سؤالات آزمون سراسری ۸۷

ریاضیات

۱ـ حاصل $\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4).....(1+x^{3^n})$ به ازای $x=\cos 2^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}(1+\cot^2 g1^\circ)$ ۲) $2(1+tg^2 1^\circ)$ ۳) $2(1+\cot g^2 1^\circ)$ ۴) $\frac{1}{2}(1+tg^2 1^\circ)$

۲ـ اندازه مشتق تابع $y=Ln\left[-Log_2(Log_4^x)\right]$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

۱) $\frac{-1}{4Ln2}$ ۲) $\frac{1}{4Ln2}$ ۳) $\frac{-1}{2(Ln2)^2}$ ۴) $\frac{1}{2(Ln2)^2}$

۳ـ دو منحنی به معادلات $y=\frac{x+1}{a+x}$ و $y=\frac{1}{b-x}$ بر روی محور yها مماس برهم‌اند. a کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -2 ۴) 2

۴ـ خط‌گذرا از نقطه می‌نیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}2x-1 & ; x\geq 1\\ 2-x^2 & ; x<1\end{cases}$ موازی محور xها نمودار این تابع را در نقطه دیگری، با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -1 ۲) $-\sqrt{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۵ـ بیشترین تعداد دایره‌های مساوی هم که در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد جای گیرند، به طوری که بر هر ضلع مثلث n دایره مماس شود را با k_n نشان می‌دهیم و S_n مساحت کل k_n دایره باشند $\lim_{n\to\infty} S_n$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$

۶ـ حاصل $\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}\ln\sqrt[n]{1+\frac{i}{n}})$ برابر کدام است؟

۱) $\ln 2$ ۲) $2\ln 2$ ۳) $1-\ln 2$ ۴) $2\ln 2-1$

۷ـ انتگرال $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{\pi^2}{4}$ ۴) $\frac{\pi^2}{8}$

۸ـ اندازه مشتق عبارت $x^2(\cosh\frac{1}{x}+\sinh\frac{1}{x})$ به ازای $x=\log e$ کدام است؟

۱) $\log 10e$ ۲) $\log\frac{e^2}{10}$ ۳) $10\log\frac{e}{10}$ ۴) $10\log\frac{e^2}{10}$

۹ـ خط مماس بر منحنی C فصل مشترک مخروط $z^2=4x^2+9y^2$ و صفحه $6x+3y+2z=5$ در نقطه $(2,1,-5)$، صفحه xoy را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{7}{2}$

۱۰ـ قسمتی از سطح رویه $x^2+y^2=z^2$ که داخل استوانه به معادله $x^2+z^2=9$ قرار گیرد برابر کدام است؟

۱) 18π ۲) 12π ۳) 9π ۴) 6π

۱۱ـ سطح حاصل از دوران منحنی قطبی $r=1-\cos\theta$، حول محور قطبی کدام است؟

۱) $\frac{32\pi}{5}$ ۲) $\frac{24\pi}{5}$ ۳) $\frac{16\pi}{3}$ ۴) $\frac{14\pi}{3}$

۱۲ـ نقطه متحرک انتهای بردار $\vec{R}=(3t-t^3)\vec{i}+3t^2\vec{j}+(3t+t^3)\vec{k}$ است. $\vec{v}$ و $\vec{a}$ بردارهای سرعت و شتاب آن هستند. اندازه $\vec{v}\times\vec{a}$ کدام است؟

۱) $6\sqrt{2}(t^2+1)$ ۲) $6\sqrt{2}(t^2-1)$ ۳) $18\sqrt{2}(t^2+1)$ ۴) $18\sqrt{2}(t^2-1)$

۱۳ـ حجم متوازی‌السطوح محدود به صفحات $2x-y+z=\pm2$ و $x+2y-z=\pm3$ و $5x+y-2z=\pm1$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۱۴ـ حاصل $\iint_R \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$، که در آن R ناحیه $4\pi^2\le x^2+y^2\le\pi^2$ باشد، کدام است؟

۱) $2\pi^2$ ۲) $2\pi-2$ ۳) 3π ۴) 4π

۱۵ـ اگر $\vec{F}=-y^2\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$ حاصل $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}d\sigma$ که در آن S سطح کره $x^2+y^2+z^2=1$ و n بردار قائم بر کره به طرف بیرون باشد، کدام است؟

۱) $\frac{2\pi}{5}$ ۲) $\frac{4\pi}{5}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

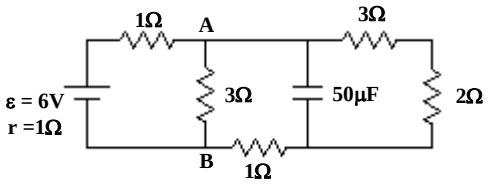
فیزیک الکتریسیته و مغناطیس

۱۶ـ دو سر یک باتری با نیروی محرکه‌ی ε و مقاومت درونی r به دو سر مقاومت متغیر R بسته شده است. اگر مقاومت R را از صفر تا بی‌نهایت افزایش دهیم، اختلاف پتانسیل بین دو سر باتری چگونه تغییر می‌کند؟

۱) از ε تا صفر ۲) از صفر تا ε

۳) پیوسته ثابت می‌ماند ۴) به صورت تناوبی کم و زیاد می‌شود.

۱۷ـ در مدار شکل مقابل، اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B چند ولت است؟



۱) ۴
۲) ۳/۵
۳) ۳
۴) ۲/۵

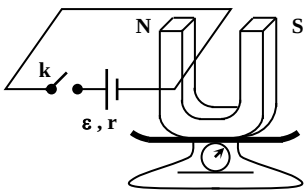
۱۸ـ $\frac{1}{\mu_\circ\varepsilon_\circ}$ از چه جنسی است؟ ($\mu_\circ$ و $\varepsilon_\circ$ به ترتیب تراوایی مغناطیسی و ضریب گذردهی الکتریکی خلاء است).

۱) نیرو ۲) سرعت ۳) عکس نیرو ۴) مربع سرعت

۱۹ـ اگر تعداد حلقه‌های یک سیم لوله دو برابر شود، ضریب خود القایی آن چند برابر می‌شود؟ (طول سیم لوله ثابت است).

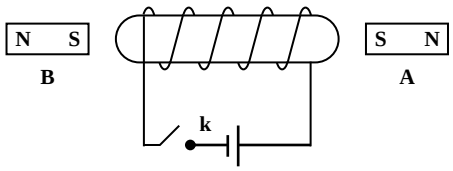
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۴

۲۰ـ مطابق شکل پس از بستن کلید، عددی که ترازو نشان می‌دهد.....



۱) تغییر نمی‌کند.
۲) افزایش می‌یابد.
۳) کاهش می‌یابد.
۴) بسته به مقاومت درونی باتری ممکن است افزایش یا کاهش یابد.

۲۱ـ با توجه به شکل روبه‌رو پس از اتصال کلید، به آهن رباهای A و B به ترتیب چه نیروهایی وارد می‌شود؟



۱) دافعه ـ جاذبه
۲) جاذبه ـ جاذبه
۳) دافعه ـ دافعه
۴) جاذبه ـ دافعه

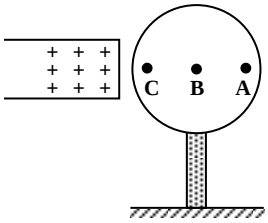
۲۲ـ معادله‌ی شار مغناطیسی گذرنده از پیچه‌ای در SI به صورت $\varphi=t^2+8t-4$ است. نیروی محرکه‌ی القایی متوسط در دومین ثانیه چند برابر نیروی محرکه القایی در لحظه‌ی $t=2S$ است؟ (۵۰ = تعداد حلقه‌ها)

۱) $\frac{11}{12}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{12}{11}$ ۴) ۴

۲۳ــ ذره‌ی باردار $+2\mu c$ با سرعت $10^6 \frac{m}{s}$ در جهت مثبت محور x وارد میدان الکتریکی به معادله $\vec{E} = 10^6 (\vec{i} - 2\vec{j}), SI$ و میدان مغناطیسی $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j}$ می‌شود. نیروی وارد بر ذره کدام است؟

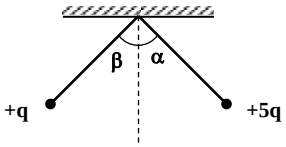
۱) صفر ۲) $\vec{F} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ ۳) $\vec{F} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ ۴) $\vec{F} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$

۲۴ــ در شکل مقابل کره‌ی فلزی خنثی روی پایه‌ی عایقی قرار دارد. میله‌ای با بار مثبت را به آن نزدیک کردیم. در این صورت بار القا شده در نقطه‌ی ..... است و پتانسیل الکتریکی.....



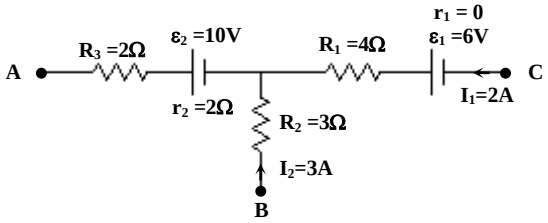
۱) C منفی – نقطه C بیشتر است.
۲) A مثبت ـ نقطه‌ی B کمتر است.
۳) A مثبت ـ نقطه‌ی C بیشتر است.
۴) C منفی ـ هر سه نقطه با هم برابر است.

۲۵ــ در شکل مقابل دو گلوله به جرم‌های مساوی به کمک نخ‌های عایق از یک نقطه آویزان شده‌اند. اگر باریکی از گلوله‌ها $+q$ و دیگر $+5q$ باشد، زاویه α چه رابطه‌ای با β دارد؟



۱) $\alpha = \beta$ ۲) $\beta = 4\alpha$
۳) $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ ۴) $\tan\alpha = 5\tan\beta$

۲۶ــ در مدار شکل مقابل $(V_B - V_A)$ چند ولت است؟

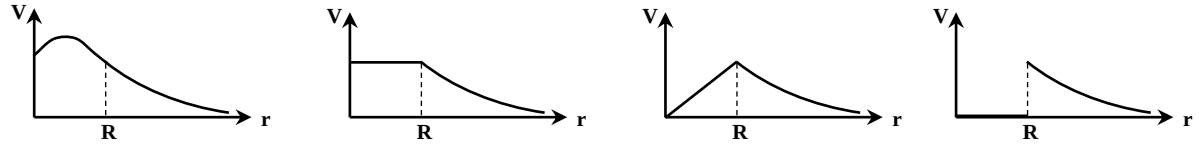


۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۵
۴) ۱۹

۲۷ــ خازنی را با یک باتری شارژ کرده‌ایم. نسبت انرژی الکتریکی که باتری از دست داده به افزایش انرژی الکتریکی خازن چقدر است؟

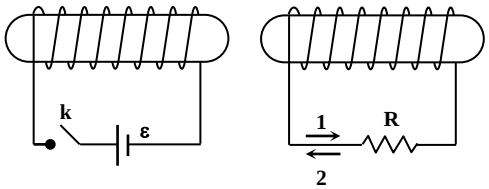
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۲۸ــ کدام گزینه نمودار پتانسیل الکتریکی یک کره رسانای به شعاع R، و با بار الکتریکی مثبت، برحسب فاصله از مرکز را بهتر نشان می‌دهد؟



(۱) (۲) (۳) (۴)

۲۹ــ در شکل مقابل اگر کلید K را وصل و سپس قطع کنیم، جریان ایجاد شده در R به ترتیب از راست به چپ در کدام جهت ایجاد می‌شود؟



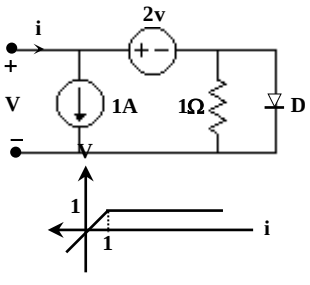
۱) ۱ و ۲
۲) ۱ و ۱
۳) ۲ و ۱
۴) ۲ و ۲

۳۰ــ اگر شار مغناطیسی عبوری از یک حلقه در SI به صورت $\varphi = 25 + 0/02\sin 50t$ باشد، بیشینه‌ی نیروی محرکه القایی آن مدار چند ولت است؟

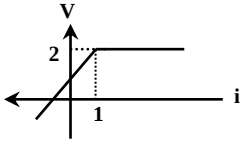
۱) ۰/۰۲ ۲) ۱ ۳) ۲۶ ۴) ۵۰

مدارهای الکتریکی

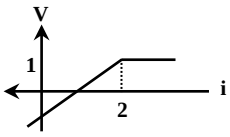
۳۱ـ مشخصه‌ی ولت آمپر مدار مقابل کدام است؟ (دیود ایده‌ال می‌باشد).



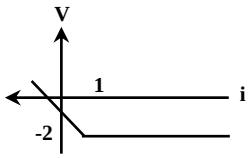
(۱)



(۲)

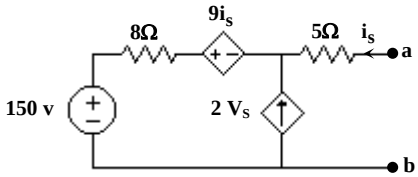


(۳)



(۴)

۳۲ـ در شکل زیر، ولتاژ معادل تونن بین a و b برابر ..... ولت و مقاومت معادل تونن برابر ..... اهم است. (به ترتیب از راست به چپ)



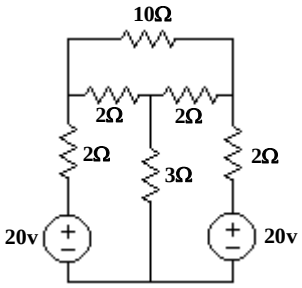
۱) $+\frac{۴}{۱۵}, -۱۰$

۲) $-\frac{۴}{۱۵}, ۱۰$

۳) $-\frac{۴}{۱۵}, -۱۰$

۴) $\frac{۴}{۱۵}, ۱۰$

۳۳ـ در شکل مقابل، جریان عبوری از مقاومت ۳ اهم چند آمپر است؟



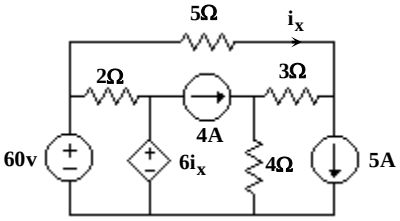
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۰

۴) ۴

۳۴ـ در شکل مقابل، جریان i_x چند آمپر است؟



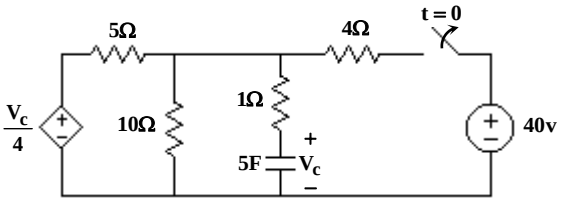
۱) ۱/۷۳

۲) ۶/۵۸

۳) ۳/۴۶

۴) ۳/۲۹

۳۵ـ در شکل زیر، کلید برای مدت زمان زیادی بسته بوده و در $t = ۰$ باز می‌شود. رابطه‌ی $V_c(t)$ برای $t \geq ۰$ کدام است؟



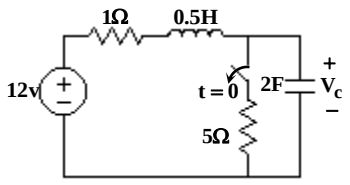
۱) $V_c(t) = ۲۰e^{-\frac{t}{۲۶}}$

۲) $V_c(t) = ۲۰e^{-\frac{t}{۱۳}}$

۳) $V_c(t) = ۱۰e^{-\frac{t}{۲۶}}$

۴) $V_c(t) = ۱۰e^{-\frac{t}{۱۳}}$

۳۶ـ در شکل زیر، کلید مدت‌ها بسته بوده و در $t = ۰$ باز می‌شود. رابطه‌ی $V_c(t)$ برای $t \geq ۰$ کدام است؟



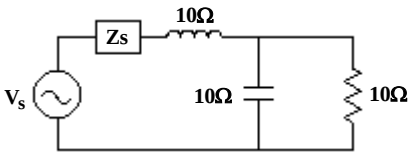
۱) $(-۲+t)e^{-t}+۱۲$

۲) $(۲-t)e^{-t}+۱۲$

۳) $(-۲-t)e^{-t}+۱۲$

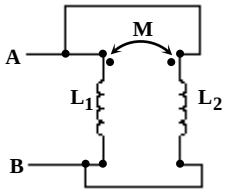
۴) $(۲+t)e^{-t}+۱۲$

۳۷ــ در شکل زیر، توان مصرفی مدار در حالت تطبیق امپدانس چند وات است؟ $V_s = 10\sqrt{2}\sin 2t\,[v]$



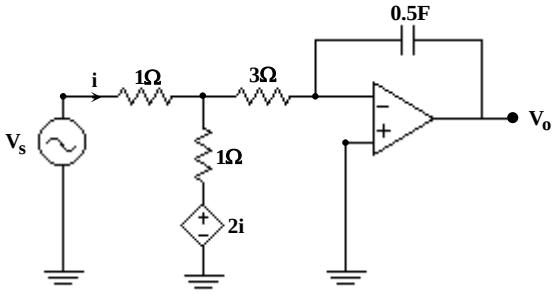
۱) ۰
۲) ۱
۳) ۵
۴) ۱۰

۳۸ــ در شکل زیر، L_{AB} چند هانری است؟ $(L_2 = 4H \;,\; L_1 = 1H \;,\; M = 0/5H)$



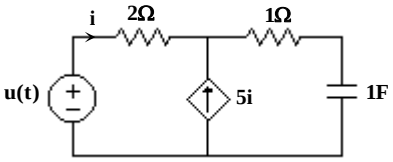
۱) ۰/۴۶
۲) ۰/۹۳
۳) ۰/۵
۴) ۱/۸۶

۳۹ــ در شکل زیر، رابطه‌ی $\frac{V_o}{V_s}$ کدام است؟



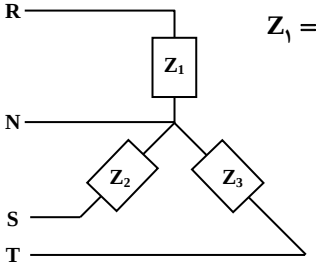
۱) $-\frac{4}{17s}$
۲) $\frac{-8}{17s}$
۳) $-\frac{17}{8s}$
۴) $-\frac{17}{4s}$

۴۰ــ در شکل مقابل رابطه‌ی $i(t)$ کدام است؟



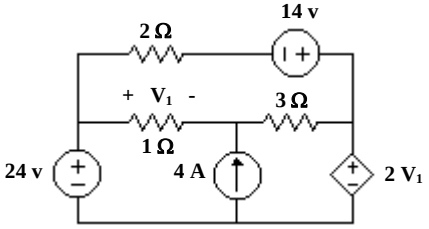
۱) $\frac{1}{8}e^{-0/75t}$
۲) $\frac{1}{8}e^{-0/5t}$
۳) $\frac{1}{8}e^{-0/25t}$
۴) $\frac{1}{4}e^{-0/75t}$

۴۱ــ در شکل زیر، توان مصرفی چند کیلووات است؟
$(Z_2 = j10\Omega \;,\; Z_3 = -j10\Omega \;,\; V_{peff} = 100\sqrt{3}(v) \;,\; Z_1 = 10\Omega)$



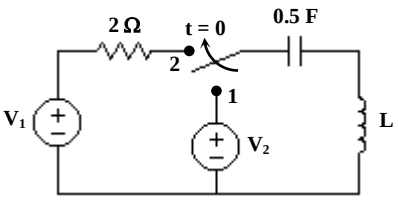
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۴۲ــ در مدار شکل مقابل، ولتاژ V_1 چند ولت است؟



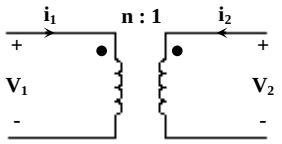
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۰/۵
۴) ۱/۵

۴۳ــ در مدار شکل زیر، L را چند هانری انتخاب کنیم، تا برای $t \geq 0$ پاسخ مدار میرائی بحرانی شود. کلید مدت‌ها در وضعیت ۱ بوده و در لحظه‌ی $t = 0$ در وضعیت ۲ قرار می‌گیرد.



۱) ۰/۵
۲) ۲
۳) ۰/۲۵
۴) ۱

۴۴ـ ماتریس هیبرید ترانسفورماتور ایده‌ال شکل مقابل، کدام است؟



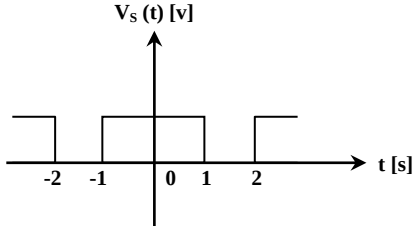
۱) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

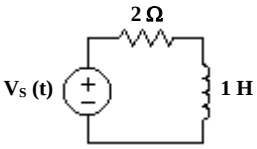
۲) $\begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 0 & n \\ n & 1 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix}$

۴۵ـ قدرت DC مصرفی مدار شکل مقابل، چند وات است؟





۱) ۰

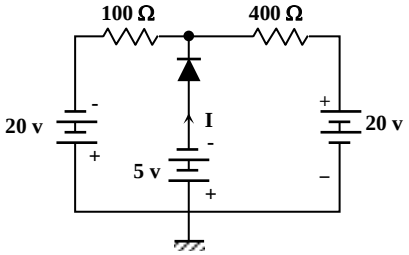
۲) ۶/۲۵

۳) ۳/۱۲۵

۴) ۱۲/۵

الکترونیک

۴۶ـ در شکل مقابل مقدار جریان I چند میلی‌آمپر است؟ (دیود ایده‌آل است)



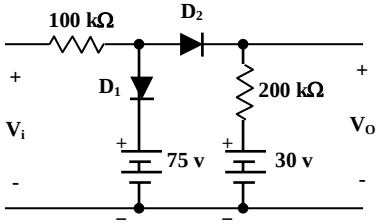
۱) ۸۰/۵

۲) ۸۷/۵

۳) ۱۶۱

۴) ۱۷۵

۴۷ـ در شکل مقابل، مقدار ولتاژ V_i را چند ولت انتخاب کنیم، تا هر دو دیود ایده‌آل هادی شوند؟



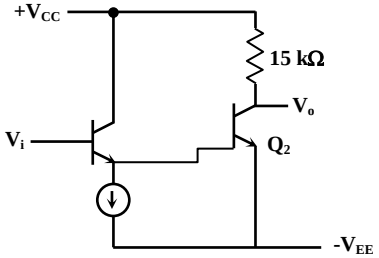
۱) ۵۸/۵

۲) ۱۰۲/۵

۳) ۹۷/۵

۴) ۱۰۵/۵

۴۸ـ در تقویت کننده‌ی شکل مقابل، مقدار بهره‌ی ولتاژ $\left|\frac{V_o}{V_i}\right|$ کدام است؟ $g_{m_1} = 1ms, \beta = 100$, $g_{m_2} = 50ms$



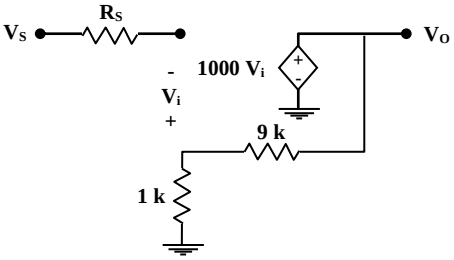
۱) ۱۲۵

۲) ۲۵۰

۳) ۵۰۰

۴) ۷۵۰

۴۹ـ در شکل مقابل، مقدار $\frac{V_o}{V_S}$ کدام است؟



۱) ۱۰/۰۱

۲) −۱۰/۱

۳) −۱۰/۰۱

۴) ۱۰/۱

پاسخنامه آزمون سراسری ۸۷

ریاضیات

۱ــ گزینه «۱» ابتدا لازم است عبارت مقابل حد را ساده کنیم، بدین منظور عبارت مقابل حد را در $(1-x)$ ضرب و تقسیم می‌کنیم و سپس به طور متوالی از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)...(1+x^{2^n})}{1-x}=\frac{(1-x^2)(1+x^2)...(1+x^{2^n})}{1-x}=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

حال در عبارت به دست آمده در بالا $x=\cos 20^\circ$ را جایگزین کرده و حد می‌گیریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-(\cos 20)^{2^{n+1}}}{1-\cos 20^\circ}=\frac{1}{1-\cos 20^\circ}=\frac{1}{2\sin^2 10}=\frac{1}{2}(1+\cot g^2 10)$$

۲ــ گزینه «۳»

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{-\frac{1}{xLn4}}{\log_4 x\times Ln2}}{-\log_2(\log_4 x)}=\frac{1}{xLn4\,Ln2\log_4 x\log_2(\log_4 x)}$$

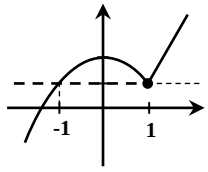
با جایگزینی $x=2$ در رابطه فوق و ساده کردن نتیجه می‌شود $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2(Ln2)^2}$

۳ــ گزینه «۴» با توجه به صورت مسأله نقطه تماس دو منحنی $x=0$ است. با جایگزینی $x=0$ در دو معادله نتیجه می‌شود: $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}\Rightarrow a=b$

همچنین شیب دو منحنی در نقطه تماس یعنی $x=0$ با هم برابر است.

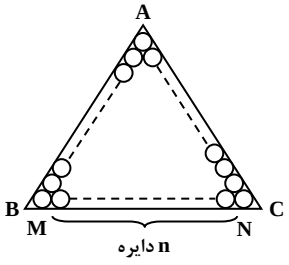
$$\left.\begin{aligned}y=\frac{x+1}{a+x}\Rightarrow y'=\frac{a-1}{(a+x)^2}\Rightarrow y'(0)=\frac{a-1}{a^2}\\ y=\frac{1}{b-x}\Rightarrow y'=\frac{1}{(b-x)^2}\Rightarrow y'(0)=\frac{1}{b^2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{a-1}{a^2}=\frac{1}{b^2}\Rightarrow a-1=1\Rightarrow a=2$$

۴ــ گزینه «۱»



بهترین راه حل برای حل مساله استفاده از شکل تابع می‌باشد. با توجه به شکل طول نقطه مورد نظر به وضوح $x=-1$ است.

۵ــ گزینه «۲»



روش اول: طول هر ضلع مثلث برابر ۱ می‌باشد و چون n دایره داریم که شعاع هر کدام از آنها را R فرض می‌کنیم. پس طبق شکل وقتی $n\to\infty$ میل کند داریم:

$$MN=2nR\approx 1\Rightarrow R\approx\frac{1}{2n}$$

توجه کنید که اختلاف بین MN و BC وقتی $n\to\infty$، به صفر میل می‌کند. مساحت هر کدام از دایره‌ها برابر $S=\pi(\frac{1}{2n})^2$ می‌باشد و تعداد کل دایره‌ها برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ می‌باشد. پس:

$$S_n=\frac{\pi}{4n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{\pi(n+1)}{8n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n+1)}{8n}=\frac{\pi}{8}$$

روش دوم: می‌دانیم مساحت متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}$ می‌باشد، پس حاصل حد فوق مقداری کمتر از $\frac{\sqrt{3}}{4}$ خواهد بود و با توجه به گزینه‌ها، گزینه (۲) فقط می‌تواند صحیح باشد.

۶ـ گزینه «۴»

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln\sqrt[n]{1+\frac{i}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\right)=\int_{0}^{1}\ln(1+x)dx=-x+\ln(1+x)+x\ln(1+x)\Big|_{0}^{1}=2\ln2-1$$

۷ـ گزینه «۳»

$$\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{-\pi}{2}\operatorname{Arctg}(\cos x)\Big|_{0}^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}$$

توضیح: در بالا از رابطه $\int_{0}^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}f(\sin x)dx$ استفاده کرده‌ایم.

۸ـ گزینه «۴» ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$y=x^2\left(\cosh\frac{1}{x}+\sinh\frac{1}{x}\right)=x^2\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{-1}{x}}}{2}+\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{-1}{x}}}{2}\right)=x^2e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=2xe^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{\frac{1}{x}}(2x-1)\xrightarrow{x=\log e}\frac{dy}{dx}=e^{\frac{1}{\log e}}(2\log e-1)=e^{\log_e 10}(\log e^2-\log_{10}10)=10\log\frac{e^2}{10}$$

۹ـ گزینه «۲» برای بدست آوردن بردار هادی خط مورد نظر لازم است بردار گرادیان دو رویه را به دست آورده و سپس ضرب خارجی بردارهای گرادیان همان بردار هادی خط خواهد بود.

$4x^2+9y^2-z^2=0\Rightarrow$ بردار گرادیان در نقطه $(2,1,-5)=(8x,18y,-2z)=(16,18,+10)=\vec{u}$

$6x+3y+2z=5\Rightarrow$ بردار گرادیان $=(6,3,2)=\vec{v}$

$$\Rightarrow\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\16&18&+10\\6&3&2\end{vmatrix}=6\vec{i}+28\vec{j}-60\vec{k}$$

بنابراین معادله خط مورد نظر به صورت روبرو است: $\frac{x-2}{6}=\frac{y-1}{28}=\frac{z+5}{-60}$

برای به دست آوردن نقطه تلاقی خط با صفحه xoy قرار می‌دهیم $z=0$. در این صورت: $\frac{x-2}{6}=\frac{5}{-60}\Rightarrow x=\frac{+3}{2}$

۱۰ـ گزینه «۱»

$$\text{مساحت}=\iint dS=\iint\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\iint\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\iint dxdy$$

برای مشخص کردن ناحیه انتگرال‌گیری (با فرض اینکه صفحه تصویر صفحه xy است) کافی است z را بین معادلات داده شده حذف کنیم.

$$x^2+y^2=9-x^2\Rightarrow 2x^2+y^2=9\Rightarrow\frac{x^2}{\frac{9}{2}}+\frac{y^2}{9}=1$$

بنابراین تصویر درون بیضی فوق است که مساحت بیضی مورد نظر $\pi\sqrt{\frac{9}{2}}\times\sqrt{9}=\frac{9\pi}{\sqrt{2}}$ است و در نتیجه: $\text{مساحت}=\sqrt{2}\times\frac{9\pi}{\sqrt{2}}=9\pi$

به علت تقارن، همین مقدار مساحت در ناحیه پایین صفحه xoy نیز تشکیل می‌گردد، و لذا مساحت کل برابر 18π خواهد بود.

۱۱ـ گزینه «۱»

$$S=2\pi\int_{0}^{\pi}ydS=2\pi\int_{0}^{\pi}r\sin\theta\times 2\sin\frac{\theta}{2}d\theta=4\pi\int_{0}^{\pi}(1-\cos\theta)\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}d\theta=16\pi\int_{0}^{\pi}\sin^4\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=\frac{32\pi}{5}$$

۱۲ـ گزینه «۳»

$$\vec{R}=(3t-t^3)\vec{i}+3t^2\vec{j}+(3t+t^3)\vec{k}$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{R}}{dt}=(3-3t^2)\vec{i}+(6t)\vec{j}+(3+3t^2)\vec{k}$$

$$\vec{a}=\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}=(-6t)\vec{i}+6\vec{j}+6t\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{v}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3-3t^2 & 6t & 3+3t^2\\ -6t & 6 & 6t\end{vmatrix}=(18t^2-18)\vec{i}-36t\vec{j}+(18+18t^2)\vec{k}$$

$$\Rightarrow|\vec{v}\times\vec{a}|=\sqrt{18^2(t^2-1)^2+18^2(2t)^2+18^2(t^2+1)^2}=18\sqrt{2t^4+4t^2+2}=18\sqrt{2}(t^2+1)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۳ـ گزینه «۲» از تغییر متغیر $u=2x-y+z$ و $v=x+2y-z$ و $w=5x+y-2z$ استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$\frac{1}{J}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 5 & 1 & -2\end{vmatrix}=-12\Rightarrow|J|=\frac{1}{12}$$

پس حجم مورد نظر برابر است با:

$$V=\int_{-1}^{1}\int_{-3}^{3}\int_{-2}^{2}|J|\,dudvdw=\frac{1}{12}\times4\times6\times2=4$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۴ـ گزینه «۴» از تغییر مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

$$\iint_R\cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}r\cos r\,drd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\pi}^{2\pi}r\cos r\,dr=\theta\Big|_0^{2\pi}\times(r\sin r+\cos r)\Big|_{\pi}^{2\pi}=4\pi$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۵ـ گزینه «۲» برای محاسبه انتگرال مورد نظر از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم. $I=\iint F.nd\sigma=\iiint divFdv=\iiint 3z^2dv$

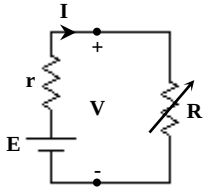
برای محاسبه انتگرال فوق از تغییر مختصات کروی استفاده می‌کنیم:

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}3\rho^2\cos^2\phi\times\rho^2\sin\phi\,d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}3\cos^2\phi\sin\phi\,d\phi\int_0^{1}\rho^4d\rho=2\pi\times2\times\frac{1}{5}=\frac{4\pi}{5}$$

◆ ◆ ◆ ◆

فیزیک الکتریسیته و مغناطیس

۱۶ـ گزینه «۲» $I=\frac{E}{R+r}$, $V=E-Ir$

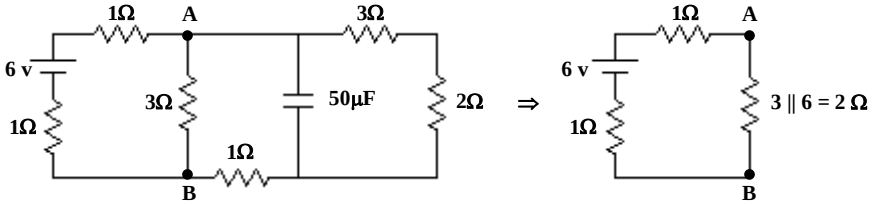


اگر مقاومت $R=0$ گردد جریان عبوری ماکزیمم $(I=\frac{E}{r})$ می‌گردد و ولتاژ $V=E-Ir$ برابر $V=E-(\frac{E}{r})r=E-E=0$ می‌گردد.

اگر مقاومت $R=\infty$ گردد جریان عبوری مینیمم $(I=0)$ می‌گردد و ولتاژ $V=E-Ir$ برابر $V=E-0r=E$ می‌گردد.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۷ـ گزینه «۳» در ورودی dc خازن مدار باز می‌شود پس مدار بصورت زیرساده می‌گردد.



با استفاده از قاعده تقسیم ولتاژ داریم:

$$V_{AB}=\frac{2}{1+2+1}\times6=\frac{12}{4}=3V$$

◆ ◆ ◆ ◆

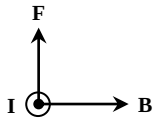
۱۸ـ گزینه «۴» توجه شود C سرعت نور در خلاء است. $C=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\Rightarrow C^2=\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$

◆ ◆ ◆ ◆

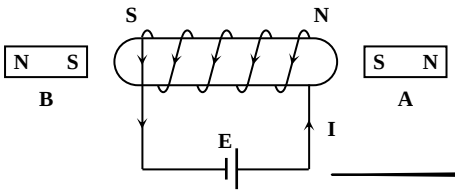
۱۹ــ گزینه «۴»

$$\left.\begin{array}{l}\ell' = \ell \\ N' = ۲N \\ L = K\mu_{\circ}\dfrac{N^{۲}A}{\ell}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{L'}{L} = (\frac{N'}{N})^{۲} \times \frac{\ell}{\ell'} \Rightarrow \frac{L'}{L} = (۲)^{۲} \times ۱ = ۴ \rightarrow L' = ۴L$$

۲۰ــ گزینه «۲» با توجه به جهت میدان مغناطیسی که از قطب N به S است و با توجه به جریان مدار که از قطب مثبت باطری خارج می‌شود شکل بصورت زیر ساده می‌گردد. با توجه به قانون دست راست، نیروی وارد بر مدار جریان به طرف بالا است و با توجه به قانون سوم نیوتن نیروی وارد بر آهن ربا به طرف پایین خواهد بود و لذا بر آهن‌ربا نیروی بیشتری به طرف پایین وارد خواهد شد و عددی که ترازو نشان می‌دهد بیشتر می‌گردد.



۲۱ــ گزینه «۴»



با توجه به جهت جریان، قطبهای آهن‌ربا مطابق شکل ایجاد می‌گردد.
پس به آهن‌ربای A نیروی جاذبه و به آهن‌ربای B نیروی دافعه وارد می‌شود.

۲۲ــ گزینه «۱»

$$\phi = t^{۲} + ۸t - ۴ \quad , \quad N = ۵\circ$$

$\overline{\varepsilon}$ نیروی محرکه متوسط در دومین ثانیه $= |N\frac{\phi(t=۲)-\phi(t=۱)}{\Delta t}| = |۵\circ \times \frac{(۴+۱۶-۴)-(۱+۸-۴)}{۲-۱}| = ۵۵\circ$

$$\Rightarrow \frac{\overline{\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{۵۵\circ}{۶\circ\circ} = \frac{۱۱}{۱۲}$$

ε نیروی محرکه در لحظه $t=۲$ $= |N\frac{d\phi}{dt}|_{t=۲} = |۵\circ \times (۲t+۸)|_{t=۲} = |۵\circ \times ۱۲| = ۶\circ\circ$

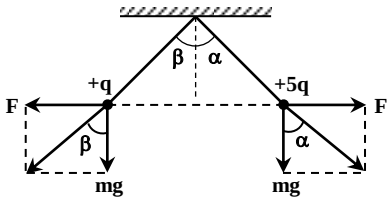
۲۳ــ گزینه «۳»

$$\left.\begin{array}{l}q = +۲\mu c \\ \vec{V} = ۱\circ^{۶}\,\vec{i} \\ \vec{E} = ۱\circ^{۶}\,(\vec{i} - ۲\vec{j}) \\ \vec{B} = \vec{i} + ۲\vec{j}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B} + \vec{E}.q \\ \vec{F} = ۲\times ۱\circ^{-۶}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{K} \\ ۱\circ^{۶} & \circ & \circ \\ ۱ & ۲ & \circ\end{vmatrix} + ۱\circ^{۶}\,(\vec{i} - ۲\vec{j}) \times ۲ \times ۱\circ^{-۶}\end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = ۲\times ۱\circ^{-۶}\,(۲\times ۱\circ^{۶}\,\vec{K}) + ۲(\vec{i} - ۲\vec{j}) = ۲\vec{i} - ۴\vec{j} + ۴\vec{K}$$

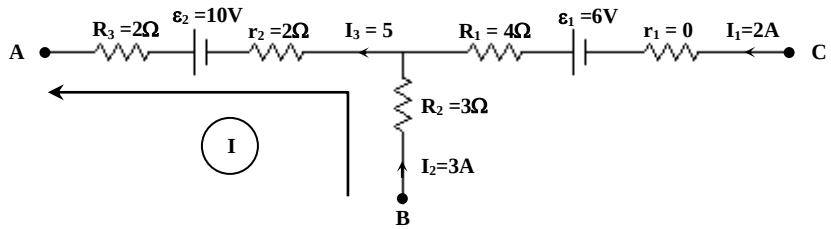
۲۴ــ گزینه «۴» سطح یک رسانا سطح هم پتانسیل است یعنی پتانسیل تمام نقاط آن یکسان است.

۲۵ــ گزینه «۱» طبق قانون سوم نیوتن نیروی الکتریکی وارد به دو گلوله مساوی است.



$$\left.\begin{array}{l}\tan\alpha = \dfrac{F}{mg} \\ \tan\beta = \dfrac{F}{mg}\end{array}\right\} \Rightarrow \tan\alpha = \tan\beta \rightarrow \alpha = \beta$$

۲۶ــ گزینه «۴»



$$KVL\,\textcircled{I} \Rightarrow V_B - V_A = R_۲I_۲ + r_۲I_۳ - E_۲ + R_۳I_۳ = ۳\times ۳ + ۲\times ۵ - ۱\circ + ۲\times ۵ = ۱۹V$$

۲۷ـ گزینه «۲» در مدارهای خازنی، جریان به صورت زیر می‌باشد:

$$i = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

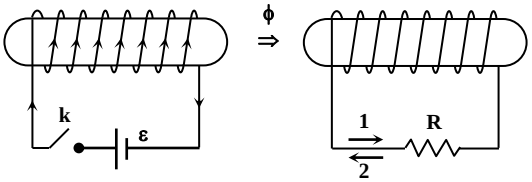
$$\text{انرژی که باتری از دست می‌دهد} = \int_{0}^{\infty} Vidt = \int_{0}^{\infty} \frac{V^2}{R} e^{-\frac{t}{RC}} dt = CV^2$$

از طرفی انرژی که خازن به دست می آورد برابر $\frac{1}{2}CV^2$ می‌باشد و لذا داریم:

$$\frac{\text{انرژی که باتری از دست می دهد}}{\text{انرژی که خازن به دست می‌آورد}} = \frac{CV^2}{\frac{1}{2}CV^2} = 2$$

۲۸ـ گزینه «۳» می‌دانیم پتانسیل الکتریکی در یک کره رسانای باردار مقداری ثابت خواهد بود.

۲۹ـ گزینه «۱» اگر کلید وصل گردد جریان عبوری از پیل و شار مغناطیسی بصورت شکل مقابل می‌باشد. طبق قانون لنز چون جریان در پیل افزایش می‌یابد باید جریان در سیملوله طوری القاء گردد که با افزایش جریان مخالفت کند. پس باید جریان در جهت ۱ القاء گردد تا اثر شار مغناطیسی را کاهش دهد. هنگامی‌که کلید قطع می‌گردد، جریان در پیل کاهش می‌یابد پس شار مغناطیسی عبوری کم می‌گردد. طبق قانون لنز جریان درسیملوله باید طوری ایجاد گردد که با کاهش شار جلوگیری کند پس باید جریان در جهت ۲ القاء گردد.



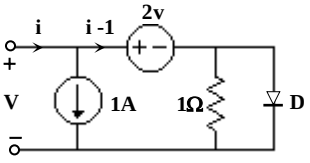
۳۰ـ گزینه «۲» تغییر شار عبوری از حلقه باعث ایجاد نیروی محرکه القایی در آن می‌شود که به صورت زیر محاسبه می‌شود.

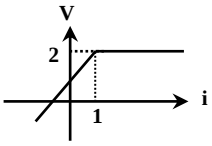
$$\phi = 25 + 0/02 \sin 50t \quad , \quad N = 1$$

$$\varepsilon = |-N\frac{d\phi}{dt}| = |0/02 \times 50 \cos 50t| = \cos 50t \rightarrow E_{max} = 1$$

مدارهای الکتریکی

۳۱ـ گزینه «۱»



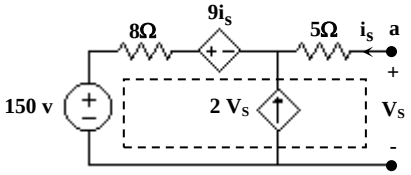


اگر $i-1<0$ و یا $i<1$ آنگاه دیود هدایت خواهد کرد و در نتیجه $V=2v$ خواهد بود و اگر $i-1>0$ و یا به عبارتی $i>1$ آنگاه دیود هدایت نخواهد کرد و با نوشتن KVL داریم:

$$2+(i-1)\times 1 = V \Rightarrow V = i+1$$

پس در نمودار برای $i>1$ مقدار ثابت $V=2$ و برای $i<1$ خط $V=i+1$ را خواهیم داشت.

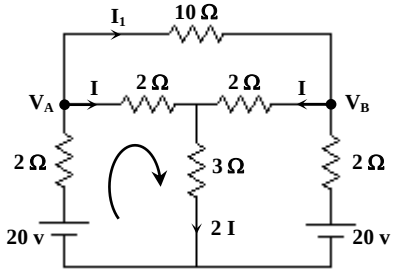
۳۲ـ گزینه «۳» با نوشتن KVL در حلقه بزرگ مدار داریم:



$$5i_s - 9i_s + 8(i_s + 2V_s) + 150 = V_s \Rightarrow V_s = 4i_s + 16V_s + 150 \Rightarrow -15V_s = 4i_s + 150$$

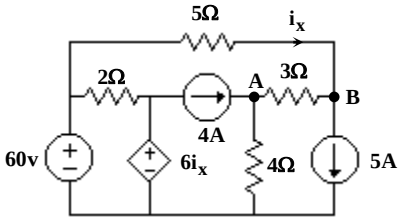
$$\Rightarrow V_s = -\frac{4}{15}i_s - 10 \Rightarrow R_{th} = -\frac{4}{15}\Omega \,,\, V_{th} = -10\,v$$

۳۳ـ گزینه «۴» با توجه به تقارن مدار V_A و V_B یکسان بوده و لذا I_1 مساوی صفر است. همچنین با توجه به تقارن مدار جریان مقاومتهای دو اهمی سمت راست و چپ مساوی و برابر I است. با اعمال KVL در حلقه سمت چپ داریم:



$$KVL: -20 + 2I + 2I + 2I \times 3 = 0 \Rightarrow I = 2A \Rightarrow I_{3\Omega} = 2I = 4A$$

۳۴ـ گزینه «۲» با اعمال KCL در گره‌های A و B مدار داریم:

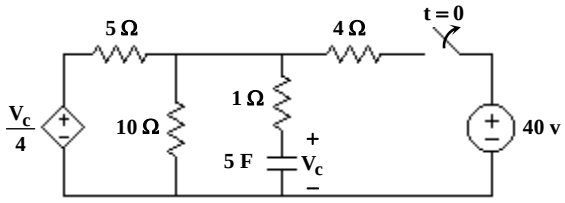


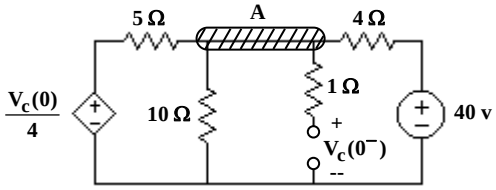
$$\begin{cases}\frac{V_A-V_B}{3}+\frac{V_A}{4}=4A\\ \frac{V_B-V_A}{3}+\frac{V_B-60}{5}+5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4(V_A-V_B)+3V_A=48\\ 5(V_B-V_A)+3(V_B-60)+75=0\end{cases}$$

پس از حل دستگاه فوق $V_B=27/1v$ به دست می‌آید و با توجه به اینکه $I_x=\frac{60-V_B}{5}$ است پس: $I_x=\frac{60-27/1}{5}=6/58(A)$

۳۵ـ گزینه «۱» معادله ولتاژ دو سر خازن به صورت $V_c=V_c(\infty)+[V_c(0^+)-V_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$ است.

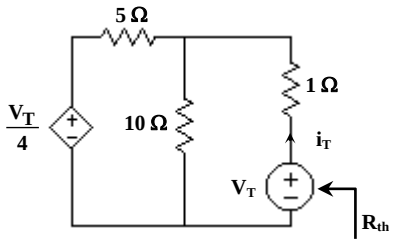
در $t<0$ مدار به صورت مقابل است:

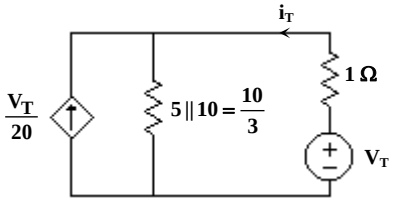




$$KCL(A)\rightarrow\frac{V_c(0)-40}{4}+\frac{V_c(0)}{10}+\frac{V_c(0)-\frac{V_c(0)}{4}}{5}=0$$
$$\xrightarrow{\times 20}5V_c(0)-200+2V_c(0)+3V_c(0)=0$$
$$\rightarrow 10V_c(0)=200\rightarrow \underline{V_c(0)=20}$$

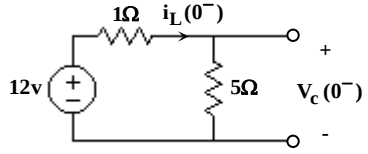
در $t=\infty$ خازن مدار باز است. پس: $V_c(\infty)=0$ است، برای محاسبه R_{th} از دو سر خازن داریم:





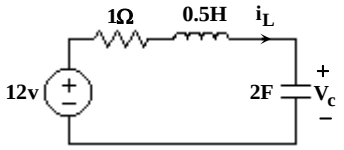
$$\rightarrow V_T=i_T+\frac{10}{3}(\frac{V_T}{20}+i_T)$$
$$\rightarrow V_T=i_T+\frac{V_T}{6}+\frac{10}{3}i_T\rightarrow V_T(1-\frac{1}{6})=i_T(\frac{10}{3}+1)$$
$$V_T\times\frac{5}{6}=i_T\times\frac{13}{3}\rightarrow V_T=\frac{\frac{13}{3}}{\frac{5}{6}}i_T\Rightarrow R_{th}=\frac{26}{5}\Omega$$
$$\tau=R_{th}C=\frac{26}{5}\times 5=26\rightarrow V_c=0+20e^{-\frac{t}{26}}\rightarrow V_c=20e^{-\frac{t}{26}}$$

۳۶ـ گزینه «۳» ابتدا مدار در $t=0^-$ برای به دست آوردن شرایط اولیه تحلیل می‌شود.



$$\rightarrow\begin{cases}i_L(0^-)=\frac{12}{6}=2A\\ V_c(0^-)=5\times 2=10A\end{cases}$$

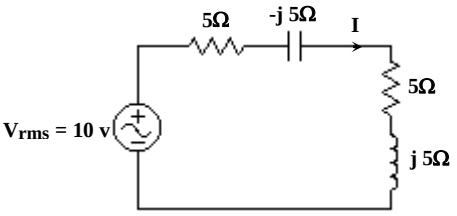
معادله از نوع RLC سری مرتبه دوم است، پس داریم $(t>0)$ داریم:



$$\left.\begin{array}{l}s^2+2\alpha s+\omega_0^2=0\\ 2\alpha=\frac{R}{L}=\frac{1}{0/5}=2\\ \omega_0^2=\frac{1}{LC}=\frac{1}{2\times 0/5}=1\end{array}\right\}\rightarrow s^2+2s+1=0\rightarrow\begin{cases}s=-1\\ s=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases} V_c(t) = Ae^{-t} + Bte^{-t} + V_c(\infty) \\ V_c(\infty) = ۱۲ \\ V_c(۰) = ۱۰ \\ \dfrac{dV_c(۰)}{dt} = \dfrac{i_c(۰)}{c} = \dfrac{۲}{۲} = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_c(۰) = ۱۰ = A + ۱۲ \rightarrow A = -۲ \\ \rightarrow V_c(t) = (-۲ - t)e^{-t} + ۱۲ \\ \dfrac{dV_c(۰)}{dt} = ۱ = -A + B \xrightarrow{A=-۲} B = -۱ \end{cases}$$

۳۷ـ گزینه «۴» معادل سری مقاومت و خازن ۱۰ اهمی موازی برابر $۵ - j۵$ می‌باشد که با سلف ۱۰ اهمی سری است. پس امپدانس دیده از دو سر بار برابر $۵ + j۵$ می‌باشد، حال اگر $Z_s = ۵ - j۵$ در نظر گرفته شود، آنگاه مدار در حالت تطبیق امپدانس قرار می‌گیرد:



$$|I_{rms}| = \frac{|V_{rms}|}{|Z_{eq}|} = \frac{۱۰}{|۵ - j۵ + ۵ + j۵|} = ۱A$$

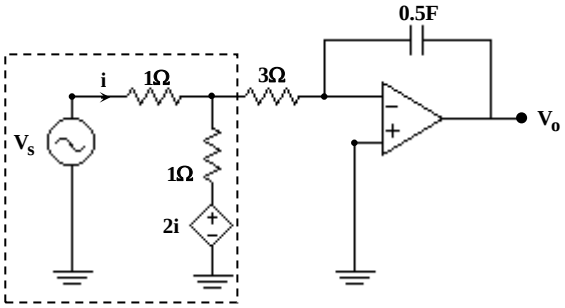
$$\Rightarrow P_{av} = ۲ \times ۵ \times I_{rms}^{۲} = ۲ \times ۵ \times ۱ = ۱۰ w$$

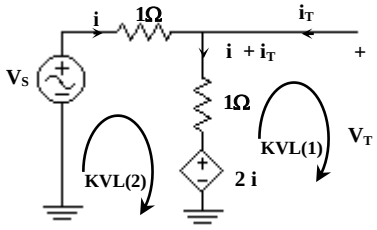
۳۸ـ گزینه «۲»

$$L_{eq} = \frac{L_۱L_۲ - M^{۲}}{L_۱ + L_۲ - ۲M} = \frac{۱ \times ۴ - (۰/۵)^{۲}}{۱ + ۴ - ۲ \times ۰/۵} = ۰/۹۳H$$

۳۹ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

مدار معادل قسمت نقطه‌چین را محاسبه می‌کنیم:

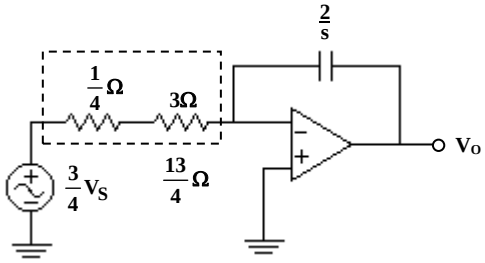




$$\left.\begin{aligned} KVL\ (۱) &\rightarrow V_T = ۱(i + i_T) + ۲i \rightarrow V_T = ۳i + i_T \\ KVL\ (۲) &\rightarrow V_s = i + i + i_T + ۲i \rightarrow i = \frac{V_s - i_T}{۴} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_T = ۳(\frac{V_s - i_T}{۴}) + i_T \rightarrow ۴V_T = ۳V_s - ۳i_T + ۴i_T$$

$$V_T = +\frac{۱}{۴}i_T + \frac{۳}{۴}V_s \rightarrow V_T = \underbrace{\boxed{+\frac{۱}{۴}}}_{R_{th}} i_T + \underbrace{\boxed{\frac{۳}{۴}V_s}}_{V_{th}}$$

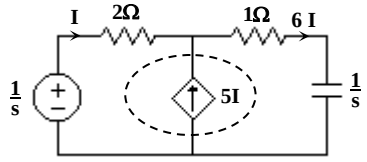
پس مدار به صورت مقابل است:



مدار یک inverter است پس داریم:

$$\frac{V_o}{\frac{۳}{۴}V_s} = \frac{-\frac{۲}{s}}{\frac{۱۳}{۴}} \Rightarrow \frac{V_o}{V_s} = \frac{-\frac{۲}{s}}{\frac{۱۳}{۴}} \times \frac{۳}{۴} = -\frac{۶}{۱۳s}$$

۴۰ـ گزینه «۱»

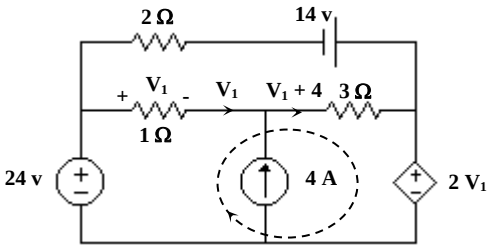


$$KVL: \frac{۱}{s} = ۲I + ۶I(۱ + \frac{۱}{s}) \Rightarrow I = \frac{۱}{۸s + ۶} = \frac{۱}{۸} \times \frac{۱}{s + \frac{۶}{۸}} \Rightarrow i(t) = \frac{۱}{۸}e^{-۰/۷۵t}$$

۴۱ـ گزینه «۳» فقط در مقاومت توان مصرف می‌شود. پس توان Z_1 را محاسبه می‌کنیم.

$$P_e = \frac{V_{rms}^2}{R} = \frac{V_{p_{rms}}^2}{10} = \frac{(100\sqrt{3})^2}{10} = 3000\,w = 3KW$$

۴۲ـ گزینه «۲» با اعمال KVL در حلقه مشخص شده داریم:

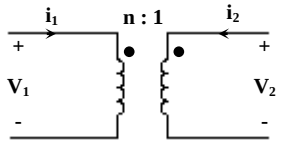


$$-24 + V_1 + 3(V_1 + 4) + 2V_1 = 0$$
$$\Rightarrow -24 + V_1 + 3V_1 + 12 + 2V_1 = 0$$
$$\Rightarrow 6V_1 = 12 \Rightarrow V_1 = 2V$$

۴۳ـ گزینه «۱» مدار RLC سری است اگر بخواهیم در حالت میرای بحرانی باشد باید $\alpha = \omega_0$ باشد پس برای مدار RLC سری داریم:

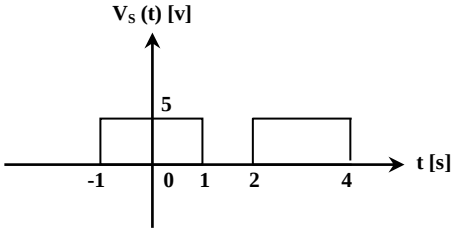
$$2\alpha = \frac{R}{L} \Rightarrow \alpha = \frac{R}{2L} = \frac{2}{2L}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{Lc}} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0/5L}}$$
$$\xrightarrow{\text{مدار میرای بحرانی}} \alpha = \omega_0 \Rightarrow \frac{1}{L} = \frac{1}{\sqrt{0/5L}} \Rightarrow \frac{1}{L^2} = \frac{1}{0/5L} \rightarrow \begin{cases} L = 0 \\ L = 0/5H \end{cases} \Rightarrow L = 0/5H$$

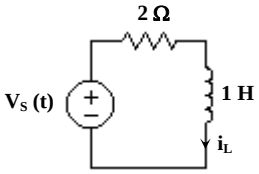
۴۴ـ گزینه «۴»



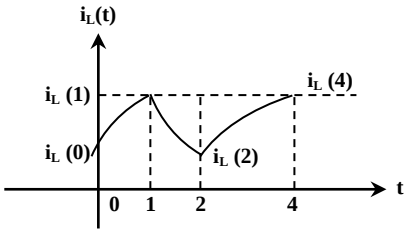
$$\begin{cases} \frac{V_1}{V_2} = \frac{n}{1} \rightarrow V_1 = nV_2 \\ \frac{I_1}{I_2} = -\frac{1}{n} \rightarrow I_2 = -nI_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases} \rightarrow H = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix}$$

۴۵ـ هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.





شکل موج جریان بصورت زیر است:



$$0 < t < 1 \Rightarrow i_L(t) = 2/5 + (i_L(0) - 2/5)e^{-2t}$$
$$1 < t < 2 \Rightarrow i_L(t) = i_L(1)e^{-2t}$$
$$i_L(0) = i_L(2) \Rightarrow i_L(0) = i_L(1)e^{-2} = i_L(2)$$
$$2 < t < 4 \Rightarrow i_L(t) = 2/5 + (i_L(2) - 2/5)e^{-2t}$$

$$i_L(1) = i_L(4) \Rightarrow i_L(1) = 2/5 + [i_L(1)e^{-2} - 2/5]e^{-4} \Rightarrow i_L(1) = 2/46 \Rightarrow i_L(0) = 2/46e^{-2} = 0/332A$$

$$\Rightarrow i_L(t) = \begin{cases} 0 < t < 1 \Rightarrow i_L(t) = 2/5 - 2/16e^{-2t} \\ 1 < t < 2 \Rightarrow i_L(t) = 2/46e^{-2t} \\ 2 < t < 4 \Rightarrow i_L(t) = 2/5 - 2/16e^{-2t} \end{cases}$$

$$P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T VIdt = \frac{1}{4}\left\{\int_0^1 5(2/5 - 2/16e^{-2t})dt + \int_1^2 0\,dt + \int_2^4 5(2/5 - 2/16e^{-2t})dt\right. \Rightarrow P_{av} = 9/375watt$$