مدرسان شریف

فصل اول

تعاریف و مفاهیم کنترل موجودی

مقدمه

در این فصل خواننده با تعاریف پایه کنترل موجودی و سیستم موجودی آشنا شده قادر به شناسایی انواع هزینه‌های سیستم موجودی خواهد بود و باید بتواند هزینه‌های سیستم را در قالب هزینه‌های سفارش‌دهی و تدارکات، هزینه‌های نگهداری، هزینه‌های کمبود و هزینه‌های خرید کالا دسته‌بندی کند. نحوه برخورد واحدهای مختلف سازمان با مقدار موجودی نگهداری شده در انبار نیز در این فصل تشریح می‌گردد.

تعداد تستهای مطرح شده از این فصل در کنکور سراسری سال‌های اخیر:

۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱
۱	۳	۷	۰	۰	۰	۱	۱	۰

تعریف موجودی

کالایی که جهت برآورده کردن تقاضایی در آینده (تقاضای مشتری(فروش) و یا تقاضای داخلی(مصرف)) به صورت نسبتاً راکد و غیر تولیدی نگهداری می‌شود را «موجودی» می‌نامند.

مثال ۱: آیا کالایی که در خط تولید در جریان است و بر روی آن عملیات صورت می‌گیرد، نفت در جریان در خطوط لوله، نفت داخل مخازن پالایشگاه و محصولات داخل فروشگاه موجودی می‌باشند؟

☑ **پاسخ :** ـ طبق تعریف فوق کالایی که در خط تولید در جریان است و عملیاتی بر روی آن صورت می‌گیرد موجودی به حساب نمی‌آید.

ـ نفتی که در خطوط لوله در جریان است موجودی نیست.

ـ نفت داخل مخازن پالایشگاه چون برای رفع تقاضای رسیده نگهداری می‌شود موجودی است.

ـ محصولات داخل یک فروشگاه نیز موجودی هستند.

نکته ۱: مواد خام اولیه، قطعات نیمه ساخته، قطعات ساخته شده و محصولات نهایی از انواع موجودی در سطح کارخانه می‌باشند.

نکته ۲: موجودی هنگامی که عملیات تدارک کالا به پایان می‌رسد به وجود می‌آید و تا هنگامی که کالای تهیه شده برای مصرف‌کننده (نه لزوماً مصرف‌کننده نهایی) ارسال می‌شود وجود دارد.

نکته ۳: کالاهایی که در حال حمل و نقل هستند و یا کالاهایی که در حال رشد هستند و یا نفتی که در خط لوله در جریان است، موجودی نمی‌باشند، زیرا این کالاها هنوز برای برآورده کردن تقاضا آماده نیستند.

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۲: یک کارخانه ۱۰ حوضچه پرورش ماهی دارد و از ماهی این حوضچه‌ها برای تولید کنسرو تن ماهی در خط تولید کارخانه استفاده می‌نماید. کدام یک از گزینه‌های زیر برای این کارخانه موجودی به حساب نمی‌آیند؟

۱) ماهی‌های پخته شده در خط تولید
۲) ماهی‌های موجود در سردخانه
۳) ماهی‌های موجود در حوضچه‌های پرورش ماهی
۴) گزینه‌های ۱ و ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ماهی‌های پخته شده که در خط تولید می‌باشند می‌بایست در مراحل بعد به کنسرو تن ماهی تبدیل شوند و هنوز برای برآورده نمودن تقاضای مصرف‌کننده آماده نمی‌باشند و هنوز بر روی آنها می‌بایست عملیات دیگری انجام شود لذا ماهی موجود در خط تولید، موجودی نمی‌باشد. ماهی‌های موجود در سردخانه که از حوضچه‌های پرورش ماهی خارج شده‌اند با توجه به برنامه تولید کارخانه آماده ورود به خط تولید، و برآورده نمودن تقاضا هستند و لذا موجودی می‌باشند. ماهی‌های موجود در حوضچه نیز برای برآورده نمودن تقاضا آماده نیستند. زیرا در حال رشد بوده و هنوز برای ورود به خط تولید آمادگی ندارند.

نکته ۴: در صورتی که یک شرکت، استخر پرورش ماهی داشته باشد و ماهی‌ها را پس از رشد، به صورت مستقیم به فروش برساند، در هنگامی که ماهی صید می‌شوند تا هنگامی که برای مشتری ارسال می‌شوند به عنوان موجودی حساب می‌شوند.

نکته ۵: دو قلم فیزیکی هنگامی دو قلم یکسان محسوب می‌شوند که از هر نظر بتوانند جایگزین یکدیگر باشند.

مثال ۳: کدام یک از گزینه‌های زیر در سیستم موجودی، دو قلم یکسان محسوب می‌شوند؟

۱) دو کفش کاملاً یکسان ولی در سایزهای مختلف
۳) دو قطعه یدکی کاملاً یکسان برای یک شرکت خودرو سازی در دو انبار در دو شهر مختلف
۲) دو روزنامه ورزشی مختلف
۴) دو عدد تخم مرغ به وزن‌های ۱۰۰ گرم و ۹۵ گرم

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» دو شیء فیزیکی در سیستم موجودی هنگامی دو قلم یکسان محسوب می‌شوند که از هر نظر بتوانند با یکدیگر قابل تعویض و جایگزینی باشند. دو کفش کاملاً یکسان ولی در سایزهای مختلف نمی‌توانند با یکدیگر جایگزین شوند. دو قطعه یدکی یکسان در دو شهر مختلف نیز یک قلم موجودی به حساب نمی‌آیند، زیرا این دو قلم مستقیماً قابلیت جایگزینی یکدیگر را ندارند و برای جایگزینی آن دو با یکدیگر باید هزینه و زمان صرف شود. دو روزنامه ورزشی مختلف چون علاقه‌مندان خود را دارند و اخبار را با دیدگاه‌های مختلف تحلیل می‌کنند علی‌رغم این که ممکن است در شرایطی جایگزین یکدیگر شوند ولی دو قلم یکسان نمی‌باشند. از آن‌جا که واحد شمارش تخم‌مرغ، عدد می‌باشد و یک عدد تخم مرغ با یک عدد تخم مرغ دیگر قابلیت جایگزینی دارد لذا دو قلم موجودی یکسان می‌باشند.

مثال ۴: کدام یک از اقلام زیر موجودی یکسان در نظر گرفته می‌شوند؟

۱) دو درخت کاج تقریباً هم اندازه برای کریسمس
۲) دو تکه ورق گالوانیزه با ضخامت ۱/۵ میلی متر تقریباً هم اندازه یکی به وزن ۲۰ کیلوگرم و دیگری ۱۹ کیلوگرم
۳) هر دو مورد
۴) هیچ کدام

☑ **پاسخ : گزینه «۳»** دو درخت کاج در گزینه ۱ با یکدیگر قابلیت جایگزینی دارند. ورق‌های مورد اشاره در گزینه ۲ نیز همانند یکدیگر هستند، چون مقیاس ما در فروش ورق، کیلوگرم می‌باشد و می‌توان ادعا نمود که ۳۹ کیلوگرم وروق گالوانیزه در گزینه ۲ به عنوان موجودی نگهداری می‌نماییم.

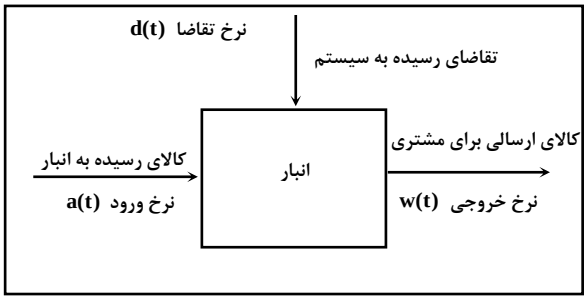
کنترل تولید و موجودی

❖ **تعریف:** به برنامه‌ریزی و کنترل کالای تولید شده و یا خریداری شده، جهت نگهداری موجودی کالا در سطح مشخص و معین در جهت رفع تقاضای رسیده با توجه به سیاست نگهدارنده موجودی به گونه‌ای که حداقل هزینه و یا حداکثر سود را داشته باشد، «کنترل تولید و موجودی» می‌گویند.

www.modaresanesharif.ac.ir

نکته ۶: در سیستم موجودی، با توجه به پیش‌بینی تقاضا و سایر سیاست‌های مالک سیستم موجودی، شامل مقدار کمبود و سایر محدودیت‌ها مثل محدودیت فضای انبار، تعیین می‌نماییم که در چه زمانی و به چه مقداری سفارش صادر نماییم.

❖ **تعریف:** سیستم موجودی شامل نرخ ورود موجودی به انبار (به عنوان ورودی سیستم) و نرخ خروج موجودی از انبار (با توجه به مقدار تقاضای رسیده و موجودی انبار تعیین می‌شود) به عنوان خروجی سیستم می‌باشد. مجموعه فرآیندهایی که در داخل سیستم موجودی به انجام می‌رسد شامل چیدن اقلام رسیده در انبار و تحویل موجودی انبار به مشتری با توجه به تقاضای رسیده می‌باشد.



شکل ۱. سیستم موجودی

نکته ۷: در درس برنامه‌ریزی و کنترل موجودی تنها توانایی شرکت یا سازمان بر روی تغییر در مقدار $a(t)$، (نرخ ورود) با توجه به حداکثر کردن سود و یا حداقل کردن هزینه مورد بررسی قرار می‌گیرد و توانایی سازمان در تغییر در مقدار $d(t)$ (نرخ تقاضا) با توجه به کاهش قیمت و یا تبلیغ بیشتر و سایر سیاست‌های بازاریابی مورد بررسی قرار نمی‌گیرد در حالی که یک سازمان می‌تواند مقدار تقاضا را نیز تحت تأثیر قرار دهد.

نکته ۸: در حالی که سیستم موجودی مورد بررسی، انبار مواد اولیه یک کارخانه باشد، مقدار $d(t)$ (نرخ تقاضا) کاملاً در اختیار سازمان می‌باشد ولی باز هم در درس کنترل موجودی، سیاست‌های برنامه‌ریزی تولید بررسی نمی‌شوند و توانایی تأثیر سازمان بر روی تقاضا مورد بررسی قرار نمی‌گیرد.

دلایل استفاده از موجودی

از آن‌جایی که نگهداری موجودی همواره هزینه دارد، در صورتی که قیمت کالا تغییر زیادی در طول زمان کوتاه‌مدت نداشته باشد و تأمین موجودی در هر زمان به راحتی و با سرعت بالایی امکان‌پذیر باشد، عدم نگهداری موجودی بسیار مناسب است. ولی چون همواره چنین شرایطی موجود نیست، به دلایل زیر نگهداری موجودی اجباری می‌باشد:

۱ـ عدم قطعیت تقاضا و تغییرات تصادفی و غیرقابل پیش‌بینی بودن آن

۲ـ تغییرات قیمت در بازار و احتمال افزایش قیمت کالا در زمان‌های خاص

۳ـ افزایش هزینه حمل‌و نقل، در صورتی که در هر بار رسیدن تقاضا، سیستم موجودی یک سفارش خرید صادر نماید.

۴ـ عدم انتظار مشتری برای دریافت با تأخیر کالا و رقابتی بودن بازار در جذب مشتری

۵ـ هموارسازی عملیات تولید برای متوقف نشدن خط تولید در صورت خرابی یک دستگاه.

۶ـ استفاده از موقعیت‌های حراج بعضی از کالاها

۷ـ خرید و یا تولید مجموعه‌ای از قطعات و کالاها به صورت همزمان

۸ـ افزایش میزان فروش با در معرض دید قرار دادن کالاها

۹ـ افزایش اطمینان مشتری نسبت به عدم کمبود کالا در هنگام نیاز

نکته ۹: تمامی سازمان‌ها به دنبال شرایطی هستند که نیازی به داشتن موجودی نداشته باشند و سیستم آنها در هنگام نیاز به کالا، آن را تهیه نماید ولی بخش‌های مختلف سازمان نیز برخوردهای متفاوتی با سطح موجودی نگهداری شده در انبار دارند:

الف ـ بخش بازاریابی که فروش محصولات شرکت را بر عهده دارد انتظار دارد که سطح موجودی زیادی در انبار محصول نهایی نگهداری شود تا زمانی که به میزان سفارش مورد نیاز رسید، توانایی فروش داشته باشد و در هنگام مذاکره با مشتری، نگران عدم برآورده ساختن نیاز مشتری نباشد. در ضمن در صورتی

www.modaresanesharif.ac.ir

که مقدار موجودی کم باشد ممکن است سفارشات کلان شرکت از دست رفته و اعتبار شرکت نیز نزد مشتریان عمده، کاهش یافته و مشتریان به دنبال یافتن تأمین‌کنندگان مطمئن‌تری باشند.

ب ـ بخش انبار، سطح موجودی پایین‌تر را بیشتر می‌پسندد. علت این امر آن است که وقتی مقدار موجودی زیاد باشد نحوه کنترل موجودی سخت‌تر می‌شود. در صورتی که سطح موجودی کم باشد، انباردار فضای خالی برای دریافت کالاهای جدید در اختیار دارد و در هنگام رسیدن محموله جدید، مجبور به اصلاح چیدمان اقلام و جابجایی و ... نمی‌باشد.

پ ـ بخش تولید که وظیفه تولید محصول را بر عهده دارد انتظار دارد که انبار مواد اولیه، سطح موجودی زیادی داشته باشد تا خط تولید به علت عدم موجودی مواد اولیه، متوقف نگردد. از طرفی چون برای تولید یک قلم کالا آماده‌سازی خط تولید و تعویض جیگ و فیکسچر (قیدها و بندها) صورت می‌پذیرد لذا انتظار دارد سطح تولید زیاد باشد تا زمان زیادی را برای راه‌اندازی خط مصرف ننموده و بیشتر زمان خود را صرف تولید نماید و لذا سطح موجودی انبار محصول نهایی را نیز بالا می‌برد.

ت ـ بخش حسابداری و مالی که وظیفه فراهم کردن سرمایه برای برنامه شرکت را بر عهده دارد، سطح موجودی پایین را می‌پسندد، زیرا برای نگهداری موجودی، باید کالا خریداری شود و لذا سرمایه شرکت از پول به کالا تبدیل می‌شود. در حالی که پول موجود در بانک، معادل نرخ بهره بانکی، سود دریافت می‌کند، ولی موجودی نگهداری شده سودی دریافت نمی‌نماید(بدون در نظر گرفتن نرخ تورم)

ث ـ واحد تدارکات سازمان که وظیفه خرید مواد اولیه مورد نیاز خط تولید و همین‌طور خرید موجودی را بر عهده دارد، هنگامی که کالای بیشتری را خریداری نماید، از تخفیف فروشنده برخوردار می‌گردد؛ لذا ترجیح می‌دهد سطح موجودی بیشتر باشد. از طرفی واحد تدارکات ترجیح می‌دهد هفته‌ای یک بار خرید یک قلم را به انجام برساند تا این که هر روز متناوب با نیاز آن روز خرید کند. زیرا در حالت دوم هزینه‌های سفارش‌دهی شامل حق مأموریت پرسنل خرید بیشتر می‌شود.

ج ـ واحد طراحی و مهندسی که وظیفه طراحی محصولات جدید را بر عهده دارد در راستای جلوگیری از کهنگی محصولات، سطح موجودی پایین را می‌پسندد.

مثال ۵: کارخانه‌ای نیاز به ۳۰ تن ماسه در ماه دارد. دو پیشنهاد قیمت از فروشندگان ماسه می‌رسد که بدین شرح می‌باشند:

پیشنهاد ۱ـ خرید یک تن به قیمت هر تن ۱۰۰۰ واحد پولی - پیشنهاد ۲ـ خرید ۱۵ تن به قیمت هر تن ۹۸۰ واحد پولی

کدام یک از گزینه‌های زیر درست می‌باشد؟

۱) بخش انبار پیشنهاد ۲ را می‌پسندد.
۲) بخش تدارکات پیشنهاد ۱ را می‌پسندد.
۳) بخش مالی پیشنهاد ۱ را می‌پسندد.
۴) بخش تولید پیشنهاد ۱ را می‌پسندد.

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» در صورتی که پیشنهاد ۱ انتخاب شود، سطح موجودی پایین می‌باشد، ولی بخش تدارکات مجبور است هر روز برای تهیه یک تن ماسه به فروشگاه مراجعه نماید، ولی انتخاب پیشنهاد ۲ سطح موجودی و فضای انبار مورد نیاز را بالا می‌برد ولی تعداد مراجعه به فروشگاه را کاهش می‌دهد. بخش انبار چون سطح موجودی کم‌تری را می‌پسندد پیشنهاد ۱ را انتخاب می‌کند. بخش تدارکات و بخش تولید که موجودی زیاد را می‌پسندند پیشنهاد ۲ را انتخاب می‌کنند. بخش مالی نیز که سطح موجودی پایین را می‌پسندد پیشنهاد ۱ را انتخاب می‌کند.

مثال ۶: کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) واحد مهندسی حجم موجودی بالا و واحد تولید و مالی حجم موجودی کم را می‌پسندند.
۲) واحد مهندسی و واحد تولید حجم موجودی بالا و واحد مالی حجم موجودی کم را می‌پسندند.
۳) واحد مهندسی و واحد تولید و مالی حجم تولید کم را می‌پسندند.
۴) واحد تولید حجم موجودی بالا و واحدهای مهندسی و مالی حجم موجودی کم را می‌پسندند.

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» واحد تولید برای کاهش دادن هزینه‌ی آماده‌سازی، نیاز به حجم تولید بالا دارد، از طرف دیگر برای کاهش احتمال توقف خط تولید، نیاز به تکمیل بودن انبار مواد اولیه دارد. واحد مالی برای کاهش هزینه‌ها و واحد مهندسی برای کاهش هزینه‌های متروک شدن کالا حجم پایین موجودی را می‌پسندند.

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۷: با توجه به این که نگهداری موجودی هزینه به همراه دارد، کدام یک از موارد زیر می‌تواند دلیل بر تحمل این هزینه باشد؟

۱) عدم قطعیت تقاضا و تغییرات تصادفی آن
۲) احتمال افزایش قیمت در بازار
۳) کاهش احتمال توقف خط تولید
۴) هر سه مورد

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» عدم قطعیت تقاضا باعث می‌شود که نتوانیم مقدار دقیق آن را پیش‌بینی کنیم و براساس آن مدل را برنامه‌ریزی کنیم، این عدم قطعیت باعث ایجاد هزینه می‌شود. کاهش احتمال توقف خط تولید می‌تواند باعث شود که هزینه نگهداری بیشتری بابت موجودی‌ها بدهیم و افزایش قیمت کالا در بازار به صورت مستقیم باعث افزایش هزینه نگهداری می‌شود.

مثال ۸: کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

۱) بخش طراحی و مهندسی به علت این که طراحی کالاهای جدید، کار این بخش را افزایش می‌دهد، همواره علاقه به بالا بودن سطح موجودی دارد تا اعمال تغییر در کالا توجیه اقتصادی نداشته باشد.
۲) بخش حسابداری به علت این که نگهداری کالا، سرمایه‌ای برای شرکت می‌باشد، مقدار بالای سطح موجودی را خواهان است.
۳) بخش تدارکات به علت این که حمل و نقل کالا با حجم زیاد، نیاز به تجهیزات پیشرفته‌تری دارد، مقدار سفارش کمتری را می‌پسندد.
۴) هیچ‌کدام.

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» بخش طراحی و حسابداری سطح موجودی پایین و بخش تدارکات سطح موجودی بالا را می‌پسندند.

حالت موجودی

همان طور که در بخش ۲ تشریح شد، سیستم موجودی شامل ورود کالا به انبار و خروج کالا از انبار می‌باشد. با توجه به این ورود و خروج کالا، این موضوع که در هر لحظه چه مقدار موجودی در انبار موجود می‌باشد، از اهمیت زیادی برخوردار است. مقدار موجودی نگهداری شده در انبار در هر لحظه را «حالت موجودی» می‌گویند.

ابتدا پارامترهای زیر را تعریف می‌نماییم:

$a(t)$: نرخ ورود کالا به سیستم موجودی(مقدار ورودی در لحظه t)

$d(t)$: مقدار تقاضای کالا در لحظه t

$w(t)$: مقدار خروج کالا از سیستم موجودی در لحظه t

$I(t)$: سطح موجودی در دست در زمان t

$b(t)$: مقدار تقاضای پس افت در زمان t (تقاضایی که پس از این که کالا به سیستم وارد شد، می‌بایست برآورده شود)

$o(t)$: مقدار کالایی که زمان t سفارش داده شده است ولی هنوز نرسیده است.

$NI(t)$: موجودی خالص در زمان t

$y(t)$: موقعیت موجودی در زمان t

نکته ۱۰: مقدار تقاضای رسیده و مقدار خروج کالا از سیستم می‌توانند با یکدیگر متفاوت باشند. زیرا ممکن است در هنگامی که در انبار هیچ کالایی وجود ندارد به مقدار A تقاضا داشته باشیم. در این حالت ممکن است مشتری منتظر مانده و پس از پرشدن انبار، سفارش خود را دریافت کند (تقاضای پس افت) و یا مشتری به فروشنده دیگری مراجعه نماید(فروش از دست رفته). در هر دو صورت مقدار تقاضا $(d(t))$ برابر A و مقدار خروجی $(w(t))$ برابر صفر می‌باشد. در حالت تقاضای پس افت مقدار $b(t)$ برابر A می‌شود و در حالت فروش از دست‌رفته مقدار $b(t)$ برابر صفر می‌شود.

نکته ۱۱: رابطه زیر همواره برقرار خواهد بود:

میزان خروجی تا زمان T ـ میزان ورودی تا زمان T + موجودی اولیه = مقدار موجودی در زمان T

$$I(T) = I(\circ) + \int_{\circ}^{T} a(t)dt - \int_{\circ}^{T} w(t)dt$$

www.modaresanesharif.ac.ir

نکته ۱۲: میزان موجودی خالص در لحظه t از رابطه مقابل محاسبه می‌شود: $NI(t) = I(t) - b(t)$

همواره حداقل یکی از مقادیر $I(t)$ و $b(t)$ برابر صفر می‌باشند. وقتی کمبود داریم، یعنی $I(t) = ۰$ باشد و $b(t) > ۰$ آن‌گاه موجودی خالص کوچکتر از صفر می‌باشد که نشانه کمبود است.

در صورتی که کلیه سفارشاتی که برآورده نمی‌شوند، پس‌افت شده و در آینده باید برآورده شوند، داریم:

$$NI(T) = NI(۰) + \int_{۰}^{T} a(t)dt - \int_{۰}^{T} d(t)dt$$

نکته ۱۳: موقعیت موجودی، مقدار موجودی خالص و مقدار موجودی سفارش شده در راه می‌باشد. از آن‌جا که کالای سفارش شده در همان لحظه صدور سفارش دریافت نمی‌شود و پس از مدتی دریافت می‌شود لذا جزء موجودی در دست به حساب نمی‌آید ولی در موقعیت موجودی محسوب می‌شود. در این حالت داریم: $y(t) = NI(t) + o(t) = I(t) - b(t) + o(t)$

مثال ۹: انباری با اطلاعات جدول زیر را در نظر بگیرید. مطلوب است مقدار موجودی خالص در پایان دوره سوم در صورتی که کلیه سفارشات مواجه شده با کمبود، پس‌افت می‌شوند و موجودی اولیه نیز صفر می‌باشد:

دوره	۱	۲	۳
مقدار ورودی کالا	۱۰۰	۱۲۰	۱۰
مقدار تقاضای رسیده	۱۲۰	۲۰۰	۱۰۰

۱) صفر
۲) ۱۱۰
۳) -۹۰
۴) ۹۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» مقدار موجودی اولیه صفر است، پس داریم: مقدار خروجی − مقدار ورودی + مقدار موجود اولیه = موجودی خالص

$$NI(۳) = I(۰) + \sum_{t=۱}^{۳} a(t) - \sum_{t=۱}^{۳} w(t) = ۰ + ۱۰۰ + ۱۲۰ + ۱۱۰ - (۱۲۰ + ۲۰۰ + ۱۰۰) = -۹۰$$

در این حالت با توجه به پس افت شدن تقاضا داریم: $w(t) = d(t)$

مثال ۱۰: با توجه به اطلاعات مثال فوق در صورتی که سفارشات مواجه شده با کمبود، از دست بروند، مقدار موجودی خالص در پایان دوره سوم چقدر است؟

۱) -۹۰ ۲) صفر ۳) ۱۰ ۴) -۱۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» چون در پایان هر دوره وقتی سفارشات با کمبود روبرو می‌شوند از دست می‌روند، لذا داریم:

$$\text{نرخ خروج} = w(t) = \begin{cases} d(t) \ , \ d(t) < a(t) \\ a(t) \ , \ d(t) > a(t) \end{cases}$$

در دوره اول چون مقدار تقاضا بیشتر از مقدار ورودی می‌باشد، لذا به میزان کالای موجودی، سفارشات برآورده شده و باقیمانده از دست می‌روند، یعنی ۱۰۰ کالا داریم و ۱۲۰ کالا از ما تقاضا شده است و ما ۱۰۰ تقاضا را برآورده نموده و ۲۰ تقاضا را از دست می‌دهیم:

$w(۱) = ۱۰۰$ و $w(۲) = ۱۲۰$ و $w(۳) = ۱۰۰$

در دوره سوم توجه شود که ۱۱۰ کالا داریم که ۱۰۰ عدد تقاضا رسیده است و ما همهٔ ۱۰۰ عدد تقاضا را برآورده می‌نماییم.

$$NI(۳) = I(۰) + \sum_{t=۱}^{۳} a(t) - \sum_{t=۱}^{۳} w(t) \Rightarrow NI(۳) = ۰ + (۱۰۰ + ۱۲۰ + ۱۱۰) - (۱۰۰ + ۱۲۰ + ۱۰۰) = ۱۰$$

مثال ۱۱: در مثال شماره ۵، فرض نمایید که سفارشاتی که در دوره‌های ۱ و ۲ و ۳ دریافت می‌شوند در لحظه صفر صادر شده‌اند. مطلوب است محاسبه مقدار موقعیت موجودی در پایان دوره دوم در صورتی که سفارشات مواجه شده با کمبود، پس افت می‌شوند.

۱) ۱۰ ۲) ۱۱۰ ۳) -۱۰۰ ۴) صفر

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ابتدای موجودی خالص را در پایان دوره دوم محاسبه می‌نماییم: $NI(۲) = I(۰) + \sum_{t=۱}^{۲} a(t) - \sum_{t=۱}^{۲} w(t)$

www.modaresanesharif.ac.ir

$NI(۲) = ۰ + (۱۰۰ + ۱۲۰) - (۱۲۰ + ۲۰۰) = -۱۰۰$

$y(۲) = NI(۲) + o(۲) = -۱۰۰ + ۱۱۰ = ۱۰$

توجه شود که در دوره دوم، تنها یک سفارش در راه، دریافت نشده است و آن سفارشی است که در دوره سوم دریافت می‌شود، یعنی $o(۲) = ۱۱۰$

مثال ۱۲: مقدار موقعیت موجودی در مثال فوق در پایان دوره دوم را با فرض این که تقاضاهای مواجه شده با کمبود از دست می‌روند به دست آورید:

۱) ۱۰ ۲) ۱۱۰ ۳) −۱۰۰ ۴) صفر

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» ابتدای موجودی خالص را به دست می‌آوریم:

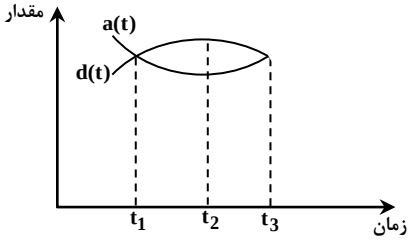
$$NI(۲) = I(۰) + \sum_{t=۱}^{۲} a(t) - \sum_{t=۱}^{۲} w(t)$$

چون تقاضای مواجه شده با کمبود از دست می‌رود، لذا داریم:

$$w(t) = \begin{cases} d(t) , & d(t) < a(t) \\ a(t) , & d(t) > a(t) \end{cases}$$

$NI(۲) = ۰ + (۱۰۰ + ۱۲۰) - (۱۰۰ + ۱۲۰) = ۰$

مثال ۱۳: اگر در شکل زیر نرخ ورود کالا به سیستم و نرخ تقاضای سیستم به ترتیب با $a(t)$ و $d(t)$ نشان داده شده باشند، کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح می‌باشد؟ (تقاضای مواجه شده با کمبود پس افت می‌شود)

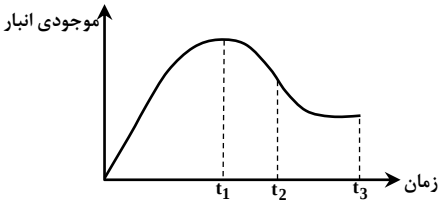


۱) در زمان $t_۱$ بیشترین موجودی انباشته شده در سیستم وجود خواهد داشت.

۲) در زمان $t_۲$ بیشترین موجودی انباشته شده در سیستم وجود خواهد داشت.

۳) در زمان $t_۳$ بیشترین موجودی انباشته شده در سیستم وجود خواهد داشت.

۴) در مورد موجودی سیستم نمی‌توان اظهار نظر نمود.



☑ **پاسخ :** گزینه «۱» فرض می‌نماییم موجودی اولیه سیستم صفر باشد. در زمان قبل از $t_۱$ تا زمان $t_۱$، مقدار نرخ ورود کالا به انبار بیشتر از نرخ تقاضا می‌باشد و لذا موجودی انبار افزایش می‌یابد. از زمان $t_۱$ تا $t_۳$ نرخ تقاضا بیشتر از نرخ ورود می‌باشد و از موجودی انبار کاسته می‌شود. به صورت تقریبی می‌توان گفت مقدار موجودی انبار از نمودار روبرو پیروی می‌کند.

هزینه‌های سیستم موجودی

نگهداری موجودی در سازمان هزینه‌هایی دربردارد. هدف سیستم موجودی به دست آوردن مقادیری برای نرخ ورود کالا(مقدار سفارش و زمان سفارش) می‌باشد به گونه‌ای که این هزینه‌ها را حداقل نماید.

هزینه‌های سیستم موجودی به هزینه‌های نگهداری، هزینه‌های سفارش‌دهی و تدارکات، هزینه کمبود کالا، هزینه‌های خرید کالا و هزینه‌های کنترل سیستم موجودی تقسیم می‌شود. برای حداقل سازی هزینه‌های کل سیستم باید مدلی تهیه نمود که در آن کلیه هزینه‌های فوق با توجه به نحوه تأثیرشان لحاظ شده باشند.

۱- هزینه‌های سفارش‌دهی و تدارکات

هزینه‌هایی هستند که در هر بار سفارش کالا به صورت ثابت به سیستم موجودی تحمیل می‌گردند و به میزان سفارش صادر شده بستگی ندارد.

نکته ۱۴: هزینه‌های حمل و نقل وقتی که به مقدار مواد بستگی ندارد، جزء هزینه‌های سفارش‌دهی محسوب می‌شود.

نکته ۱۵: هزینه‌های فاکس، تلفن، بازدید از کالای فروشنده، هزینه حق مأموریت پرسنل خرید، هزینه‌های ترخیص و گمرک، بیمه بار و استعلام خرید نیز جزو هزینه‌های سفارش‌دهی به حساب می‌آیند مگر این که به مقدار کالای سفارش داده شده بستگی داشته باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

مدرسان شریف

فصل دوم

مدل اندازه سفارش اقتصادی

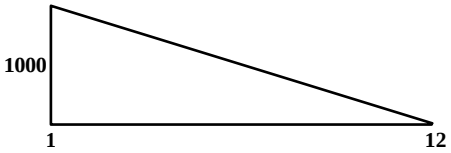
در این فصل مدل‌های قطعی سفارش اقتصادی مورد بررسی قرار می‌گیرند. با وجودی که تقاضا را نمی‌توان در اکثر موارد به صورت قطعی پیش‌بینی نمود و نرخ تقاضا معلوم و قطعی نمی‌باشد، در این فصل برای درک بهتر انواع سیستمهای موجودی، تقاضا را قطعی در نظر می‌گیریم. خواننده در پایان فصل با سفارش اقتصادی در حالت مجاز نبودن کمبود و مجاز بودن کمبود آشنا شده و قادر خواهد بود با توجه به هدف سیستم موجودی که حداقل کردن هزینه‌ها می‌باشد، زمان صدور سفارش و مقدار سفارش را تعیین نماید.

تعداد تستهای مطرح شده از این فصل در کنکور سراسری سال‌های اخیر:

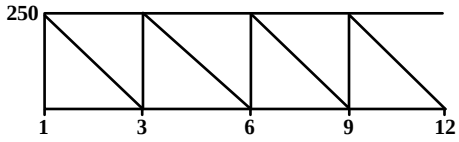
۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱
۵	۷	۶	۳	۴	۷	۴	۳	۰

تفسیر یک مدل موجودی

در یک مدل موجودی ساده و قطعی همواره دو هزینه عمده نگهداری و سفارش‌دهی موجود است که عکس یکدیگر عمل می‌کنند. به طور مثال فرض کنید یک شرکت از یک نوع ماده اولیه سالانه ۱۰۰۰ واحد نیاز دارد این شرکت می‌تواند تمام موجودی مورد نیاز خود را در ابتدای سال سفارش دهد که در این صورت یک بار هزینه سفارش‌دهی را متحمل می‌شود. ولی باید برای کل محصول هزینه نگهداری زیادی بدهد. (شکل ۱). اما شرکت می‌تواند در ابتدای هر فصل یعنی ۴ بار در سال، در هر نوبت ۲۵۰ واحد سفارش دهد. در این حالت درست است که هزینه سفارش‌دهی ۴ برابر می‌شود ولی هزینه نگهداری در مقایسه با قبل کاهش خواهد یافت. (شکل ۲)



شکل ۱



شکل ۲

در یک مدل موجودی قصد داریم که به نحوی بین هزینه‌های سفارش‌دهی و نگهداری تعادل ایجاد کنیم تا کمترین هزینه را به دست آوریم، متغیر ما در این کار همان‌طور که از شکل‌های بالا معلوم است تعداد سفارش در هر سال است $(n = \frac{D}{Q})$ که باعث می‌شود Q (مقدار سفارشی در هر بار) عامل تصمیم‌گیری ما باشد.

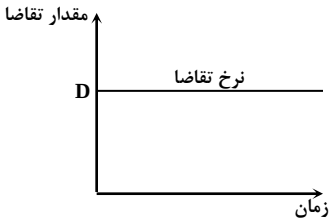
در یک مدل موجودی در حالت کلی ۲ سؤال وجود دارد: زمان سفارشی و مقدار سفارشی. اهمیت مقدار سفارش در بالا بیان شد ولی منظور از زمان صدور سفارش آن سطحی از موجودی است که هرگاه موجودی حال حاضر به آن برسد باید اقدام به صدور سفارش کنیم. مدل‌های موجودی با توجه به فرضیات آن‌ها دسته‌بندی می‌شوند. در ادامه ساده‌ترین مدل موجودی را شرح می‌دهیم.

www.modaresanesharif.ac.ir

مدل EOQ ساده

مدل EOQ ساده‌ترین مدل کنترل موجودی است. در این مدل کلیه شرایط ثابت و قطعی و معین در نظر گرفته شده‌اند و تا حدودی شرایط آن غیرواقعی می‌باشد. ولی این مدل می‌تواند کمک مناسبی برای تجزیه و تحلیل مدل‌های کنترل موجودی در شرایط واقعی باشد.

فرضیات مدل EOQ



برای تعیین یک سیستم موجودی هفت عامل مؤثر هستند که در فصل قبل بیان شدند. وضعیت هریک از این هفت عامل در مدل EOQ به شرح زیر می‌باشد:

۱ـ نرخ تقاضا قطعی و ساکن است و مقدار آن در طول دوره برنامه‌ریزی ثابت، معلوم و مشخص می‌باشد. یعنی نرخ تقاضا در طول سال، معلوم و ثابت و مستقل از زمان است. در واقع نرخ تقاضا در هر لحظه از نمودار مقابل پیروی می‌نماید.

۲ـ کمبود مجاز نمی‌باشد یعنی مقدار موجودی خالص هیچ‌گاه از صفر کمتر نخواهد شد. با توجه به این که مقدار تقاضا قطعی و معین می‌باشد، لذا می‌توان انتظار داشت که طوری برنامه‌ریزی نماییم که هیچ‌گاه با کمبود روبرو نشویم. در این مدل برای این که کمبود نداشته باشیم، هزینه‌های مواجهه با کمبود را بی‌نهایت در نظر می‌گیریم تا کمبود نداشته باشیم و لذا هزینه‌های کمبود صفر شوند.

۳ـ محدودیت‌هایی از قبیل فضای انبار، سرمایه درگیر موجودی، تعداد سفارش و ... نداریم. در واقع هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم سفارش صادر نماییم و هیچ شرایطی برای سفارش صادر شده به مدل تحمیل نمی‌شود.

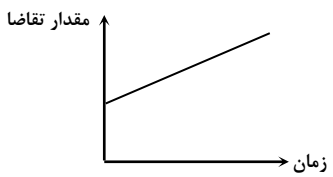
۴ـ مقدار سفارش صادر شده، یک جا دریافت می‌شود. یعنی سفارش در چند بخش و یا به صورت ذره، ذره به سیستم وارد نمی‌شود.

۵ ـ مدت زمان تحویل، قطعی و معین است. مدت زمان تحویل، مدت زمان بین لحظه صدور سفارش تا لحظه دریافت سفارش می‌باشد. در واقعیت این مقدار به ندرت ثابت و معین می‌باشد. به عنوان مثال هیچ‌گاه روزنامه‌های دکه روزنامه‌فروشی رأس یک ساعت مشخص به دکه نمی‌رسند و معمولاً تأخیر و یا تعجیل دارند. در مدل EOQ این گونه در نظر گرفته می‌شود که همواره L واحد زمانی پس از صدور سفارش، کالا دریافت می‌شود.

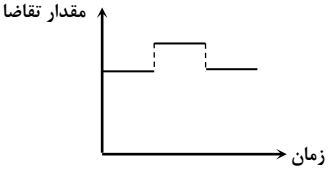
۶ ـ قیمت کالا در طول مدت برنامه‌ریزی ثابت است و به مقدار سفارش بستگی ندارد. در واقعیت هنگامی که کالای بیشتری خریداری شود، فروشنده تخفیف بیشتری می‌دهد ولی در مدل EOQ ساده فرض بر این است که قیمت کالا ثابت است و کلیه کالاهایی خریداری شده بدون توجه به مقدار سفارش و زمان سفارش به همان قیمت خریداری می‌شود. در مدل EOQ ساده تورم نیز نداریم در حالی که در واقعیت پس از مدتی قیمت جنس تغییر می‌یابد و همواره ثابت نمی‌باشد.

۷ـ مدل تک محصولی می‌باشد. یعنی در مدل EOQ ساده تنها یک قلم جنس را بررسی می‌نماییم و سیستم موجودی را بر اساس یک قلم کالا مدلسازی و حل می‌کنیم.

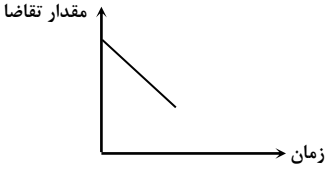
مثال ۱: تقاضاهای چند کالا همانند شکل‌های زیر می‌باشد، کدام یک از این کالاها قطعاً از مدل EOQ ساده پیروی نمی‌کنند؟



کالای A



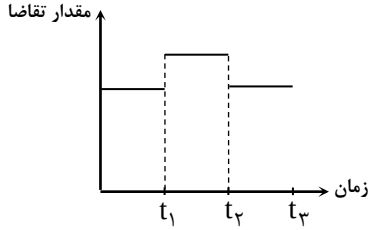
کالای B



کالای C

۱) کالای A و B ۲) کالای A و C ۳) کالای B و C ۴) کالای A و B و C

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در مدل EOQ ساده تقاضا در افق برنامه‌ریزی ثابت و ساکن می‌باشد. تقاضای کالای A هیچ‌گاه ثابت و مستقل از زمان نمی‌باشد. کالای C نیز همانند کالای A می‌باشد و در آن در طول افق برنامه‌ریزی همواره تقاضا در حال کاهش می‌باشد.

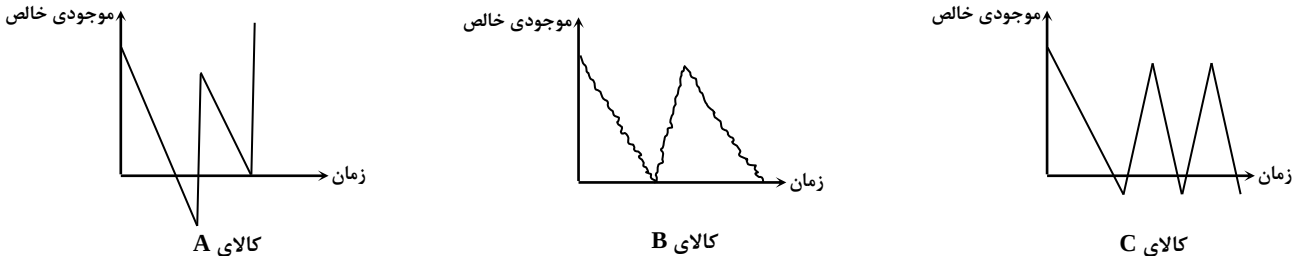


برای کالای B داریم:

از زمان صفر تا t_1 نرخ تقاضا ثابت و قطعی می‌باشد و اگر افق برنامه‌ریزی ما برای مدل EOQ ساده در این زمان به پایان برسد، مدل می‌تواند یک مدل EOQ ساده باشد، همین‌طور اگر افق برنامه‌ریزی از t_1 تا t_2 و یا از t_2 یا t_3 باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۲: کدام‌یک از کالاهای زیر فرضیات مدل EOQ ساده را نقض می‌نمایند؟

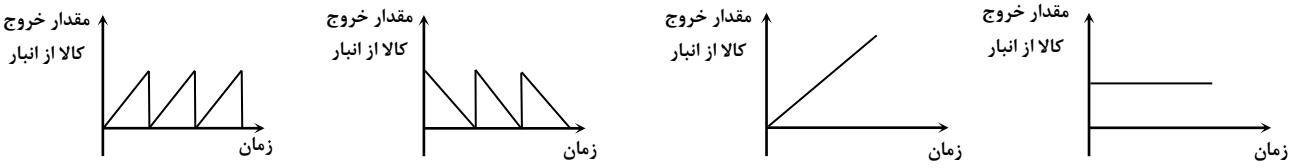


۱) کالاهای A و B　　۲) کالاهای A و C　　۳) کالاهای B و C　　۴) هر سه کالا

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» هیچ‌کدام از کالاهای فوق فرضیات مدل EOQ ساده را ندارند. کالای A و C با کمبود روبه‌رو شده‌اند و موجودی خالص آن‌ها مقدار منفی پذیرفته است در حالی‌که در مدل EOQ ساده، کمبود مجاز نمی‌باشد.

برای کالای B نیز شیب کاهش موجودی خالص به صورت ثابت نمی‌باشد. از طرفی سفارش دریافت شده یک جا و با شیب بی‌نهایت (خط عمودی) به سیستم اضافه نمی‌شود.

مثال ۳: کدام یک از نمودارهای زیر مقدار خروج کالا از انبار یک مدل EOQ ساده را به درستی نشان می‌دهد؟



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از آن‌جا که در مدل EOQ ساده، کمبود موجودی نداریم، لذا کلیه تقاضاهای رسیده برآورده شده و از انبار خارج می‌شوند. لذا شیب نرخ خروج کالا از انبار می‌بایست برابر نرخ تقاضا رسیده باشد. از آن‌جا که نرخ تقاضا نیز ثابت می‌باشد پس نموداری که در آن شیب، مقداری مثبت و یک عدد ثابت می‌باشد، می‌تواند نرخ خروج کالا از انبار در مدل EOQ ساده را به خوبی نشان دهد. توجه شود که نرخ خروج نمی‌تواند شیب منفی یا صفر داشته باشد.

مثال ۴ : یکی از فرضیات مدل EOQ این است که:

۱) تقاضا نامعلوم و متغیر است.　　۲) اگر تقاضا چهار برابر شود، مقدار سفارش دو برابر می‌شود.

۳) قیمت خرید فقط در شرایط خاص تغییر می‌نماید.　　۴) در هر بار سفارش، کل مقدار سفارش یک جا دریافت می‌شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» توجه شود که گزینه۲ صحیح است ولی از فرضیات مدل EOQ نمی‌باشد.

مثال ۵ : هدف مدل EOQ عبارت است از:

۱) حداقل نمودن اندازه سفارش　　۲) حداقل کردن هزینه نگهداری کالا

۳) حداقل کردن هزینه نگهداری و سفارش‌دهی　　۴) حداقل کردن هزینه سفارش‌دهی کالا

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» هدف مدل EOQ حداقل کردن مجموع هزینه‌ها می‌باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

پارامترهای مدل EOQ و محاسبه هزینه آن

A: هزینه هر بار سفارش‌دهی

D: نرخ تقاضا

h: هزینه نگهداری یک واحد کالا در واحد زمان: $h = ic$

L: مدت زمان تحویل

Q: مقدار هر بار سفارش

r: نقطه سفارش برحسب موقعیت موجودی

$\mathbf{r_h}$: نقطه سفارش برحسب موجودی خالص (موجودی در دست)

T: طول هر دوره (زمان بین دو صدور سفارش متوالی یا دو دریافت سفارش متوالی)

C: قیمت خرید کالا

i: نرخ هزینه نگهداری هر واحد کالا

k: متوسط هزینه سالانه

SS: موجودی اطمینان (که در مدل **EOQ** لازم نمی‌باشد و $SS = ۰$)

مقدار سفارش اقتصادی

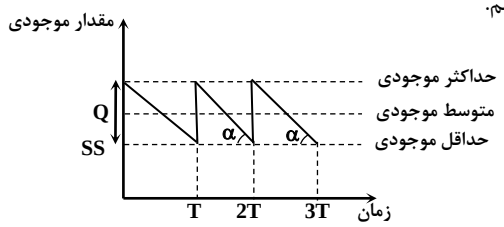
همان طوری که در فصل قبل تشریح گردید، در سیستم‌های موجودی به دنبال این هستیم که در چه زمانی و به چه مقداری سفارش صادر نماییم تا هزینه‌های موجودی حداقل شود، لذا در این بخش محاسبه مقدار سفارش و در بخش بعدی محاسبه زمان صدور سفارش بیان می‌شود.

ابتدا هزینه‌های سیستم موجودی را شناسایی کرده و با توجه به رابطه به دست آمده مقدار سفارش را به گونه‌ای که هزینه‌ها را حداقل نماید تعیین می‌نماییم. هزینه‌های سیستم موجودی همان طوری که در فصل قبل بیان شد شامل **هزینه‌های سفارش‌دهی، هزینه‌های خرید، هزینه‌های نگهداری** و **هزینه‌های کمبود** می‌باشد. در مدل EOQ ساده، کمبود مجاز نمی‌باشد و لذا هزینه‌های کمبود صفر بوده و در مدل وارد نمی‌شود.

از آن‌جا که مقدار تقاضا قطعی و ساکن است و مدت زمان تحویل ثابت می‌باشد، لذا هنگامی سیستم به صورت بهینه کار می‌کند که همیشه مقدار سفارش در هر بار ثابت و مقدار موجودی در هنگام رسیدن هر بار سفارش یکسان باشد. چون مقدار سفارش ثابت و برابر Q است، بنابراین فاصله زمانی بین هر دو بار سفارش متوالی نیز ثابت و برابر T می‌باشد.

$$\text{نرخ تقاضا = شیب نمودار} = D \Rightarrow \tan\alpha = \frac{Q}{T} = D \Rightarrow T = \frac{Q}{D} = \frac{\text{مقدار سفارش}}{\text{کل تقاضا}}$$

با این تفاسیر برای به دست آوردن هزینه متوسط سالیانه هزینه یک دور سفارش را حساب می‌کنیم.



$$\text{هزینه نگهداری در یک دوره} = h \times \text{مساحت زیر نمودار در یک دوره}$$

$$[(ss \times T) + (\frac{Q \times T}{۲})] \times h$$

در هر دوره یک بار سفارش صادر می‌شود و لذا هزینه سفارش‌دهی در یک دوره برابر A می‌شود. در هر دوره به مقدار Q واحد کالا خریداری می‌شود و چون قیمت خرید هر یک واحد کالا C واحد پولی است لذا کل هزینه‌های خرید در یک دوره برابر CQ می‌باشد.

کل هزینه‌های یک دوره برابر است با: $$\text{هزینه یک دوره} = CQ + A + [(SS \times T) + (\frac{Q \times T}{۲})] \times h$$

چون نگهداری سطح موجودی SS هزینه‌های اضافی به سیستم موجودی تحمیل می‌نماید با توجه به این که تقاضا قطعی می‌باشد لذا می‌توان طوری برنامه‌ریزی نمود که در هنگامی‌که $I = ۰$ باشد سفارش دریافت شود و لذا هزینه‌های نگهداری کاهش می‌یابد پس با در نظر گرفتن $ss = ۰$ داریم:

$$\text{هزینه کل یک دوره} = A + CQ + \frac{hQ}{۲}T$$

(توضیح رابطه: $\text{تعداد دفعات سفارش} = n = \frac{\text{مقدار کل کالای مورد نیاز در سال}}{\text{مقدار سفارشی در هر دوره}}$) $$\text{تعداد دوره‌ها در یک سال} = n = \frac{۱}{T} = \frac{D}{Q}$$

$$\text{متوسط هزینه خرید سالانه} = \frac{D}{Q} \times CQ = CD \qquad \text{متوسط هزینه سفارش‌دهی سالانه} = \frac{D}{Q} \times A$$

متوسط موجودی در سال برابر با $\frac{Q}{۲}$ است. $$\Rightarrow \text{متوسط هزینه نگهداری سالیانه} = \frac{۱}{T}\frac{hQ \times T}{۲} = \frac{hQ}{۲}$$

$$\text{متوسط هزینه سالیانه} = n \times (\text{هزینه یک دوره}) = \frac{D}{Q}A + \frac{hQ}{۲} + CD$$

www.modaresanesharif.ac.ir

چون هزینه خرید مستقل از میزان سفارش صادر شده (Q) است لذا برای حداقل کردن هزینه سیستم موجودی نیازی به در نظر گرفتن آن در مدل نداریم.

هزینه وابسته به میزان سفارش $= K(Q) = \frac{hQ}{۲} + \frac{D}{Q}A$

$$\frac{\partial K(Q)}{\partial Q} = ۰ \Rightarrow Q^* = EOQ = Q_W = \sqrt{\frac{۲DA}{h}}$$

$$T^* = \frac{Q^*}{D} = \sqrt{\frac{۲A}{hD}} \quad ; \quad K^* = \frac{DA}{Q^*} + \frac{hQ^*}{۲} = \sqrt{۲DAh} = hQ^* = ۲\frac{D}{Q}A$$

کمترین هزینه کل سیستم موجودی $= CD + \sqrt{۲DAh}$

تذکر۱: اگر در صورت سؤال Q را بدهد و صریحاً بهینه بودن آن را اعلام نکند، نمی‌توان از فرمول‌های بالا استفاده کرد.

نکته ۱: هزینه فوق متوسط هزینه سالانه است و برای به دست آوردن هزینه دقیق هر سال، باید از روشهای بیان شده در فصل یک استفاده نمود.

نکته ۲: در مدل EOQ چون سفارش به صورت آنی دریافت می‌گردد لذا حداکثر مقدار موجودی برابر با Q خواهدبود. $I_{max} = Q^*$

نکته ۳: در صورتی که هزینه اجارهٔ انبار مستقل از متوسط موجودی نگهداری شده باشد و وابسته به حداکثر سطح موجودی نگهداری شده یعنی Q باشد آن‌گاه داریم:

$$TC = \frac{D}{Q}A + \frac{h}{۲}Q + WQ$$

W: هزینه اجاره فضای مورد نیاز برای یک واحد کالا در یک سال

$$\frac{\partial TC}{\partial Q} = ۰ \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{۲DA}{h+۲w}} \quad ; \quad k^* = \sqrt{۲DA(h+۲w)}$$

مثال ۶: کالایی به مقدار ۲۰۰۰ واحد در سال موردنیاز است. اگر مقدار سفارش صادره برابر ۵۰۰ واحد باشد و هزینه هر بار سفارش‌دهی ۱۰۰ تومان و هزینه نگهداری هر واحد کالا در سال برابر ۴ تومان باشد مطلوب است محاسبه هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی در یک دوره:

۱) ۱۰۰۰ و ۴۰۰ ۲) ۱۰۰۰ و ۱۰۰ ۳) ۲۵۰ و ۴۰۰ ۴) ۲۵۰ و ۱۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در یک دوره، تنها یک بار سفارش صادر می‌شود و لذا هزینه سفارش‌دهی برابر ۱۰۰ تومان باشد. هزینه نگهداری در یک دوره نیز از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{هزینه نگهداری در یک دوره} = \frac{hQT}{۲} = \frac{۴ \times ۵۰۰}{۲} \times \frac{۵۰۰}{۲۰۰۰} = ۲۵۰$$

توجه نمایید که $T = \frac{Q}{D} = \frac{۵۰۰}{۲۰۰۰}$ می‌باشد.

مثال ۷: در مدل EOQ، متوسط هزینه سالیانه بهینه سفارش و نگهداری عبارت است از:

۱) حاصلضرب مقدار سفارش بهینه در هزینه نگهداری هر واحد.

۲) حاصلضرب هزینه هر بار سفارش در نسبت تقاضای سالیانه به مقدار سفارش بهینه

۳) حاصلضرب هزینه هر بار سفارش در نسبت مقدار سفارش بهینه به تقاضای سالیانه

۴) گزینه ۱و۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» $K^* = HQ^*$

نقطه سفارش مجدد

تعریف: سطحی از موجودی که هر گاه موجودی به آن مقدار برسد باید سفارش برای تأمین کالا صادر شود را «نقطه سفارش مجدد» می‌گویند که براساس موجودی در دست (r_h) و یا برحسب موقعیت موجودی (r) بیان می‌شود. هنگامی که موقعیت موجودی به $D.L$ رسید باید سفارش جدیدی صادر نماییم.

www.modaresanesharif.ac.ir

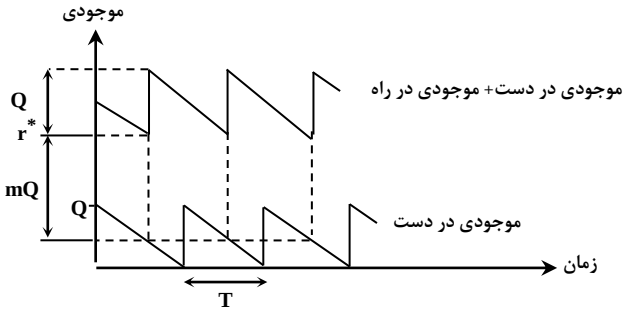
شاید این موضوع واضح باشد زیرا میزان مصرف کالا در طول مدت زمان تحویل (L) برابر با DL می‌باشد و برای این که در L واحد زمان بعد، با کمبود مواجه نشویم باید در این زمان سفارش دهیم تا در لحظه اتمام موجودی کنونی سفارش جدید دریافت گردد.
برای این که هزینه نگهداری اضافی نیز نپردازیم می‌بایست با توجه به قطعی بودن تقاضا به گونه‌ای سفارش دهیم که در لحظه اتمام موجودی (موجودی خالص صفر) سفارش جدید دریافت گردد.

در نتیجه نقطه سفارش‌دهی براساس موقعیت موجودی r در مدل EOQ همواره برابر DL است ولی نقطه سفارش‌دهی براساس موجودی در دست r_h بسته به حالتی‌که L و T نسبت به هم دارند متفاوت است که در زیر هریک توضیح داده می‌شود.

نکته ۴: متوسط سفارش در راه برابر است با $\frac{L}{T}$ و متوسط موجودی در راه نیز $\frac{L}{T}Q = D.L$ خواهد بود. تعداد سفارش در راه قبل از صدور سفارش m و بعد از صدور سفارش تا لحظه دریافت اولین سفارش بعدی برابر با $m+1$ خواهد بود.

حداقل موقعیت موجودی $= D.LT$

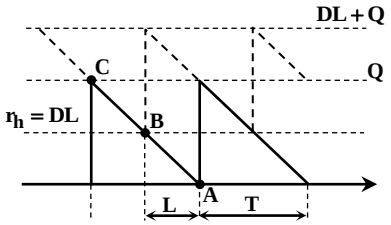
حداکثر موقعیت موجودی $= D.LT + Q$



نکته ۵: نقطه سفارش مجدد در مدل EOQ تنها به ۳ عامل نرخ تقاضا در سال (D)، مدت زمان یک دوره (T) و مدت زمان تحویل (L) وابسته است.

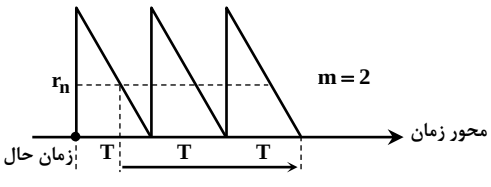
اگر $L<T$ باشد ← چون در L واحد زمانی بعد از صدور سفارشی مقدار Q به دست ما می‌رسد و علاقه‌ای به نگهداری موجودی اضافه نداریم باید در لحظه‌ای که موجودی در دست صفر می‌شود سفارشی به دست ما برسد پس L واحد قبل از نقطه A اقدام به سفارش می‌کنیم که در این نقطه I برابر $D\times L$ (شیب مصرف × زمان مصرف) هست پس در نقطه C تازه مقدار Q به دست ما رسیده و موجودی در دست برابر Q است و هیچ موجودی‌ای در راه نیست پس موقعیت موجودی: $y_{(t)} = I_{(t)}$ است. این تساوی تا نقطه B که اقدام به صدور سفارش می‌کنیم برقرار است ولی از نقطه B تا A چون Q واحد در راه است داریم $y_{(t)} = I_{(t)} + Q$ تا در نقطه A $\circ = I_{(t)}$ شود و $y_{(t)} = Q$ گردد، با توجه به این موضوع:

$$y_{(t)} = \begin{cases} Q & \text{در نقطه C} \\ DL & \text{لحظه قبل نقطه B} \\ DL+Q & \text{لحظه بعد نقطه B} \\ Q & \text{در نقطه A} \end{cases} \Rightarrow DL \le y_{(t)} \le DL+Q$$



* اگر $L>T$ باشد ←

در این حالت می‌توان L را به صورت $L = mT + u$ که $m = [\frac{L}{T}]$ محاسبه کرد، یعنی این که هرگاه سفارش دهیم سفارش اکنون ما در m دوره بعد به دستمان خواهد رسید، با کمک شکل زیر می‌توان دریافت که r_h باید در سطحی باشد که تنها تقاضای مدت زمان u را تأمین کند.
زیرا قبل از زمان حال نیز سفارشاتی داده‌ایم که تا انتهای همین دوره به دست ما می‌رسد و ما فقط کافی است مقداری موجودی داشته باشیم که تقاضا را تا انتهای همین دوره برآورده کند.



$$r_n = D\times u = D(\overbrace{L-mT}^{u}) = DL - mDT = DL - m_Q$$

در این حالت موقعیت موجودی مانند حالت قبل است یعنی $r = DL$, $DL < y_{(t)} < DL+Q$.

نکته ۶: در هر دوره T در لحظه قبل از صدور سفارش (قبل رسیدن سطح موجودی در دست به r_h) به دلیل سفارشات از قبل داده شده m سفارشی در راه وجود دارد که مقدار آن‌ها m_Q است ولی بعد از لحظه سفارشی تا لحظه دریافت $m+1$ سفارشی در راه وجود دارد که مقدار آن $(m+1)Q$ است.

www.modaresanesharif.ac.ir

نکته ۷: می‌توان گفت تنها در مدت زمان u در هر دوره $m+1$ سفارشی در راه داریم و در بقیه حالات m سفارش حال اگر $L=mT$ باشد همواره m سفارش در راه خواهیم داشت زیرا $u=0$ می‌شود.

مثال ۸: کالایی به قیمت ۱۰۰ تومان، در سال به مقدار ۱۰,۰۰۰ عدد در سال مورد نیاز است. اگر هزینه هر بار سفارش‌دهی این کالا ۲۰۰ تومان و نرخ هزینه نگهداری این کالا ۱۰٪ باشد، آن‌گاه:

الف) میزان سفارش اقتصادی کالا چقدر است؟

ب) هزینه کل سیستم موجودی چقدر است؟

ج) طول مدت هر دوره چقدر است؟

د) اگر مدت زمان L برابر با ۲ ماه باشد آن‌گاه نقطه سفارش موجودی برحسب موجودی در دست و موقعیت موجودی را به دست آورید.

هـ) میزان هزینه سفارش‌دهی سالیانه چقدر است. آن را با میزان هزینه نگهداری سالیانه مقایسه نمایید.

پاسخ:

الف) $Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{H}} = \sqrt{\frac{2\times 10,000\times 200}{0/1\times 100}} = 632/45$

ب) $K = CD + \sqrt{2DAh} = 100\times 10,000 + \sqrt{2\times 10,000\times 200\times 0/1\times 100} = 1006324/5$

ج) $T = \frac{Q}{D} = \frac{632/45}{10000} = 0/063$ سال $= 0/76$ ماه

د) $m = [\frac{L}{T}] = [\frac{2}{0/76}] = 2$

$r^* = DL = 10000\times\frac{2}{12} = 1666/7 \quad ; \quad r_h^* = DL - mQ = 1666/7 - 2\times 632/45 = 401/8$

هـ) کل هزینه نگهداری $= \frac{HQ}{2} = \frac{iCQ}{2} = \frac{0/1\times 100\times 632/45}{2} = 3162/25$

کل هزینه سفارش‌دهی $= \frac{D}{Q}A = \frac{10000}{632/45}\times 200 = 3162/25$

کل متوسط هزینه سفارش‌دهی = کل متوسط هزینه نگهداری

مثال ۹: اگر تقاضای محصولی در سال ۶۰۰ کیلوگرم باشد و هزینه هر بار سفارش‌دهی آن ۸ تومان و قیمت هر کیلوگرم آن ۰/۳ باشد آن‌گاه در صورتی که نرخ هزینه نگهداری ۲۰% باشد و مدت تحویل ۱ سال باشد، آن‌گاه:

الف) مقدار سفارش اقتصادی را محاسبه کنید.

ب) متوسط هزینه بهینه را محاسبه کنید.

ج) نقطه سفارش‌دهی برحسب موقعیت موجودی و موجودی در دست را به‌دست آورید.

د) هزینه دقیق دو سال متوالی را به‌دست آورید (در صورتی که زمان سفارش ابتدای سال اول باشد)

پاسخ:

الف)

$h = 0/2\times 0/3 = 0/06$

$Q_w = \sqrt{\frac{2DA}{h}} = \sqrt{\frac{2\times 600\times 8}{0/06}} = 400$ کیلو

ب)

$k = hQ_w = 0/06\times 400 = 24$

ج)

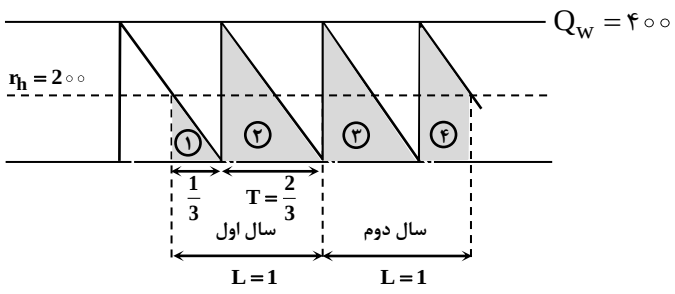
$T^* = \frac{Q_w}{D} = \frac{400}{600} = \frac{2}{3}$ سال $\qquad m = [\frac{L}{T}] = [\frac{1}{\frac{2}{3}}] = 1$

$r^* = DL = 1\times 600 = 600 \qquad r_h = DL - mQ = Du = D(L - mT) = 600 - 400 = 200$

www.modaresanesharif.ac.ir

د)

همان‌طور که در شکل دیده می‌شود چون سال با سفارش‌دهی شروع می‌شود در سال اول ۲ سفارش‌دهی رخ داده است ولـی در سـال دوم تنها یک سفارش‌دهی.



هزینه دقیق سال اول:

هزینه سفارش‌دهی: $۲ \times ۸ = ۱۶$

هزینه نگهداری: $h\bar{I} = ۰/۰۶ \times \frac{۵۰۰}{۳} = ۱۰$

$$\bar{I} = \text{مساحت مثلث (۱)} + \text{مساحت مثلث (۲)} = \frac{۱}{۲}(\frac{۲۰۰}{۳}) + \frac{۱}{۲}(\frac{۴۰۰ \times ۲}{۳}) = \frac{۵۰۰}{۳}$$

در نتیجه k دقیق سال اول: ۲۶

هزینه دقیق سال دوم:

هزینه سفارش‌دهی: ۸×۱

هزینه نگهداری: $h\bar{I} = ۰/۰۶ \times \frac{۷۰۰}{۳} = ۱۴$

$$\bar{I} = \text{مساحت ذوزنقه ۴} + \text{مساحت مثلث (۳)} = \frac{۲}{۳} \times ۲۰۰ + \frac{۱}{۳}(\frac{۴۰۰ + ۲۰۰}{۲}) = \frac{۷۰۰}{۳}$$

در نتیجه هزینه دقیق سال دوم: ۲۲

که اگر بخواهیم هزینه متوسط را از این راه حساب کنیم: $\frac{۲۲ + ۲۶}{۲} = ۲۴$

مثال ۱۰: در مدل ساده موجودی (EOQ) اگر مدت تحویل ۲/۵ ماه باشد، مقدار سفارش اقتصادی ۱۰۰ واحد و تقاضای سالیانه ۱۲۰۰ واحـد باشـد. مقدار موجودی در دست در هنگام دریافت کالای سفارش داده شده چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۱۵۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۵۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» توجه شود که در هنگام دریافت کالای سفارش شده وقتی تقاضا قطعی است مقدار موجودی در دست صـفر مـی‌باشـد تـا هزینـه اضافی نداشته باشیم.

مثال ۱۱: در سؤال فوق مقدار موجودی در دست در موقع سفارش در حالت سفارش اقتصادی چقدر است؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۵۰ ۴) ۲۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$T^* = \frac{Q}{D} = \frac{۱۰۰}{۱۲۰۰} = ۱ \text{ ماه}$$

$$m = [\frac{LT}{T^*}] = ۲ \Rightarrow r = D.LT - mQ^* = ۱۲۰۰ \times \frac{۲/۵}{۱۲} - ۲ \times ۱۰۰ = ۵۰$$

مثال ۱۲: اگر در مدل EOQ تعداد بهینه سفارش ۶ بار در سال باشد و هزینه سفارش هر دفعه ۳۰۰ باشد آن‌گاه هزینه کل هنگامی که در سال ۴ بار سفارش می‌دهیم، چه‌قدر است؟

۱) ۱۸۰۰ ۲) ۳۶۰۰ ۳) ۲۷۰۰ ۴) ۳۹۰۰

☑ **پاسخ: گزینه «۴»** ابتدا نسبت Q_W به Q_1 را به دست می‌آوریم باکمک آن نسبت هزینه‌های نگهداری در حالت بهینه و غیربهینه به دست می‌آید و در نهایت می‌توان هزینه کل را حساب کرد.

www.modaresanesharif.ac.ir

$$\frac{D}{Q_w}=۶ \Rightarrow \frac{D}{Q_w}A=\frac{hQ_w}{۲}=۶\times۳۰۰=۱۸۰۰$$

$$\frac{D}{Q_۱}=۴ \Rightarrow Q_۱=\frac{۳}{۲}Q_w \Rightarrow \frac{hQ_۱}{۲}=\frac{۳}{۲}\frac{hQ_w}{۲}=\frac{۳}{۲}\times۱۸۰۰=۲۷۰۰$$

$$\text{هزینه کل جدید}=\frac{hQ_۱}{۲}+\frac{D}{Q_۱}A=۲۷۰۰+۴\times۳۰۰=۳۹۰۰$$

مثال ۱۳: در مدل EOQ در صورتی که مقدار هزینه هر بار سفارش‌دهی ناچیز باشد آن‌گاه:

۱) مقدار سفارش برابر صفر خواهد بود.

۲) در لحظه رسیدن تقاضا اقدام به سفارش به همان مقدار می‌کنیم در نتیجه با کمبود روبه‌رو هستیم.

۳) در اندازه‌های بسیار بزرگ سفارش می‌دهیم.

۴) موجودی در دست همواره صفر است.

☑ **پاسخ: گزینه «۴»** هنگامی که $A=۰$ است چون سفارش‌دهی هزینه‌ای ندارد باید به نحوی اقدام به سفارش کنیم که موجودی در دست نداشته باشیم تا هزینه نگهداری متحمل نشویم و چون مدل EOQ است نباید با کمبود مواجه شویم پس کافی است L واحد زمانی قبل از رسیدن تقاضا اقدام به سفارش کنیم.

با توجه به توضیحات بالا، موجودی در دست همواره صفر است، سفارش را به اندازه تقاضای هر لحظه و L واحد زمانی قبل از آن لحظه می‌دهیم و هیچ‌گاه با کمبود روبه‌رو نمی‌شویم. پس گزینه ۴ صحیح است

مثال ۱۴: اگر در مدل سفارش اقتصادی تقاضای سالیانه ۱۰۰۰ واحد باشد و مقدار سفارش اقتصادی ۲۰۰ واحد و مدت زمان تحویل ۲ ماه باشد، آن‌گاه موجودی در دسترس ۱/۲ ماه قبل از نقطه سفارش چه‌قدر است؟ این مقدار برای موقعیت موجودی چه‌قدر است؟

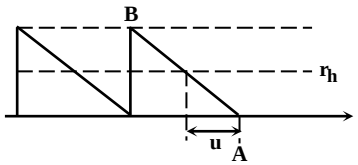
۱) ۷۰ و ۷۰ ۲) ۶۶ و ۲۶۶ ۳) ۶۶ و ۶۶ ۴) ۷۰ و ۲۷۰

☑ **پاسخ: گزینه «۲»** برای حل این‌گونه مسائل ابتدا بر اساس موجودی در دست مسأله را حل می‌کنیم و تمام زمان‌ها را بر مبنای نقطه‌ای که I در آن صفر است در نظر می‌گیریم.

نکته: فاصله زمانی بین لحظه سفارش تا نقطه رسیدن سفارش (نقطه A) برابر u است.

در گام اول زمان گفته شده در صورت مسأله را از مبدأ A محاسبه می‌کنیم (T_T)

در این مسأله $u=L$ (چون $T>L$) و $T_T=۱/۲+۲=۳/۲$



گام دوم: T را محاسبه می‌کنیم و اگر $T<T_T$ باشد، نقطه‌ی مورد نظر از B عبور نکرده محاسبه را با همان T_T ادامه می‌دهیم. اگر $T>T_T$ باشد، به دوره‌ی قبلی رفته‌ایم محاسبات را با باقی‌مانده T_T به T ادامه خواهیم داد:

$$T=\frac{۲۰۰}{۱۰۰۰}=\frac{۱}{۵}\times۱۲=۲/۴<۳/۲ \Rightarrow \text{۳/۲ به ۲/۴ باقی مانده تقسیم}=۰/۸ \text{ ماه}$$

گام سوم: شیب خط را در زمان به دست آمده از مرحله قبل ضرب می‌کنیم و موجودی در دست به دست می‌آید.

$$۰/۸\times\frac{۱}{۱۲}\times۱۰۰۰=\frac{۲}{۳}\times۱۰۰=۶۶/۶$$

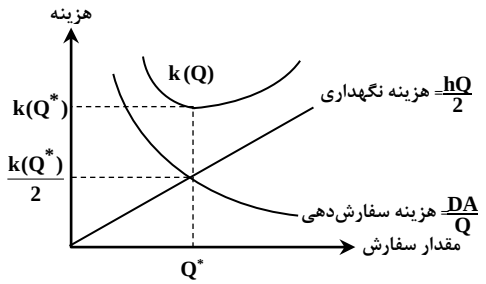
گام چهارم: برای محاسبه موقعیت موجودی باید مقدار m را محاسبه کرد و بنابر وضعیت لحظه مورد نظر نسبت به لحظه سفارش‌دهی، مقدار حاصل از گام ۳ را با mQ (نرسیده به لحظه سفارش) یا با $(m+۱)Q$ (بعد از لحظه سفارش) جمع کرد.

در این سؤال $m=۰$ چون ۰/۸ کوچک‌تر از $u=۲$ پس یک سفارش در راه داریم:

$$y_{(۰/۸)}=۲۰۰+۶۶/۶=۲۶۶/۶$$

www.modaresanesharif.ac.ir

بررسی هزینه سفارش‌دهی و نگهداری سالانه با افزایش مقدار سفارش



در نقطه بهینه هزینه سفارش‌دهی سالیانه و هزینه نگهداری سالیانه برابر می‌باشند.

$$\frac{DA}{Q^*} = \frac{hQ^*}{۲} = \frac{K(Q^*)}{۲}$$

نکته ۸: شیب منحنی هزینه‌ها در نقطه بهینه به ترتیب برای هزینه نگهداری و سفارش‌دهی سالانه برابر با $\frac{h}{۲}, -\frac{h}{۲}$ می‌باشد.

نکته ۹: در صورتی که به جای Q^* مقدار دیگری مثلاً Q سفارش داده شود آن‌گاه هزینه سیستم موجودی به جای $K(Q^*)$ به $K(Q)$ افزایش پیدا می‌نماید. رابطه $K(Q^*), K(Q)$ به ترتیب روبرو می‌باشد:

$$\frac{K(Q)}{K(Q^*)} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{Q}{Q^*} + \frac{Q^*}{Q}\right)$$

به گونه‌ای دیگر داریم:

$$\alpha = \frac{Q}{Q^*} \quad ; \quad \frac{K(Q)}{K(Q^*)} = \frac{۱+\alpha^۲}{۲\alpha}$$

رابطه بین هزینه سفارش‌دهی سالانه و هزینه نگهداری سالانه در صورتی که بیشتر یا کمتر از سفارش اقتصادی سفارش دهیم به صورت زیر است:

اگر $Q^* < Q$ ← هزینه نگهداری > هزینه سفارش‌دهی

اگر $Q^* > Q$ ← هزینه نگهداری < هزینه سفارش‌دهی

نکته ۱۰: در صورتی که یکی از پارامترهای مدل تغییر کند، آن‌گاه مقدار سفارش اقتصادی و هزینه بهینه متوسط سالانه تغییر می‌کند. نسبت تغییرات به صورت زیر است:

فرض	Q^*	$K(Q^*)$
افزایش A	افزایش	افزایش
افزایش D	افزایش	افزایش
افزایش h	کاهش	افزایش
افزایش i	کاهش	افزایش
افزایش C	کاهش	افزایش
افزایش W	کاهش	افزایش
افزایش L	تأثیری ندارد	تأثیری ندارد.

نکته ۱۱: همان‌طور که از شکل رسم شده برمی‌آید شیب منحنی هزینه کل در سمت راست، کمتر از سمت چپ نقطه بهینه است، در نتیجه اگر یک مقدار ثابت را به Q بهینه اضافه کنیم هزینه کمتری دارد تا از آن کم کنیم. $k(Q^* - \alpha) > k(Q^* + \alpha)$

نکته ۱۲: نقطه بهینه در این مدل دقیقاً محل برخورد دو منحنی هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی است که همان معنای برابری هزینه‌های نگهداری و سفارش‌دهی در نقطه بهینه را دارد.

نکته ۱۳: در مسائلی که در این فصل با آن‌ها سروکار داریم گاهی دیده می‌شود که گفته می‌شود در صورت تغییر یکی از پارامترهای مسأله آن‌گاه میزان تغییرات تابع هزینه چقدر است. برای این محاسبه ۲ رابطه داریم:

$$\frac{K_۱}{K_۲} = \frac{\sqrt{۲D_۱A_۱}h_۱}{\sqrt{۲D_۲A_۲h_۲}} \quad , \quad \frac{K_۱}{K^*} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{Q_۱}{Q^*} + \frac{Q^*}{Q_۲}\right)$$

رابطه (۱) رابطه (۲)

تفاوت این دو رابطه در این است که در رابطه اول هر دو هزینه در حالت بهینه مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

www.modaresanesharif.ac.ir

موجودی اطمینان (safety stock)

در هر دو سیستم به وسیله استفاده از موجودی اطمینان با تغییرات تصادفی تقاضا در مدت تحویل مقابله می‌شود. سیستم‌های موجودی متکی بر موجودی‌های اطمینان هستند. با استفاده از موجودی اطمینان سعی می‌شود که خطر کمبود کاهش یابد. هر چه ss بیشتر باشد، خطر کمبود و در نتیجه هزینه‌های کمبود کمتر خواهد بود. البته هر چه موجودی اطمینان بیشتر باشد، هزینه نگهداری آن هم زیادتر می‌شود. بنابراین سعی می‌شود موجودی اطمینان به طریقی تعیین شود که موازنه‌ای بین این دو هزینه برقرار گردد. مقدار بهینه موجودی اطمینان جمع این دو هزینه را حداقل می‌نماید.

سطح خدمت

از آن‌جا که تخمین مقدار هزینه‌های کمبود مشکل می‌باشد، معمولاً تعیین موجودی اطمینان بر اساس روش فوق عملی نمی‌باشد، برای رفع این مشکل مدیریت سیستم، یک سطح خدمت معقولی را برای خدمت به مشتری در نظر می‌گیرد و سپس موجودی اطمینان را طوری تعیین می‌کند که سطح خدمت مورد نظر تأمین شود. سطح خدمت مقداری بین صفر و یک دارد و احتمال مواجه شدن یک دوره با کمبود را بیان می‌نماید. مثلاً اگر سطح خدمت برابر ۸۰٪ باشد، احتمال این که یک دوره با کمبود روبرو نشود برابر ۸۰٪ می‌باشد و در واقع یعنی از هر ۵ دوره یک دوره با کمبود روبرو می‌شود و ۴ دوره دیگر (۸۰٪ دوره‌ها) با کمبود روبرو نمی‌شوند. در واقع سطح خدمت فقط احتمال عدم مواجه با کمبود است چه این کمبود ۱ واحد باشد و چه ۱۰۰۰ واحد باشد، پس به طور مثال وقتی $P = ۰/۸$ است نمی‌توان گفت ۸۰٪ تقاضا را ارضاء خواهیم کرد و یا نمی‌توان گفت ۲۰٪ تقاضا از دست می‌رود.

از آن‌جا که سطح خدمت یعنی احتمالی که سیستم با کمبود مواجه نشود، داریم:

$$P = P\{\text{عدم مواجهه با کمبود}\} = P(DL \le r)$$

یعنی احتمال کوچک‌تر بودن تقاضا در مدت تحویل از نقطه سفارش‌دهی اگر DL (تقاضا در مدت تحویل) دارای توزیع تجمعی $F(x)$ باشد آن‌گاه $P = F(r) = P(DL \le r)$.

سطح خطر یا ریسک: احتمال این که در یک دوره با کمبود روبه‌رو شویم آن را با $\overline{P}$ نشان می‌دهند.

$$\overline{P} = ۱ - P = P(DL > r) = \overline{F(r)}$$

سیستم سفارش‌دهی دو ظرفی

سیستم دو ظرفی شامل دو ظرف یا انبار است که ابتدا از انبار بزرگتر (ظرف اول) تقاضاها پاسخ داده می‌شوند و هنگامی که موجودی انبار بزرگ تمام شد به میزان ظرفیت انبار بزرگ (Q) سفارش صادر می‌شود و تا هنگام دریافت سفارش، از انبار کوچک‌تر (ظرف دوم) تقاضا پاسخ داده می‌شود. در هنگام دریافت سفارش ابتدا ظرفیت انبار کوچکتر تکمیل می‌گردد و سپس باقی‌مانده موجودی در انبار بزرگ‌تر ذخیره می‌شود.

این روش FOS است چون در هنگام رسیدن به سطح موجودی r (ظرفیت انبار کوچک) به مقدار Q (ظرفیت انبار دوم) سفارش صادر می‌شود.

نکات اصلی سیستم سفارش دو ظرفی

ـ حجم ظرف بزرگ همواره ثابت و برابر مقدار سفارش اقتصادی (Q_w) است.

ـ حجم ظرف کوچک‌تر برابر سطح r در مدل F. O. S می‌باشد. $(r = SS + \mu_{DL})$

ـ مدل دو ظرفی به نوعی یک مدل F. O. S است و مزیت آن این است که نیاز به چک کردن کل موجودی به صورت لحظه به لحظه نیست و تنها باید خالی یا پر بودن ظرف اول را چک کرد.

مدل احتمالی ساده با خط مشی FOS

فرضیات مدل مانند EOQ است با این تفاوت که تقاضا، احتمالی و ساکن است، کمبود، جایز است و خط‌مشی سفارش‌دهی FOS است. هدف مدل تعیین Q^*, r^* با حداقل کردن هزینه‌ها و برآورده نمودن سطح سرویس‌دهی مشخص شده می‌باشد.

مقدار Q را با استفاده از مدل EOQ ساده به دست می‌آوریم و برای به دست آوردن r بدین ترتیب عمل می‌کنیم:

ابتدا پارامترهای زیر را تعریف می‌نماییم:

D: متوسط تقاضا در واحد زمان و μ_{DL}: متوسط تقاضا در مدت زمان تحویل و SS_p: موجودی اطمینان با توجه به سطح خدمت P

در سیستم سفارش ثابت، هر گاه سطح موجودی به نقطهٔ سفارش r می‌رسد، سفارش ثابتی با اندازه Q واحد به منبع تهیه مواد داده می‌شود. اگر مقدار تقاضا در طی مدت تحویل بیشتر از مقدار r شود، کمبود رخ خواهد داد.

www.modaresanesharif.ac.ir

بنابراین اگر نقطه سفارش r، برابر متوسط مصرف در مدت تحویل باشد:

$r = \mu_{DL} = D.L$

یعنی هیچ‌گونه موجودی اطمینانی در نظر گرفته نشود، آن‌گاه در هنگام دریافت مواد سفارش داده شده، در ۵۰٪ مواقع، موجودی کمتر از صفر (کمبود) و ۵۰٪ اوقات موجودی بیشتر از صفر خواهد بود. بنابراین سطح خدمت در این شرایط ۵۰٪ می‌باشد. برای این که خطر کمبود موجودی کمتر شود (سطح خدمت بیشتر شود) بایستی مقدار موجودی اطمینان نگهداری شود. برای رسیدن به سطح خدمت $P \Rightarrow r = \mu_{DL} + SS_p$

$r = \mu_{DL} \Rightarrow P = ۵۰٪$

اهمیت توزیع تقاضا در زمان تحویل

در مسائل این بخش مهم‌ترین مبحث مطالب مربوط به توزیع تقاضا در مدت تحویل است. از این توزیع ما معمولاً دو استفاده عمده می‌کنیم.

۱ـ به دست آوردن مقدار r یا R با داشتن سطح خدمت و یا برعکس آن

در توزیع‌های پیوسته از رابطه $F(r) = P$ یا $\int_{-\infty}^{r} f(x)dx = P$ استفاده می‌کنیم.

در توزیع‌های گسسته از رابطه $F(r) \geq P$ که در صفحه بعد برای حالت مختلف توضیح داده می‌شود.

۲ـ به دست آوردن مقدار μ_{DL} ، σ_{DL}:

محاسبه μ_{DL} و σ_{DL} از این لحاظ از اهمیت بالایی برخوردارند که μ_{DL} همان‌طور که بیان شد در محاسبه سطح سفارش‌دهی r استفاده می‌شود و مقدار σ_{DL} هم همواره به نحوی (بسته به نوع توزیع DL) در محاسبه SS تأثیرگذار است. در زیر حالت‌هایی که ممکن است برای تقاضا در مدت تحویل رخ دهد و نحوه محاسبه μ_{DL} و σ_{DL} در هر کدام آورده می‌شود.

حالت ۱: توزیع تقاضا در مدت تحویل در دست است. این حالت ساده‌ترین حالت ممکن است و به راحتی می‌توان با کمک توزیع هم μ_{DL} و هم σ_{DL} را محاسبه کرد.

می‌دانیم که هم‌زمان تحویل و هم میزان تقاضای سالیانه متغیر تصادفی‌اند و این امکان را دارند که هر دو تغییر کنند. در نتیجه معمولاً توزیع DL در اختیار ما نیست. در حالت‌های ۲ و ۳ و ۴ که در زیر ذکر شده‌اند به نحوه محاسبه μ_{DL} و σ_{DL} در صورتی که μ_L (متوسط زمان تحویل) و σ_L (انحراف معیار زمان تحویل) و μ_D (متوسط تقاضا سالیانه) و σ_D (انحراف معیار تقاضا سالیانه) را داشته باشیم، خواهیم پرداخت.

حالت ۲: هم تقاضا و هم‌زمان تحویل احتمالی باشد آن‌گاه برای محاسبه میانگین و واریانس تقاضا در مدت تحویل از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$\mu_{DL} = E(L) \times E(D) = \mu_L \times \mu_D$

$\sigma_{DL} = \sqrt{\mu_L \sigma_D^2 + \mu_D^2 \sigma_L^2}$

حالت ۳: اگر تقاضا احتمالی باشد ولی مدت زمان تحویل قطعی داریم:

در این نوع مسائل توزیع تقاضای سالیانه را به نوعی به ما می‌دهند. $\mu_{DL} = L\mu_D$

ولی مدت زمان تحویل (L) یک مقدار ثابت است. $(\sigma_L = ۰ \ , \ \mu_L = L)$ $\sigma_{DL} = \sqrt{L\sigma_D^2} = \sigma_D \sqrt{L}$

حالت ۴: زمان تحویل احتمالی باشد ولی تقاضای سالیانه ثابت و قطعی باشد: $(\sigma_D = ۰ \ , \ \mu_D = D)$

$\mu_{DL} = \mu_L \times D$

$\sigma_{DL} = D\sigma_L$

نکته ۵: اگر توزیع احتمال در صورت سؤال به صورت گسسته و جدولی داده شود. بسته به این که مربوط به کدام ۴ حالت بالا است با روشی مقادیر جدول را به تقاضا در مدت تحویل تبدیل می‌کنیم.

از جدول توزیع گسسته (همانند توزیع پیوسته) به دو منظور یافتن r و μ_{DL} یا σ_{DL} استفاده می‌گردد.

برای یافتن μ کافی است هر مقدار را در احتمال متناظر با آن ضرب کنیم و از روابط موجود در هر حالت استفاده کنیم.

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال۵: اگر تقاضای سالیانه ثابت و برابر ۲۰۰۰ واحد باشد و مدت زمان تحویل از توزیع گسسته روبه‌رو پیروی کند میانگین تقاضا در مدت تحویل چه قدر است؟

مدت تحویل (ماه)	۳	۲	۵	۴
احتمال	۰/۲	۰/۱	۰/۴	۰/۳

۱) ۶۶۶/۶ ۲) ۱۰۰۰ ۳) ۳۳۳/۳ ۴) ۵۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» حالت ۴ رخ داده در نتیجه $\mu_{DL} = \mu_L \times D$ $\mu_L = ۳\times ۰/۲ + ۲\times ۰/۱ + ۵\times ۰/۴ + ۴\times ۰/۳$

$$\Rightarrow \mu_L = ۴ \rightarrow \mu_{DL} = \frac{۴}{۱۲}\times ۲۰۰۰ = ۶۶۶/۶$$

اما برای یافتن r با داشتن سطح خدمت لازم است جدول توزیع گسسته موجود را اگر در حالات ۲، ۳ و ۴ است به حالت ۱ تبدیل کنیم (یعنی جدول را به تقاضا در مدت تحویل تبدیل کنیم)، و سپس اعداد جدول را بر این اساس (DL) به صورت صعودی مرتب کنیم و با کمک احتمال تجمعی $(F(r) \geq P)$ مقدار r را به دست آوریم.

مثال۶: اگر مدت زمان تحویل ثابت و برابر ۳ ماه باشد و تقاضا از توزیع گسسته زیر پیروی کند به شرط آن که سطح خدمت ۸۵٪ باشد مقدار r کدام است؟

تقاضای سالیانه	۲۴۰۰	۱۶۰۰	۲۰۰۰
احتمال	۰/۵۵	۰/۳	۰/۱۵

$\mathbf{L = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}}$ سال

۱) ۴۰۰ ۲) ۸۰۰ ۳) ۲۰۰۰ ۴) ۱۶۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

DL	۴۰۰	۵۰۰	۸۰۰
P	۰/۳	۰/۱۵	۰/۵۵
$F_{(DL)}$	۰/۳	۰/۴۵	۱

صعودی ⟶

DL	۸۰۰	۴۰۰	۵۰۰
P	۰/۵۵	۰/۳	۰/۱۵

چون $F(۸۰۰) > ۰/۸۵$ است و $F(۵۰۰) < ۰/۸۵$ می‌توان گفت $r = ۸۰۰$.

نکته ۶: گاهی ممکن است در صورت سؤال برای بیان r از سطح خدمت استفاده نشود و به جای آن از عبارات زیر استفاده گردد که تک‌تک مورد بررسی قرار می‌گیرند.

- نقطه سفارش بر اساس حداکثر فاصله زمانی تحویل باشد: $r = \mu_D \times L_{max}$
- نقطه سفارش براساس حداکثر مصرف سالیانه: $r = D_{max} \times \mu_L$
- نقطه سفارش براساس حداکثر مصرف در مدت تحویل: $r = \max\ \{D_i \times L_i\}$

نکته۷: محاسبه هزینه در حالت احتمالی:

در مدل FOS:

$$K = h \times \bar{I} + \frac{D}{Q^*}A + \hat{\pi}\bar{b} + \pi B$$

که می‌دانیم:

$$\bar{I} = \frac{I_{max}}{۲} + SS \qquad \bar{b} = \int_r^{+\infty}(X - r)\ f(X)dx = \sum_{X>r}(x - r)\ P(X)$$

$$B = \frac{D}{Q}\bar{b}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

نکته ۸: تغییرات هزینه سفارش‌دهی A و هزینه نگهداری h بر روی مقدار سفارش و هزینه‌ها و تعداد کمبود در سال (B) مؤثر است و بر روی نقطه سفارش‌دهی r و میزان SS و متوسط کمبود در دوره $\overline{b}$ مؤثر نیست.

نکته ۹: در هنگامی که $Q^* = Q_w$ است داریم:

(کل هزینه سفارش‌دهی) = $h(ss)$ − (کل هزینه نگهداری)

نکته ۱۰: در حل مسائل باید توجه کرد که اگر مقادیر σ , μ مصرف در مدت تحویل دارای واحدهای متفاوت بودند حتماً آن‌ها را اول به یک واحد مشترک برسانیم و بعد در روابط استفاده کنیم (معمولاً ساده‌تر است همهٔ واحدهای زمانی مسأله مانند L و T برحسب واحد زمانی σ شوند).

نکته ۱۱: پارامترهای زیادی بر روی سطح خدمت تأثیر می‌گذارند. همچون هزینه‌های کمبود، قیمت کالا، هزینه نگهداری و ...

برای محاسبه سطح خدمت در صورتی که مدیر سیستم موجودی، فاصله بین کمبودها و یا تعداد دوره‌هایی که می‌خواهیم در سال با کمبود مواجه شوند را مشخص نموده باشد از روابط زیر استفاده می‌نماییم: متوسط تعداد کمبود در سال : N_b

متوسط فاصله زمان بین دو دوره کمبود : $\overline{T}_b$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{Q \times N_b}{D} \\ \alpha = \dfrac{Q}{D.T_b} \end{cases} \Rightarrow ۱ - \alpha = \text{سطح خدمت‌دهی}$$

$$N_b = \frac{D}{Q}\alpha = \frac{D}{Q}\overline{F}_X(r)$$

$$T_b = \frac{Q}{D\alpha} = \frac{Q}{D\overline{F}_X(r)}$$

نکته ۱۲: می‌دانیم α احتمال مواجه شدن یک دوره با کمبود است می‌توان برای هر دوره یک متغیر نشان‌گر به صورت:

$$X_i = \begin{cases} ۱ \quad , \quad \alpha & \text{مواجه با کمبود} \\ ۰ \quad , \quad ۱-\alpha & \text{عدم مواجه با کمبود} \end{cases}$$

که از توزیع برنولی با پارامتر α پیروی می‌کند.

حال می‌دانیم N_b تعداد دوره‌هایی در سال است که با کمبود مواجه شده‌اند و به بیان دیگر:

$$N_b = \sum_{i=۱}^{N} X_i$$

پس می‌توان گفت که N_b از توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای (α, N) پیروی می‌کند و باز می‌دانیم که میانگین توزیع دو جمله‌ای np است که:

$$E(N_b) = N\alpha = \frac{D}{Q}\alpha = \frac{D}{Q}P(D_L > r)$$

الگوریتم حل مدل احتمالی FOS:

۱ـ مقدار Q^* را از رابطه $Q^* = \sqrt{\frac{۲DA}{h}}$ به دست می‌آوریم. $Q^* = Q_w$

۲ـ مقدار سطح خدمت $(۱-\alpha)$ را با استفاده از روابط ذکر شده به دست می‌آوریم یا به ما می‌دهند.

۳ـ مقدار نقطه سفارش r از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

اگر تقاضا پیوسته باشد مقدار کالایی که در مدت زمان تحویل (L)، احتمال تجمعی تقاضای آن مقدار، برابر سطح سرویس‌دهی $(۱-\alpha)$ شود r (مقدار نقطه سفارش) می‌باشد. یعنی: $F_{D_L}(r) = ۱ - \alpha$

اگر تقاضا گسسته باشد کوچکترین مقداری از موجودی (r) که رابطه زیر را برقرار نماید نقطه سفارش می‌باشد. $F_{D_L}(r) \geq ۱ - \alpha$

۴ـ مقدار ذخیره اطمینان از رابطه زیر به دست می‌آید: $r = \overline{D}_L + SS \Rightarrow SS = r - \overline{D}_L$

www.modaresanesharif.ac.ir

۵ـ متوسط تعداد کمبود در دوره $(\bar{b}(r))$، متوسط تعداد کمبود در سال $(B(r))$ و درصد مشتریانی که با کمبود مواجه می‌شوند از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

در حالت پیوسته: $\bar{b}(r)=\int_{r}^{\infty}(x-r)f_{D_L}(x)dx$

در حالت گسسته: $\bar{b}(r)=\sum_{x=r}^{\infty}(x-r)p_r\{D_L=x\}$

$$B(r)=\frac{D}{Q}\bar{b}(r)$$

درصد مشتریانی که با کمبود مواجه می‌شوند $=\frac{B(r)}{D}=\frac{\bar{b}(r)}{Q}$

۶ـ متوسط موجودی نگهداری شده از رابطه روبرو به دست می‌آید: $\bar{I}=\frac{I_{max}}{۲}+SS$

مثال ۷: مصرف سالیانه کالایی ۲۵۰۰ واحد و هزینه سفارش‌دهی آن ۱۵۰ تومان و هزینه نگهداری ۱۰ درصد قیمت کالا است. اگر قیمت خرید هر واحد کالا برابر ۱۰۰ تومان و مصرف این کالا نرخ ثابت داشته و مدت تحویل متغیری تصادفی باشد، به طوری که مصرف در طول مدت تحویل به صورت جدول زیر باشد و سطح سرویس دهی ۹۵٪ باشد، موارد زیر را تعیین نمایید.

ـ میزان سفارش اقتصادی　ـ نقطه سفارش مجدد　ـ موجودی اطمینان

ـ متوسط کمبود در دوره و سال　ـ متوسط تعداد دوره‌های مواجه شده با کمبود در سال　ـ متوسط هزینه نگهداری موجودی

D_{LT}	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰	۱۱۰	۱۲۰	۱۳۰	۱۴۰
$P(D=D_L)$	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۱	۰/۱۵	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۰۵
$F_{D_{LT}}=(r)$	۰/۱	۰/۲۵	۰/۵۰	۰/۶۰	۰/۷۵	۰/۸۵	۰/۹۰	۰/۹۵	۱/۰۰

پاسخ:

میزان سفارش اقتصادی: $Q^*=\sqrt{\frac{۲DA}{iC}}=\sqrt{\frac{۲\times۲۵۰۰\times۱۵۰}{۰/۱\times۱۰۰}}=۲۷۳/۸۶$

سطح سرویس ۹۵٪ می‌باشد پس داریم: نقطه سفارش مجدد $F_{D_{LT}}(r)\geq۰/۹۵\Rightarrow r=۱۳۰$

$SS=r-\bar{D}_L$

$$\bar{D}_{LT}=\sum_{x=۶۰}^{۱۴۰}x\times p\{D=x\}$$

$$=۶۰\times۰/۱+۷۰\times۰/۱۵+۸۰\times۰/۲۵+۹۰\times۰/۱+۱۰۰\times۰/۱۵+۱۱۰\times۰/۱+۱۲۰\times۰/۰۵+۱۳۰\times۰/۰۵+۱۴۰\times۰/۰۵=۹۱$$

میزان موجودی اطمینان: $SS=۱۳۰-۹۱=۳۹$

متوسط کمبود در دوره: $\bar{b}(r)=\sum_{x=۱۴۰}^{۱۴۰}(x-r)P\{D=x\}=(۱۴۰-۱۳۰)\times۰/۰۵=۰/۵$

متوسط کمبود در سال $\bar{B}(r)=\frac{D}{Q}\bar{b}(r)=\frac{۲۵۰۰}{۲۷۳/۸۶}\times۰/۵=۴/۵$

متوسط تعداد دوره مواجه شده با کمبود در سال $N_b=\frac{D}{Q}\alpha=\frac{۲۵۰۰}{۲۷۳/۸۶}\times(۱-۰/۹۵)=۰/۴۵$

$T_b=\frac{۱}{N_b}=۲/۲$ سال　;　$\bar{I}=\frac{Q}{۲}+SS=\frac{۲۷۳/۸۶}{۲}+۳۹=۱۷۵/۹۳$

متوسط هزینه نگهداری $=h\times\bar{I}=۰/۱\times۱۰۰\times۱۷۵/۹۳=۱۷۵۹/۳$

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۸: توزیع تقاضای محصولی در طی مدت تحویل ان در جدول زیر داده شده است:

X	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
F(x)	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۲	۰/۲	۰/۲	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۰۵

روش سفارش‌دهی این محصول روش مقدار سفارش ثابت بوده و مقدار هر بار سفارش برابر ۲۰ تن است. متوسط تقاضای سالیانه این محصول ۴۰۰ تن است. موجودی اطمینان این محصول برابر ۳ تن انتخاب شده است. احتمال وجود کمبود در هر دوره سفارش چقدر است؟

۱) ۵ درصد ۲) ۱۰ درصد ۳) ۱۵ درصد ۴) ۲۰ درصد

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» باید مقدار r را محاسبه کنیم و با مقایسه با جدول تقاضا سطح خدمت را به دست آوریم: $\mu_{LT} = \sum xf(x) = ۱۱$

$r = \mu_{LT} + ss = ۱۱ + ۳ = ۱۴ \quad ; \quad P(D_L > ۱۴) = ۱۰\%$

مثال ۹: با توجه به اطلاعات سؤال فوق متوسط مقدار کمبود در هر دور سفارش برابر است با:

۱) ۰/۳ تن ۲) ۰/۲۵ تن ۳) ۰/۱۵ تن ۴) ۰/۰۵ تن

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای مقادیر بزرگتر از r تقاضا، تفاضل آنها را از r در احتمال تقاضا ضرب می‌کنیم.

$$\bar{b}(r) = \sum_{x \geq r} (x - r) f(x) = (۱۵ - ۱۴) \times ۰/۰۵ + (۱۶ - ۱۴) \times ۰/۰۵ = ۰/۱۵$$

الف: با توجه به اطلاعات سؤال فوق متوسط موجودی در دست برابر است با:

۱) ۲۳ تن ۲) ۱۳ تن ۳) ۱۱/۵ تن ۴) ۲۱/۵ تن

☑ **پاسخ: گزینه «۲»** متوسط موجودی انبار $= \frac{Q^*}{۲} + ss = \frac{۲۰}{۲} + ۳ = ۱۳$

ب: با توجه به اطلاعات سؤال فوق مقدار کمبود در سال برابر است با:

۱) ۱ واحد ۲) ۳ واحد ۳) ۵ واحد ۴) ۶ واحد

☑ **پاسخ: گزینه «۲»** تعداد دوره‌ها در سال $= \frac{D}{Q} = \frac{۴۰۰}{۲۰} = ۲۰$

مقدار کمبود در سال $= ۲۰ \times$ متوسط مقدار کمبود در هر دوره $= ۲۰ \times ۰/۱۵ = ۳$

ج: در سؤال فوق، مقدار بهینه نقطهٔ صدور سفارش چقدر است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

☑ **پاسخ: گزینه «۲»** در مثال ۸ نیاز به محاسبه r داشتیم. $r = \mu_{LT} + ss = ۱۱ + ۳ = ۱۴$

بررسی انواع توزیع‌های تقاضا در مدت تحویل

در مسائل متداول این بخش برای تقاضا در مدت تحویل از چند مدل توزیع خاص استفاده می‌شود که هرکدام را به‌صورت جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱ـ توزیع تقاضا در مدت تحویل نرمال باشد.

$$DL \sim N(\mu_{DL}, \sigma_{DL})$$

سطح سفارش‌دهی مثل همیشه با داشتن سطح خدمت P به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F(r) = P(DL < r) = P \Rightarrow P\left(\frac{DL - \mu_{DL}}{\sigma_{DL}} < \frac{r - \mu_{DL}}{\sigma_{DL}}\right) = P$$

$$\Rightarrow \frac{r - \mu_{DL}}{\sigma_{DL}} = P \Rightarrow r = \mu_{DL} + Z_P \sigma_{DL}$$

و اگر حالت تصادفی بودن هم مدت تحویل و هم تقاضا را درنظر بگیریم:

$$r = \bar{D}\mu_L + Z_P \sqrt{\bar{D}\sigma_L^۲ + \mu_L \sigma_D^۲}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

و در نتیجه هنگامی‌که توزیع تقاضا در مدت تحویل نرمال باشد: $SS = Z_P\sigma_{DL}$

مقدار $\overline{b}$ را با کمک انتگرال‌گیری باید به‌دست آوریم که در این حالت به‌صورت زیر می‌شود:

$$\overline{b} = \int_r^{+\infty} (X-r) f(x)dx = \int_r^{+\infty} (X-r)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

که باید تغییر متغیر به‌صورت $y = \frac{X-\mu_{Dl}}{\sigma_{DL}}$ تابع نرمال استاندارد می‌شود و انتگرال‌گیری ساده‌تر خواهد شد.

$$\overline{b} = \int_{Z_P}^{+\infty} (y - Z_P)\frac{\sigma_{DL}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = G_y(Z_P)\sigma_{DL}$$

که به $G_u(K)$ تابع ضرر نرمال می‌گویند و به ازای مقادیر مختلف Z_P جدولی برای $G_u(Z_P)$ تهیه شده است.

تذکر۱: پس به آسانی می‌توان دریافت که مقدار $\overline{b}$ نه تنها به تابع ضرر نرمال بستگی دارد بلکه به σ_{DL} نیز وابسته است.

مثال ۱۰: تقاضا برای محصولی ۱۲۰۰۰ واحد در سال است و مدت تحویل برابر ۶ ماه می‌باشد. اگر تقاضا در طی ۲ ماه دارای توزیع نرمال با میانگین ۲۰۰۰ و انحراف معیار ۴۰۰ باشد، آن‌گاه در صورتی که سطح خدمت ۰/۹ باشد، نقطه سفارش‌دهی چقدر است؟

پاسخ:

$$r = \mu_{DL} + Z_{0/9}\sigma_{DL}$$

ابتدا چون توزیع تقاضا در مدت ۲ ماه به ما داده شده است آن را به توزیع تقاضا در یک ماه تبدیل می‌کنیم با فرض مستقل بودن تقاضای هر ماه از یکدیگر داریم:

برای میانگین کافی است عدد μ_{D_2} را بر ۲ تقسیم کنیم. $\mu_{D_1} = \frac{2000}{2} = 1000$

ولی می‌دانیم در جمع دو توزیع نرمال، واریانس‌ها با هم جمع می‌شوند نه انحراف معیارها.

$$\sigma^2_{D_2} = 2\sigma^2_{D_1}$$

$$\sigma^2_{D_2} = 400\times 400 = 160000 \rightarrow \sigma^2_{D_1} = 80000 \rightarrow \sigma_{D_1} = 200\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{DL} = \sigma_D\sqrt{L} = 200\sqrt{2}\times\sqrt{6} = 400\sqrt{3}\\ \mu_{DL} = 1000\times 6 = 6000\\ Z_{0/9} = 1/28\end{array}\right\} \Rightarrow r = 6000 + 1/28\times 400\sqrt{3} = 6887$$

۲ـ توزیع تقاضا در مدت تحویل از توزیع نمایی پیروی کند.

$$DL \sim \exp(\lambda) \rightarrow f_{DL}(\alpha) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$\mu_{DL} = \frac{1}{\lambda} \qquad \sigma_{DL} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$F_{DL}(r) = P(DL < r) = \int_0^r \lambda e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda r} = P$$

$$\Rightarrow r = \frac{-Ln(1-P)}{\lambda} \Rightarrow SS = r - \mu_{DL} = -\mu_{DL}(1 + Ln(1-P))$$

تذکر۲: به هیچ‌وجه نیاز به حفظ کردن روابط بالا نیست بلکه باید بتوان با کمک مطالب درس احتمال به این روابط رسید.

متوسط کمبود هر دوره از رابطه زیر به‌دست می‌آید که در صورت لزوم باید با کمک انتگرال جزء به جزء حساب شود.

$$\overline{b} = \int_r^{+\infty} (x-r)\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda r}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

مثال ۱۱ : در صورتی که توزیع تقاضا در ماه از توزیع نمایی با میانگین ۱۰۰ پیروی کند و زمان تحویل ۳ ماه باشد و اگر مقدار سفارش در هر بار سفارش‌دهی ثابت و برابر ۵۰۰ باشد، آن‌گاه در سطح خدمت ۰/۸ حداکثر موجودی در دست را به‌دست آورید؟

☑ **پاسخ:**

اگر میانگین مصرف در هر ماه ۱۰۰ باشد و $L=3$ باشد:

$$\mu_{Dl}=100\times 3=300\rightarrow \lambda=\frac{1}{300}$$

$$F(r)=P\Rightarrow \int_{0}^{r}\frac{1}{300}e^{-\frac{x}{300}}dx=0/8\Rightarrow e^{-\frac{r}{300}}=0/2\Rightarrow r=-300Ln(0/2)$$

$$\Rightarrow r=300Ln(5)=483$$

اما حداکثر موجودی در دست زمانی رخ می‌هد که در مدت L هیچ تقاضایی به دست ما نرسد و Q واحد سفارش در راه به سطح سفارش‌دهی r اضافه شود.

حداکثر موجودی در دست در $F.O.S = r+Q=483+500=983$

۳ـ توزیع تقاضا زمان تحویل از توزیع یکنواخت پیروی کند.

$$DL\sim u(a,b)$$

$$\mu_{Dl}=\frac{a+b}{2}\quad,\quad \sigma_{DL}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

$$F(r)=\int_{a}^{r}\frac{1}{b-a}dx=\frac{r-a}{b-a}=P\Rightarrow r=a+P(b-a)$$

مثال ۱۲: انباری برای یک محصول خود از سیستم F.O.S استفاده می‌کند، مسئول سفارش دریافته است توزیع تقاضا در طول ماه یک توزیع یکنواخت بین [۲۰۰,۴۰۰] است. در صورتی که مدت تحویل ۲ ماه باشد و سطح خدمت ۰/۹ باشد، آن‌گاه ذخیره اطمینان چقدر است؟

☑ **پاسخ:** با کمک توزیع تجمعی تقاضا مقدار نقطه سفارش‌دهی را مشخص می‌کنیم و با کسر میانگین تقاضا در مدت تحویل از آن مقدار SS را به دست می‌آوریم.

توزیع تقاضا در ۱ ماه $\sim U(200,400)\rightarrow$ توزیع تقاضا در مدت تحویل $\sim U(400,800)$

$$F(r)=0/9\Rightarrow \int_{400}^{r}\frac{1}{400}dx=\frac{9}{10}\Rightarrow \frac{r-400}{400}=0/9\Rightarrow r=400+360=760$$

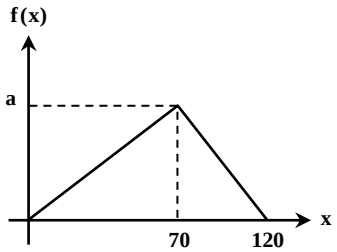
$$SS=r-\mu_{DL}=760-600=160$$

۴ـ توزیع تقاضا در مدت تحویل به‌صورت نموداری داده شود.

در این روش به‌جای آن که توزیع مشخصی به ما بدهند، نمودار $f(x)$ یا احتمال تجمعی $F(x)$ را می‌دهند و با کمک آن باید بتوان مقدار r و مقدار μ_{DL} را به‌دست آورد.

اگر نمودار $f(x)$ در دست باشد بهترین کار این است که در صورت امکان $f(x)$ را فرمول‌بندی کرد که هم بتوان μ_{DL} و هم r را با داشتن سطح خدمت، به آسانی به‌دست آورد ولی اگر این امکان وجود نداشت با کمک مساحت زیر $f(x)$ می‌توان مقدار r را محاسبه کرد.

مثال ۱۳: اگر تابع چگالی احتمال تقاضا در مدت تحویل به‌صورت نمودار روبرو باشد، در سطح خدمت ۰/۸ نقطه سفارش مجدد چه مقدار است؟



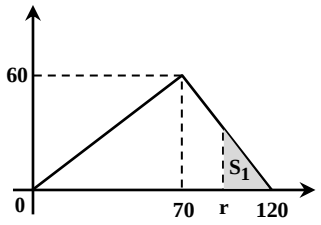
☑ **پاسخ:**

$$\int_{0}^{120}f(x)dx=1\Rightarrow \frac{120\times a}{2}=1\Rightarrow a=\frac{1}{60}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

مساحت زیر $f(x)$ تا نقطه ۷۰ برابر $\frac{۳۵}{۶۰}$ است که از ۰/۸ کوچک‌تر است پس نقطه r باید عددی بین ۷۰ و ۱۲۰ باشد.

مساحت $S_۱$ باید برابر $۱-P=۰/۲$



قضیه: $\frac{\text{مساحت مثلث کوچک}}{\text{مساحت مثلث بزرگ}}=(\frac{\text{قسمت بالای ضلع}}{\text{کل ضلع}})^۲$

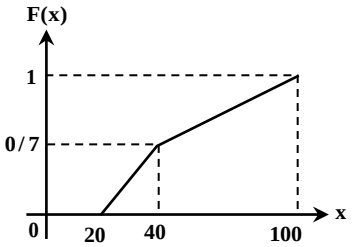
$$\frac{۰/۲}{۵۰\times\frac{۱}{۶۰}\times\frac{۱}{۲}}=\frac{(۱۲۰-r)^۲}{(۵۰)^۲}\Rightarrow (۱۲۰-r)^۲\Rightarrow r=۱۲۰-۲۰\sqrt{۳}=۸۵/۳$$

هنگامی‌که تابع احتمال تجمعی $F(x)$ در دست باشد، بهترین روش برای به‌دست آوردن مقدار r با کمک سطح خدمت استفاده از خود نمودار و کمک گرفتن از قضایای هندسی است ولی برای به‌دست آوردن μ_{DL} همان‌طور که از درس احتمال می‌دانیم رابطه زیر برقرار است:

$$E(X)=\int_{۰}^{+\infty} ۱-F(x)$$

که به راحتی می‌توان با کمک این رابطه و مساحت زیر نمودار $F(x)$ مقدار μ_{DL} را به‌دست آورد.

مثال ۱۴: تابع توزیع تجمعی احتمال تقاضا در مدت تحویل مانند شکل زیر است، مقدار ذخیره ایمنی را به‌گونه‌ای به‌دست آورید که احتمال کمبود ۰/۲ باشد؟



پاسخ:

برای محاسبه r باید با توجه به نمودار، نقطه‌ای از محور افقی را بیابیم که محور عمودی آن برابر ۰/۸ باشد. می‌دانیم این نقطه بین ۴۰ تا ۱۰۰ است. در نتیجه کافی است با کمک شیب خط قسمت دوم r را به‌صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\text{شیب خط دوم}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۱-x_۲}=\frac{۰/۳}{۶۰}=\frac{۱}{۲۰۰}$$

$$r=۴۰+۲۰۰\times۰/۱=۶۰$$

برای محاسبه μ_{DL} هم باید از رابطه $e(X)=\int_{۲۰}^{۱۰۰} ۱-f(X)$ استفاده کنیم.

$$M_{dl}=۸-(\text{مساحت زیر } f(X))=۸۰-[(\frac{۲۰\times۰/۷}{۲})+\frac{(۱+۰/۷)۶۰}{۲}]$$

$$=۸۰-۵۸=۲۲$$

$$SS=r-\mu_{DL}=۶۰-۲۲=۳۸$$

مدل احتمال با خط‌مشی FOI

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که تقاضا احتمالی و ساکن است، کمبود جایز است و خط‌مشی سفارش‌دهی FOI می‌باشد. هدف مدل نیز تعیین سقف موجودی بهینه R^* و فاصله زمانی بین دو سفارش متوالی T^* با توجه به حداقل نمودن هزینه‌ها می‌باشد.

روش حل مدل:

۱ـ مقدار T^* را با استفاده از رابطه مقابل محاسبه می‌نماییم: $T^*=\sqrt{\frac{۲A}{Dh}}$

www.modaresanesharif.ac.ir

۲ـ سطح خدمت را از رابطه مقابل محاسبه می‌نماییم. $\alpha = \frac{N_b}{\frac{۱}{T^*}} = T^* N_b$

۳ـ مقدار حداکثر موجودی بهینه R^* را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که رابطه زیر را برقرار نماید.

در حالت گسسته: $F_{D_{L+T}}(R) \geq ۱-\alpha$ و در تقاضای پیوسته $F_{D_{L+T}}(R) = ۱-\alpha$

۴ـ مقدار موجودی اطمینان (SS) از رابطه مقابل محاسبه می‌شود: $R = \bar{D}_{L+T} + SS \rightarrow SS = R - \bar{D}_{L+T}$

تقاضای نرمال

در حالتی که تقاضا نرمال باشد مقادیر SS, R از روابط روبرو محاسبه می‌شوند: $SS_{FOI} = Z_{۱-\alpha}\sigma_{D_{L+T}}$; $R^* = \bar{D}_{L+T} + SS$

$\bar{D}_{L+T} = \bar{D} \times \mu_{L+T}$

$\sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{\mu_D^۲ \times \sigma_L^۲ + \mu_{L+T}\sigma_D^۲}$, $R = \bar{D} \times \mu_{L+T} + Z_{۱-\alpha}\sqrt{\mu_D^۲ \times \sigma_L^۲ + \mu_{(L+T)}\sigma_D^۲}$

نکته ۱۳: متوسط موجودی در دست در مدل FOI $\bar{I} = SS + \frac{DT}{۲}$

متوسط موقعیت موجودی (موجودی در دست + موجودی در راه) در مدل FOI $\bar{y} = SS + \frac{D(L+T)}{۲}$

تذکر۳: می‌دانیم که مقدار T در F.O.T ثابت است، پس با توجه به اطلاعات آماری خود می‌توانید بگویید: $\sigma_{L+T} = \sigma_L$

تذکر۴: $\bar{D} = \mu_D$

مثال ۱۵: محصولی هر سه ماه یک بار سفارش داده می‌شود. مدت تحویل محصول دو ماه است. اگر تقاضای سالیانه این محصول ۱۸۴/۸ و توزیع تقاضا در طی مدت تحویل و دوره طبق جدول زیر باشد و سطح سرویس ۹۰٪ باشد آن‌گاه:

ـ حداکثر موقعیت موجودی R^* ـ متوسط کمبود در هر دوره ـ احتمال کمبود ـ مقدار موجودی اطمینان

P	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰
$P(D_{LT+T})$	۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۲	۰/۱
$F_{D_{LT+T}}(D)$	۰/۱	۰/۲	۰/۴	۰/۷	۰/۹	۱/۰۰

پاسخ:

حداکثر موقعیت موجودی: $P(D_{LT+T} \leq R) \geq ۰/۹۰ \Rightarrow r = ۹۰$

متوسط کمبود در هر دوره: $\bar{b}(r) = \sum_{x \geq r}(x-r)p(D=x) = (۱۰۰-۹۰) \times ۰/۱ = ۱$

احتمال کمبود $= ۱-$ سطح سرویس $= ۱-۰/۹ = ۰/۱$; $SS = r - \bar{D}_{L+T}$

$\bar{D}_{L+T} = \sum x P_{D_{L+T}}(D=x) = ۵۰ \times ۰/۱ + ۶۰ \times ۰/۱ + ۷۰ \times ۰/۲ + ۸۰ \times ۰/۳ + ۹۰ \times ۰/۲ + ۱۰۰ \times ۰/۱ = ۷۷$

میزان موجودی اطمینان: $SS = ۹۰ - ۷۷ = ۱۳$

حال که با روابط مدل F.O.I آشنا شدید می‌توانید حدس بزنید که این روش مانند FOS است و تنها کافی است در روابط FOS به جای L مقدار $L+T$ قرار دهیم و از آن‌جا که مقدار Q مشخص و ثابت نیست به‌جای آن در روابط D.T قرار می‌دهیم (مثلاً $\frac{D}{Q}$ به $\frac{۱}{T}$ تبدیل می‌شود).

مقایسه بین مدل FOS و FOI

ـ وقتی سطح سرویس در دو سیستم یکی باشد مقدار ذخیره اطمینان در سیستم FOI بیشتر از سیستم FOS است. به این علت که در سیستمFOI کمتر بر روی موجودی نظارت داریم و این کمبود نظارت باید با میزان موجودی اطمینان بیشتری جبران شود تا سطح سرویس دو سیستم یکسان شود.

به بیان دیگر چون در سیستم FOI نظارت کمتر از FOS است احتمال مواجه با کمبود بیشتر است و برای حفظ سطح خدمت در یک حد ثابت به ناچار

www.modaresanesharif.ac.ir

باید SS را نسبت به FOS بیشتر کنیم.

ـ اگر محصولی نیاز به کنترل دقیق داشته باشد (کمبود آن باعث هزینه بسیار گردد) از سیستم FOS برای نگهداری آن استفاده می‌شود.

ـ در مدل‌های چند محصولی که می‌خواهیم چند محصول را با هم سفارش دهیم سیستم FOS کارایی ندارد و با انتخاب Tهای مساوی می‌توان از سیستم FOI استفاده نمود.

ـ هزینه نگهداری در سیستم FOI به علت بیشتر بودن SS بیشتر از هزینه نگهداری سیستم FOS است.

ـ هزینه سفارش‌دهی مدل FOS بیشتر از مدل FOI است چون هزینه مرور سطح موجودی که در سیستم FOS به صورت دائم انجام می‌شود جزء هزینه‌های سفارش‌دهی محسوب می‌شود.

تذکر۵: هرچه عدم اطمینان از میزان تقاضا در مدت تحویل بیش‌تر شود، میزان SS نیز بیشتر می‌شود. این عدم اطمینان می‌تواند ناشی از عدم بررسی برای موجودی در زمان زیادتر یا افزایش مستقیم مقدار σ_{DL} باشد.

جدول مقایسه دو خط مشی F.O.S و F.O.I

در صورت برابر بودن سطح خدمت در هر دو خط مشی، یعنی یکسان بودن احتمال مواجه با کسری هر دوره می‌توان این دو را به‌صورت زیر مقایسه کرد.

	F.O.S		F.O.I
حداکثر موقعیت موجودی	$r+Q$	؟	R
حداقل موقعیت موجودی	r	؟	نامعلوم
متوسط موجودی در دست در لحظه دریافت (موجودی اطمینان)	SS_{FOS}	$>$	SS_{FOI}
متوسط موجودی در دست	$\frac{Q}{۲}+SS_{FOS}$	$>$	$\frac{DT}{۲}+SS_{FOI}$
متوسط کمبود یک دوره	$\bar{b}(r)$	$>$	$\bar{b}(R)$
متوسط کمبود سالیانه	$\bar{B}(r)=\frac{D}{Q}\bar{b}(r)$	$>$	$\bar{B}(R)=\frac{۱}{T}\bar{b}(r)$
هزینه سفارش‌دهی	$\frac{D}{Q}A_{FOS}$	$<$	$\frac{۱}{T}A_{FOI}$
هزینه نگهداری	$h(\frac{Q}{۲}+SS)$	$>$	$h(\frac{DT}{۲}+SS)$
واریانس تقاضا در مدت تحویل (در صورت برابر بودن همهٔ پارامترها)	$\sigma^{۲}_{DL}$	$>$	$\sigma^{۲}_{D(L+T)}$

توزیع‌های تجربی

حالت پس افت

در اینجا مجموع هزینه‌های موجودی اطمینان باید حداقل گردد، در نتیجه باید هزینه‌های نگهداری موجودی اطمینان و هزینه کمبود در حالت بهینه با یکدیگر برابر شوند:

$$TC_{SS} = \text{کل هزینه موجودی اطمینان} = \text{هزینه نگهداری ss} + \text{هزینه کمبود} = h\times ss+\pi\times\frac{D}{Q}E(x>r)$$

$$\frac{\partial TC_{ss}}{\partial r}=۰ \Rightarrow p(x>r)=\frac{hQ}{\pi D} \Rightarrow p(x<r)\geq ۱-\frac{hQ}{\pi D}$$

کوچک‌ترین r که در این رابطه صدق نماید جواب مسأله است.

$$\text{سطح سرویس دهی} = ۱-\frac{hQ}{\pi D}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

تذکر۶: همان‌طور که می‌بینید برای حل این مسائل باید مقدار π در دسترس باشد. اگر به یاد داشته باشید تعریف سطح خدمت به‌دلیل این بود که ما نمی‌توانستیم تخمین دقیقی از هزینه‌های کمبود داشته باشیم. در نتیجه هرگاه در مسأله مقدار π داده شود باید از روابط این بخش استفاده کرد.

مثال ۱۶: تقاضا در مدت زمان تحویل کالایی دارای توزیع یکنواخت در فاصله (۳۰،۱۰) است. هزینه هر واحد کسری ۴ واحد پول و هزینه نگهداری هر واحد کالا در سال دو واحد پول است. اگر میزان سفارش اقتصادی ۴۰ عدد و متوسط موجودی ۴۰۰ عدد در سال باشد مقدار بهینه موجودی اطمینان چقدر است؟

پاسخ:

$$P(D>r)=\frac{HQ}{D\pi}=\frac{۲\times ۴۰}{۴۰۰\times ۴}=۰/۰۵$$

$$\int_{۱۰}^{r}\frac{۱}{۳۰-۱۰}dx=۰/۰۵ \Rightarrow r=۲۹$$ نقطه صدور سفارش:

$$\bar{D}_{LT}=\frac{۳۰+۱۰}{۲} \Rightarrow SS=r-\bar{D}_{LT}=۲۹-۲۰=۹$$

اگر به ازای هر دفعه کمبود، هزینه G به سیستم اعمال شود داریم: $TC_{SS}=h.SS+G(\frac{D}{Q})P(x>r)\Rightarrow f(r)=\frac{hQ}{GD}$

بزرگترین r که در رابطه فوق صدق نماید جواب است.

حالت فروش از دست رفته

$$r=E(x)+ss+E(x>r)$$ = میانگین تقاضا + میانگین موجودی اطمینان + موجودی از دست رفته ; $p(x>r)=\frac{hQ}{\pi D+hQ}$

تذکر۷: هرگاه در یک مسأله احتمالی مقدار هزینه کمبود (π) را به ما بدهند، حتماً باید از مدل‌های بالا استفاده کرد.

جمع‌بندی

مدل احتمالی یک دوره‌ای $(A=۰)$

در صورت داشتن تابع احتمال تقاضا با کمک محاسبات زیر مقدار R را به‌دست می‌آوریم و به اندازه $R-I_۰$ سفارش می‌دهیم.

حالت گسسته $F(R_۰)\geq\frac{V+\pi+C}{V+\pi+H-L}$

حالت پیوسته $F(R_۰)=\frac{V+\pi+C}{V+\pi+H-L}$

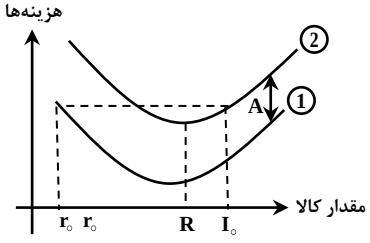
L سود عایدی از فروش محصولات باقی‌مانده و H هزینه آن‌ها است.

مدل احتمالی تک‌دوره‌ای با هزینه سفارش‌دهی

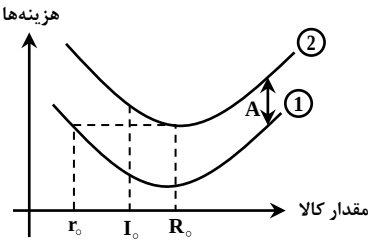
$r_۰$: نقطه‌ای است که هزینه کل بی سفارش‌دهی برابر هزینه کل با سفارش‌دهی به اندازه $R_۰$ دارد.

$I_۰$: مقدار موجودی اولیه

سفارش نخواهیم داد $\Rightarrow I_۰\geq R\Rightarrow$

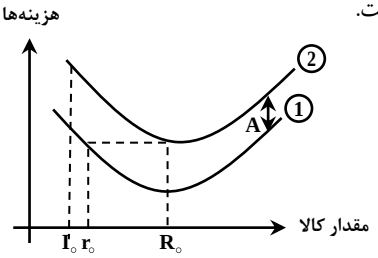


سفارش ندادن ارزان‌تر است $\Rightarrow r_۰<I_۰<R_۰\Rightarrow$



www.modaresanesharif.ac.ir

همان‌طور که دیده می‌شود موجودی $I_\circ$ روی منحنی اول در این بازه پایین‌تر از هزینه سفارش تا $R_\circ$ است.



$\Rightarrow I_\circ < r_\circ, R_\circ \Rightarrow$ به اندازه $R_\circ - I_\circ$ سفارش می‌دهیم

ـ در خط مشی F.O.S موجودی لحظه به لحظه چک می‌شود هرگاه که موجودی در دست به سطح r برسد به اندازه ثابت Q سفارش می‌دهیم.

ـ در خط مشی F.O.I در فاصله‌های زمانی ثابت T اقدام به چک موجودی می‌کنیم و هرگاه از سطح R (حداکثر موجودی) کمتر بود اقدام به سفارش به اندازه $R - I_t$ می‌کنیم.

ـ سطح خدمت (P) احتمال آن که مشتری با کمبود مواجه نشود در یک دوره را بیان می‌کند که توسط مدیریت تعیین می‌گردد و با کمک آن می‌توان مقدار r را به‌دست آورد.

$$P = (DL \le r) = F(r)$$

ـ سیستم دو ظرفی به این صورت است که ظرف اول و بزرگ‌تر به اندازه Q ظرفیت دارد و ظرف کوچک‌تر به اندازه r، هرگاه ظرف بزرگ خالی شد آن‌گاه اقدام به سفارش‌دهی می‌کنیم.

ـ برای افزایش سطح خدمت از ۵۰% به بالا به ناچار باید از موجودی اطمینان استفاده کنیم یعنی:

$$r = \mu_{DL} + SS$$

ـ در حالت کلی در مدل F.O.S هرگاه هم تقاضا و هم مدت تحویل احتمالی باشند میانگین و انحراف معیار توزیع تقاضا در مدت تحویل به‌صورت زیر می‌شود:

$$\mu_{DL} = \mu_L \times \mu_D$$

$$\sigma_{DL} = \sqrt{\mu_L \sigma_D^2 + \mu_D^2 \sigma_L^2}$$

ـ اگر توزیع تقاضا در مدت تحویل نرمال و سطح خدمت P باشد، آن‌گاه:

$$r = \mu_{DL} + Z_P \sigma_{DL}$$

ـ در مدل F.O.S روابط زیر برقرارند:

$$\bar{I} = \frac{I_{max}}{2} + SS$$

$$\bar{b} = \int_r^{+\infty} (x - r) f(x) dx \quad \text{یا} \quad \sum_{x>r} (x - r) P(x)$$

$$B = \frac{D}{Q} \bar{b}$$

$$\frac{\bar{b}}{Q} = \frac{B}{D} = \text{درصد تقاضایی که با کمبود مواجه می‌شود}$$

$$N_b = \frac{D}{Q}(1 - P) = \frac{D}{Q} \overline{F(r)}$$

$$T_b = \frac{1}{N_b} = \frac{Q}{D \overline{F(r)}}$$

$$k = h \times \bar{I} + \frac{D}{Q} A + \hat{\pi} \bar{b} + \pi B$$

ـ روابط مدل F.O.I :

$$T^* = \sqrt{\frac{2A}{Dh}} \quad , \quad F_{D(L+T)}(R) = P$$

www.modaresanesharif.ac.ir

$$R = \mu_{D(L+T)} + SS$$

$$\sigma_{D(L+T)} = \sqrt{\mu_D^2 + \sigma_L^2 + \mu_{(L+T)}\sigma_D^2}$$

$$\overline{I} = SS + \frac{DT}{2}$$

$$\overline{y} = SS + \frac{D(L+T)}{2}$$

$$N_b = \frac{1}{T}(1-P)$$

$$T_b = \frac{T}{1-P}$$

$$\overline{b} = \int_R^{+\infty} (X-R)f(X)dx$$

$$B = \frac{1}{T}\overline{b}$$

ـ اگر مقدار $\overline{\pi}$ را در اختیار داشته باشیم و کمبود پس‌افت باشد:

پیوسته: $P(DL > r) = \frac{hQ}{\pi D} \Rightarrow \overline{F(r)} = \frac{hQ}{\pi D}$

گسسته: $P(DL > r) = \frac{hQ}{\pi D} \Rightarrow F(r) \geq 1 - \frac{hQ}{\pi D}$

www.modaresanesharif.ac.ir

فصل هفتم

پیش‌بینی

مقدمه

معمولاً تقاضای رسیده به سیستم موجودی در واقعیت کاملاً مشخص نمی‌باشد و ما برای تعیین تقاضاهای رسیده باید از روش‌های پیش‌بینی استفاده کنیم و از روش‌های پیش‌بینی با استفاده از اطلاعات گذشته و تحلیل آماری در بعضی موارد اعمال نظر کارشناسان مقداری را برای تقاضا در آینده تعیین نماییم. در این فصل خواننده با این روش‌ها آشنا می‌شود.

تعداد تست‌های مطرح شده از این فصل در کنکور سال‌های گذشته:

۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰
۲	۲	۰	۲	۲	۱	۱	۱

انواع تقاضا در آینده

عواملی که سبب ایجاد تقاضا برای محصول در آینده می‌شوند را می‌توان به دو گروه تقسیم نمود:

الف) گروهی که سبب ایجاد تقاضا در گذشته شده‌اند.

ب) گروهی که در ایجاد تقاضا برای اولین بار اثر می‌گذارند.

تخمین‌های مربوط به گروه اول پیش‌بینی (Forecasting) و تخمین‌های مربوط به گروه دوم پیش‌گویی (Prediction) نامیده می‌شوند. برای تخیمن مقادیر آینده تقاضا دو راه کلی وجود دارد. یکی تخمین ذهنی یا همان پیش‌گویی این مقادیر است. پیش‌گویی معمولاً شامل تخمین عوامل کیفی، مثل اثر معرفی محصول جدید، رقبا و یا یک تغییر عمده در اقتصاد ملی است. از آن‌جا که پیش‌گویی نیازمند مهارت، تجربه و داوری ذهنی است، نمی‌توان تمام تقاضا را به طور موفقیت‌آمیز پیش‌گویی کرد. راه دیگر این است که الگوی تاریخی گذشته را به وسیله محاسبات عینی بر داده‌های گذشته برای آینده تصویر کرد. «پیش‌بینی» عبارت است از: تحلیل این داده‌ها و تصویر کردن آنها برای آینده که معمولاً به وسیله کاربر روی مدل‌های ریاضی مناسب انجام می‌شود. در واقع پیش‌بینی عبارت است از: فرآیند نتیجه‌گیری از داده‌های گذشته برای آینده است. نکته مهمی که باید بدان توجه نمود این است که پیش‌بینی، تخمینی از یک مقدار تقاضا در آینده است با این فرض که الگوی گذشته آن نیز ادامه پیدا کند. چون پیش‌بینی کردن یک فرآیند عینی است، ما می‌دانیم که چه عواملی در آن در نظر گرفته شده‌اند و چه عواملی در آن در نظر گرفته نشده‌اند. وقتی بعضی از عوامل سبب می‌شوند که الگوی تقاضا تغییر نماید وارد نماید، پس تا حدی می‌توان گفت پیش‌بینی یک ورودی برای پیش‌گویی می‌باشد. در واقع بسیاری از روش‌های پیش‌بینی بدین طریق عمل می‌کنند و مدیریت فرصت آن را دارد که به صورت بخشی از جریان تصمیم‌گیری، به طریقی پیش‌بینی را اصلاح نماید.

در این درس بیشتر مفهوم پیش‌بینی مدنظر می‌باشد و در ادامه روش‌های پیش‌بینی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۱: کدام‌یک از موارد زیر هدف انجام پیش‌بینی می‌باشند؟

۱) کاهش میزان خطا در صدور سفارش
۲) حذف خطا در صدور سفارش
۳) اسفاده از داده‌های گذشته در جهت برنامه‌ریزی برای آینده.
۴) گزینه ۱و۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» گزینه ۳، تعریف پیش‌بینی است و هدف آن نمی‌باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

روش میانگین ساده

وقتی اطلاعات تقاضا برای دوره‌های گذشته در دسترس باشد، یک راه ساده برای پیش‌بینی تقاضا در آینده استفاده از میانگین تقاضاهای گذشته می‌باشد.

برای پیش‌بینی دوره $t+1$ وقتی که اطلاعات t دوره قبل در دسترس می‌باشد از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$F_{t+1} = \frac{\sum_{i=1}^{t} Dj}{t}$$

F_{t+1}: پیش‌بینی تقاضا برای دوره $t+1$ ام

D_j: میزان تقاضای واقعی دوره j ام

t: تعداد دوره‌هایی که اطلاعات آنها در دسترس می‌باشد.

مثال ۲: اطلاعات زیر برای مقدار تقاضای یک محصول در فروشگاهی در هفته‌های گذشته در دسترس می‌باشد، با استفاده از روش میانگین ساده مقدار پیش‌بینی برای هفته آینده چقدر است؟

شماره هفته	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
مقدار تقاضای واقعی	۱۰۰	۱۲۰	۱۲۰	۱۲۵	۱۳۰	۱۲۵	۱۲۰

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۰۰
۳) ۱۳۰ ۴) ۱۱۷

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون روش میانگین ساده بیان شده است، کافی است از اطلاعات موجود میانگین بگیریم:

$$F_{۸} = \frac{\sum_{j=1}^{۷} Dj}{۷} = \frac{۱۰۰+۱۲۰+۱۲۰+۱۲۵+۱۳۰+۱۲۵+۱۲۰}{۷} = ۱۲۰$$

مثال ۳: با توجه به اطلاعات مثال فوق، پیش‌بینی تقاضا برای هفته دهم چقدر می‌باشد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۳۰ ۴) اطلاعات کافی نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در روش میانگین ساده، با توجه به اطلاعات در دسترس برای آینده پیش‌بینی می‌کنیم و در صورتی که از هم اکنون برای دوره‌های آینده را نیز بخواهیم پیش‌بینی کنیم همان مقدار موجود را مورد استفاده قرار می‌دهیم.

نکته ۱: وقتی که تقاضا فقط تغییرات تصادفی دارد و هیچ‌گونه روند صعودی یا نزولی و یا تغییرات سیکلی نداشته باشد، این روش، روش مناسبی برای پیش‌بینی می‌باشد. در این روش از تمام اطلاعات گذشته استفاده می‌شود و به همه آنها وزن یکسان $\frac{۱}{t}$ داده و با یکدیگر جمع می‌نماید.

مثال ۴: عیب روش میانگین ساده و مزیت آن چیست؟

۱) عیب آن مشکل بودن محاسبات و مزیت آن در اختیار داشتن اطلاعات زیاد از گذشته می‌باشد.
۲) عیب آنها نگهداری اطلاعات بسیار از گذشته و مزیت آن سادگی محاسبات آن است.
۳) عیب آن زیاد بودن خطای روش و مزیت آن سادگی محاسبات است.
۴) عیب آن قابلیت استفاده تنها در موارد خاص و مزیت آن عدم نیاز به اطلاعات زیاد از گذشته است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» این روش نیاز به نگهداری اطلاعات مقادیر واقعی دوره‌های گذشته ندارد و فقط نگهداری میزان پیش‌بینی دوره گذشته و تعداد دوره‌ها کفایت می‌کند. ولی عیب آن این است که فقط در موارد خاص که تقاضا تغییرات تصادفی داشته باشد کاربرد دارد. دیگر عیب عمده آن این است که به تغییرات تقاضا خیلی کند جواب می‌دهد.

مثال ۵: مهم‌ترین عیب روش میانگین ساده کدام است؟

۱) فقط در موارد خاص کاربرد دارد. ۲) اطلاعات بسیاری از گذشته نیاز است.
۳) پیچیده بودن محاسبات آن ۴) خطای بسیار زیاد آن

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» روش مناسبی است اگر روند یا تغییرات فصلی در کار نباشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

روش میانگین متحرک ساده

در این روش معدل تقاضای یک دوره را برای N دوره گذشته به دست می‌آورند. یعنی در صورتی که اطلاعات برای N+M دوره گذشته در دسترس باشد فقط از N دوره اخیر میانگین می‌گیریم. در واقع از رابطه زیر برای پیش‌بینی تقاضا استفاده می‌شود.

$$F_{t+1}=\frac{D_t+D_{t-1}+...+D_{t-N+1}}{N}=\frac{\sum_{i=0}^{N-1}D_{t-i}}{N}$$

در عمل برای کاهش حجم محاسبات از رابطه روبرو استفاده می‌شود:

$$F_{t+1}=A_t=A_{t-1}-\frac{D_{t-N}}{N}+\frac{D_t}{N}$$

$$F_{t+1}=A_t=A_{t-1}+\frac{D_t-D_{t-N}}{N}$$

که در آن A_t میانگین تقاضا برای N دوره گذشته از زمان t می‌باشد.

نکته ۲: اگر تغییرات تقاضا برحسب زمان نسبتاً شدید باشد، مقدار N را کوچک (مثلاً بین ۳ تا ۵) و اگر این تغییرات کم باشد از $N=12$ تا $N=18$ استفاده می‌شود. بهترین آزمون برای انتخاب N، کاربرد روش پیش‌بینی روی ارقام تقاضای گذشته اطلاعات در دست است. بدین طریق که مقدار خطا را برای Nهای مختلف به دست آورده و آن N را که کمترین خطا را دارد انتخاب می‌نماییم.

نکته ۳: برای به دست آوردن خطای روش‌های مختلف پیش‌بینی از رابطه زیر استفاده می‌شود.

$$\text{مقدار خطا}=s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(D_t-F_t)^2}{n-f}}$$

n: تعداد دوره‌ها F: درجات آزادی از دست رفته

مثال ۶: اطلاعات زیر برای تقاضای کالایی در دست می‌باشد. اگر بخواهیم با استفاده از روش میانگین متحرک ساده، برای دوره‌های ۷ و ۸ تقاضا را پیش‌بینی نماییم، تعداد $N=4$ یا $N=5$ بهتر است یا خطای آن چقدر است؟

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تقاضای واقعی	۱۰۰	۹۰	۹۵	۱۲۰	۱۱۰	۱۰۵	۱۰۰	۱۱۰

۱) $N=4$ با خطای ۷/۶ ۲) $N=5$ با خطای ۵/۶۵ ۳) $N=4$ با خطای ۵۷/۸ ۴) $N=5$ با خطای ۳۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا با استفاده از $N=4$ برای دوره‌های ۷ و ۸ تقاضا را پیش‌بینی می‌نماییم.

$$F_7=\frac{95+120+110+105}{4}=107/5$$

پیش‌بینی تقاضا برای دوره ۷ برابر میانگین دوره‌های ۳ تا ۶ می‌شود.

$$F_8=\frac{120+110+105+100}{4}=108/75$$

$$S_1=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{2}(D_t-F_t)^2}{2-1}}=\sqrt{\frac{(100-107/5)^2+(110-108/75)^2}{1}}\Rightarrow S_1=7/6$$

حال با $N=5$ مسأله را حل می‌کنیم:

$$F_7=\frac{90+95+120+110+105}{5}=104 \quad ; \quad F_8=\frac{95+120+110+105+100}{5}=106$$

$$S_2=\sqrt{\frac{(100-104)^2+(110-106)^2}{1}}=5/65$$

نکته ۴: در این روش اگر تعداد دوره‌های تناوب برابر T باشد، فاصله زمانی تأخیر $\frac{T+1}{2}$ خواهد بود.

نکته ۵: وزن داده شده به اطلاعات واقعی دوره قبل برای N دوره قبلی $\frac{1}{N}$ و برای دوره‌های قبل از N برابر صفر می‌باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

نکات روش میانگین ساده متحرک:

۱ـ اگر تغییرات تقاضا نسبت به زمان شدید باشد باید مقدار N را کوچک‌تر انتخاب کرد.

۲ـ اگر تغییرات تقاضا نسبت به زمان کم باشد برای تخمین بهتر باید N را بزرگ انتخاب کرد.

۳ـ لزوماً خطای این روش از روش میانگین ساده کمتر نیست.

۴ـ محاسبات آن از روش میانگین ساده پیچیده‌تر است و اطلاعات بیشتری نیاز دارد.

مثال ۷: تفاوت روش میانگین متحرک ساده با روش میانگین ساده کدام است؟

۱) خطای آن کمتر است و به مقادیر واقعی تقاضا نزدیکتر است.
۲) محاسبات آن ساده‌تر است.
۳) به اطلاعات بیشتری از گذشته نیاز دارد.
۴) هر سه مورد

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» لزوماً خطای این روش نسبت به روش میانگین ساده کمتر نیست و در مواقعی که تقاضا فقط تغییرات تصادفی دارد خطای بیشتری نیز دارد. محاسبات این روش نیز به سادگی روش میانگین ساده نمی‌باشد و فقط گزینه (۳) صحیح است چون این روش اطلاعات N دورهٔ قبلی را نگهداری می‌نماید ولی روش میانگین ساده فقط میزان پیش‌بینی دوره قبل و تعداد دوره‌ها را نیاز دارد.

مثال ۸: فاصله زمانی تأخیر در روش میانگین متحرک ساده کدام است؟

۱) $\frac{T-1}{2}$ ۲) $\frac{T}{2}$ ۳) $\frac{T+1}{2}$ ۴) $\frac{T+2}{2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» فاصله زمانی تأخیر در روش میانگین متحرک ساده برابر است با $\frac{T+1}{2}$

روش میانگین متحرک وزنی

تنها تفاوت این روش با روش قبل در این است که وزن داده شده به اطلاعات قبل برابر $\frac{1}{N}$ نمی‌باشد و به دوره‌های قبل وزن α_i داده می‌شود. توجه شود که لزومی ندارد مجموع α_i ها برابر یک شود.

$$F_{t+1}=\frac{\sum_{i=t-N+1}^{t}\alpha_i D_i}{\sum_{i=t-N+1}^{t}\alpha_i}$$

نکته ۶: این روش هنگامی که علاوه بر تغییرات تصادفی تغییرات دیگری همچون روند بر تقاضای رسیده تأثیر داشته باشد به کار برده می‌شود.

مثال ۹: اطلاعات گذشته برای محصولی به شرح زیر می‌باشد، در صورتی که برای ۵ دوره گذشته وزن‌های به ترتیب، ۰/۵، ۰/۴، ۰/۳، ۰/۲، ۰/۱ در نظر بگیریم، به گونه‌ای که تقاضاهای اخیر، تأثیر بیشتری بر روی پیش‌بینی تقاضای دوره آینده داشته باشد، مطلوب است پیش‌بینی تقاضا برای دوره آینده:

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تقاضای واقعی	۱۰۰	۱۲۰	۱۰۰	۹۵	۱۱۰	۱۰۵	۱۱۰

۱) ۱۰۴ ۲) ۱۰۶ ۳) ۱۰۵ ۴) ۱۱۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» باید از روش میانگین وزنی استفاده نماییم داریم:

$$F_8=\frac{0/5\times D_7+0/4\times D_6+0/3\times D_5+0/2\times D_4+0/1\times D_3}{0/5+0/4+0/3+0/2+0/1}=\frac{159}{1/5}=106$$

روش میانگین متحرک تصحیح شده برای روند

وقتی که تقاضا دارای روند است، روش فوق همواره از روند عقب‌تر است. بنابراین در صورت وجود روند می‌توان از روش میانگین متحرک تصحیح شده برای روند استفاده کرد. برای شرح روش فرض کنید که فرآیند خطی دارای مؤلفه تغییرات تصادفی نیست، یعنی: $D_t=a+bt$

یا: $D_{t-j}=D_t-jb$

www.modaresanesharif.ac.ir

در زمان t معدل متحرک ساده عبارت است از:

$$A_t = \frac{۱}{N}(D_t + D_{t-۱} + ... + D_{t-N+۱})$$

$$A_t = \frac{۱}{N}\sum_{j=۰}^{N-۱} D_{t-j} \quad ; \quad A_t = D_t - \frac{N-۱}{۲} b$$

یعنی معدل متحرک ساده A_t، به اندازه $\frac{N-۱}{۲}b$ از تقاضای دوره جاری (D_t) عقب‌تر است. بنابراین برای پیش‌بینی تقاضای دوره $t+L$ باید ابتدا معدل متحرک ساده A_t را با اضافه کردن $\frac{N-۱}{۲}\hat{b}_t$ تصحیح کرده سپس مقدار $\hat{b}_t L$ را به آن افزود. تخمین روند تقاضای دوره در زمان $\hat{b}_t : t$

$$F_{t+L} = [A_t + \frac{N-۱}{۲}\hat{b}_t] + \hat{b}_t L$$

برای تخمین $\hat{b}_t$ از رابطه روبرو استفاده می‌شود:

$$\hat{b}_t = \frac{۱۲S_t}{N(N^۲ - ۱)}$$

که در آن:

$$S_t = \frac{N-۱}{۲}D_t + \frac{N-۳}{۲}D_{t-۱} + ... + \frac{N-۳}{۲}D_{t-N+۲} - \frac{N-۱}{۲}D_{t-N+۱}$$

یا:

$$S_t = \sum_{j=۰}^{N-۱}(\frac{N-۱}{۲} - j)D_{t-j}$$

بنابراین پیش‌بینی مقدار تقاضای ماه جاری (دوره t ام که اطلاعات واقعی آن در دسترس می‌باشد) برابر است با:

$$F_t = A_t + \frac{N-۱}{۲}\hat{b}_t$$

$$F_t = A_t + (\frac{N-۱}{۲})\frac{۱۲S_t}{N(N^۲-۱)} \Rightarrow F_t = A_t + \frac{۶S_t}{N(N+۱)}$$

مقدار $\frac{۶S_t}{N(N+۱)}$ را مقدار تصحیح می‌نامند. پیش‌بینی تقاضای L امین دوره نیز عبارت است از: $F_{t+l} = F_t + L\hat{b}_t$

روش میانگین متحرک دوبل

نتایج حاصل در روش میانگین متحرک تصحیح شده را می‌توان به صورت دیگری که کمی با شکل فوق متفاوت است بیان داشت. فرض کنید تقاضا به صورت خطی می‌باشد و دارای مؤلفه تصادفی نیست. در این صورت: $D_t = a + bt$

و داریم:

$$A_t = D_t - \frac{N-۱}{۲} b \quad A_t = \frac{۱}{N}(D_t + D_{t-۱} + ... + D_{t-N+۱})$$

حال میانگین متحرک میانگین‌های ساده (A_t) را، که موسوم به میانگین متحرک دوبل است در نظر بگیرید، یعنی:

$$A_t^{(۲)} = \frac{۱}{N}[A_t + A_{t-۱} + ... + A_{t-N+۱}] \quad ; \quad A_t^{(۲)} = A_{t-۱}^{(۲)} + \frac{۱}{N}(A_t - A_{t-N})$$

همانند فوق می‌توان نشان داد که $A_t^{(۲)}$ به اندازه $\frac{N-۱}{۲}b$ از A_t عقب‌تر است. یعنی:

$$A_t^{(۲)} = A_t - \frac{N-۱}{۲}b$$

بنابراین داریم:

$$b = \frac{۲}{N-۱}(A_t - A_t^{(۲)})$$

و لذا داریم:

$$D_t = A_t + \frac{N-۱}{۲}b \Rightarrow D_t = ۲A_t - A_t^{(۲)}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

آزمون فصل یازدهم

۱ـ با استفاده از اطلاعات زیر ترتیب انجام سفارش‌ها در روش جانسون چگونه است؟

فعالیت	پرس‌کاری	فرزکاری
d	۱۳	۲۳
e	۲۳	۱۳
f	۱۶	۱۸
g	۲۰	۱۷

۱) a−g−f−d
۲) d−g−f−e
۳) d−f−g−e
۴) e−d−f−g

۲ـ با استفاده از اطلاعات زیر ترتیب انجام سفارش‌ها بر اساس روش SPT چگونه است؟

فعالیت	زمان فعالیت (ساعت)	زمان تحویل (ساعت)
a	۱۴	۱۵
b	۱۰	۲۰
c	۱۸	۱۸
d	۲	۱۶
e	۴	۲۱

۱) e−b−c−d−a
۲) c−a−b−e−d
۳) a−d−c−e−b
۴) d−e−b−a−c

۳ـ ترتیب انجام سفارش‌ها بر اساس روش EDD چگونه است؟

۱) d−e−b−a−c ۲) e−d−b−a−c ۳) a−d−c−b−e ۴) a−d−c−e−b

۴ـ در سوال ۲ متوسط زمان دیرکرد در سیستم SPT چه میزان است؟

۱) ۳ساعت ۲) ۵ساعت ۳) ۷ساعت ۴) ۹ساعت

۵ـ در سوال ۲ متوسط زمان تکمیل سفارش‌ها در سیستم SPT چقدر است؟

۱) ۲۰/۷ساعت ۲) ۲۰/۴ساعت ۳) ۱۹/۶ساعت ۴) ۱۹/۲ساعت

۶ـ با توجه به اطلاعات زیر

فعالیت (سفارش)	زمان تولید (ساعت)	زمان تحویل
V	۳	۵
W	۱	۱
X	۴	۹
Y	۲	۳
Z	۵	۷

چنانچه از روش FCFS استفاده شود متوسط زمان انجام سفارش و دیرکرد سفارش‌ها را تعیین نمایید؟

۱) ۵ساعت، ۳/۳۳ساعت ۲) ۴ساعت، ۳ساعت ۳) ۲/۳۳۲ساعت، ۳/۳۳ساعت ۴) ۸ساعت، ۲/۴ساعت

۷ـ کارخانه‌ای می‌خواهد ۴ عملیات را توسط ۴ نوع ماشین به اجرا درآورد در صورتی که هزینه‌ی اجرای هر کدام از عملیات با هرکدام از ماشین‌ها به صورت جدول زیر باشد در صورت انتخاب بهینه، هزینه‌ی کل چقدر است؟

ماشین / عملیات	۱	۲	۳	۴
A	۱	۴	۶	۳
B	۹	۷	۱۰	۹
C	۴	۵	۱۱	۷
D	۸	۷	۸	۵

۱) ۲۱
۲) ۲۰
۳) ۳۵
۴) ۱۷

www.modaresanesharif.ac.ir

۸ـ اطلاعات مربوط به زمان عملیاتی ۵ سفارش دریافت شده و به شرح زیر است کلیهٔ سفارش‌ها باید ابتدا توسط ماشین۱، سپس ماشین ۲، و در نهایت توسط ماشین۳ مورد پردازش قرار گیرند به روش جانسون بهترین ترتیب سفارش‌ها چگونه است؟

سفارش	زمان ماشین ۱	زمان ماشین ۲	زمان ماشین ۳
۱	۹	۲	۸
۲	۹	۲	۲
۳	۴	۲	۵
۴	۳	۲	۱۱
۵	۸	۲	۱۲

۱) ۴−۵−۳−۲−۱
۲) ۳−۵−۲−۱−۴
۳) ۴−۳−۵−۱−۲
۴) ۳−۱−۲−۴−۵

۹ـ با استفاده از اطلاعات زیر ترتیب انجام سفارش‌ها به روش LPT چگونه است؟

زمان عملیات (ساعت)	زمان عملیات (ساعت)	موعد تحویل (ساعت)
A	۷	۹
B	۹	۱۲
C	۱۲	۷
D	۱۱	۱۸
E	۶	۱۴

۱) C−D−B−E−A
۲) A−C−B−D−E
۳) E−A−B−D−C
۴) C−D−B−A−E

۱۰ـ متوسط دیرکرد در سوال ۹ چقدر است؟

۱) ۱۷ساعت ۲) ۱۷/۵ساعت ۳) ۱۸/۲ساعت ۴) ۱۸/۸ساعت

www.modaresanesharif.ac.ir