) = f(۱ - ۲r, ۱) = -۲(۱ - ۲r)^۲ + ۲(۱ - ۲r) + ۴$$

طول گام بهینه با استفاده از شرایط بهینگی به صورت

$$\frac{dh}{dr} = ۸(۱ - ۲r) - ۴ = \circ$$

$$\frac{d^۲h}{dr^۲} < \circ$$

تعیین می‌شود. مقدار ماکسیمم $h(r)$، $r^۱ = \frac{۱}{۴}$ است که جواب نقطه بعدی $\mathbf{x}^۱ = (\frac{۱}{۲}, ۱)$ را به‌دست می‌دهد.

www.modaresanesharif.ac.ir

تکرار دوم.

$$\nabla f(\mathbf{x}^1)=(0,1)$$

$$\mathbf{x}=(\frac{1}{2},1)+r(0,1)=(\frac{1}{2},1+r)$$

$$h(r)=-2(1-r)^2+5(1+r)+\frac{3}{2}$$

با قرار دادن $\frac{dh}{dr}=0$ و با بررسی $\frac{d^2h}{dr^2}$ خواهیم داشت:

$$r^2=\frac{1}{4}\quad,\quad \mathbf{x}^2=(\frac{1}{2},\frac{5}{4})$$

تکرار سوم.

$$\nabla f(\mathbf{x}^2)=(-\frac{1}{2},0)$$

$$\mathbf{x}=(\frac{1}{2},\frac{5}{4})+r(-\frac{1}{2},0)=(\frac{1-r}{2},\frac{5}{4})$$

$$h(\mathbf{r})=-\frac{1}{2}(1-r)^2+\frac{3}{4}(1-r)+\frac{35}{8}$$

بنابراین

$$r^3=\frac{1}{4}\quad,\quad \mathbf{x}^3=(\frac{3}{8},\frac{5}{8})$$

تکرار چهارم.

$$\nabla f(\mathbf{x}^3)=(0,\frac{1}{4})$$

$$\mathbf{x}=(\frac{3}{8},\frac{5}{4})+r(0,\frac{1}{4})=(\frac{3}{8},\frac{5+r}{4})$$

$$h(r)=-\frac{1}{8}(5+r)^2+\frac{21}{16}(5+r)+\frac{39}{32}$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$r^4=\frac{1}{4}\quad,\quad \mathbf{x}^4=(\frac{3}{8},\frac{21}{16})$$

تکرار پنجم.

$$\nabla f(\mathbf{x}^4)=(-\frac{1}{8},0)$$

$$\mathbf{x}=(\frac{3}{8},\frac{21}{16})+r(-\frac{1}{8},0)=(\frac{3-r}{8},\frac{21}{16})$$

$$h(r)=-\frac{1}{32}(3-r)^2+\frac{11}{64}(3-r)+\frac{567}{128}$$

بنابراین:

$$r^5=\frac{1}{4}\quad,\quad \mathbf{x}^5=(\frac{11}{32},\frac{21}{16})$$

تکرار ششم.

$$\nabla f(\mathbf{x}^5)=(0,\frac{1}{16})$$

از آنجا که $\nabla f(\mathbf{x}^5)\approx 0$ روش می‌تواند در این نقطه پایان پذیرد. نقطه‌ی ماکسیمم تقریبی، $\mathbf{x}^5=(0/3438,1/3125)$ است. دقت کنید که نقطه‌ی بهینه دقیق $x^*=(0/3333,1/3333)$ است، که خیلی به هم نزدیک است.

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۴۲: با روش گرادیان مینیمم تابع $f(x_1,x_2)=(4-x_1)^2x_2^2$ را به دست آورید.

پاسخ: نقطه‌ی شروع را $\mathbf{x}^0=(0,0)$ در نظر می‌گیریم.

$$\nabla f(x_1,x_2)=(-8+2x_1,2x_2)$$

تکرار اول.

$$\nabla f(\mathbf{x}^0)=(-8,0)$$
$$\mathbf{x}=(0,0)+r(-8,0)=(-8r,0)$$
$$h(r)=f(-8r,0)=(4+8r)^2+0=16(1+2r)^2$$

بنابراین:

$$h'(r)=0\Rightarrow r=-\frac{1}{2}$$

تکرار دوم.

$$\mathbf{x}^1=(0,0)-\frac{1}{2}(-8,0)=(4,0)$$
$$\nabla f(\mathbf{x}^1)=(0,0)$$

در نتیجه جواب بهینه $x^*=(4,0)$ است.

مشخصه‌ی مسائل بهینه‌سازی غیرخطی با محدودیت‌های خطی آن است که تمام توابع مربوط به محدودیت‌های مسأله خطی هستند در حالی که تابع هدف غیرخطی است. برای حل توابع هدف غیرخطی الگوریتم‌های خاصی که اساس آن‌ها بر تعمیم برنامه‌ریزی خطی استوار است، توسعه یافته‌اند. برنامه‌ریزی درجه دوم که در زیر مطرح می‌شود، یک حالت خاص از این نوع است.

برنامه‌ریزی درجه دوم در فرموله کردن بسیاری از مسائل علمی مانند مدل‌های اقتصادی، آنالیز سرمایه‌گذاری و آنالیز رگرسیون در آمار کاربرد فراوان دارد. علت عمده‌ی دیگر اهمیت این مدل آن است که به عنوان روش متداول برای حل بسیاری از مسائل بهینه‌سازی با محدودیت‌های خطی مورد استفاده قرار می‌گیرد. بدین معنی که مسأله‌ی اصلی با یک رشته از برنامه‌ریزی‌های درجه دوم تقریب زده شده و از طریق حل آن‌ها به جواب می‌رسد.

برنامه‌ریزی درجه دوم

در **برنامه‌ریزی درجه دوم** همه محدودیت‌ها، خطی هستند اما تابع هدف یک تابع درجه دوم است. بنابراین تنها تفاوت آن با یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی این است که بعضی از عبارات تابع هدف یا به صورت مجذور یک متغیر و یا حاصل ضرب دو متغیر هستند. شکل کلی یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم به صورت

$$\begin{aligned}\max\quad & z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}x_jq_{jk}x_k \\ \text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i \qquad i=1,2,\dots,m \\ & x_j\ge 0 \qquad i=1,2,\dots,n\end{aligned}$$

است. قرار دهید $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$، $\mathbf{Q}=[q_{jk}]$، $\mathbf{c}=(c_1,c_2,\dots,c_n)$ و $\mathbf{b}=(b_1,b_2,\dots,b_m)^T$.

نمایش ماتریسی مسأله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم به صورت

$$\begin{aligned}\max\quad & z=\mathbf{cx}+\mathbf{x}^T\mathbf{Qx} \\ \text{s.t.}\quad & \mathbf{Ax}\le\mathbf{b} \\ & \mathbf{x}\ge 0\end{aligned}$$

است.

www.modaresanesharif.ac.ir

ضریب $x_j.x_k$ در این مسأله برابر $q_{jk}+q_{kj}$ است، بنابراین اگر ماتریس $D=[d_{jk}]$ را طوری تعریف کنیم که در آن $d_{jk}=q_{jk}+q_{kj}$ آنگاه ماتریس $\mathbf{D}$ متقارن خواهد بود، $\frac{۱}{۲}\mathbf{x}^T\mathbf{D}\mathbf{x}=\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$ در نتیجه $\mathbf{D}$ ماتریس هسی تابع هدف است. در نتیجه می‌توان نمایش ماتریسی مسأله‌ای برنامه‌ریزی درجه دوم را به صورت زیر نیز نشان داد:

$$\begin{aligned} \max \quad & z=\mathbf{cx}+\frac{۱}{۲}\mathbf{x}^T\mathbf{D}\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax}\le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}\ge ۰ \end{aligned}$$

تابع $\mathbf{x}^T\mathbf{D}\mathbf{x}$ معرف یک صورت درجه دوم است. ماتریس $\mathbf{D}$ برای مسأله ماکسیمم‌سازی **معین منفی** (یعنی $\mathbf{x}^T\mathbf{D}\mathbf{x}<۰ \quad \forall \mathbf{x}\neq ۰$) و برای مسأله مینیمم سازی **معین مثبت** (یعنی $\mathbf{x}^T\mathbf{D}\mathbf{x}>۰ \quad \forall \mathbf{x}\neq ۰$) فرض می‌شود. بنابراین تابع هدف برای مسأله ماکسیمم‌سازی اکیداً مقعر و برای مسأله‌ی مینیمم‌سازی اکید محدب است.

مثال ۴۳: شکل ماتریسی مسأله برنامه‌ریزی درجه دوم

$$\begin{aligned} \max \quad & z=x_۱^۲+۲x_۱x_۲+۳x_۱x_۳+۵x_۲^۲+x_۲x_۳ \\ \text{s.t.} \quad & x_۱+۲x_۲+x_۳\le ۴ \\ & ۲x_۱+x_۲+۳x_۳\le ۷ \\ & x_۱,x_۲,x_۳\ge ۰ \end{aligned}$$

را بنویسید.

☑ **پاسخ:** برای تبدیل این مسأله به شکل ماتریسی آن، ابتدا تابع هدف را به صورت ماتریسی می‌نویسیم:

$$z=(x_۱,x_۲,x_۳)\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{pmatrix}$$

که در آن ماتریس $\mathbf{Q}$ به صورت $\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ است. با توجه به مطالب گفته شده در درس $d_{jk}=q_{jk}+q_{kj}$ بنابراین داریم:

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} ۲ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱۰ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}=\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۴ & ۴ & ۶ \\ ۴ & ۲۰ & ۲ \\ ۶ & ۲ & ۰ \end{pmatrix}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} & d_{۱۱}=q_{۱۱}+q_{۱۱}=۱+۱=۲ \\ & d_{۱۲}=q_{۱۲}+q_{۲۱}=۲+۰=۲ \\ & d_{۱۳}=q_{۱۳}+q_{۳۱}=۳+۰=۳ \\ & \vdots \\ & d_{۳۳}=۲q_{۳۳}=۰ \end{aligned}$$

بنابراین شکل ماتریسی مسأله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم به صورت

$$\begin{aligned} \max \quad & z=\frac{۱}{۲}(x_۱,x_۲,x_۳)\begin{pmatrix} ۴ & ۴ & ۶ \\ ۴ & ۲۰ & ۲ \\ ۶ & ۲ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{pmatrix}\le \begin{pmatrix} ۴ \\ ۷ \end{pmatrix} \\ & x_۱,x_۲,x_۳\ge ۰ \end{aligned}$$

است.

www.modaresanesharif.ac.ir

روش حل این مسأله بر شرایط لازم «کی.کی.تی» مبتنی است. از آنجا که z اکیداً مقعر و فضای جواب محدب است، شرایط کافی برای بهینه‌ی کلی برقرار است. بنابراین مسأله را می‌توان به صورت

$$\max \quad z = \mathbf{cx} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Dx}$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{G(x)} = \begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ -\mathbf{I}\end{pmatrix} x - \begin{pmatrix}\mathbf{b}\\ 0_n\end{pmatrix} \le 0_{m+n}$$

بازنویسی کرد. فرض کنید $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)^T$ و $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^T$ به ترتیب ضرایب لاگرانژ مربوط به محدودیت‌های $\mathbf{Ax} - \mathbf{b} \le 0_m$ و $-\mathbf{x} \le 0$ باشند. شرایط «کی.کی.تی» به صورت

$$\boldsymbol{\lambda} \ge 0_m$$
$$\boldsymbol{\mu} \ge 0_n$$
$$\nabla z - (\boldsymbol{\lambda}^T, \boldsymbol{\mu}^T)\nabla \mathbf{G(x)} = 0$$
$$\lambda_i (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$
$$\mu_j x_j = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$
$$\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$$
$$-\mathbf{x} \le 0_n$$

نوشته می‌شود. با در نظر گرفتنِ

$$\nabla z = \mathbf{c} + \mathbf{x}^T\mathbf{D}$$
$$\nabla G(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ -\mathbf{I}\end{pmatrix}$$

به عنوان گرادیان تابع هدف و محدودیت‌ها و با فرض $\mathbf{s} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax} \ge 0$، شرایط به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$-\mathbf{x}^T\mathbf{D} + \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A} - \boldsymbol{\mu}^T = \mathbf{c}$$
$$\mathbf{Ax} + \mathbf{s} = \mathbf{b}$$
$$\mu_j x_j = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$
$$\lambda_i s_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$
$$\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu} \ge 0_n \;,\; \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s} \ge 0_m$$

از آن‌جا که $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$، ترانهاده مجموعه اول معادلات را می‌توان به صورت $-\mathbf{Dx} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{c}^T$ نوشت. بنابراین شرایط لازم را می‌توان به صورت زیر ترکیب کرد.

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{D} & \mathbf{A}^T & -\mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{A} & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \boldsymbol{\lambda}\\ \boldsymbol{\mu}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{c}^T\\ \mathbf{b}\end{pmatrix}$$
$$\mu_j x_j = \lambda_i s_i = 0 \qquad \forall\, i, j$$
$$\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu} \ge 0_n \;,\; \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s} \ge 0_m$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، جز شرایط $\mu_j x_j = 0 = \lambda_i s_i$ بقیه‌ی معادلات در $\mathbf{x}$، $\boldsymbol{\lambda}$، $\boldsymbol{\mu}$ و $\mathbf{s}$ توابع خطی هستند. لذا این مسأله با حل مجموعه معادلات خطی در شرایط اضافی $\mu_j x_j = 0 = \lambda_i s_i$ هم ارز است. با توجه به این که تابع هدف این مسأله اکیداً مقعر و فضای شدنی محدب است، جواب شدنی‌ای که در همه شرایط صدق کند، یکتا و بهینه است.

تذکر ۹: توجه داشته باشید که در صورت وجود تباهیدگی، امکان برقرار شدنِ شرط $\lambda_i s_i = 0$ فراهم می‌شود. در حالی که هر دو متغیر s_i و λ_i در پایه هستند ولی مقدار یکی صفر است که این با فرض مسأله مغایرت دارد. در نتیجه باید توجه داشت که دو متغیر λ_i و s_i هرگز به طور همزمان در پایه نباشند.

نکته ۱۶: این الگوریتم زمانی خاتمه می‌یابد که هیچ محورگیری مطابق با قواعد سیمپلکس و همچنین محدودیت‌های اضافی مکمل زائد امکان‌پذیر نباشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۴۴: مسأله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم

$$\begin{aligned} \textbf{max} \quad & z = ۴x_۱ + ۶x_۲ - ۲x_۱^۲ - ۲x_۱x_۲ - ۲x_۲^۲ \\ \textbf{s.t.} \quad & x_۱ + ۲x_۲ \le ۲ \\ & x_۱, x_۲ \ge ۰ \end{aligned}$$

را حل کنید.

☑ **پاسخ:** ابتدا مسأله را به صورت ماتریسی

$$\begin{aligned} \max \quad & z = (۴,۶)\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} + \frac{۱}{۲}(x_۱, x_۲)\begin{pmatrix} -۴ & -۲ \\ -۲ & -۴ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & (۱,۲)\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} \le ۲ \\ & x_۱, x_۲ \ge ۰ \end{aligned}$$

بازنویسی می‌کنیم. شرایط کاهن ـ تاکر به صورتِ

$$\begin{pmatrix} ۴ & ۲ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۴ & ۲ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ \lambda_۱ \\ \mu_۱ \\ \mu_۲ \\ s_۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۴ \\ ۶ \\ ۲ \end{pmatrix}$$

بررسی می‌شود. جدول آغازین روش دو فازی با وارد کردن متغیرهای مصنوعی $R_۱$ و $R_۲$ به دست آمده است.

پایه‌ای	$x_۱$	$x_۲$	$\lambda_۱$	$\mu_۱$	$\mu_۲$	$R_۱$	$R_۲$	$s_۱$	جواب
r	۶	۶	۳	-۱	-۱	۰	۰	۰	۱۰
$R_۱$	۴	۲	۱	-۱	۰	۱	۰	۰	۴
$R_۲$	۲	۴	۲	۰	-۱	۰	۱	۰	۶
$s_۱$	۱	۲	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۲

تکرار اول. با توجه به این که $\mu_۱ = ۰$، متغیر $x_۱$ را به‌عنوان متغیر وارد شونده و $R_۱$ را به‌عنوان متغیر خارج شونده انتخاب می‌کنیم.

پایه‌ای	$x_۱$	$x_۲$	$\lambda_۱$	$\mu_۱$	$\mu_۲$	$R_۱$	$R_۲$	$s_۱$	جواب
r	۰	۳	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	-۱	$-\frac{۳}{۲}$	۰	۰	۴
$x_۱$	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	۰	۱
$R_۲$	۰	۳	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۱	۰	۴
$s_۱$	۰	$\frac{۳}{۲}$	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	۰	$-\frac{۱}{۴}$	۰	۱	۱

تکرار دوم. از آنجا که $\mu_۲ = ۰$، $x_۲$ را به عنوان متغیر وارد شونده انتخاب می‌کنیم.

پایه‌ای	$x_۱$	$x_۲$	$\lambda_۱$	$\mu_۱$	$\mu_۲$	$R_۱$	$R_۲$	$s_۱$	جواب
r	۰	۰	۲	۰	-۱	-۱	۰	-۲	۲
$x_۱$	۱	۰	$\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	۰	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$
$R_۱$	۰	۰	۲	۰	-۱	۰	۱	-۲	۲
$x_۲$	۰	۱	$-\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	۰	$\frac{۱}{۶}$	۰	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$

www.modaresanesharif.ac.ir

تکرار سوم. مساعدترین متغیر $\lambda_۱$ را می‌توان به پایه‌ای تبدیل کرد، زیرا $s_۱ = ۰$ است.

پایه‌ای	$x_۱$	$x_۲$	$\lambda_۱$	$\mu_۱$	$\mu_۲$	$R_۱$	$R_۲$	$s_۱$	جواب
r	۰	۰	۰	۰	۰	-۱	-۱	۰	۰
$x_۱$	۱	۰	۰	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۶}$	۰	$\frac{۱}{۳}$
$\lambda_۱$	۰	۰	۱	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	-۱	۱
$x_۲$	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۶}$	$-\frac{۱}{۱۲}$	$-\frac{۱}{۶}$	$-\frac{۱}{۱۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۵}{۶}$

جدول بالا، جواب بهینه‌ی فاز اول را به‌دست می‌دهد. با توجه به این که $r = ۰$، جواب $x_۱ = \frac{۱}{۳}$ و $x_۲ = \frac{۵}{۶}$ شدنی است. مقدار بهینه‌ی z در مسأله اصلی برابر ۴/۱۶ است.

روش‌های خطی کردن مسائل غیرخطی

با توجه به این‌که حل مسائل برنامه‌ریزی خطی متداول و متنوع است، بنابراین حل مسائل برنامه‌ریزی خطی به جای حل مسائل غیرخطی توصیه می‌شود. در این قسمت روش‌های متفاوتی برای خطی کردن مسائل غیرخطی ارائه می‌شود.

توابع هدف قدرمطلقی

مسأله‌ی بهینه‌سازی

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = \sum_{j=۱}^{n} c_j |x_j| \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} x_{ij} = b_i \qquad i = ۱,۲,\dots,m \\
& x_j \quad \text{نامقید} \qquad j = ۱,۲,\dots,n
\end{aligned}$$

را در نظر بگیرید، به‌طوری که در آن $c_j \geq ۰$، $j = ۱,۲,\dots,n$. همان‌طور که مشاهده می‌کنید اگر چه تابع هدف مسأله بر روی محدوده‌ی تعریف شده برای متغیرها خطی نیست، اما این مسأله قابل تبدیل به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی است. از آن‌جایی که x_j، $(j = ۱,۲,\dots,n)$، متغیری نامقید است، بنابراین می‌توان آن را به‌صورت $x_j = x_j^+ - x_j^-$ نمایش داد به‌طوری که $x_j^+, x_j^- \geq ۰$ و $x_j^+ . x_j^- = ۰$. در نتیجه $|x_j| = x_j^+ + x_j^-$، بنابراین با جای‌گزینی این تبدیلات، مسأله‌ی فوق به مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = \sum_{j=۱}^{n} c_j (x_j^+ + x_j^-) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} (x_j^+ - x_j^-) = b_i \qquad i = ۱,۲,\dots,m \\
& x_j^+, x_j^- \geq ۰ \qquad j = ۱,۲,\dots,n
\end{aligned}$$

تبدیل خواهد شد.

مثال ۴۵: مسأله‌ی

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = -۳x_۱ - ۴x_۲ + ۵x_۳ + ۳|x_۲| + ۲|x_۳| \\
\text{s.t.} \quad & ۳x_۱ + ۲x_۲ + ۱۳x_۳ = -۹ \\
& -۸x_۱ + ۳x_۲ + ۳x_۳ = ۱۰ \\
& x_۱, x_۲, x_۳ \quad \text{نامقید}
\end{aligned}$$

را به‌صورت خطی بازنویسی کنید.

www.modaresanesharif.ac.ir

☑ **پاسخ:** از آن‌جا که متغیرهای x_1، x_2 و x_3 نامقید هستند، بنابراین از جای‌گزینی $x_j = x_j^+ - x_j^-$، $j=1,2,3$، استفاده می‌کنیم. که در آن x_j، $j=1,2,3$ نامنفی است. مسأله‌ی تبدیل‌یافته به‌صورت

$$\begin{aligned}
\min\quad & z=-3(x_1^+-x_1^-)-4(x_2^+-x_2^-)+5(x_3^+-x_3^-)+3(x_2^++x_2^-)+2(x_3^++x_3^-)\\
\text{s.t.}\quad & 3(x_1^+-x_1^-)+2(x_2^+-x_2^-)+13(x_3^+-x_3^-)=-9\\
& -8(x_1^+-x_1^-)+3(x_2^+-x_2^-)+3(x_3^+-x_3^-)=10\\
& x_1^+,x_1^-,x_2^+,x_2^-,x_3^+,x_3^-\ge 0
\end{aligned}$$

خواهد بود.

نکته ۱۷: دقت کنید که اگر در مسأله‌ی مینیمم‌سازی $c_j<0$ موجود باشد، آن‌گاه این روش قابل استفاده نیست (بررسی کنید).

تابع هدف مینی‌ماکس

یک مسأله بهینه‌سازی را در نظر بگیرید که فضای‌شدنی آن یک تابع چند وجهی و تابع هدف آن ماکسیمم k تابع خطی $\mathbf{c}^k\mathbf{x},\dots,\mathbf{c}^2\mathbf{x},\mathbf{c}^1\mathbf{x}$ است به طوری که $\mathbf{c}^i=(c_1^i,\dots,c_n^i)$، $i=1,2,\dots,k$، بردار سطری ضرایب هزینه در i امین تابع باشد. متغیرهای مسأله را با بردار $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$ نمایش می‌دهیم. بنابراین مسأله به صورت

$$\begin{aligned}
\min\quad & \max\{\mathbf{c}^1x,\mathbf{c}^2x,\dots,\mathbf{c}^k\mathbf{x}\}\\
\text{s.t}\quad & \mathbf{Ax}\ge b\\
& \mathbf{x}\ge 0_n
\end{aligned}$$

بیان می‌شود. هدف به‌دست آوردن x ای شدنی است که $f(\mathbf{x})=\max\{\mathbf{c}^1\mathbf{x},\mathbf{c}^2\mathbf{x},\dots,\mathbf{c}^k\mathbf{x}\}$ را مینیمم کند. $f(\mathbf{x})$ را نمی‌توان با یک فرمول بسته معین کرد. برای خطی کردن مسأله‌ی فوق، متغیر جدید (نامقید) x_{n+1} را تعریف می‌کنیم. فرض کنید $x_{n+1}=\max\{\mathbf{c}^1\mathbf{x},\mathbf{c}^2\mathbf{x},\dots,\mathbf{c}^k\mathbf{x}\}$. در این صورت رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\forall i=1,2,\dots,k\ ,\ x_{n+1}\ge \mathbf{c}^i\mathbf{x}\ \Rightarrow x_{n+1}-\mathbf{c}^i\mathbf{x}\ge 0 \qquad i=1,2,\dots,k$$

بنابراین با اضافه کردن این محدودیت به مسأله، تابع هدف به x_{n+1} تبدیل می‌شود که تابعی خطی است و در آن $x_{n+1},x_n,\dots,x_2,x_1$ متغیرهای تصمیم این مسأله هستند. مسأله‌ی جدید به صورت :

$$\begin{aligned}
\min\quad & x_{n+1}\\
\text{s.t}\quad & x_{n+1}-\mathbf{c}^i\mathbf{x}\ge 0 \qquad i=1,2,\dots,k\\
& \mathbf{Ax}\ge \mathbf{b}\\
& \mathbf{x}\ge 0_n\ ,\ x_{n+1}\ \text{نامقید}
\end{aligned}$$

خواهد بود. در این مسأله همه‌ی محدودیت‌ها و هم‌چنین تابع هدف خطی هستند، بنابراین این مسأله یک برنامه‌ریزی خطی است.

مثال ۴۶: مسأله‌ی

$$\begin{aligned}
\min\quad & \max\{5x_1+2x_2,-3x_1-4x_2\}\\
\text{s.t.}\quad & x_1-5x_2\ge 7\\
& 3x_1+6x_2\ge 10\\
& x_1,x_2\ge 0
\end{aligned}$$

را به صورت مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی بنویسید.

☑ **پاسخ:** متغیر نامقید x_3 را به صورت $x_3=\max\{5x_1+2x_2,-3x_1-4x_2\}$ تعریف می‌کنیم. بنابراین شکل برنامه‌ریزی خطی این مسأله به صورت

$$\begin{aligned}
\min\quad & x_3\\
\text{s.t.}\quad & x_3-5x_1-2x_2\ge 0\\
& x_3+3x_1+4x_2\ge 0\\
& x_1-5x_2\ge 7\\
& 3x_1+6x_2\ge 10\\
& x_1,x_2\ge 0\ ,\ x_3\ \text{نامقید}
\end{aligned}$$

است.

www.modaresanesharif.ac.ir

به طور مشابه مسأله‌ی

$$\begin{array}{ll} \max & \min\{\mathbf{c}^1\mathbf{x},\mathbf{c}^2\mathbf{x},\dots,\mathbf{c}^r\mathbf{x}\} \\ \text{s.t.} & \mathbf{A}\mathbf{x}\le b \\ & \mathbf{x}\ge 0 \end{array}$$

را در نظر بگیرید. مشابه بحث قبل اگر $\mathbf{c}^1\mathbf{x},\mathbf{c}^2\mathbf{x},\dots,\mathbf{c}^r\mathbf{x}$ توابع خطی مفروض باشند، آن‌گاه تابع $g(\mathbf{x})=\min\{\mathbf{c}^1\mathbf{x},\dots,\mathbf{c}^r\mathbf{x}\}$ مینیمم نقطه‌ای توابع خطی $\mathbf{c}^i\mathbf{x}$، $i=1,\dots,r$، نامیده می‌شود. برای خطی کردن این مسأله، متغیر x_{n+1} را تعریف کرده و قرار می‌دهیم.

$$x_{n+1}=\min\{\mathbf{c}^1\mathbf{x},\mathbf{c}^2\mathbf{x},\dots,\mathbf{c}^i\mathbf{x}\}$$

در این صورت داریم:

$$x_{n+1}-\mathbf{c}^i\mathbf{x}\le 0 \qquad i=1,2,\dots,r$$

با اضافه کردن این نامساوی به محدودیت‌های مسأله، مسأله‌ی جدید به صورت

$$\begin{array}{lll} \max & x_{n+1} & \\ \text{s.t} & x_{n+1}-\mathbf{c}^i\mathbf{x}\le 0 & i=1,2,\dots,r \\ & \mathbf{A}\mathbf{x}\le\mathbf{b} & \\ & \mathbf{x}\ge 0 & \\ & x_{n+1}\ \text{نامقید} & \end{array}$$

به‌دست می‌آید. همان‌طور که می‌بینید. این مسأله، یک برنامه‌ریزی خطی و معادل با مسأله‌ی اولیه است.

مثال ۴۷: مسأله زیر را به‌صورت یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی بازنویسی کنید:

$$\begin{array}{ll} \max & \min\{x_1-5x_2,3x_1+6x_2\} \\ \text{s.t} & 5x_1+2x_2\le 17 \\ & 3x_1+x_2\le 10 \\ & x_1,x_2\ge 0 \end{array}$$

☑ **پاسخ:** برای خطی کردن این مسأله، متغیر نامقید x_3 را به صورت

$$x_3=\min\{x_1-5x_2,3x_1+6x_2\}$$

معرفی می‌کنیم. بنابراین طبق مطالب گفته شده، شکل برنامه‌ریزی خطی این مسأله به صورت

$$\begin{array}{ll} \max & x_3 \\ \text{s.t.} & x_3-x_1+5x_2\le 0 \\ & x_3-3x_1-6x_2\le 0 \\ & 5x_1+2x_2\le 17 \\ & 3x_1+x_2\le 10 \\ & x_1,x_2\ge 0 \\ & x_3\ \text{نامقید} \end{array}$$

خواهد بود.

تابع هدف کسری

مسأله‌ی

$$\begin{array}{lll} \min & \dfrac{(\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\alpha)}{(\sum_{j=1}^{n}d_jx_j+\beta)} & \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i & i=1,2,\dots,m \\ & x_j\ge 0 & j=1,2,..,n \end{array}$$

www.modaresanesharif.ac.ir