سؤالات آزمون سراسری ۹۱

زبان عمومی و تخصصی

PART A: Vocabulary
Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the correct choice on your answer sheet.

1- The geology studect a surprising discovery; the volcano believed to be …….. was about to erupt.
1) dormant 2) temporary 3) affable 4) vulnerable

2- We waited for the storm to …….. before we left.
1) abase 2) abate 3) abridge 4) abide

3- The minister desired the position simply for the …….. associated with it.
1) scope 2) status 3) origin 4) feature

4- The …….. researcher made sure to check her measurements multiple times.
1) initial 2) apposite 3) diligent 4) vague

5- Denver's impractical plan to build a subway system was …….. in 1970s.
1) surmised 2) scrapped 3) strived 4) scattered

6- …… such as hair color and eye color are inherited genetically from one's parents.
1) Traits 2) Enigmas 3) Omens 4) Dimensions

7- The company has ……$1000 to the team to get the project started.
1) ascribed 2) bestowed 3) deposited 4) allocated

8- After a week the jury had still not reached a …….. .
1) status quo 2) suspect 3) verdict 4) sequence

9- Heavy rains had ……. The expedition's progress through the north-west of the country.
1) abandoned 2) hindered 3) evaded 4) distressed

10- The rattlesnake is the most …….. snake in the Untied States.
1) venomous 2) ancestral 3) haphazard 4) zealous

PART B: Cloze Test
Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

The ancient Romans built an extensive and …(11)… to server their needs. The Roman road-building era began in 312 BC. The roads provided economic and military access from Rome to distant parts of its far-flung empire. The first road …(12)… the Appian Way, which led, from Rome to Brundisium (now Brindisi), a port …(13)… is now southern Italy. The Appian Way was the main route to Greece, and it ran over 560 km (350 mi). A second road, from Rome to Naples, provided the first stage of the route …(14)… by troops headed to Africa. Roman advances in road-building techniques included preparation of foundation soils and base courses, brick paving, and, …(15)…, provision for adequate drainage.

11- 1) roads of durable system 2) system of durable roads
3) durable system of roads 4) Durable road of systems

12- 1) was constructed 2) constructed was
3) that was constructed 4) was to construct

13- 1) in which it 2) in what 3) where is 4) which it is

14- 1) used 2) was used 3) be used 4) using

15- 1) the more important 2) most importantly
3) the most important 4) most important

پاسخنامه آزمون سراسری ۹۱

زبان عمومی و تخصصی

۱ـ گزینه «۱» دانشجوی رشته زمین‌شناسی اکتشاف شگفت‌انگیزی انجام داد. آتشفشانی که تصور می‌شد خاموش باشد، نزدیک بود فوران کند.

۱) غیرفعال ـ خفته ـ خاموش ۲) موقتی ـ گذرا ـ موقت ۳) مهربان ـ دل‌جو ـ خونگرم ۴) آسیب‌پذیر ـ صدمه‌پذیر

۲ـ گزینه «۴» قبل از حرکت صبر کردیم توفان فروکش کند.

۱) خوار و خفیف کردن ـ تحقیر کردن ۲) پابرجا ماندن ـ باقی ماندن

۳) کوتاه کردن ـ خلاصه کردن ـ مختصر کردن ۴) فروکش کردن ـ کم کردن

۳ـ گزینه «۲» وزیر آرزو کرد تا آن وضعیت به آسانی با وضع فعلی هماهنگ شود.

۱) گسترده ـ حوزه ـ آزادی عمل ۲) وضعیت قانونی ـ مقام ـ منزلت ـ وضع فعلی

۳) اصل ـ منشأ ـ علت ۴) سیما ـ جنبه ـ ویژگی ـ برنامه اصلی

۴ـ گزینه «۳» آن محقق سخت‌کوش با بررسی چندباره اندازه‌گیری‌های خود خاطر جمع شد.

۱) آغازین ـ اولین ـ مقدماتی ۲) مبهم ـ ناشناس ـ گنگ ۳) کوشا ـ ساعی ـ سخت‌کوش ۴) درخور ـ مناسب

۵ـ گزینه «۲» طرح غیرعملی دنور برای ساخت سیستم مترو در دهه ۱۹۷۰ کنار گذاشته شد.

۱) حدس زدن ـ گمان کردن ۲) کنار گذاشتن ـ دور انداختن ۳) تلاش کردن ـ سخت کوشیدن ۴) متفرق کردن

۶ـ گزینه «۱» صفاتی مانند رنگ مو و رنگ چشم از طریق والدین انسان به طور ژنتیکی به ارث می‌رسند.

۱) صفات ـ خصوصیت ـ خصلت ۲) ابعاد ـ گسترش ـ میزان ۳) فال ـ طالع ۴) معما ـ چیستان

۷ـ گزینه «۴» شرکت، هزار دلار به گروه تخصیص داد تا پروژه را آغاز کنند.

۱) وابسته دانستن ـ نسبت دادن ۲) هدیه دادن ـ وقف کردن (با حرف اضافه or یا upon کاربرد دارد)

۳) سپردن ـ واریز کردن ـ چک به حساب گذاشتن ۴) اختصاص دادن ـ تخصیص دادن

۸ـ گزینه «۳» بعد از گذشت یک هفته، هیأت منصفه دادگاه همچنان حکم صادر نکرده بود.

۱) وضع موجود ۲) ترتیب ـ توالی ۳) حکم دادگاه ـ حکم قاضی ـ حکم ۴) متهم ـ مورد سوء ظن

۹ـ گزینه «۲» باران سنگین مانع پیشرفت گروه اعزامی در شمال غربی کشور شده بود.

۱) رها کردن ـ دست کشیدن ۲) جلوگیری کردن ـ مانع شدن ـ سد راه شدن

۳) شانه خالی کردن ـ زیر بار چیزی نرفتن ۴) رنج دادن ـ آزار دادن

۱۰ـ گزینه «۱» مار زنگی سمی‌ترین مار در ایالات متحده است.

۱) زهری ـ سمی ۲) مشتاق ـ خواهان ـ علاقمند ۳) اتفاقی ـ تصادفی ۴) موروثی ـ نسل اندر نسل

ترجمه متن

رومی‌های باستان سیستم جاده‌ای پایا و گسترده‌ای را برای برآورده کردن نیازهایشان ایجاد کردند. دوره جاده‌سازی در سال ۳۱۲ قبل از میلاد آغاز شد. جاده‌ها راه دسترسی نظامی و اقتصادی از رم به نقاط دوردست در امپراطوری گسترده را تأمین می‌کردند. اولین جاده‌ای که ساخته شد راه آپیان بود که از رم به بروندیزیوم (که امروزه بریندیزی نام دارد) منتهی می‌شد، بندری که اکنون در جنوب ایتالیا قرار دارد. راه آپیان، راه اصلی به یونان بود و بیش از ۵۶۰ کیلومتر (۳۵۰ مایل) ادامه داشت. دومین راه، از رم به ناپل، اولین مرحله از مسیری بود که توسط سربازانی مورد استفاده قرار می‌گرفت که عازم آفریقا بودند. روم در فنون جاده‌سازی مثل فونداسیون خاک، آجر فرش کردن و مهمترین آن‌ها، آماده سازی زهکشی پیشرفت کرد.

26- Social constructivists argue that the direction of mathematical research is determined by …….. .

1) correction and change 2) need and fashion 3) evaluation and error 4) constructs and result

27- According to social constructivists …… .

1) internal constraints, no matter show strong they are, have no bearing on mathematical research
2) social realism theories are in harmony with the traditional beliefs of working mathematicians
3) mathematical research findings are subject to evaluation and may be discarded at times
4) mathematics is a science that is unique, compared with other sciences.

28- The word "they" in line 12 refers to …… .

1) traditional mathematicians 2) Leibniz and Newton
3) mathematical community 4) Axiomatic proof

29- Which of the followings, according to social constructivists, require more attention?

1) Folk mathematics 2) Peer review practices 3) Pure mathematics 4) Axiomatic proof

30- The word "which" in line 10 refers to a …….. .

1) mathematics 2) status 3) practice 4) degree

ریاضی عمومی

۳۱ـ مقدار انتگرال معین $\int_{۰}^{\frac{\pi^۲}{۴}} \cos^۲\sqrt{x}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^۲+۲}{۴}$ ۲) $\frac{\pi^۲-۴}{۸}$ ۳) $\frac{\pi\sqrt{\pi}-۱}{۴}$ ۴) $\frac{\pi^۲-۱}{۸}$

۳۲ـ اگر $f(t)=\begin{cases}\frac{۱}{t}\sin t & t\neq ۰\\ ۱ & t=۰\end{cases}$، آنگاه مشتق تابع $\int_{-x^۲}^{۰} f(t)dt$ نسبت به x کدام است؟

۱) $\frac{۲\sin^۲ x}{x}$ ۲) $\frac{۲\sin x}{x^۲}$ ۳) $\frac{۲\sin x^۲}{x}$ ۴) $\frac{۲\sin x}{x}$

۳۳ـ با استفاده از سری توانی $f(x)=\frac{e^x-۱}{x}$، مقدار سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n}{(n+۱)!}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۳۴ـ در مورد تابع $f(x)=\frac{x^۴+x^۳-۲x^۲}{x^۳-x}$ کدام گزینه درست است؟

۱) دو مجانب موازی دارد. ۲) سه مجانب موازی دارد. ۳) دو مجانب غیر موازی دارد. ۴) چهار مجانب دارد.

۳۵ـ مقدار $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\frac{\sqrt[k]{k!}}{k}$ کدام است؟

۱) e ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{e}$ ۴) $e^۲$

۳۶ـ شرط لازم برای این که تابع زیر در $x=\pi$ ناپیوستگی رفع‌شدنی داشته باشد کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{a}\sin\left(\frac{a}{\cos x}\right)\cos\left(\frac{a}{\sin x}\right) & x\neq k\frac{\pi}{۲}\\ b & x=k\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

۱) $a=۰$ ۲) $a=\pi$ ۳) $b=۰$ ۴) $a=\pi\ ,\ b=۰$

۳۷ـ تابع $f(x)=[(x-۱)^۲]$ در بازه‌ی باز $(۰,۲)$ مفروض است، که در آن $[x]$ جزء صحیح x است. در این صورت تابع f:

۱) در یک نقطه ناپیوسته است. ۲) همه جا پیوسته است.
۳) در سه نقطه ناپیوسته است. ۴) در نقاطی که $(x-۱)^۲$ یک عدد صحیح باشد، ناپیوسته است.

متن ۳

تئوری‌های ساختارگرایی اجتماعی یا واقع‌گرایی اجتماعی، ریاضیات را در وهله‌ی نخست به عنوان ساختاری اجتماعی می‌بینند، که محصولی از فرهنگ، تحت تأثیر روابط موجود در فرهنگ تحول‌پذیر است. همچون سایر علوم، ریاضیات به عنوان تلاشی تجربی در نظر گرفته می‌شود که نتایج آن به طور پیوسته مورد سنجش قرار گرفته و شاید متحول شده است. هر چند در یک دیدگاه تجربی، این سنجش نوعی قیاس با واقعیت است، و ساختارگرایان اجتماعی تأکید دارند که سمت و سوی تحقیقات ریاضی از طرف روش‌های رایج در گروه اجتماعی که در آن حیطه فعالیت می‌کنند با نیازهای جامعه‌ای که خریدار آن محسوب می‌شود، تعیین می‌گردد. با این وجود، گرچه ممکن است این نیروهای خارجی سمت و سوی مطالعات ریاضی را تغییر دهند، محدودیت‌های درونی نیرومندی نیز وجود دارند ـ عرف سنتی ریاضیات، روش‌ها، معضلات، معانی و متغیرهایی که ریاضی‌دانان به واسطه‌ی آنها نسج یافته‌اند ـ که در جهت تثبیت و محافظت از نظمی که به صورت تاریخی در این حیطه شکل گرفته است، فعالیت می‌کنند. این موضوع با عقاید سنتی ریاضی‌دانان فعال، مبنی بر آنکه ریاضیات به نوعی خالص و ابژکتیو است، در تضاد قرار می‌گیرد. اما ساختارگرایان اجتماعی بر آنند که در حقیقت بسیاری از موارد عدم قطعیت هستند که مبانی ریاضیات را تشکیل داده‌اند: با تکوین ریاضیات، وضعیت ریاضیات پیشین مورد تردید قرار می‌گیرد، و تا محدوده‌ای که مورد نیاز یا مورد تمایل جامعه ریاضی مسلط در آن زمان است، تصحیح می‌گردد. این موضوع را می‌توانیم در پیشرفت و بازبینی علم حسابان از زمان لایبنیتز و نیوتن ببینیم. به عقیده آنها به دلیل تأکید بیش از حد بر اثبات‌های بدیهی و بازبینی‌ها و روش‌های متناظر، ریاضیات نهایی اغلب بیش از آنچه که باید مورد توجه قرار می‌گیرد، و کمتر به ریاضیات پایه پرداخته می‌شود. ذات اجتماعی ریاضیات در خرده‌فرهنگ‌هایش مورد تأکید قرار گرفته است.

۲۶ـ گزینه «۲» ساختارگرایان اجتماعی بیان می‌کنند که سمت و سوی تحقیقات ریاضی به وسیله‌ی مد و نیاز هر دوره تعیین می‌گردد.

۱) تصحیح و تغییر ۲) نیاز و مد ۳) ارزیابی و خطا ۴) ساختارها و نتیجه

۲۷ـ گزینه «۳» بر اساس عقاید ساختارگرایان اجتماعی یافته‌های ریاضی می‌توانند مورد بررسی و سنجش قرار گرفته و و در مواردی مردود تشخیص داده شوند.

۱) ۲) ۳) ۴)

۲۸ـ گزینه «۴» واژه they در سطر ۱۲ به کدام گزینه اشاره می‌کند؟

۱) ریاضی‌دانان سنتی ۲) لایبنیتز و نیوتن ۳) جامعه ریاضی ۴) ساختارگرایان اجتماعی

۲۹ـ گزینه «۱» بر اساس عقاید ساختارگرایان اجتماعی، کدام‌یک از گزینه‌های زیر به توجه بیشتری نیاز دارند؟

۱) ریاضیات سنتی ۲) تمرینات بازبینی دقیق ۳) ریاضیات محض ۴) دلایل بدیهی

۳۰ـ گزینه «۴» واژه which در سطر ۱۰ به کدام گزینه اشاره دارد؟

۱) ریاضیات ۲) وضعیت ۳) عملکرد ۴) میزان

ریاضی عمومی

۳۱ـ گزینه «۲»

تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\sqrt{x}=u \Rightarrow x=u^2 \Rightarrow dx=2udu \;,\; \begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=\dfrac{\pi^2}{4} \Rightarrow u=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \times 2udu = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\left(\frac{1+\cos 2u}{2}\right)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (u+u\cos 2u)du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} udu + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u\cos 2udu = \frac{u^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u\cos 2udu = \frac{\pi^2}{8} + I' \qquad (*)$$

برای محاسبه انتگرال I' از روش جزء به جزء داریم:

$$I' = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} u\cos ۲u du \Rightarrow \begin{cases} u' = u \Rightarrow du' = du \\ dv = \cos ۲u du \Rightarrow v = \frac{۱}{۲}\sin ۲u \end{cases}$$

$$I' = \frac{u}{۲}\sin ۲u \Big|_{\circ}^{\frac{\pi}{۶}} - \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{۲}\sin ۲u\, du = \frac{u}{۲}(\sin ۲u + \frac{۱}{۴}\cos ۲u)\Big|_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱}{۴}(-۱-۱) = -\frac{۱}{۲}$$

با جایگذاری مقدار فوق در رابطه (*) داریم:

$$I = \frac{\pi^۲}{۸} - \frac{۱}{۲} = \frac{\pi^۲ - ۴}{۸}$$

۳۲ـ گزینه «۳» با استفاده از تعریف مشتق توابع انتگرالی داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\int_{-x^۲}^{\circ} f(t)dt) = \circ - (-۲x)f(-x^۲) = ۲xf(-x^۲) \qquad (*)$$

از طرفی برای محاسبه $f(-x^۲)$ داریم:

$$f(-x^۲) = \frac{-۱}{x^۲}\sin(-x^۲) = \frac{۱}{x^۲}\sin(x^۲)$$

با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (*) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\int_{-x^۲}^{\circ} f(t)dt) = \frac{۲x}{x^۲}\sin x^۲ = \frac{۲\sin x^۲}{x}$$

۳۳ـ گزینه «۱» با توجه به بسط سری مک‌لورن e^x داریم:

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots \Rightarrow e^x = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

بنابراین سری $\sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{۱}{n!}$ برابر است با:

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{۱}{n!} = e^۱ = e,\ \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n!} = e - ۱,\ \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n!} = e - ۲$$

حال برای یافتن مقدار سری داده شده داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{(n+۱)!} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n+۱-۱}{(n+۱)!} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n!} - \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(n+۱)!} \qquad (*)$$

از طرفی با توجه به مقادیر به دست آمده فوق داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n!} = e - ۱$$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(n+۱)!} = \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n!} = e - ۲$$

با جایگذاری دو مقدار فوق در رابطه (*) داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{(n+۱)!} = (e-۱) - (e-۲) = ۱$$

۳۴ـ گزینه «۳» ریشه‌های مخرج تابع $f(x)$ عبارتند از:

$$x = \circ,\ x = ۱,\ x = -۱$$

با توجه به این که $x = \circ$ و $x = ۱$ ریشه‌های صورت کسر نیز می‌باشند، تنها به ازای $x \to -۱$ مقدار $\lim f(x)$ برابر بی‌نهایت می‌شود، در نتیجه تنها $x = -۱$ مجانب قائم تابع $f(x)$ می‌باشد. برای محاسبه مجانب مایل تابع داده شده از تقسیم صورت بر مخرج داریم:

$$\begin{array}{r|l} x^۴ + x^۳ - ۲x^۲ & x^۳ - x \\ \hline -x^۴ + x^۲ & x+۱ \\ \hline x^۳ - x^۲ & \\ -x^۳ + x & \\ \hline -x^۲ + x & \end{array} \Rightarrow f(x) = x + ۱ + \frac{-x^۲ + x}{x^۳ - x} \Rightarrow \text{مجانب مایل } y = x + ۱$$

بنابراین تابع $f(x)$ دارای دو مجانب غیر موازی می‌باشد.

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی

۴۶ـ تحت کدام‌یک از شرایط زیر ماتریس A با یک ماتریس قطری متشابه است؟

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ a & ۲ & ۰\\ b & c & -۱\end{bmatrix}$$

۱) $a=۰$ ۲) $b=۰$ ۳) $c=۰$ ۴) $a+b+c=۰$

۴۷ـ فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ مختلط باشد و برای هر $X\in\mathbb{R}^n$ (بردارها را ستونی در نظر می‌گیریم) داشته باشیم $X^TAX=۰$. کـه در آن X^T ترانهاده‌ی X است، در این صورت:

۱) $A^T=-A$ ۲) $A^TA^۲=۰$ ۳) $A^T=A$ ۴) $A=۰$

۴۸ـ فرض کنید V فضای برداری توابع پیوسته از مجموعه $[۰,۱]$ به $\mathbb{R}$ روی میدان $\mathbb{R}$ باشد. تبدیل خطی $T:V\to V$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(f(x))=\int_۰^۱(۳x^۳y-۵x^۴y^۲)f(y)dy$$

در این‌صورت رتبه T برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) نامتناهی

۴۹ـ دو جمله زیر را درنظر بگیرید:

(*) اگر به ازای بردار ثابت b، دستگاه $Ax=b$ روی اعداد حقیقی بیش از یک جواب داشته باشد، آن‌گاه دستگاه $Ax=۰$ بی‌نهایت جواب دارد.

(**) اگر u,v,w بردارهایی در $\mathbb{R}^۲$ باشند به طوری که هیچ دوتای آن‌ها همراستا نباشند، آن‌گاه دستگاه $Ax=w$ که در آن $A=[u\ \ v]$، جواب یکتا دارد.

کدام گزینه صحیح است؟

۱) فقط (*) درست است. ۲) فقط (**) درست است. ۳) هر دو درست هستند. ۴) هر دو نادرست هستند.

۵۰ـ فرض کنید $U_۱,U_۲,U_۳$ سه زیرفضا از یک فضای برداری با بعد متناهی باشند به طوری که اشتراک هر دوتای آن‌ها صفر است. کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\dim(\sum_{i=۱}^{۳}U_i)=\sum_{i=۱}^{۳}\dim U_i$

۲) $\dim(\sum_{i=۱}^{۳}U_i)+\dim(U_۱+U_۲)+\dim(U_۲+U_۳)+\dim(U_۱+U_۳)\le\sum_{i=۱}^{۳}\dim(U_i)$

۳) $\dim(\sum_{i=۱}^{۳}U_i)+\sum_{i=۱}^{۳}\dim(U_i)\le\dim(U_۱+U_۲)+\dim(U_۱+U_۳)+\dim(U_۲+U_۳)$

۴) $\dim(\sum_{i=۱}^{۳}U_i)=\sum_{i=۱}^{۳}\dim(U_i)+\dim(U_۱+U_۲)+\dim(U_۱+U_۳)+\dim(U_۲+U_۳)$

۵۱ـ فرض کنید A ماتریسی ۴×۸ باشد کـه درایـه‌هـای آن اعـدادی حقیقـی هسـتند. بعـلاوه فـرض کنیـد $W_۱=\{AX\mid X\in\mathbb{R}^۴\}$ و $W_۲=\{AY\mid Y\in\mathbb{C}^۴\}$. اگر $W_۱$ به عنوان زیرفضای $\mathbb{R}^۸$، n بعدی و $W_۲$ به عنوان زیرفضای $\mathbb{C}^۸$، m بعدی باشند، کدام مورد صحیح است؟

۱) $m=n+۴$ ۲) $n=۲m$ ۳) $m=۲n$ ۴) $m=n$

مبانی آنالیز ریاضی

۵۲ـ متر d را بر $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(x,y)=\left|\frac{x}{۱+|x|}-\frac{y}{۱+|y|}\right|$$

کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر $x_n\to x$ در متر اقلیدسی، آن‌گاه $x_n\to x$ در متر d

۲) $(\mathbb{R},d)$ یک فضای متریک کامل است.

۳) $(\mathbb{R},d)$ یک فضای متریک کراندار است.

۴) اگر $U\subseteq\mathbb{R}$ نسبت به متر d باز باشد نسبت به متر اقلیدسی $\mathbb{R}$ نیز باز است.

گزینه ۲ نادرست است زیرا در قضیه‌ای ثابت کردیم که اگر X مجموعه‌ای شمارش‌ناپذیر و $f: X \to Y$ تابعی یک‌به‌یک باشد، آنگاه Y هم شمارش‌ناپذیر خواهد بود. پس اگر به ازای مجموعه‌ی شمارش‌ناپذیر X، تابع یک به یک $f: X \to Q$ وجود داشته باشد، آنگاه Q هم باید شمارش‌ناپذیر باشد که باشمارش‌پذیر بودن Q در تناقض است، پس چنین تابعی لزوماً وجود ندارد.

گزینه۳ نادرست است. مثلاً اگر تابع $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را با ضابطه‌ی $f(k) = ۲k$ تعریف کنیم. واضح است که این تابع یک به یک است. اما پوشا نیست زیرا به ازای $۳ \in \mathbb{N}$، عددی چون $k \in \mathbb{N}$ وجود ندارد که $۲k = ۳$.

۴۵ـ گزینه «۲» فرض می‌کنیم $b \in Y$. چون f پوشا است، عضو $a \in A$ موجود است به طوری که $f(a) = b$، پس $f(a) \in Y$ و از آن داریم:

$$a \in f^{-۱}(Y) \Rightarrow b = f(a) \in f(f^{-۱}(Y)) \Rightarrow Y \subseteq f(f^{-۱}(Y)) \quad (I)$$

حال فرض می‌کنیم $b \in f(f^{-۱}(Y))$. با توجه به تعریف $f(f^{-۱}(Y))$ داریم:

$$f(f^{-۱}(Y)) = \{y \mid \exists x \in f^{-۱}(Y); f(x) = y\} = \{y \mid f(x) \in Y; f(x) = y\} = \{y \mid y \in Y\}$$

بنابراین $b \in Y$، در نتیجه $f(f^{-۱}(Y)) \subseteq Y$ (II). از (I) و (II) داریم $f(f^{-۱}(Y)) = Y$

برای رد گزینه‌های ۱ و ۳ به مثال زیر توجه کنید:

فرض کنید $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ و $B = \{۲,۴,۵\}$ و $f: A \to B$ تابعی به صورت $f = \{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۲),(۴,۵)\}$ باشد، اگر $X = \{۲,۳\}$ و $Z = \{۱,۴\}$ زیر مجموعه‌هایی از A باشند، داریم:

$$f(X) = \{۲,۴\} \Rightarrow f^{-۱}(f(X)) = \{۱,۲,۳\} \Rightarrow f^{-۱}(f(X)) \neq X \Rightarrow \text{گزینه‌ی ۱ نادرست است}$$

$$\left.\begin{array}{l} X \cap Z = \varnothing \Rightarrow f(X \cap Z) = f(\varnothing) = \varnothing \\ f(X) \cap f(Z) = \{۲,۴\} \cap \{۲,۵\} = \{۲\} \end{array}\right\} \Rightarrow f(X \cap Z) \neq f(X) \cap f(Z) \Rightarrow \text{گزینه ۳ نادرست است}$$

گزینه‌ی ۴ نادرست است، زیرا داریم:

$$x \in f(X \cup Z) \Leftrightarrow f^{-۱}(x) \in X \cup Z \Leftrightarrow f^{-۱}(x) \in X \vee f^{-۱}(x) \in Z \Leftrightarrow x \in f(X) \vee x \in f(Z) \Leftrightarrow x \in f(X) \cup f(Z)$$

بنابراین همواره به ازای هر $Z \subseteq A$ و X داریم $f(X \cup Z) = f(X) \cup f(Z)$.

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی

۴۶ـ گزینه «۱» دو ماتریس مشابه همواره دارای مقادیر ویژه یکسان (و در نتیجه چندجمله‌ای مشخصه مینیمال یکسان) و اثر یکسان هستند. از سویی مقادیر ویژه ماتریس‌های قطری و مثلثی، همان مقادیر روی قطر اصلی می‌باشد. پس ماتریس مطرح شده در صورت سؤال دارای مقادیر ویژه ۲ و -۱ است و چون ۲ دو بار وجود دارد، لذا چند جمله مشخصه آن به صورت $f(x) = (x-۲)^۲(x+۱)$ و در نتیجه چندجمله‌ای مینیمال آن $f(x) = (x-۲)(x+۱)$ است. حال اگر A بخواهد با یک ماتریس قطری مشابه باشد (یعنی قطری شدن باشد) باید $g(A) = ۰$، یعنی:

$$(A-۲I)(A+I) = ۰$$

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ a & ۰ & ۰ \\ b & c & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ a & ۳ & ۰ \\ b & c & ۰ \end{bmatrix} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۳a = ۰ \\ ۳b + ac - ۳b = ۰ \end{cases}$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

و لذا $a = ۰$ این شرایط را ایجاد می‌کند؛ پس گزینه (۱) صحیح است.

۴۷ـ گزینه «۱» ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. برای هر $X \in \mathbb{R}^۲$ که $X = \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix}$ داریم:

$$\begin{pmatrix} x_۱ & x_۲ \end{pmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_۲ & -x_۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} = x_۱x_۲ - x_۱x_۲ = ۰$$

پس این ماتریس در شرایط سؤال صدق می‌کند. پس گزینه (۴) نادرست است. همچنین داریم:

$$A^T = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۶۱ـ فرض کنیم A,B دو زیرمجموعه در $\mathbb{R}^n$ باشند و $A-B=\{a-b : a\in A, b\in B\}$ در این صورت:

۱) اگر $A-B$ همبند باشد حداقل یکی از A و B همبند است.

۲) اگر A و B همبند باشند آن‌گاه $A-B$ همبند است.

۳) اگر A و B بسته باشند آنگاه $A-B$ بسته است.

۴) اگر A فشرده و B بسته باشد آنگاه $A-B$ فشرده است.

۶۲ـ فرض کنیم E و F دو زیر مجموعه ناتهی در $\mathbb{R}$ باشند، کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $(x,y)\in(E\times F)^\circ$ آنگاه $x\in E^\circ$ و $y\in F^\circ$

۲) اگر $(x,y)\in(E\times F)'$ آنگاه $x\in E'$ و $y\in F'$

۳) اگر $(E\times F)'\neq\emptyset$ آنگاه $E'\neq\emptyset$ و $F'\neq\emptyset$

۴) اگر $E^\circ\bigcup F^\circ\neq\emptyset$ آنگاه $(E\times F)^\circ\neq\emptyset$

۶۳ـ حداقل شرایط روی زیر مجموعه E از $\mathbb{R}$ که گزاره زیر راست باشد، کدام است؟

برای هر دنباله نزولی و تودرتوی $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ از زیر مجموعه‌های فشرده $\mathbb{R}$، اگر $\bigcap_{k=1}^{\infty}K_n\subseteq E$ آنگاه یک n وجود دارد که $K_n\subseteq E$.

۱) E بسته و لزوماً کراندار است.

۲) E بسته و نه لزوماً کراندار است.

۳) E باز و لزوماً کراندار است.

۴) E باز و نه لزوماً کراندار است.

مبانی آنالیز عددی

۶۴ـ در یک دستگاه ممیز شناور نرمال شده برای اعداد حقیقی با روش بریدن برای ارقام غیرقابل نمایش در مبنای ۲، هر عدد $x\neq 0$ به صورت $\pm(0.d_1d_2d_3d_4)_2\times 2^{\pm d_5d_6}$ نمایش داده می‌شود که $1\le d_1\le 2$، $0\le d_i\le 2$، $i=2,\dots,6$، فاصله بین عدد ۷ و کوچک‌ترین عدد قابل نمایش بزرگ‌تر از ۷ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{7}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۶۵ـ در رابطه زیر گزینه صحیح برای نقطه‌چین کدام است؟

$$\frac{f(x+\frac{h}{2})-2f(x)+f(x-\frac{h}{2})}{(\frac{h}{2})^2}+o(h^2)=\dots$$

۱) $f'(x)$ ۲) $f''(x+h)$ ۳) $f''(x)$ ۴) $f'(x+h)$

۶۶ـ فرض کنید روش نیوتن برای حل مسأله $\max(\sin x\cos x-1)$ به یک عدد مثبت x^* همگرا شده است. نرخ همگرایی مجانبی برابر کدام است؟

۱) یک ۲) دو ۳) خطی ۴) زیرخطی

۶۷ـ مقدار d، تخمین مشتق تابع $y(x)=\sqrt{x}$ در نقطه $\bar{x}=1/05$ با $d=\frac{y_1-y_2}{0/05}$ که در آن، $y_1=\sqrt{1/05}$ و $y_2=1$ خطای برشی متناسب با ..... دارد.

۱) $0/0001$ ۲) $0/001$ ۳) $0/015$ ۴) $0/1$

۶۸ـ فرمول انتگرال‌گیری عددی $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx\simeq w_1f(0)+w_2f'(0)+w_3f(1)$ برای چند جمله‌ای‌های تا درجه‌ی ۲ دقیق است. تقریب این فرمول برای $\int_0^1\frac{dx}{1+x}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{7}{12}$ ۳) $\frac{11}{12}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۶۹ـ تخمین $y(0/1)$ برای جواب معادله دیفرانسیل به‌صورت $y(0)=1$، $y'(x)=e^{x^3}$ با استفاده از سری تیلور مرتبه ۳ (تا مشتق سوم) به ازای یک قدم $h=0/1$ برابر کدام است؟

۱) $1/13$ ۲) $1/111$ ۳) $1/11$ ۴) $1/1$

۶۱ـ گزینه «۲» فرض کنید $A=\{(x,y):x^۲+y^۲\le ۱\}\cup\{(\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲},\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲})\}$ و $B=\{(۰,۰),(\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲})\}$ در این صورت $A-B$ همبند است ولی نه A و نه B هیچ‌کدام همبند نیستند.

فرض کنید $A=\{(x,y):y=\frac{۱}{x},x>۰\}$ و $B=\{(x,y):y=-\frac{۱}{x},x<۰\}$ در این صورت $A-B$ بسته نیست زیرا $(۰,۰)\notin A-B$. همچنین اگر A مجموعه تک نقطه‌ای $\{۰\}$ و $B=(-\infty,۰]$، آنگاه $A-B=[۰,\infty)$ که فشرده نیست. پس گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نادرستند.

◆ ◆ ◆ ◆

۶۲ـ گزینه «۱» فرض کنید $(x,y)\in(X\times F)^\circ$، پس:

$$\exists r_۱,r_۲;(x,y)\in N_{r_۱}(x)\times N_{r_۲}(y)\subseteq E\times F$$
$$\Rightarrow x\in N_{r_۱}(x)\subseteq E\ ,y\in N_{r_۲}\subseteq F\quad\Rightarrow x\in E^\circ,y\in F^\circ$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۳ـ گزینه «۴» در حل این سؤال فرض بر این است که دنباله مجموعه‌ها اکیداً نزولی است یعنی $K_۱\supsetneq K_۲\supsetneq\cdots\supsetneq K_{n-۱}\supsetneq K_n\supsetneq\cdots$ زیرا در غیر این صورت هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد. فرض کنید E باز باشد (و نه لزوماً کراندار) و $\bigcap_{n=۱} K_n\subseteq E$.

به برهان خلف فرض کنید به ازای هر n، $K_n\not\subseteq E$، پس به ازای هر n، $K_n\cap E^c\neq\phi$. چون E^c بسته و K_n فشرده، پس $K_n\cap E^c$ فشرده و دنباله $\{K_n\cap E^c\}$ نزولی و تو در تو است و لذا $\bigcap_{n=۱}^{\infty}(K_n\cap E^c)\neq\phi$ و این با $\bigcap_{n=۱}^{\infty}K_n\subseteq E$ در تناقض است.

◆ ◆ ◆ ◆

مبانی آنالیز عددی

۶۴ـ گزینه «۱» عدد ۷ در دستگاه نمایش ممیز شناور نرمال شده $\pm(۰/d_۱d_۲d_۳d_۴)_۲\times۲^{\pm d_۵d_۶}$ دارای نمایش $(۰/۱۱۱۰)_۲\times۲^{(۱۱)_۲}=۷$ است. بنابراین فاصله آن تا عدد قابل نمایش بعد از آن برابر $\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲^۴}\times۲^{(۱۱)_۲}=(۰/۰۰۰۱)_۲\times۲^{(۱۱)_۲}$ می‌باشد.

به نظر می‌رسد در دفترچه سنجش، به اشتباه در صورت سؤال به جای مبنای ۳، مبنای ۲ تایپ شده است! با این فرض، نمایش عدد ۷ در دستگاه نمایش ممیز شناور نرمال شده $\pm(۰/d_۱d_۲d_۳d_۴)_۳\times۳^{\pm d_۵d_۶}$ به صورت $(۰/۲۱۰۰)_۳\times۳^{(۰۲)_۳}=۷$ است. بنابراین فاصله آن تا عدد قابل نمایش بعد از آن برابر $\frac{۱}{۹}=\frac{۱}{۳^۴}\times۳^۲=(۰/۰۰۰۱)_۳\times۳^{(۰۲)_۳}$ می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۶۵ـ گزینه «۳» بسط تیلور توابع موجود در کسر تقریب را می‌نویسیم:

$$۱\quad:f(x+\frac{h}{۲})=f(x)+\frac{h}{۲}f'(x)+\frac{(\frac{h}{۲})^۲}{۲}f''(x)+\frac{(\frac{h}{۲})^۳}{۶}f'''(x)+\frac{(\frac{h}{۲})^۴}{۲۴}f^{(۴)}(\eta_۱)$$
$$-۲\quad:f(x)=f(x)$$
$$۱\quad:f(x-\frac{h}{۲})=f(x)-\frac{h}{۲}f'(x)+\frac{(\frac{h}{۲})^۲}{۲}f''(x)-\frac{(\frac{h}{۲})^۳}{۶}f'''(x)+\frac{(\frac{h}{۲})^۴}{۲۴}f^{(۴)}(\eta_۲)$$

$$f(x+\frac{h}{۲})-۲f(x)+f(x-\frac{h}{۲})=(\frac{h}{۲})^۲f''(x)+\frac{(\frac{h}{۲})^۴}{۶}\frac{f^{(۴)}(\eta_۱)+f^{(۴)}(\eta_۲)}{۲}$$

بنابراین با تشکیل کسر تقریب خواهیم داشت:

$$f''(x)=\frac{f(x+\frac{h}{۲})-۲f(x)+f(x-\frac{h}{۲})}{(\frac{h}{۲})^۲}-\frac{(\frac{h}{۲})^۲}{۶}f^{(۴)}(\eta)=\frac{f(x+\frac{h}{۲})-۲f(x)+f(x-\frac{h}{۲})}{(\frac{h}{۲})^۲}+O(h^۲)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۶ـ گزینه «۲» برای محاسبه اکسترمم تابع $f(x)=\sin x\cos x-۱=\frac{۱}{۲}\sin۲x-۱$ با استفاده از روش نیوتن کافی است از دستور نیوتن برای معادله $f'(x)=\cos۲x=۰$ به شکل زیر استفاده کنیم:

$$x_{n+۱}=x_n-\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}=x_n-\frac{\cos۲x_n}{-۲\sin۲x_n}=x_n+\frac{۱}{۲}\cot۲x_n$$

در واقع اکسترمم نسبی تابع در صورت وجود ریشه مشتق آن است. این دنباله به $x^* = \frac{\pi}{4}$ همگراست. از طرفی $f''(\frac{\pi}{4}) = -2\sin 2(\frac{\pi}{4}) = -2 \neq 0$ و $f'''(\frac{\pi}{4}) = -4\cos 2(\frac{\pi}{4}) = 0$. در نتیجه نرخ همگرایی مجانبی آن بیشتر از ۲ است.

◆ ◆ ◆ ◆

۶۷ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با فرض $y(x) = \sqrt{x}$ و $x = 1/05$ و $h = 0/05$ رابطه تخمین مشتق داده شده به شکل زیر است:

$$d = \frac{y_1 - y_2}{0/05} = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} = \frac{1}{h}\big(y(x)\big) - \frac{1}{h}\left(y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(\eta)\right) = y'(x) - \frac{h}{2}y''(\eta)$$

پس خطای برشی متناسب با $h = 0/05$ است که نزدیک‌ترین گزینه به آن گزینه‌ی (۴) است.

◆ ◆ ◆ ◆

۶۸ـ گزینه «۱» رابطه انتگرال‌گیری عددی داده شده برای چندجمله‌ای‌های تا درجه دو دقیق است. لذا برای محاسبه ضرایب مجهول کافی است $f(x)$ را به ترتیب برابر چندجمله‌ای‌های ۱، x و x^2 قرار دهیم.

$$f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 f(\sqrt{x})dx = \int_0^1 dx = 1 \qquad \Rightarrow 1 = w_1 f(0) + w_2 f'(0) + w_3 f(1) = w_1 + w_3$$

$$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 f(\sqrt{x})dx = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \frac{3}{2} = w_1 f(0) + w_2 f'(0) + w_3 f(1) = w_2 + w_3$$

$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 f(\sqrt{x})dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \frac{1}{2} = w_1 f(0) + w_2 f'(0) + w_3 f(1) = w_3$$

بنابراین $w_1 = w_3 = \frac{1}{2}$ و $w_2 = \frac{1}{6}$ هستند. درنتیجه مقدار انتگرال داده شده چنین است:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x^2}} = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{6}\times 0 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۹ـ گزینه «۴» چون $y'(x) = e^{x^3}$ است، پس $y''(x) = 3x^2e^{x^3}$ و $y'''(x) = 6xe^{x^3} + 9x^4e^{x^3}$ می‌باشد.
در نتیجه $y'_0 = y'(0) = 1$ و $y''_0 = y''(0) = 0$ و $y'''_0 = y'''(0) = 0$ است. بنابراین با استفاده از دستور تیلور مرتبه سوم مقدار مورد نظر به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$y(0/1) \simeq y_1 = y_0 + \frac{h}{1!}y'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 + \frac{h^3}{3!}y'''_0 = 1 + \frac{0/1}{1}\times 1 = 1/1$$

◆ ◆ ◆ ◆

مبانی احتمال

۷۰ـ گزینه «۳» ابتدا باید چارک اول و سوم را به‌دست آوریم:

یادآوری: چارک اول عددی است که $\frac{1}{4}$ ام داده‌ها از آن کوچک‌تر باشند و چارک سوم عددی است که $\frac{3}{4}$ام داده‌ها از آن کمتر باشند.

در این سؤال ۲۵ داده داریم. چارک اول عددی است که $\frac{20}{4} = 5$ داده از آن کمتر باشد در واقع داده ششم چارک اول است و چارک سوم عددی است که $\frac{3\times 20}{4} = 15$ داده از آن بیشتر باشد در واقع داده پانزدهم چارک سوم است. باقیمانده داده‌ها عبارتند از:

۷	۶ ۷ ۸
۸	۱ ۲ ۳ ۴ ۴ ۵ ۶ ۶

حال میانگین داده‌های باقیمانده را محاسبه می‌کنیم:

$$\overline{x} = \frac{1}{11}\{7/6 + 7/7 + 7/8 + 8/1 + 8/2 + 8/3 + 8/4 + 8/5 + 8/6 + 8/6\} = \frac{90/2}{11} = 8/2$$

۶۲ـ هرگاه تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Q}$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه:

۱) مشتق f حداکثر در دو نقطه صفر است و f یکنواست.
۲) مشتق f هیچ‌گاه صفر نمی‌شود و f اکیداً یکنواست.
۳) $f'(x)>0$ برای هر x و f اکیداً صعودی است.
۴) مشتق f همواره صفر است.

۶۳ـ فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای با جملات مثبت باشد و $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ همگرا است.
۲) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ همگرا است.
۳) $\sum_{n=1}^{\infty}na_n$ همگرا است.
۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ واگرا است.

مبانی آنالیز عددی

۶۴ـ فرض کنید هر عدد حقیقی x دارای نمایش به‌صورت $\pm(0/a_1a_2a_3)_2\times 2^e$ در مبنای ۲ است، که $a_1\neq 0$ و $-1\le e\le 2$. M بزرگ‌ترین عدد قابل نمایش و T بزرگ‌ترین عدد منفی قابل نمایش، کدام هستند؟

۱) $T=-\frac{1}{4}\ ,\ M=7$
۲) $T=-\frac{1}{4}\ ,\ M=\frac{7}{2}$
۳) $T=-\frac{7}{2}\ ,\ M=\frac{7}{2}$
۴) $T=-\frac{1}{8}\ ,\ M=7$

۶۵ـ فرض کنید f مشتقات پیوسته مرتبه دوم دارد، و $\forall x\in(0,1)\ ,\ |f''(x)|<1$. اگر تابع f به‌صورت خطی در $x_0=0$ و $x_1=1$ تقریب زده شود، آنگاه کران بالا برای خطای این تقریب در بازه $[0,1]$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{8}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) ۱

۶۶ـ فرض کنید به‌ازای یک مقدار ثابت c، $f(x)=\frac{1}{x+c}$. در این صورت $f[x_0,x_1,\dots,x_n]$، برابر است با... .

۱) ۰
۲) $\frac{(n+1)!(-1)^n}{(x_0+c)(x_1+c)\cdots(x_n+c)}$
۳) $\frac{n!(-1)^n}{(x_0+c)(x_1+c)\cdots(x_n+c)}$
۴) $\frac{(-1)^n}{(x_0+c)(x_1+c)\cdots(x_n+c)}$

۶۷ـ رابطه تکراری $x_{k+1}=\sqrt{x_k+2}+(x_k-2)\ ,\ k=0,1$، به ازای ..... است.

۱) $x_0\neq 2$ واگرا
۲) $x_0\neq 2$ همگرای مرتبه دوم
۳) $x_0<2$ همگرای خطی
۴) $x_0>2$ همگرای خطی

۶۸ـ روش زیر را در نظر بگیرید. مقادیر w_1 و w_2 چقدر باشند تا فرمول بالا برای توابع $\sin x$ و $\cos x$، مقدار دقیق انتگرال را به دست ندهد؟

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\approx w_1f(\frac{\pi}{2})+w_2f(-\frac{\pi}{2})$$

۱) $w_1=w_2=1$
۲) $w_1=w_2=2$
۳) $w_2=0, w_1=-2$
۴) $w_1=w_2=\frac{\pi}{2}$

۶۹ـ کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر A ماتریس متقارن باشد، آنگاه A^2 تجزیه چولسکی یگانه دارد.
۲) اگر A ماتریس معین مثبت متقارن باشد، آنگاه تجزیه چولسکی A وجود دارد.
۳) اگر A در دستگاه $Ax=b$ معین مثبت باشد، آنگاه دستگاه مزبور جواب یگانه دارد.
۴) ماتریس همانی I_n به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$، معین مثبت است.

مبانی احتمال

۷۰ـ عدد ۲۴ را به چند طریق می‌توان به‌صورت مجموع ۴ عدد بیان کرد که همگی مضرب ۳ باشند؟

۱) $\binom{7}{4}$
۲) $\binom{8}{3}$
۳) $\binom{11}{3}$
۴) $\binom{11}{4}$

مبانی آنالیز عددی

۶۴ـ گزینه «۲» برای یافتن بزرگ‌ترین عدد مثبت کافی است $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ و $e = 2$ باشند. $M = (0/111)_2 \times 2^2 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}) \times 2^2 = \frac{7}{2}$

و برای بزرگ‌ترین عدد منفی باید $a_2 = a_3 = 0$ و $a_1 = 1$ و $e = -1$ باشند. $T = -(0/100)_2 \times 2^{-1} = -(\frac{1}{2}) \times 2^{-1} = -\frac{1}{4}$

۶۵ـ گزینه «۲» خطای درون‌یابی خطی تابع f در بازه $[x_i, x_{i+1}]$ به صورت زیر می‌باشد:

$$E(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2!} f'(\eta) \quad , \quad \eta \in [x_i, x_{i+1}] \quad , \quad E(x) \le \frac{h^2}{8} M \quad , \quad M = \max |f''(\eta)|$$

بنابراین برای $h = 1$ و $M = 1$، کران بالای خطا برابر $\frac{1}{8}$ است.

۶۶ـ گزینه «۴» برای اثبات درستی گزینه (۴) کافی است از روش استقراء استفاده کنیم. اما با فرض $n = 1$ و $c = 0$ گزینه‌های (۱) و (۲) غلط خواهند بود و با فرض $n = 2$ و $c = 0$ و $x_0 = x_1 = x_2$ و استفاده از رابطه $f[x_0, x_0, x_0] = \frac{1}{2!} f'(x_0)$ نادرستی گزینه (۳) را خواهیم داشت. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست می‌باشد.

۶۷ـ گزینه «۱» اگر دنباله به x همگرا باشد، با حدگیری از طرفین رابطه تکراری نتیجه می‌گیریم که $x = 2$ می‌باشد. با فرض $x_0 > 2$، به کمک استقراء ثابت می‌شود که برای هر عدد حسابی k، مقدار x_k بزرگ‌تر از ۲ است. بنابراین:

$$x_{k+1} - x_k = \sqrt{x_k + 2} - 2 > \sqrt{2 + 2} - 2 = 0$$

یعنی دنباله x_k، صعودی اکید و بزرگ‌تر از ۲ می‌باشد؛ لذا نمی‌تواند به ۲ همگرا باشد. به‌طور مشابه با فرض $x_0 < 2$، دنباله x_k، نزولی اکید و کوچک‌تر از ۲ خواهد بود و نمی‌تواند به ۲ همگرا باشد؛ در نتیجه برای $x_0 \neq 2$ دنباله واگرا است.

۶۸ـ گزینه «۳» در رابطه تقریبی $f(x)$ را برابر $\sin x$ قرار می‌دهیم. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx \approx \omega_1 \sin(\frac{\pi}{2}) + \omega_2 \sin(-\frac{\pi}{2})$

بنابراین $\omega_1 - \omega_2 = 0$ می‌باشد. پس گزینه مورد نظر گزینه (۳) است.

۶۹ـ گزینه «۱» فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، پس $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. یعنی A^2 تجزیه چولسکی یکتا ندارد.

مبانی احتمال

۷۰ـ گزینه «۱» چون عدد ۲۴ به‌صورت مجموع چهار عدد که مضرب ۳ نیز باشند بیان می‌شود، بنابراین:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24$$

به‌طوری‌که $x_i = 3y_i$ و همچنین $1 \le y_i$ بنابراین: $\sum_{i=1}^{4} y_i = 8 \quad \forall 1 \le y_i$

از طرفی چون به‌دنبال تمام جواب‌های صحیح می‌باشیم، با تعویض متغیر $t_i = y_i - 1$ خواهیم داشت: $\sum_{i=1}^{4} t_i = 4 \quad , \quad \forall 0 \le t_i \quad (1)$

و می‌دانیم که تعداد جواب‌های صحیح معادله (۱) به‌صورت $\binom{n + r - 1}{r} + \binom{4 + 4 - 1}{4} = \binom{7}{4}$ می‌باشد.

۶۸ـ فرض کنید $h(x)=x-\frac{f(x)}{g(x)}$ ، $f(\alpha)=0$ و $g(\alpha)\neq 0$، چه روابطی بین f و g برقرار باشد تا دنباله $\{x_n\}$ با ضابطه $x_{n+1}=h(x_n)$، در صورت همگرایی، مرتبه همگرایی دست کم برابر با ۳ داشته باشد؟ (فرض کنید $f,g\in c^2(R)$)

۱) $f''(\alpha)=g(\alpha)+g'(\alpha), f'(\alpha)=g(\alpha)$
۲) $f''(\alpha)=2g(\alpha), f'(\alpha)=g(\alpha)$
۳) $f''(\alpha)=2g'(\alpha)+g(\alpha), f'(\alpha)=g(\alpha)$
۴) $f''(\alpha)=2g'(\alpha), f'(\alpha)=g(\alpha)$

۶۹ـ در یک دستگاه ممیز شناور با مبنای ۸ که اعداد به صورت $\pm 0/d_1d_2...d_{10}\times 8^e$ با $d_1\neq 0$ و $0\leq d_i\leq 7$ برای $i=1,2,...,10$ و $-63\leq e\leq 63$ نمایش داده می‌شوند، بیشترین فاصله بین دو عدد متوالی قابل نمایش چقدر است؟

۱) 8^{-10} ۲) 8^{22} ۳) 8^{53} ۴) 8^{63}

۷۰ـ در داده‌های مقابل، با استفاده از نمودار جعبه‌ای، چند داده دور افتاده وجود دارد؟ 14,18,12,44,34,66,37,14,34,14,7,23,14,22,21

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۱ـ به چند طریق می‌توان ۵ حرف A و ۶ حرف B را در یک ردیف قرار داد که از راست و چپ یکسان خوانده شوند؟

۱) $\frac{5!}{3!}$ ۲) $\frac{10!}{5!5!}$ ۳) $\frac{5!}{3!2!}$ ۴) $\frac{1}{2}\times\frac{11!}{5!6!}$

۷۲ـ کیسه‌ای شامل ۴ مهره قرمز و ۶ مهره آبی است. کیسه دیگری شامل ۱۶ مهره قرمز و تعدادی مجهول مهره آبی است. یک مهره به تصادف از هر کیسه انتخاب می‌شود، احتمال این‌که دو مهره انتخابی هم‌رنگ باشند ۴۴/۰ است. تعداد مهره‌های آبی کیسه دوم کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۰

۷۳ـ فرض کنید $A_1,...,A_n$ پیشامدهای مستقلی باشند به‌طوری که برای هر $i=1,...,n$ داشته باشیم $P(A_i)=\frac{1}{i+1}$. احتمال این‌که حداقل یکی از A_i ها رخ دهد کدام است؟

۱) $\frac{1}{n+1}$ ۲) $\frac{n}{n+1}$ ۳) $\frac{n-1}{n}$ ۴) $\frac{1}{n}$

۷۴ـ از مجموعه $\{1,2,3,...,10\}$ تعداد ۶ عدد را به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم، احتمال این‌که کوچک‌ترین عدد انتخابی از ۴ بزرگ‌تر باشد، کدام است؟

۱) $(\frac{3}{5})^6$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $(\frac{1}{10})^6$ ۴) $\frac{1}{210}$

۷۵ـ اگر $P(B\mid A^c)=\frac{3}{4}$ و $P(B^c\mid A)=\frac{1}{4}$، مقدار $P(A)=\frac{3}{4}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۱

دروس تخصصی (آنالیز ریاضی، مبانی ترکیبیات، مبانی جبر و بهینه‌سازی خطی)

۷۶ـ فرض کنید متریک d روی $\mathbb{R}$ به‌صورت $d(x,y)=\begin{cases}|x|+|y| & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$ تعریف شده باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) اگر A فشرده باشد آن‌گاه A متناهی است.
۲) $\mathbb{N}$ باز است.
۳) $(\mathbb{R},d)$ همبند است.
۴) $\mathbb{Z}$ باز است.

۷۷ـ در فضای متریک (X,d) کدام گزینه برای هر $A,B\subseteq X$ درست است؟ (A' مجموعه نقاط حدی A، A° مجموعه نقاط درونی A و ∂A مرز A است.)

۱) اگر $(A\cup B)'\neq\phi$ آن‌گاه $A'\neq\phi$ یا $B'\neq\phi$.
۲) اگر $(A\cup B)^\circ\neq\phi$ آن‌گاه $A^\circ\neq\phi$ یا $B^\circ\neq\phi$.
۳) اگر $\partial(A\cup B)=\phi$ آن‌گاه $\partial(A)=\phi$ یا $\partial(B)=\phi$.
۴) اگر $A\cup B$ در X چگال باشد، آن‌گاه A یا B در X چگال هستند.

۷۸ـ همه گزینه‌های زیر در فضای متریک (X,d)، کامل بودن X (هر دنباله کوشی در X همگرا باشد) را نتیجه می‌دهند، به جز:

۱) هر دنباله کوشی دارای زیردنباله‌ای همگرا باشد.

۲) به ازای هر دنباله کوشی $\{x_n\}$، مجموعه $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ فشرده باشد.

۳) هر دنباله دارای زیردنباله‌ای کوشی باشد.

۴) هر دنباله کران‌دار دارای زیردنباله‌ای همگرا باشد.

۷۹ـ اگر (X,d) یک فضای متریک باشد و $E \subseteq X$، کدام گزینه درست است؟

۱) اگر X کران‌دار و E ناشمارا باشد آن‌گاه $E' \neq \phi$.

۲) اگر X کامل (هر دنباله کوشی در آن همگرا) و E ناشمارا باشد آن‌گاه $E' \neq \phi$.

۳) اگر X بی‌کران و E ناشمارا باشد آن‌گاه $E' \neq \phi$.

۴) اگر X فشرده و E ناشمارا باشد آن‌گاه E' ناشمارا است.

۸۰ـ اگر E زیرمجموعه ناتهی و کران‌دار از $\mathbb{R}^2$ باشد که $E' = \phi$، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) مرز E می‌تواند تهی باشد.

۲) E^c می‌تواند ناهمبند باشد.

۳) هر تابع $f : E \to \mathbb{R}$ ماکزیمم خود را اختیار می‌کند.

۴) تابع پیوسته و بی‌کران $f : E \to \mathbb{R}$ وجود دارد.

۸۱ـ اگر X و Y دو فضای متریک باشند و $f : X \to Y$، کدام گزینه درست است؟

۱) اگر برای هر زیرمجموعه فشرده K از Y، $f^{-1}(K)$ در X فشرده باشد، آن‌گاه f پیوسته است.

۲) اگر f پیوسته و $E \subseteq X$ کران‌دار باشد آن‌گاه $f(E)$ نیز کران‌دار است.

۳) اگر f پیوسته و $K \subseteq Y$ فشرده باشد آن‌گاه $f^{-1}(K)$ نیز در X فشرده است.

۴) اگر برای هر زیرمجموعه باز و کران‌دار U از Y، $f^{-1}(U)$ در X باز باشد، آن‌گاه f پیوسته است.

۸۲ـ فرض کنیم X و Y فضاهای متریک باشند و $f : X \to Y$، هر دنباله کوشی را به یک دنباله کوشی تصویر کند، کدام گزینه درست است؟

۱) تابع f پیوسته یکنواخت است.

۲) تابع f می‌تواند ناپیوستگی اساسی داشته باشد.

۳) تابع f پیوسته است ولی لزوماً پیوسته یکنواخت نیست.

۴) تابع f می‌تواند ناپیوسته باشد ولی ناپیوستگی‌های آن از نوع رفع شدنی هستند.

۸۳ـ فرض کنید $C[0,1]$ فضای توابع پیوسته حقیقی مقدار بر $[0,1]$ مجهز به متر $d(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| : x \in [0,1]\}$ باشد، کدام گزینـه در مورد مجموعه $\{f \in C[0,1] : 0 < \int_0^1 f(x)dx < 1\}$ درست است؟

۱) باز است ولی کران‌دار نیست.

۲) باز و کران‌دار است.

۳) کران‌دار است ولی باز نیست.

۴) نه کران‌دار است و نه باز.

۸۴ـ اگر اعضای دنباله $\{f_n\}$ و f توابعی روی $\mathbb{R}$ باشند، آن‌گاه همه عبارات زیر درست هستند، به‌جز:

۱) اگر $f_n \to f$ به‌طور یکنواخت روی دو مجموعه A و B آن‌گاه $f_n \to f$ به‌طور یکنواخت روی $A \cup B$.

۲) اگر $f_n \to f$ به‌طور نقطه‌وار روی مجموعه فشرده K، آن‌گاه $f_n \to f$ به‌طور یکنواخت روی K.

۳) اگر $f_n \to f$ به‌طور یکنواخت و g کران‌دار باشد، آن‌گاه $f_n g \to fg$ به‌طور یکنواخت.

۴) اگر $f_n \to f$ به‌طور نقطه‌وار و f_nها توابعی صعودی باشند آن‌گاه f نیز صعودی است.

۸۵ـ فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی هم‌پیوسته بر فضای متریک فشرده X باشد، کدام گزینه همگرایی یکنواخت دنباله $\{f_n\}$ را نتیجه می‌دهد؟

۱) دنباله $\{f_n\}$ یکنواخت کران‌دار است.

۲) $\{f_n\}$ زیردنباله‌ای همگرای یکنواخت دارد.

۳) توابع f_n و f مشتق‌پذیرند و دنباله $\{f_n'\}$ همگرای یکنواخت به f' است.

۴) زیرمجموعه چگال A از X موجود است که $\{f_n\}$ بر A به تابع پیوسته f همگرای نقطه‌وار است.

۷۳ـ گزینه «۲» روش تشریحی: با استفاده از احتمال مکمل خواهیم داشت:

$$p\ (\text{حداقل یکی از } A_i \text{ ها رخ دهد}) = 1 - p\ (\text{هیچ کدام از } A_i \text{ ها رخ دهد}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(A_i')$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{1}{i+1}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1} = 1 - \frac{1\times 2\times 3\times \ldots \times n}{2\times 3\times \ldots \times n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

روش تستی: اگر تعداد A_i ها را دو تا در نظر بگیریم و حداقل یکی از A_i ها رخ دهد خواهیم داشت:

$$p(A_1A_2') + p(A_1'A_2) + p(A_1A_2) = p(A_1)p(A_2') + p(A_1')p(A_2) + p(A_1)p(A_2) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1+2+1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

و با قرار دادن $n = 2$ به گزینه (۲) خواهیم رسید.

◆ ◆ ◆ ◆

۷۴ـ گزینه «۴» چون ۶ عدد انتخابی باید بزرگتر از ۴ باشد، بنابراین ۶ عدد انتخابی از مجموعه $\{5,6,7,8,9,10\}$ انتخاب می‌شود، بنابراین کل تعداد فضای پیشامد برابر $\binom{6}{6} = 1$ و از طرفی تعداد فضای نمونه $= \binom{10}{6} = \frac{10!}{6!4!} = 210$ می‌باشد، در نتیجه احتمال مورد نظر برابر $\frac{1}{210}$ می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۷۵ـ گزینه «۳» روش‌های متعددی برای حل سؤال مورد نظر وجود دارد که یکی از آن روش‌ها به‌صورت زیر می‌باشد.

$$P(B \mid A') = \frac{3}{4} \Rightarrow P(BA') = \frac{3}{4}\times P(A') = \frac{3}{16}$$

$$P(B' \mid A) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(B'A) = \frac{1}{4}\times P(A) = \frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow P(BA') = P(B'A) \Rightarrow P(B - A) = P(B - A) \Rightarrow P(B) - P(AB) = P(B) - P(AB) \Rightarrow P(B) = P(A) = \frac{3}{4}$$

و از طرفی داریم:

$$P(BA') = \frac{3}{16} \Rightarrow P(B) - P(AB) = \frac{3}{16} \Rightarrow P(AB) = \frac{9}{16}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{9}{16}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$$

◆ ◆ ◆ ◆

دروس تخصصی (آنالیز ریاضی، مبانی ترکیبیات، مبانی جبر و بهینه‌سازی خطی)

۷۶ـ گزینه «۲» نشان می‌دهیم با متر d تک‌نقطه‌ای باز می‌باشند (به‌جز نقطه‌ی صفر).

فرض کنیم $a \in \mathbb{R}$ در این صورت داریم:

$$B_{\frac{|a|}{2}}(a) = \{b \in \mathbb{R} \mid\mid b| + |a| < \frac{|a|}{2}\} \cup \{a\} = \{a\}$$

پس هرگاه $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ آنگاه $\{a\}$ مجموعه‌ای باز است؛ لذا $\{1\}$ و $\{2\}$ و..... $\{n\}$ برای هر n ای $\mathbb{N}$ بار است، لذا $\mathbb{N}$ باز است.

◆ ◆ ◆ ◆

۷۷ـ گزینه «۱» فرض کنید $X \in (A \cup B)'$، نشان می‌دهیم $X \in A' \cup B'$، اگر چنین نباشد یعنی $X \notin A' \cup B'$ آنگاه $X \notin A'$ و $X \notin B'$ پس

$r_1, r_2 > 0$ موجودند به‌طوری که:

$$\begin{cases} B_{r_1}(x) \cap (A - \{x\}) = \phi \\ B_{r_2}(x) \cap (B - \{x\}) = \phi \end{cases}$$

و در نتیجه برای $r = \min\{r_1, r_2\}$ داریم:

$$\begin{cases} B_r(x) \cap (A - \{x\}) = \phi \\ B_r(x) \cap (B - \{x\}) = \phi \end{cases}$$

و در نتیجه داریم:

$$B_r(x) \cap ((A \cup B) - \{x\}) = \phi$$

و این یعنی $x \notin (A \cup B)'$ که تناقض است، پس $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$ و اگر $(A \cup B)' \neq \phi$ آنگاه لزوماً $A' \neq \phi$ یا $B' \neq \phi$.

۷۸ـ گزینه «۳» فضای متریک $Q\bigcap(\circ,1)$ را با متر اقلیدسی در نظر بگیرید، چون این فضا کراندار است، لذا هر دنباله در این فضا کراندار است. هرگاه $\{x_n\}\subseteq Q\bigcap(\circ,1)$ دنباله‌ای دلخواه باشد، آنگاه $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}$ نیز خواهد بود و چون کراندار است، لذا زیردنباله‌ای همگرا در $\mathbb{R}$ دارد. چون در $\mathbb{R}$ هر دنباله همگرا کوشی است؛ پس $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی در $\mathbb{R}$ و در نتیجه در $Q\bigcap(\circ,1)$ دارد. بنابراین هر دنباله در $Q\bigcap(\circ,1)$ دارای زیر دنباله‌ای کوشی است در حالی‌که $Q\bigcap(\circ,1)$ کامل نمی‌باشد.

گزینه (۳) شرط کافی برای کامل بودن نمی‌باشد. در پاسخ‌نامه گزینه (۱) پاسخ صحیح است، در حالی‌که طبق آنچه گفته شد گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۷۹ـ گزینه «۴» فرض کنیم X فشرده و G ناشمارا و $A=E-E'$ ادعا می‌کنیم A متناهی است.

اگر A نامتناهی باشد، آنگاه چون X فشرده است، یکی از اعضای A باید نقطه‌ای حدی برای A باشد، یعنی xای در A موجود است که برای هر $r>\circ$ باید $B_r(x)\bigcap(A-\{x\})\neq\phi$ و در نتیجه برای هر $r>\circ$ باید: $B_r(x)\bigcap(E-\{x\})\neq\phi$ باشد، پس: $x\in A$ و در نتیجه $x\notin E'$.

این تناقض نشان می‌دهد که فرض نامتناهی بودن A باطل است، پس A متناهی است.

حال اگر E ناشمارا باشد باید E' نیز ناشمارا باشد، زیرا در غیر این صورت A نامتناهی می‌شود.

◆ ◆ ◆ ◆

۸۰ـ گزینه «۳» چون E کراندار است، لذا به ازای $r>\circ$ باید $E\subset B_r((\circ,\circ))$ و در نتیجه $E\subset\overline{B}_{r((\circ,\circ))}$ و چون $\overline{B}_r((\circ,\circ))$ فشرده است، لذا E زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی فشرده‌ی $\overline{B}_r((\circ,\circ))$ می‌باشد، از طرفی هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی از یک مجموعه‌ی فشرده دارای نقطه‌ی حدی خواهد بود، پس اگر E نامتناهی باشد، آنگاه $E'\neq\phi$ که تناقض است، پس E متناهی است و هرگاه $f\ E\to\mathbb{R}$ تابعی دلخواه باشد، آنگاه $f(E)$ یک مجموعه‌ی متناهی است و $\max f(E)$ وجود دارد و چون E متناهی است برای یک $e\in E$ خواهیم داشت: $f(e)=\max f(E)$

◆ ◆ ◆ ◆

۸۱ـ گزینه «۴» فرض کنیم $x_\circ,\in X$ و $\varepsilon>\circ$ دلخواه باشد. گوی باز و کراندار $B_\varepsilon(f(x_\circ))$ را در نظر بگیرید، در این صورت $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_\circ))$ در X باز است و $x_\circ\in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_\circ))$، لذا برای یک $\delta>\circ$ داریم $B_\delta(x_\circ)\subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_\circ)))$ (و در نتیجه $f(B_\delta(x_\circ))\subset B_\varepsilon(f(x_\circ))$).

هرگاه $d(x_\circ,y)<\delta$ آنگاه $y\in B_\delta(x_\circ)$، لذا $f(y)\in B_\varepsilon(f(x_\circ))$ و در نتیجه: $d(f(y),f(x_\circ))<\varepsilon$.

پس برای هر $\varepsilon>\circ$ و $X_\circ\in X$ یک $\delta>\circ$ موجود است که هرگاه $d(x_\circ,y)<\delta$ آنگاه $d(f(x),f(y))<\varepsilon$ لذا f پیوسته است.

◆ ◆ ◆ ◆

۸۲ـ گزینه «۳» تابع $e^x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته است، ولی پیوسته یکنواخت نمی‌باشد. هرگاه a_n دنباله‌ای کوشی در $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه a_n همگرا می‌باشد. زیرا $\mathbb{R}$ کامل است و چون e^x پیوسته است پس e^{a_n} همگرا می‌باشد و در نتیجه e^{a_n} کوشی است. بنابراین e^x دنباله‌ی کوشی را به کوشی می‌برد، در حالی‌که پیوسته یکنواخت نمی‌باشد. در حالت کلی برای فضاهای متریک X و Y می‌توان $\overline{X}$ و $\overline{Y}$ که کامل‌سازی‌های این فضاها می‌باشند را در نظر گرفت؛ لذا تابعی که دنباله‌ای کوشی را به دنباله‌ای کوشی تصویر کند لزوماً پیوسته است ولی ممکن است پیوسته یکنواخت نباشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۸۳ـ گزینه «۱» دنباله‌ی $f_n(x)=\begin{cases}\frac{nx}{2} & \circ\le x\le\frac{1}{\sqrt{n}}\\ \sqrt{n}-\frac{nx}{2} & \frac{1}{\sqrt{n}}\le x\le\frac{2}{\sqrt{n}}\\ \circ & \frac{3}{\sqrt{n}}\le x\le 1\end{cases}$ را در نظر بگیرید، در این صورت به ازای هر n، $\int_\circ^1 d(x)dn=\frac{1}{2}$ بنابراین

تمام f_nها در مجموعه‌ی مفروض سؤال قرار دارند و نرم هر کدام از f_nها برابر با $\frac{\sqrt{n}}{2}$ می‌باشد.

پس مجموعه‌ی مفروض کراندار نمی‌باشد. حال نشان می‌دهیم مجموعه‌ی مفروض باز است، فرض کنید f عضوی از آن باشد و $\int_\circ^{'}f(x)dx>\alpha$.

اگر $\circ<\alpha\le\frac{1}{2}$ آنگاه $B_{\frac{\alpha}{2}}(f)$ را در نظر بگیرید، هرگاه $g\in B_{\frac{\alpha}{2}}(f)$ آنگاه: $d(f,g)<\frac{\alpha}{2}\Rightarrow|f(x)-g(x)|<\frac{\alpha}{2}$

$$\Rightarrow\ f(x)-\frac{\alpha}{2}<g(x)<f(x)+\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\frac{\alpha}{2}<\int_\circ^1 g(x)\,dx<\frac{3\alpha}{2}<\frac{3}{4}\Rightarrow\circ<\int_\circ^1 g(x)\,dx<1$$

پس g در مجموعه‌ی مفروض قرار دارد.

هرگاه $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$ آنگاه $B_{\frac{1-\alpha}{2}}(f)$ را در نظر بگیرید و مانند بالا عمل کنید، در هر صورت مجموعه‌ی مفروض شامل گوی $B_{\frac{\alpha}{2}}(f)$ در حالت اول و شامل گوی $B_{\frac{1-\alpha}{2}}(f)$ در حالت دوم می‌باشد؛ لذا باز می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۸۴ـ گزینه «۲» دنباله‌ی $\begin{cases} f_n(x):[0,1] \to R \\ f_n(x) = x^n \end{cases}$ را در نظر بگیرید، در این صورت $[0,1]$ فشرده است و f_nها همگرای نقطه‌ای به تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \in [0,1) \end{cases}$ می‌باشند. اگر این همگرایی یکنواخت باشد، باید f پیوسته باشد زیرا f_nها پیوسته‌اند در حالی که f پیوسته نمی‌باشد. پس حکم گزینه‌ی (۲) صحیح نمی‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۸۵ـ گزینه «۴» هرگاه $A \subset X$ و چگال باشد و $x \in X$ آنگاه $\{a_n\} \subset A$ موجود است که $a_n \to x$ و اگر f پیوسته روی A باشد، آنگاه f قابل گسترش به X به‌طور یکتا و پیوسته است. کافی است تعریف کنید:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{a_n \to x} f(x) & x \notin A \text{ و } x \text{ یک دنباله همگرا به } a_n \\ f(x) & x \in A \end{cases}$$

پس اگر $\{f_n\}$ بر A به f همگرا باشد بر X به $\overline{f}$ همگرا می‌باشد. لذا $\{f_n\}$ها بر X به یک تابع پیوسته همگرای نقطه‌ای می‌باشند. چون X فشرده و $\{f_n\}$ها خانواده‌ای پیوسته‌اند، لذا $\{f_n\}$ در X به $\tilde{f}$ همگرای یکنواخت خواهند بود.

◆ ◆ ◆ ◆

۸۶ـ گزینه «۲» اگر $f(x) = \ln(1+x)$ آنگاه f تابعی پیوسته روی $[0,1]$ می‌باشد و در این صورت دنباله‌ی $g_n(x) = \sqrt[n]{n \ln(x+1)}$ به‌دست می‌آید و $\lim\limits_{n \to \infty} g_n(x) = 0$ و هرگاه $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد و $0 < \varepsilon \le x \le 1$ آنگاه:

$$\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\ln \varepsilon} \le g_n(x) \le \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\ln 2}$$

و چون:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\ln 2} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\ln \varepsilon} = 1$$

لذا برای هر $\varepsilon > 0$ و هر X در بازه‌ی $[E,1]$، $\lim\limits_{n \to \infty} g_n(x) = 1$ و در نتیجه:

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \ne 0 \end{cases}$$

پس همگرایی g_nها به g یکنواخت نیست، زیرا در غیر این صورت بنابر پیوستگی g_nها باید g پیوسته باشد در حالی‌که g ناپیوسته است.

◆ ◆ ◆ ◆

۸۷ـ گزینه «۲» دنباله‌ی $f(x)$ به‌طور نقطه‌ای به تابع $f_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ میل می‌کند و چون f_nها بر $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند، لذا اگر بر $\mathbb{R}$ همگرایی یکنواخت باشند باید f بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد که چنین نیست، پس f_nها بر $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت نمی‌باشند. حال فرض کنید: $x \in [\alpha, \infty)$ که $a > 0$ در این صورت در این بازه f_nها به $(\frac{1}{x})$ میل می‌کنند، حال قرار دهید:

$$a_n = \sup_{(a,\infty)} g(x) = \frac{1}{a(1+na)}$$

در این صورت $\left| \frac{nx}{1+nx^2} - \frac{1}{x} \right|$ برابری $[a,x)$ را g بنامید، لذا:

$$g(x) = \left| \frac{-1}{x(1+nx^2)} \right| x \in [a,\infty)$$

g روی $[a,\infty)$ نزولی می‌باشد، بنابراین داریم:

$$a_n = \sup_{(a,\infty)} (x) = \frac{1}{a(1+na)}$$

$a_n \to 0$ پس روی (a,∞) که $a > 0$، دنباله‌ی f_n همگرای یکنواخت به $\frac{1}{x}$ می‌باشد.

۱۱۰ـ فرض کنید G گرافی همبند، n رأسی و m یالی باشد که دور به طول زوج ندارد. در این صورت بهترین کران بالایی برای $\frac{m}{n}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

جبر خطی عددی، بهینه‌سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل

۱۱۱ـ اگر A یک ماتریس $n\times n$ ، $n>2$ ، قطری غالب سطری اکید باشد و به‌ازای هر i، $a_{ii}=1$، کدام گزینه نادرست است؟

۱) A وارون‌پذیر است. ۲) $\|A\|_\infty<2$

۳) A^{-1} قطر غالب سطری است. ۴) دستگاه $Ax=b$ جواب یکتا دارد.

۱۱۲ـ فرض کنید A ماتریسی حقیقی و $m\times n$ است، $m>n$ و $rank(A)=n$. جواب کمترین مربعات دستگاه $Ax=b$ با جواب کمترین مربعات دستگاه ..... برابر است.

۱) $AA^Tx=A^Tb$، ۲) $DAx=Db$، که $D^TD\neq I$ و D قطری و وارون‌پذیر،

۳) $QAx=Qb$، که $Q_{m\times m}$ یک ماتریس متعامد، ۴) $UAx=Ub$، که $U_{m\times m}$ بالامثلثی، وارون‌پذیر و $U^TU\neq I$

۱۱۳ـ ماتریس A متقارن است و کوچک‌ترین مقدار ویژه آن -3 است. به‌ازای λ برابر با ...، ماتریس $A+\lambda I$ معین مثبت است.

۱) ۲ ۲) $3+\varepsilon$ که $\varepsilon>0$ ۳) ۳ ۴) $3-\varepsilon$ که $0<\varepsilon$

۱۱۴ـ محاسبه وارون و استفاده از آن در حل دستگاه مربع در مقایسه با حل مستقیم دستگاه با روش حذفی گاوس، هزینه محاسباتی ..... دارد.

۱) بیشتر و دقت کمتر ۲) کمتر و دقت کمتر ۳) بیشتر و دقت بیشتر ۴) کمتر و دقت بیشتر

۱۱۵ـ فرض کنید $E=I-\beta uv^T$ که در آن u و v بردارهای n بعدی و β یک اسکالر است. برای محاسبه کارای EX و E^TX به‌ترتیب نیاز به ..... عملیات اصلی است.

۱) $O(n^2)$ و $O(n)$ ۲) $O(n)$ و $O(n^2)$ ۳) $O(n^2)$ و $O(n^2)$ ۴) $O(n)$ و $O(n)$

۱۱۶ـ دستگاه $\begin{cases}2x_1=3\\4x_1=5\end{cases}$ داده شده است. جواب کمترین مربعات آن کدام است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۳ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۱

۱۱۷ـ مسئله $\min\limits_x\|Ax-b\|_2$ که در آن A $m\times n$ است، .....

۱) جواب یکتا دارد اگر ستون‌های A مستقل خطی باشند. ۲) جواب بهینه برابر با صفر دارد اگر $m=n$.

۳) می‌تواند جواب نداشته باشد. ۴) بی‌نهایت جواب دارد اگر مقدار بهینه ناصفر باشد.

۱۱۸ـ مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر و جدول نهایی ناکامل آن را در نظر بگیرید. در جدول نهایی، مقادیر α و β چقدر هستند؟

$$\text{Max } z=6x_1+2x_2+12x_3$$

$$\text{s.t.}\quad 4x_1+x_2+3x_3\le 24$$

$$2x_1+6x_2+3x_3\le 30$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3\ge 0$$

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	1				α		β
x_3	0				$\frac{1}{3}$		
s_2	0				-1		

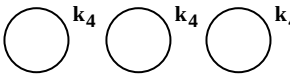
۱) $\alpha=2,\ \beta=96$

۲) $\alpha=2,\ \beta=94$

۳) $\alpha=4,\ \beta=96$

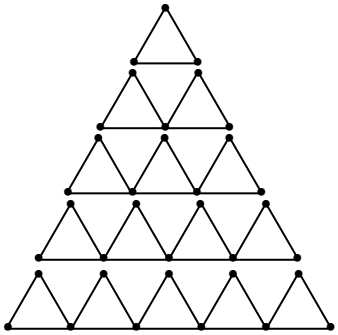
۴) $\alpha=4,\ \beta=94$

از آنجا که گراف کامل به شکل k_{2n+1} دارای هیچ تطابق کاملی نیست، لذا کافی است رئوس q_4، q_3، q_2 و q_1 را حذف کنیم.

هر تطابق کامل گراف 

به انضمام یال‌های q_1q_2 و q_3q_4 یک تطابق کامل برای گراف اصلی می‌شود. تعداد تطابق کامل گراف k_4 برابر ۳ است، لذا کل حالات عبارتند از: $۳ \times ۳ \times ۳ = ۲۷$.

۱۱۰ـ گزینه «۳» خانواده ریز از گراف‌ها را در نظر بگیرید.

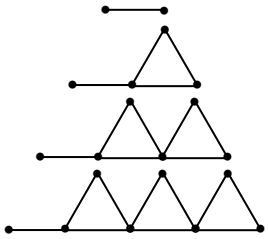


به راحتی می‌توان دید که اگر n فرد باشد، رابطه‌ی بین یال‌ها و تعداد رأس‌ها به شکل ریز است. اگر n رأس داشته باشد، تعداد یال‌ها برابر $n + \frac{n-۳}{۲}$ است. لذا:

$$\frac{m}{n} = \frac{n + \frac{(n-۲)}{۲}}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = ۱/۵$$

در واقع می‌توان دید هر گراف با تعداد رأس فرد و داشتن یال ماکزیمم و نداشتن دور زوج با یکی از گراف‌های بالا ایزومورف است (البته گاهی اوقات گراف را تغییر می‌دهیم بدون کاهش تعداد یال‌ها تا با فرم بالا یکریخت شود).

برای گراف‌های زوج نیز می‌توان خانواده زیر را در نظر گرفت:



جبر خطی عددی، بهینه‌سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل

۱۱۱ـ گزینه «۳» فرض کنید که داریم:

$$A = \begin{bmatrix} -۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & -۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$A^{-۱} = \begin{vmatrix} -\frac{۴}{۹} & \frac{۲}{۹} & -\frac{۱}{۹} \\ -\frac{۲}{۹} & \frac{۱}{۹} & -\frac{۵}{۹} \\ \frac{۵}{۹} & \frac{۲}{۹} & \frac{۸}{۹} \end{vmatrix}$$

با توجه به محاسبات فوق نتیجه می‌گیریم که گزینه (۳) اشتباه است.

۱۱۲ـ گزینه «۳» چون $\text{rank}(A) = n$ پس ستون‌های ماتریس A مستقل خطی هستند و A وارون‌پذیر است و جواب‌های کمترین مربعات $\min_x \|Ax - b\|_۲$ برابر است با:

$$A^{-۱}Ax = A^{-۱}b \Rightarrow x = A^{-۱}b$$

و در گزینه طرفین معادله $QAx = Qb$ را در Q^T ضرب می‌کنیم. $\underbrace{Q^TQ}_{I}A^{-}x = \underbrace{Q^TQ}_{I}b$ چون متعامد بودن Q رابطه $Q^TQ = I$ را ایجاد می‌کند در نتیجه داریم:

$$x = A^{-۱}b \Leftarrow Ax = b$$

۱۱۳ـ گزینه «۲» قضیه: فرض می‌کنیم A یک ماتریس متقارن باشد، در این صورت:

الف) اگر همه مقادیر ویژه A مثبت باشد، A معین مثبت است.

ب) اگر همه مقادیر ویژه A منفی باشد، A معین منفی است.

ج) اگر A حداقل یک مقدار ویژه مثبت و حداقل یک مقدار ویژه منفی داشته باشد، A نامعین است.

$A=\begin{bmatrix}-۳ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ یک ماتریس متقارن و کوچک‌ترین مقدار ویژه ۳−است در نتیجه:

$$A+۲I=\begin{bmatrix}-۳ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}$$

$$A+۳I=\begin{bmatrix}-۳ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۴\end{bmatrix}$$

$$A+(۳+\varepsilon)I=\begin{bmatrix}-۳ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳+\varepsilon & ۰\\ ۰ & ۳+\varepsilon\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon & ۰\\ ۰ & ۴+\varepsilon\end{bmatrix}$$

$$A+(۳-\varepsilon)I=\begin{bmatrix}-۳ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳-\varepsilon & ۰\\ ۰ & ۳-\varepsilon\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\varepsilon & ۰\\ ۰ & ۴-\varepsilon\end{bmatrix}$$

طبق قضیه بالا فقط گزینه (۲) درست است، چون مقدار ویژه آنکه روی قطر اصلی است همگی مثبت هستند.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱۴ـ گزینه «۱» **روش اول:** روش حذفی گاوس یک روش مستقیم برای حل دستگاه معادلات خطی است که در آن ماتریس ضرایب به یک ماتریس مثلثی تبدیل و سپس معادلات با جایگذاری پسرو یا پیشرو حل می‌شود که نسبت به محاسبه وارون هزینه محاسباتی کمتر و دقت بیشتری دارد.

روش دوم: روش ماتریس معکوس (کرامر) برای دستگاه‌های با ابعاد بالا به سادگی قابل اجرا نمی‌باشد، زیرا برای محاسبه دترمینان یک ماتریس $n\times n$ به $n!$ عمل ضرب نیاز داریم، در حالی‌که در روش حذفی گاوس تعداد محاسبات تقریباً برابر با $\frac{۲n^۳}{۳}$ می‌باشد! مثلاً اگر $n=۵$ باشد، داریم:

تعداد محاسبات در روش ماتریس معکوس $\simeq ۵!=۱۲۰$

تعداد محاسبات در روش حذفی گاوس $\simeq \frac{۲n^۳}{۳}=\frac{۲(۵)^۳}{۳}=\frac{۲\times ۱۲۵}{۳}=\frac{۲۵۰}{۳}\simeq ۸۳$

بنابراین روش مستقیم حذفی گاوس از روش ماتریس معکوس، سریع‌تر است.

همچنین حجم بالای محاسبات باعث صرف زمان بیشتر و افزایش احتمال رخداد خطا می‌گردد.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱۵ـ گزینه «۳»

$E=I-\beta uv^T \rightarrow EX=IX-(\beta uv^T)X$

$IX\rightarrow O(n)$ تعداد فلاپ‌ها

$(\beta uv^T)\rightarrow O(n)$ تعداد فلاپ‌ها

چون βuV^T یک ماتریس مربعی $n\times n$ است، پس: $\underbrace{(\beta uV^T)}_{A}X=A_{(n\times n)}X_{(n\times ۱)}\rightarrow O(n^۲)$ تعداد فلاپ‌ها

از زمان مربوط به اجرای $O(n)$ می‌توان چشم‌پوشی کرد و هزینه حل آن را $O(n^۲)$ در نظر گرفت و برای ترانهاده آن یعنی: $E^TX=IX-(Bvu^T)X$

همچنان مراحل فوق تکرار می‌شود و تعداد فلاپ‌های آن $O(n^۲)$ است.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱۶ـ گزینه «۲» اگر A یک ماتریس $m\times n$ و b یک بردار $m\times ۱$ باشد، جواب مسأله کمترین مربعات دستگاه $Ax=b$ یکتاست اگر و تنها اگر $rank(A)=n$ باشد، در این حالت جواب مسأله کمترین مربعات برابر $x=(A^TA)^{-۱}A^Tb$ است. در این سؤال داریم: $A=\begin{bmatrix}۲\\ ۴\end{bmatrix}_{۲\times ۱}$ که $rank(A)=۱$.

لذا خواهیم داشت: $A^T=[۲\quad ۴]$

$$x=([۲\quad ۴]\begin{bmatrix}۲\\ ۴\end{bmatrix})^{-۱}[۲\quad ۴]\begin{bmatrix}۳\\ ۵\end{bmatrix}=(۴+۱۶)^{-۱}(۶+۲۰)=\frac{۱}{۲۰}\times ۲۶=\frac{۲۶}{۲۰}=\frac{۱۳}{۱۰}=۱/۳$$

مبانی جبر و مبانی ترکیبیات

۹۱ـ اگر P حاصل‌ضرب کلیه عناصر یک گروه آبلی متناهی دلخواه باشد، آنگاه داریم:

۱) $P=e$ ۲) $P^2=e$ ۳) $P^3=e$ ۴) $P\neq e$

۹۲ـ فرض کنید G یک گروه باشد، همه موارد زیر صحیح‌اند، به‌جز:

۱) $Z(G)\trianglelefteq G$ ۲) $Inn(G)\trianglelefteq Aut(G)$

۳) اگر $f:G\to H$ یک هم‌ریختی از گروه‌ها باشد، آنگاه $\ker(f)\trianglelefteq G$. ۴) اگر $f:G\to H$ یک هم‌ریختی از گروه‌ها باشد، آنگاه $Im(f)\trianglelefteq H$.

۹۳ـ فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی است و I یک ایده‌آل از R، رادیکال I چنین تعریف می‌شود: $\sqrt{I}=\{x\in R\mid \exists n, x^n\in I\}$

اگر $R=F[x]$ که در آن F یک میدان است و $I=(x^2)$، آنگاه $\sqrt{I}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) (x^2) ۳) (x) ۴) F

۹۴ـ تعداد عناصر مرتبه ۲ در گروه $S_3\times S_3$ چند تاست؟ (منظور از S_3 گروه متقارن روی ۳ حرف است)

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۹۵ـ گروه جمعی $\mathbb{Q}$ و زیر گروه $\mathbb{Z}$ از آن را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ کدام خاصیت زیر را داراست؟

۱) گروهی متناهی است. ۲) گروهی دوری است.

۳) گروهی با تولید متناهی است. ۴) به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ عضوی از مرتبه n دارد.

۹۶ـ اگر $I=(x,2)$ و $J=(x,3)$ در این‌صورت در $Z[x]$، IJ کدام ایده‌آل است؟ (منظور از (a,b)، ایده‌آل تولید شده توسط a و b می‌باشد.)

۱) $(x,6)$ ۲) $(x,2)$ ۳) $(x^2,2)$ ۴) $(x^2,6)$

۹۷ـ اگر H یک زیرگروه G باشد، در کدام‌یک از گزینه‌های زیر H می‌تواند یک زیرگروه نرمال از G نباشد؟

۱) $G\leq H$.

۲) $H\leq G$ طوری است که $G=HZ(G)$.

۳) $H\leq G$ طوری است که زیرگروه K از G موجود باشد با این خاصیت که $H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$.

۴) $H\leq G$ طوری است که $p=|G:H|$ و p کوچک‌ترین عدد اولی است که $|G|$ را می‌شمارد.

۹۸ـ فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار و P ایده‌آل اولی از R باشد به‌طوری که $P\subseteq <a>$ و $a\notin P$. در این‌صورت کدام مورد صحیح است؟

۱) $P=aP$ ۲) $aP\subset P$ ۳) $P_+<a>=R$ ۴) P ایده‌آل ماکسیمال R است.

۹۹ـ فرض کنیم G یک گروه از مرتبه 3^5 باشد، اگر φ یک همریختی نابدیهی از G به D_{12} باشد، آنگاه کدام گزینه در مورد G' درست است؟ (منظور از D_{12}، گروه دووجهی از مرتبه ۱۲ است.)

۱) $G'\subseteq\ker\varphi$ ۲) $\ker\varphi\subseteq G'$ ۳) $G'\not\subseteq\ker\varphi$ ۴) $\ker\varphi\not\subseteq G'$

۱۰۰ـ تعداد همریختی‌های ممکن از گروه G که $|G|=75$ به گروه $(R^*,\circ)$ کدام است؟ (منظور از R^* عناصر غیر صفر $\mathbb{R}$ است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۷۵

۱۰۱ـ تعداد چهارتایی‌های (a,b,c,d) از اعداد طبیعی که $5\leq a<b<c<d\leq 15$ برابر است با:

۱) $\binom{10}{4}$ ۲) $\binom{11}{3}$ ۳) $\binom{10}{3}$ ۴) $\binom{11}{4}$

۱۰۲ـ ضریب $x^2y^3z^3$ در بسط $(2x-3y-z)^8$ کدام است؟

۱) $8!$ ۲) $\frac{2\times 8!}{3}$ ۳) $\frac{3\times 8!}{2}$ ۴) $3\times 8!$

۱۰۳ـ حاصل $(6-i)^6\binom{6}{i}(-1)^i$ کدام است؟ $\sum_{i=0}^{6}$

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۵۰۰ ۴) ۷۲۰

مبانی جبر و مبانی ترکیبیات

۹۱ـ گزینه «۲» چون گروه آبلی است، عضوها با هم جابه‌جا می‌شوند و هر عضو کنار معکوس خود قرار می‌گیرد. همان طور که می‌دانیم حاصل‌ضرب هر عضو در معکوسش، همانی می‌شود. حال اگر تعداد اعضای گروه، عددی فرد باشد، به‌جز عضو همانی، تعداد زوج عضو داریم که ضرب هر کدام از آن‌ها در معکوس e می‌شود، پس $p=e$ و در نتیجه $p^2=e$ و اگر تعداد اعضای گروه، زوج باشد، یک عضو معکوس خودش است که p برابر این عضو می‌شود و $p^2=e$.

۹۲ـ گزینه «۴» همریختی $\varphi:(\mathbb{Z}_2,+)\to S_3$ را با ضابطه $\varphi(1)=((23)),\varphi(0)=e$ تعریف می‌کنیم، می‌بینیم که $\mathrm{Im}\varphi=<(23)>=\{e,(23)\}$ و به ازای $(12)\in S_3$ داریم: $(12)(23)(12)^{-1}=(13)\notin \mathrm{Im}\varphi \Rightarrow \mathrm{Im}\varphi \not\trianglelefteq S_3$

۹۳ـ گزینه «۳» با توجه به تعریف $\sqrt{I}$ و اینکه $(x^2)=I$ ایده‌آلی از $R=F[x]$ است، خواهیم داشت $\sqrt{I}=(x)$.

۹۴ـ گزینه «۳» طبق قضیه‌ای، اگر $(g_1,g_2)\in S_3\times S_3$، آنگاه $o(g_1,g_2)=[o(g_1),o(g_2)]$، می‌دانیم مرتبه اعضای غیر بدیهی S_3، یا ۲ است یا ۳، بنابراین در صورتی $o(g_1,g_2)=2$ که یا یکی از g_1 و g_2 بدیهی باشد و یکی دیگر عضو مرتبه ۲ و یا هر دو عضو مرتبه ۲ باشند. می‌دانیم اعضای مرتبه ۲ از S_3 برابرند با (۱۲)، (۲۳) و (۱۳) بنابراین داریم:

g_1	g_2	
e	e	$\Rightarrow 4\times 4=16$ حالت
(12)	(12)	
(23)	(23)	
(13)	(13)	

که اگر $\{e,e\}$ را حذف کنیم، ۱۵ حالت باقی می‌ماند.

۹۵ـ گزینه «۴» می‌دانیم که $(\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}},+)$ متناهی مولد نیست، پس نه دوری است نه متناهی، همچنین می‌دانیم که هر عضو آن مرتبه‌ای متناهی دارد. به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $(\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}},+)$ حداقل یک عضو به‌صورت $\frac{a}{n}+\mathbb{Z}$ دارد که $n(\frac{a}{n}+\mathbb{Z})=a+n\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$ و این یعنی $\frac{a}{n}+\mathbb{Z}$ عضوی از مرتبه n است.

۹۶ـ گزینه «۱» می‌دانیم $IJ=\{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \mid x_i\in I, y_i\in J\}$، لذا با فرض $I=(x,2)$ و $J=(x,3)$، لذا IJ ایده‌آل تولید شده توسط $(x,6)$ است.

۹۷ـ گزینه «۳» گروه $D_\Lambda=\{e,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\beta,\alpha\beta,\alpha^2\beta,\alpha^3\beta\}$ و زیرگروه‌های $H=\{e,\beta\}$ و $K=\{e,\alpha^2,\beta,\alpha^2\beta\}$ از آن را در نظر می‌گیریم، می‌بینیم که $[D_n:K]=2$ و $[K:H]=2$، پس $K\trianglelefteq D_n$ و $H\trianglelefteq K$ اما $H\not\trianglelefteq D_n$، چون مثلاً به ازای $\alpha\in D_n$، $\alpha\beta\alpha^{-1}=\alpha^2\beta\notin H$.

۹۸ـ گزینه «۱» طبق فرض داریم P ایده‌آل اولی از حلقه جابه‌جایی و یکدار R است، به طوری که $P\subseteq <a>$ و $a\notin P$، می‌دانیم $I=<a>$ ایده‌آل اصلی حلقه R است. فرض می‌کنیم Q ایده‌آل دیگری از R باشد به طوری که $P\subset Q\subset <a>$ چون $a\notin P$، لذا $a\notin Q$، زیرا در غیر این صورت $P=<a>$ که متناقض است. حال ثابت می‌کنیم $P=Q=aP$، چون p ایده‌آلی از R است و $a\in R$، همواره داریم $aP\subseteq P$. فرض می‌کنیم $x\in P\subseteq <a>$، از این رو با توجه به اینکه $<a>$ ایده‌آل اصلی حلقه R است، عضو $r\in R$ موجود است به طوری که $x=ra\in P$. p ایده‌آل اول است و $a\notin P$. بنابراین $r\in P$. در نتیجه $x=ra\in aP$. لذا $P\subseteq aP$، از این رو $P=aP$.

۹۹ـ گزینه «۱» طبق اولین قضیه یکریختی، $\frac{\varphi}{\ker\varphi}\cong \mathrm{Im}\varphi\le D_{12}$، بنابراین $o(\frac{G}{\ker\varphi}) \mid o(D_{12})=12$، چون $o(G)=3^5$، مرتبه $\frac{G}{\ker\varphi}$ هم باید توانی از ۳ باشد، تنها حالت ممکن خود ۳ است. اما می‌دانیم هر گروه از مرتبه عدد اول آبلی است، پس $\frac{G}{\ker\varphi}$ آبلی است، لذا طبق قضیه‌ای $G'\subseteq\ker\varphi$.

۱۰۸ـ تاسی را ۱۰ بار می‌ریزیم و می‌خواهیم تعداد حالت‌هایی که شماره‌های ظاهر شده مجموعشان ۲۸ می‌شود را بیابیم. ضریب $x^{۲۸}$ در کدام‌یک از توابع مولد زیر این عدد را می‌دهد؟

۱) $(1-x^{۷})^{۱۰}(1-x)^{-۱۰}$ ۲) $x^{۱۰}(1-x^{۶})^{۱۰}(1-x)^{-۱۰}$ ۳) $(1-x^{۷})^{۱۰}(1-x)^{۱۰}$ ۴) $x^{۱۰}(1-x^{۶})^{۱۰}(1-x)^{۱۰}$

۱۰۹ـ چه تعداد دنباله ۵ رقمی از a،b،c،d موجوداند که d در سمت چپ a نباشد؟

۱) ۸۸۰ ۲) ۶۸۰ ۳) ۵۸۰ ۴) ۷۸۰

۱۱۰ـ در مغازه‌ای شش نوع ساندویچ وجود دارد که قیمت ۵ نوع از آنها ۳ تومان و یکی از آن‌ها ۵ تومان است. برای خریدی به مبلغ ۴۲ تومان چند امکان وجود دارد؟

۱) $\binom{۱۵}{۴}+\binom{۱۹}{۴}$ ۲) $\binom{۱۴}{۴}+\binom{۱۸}{۴}$ ۳) $\binom{۱۵}{۴}+\binom{۱۹}{۴}+\binom{۲۰}{۴}$ ۴) $\binom{۱۴}{۴}+\binom{۱۸}{۴}+\binom{۱۹}{۴}$

جبر خطی عددی، بهینه‌سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل

۱۱۱ـ فرض کنید $n \geq ۳$ عددی طبیعی است، $v_i \in R^n$ها $\{v_۱, v_۲, ..., v_n\}$، مستقل خطی هستند. اگر A یک ماتریس دلخواه، $n\times n$، وارون‌پذیر باشد، کدام مجموعه مستقل خطی نیست؟

۱) $\{Av_۱, Av_۲, ...Av_n\}$ ۲) $\{A^{-۱}v_۱, A^{-۱}v_۲, ...A^{-۱}v_n\}$

۳) $\{v_۱ + Av_۱, v_۲ + Av_۲, ...v_n + Av_n\}$ ۴) $\{v_۱^T A + v_۲^T A, ...v_n^T A\}$، که v_i^T ترانهاده v_i است.

۱۱۲ـ فرض کنید A یک ماتریس متقارن است. اگر $A = QR$، که در آن Q یک ماتریس متعامد نرمال و R یک ماتریس بالا مثلثی است، آن‌گاه QRQ یک ماتریس ..... است.

۱) بالا مثلثی ۲) پایین مثلثی ۳) متقارن ۴) ناتکین (وارون‌پذیر)

۱۱۳ـ Q یک ماتریس متعامد حقیقی و $n\times n$ است $(QQ^T = I)$، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\det(Q) = ۱$ ۲) $Q^{-۱} = Q^T$ (T معرف ترانهاده است.)

۳) برای هر x از R^n، $\|Qx\|_۲ = \|x\|_۲$ ۴) اگر λ مقدار ویژه Q باشد، آن‌گاه $|\lambda| = ۱$

۱۱۴ـ فرض کنید $\bar{x}$ یک جواب محاسبه شده برای یک دستگاه خطی و Δx تخمینی برای خطای $\bar{x}$ است. آزمون همگرایی برای توقف الگوریتم مربوط را به‌صورت $\|\bar{x}\| + \delta \leq \varepsilon + \|\Delta x\|$ درنظر بگیرید. مقادیر مناسب به‌ترتیب برای ε و δ کدام هستند؟

۱) هر دو نزدیک به روند عدد یک در کامپیوتر ۲) هر دو نزدیک به کوچک‌ترین عدد قابل نمایش در کامپیوتر

۳) کوچک‌ترین عدد مثبت قابل نمایش و روند عدد یک در کامپیوتر ۴) روند عدد یک و کوچک‌ترین عدد مثبت قابل نمایش در کامپیوتر

۱۱۵ـ x^* جواب مسئله $\min_x(\|A^T x\|_۲^۲ - ۲b^T A^T x)$، جواب کدام مسئله است؟

۱) $\min_x \|A^T x - b\|_۲$. ۲) $\min_x \|Ax - b\|_۲$ اگر A یک ماتریس مربعی باشد.

۳) $\min_x \|A^T Ax - b\|_۲$ اگر A یک ماتریس مربعی باشد. ۴) $\min_x \|AA^T x - b\|_۲$ اگر A یک ماتریس مربعی باشد.

۱۱۶ـ در روش توانی به‌صورت $X^{(k+۱)} = Ax^{(k)}, k = ۰,۱,...$، برای محاسبه یک بردار ویژه ماتریس A، یک تخمین مناسب برای مقدار ویژه در تکرار $(k+۱)$ام برابر است با: (قرار دهید $p = x^{(k)}$ و $q = x^{(k+۱)}$)

۱) $\frac{\|q\|_۲^۲}{p^T q}$ ۲) $\frac{\|p\|_۲}{\|q\|_۲}$ ۳) $\frac{\|q\|_۲}{\|p\|_۲}$ ۴) $\frac{p^T q}{\|p\|_۲^۲}$

۱۱۷ـ جواب درست برای دستگاه $Ax = b$ که در آن، A، $m\times n$، $m < n$، b، $m\times ۱$ و x، $n\times ۱$ هستند، کدام است؟

۱) تنها یک جواب دارد. ۲) بی‌نهایت جواب دارد.

۳) دقیقاً یک جواب دارد، وقتی $m = \text{رتبه}(A)$. ۴) بی‌نهایت جواب دارد، وقتی رتبه $(A) = m$.

۱۲۶ـ گزینه «۱» با قطبی نمودن معادلات خواهیم داشت:

$$r'r = x'x + y'y \Rightarrow r'r = ۲(x^۲ + y^۲) - [(x^۲ + y^۲)^۲ - ۲x^۲y^۲] \Rightarrow r'r = ۲r^۲ - r^۴ + ۲r^۴\sin^۲\theta\cos^۲\theta \Rightarrow r' = ۲r - r^۳(\frac{۴ + \cos^۲ ۲\theta}{۲})$$

با قرار دادن $r' = ۰$ خواهیم داشت: $r^۲ = \frac{۴}{۱ + \cos^۲ ۲\theta}$

از آنجایی‌که $r_{max} = ۲$, $r_{min} = \sqrt{۲}$ و از طرفی $(۰,۰)$ تنها نقطه ثابت معادله می‌باشد بنابراین ناحیه جواب در دو بازه $(۰,۲)$ و $(-\sqrt{۲},۰)$ تغییر می‌نماید.

۱۲۷ـ گزینه «۲» داریم $\frac{dx}{dt} = x^۲$ با شرط اولیه $x(۰) = y$. پس داریم:

$$\frac{dx}{x^۲}dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x^۲} = \int dt \Rightarrow \frac{-۱}{x} = t + C \Rightarrow x = \frac{-۱}{t + C} \xrightarrow{x(۰)=y} y = \frac{-۱}{۰ + C} = -\frac{۱}{C} \Rightarrow C = \frac{-۱}{y}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-۱}{t - \frac{۱}{y}} = \frac{-y}{ty - ۱} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{-(ty-۱) - t(-y)}{(ty-۱)^۲} = \frac{۱}{(ty-۱)^۲} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial y}(t,۱) = \frac{۱}{(t-۱)^۲} = \frac{۱}{(۱-t)^۲}$$

۱۲۸ـ گزینه «۴» $\sin$ تابعی پیوسته است و $x_۱, x_۲, x_۳ \in \mathbb{R}$ و $f(x_۱, x_۲, x_۳) \in \mathbb{R}^۳$ و $x' = f(x)$، بنابراین مجموعه جواب این معادله در بازه $\mathbb{R}$ است.

۱۲۹ـ گزینه «۴» در حالتی که $\frac{dx'}{dt} = f(t)$ فرض کنید x_e باشد به طوری که $f(x_e) = ۰$ و از طرفی با در نظر گرفتن حالت خطی $\frac{dx}{dt} = ax$ که دارای جواب $x(t) = Ce^{at}$ به طوری که a پارامتری مخالف صفر می‌باشد و در حالت خطی $f(x) = ax$ می‌بینیم که معادله پایدار می‌باشد و برای $a < ۰$ معادله پایدار می‌باشد. حال اگر تابع h با در نظر گرفتن $h(۰) < ۰$ می‌توان گفت که شرط پایداری برقرار می‌باشد. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۱۳۰ـ گزینه «۴»

احتمال (۱و۲) و فرایندهای تصادفی ۱

۱۳۱ـ گزینه «۴» $X \sim Exp(\lambda)$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > ۰$

برای محاسبه $E(X \mid x > n)$، $n > ۰$ از دستور مقابل استفاده می‌کنیم: $E(X \mid a < X < b) = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$

بنابراین داریم: $E(X \mid X > n) = \frac{\int_n^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx}{\int_n^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx}$

انتگرال‌های صورت و مخرج را حساب می‌کنیم: $\int_n^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = e^{-\lambda n}$ $\qquad$ $\int_n^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}dx = -xe^{-\lambda x} - \frac{۱}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_n^{+\infty} = \frac{n\lambda e^{-n\lambda} + e^{-\lambda n}}{\lambda}$

در نتیجه داریم: $E(x \mid x > n) = \frac{\frac{n\lambda e^{-n\lambda} + e^{-n\lambda}}{\lambda}}{e^{-n\lambda}} = \frac{n\lambda + ۱}{\lambda}$

۱۳۲ـ گزینه «۱» $M_X(t) = e^t M_X(-t)$, $t \in \mathbb{R}$

طبق تعریف تابع مولد گشتاور داریم: $E(e^{tX}) = e^t E(e^{-tX}) \Rightarrow E(e^{tX}) = E(e^t e^{-tX}) \Rightarrow E(e^{tX}) = E(e^{(۱-X)t})$

با مشتق‌گیری از طرفین در نقطه $t = ۰$ نتیجه می‌شود: $E(Xe^{tX}) = E((۱-X)e^{(۱-X)t})|_{t=۰} \Rightarrow E(X) = E(۱-X) \Rightarrow E(X) = \frac{۱}{۲}$

۱۳۳ـ گزینه «۴» طبق فرض مسئله $X > -۱۰۰$ و $E(X) = -۶۰$

$$X > -۱۰۰ \Rightarrow Y = X + ۱۰۰ > ۰ \Rightarrow X = Y - ۱۰۰$$

$$E(X) = -۶۰ \Rightarrow E(Y - ۱۰۰) = -۶۰ \Rightarrow E(Y) = ۴۰$$

$$P(X \geq -۲۰) = P(Y - ۱۰۰ \geq -۲۰) = P(Y \geq ۸۰)$$

اکنون با استفاده از نامساوی مارکوف نتیجه می‌شود:

$$P(X \geq -۲۰) = P(Y \geq ۸۰) = \frac{E(Y)}{۸۰} = \frac{۴۰}{۸۰} = \frac{۱}{۲}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۳۴ـ گزینه «۲» در توزیع نمایی داریم:

$$E(X) = \frac{۱}{\lambda} = ۲ \Rightarrow \lambda = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین تابع چگالی X برابر $x > ۰$ و $f(x) = \frac{۱}{۲} e^{-\frac{۱}{۲}x}$ است. اکنون برای محاسبه احتمال اولین پیروزی در سومین آزمایش برنولی از توزیع هندسی استفاده می‌کنیم:

$$P(X = ۳) = pq^{x-۱} = pq^{۲}$$

که در آن p (احتمال پیروزی) برابر است با احتمال آنکه یک تلوپریون قبل از ۲ ساعت تعمیر می‌شود. لذا مقدار p به کمک توزیع نمایی برابر است با:

$$P = P(X < ۲) = \int_{۰}^{۲} \frac{۱}{۲} e^{-\frac{۱}{۲}x} dx = ۱ - e^{-۱} \Rightarrow q = ۱ - p = e^{-۱}$$

در نتیجه داریم:

$$P(X = ۳) = (۱ - e^{-۱})(e^{-۱})^{۲}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۳۵ـ گزینه «۱»

$$\underline{x}^{۲} - ۲Ux + ۱ = ۰ \qquad u \sim U(۰, ۲)$$

شرط آنکه معادله درجه دوم بالا دارای ریشه حقیقی باشد، آن است که:

$$\Delta = b^{۲} - ۴ac \geq ۰ \Rightarrow \Delta = (-۲U)^{۲} - ۴(۱)(۱) \geq ۰ \Rightarrow ۴U^{۲} - ۴ \geq ۰ \Rightarrow U^{۲} \geq ۱ \xrightarrow{U > ۰} U \geq ۱$$

اکنون احتمال آنکه معادله درجه دوم فوق ریشه حقیقی داشته باشد، برابر است با:

$$P(U \geq ۱)$$

$$u \sim U(۰, ۲) \Rightarrow f(u) = \frac{۱}{۲ - ۰} = \frac{۱}{۲} \qquad ۰ \leq U \leq ۲$$

بنابراین:

$$P(U \geq ۱) = \int_{۱}^{۲} \frac{۱}{۲} du = \frac{۱}{۲} u \Big|_{۱}^{۲} = \frac{۱}{۲}(۲ - ۱) = \frac{۱}{۲}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۳۶ـ گزینه «۱» امید ریاضی تعداد آزمایشات لازم تا کسب اولین پیروزی به کمک توزیع هندسی برابر $E(X) = \frac{۱}{p}$ است که در آن p برابر احتمال آن است که در پرتاب شش تاس، یک عدد شش‌رقمی بدون تکرار ظاهر شود. بنابراین:

$$p = \frac{۶!}{۶^{۶}} \Rightarrow E(x) = \frac{۶^{۶}}{۶!} = ۶۴/۸ \simeq ۶۵$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۳۷ـ گزینه «۳» طبق تعریف جزء صحیح می‌توان نوشت:

$$[X] = ۳ \Rightarrow ۳ \leq X < ۴$$

بنابراین:

$$P([X] = ۳) = P(۳ \leq X < ۴) = F(۴) - F(۳) = (۱ - \frac{۱}{۱+۴}) - (۱ - \frac{۱}{۱+۳}) = \frac{۴}{۵} - \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۲۰}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۳۸ـ گزینه «۴» برای محاسبه $E(X \mid Y = \frac{۱}{۲})$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$E(X \mid Y = \tfrac{۱}{۲}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x \mid \tfrac{۱}{۲}) dx$$

$$f(x \mid \tfrac{۱}{۲}) = \frac{f(x, \frac{۱}{۲})}{f_Y(\frac{۱}{۲})}$$

$$f_Y(y) = \int f(x, y) dx = \int_{۰}^{y} ۲ dx = ۲x \Big|_{۰}^{y} = ۲y \qquad ۰ < y < ۱ \Rightarrow f_Y(\tfrac{۱}{۲}) = ۲(\tfrac{۱}{۲}) = ۱ \Rightarrow f(x \mid \tfrac{۱}{۲}) = \frac{۲}{۱} = ۲ \qquad ۰ < x < \frac{۱}{۲}$$

در نتیجه داریم:

$$E(X \mid y = \tfrac{۱}{۲}) = \int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} ۲x \, dx = x^{۲} \Big|_{۰}^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۴}$$

◆ ◆ ◆ ◆