www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه آزمون خودسنجی فصل اول

پاسخنامه آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۲» برای تغییر طول میله‌ی مرکب از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود:

$$\delta=\sum_{i=۱}^{۳}\frac{F_iL_i}{A_iE_i}=\frac{P(\frac{L}{۳})}{AE}+\frac{P(\frac{L}{۳})}{۲AE}+\frac{۳P(\frac{L}{۳})}{۴AE}\Rightarrow\delta=\frac{PL}{AE}(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۴})=\frac{۳}{۴}\frac{PL}{AE}$$

۲ـ گزینه «۱» تنش تماسی بین دو سطح A و B طبق رابطه‌ی مقابل برابر است با:

$$\sigma_b=\frac{F}{A_e}=\frac{۲۰۰۰۰}{dt}=\frac{۲۰۰۰۰}{۲۰\times۱۰}=۱۰۰\,\text{MPa}$$

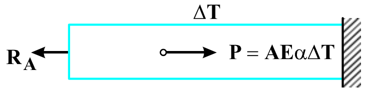
۳ـ گزینه «۲» با توجه به توضیحات متن درس نسبت مدول برشی به مدول حجمی مساوی است با:

$$\frac{G}{k}=\frac{\frac{E}{۲(۱+v)}}{\frac{E}{۳(۱-۲v)}}=\frac{۳}{۲}\,\frac{۱-۲v}{۱+v}$$

۴ـ گزینه «۴» تغییر طول میله تحت بار محوری F برابر است با:

$$\delta=\frac{FL}{AE}=\frac{۶/۲۸\times۲۰۰۰}{\frac{\pi}{۴}\times۲۰^۲\times۱۰۰}=۰/۴\,\text{mm}$$

۵ـ گزینه «۲» تکیه‌گاه A برداشته شده و به جای آن نیروی R_A قرار داده می‌شود. اکنون می‌توان با استفاده از روش جمع آثار مقدار نیروی داخلی در بخش AC را به دست آورده سپس مقدار تنش را در این مقطع تعیین نمود.



$$\delta_A=\frac{R_AL}{AE}+\alpha L\Delta T-\frac{P(۲\frac{L}{۳})}{AE}=۰\Rightarrow\frac{R_AL}{AE}+\alpha L\Delta T-\frac{(AE\alpha\Delta T)۲\frac{L}{۳}}{AE}=۰$$

$$\frac{R_A}{AE}+\alpha\Delta T-\frac{۲}{۳}\alpha\Delta T=۰\Rightarrow R_A=-\frac{۱}{۳}AE\alpha\Delta T$$

۶ـ گزینه «۲» میله (۱) علاوه بر کشش تحت اثر خمش نیز قرار دارد. چون نیروی P در میله (۱) محوری نبوده پس ابتدا باید آنرا به مرکز مقطع باریک انتقال داد که این باعث ایجاد یک گشتاور خمشی نیز می‌شود و تنش ماکزیمم را افزایش می‌دهد.

۷ـ گزینه «۴» نیروی فشاری ایجاد شده در دو میله برابر خواهد بود. در نتیجه تنش هر دو میله به دلیل مساوی بودن مساحت برابر است.

۸ـ گزینه «۲» خرپای داده شده در شکل از نوع معین می‌باشد، بنابراین با تغییر دمای میله‌ها تنشی در میله‌ها ایجاد نمی‌شود.

۹ـ گزینه «۱» چون مجموع تنش‌های قائم برابر صفر است، بنابراین حجم المان تغییر نخواهد کرد.

۱۰ـ گزینه «۳» برای محاسبه‌ی تغییر طول باید کرنش عرضی را از رابطه‌ی زیر تعیین نمود:

$$\nu=-\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\Rightarrow\varepsilon_y=-\nu\varepsilon_x\Rightarrow\frac{\Delta y}{d}=-\nu\frac{P}{AE}\Rightarrow\Delta y=-\nu\frac{Pd}{AE}=-\frac{۱}{۳}\times\frac{۱۵\times۲۰}{\frac{\pi}{۴}\times۲۰^۲\times۱۰۰}=-\frac{۱}{۳۰۰}\,\text{mm}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

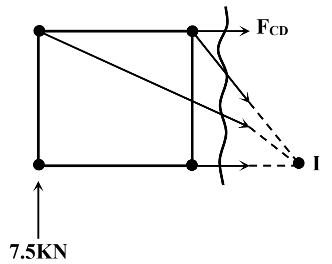
www.modaresanesharif.ac.ir

۱۱ــ گزینه «۲» به دلیل تقارن خرپا نیروی تکیه‌گاهی در A مساوی $A_y = ۷/۵\ KN$ است.

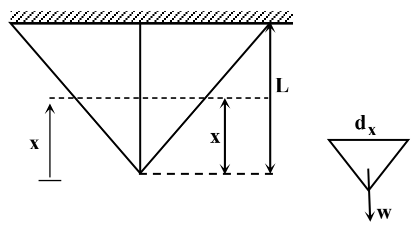
از روش برش برای تعیین نیروی CD استفاده می‌شود:

$$\Sigma M_I = ۰ \Rightarrow -F_{CD} \times ۲ - ۷/۵ \times ۶ = ۰ \Rightarrow F_{CD} = -۲۲/۵\ KN$$

$$\sigma_{CD} = \frac{-F}{A_{CD}} \Rightarrow A_{CD} = \frac{+۲۲/۵ \times ۱۰^۳}{۱۲/۵ \times ۱۰^۷} = ۱/۸ \times ۱۰^{-۴}\ m^۲ \Rightarrow A_{CD} = ۱/۸\, cm^۲$$



۱۲ــ گزینه «۴»



$$\Delta = \int \frac{wdx}{A_x E}\ ,\ w = \gamma v = \gamma \frac{A_x x}{۳}$$

$$\Delta = \int_۰^L \frac{\gamma A_x \frac{x}{۳} dx}{A_x E} = \frac{\gamma}{E} \times \frac{L^۲}{۶}$$

$$w = \gamma \frac{AL}{۳} \Rightarrow \Delta = \frac{WL}{۲AE}$$

۱۳ــ گزینه «۲» در رابطه حجم به جای مساحت رابطه‌ای برحسب نیروی P و به جای طول BC رابطه‌ای برحسب طول معلوم AD قرار داده می‌شود:

$$V_{BC} = A_{BC} L_{BC} \quad ; \quad \sigma = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} \Rightarrow A_{BC} = \frac{F_{BC}}{\sigma} = \frac{۲P}{\sin\theta \sigma}$$

$$L_{BC} = \frac{L_{AD}}{۲\cos\theta}$$

$$V_{BC} = \frac{۲P}{\sin\theta \times \sigma} \times \frac{L_{AD}}{۲\cos\theta} = \frac{۲PL_{AD}}{\sigma \sin ۲\theta} \xrightarrow{\text{زمانی این رابطه مینیمم است که } \sin ۲\theta = ۱ \text{ باشد}} ۲\theta = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow V_{BC} = V_{min}$$

به ازاء $\theta = \frac{\pi}{۴}$ حجم میله BC مینیمم می‌شود.

۱۴ــ گزینه «۱» جسم تحت برش مطلق تنها دچار تغییر شکل شده ولی حجمش تغییری نمی‌کند. در جسمی که تحت برش مطلق است مجموع تنش‌های عمودی صفر است.

۱۵ــ گزینه «۲» دو بخش میله‌ی مرکب مانند فنرهای موازی رفتار می‌کنند نیرویی که تکیه‌گاه A تحمل می‌کند برابر نیروی داخلی در فنر معادل میله‌ی AC است.

$$R_A = F_{AC} = k_{AC} \times \frac{P}{k_{eq}} = \frac{AE}{L_۱} \times \frac{P}{\frac{AE}{L_۱} + \frac{۲AE}{L_۲}} \Rightarrow R_A = P \times \frac{L_۲}{L_۲ + ۲L_۱}$$

۱۶ــ گزینه «۴» همانطور که در متن درس نیز بیان شد، نمودار تنش ـ کرنش برای مواد نرم با درصد کربن پایین به شکل مطرح شده در صورت سؤال و تنها ماده‌ای که در گزینه‌ها ماده‌ی نرم با درصد کربن پایین است فولاد ساختمانی است.

۱۷ــ گزینه «۲»

$$\Delta V = \varepsilon_V \times V_۰ = \frac{۱-۲\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \times V_۰ = \frac{۱-۲\times ۰/۳}{۲۱ \times ۱۰^۵} \times ۵۲۵۰ \times ۱۲۰۰ \Rightarrow \Delta V = ۱/۲\ cm^۳$$

۱۸ــ گزینه «۳» در ابتدا با برش زدن میله مرکب در مقاطع مختلف نیروی داخلی در قسمت‌های AB, BC, CD به ترتیب مساوی ۲۵kN,۱۲۵kN,۵۰kN بدست می‌آید.

$$\delta_D = \sum_{i=۱}^{n=۳} \frac{F_i L_i}{A_i E_i} = \frac{۵۰ \times ۱۰^۳ \times ۱۵۰۰}{۵۰۰ \times ۷۰ \times ۱۰^۳} + \frac{۱۲۵ \times ۱۰^۳ \times ۱۲۵۰}{۸۰۰ \times ۷۰ \times ۱۰^۳} + \frac{۲۵ \times ۱۰^۳ \times ۱۷۵۰}{۸۰۰ \times ۷۰ \times ۱۰^۳} \simeq ۵/۷۱\ mm$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۹ـ گزینه «۳» میلگردهای فولادی و بتن مانند فنرهای موازی عمل می‌کنند، بنابراین نسبت نیرویی که این دو تحمل می‌کنند برابر است با:

$$\frac{F_s}{F_c}=\frac{A_sE_s}{A_cE_c+8A_sE_s}=\frac{1\times 10\,E_c}{16\times 12E_c+8\times 1\times 10\,E_c}$$

$$\frac{F_s}{F_c}=\frac{10}{192+80}=\frac{10}{372}$$

۲۰ـ گزینه «۲»

$$\varepsilon_V=4\times 10^{-3}=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

$$\xrightarrow{\text{چون جسم تحت تنش تک‌محوره است.}}\varepsilon_V=4\times 10^{-3}=\varepsilon_x-\nu\varepsilon_x-\nu\varepsilon_x=\varepsilon_x-2\nu\varepsilon_x=8\times 10^{-3}-2\times\nu\times 8\times 10^{-3}\Rightarrow \nu=0/25$$

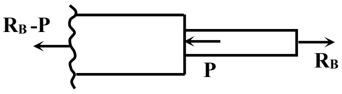
۲۱ـ گزینه «۴»

$$\frac{\delta_1}{\delta_2}=\frac{\frac{F(2L)}{2AE}}{\frac{FL}{AE}}=1$$

۲۲ـ گزینه «۲»

$$\delta=\frac{PL}{AE}\Rightarrow P=\frac{AE}{L}\delta=\frac{400\times 21}{12000}\times 2=1/4\,\text{kN}=1400\,\text{N}$$

۲۳ـ گزینه «۱» برای محاسبه تنش در وسط تیر، کافی است که نیروی داخلی تیر در این قسمت محاسبه شود:

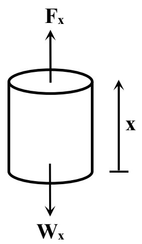


$$\sigma=\frac{(R_B-P)}{A_2}=\frac{(9600-24000)}{600}\Rightarrow\sigma=-24\frac{N}{mm^2}$$

۲۴ـ گزینه «۱» می‌توان برای محاسبه نیروهای تکیه‌گاهی، میله را مانند یک تیر ساده تحت بار متمرکز خارجی در نظر گرفته با گشتاورگیری حول هر تکیه‌گاه نیروی دیگر تکیه‌گاه را بدست آورد.

$$R_A=\frac{P\times 2L/3}{L}=\frac{2P}{3}\Rightarrow\sigma_{AC}=\frac{R_A}{A}=\frac{2}{3}\frac{P}{A}$$

۲۵ـ گزینه «۳»



$$\sigma=\frac{F_x}{A}=\frac{W_x}{A}=\frac{mg}{A}$$

$$\sigma=\frac{\rho V_x g}{A}=\frac{\rho Axg}{A}=\rho xg=\gamma x$$

تنش قائم در استوانه‌ای که تحت وزن خود آویزان است، با فاصله x نسبت خطی دارد.

$$x=\frac{h}{2}\Rightarrow\sigma=\gamma\frac{h}{2}$$

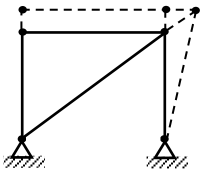
۲۶ـ گزینه «۲» y,x در راستای شعاعی بوده و تنش‌های آنها با هم برابر است.

$$\sigma_z=-\frac{P}{A}=-\frac{10000}{0/01}=-1\,\text{Mpa}\quad,\quad\sigma_x=\sigma_y$$

$$\varepsilon_x=0=\frac{1}{E}\{\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\}\Rightarrow\sigma_x(1-\nu)=\nu\sigma_z\Rightarrow\sigma_x(1-0/45)=-0/45\times 1\Rightarrow\sigma_x=-0/82\,\text{Mpa}=\sigma_y$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir



۲۷ـ گزینه «۲» به دلیل آنکه سازه معین استاتیکی می‌باشد، اجزای آن می‌توانند تحت افزایش دما تغییر طول دهند بدون آن که کششی در آنها ایجاد شود، در این حالت مفصل A جابجایی افقی نداشته فقط جابجایی قائم خواهد داشت.

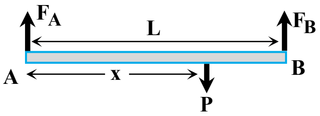
۲۸ـ گزینه «۱»

$$\varepsilon_x = 0 \Rightarrow \sigma_x - \nu\sigma_y = 0 \Rightarrow \sigma_x = \nu\sigma_0$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\{\sigma_y - \nu\sigma_x\} \Rightarrow E\varepsilon_y = \sigma_0 - \nu^2\sigma_0 \Rightarrow \frac{\sigma_0}{\varepsilon_y} = \frac{E}{1-\nu^2}$$

۲۹ـ گزینه «۲»

روش اول: برای آنکه میله AB افقی باقی بماند، باید جابجایی‌های دو کابل باهم برابر باشند:



$$\Delta_1 = \Delta_2 \Rightarrow \frac{F_A L}{E_1 A} = \frac{F_B L}{E_2 A} \Rightarrow \frac{F_A}{F_B} = \frac{E_1}{E_2} \Rightarrow F_A = F_B\frac{E_1}{E_2} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum M_A = 0 \Rightarrow xP = LF_B \Rightarrow x = L\dfrac{F_B}{P} \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow F_A + F_B = P \overset{(1)}{\Rightarrow} F_B = \dfrac{P}{1+\dfrac{E_1}{E_2}} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{L}{1+\dfrac{E_1}{E_2}} \Rightarrow x = \frac{LE_2}{E_2+E_1}$$

روش دوم: با استفاده از تعیین موقعیت مرکز سختی میله‌ها مقدار $\bar{x}$ مطابق مقابل به دست می‌آید.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i E_i}{\sum E_i} = \frac{0 \times E_1 + LE_2}{E_1 + E_2} = \frac{E_2 L}{E_1 + E_2}$$

۳۰ـ گزینه «۲» چون کرنش در راستای طولی معلوم است و همچنین جسم تحت بارگذاری تک محوری قرار دارد پس کرنش‌های جانبی را هم می‌توان با استفاده از ضریب پواسون به دست آورد.

$$V = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \Rightarrow \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\nu\varepsilon$$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon - \nu\varepsilon - \nu\varepsilon = \varepsilon(1-2\nu)$$

از طرفی: $\varepsilon_V = \dfrac{\Delta V}{V_0} \Rightarrow \Delta V = \varepsilon_V V_0$

حجم نهایی $V = V_0 + \Delta V = V_0 + \varepsilon_V V_0 = V_0(1+\varepsilon_V) = V_0(1+\varepsilon-2\nu\varepsilon)$

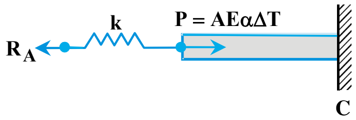
اگر عبارت موجود در گزینه «۲» را ساده نموده و از جملات کوچک مرتبه دوم و بالاتر آن صرف‌نظر کنیم، می‌توان نتیجه گرفت که گزینه «۲» صحیح است.

$$V = V_0(1+\varepsilon)(1-\nu\varepsilon)^2 = V_0(1+\varepsilon-2\nu\varepsilon-2\nu\varepsilon^2+\nu^2\varepsilon^2+\nu^2\varepsilon^3) \Rightarrow V \simeq V_0(1+\varepsilon-2\nu\varepsilon)$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه آزمون (۲)

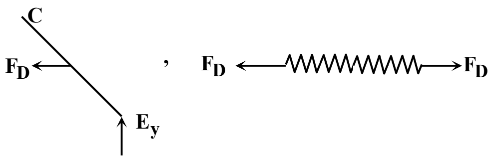


۱ـ گزینه «۱» تکیه‌گاه A را برداشته و به جای آن نیروی R_A قرار داده می‌شود. جابه‌جایی مقطع A تحت اثر نیروی R_A، افزایش دما و نیروی فشاری P برابر صفر است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\delta_A = ۰ \Rightarrow \alpha L \Delta T + \frac{R_A}{k} + \frac{R_A L}{AE} - \frac{(AE\alpha\Delta T)L}{AE} = ۰ \Rightarrow R_A = ۰$$

۲ـ گزینه «۳» ابتدا تعادل کل سازه را بررسی کرده تا نیروی تکیه‌گاهی E محاسبه شود:

$$\Sigma M_A = ۰ \Rightarrow E_y \times ۱۲ - ۱۲ \times ۸ \times ۴ = ۰ \Rightarrow E_y = ۳۲ \text{ ton}$$



اکنون قطعه CDE را جداگانه در نظر گرفته و حول نقطه C گشتاور می‌گیریم تا نیروی فنر بدست آید:

$$\text{CDE قطعه}: \Sigma M_C = ۰ \Rightarrow ۳۲ \times ۶ - F_D \times ۵ = ۰ \Rightarrow F_D = ۳۸/۴ \text{ tons}$$

با توجه به نیروی بدست آمده برای F_D فنر تحت کشش بوده در نتیجه ازدیاد طول داریم:

$$F_D = K\Delta \Rightarrow \Delta = \frac{۳۸/۴}{۲۰} = ۱/۹۲ \text{ cm}$$

۳ـ گزینه «۲» در صورتی که میله وسطی وجود نداشته باشد، تغییر مکان مفصل D در راستای قائم طبق مثال حل شده در متن درس، مساوی $\frac{\alpha L \Delta T}{\cos^۲\alpha}$ می‌باشد. (L طول میله وسطی) که بزرگ‌تر از میزان افزایش طول میله وسطی $\alpha L \Delta T$ است، لذا می‌توان نتیجه گرفت که میله وسطی تحت کشش و میله‌های جانبی تحت فشار قرار می‌گیرند.

۴ـ گزینه «۴» رابطه سازگاری بر اساس تشابه مثلث مطابق شکل روبه‌رو نوشته می‌شود.

$$\frac{\delta_C}{\delta_B} = \frac{۳a}{a} = ۳ \Rightarrow \frac{\frac{F_C L}{۲AE}}{\frac{F_B(۲L)}{AE}} = ۳ \Rightarrow \frac{F_C}{۴F_B} = ۳ \Rightarrow \frac{F_C}{F_B} = ۱۲$$

۵ـ گزینه «۳» تغییر طول میله‌ی مرکب تحت اثر افزایش دما برابر صفر است بنابراین می‌توان نوشت:

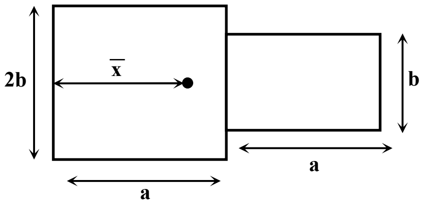
$$\delta = ۰ \Rightarrow \alpha L \Delta T - \frac{F\frac{L}{۲}}{AE} - \frac{F\frac{L}{۲}}{۲AE} = ۰ \Rightarrow F\left(\frac{۱}{۲AE} + \frac{۱}{۴AE}\right) = \alpha \Delta T$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{۳}{۴AE}\right) = \alpha \Delta T \Rightarrow F = \frac{۴AE\alpha\Delta T}{۳} \Rightarrow \frac{F}{۲A} = \frac{۲}{۳}E\alpha\Delta T = \sigma_{AB}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۶ـ گزینه «۲»



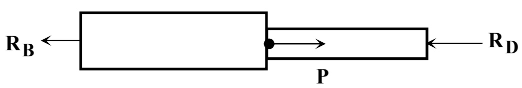
روش اول: در صورتی که بار خارجی بر مرکز سطح مقطع اعمال شود، بار محوری محسوب می‌شود. در چنین حالاتی ابتدا باید تیر از جنس‌های مختلف را به یک تیر همگن تبدیل نمود، بدین صورت که مساحت سطح مقطع تیر قوی‌تر را در ضریب n ضرب نماییم. توجه شود که اثر این افزایش مساحت فقط در راستای عرضی باید اعمال شود، $(n=\frac{E_۲}{E_۱}>۱)$ در این حالت تیری با مقطع گسترش یافته ولی جنس یکسان بدست می‌آید. مرکز سطح مقطع گسترش یافته نقطه اثر نیروی محوری خواهد بود.

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=۱}^{۲}A_i\bar{x}_i}{\sum_{i=۱}^{۲}A_i}\Rightarrow \bar{x}=\frac{(۲ab)\frac{a}{۲}+ab\times\frac{۳a}{۲}}{۲ab+ab}=\frac{a^۲b+\frac{۳}{۲}a^۲b}{۳ab}\Rightarrow \bar{x}=\frac{۵}{۶}a$$

روش دوم: یافتن مرکز سختی تیر با فرض اینکه L برای دو جنس یکسان باشد.

۷ـ گزینه «۳»

فرض مسئله:
$$\frac{R_B}{۲A}=\frac{R_D}{A}\Rightarrow R_B=۲R_D$$



از طرفی:
$$R_B+R_D=P\Rightarrow ۳R_D=P\Rightarrow\begin{cases}R_D=\frac{P}{۳}\\ R_B=\frac{۲P}{۳}\end{cases}$$

میله در B گیردار است، در نتیجه تغییر طول میله در نقطه B مساوی صفر است، قسمت BC از میله تحت کشش و قسمت CD تحت فشار می‌باشد.

$$\frac{R_BL_۱}{۲AE}-\frac{R_DL_۲}{AE}=\circ\Rightarrow\frac{\frac{۲P}{۳}\times L_۱}{۲}=\frac{\frac{P}{۳}\times L_۲}{۱}\Rightarrow\frac{۱}{۳}L_۱=\frac{L_۲}{۳}\Rightarrow\frac{L_۱}{L_۲}=۱$$

۸ـ گزینه «۴» تغییر مساحت ورق را می‌توان با استفاده از کرنش سطحی به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\varepsilon_A=\varepsilon_x+\varepsilon_y=\frac{۱-\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)=\frac{۱-\frac{۱}{۴}}{۱\circ\circ\circ\circ\circ}(۱\circ\circ+۵\circ)\Rightarrow\varepsilon_A=۱۱۲/۵\times۱\circ^{-۵}$$

$$\Rightarrow\varepsilon_A=\frac{\Delta A}{A}=۱۱۲/۵\times۱\circ^{-۵}\Rightarrow\Delta A=۱۱۲/۵\times۱\circ^{-۵}\times۱\circ\circ\circ\times۲\circ\circ\circ=۲۲۵\circ mm^۲$$

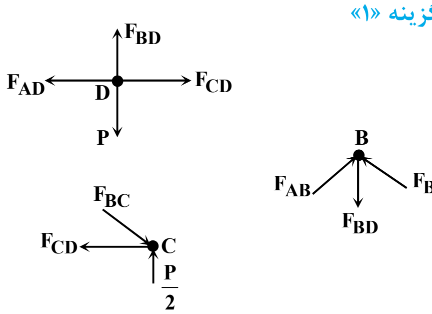
۹ـ گزینه «۱» در صورتی که تکیه‌گاه صلب در طرفین وجود نداشته باشد چون $\alpha_A>\alpha_B$ می‌باشد. در صورت افزایش دما جسم A تحت فشار و جسم B تحت کشش قرار می‌گیرد . ولی در صورتی که دو جسم از طرفین مقید باشند، افزایش طول در هر دو میله برابر صفر است. لذا هر دو میله تحت فشار می‌باشند. در بین گزینه‌ها گزینه (۱) صحیح‌تر است.

۱۰ـ گزینه «۱»

تعادل مفصل D : $\sum F_y=\circ\Rightarrow F_{BD}=P\ (T)$

تعادل مفصل B : $F_{AB}\cos۴۵+F_{BC}\cos۴۵-P=\circ\Rightarrow F_{AB}=F_{BC}=\frac{P}{\sqrt{۲}}\ (C)$

تعادل مفصل C : $\frac{P}{\sqrt{۲}}\cos۴۵-F_{CD}=\circ\Rightarrow F_{CD}=\frac{P}{۲}\Rightarrow F_{CD}=F_{AD}=\frac{P}{۲}\ (T)$



www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

چون ضریب اطمینان برای کشش مساوی ۲ است، بنابراین:

چون ضریب اطمینان برای عضوهای فشاری مساوی ۳ است، بنابراین:

$$AB\,,\;BC:۳=\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{all}}\Rightarrow\;\sigma_{all}=\frac{\sigma_\circ}{۳\sqrt{۲}}\Rightarrow\;\frac{\frac{P}{\sqrt{۲}}}{A}=\frac{\sigma_\circ}{۳\sqrt{۲}}\Rightarrow P=\frac{\sigma_\circ A}{۳}$$

$$AD\,,\;CD:۲=\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{all}}\Rightarrow\;\sigma_{all}=\frac{\sigma_\circ}{۲}\Rightarrow\;\frac{\frac{P}{۲}}{A}=\frac{\sigma_\circ}{۲}\Rightarrow P=\sigma_\circ A$$

از بین سه جواب بدست آمده، جواب حداقل مطلوب می‌باشد.

۱۱ــ گزینه «۳» تغییر طول میله‌ی دو سر گیردار تحت اثر تغییر دما برابر صفر است.

$$\Delta=\circ=۳\alpha L\Delta T-\frac{FL}{۲AE}\Rightarrow\sigma=۶E\alpha\Delta T$$

میله تحت نیروی فشاری محوری قرار گرفته است. در این حالت تنش برشی ماکزیمم در زاویه ۴۵° نسبت به محور طولی جسم اتفاق افتاده و مساوی نصف تنش قائم ماکزیمم است. در نتیجه :

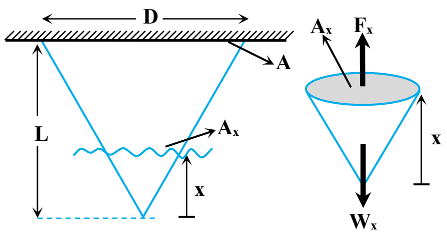
$$\tau_{max}=\frac{F}{A}\sin۴۵\cos۴۵=\sigma\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۶E\alpha\Delta T}{۲}=۳E\alpha\Delta T$$

۱۲ــ گزینه «۲» تنش در راستای z برابر $(\sigma_z=\circ)$ صفر بوده چون در جهت z تغییر فرم آزاد است. اما جسم در جهت y کاملاً مقید است. بنابراین:

$$\varepsilon_y=\circ\Rightarrow\sigma_y-\upsilon(\sigma_x+\sigma_z)=\circ\Rightarrow\sigma_y=\upsilon\sigma_x$$

$$\varepsilon_x=\frac{۱}{E}\{\sigma_x-\upsilon\sigma_y\}=\frac{۱}{E}\{\sigma_x-\upsilon(\upsilon\sigma_x)\}=\frac{\sigma_x}{E}(۱-\upsilon^۲)\quad\Rightarrow\frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}=\frac{E}{۱-\upsilon^۲}$$

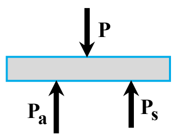
۱۳ــ گزینه «۱» برش دلخواهی به فاصله‌ی x از انتهای میله‌ی مخروطی زده و نیروی داخلی آن را مطابق زیر به دست می‌آوریم.



$$F_x=W_x=\omega V_x=\frac{\omega}{۳}A_x x\Rightarrow\frac{F_x}{A_x}=\frac{\omega}{۳}x$$

$$\delta=\int_\circ^L\frac{F_x dx}{A_x E}=\frac{۱}{E}\int_\circ^L\frac{\omega}{۳}x dx=\frac{\omega}{۳E}\left[\frac{x^۲}{۲}\right]_\circ^L=\frac{\omega L^۲}{۶E}$$

۱۴ــ گزینه «۲» فولاد و آلومینیوم توسط دو گیره صلب تحت فشار قرار دارند، بنابراین تغییر طول آن‌ها باهم برابر است:



رابطه تعادل : $P=P_s+P_a$

رابطه سازگاری : $\Delta_a=\Delta_s\Rightarrow\frac{P_s}{P_a}=\frac{E_sA_s}{E_aA_a}$

$$\Rightarrow P_s=\frac{E_sA_s}{E_sA_s+E_aA_a}P$$

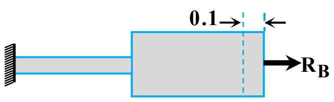
$$\Rightarrow\sigma_s=\frac{P_s}{A_s}=\frac{E_s}{E_sA_s+E_aA_a}P=\frac{۲\circ\circ\times۲\circ\circ\times۱\circ^۳}{۲\circ\circ\times\frac{\pi}{۴}(۹\circ^۲-۷۵^۲)+۲۵\times\frac{\pi}{۴}\times۷۵^۲}\quad\Rightarrow\sigma_s=۸\circ/۱\ MPa$$

---

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۵ـ گزینه «۴» در اثر کاهش دما میله مرکب منقبض شده از طرفی تکیه‌گاه در برابر انقباض میله مقاومت از خود نشان می‌دهد بنابراین رابطه سازگاری به صورت زیر نوشته می‌شود:



$-۰/۱m =$ افزایش طول میله مرکب ناشی از نیروی تکیه‌گاهی ـ انقباض میله مرکب ناشی از کاهش دما

رابطه سازگاری: $\delta_T - \delta_F = -۰/۱mm \Rightarrow \left(\frac{R_B \times ۲۵۰}{۷۰۰۰۰ \times ۷۵۰} + \frac{R_B \times ۵۰۰}{۹۰۰۰۰ \times ۵۰۰}\right) - (۲۰ \times ۱۰^{-۶} \times ۵۰۰ \times ۲۰ + ۲۵ \times ۱۰^{-۶} \times ۲۵۰ \times ۲۰) = -۰/۱$

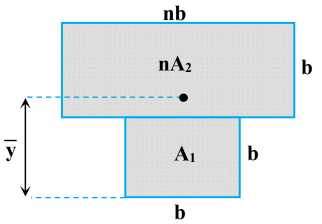
$$\Rightarrow R_B = \frac{۰/۲۲۵}{\left(\frac{۲۵۰}{۷۰۰۰۰ \times ۷۵۰} + \frac{۵۰۰}{۹۰۰۰۰ \times ۵۰۰}\right)} = ۱۴۱۷۵\ N \Rightarrow \sigma_{BC} = \frac{R_B}{A_{BC}} = \frac{۱۴۱۷۵}{۷۵۰} = ۱۸/۹\ MPa$$

۱۶ـ گزینه «۱» تغییر مکان مقطع C با استفاده از روش جمع آثار برابر است با:

$$\delta_C = \frac{۲W(\frac{L}{۲})}{۲AE} + \frac{WL}{۲AE} + \frac{W(\frac{L}{۲})}{AE} + \frac{WL}{۲AE} = \frac{WL}{AE}\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\right) = \frac{۲WL}{AE}$$

۱۷ـ گزینه «۳»

روش اول: دو میله در صورتی تحت کشش یکنواخت می‌باشند که بار P، بر مرکز سختی سطح مقطع میله مرکب اثر کند، برای پیدا نمودن مرکز سختی میله مرکب باید سطح مقطع با جنس قوی‌تر را گسترش دهیم.

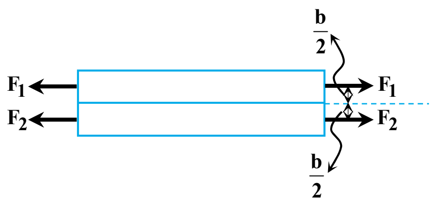


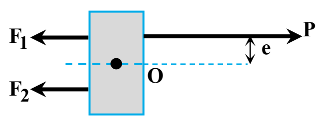
$$n = \frac{E_۱}{E_۲}$$

$$\bar{y} = \frac{k_۱ y_۱ + k_۲ y_۲}{k_۱ + k_۲} = \frac{E_۱ A_۱ y_۱ + E_۲ A_۲ y_۲}{A_۱ E_۱ + A_۲ E_۲} = \frac{A_۱ y_۱ + n A_۲ y_۲}{A_۱ + n A_۲}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{\frac{b}{۲} \times b^۲ + \frac{۳b}{۲} \times nb^۲}{b^۲ + nb^۲} = \frac{\frac{b}{۲} + \frac{۳b}{۲} \times n}{n+۱} \Rightarrow e = \bar{y} - b = \frac{\frac{b}{۲} + \frac{۳bn}{۲}}{n+۱} - b = \frac{\frac{bn}{۲} - \frac{b}{۲}}{n+۱} = \frac{b}{۲} \times \frac{\frac{E_۱}{E_۲} - ۱}{\frac{E_۱}{E_۲} + ۱} \Rightarrow e = \frac{b}{۲}\,\frac{E_۱ - E_۲}{E_۱ + E_۲}$$

روش دوم: برای این که میله‌ها، تحت کشش باشند باید نیرو در میله‌ها، در وسط آن‌ها باشد.





معادلات تعادل:

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow P - F_۱ - F_۲ = ۰ \Rightarrow F_۱ + F_۲ = P \quad (۱)$$

$$\sum M_O = ۰ \Rightarrow Pe = F_۱ \frac{b}{۲} + F_۲ \frac{b}{۲} = ۰ \Rightarrow Pe = (F_۱ - F_۲)\frac{b}{۲}$$

طبق اصل سازگاری، تغییر طول میله‌ها باهم برابر است پس:

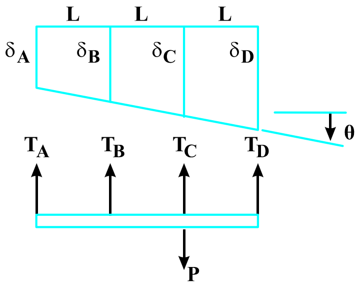
رابطه سازگاری: $\Delta_۱ = \Delta_۲ \Rightarrow \frac{F_۱ L}{AE_۱} = \frac{F_۲ L}{AE_۲} \Rightarrow F_۱ = \frac{E_۱}{E_۲} F_۲ \quad (۳)$

$$(۱), (۲), (۳) \Rightarrow e = \frac{b}{۲}\,\frac{E_۱ - E_۲}{E_۱ + E_۲}, \quad F_۱ = \frac{E_۱}{E_۱ + E_۲} P, \quad F_۲ = \frac{E_۲}{E_۱ + E_۲} P$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۸ـ گزینه «۱» میله‌ی صلب افقی پس از اعمال بار به سمت پایین حرکت کرده و اندکی مایل می‌شود.



زاویه‌ی میله صلب با افق برابر است با:

$$\theta = \frac{\delta_B - \delta_A}{L}$$

اکنون می‌توان تغییر طول میله‌های B و C و D را برحسب تغییر مکان میله‌ی A و زاویه‌ی θ نوشت:

$$\delta_B = \delta_A + L\theta \qquad (1)$$

$$\delta_C = \delta_A + 2L\theta = 2\delta_B - \delta_A \qquad (2)$$

$$\delta_D = \delta_A + 3L\theta = 3\delta_B - 2\delta_A \qquad (3)$$

از طرفی معادلات تعادل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_A + T_B + T_C + T_D = P \qquad (4)$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow T_A(3L) + T_B(2L) + T_C L = PL \qquad (5)$$

با حل همزمان معادلات بالا نیروی کششی در سیم A به صورت مقابل به دست می‌آید.

$$T_A = \frac{1}{10}P$$

۱۹ـ گزینه «۱» در اثر افزایش دمای میله‌ی AB خواهیم داشت:

$$\alpha\frac{L}{2}\Delta T - \frac{F\frac{L}{2}}{2AE} - \frac{F\frac{L}{2}}{AE} = 0 \Rightarrow F\left(\frac{1}{4AE} + \frac{1}{2AE}\right) = \frac{\alpha\Delta T}{2}$$

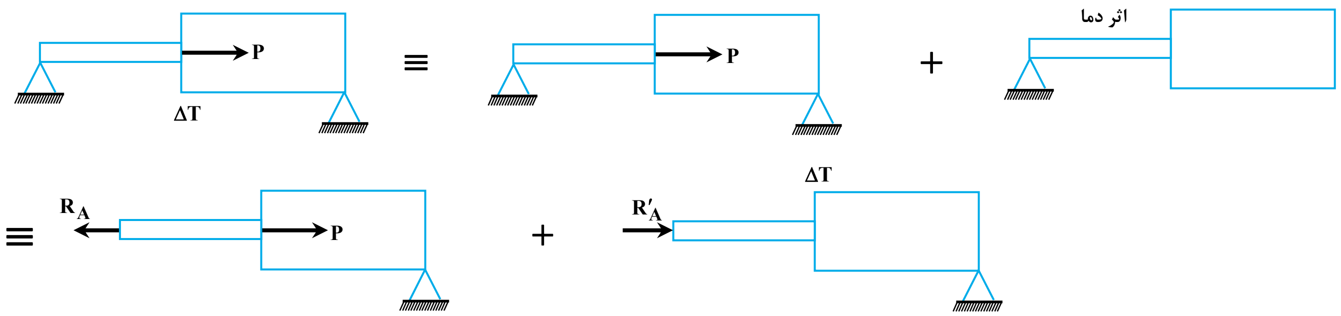
$$\Rightarrow F\left(\frac{3}{4AE}\right) = \frac{\alpha\Delta T}{2} \Rightarrow F = \frac{2}{3}AE\alpha\Delta T \Rightarrow \sigma_{AB} = \frac{F}{2A} = \frac{E\alpha\Delta T}{3} \Rightarrow \sigma_{AB} = \frac{2(10^5)(10^{-5})120}{3} = 80\,\text{MPa}$$

۲۰ـ گزینه «۴» با توجه به حل تشریحی مثال (۹) فصل اول درس‌نامه‌ی (۲) می‌توان نوشت:

$$\delta_B = \frac{P\times H}{2AE\cos^3\alpha} = \frac{P\times 2L\cos\alpha}{2AE\cos^3\alpha} = \frac{PL}{AE\cos^2\alpha}$$

۲۱ـ گزینه «۱»

روش اول: این مسئله نامعین استاتیکی است و از جمع آثار آن را حل می‌کنیم:



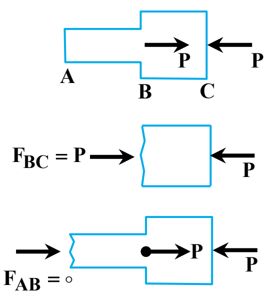
جابجایی کلی نقطه A تحت اثر نیرو و دما برابر صفر است، لذا:

$$\frac{R_A L}{AE} + \frac{R_A L}{3AE} - \frac{PL}{3AE} + \frac{(-R'_A)L}{AE} + \frac{(-R'_A)L}{3AE} + 2L\alpha\Delta T = 0$$

از آنجایی که تنش در قسمت AB برابر صفر است پس نیروی داخلی در این قسمت باید مساوی صفر شده و $R_A = R'_A$ باشد، در نتیجه:

$$\frac{-PL}{3AE} + 2L\alpha\Delta T = 0 \Rightarrow \Delta T = \frac{P}{6AE\alpha}$$

روش دوم: برای آنکه تنش در میله AB صفر گردد، نیروی تکیه‌گاهی در A نباید وجود داشته باشد. بنابراین نیروی تکیه‌گاهی در C باید برابر P به صورت روبرو باشد:



از آنجا که نقطه‌ی A، جابجایی ندارد پس باید جابجایی این نقطه ناشی از نیرو، برابر با جابجایی‌اش در اثر تغییر دما باشد، پس رابطه سازگاری به این صورت نوشته می‌شود:

$$\delta_P = \delta_T \Rightarrow \left(\frac{F_{BC}L}{3AE} + \cancel{\frac{F_{AB}L}{AE}}^{\,0}\right) = \alpha L\Delta T + \alpha L\Delta T$$

$$\Rightarrow \frac{PL}{3AE} = 2\alpha L\Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{P}{6AE\alpha}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۲ــ گزینه «۱» با توجه به حل تشریحی مثال (۱۸) فصل اول درسنامه (۱) می‌توان نوشت:

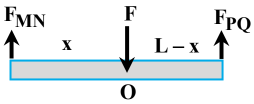
$$\tan^2\alpha = 2 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲۳ــ گزینه «۳» با استفاده از روش جمع آثار می‌توان نوشت:

$$\delta_A = \frac{PL}{A_{AB}E_{AB}} + \frac{PL}{A_{BC}E_{BC}} - \frac{2400\times L}{A_{BC}E_{BC}} = 0 \Rightarrow \frac{P}{400\times 100} + \frac{P}{800\times 200} = \frac{2400}{800\times 200}$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{40000} + \frac{1}{160000}\right) = \frac{24}{1600} \Rightarrow P = 480\,N$$

۲۴ــ گزینه «۱»



طبق فرض مسئله می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{MN} = \varepsilon_{PQ} \Rightarrow \frac{F_{MN}}{A_1E_1} = \frac{F_{PQ}}{A_2E_2} \Rightarrow \frac{F_{MN}}{F_{PQ}} = \frac{A_1E_1}{A_2E_2} \qquad (1)$$

معادله تعادل $\sum M_O = 0 \Rightarrow -F_{MN}\times x + F_{PQ}\times(l-x) = 0 \Rightarrow \dfrac{F_{MN}}{F_{PQ}} = \dfrac{x}{l-x} \qquad (2)$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{A_1E_1}{A_2E_2} = \frac{x}{l-x} \Rightarrow x(A_2E_2 + A_1E_1) = l\times A_1E_1 \quad ; \quad x = \frac{A_1E_1\times l}{A_2E_2 + A_1E_1}$$

۲۵ــ گزینه «۲» در اجسام ایزوتروپیک چون خواص جسم در همه جهات یکسان است، بنابراین تحت تغییرات دما تنشی در جسم ایجاد نمی‌شود.

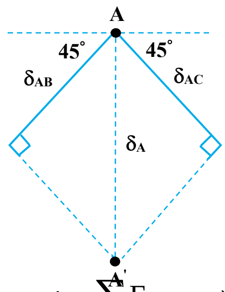
۲۶ــ گزینه «۴» تمرکز تنش در اجسام از لحاظ تئوری ناشی از تغییرات ناگهانی سطح مقطع، گوشه‌های تیز و به طور خلاصه تابع شکل هندسی می‌باشد.

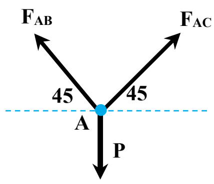
۲۷ــ گزینه «۳»

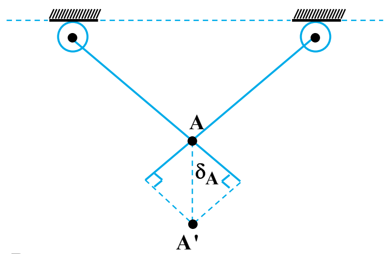
$$\delta = \frac{FL}{AE} \Rightarrow E = \frac{FL}{A\delta} = \frac{10\,KN\times 600\,mm}{50\,mm^2\times 150\times 10^{-3}\,mm} \Rightarrow E = 800\,GPa$$

۲۸ــ گزینه «۱»

روش اول: با توجه به شکل رسم شده برای جابجایی مفصل A می‌توان نوشت:

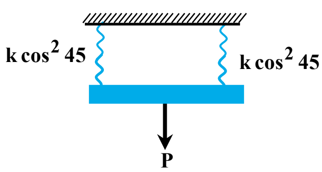






$$\delta_A = \frac{\delta_{AB}}{\cos 45} = \sqrt{2}\delta_{AB} \quad ; \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow 2F_{AB}\sin 45 = P \Rightarrow F_{AB} = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

$$\delta_{AB} = \frac{F_{AB}L}{AE} = \frac{\frac{P}{\sqrt{2}}\times L}{AE} \Rightarrow \delta_A = \sqrt{2}\times\frac{PL}{\sqrt{2}AE} = \frac{PL}{AE}$$



روش دوم: با استفاده از معادل‌سازی دو میله با فنر می‌توان همین نتیجه را ساده‌تر به دست آورد. به این صورت که هر میله زاویه‌دار را طبق تذکر ۱۲ به یک فنر تبدیل کرده و چون دو فنر دارای خیز یکسان در مفصل A می‌باشند، با استفاده از قانون فنرهای موازی، سختی معادل فنرها را می‌توان به دست آورد. در نهایت جابجایی مفصل A از رابطه $\dfrac{P}{k_{eq}}$ تعیین می‌شود.

$$\delta = \frac{P}{k_{eq.}} = \frac{P}{2k\cos^2 45} = \frac{P}{2k\times\frac{1}{2}} = \frac{P}{k} = \frac{P}{\frac{AE}{L}} = \frac{PL}{AE}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۹ـ گزینه «۱»

ΔT تغییر طول میله ناشی از تغییر دمای $= L\alpha\Delta T$

P تغییر طول میله ناشی از نیروی محوری $= \frac{PL}{EA}$

برای حالتی که با افزایش دمای T، نیروی P به صورت مساوی بین دو ستون تقسیم می‌شود، داریم:

$$P_1 = P_2 = \frac{P}{2}$$

رابطه‌ی سازگاری: $(L\alpha T)_1 - (\frac{PL}{2EA})_1 = (L\alpha T)_2 - (\frac{PL}{2EA})_2$

$$\Rightarrow \alpha_1 T - \frac{P}{2E_1A_1} = \alpha_2 T - \frac{P}{2E_2A_2} \qquad \Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)T = \frac{P}{2}(\frac{1}{E_1A_1} - \frac{1}{E_2A_2})$$

$$A_1 = a^2$$

$$A_2 = 3a^2 \qquad \Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)T = \frac{P}{2}(\frac{1}{4E_2a^2} - \frac{1}{3E_2a^2}) = \frac{-P}{24E_2a^2} \xrightarrow{E_1=4E_2} (\alpha_2 - \alpha_1)T = \frac{P}{6E_1a^2} \quad (I)$$

در حالت (۲) که تمام نیرو را مقطع اول تحمل می‌کند، داریم:

رابطه‌ی سازگاری $(L\alpha\Delta T)_1 - (L\alpha\Delta T)_2 = \left(\frac{PL}{EA}\right)_1$

$$L_1 = L_2 \Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T = \frac{P}{E_1A_1} = \frac{P}{E_1a^2} \quad (II)$$

با جاگذاری II در I $\Rightarrow (\alpha_2 - \alpha_1)T = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T}{6} \Rightarrow \Delta T = -6T$

پس بایستی به میزان $6T$ کاهش یابد.

۳۰ـ گزینه «۴» در این میله، مؤلفه‌های تنش به صورت زیر می‌باشد. (چون بارگذاری محوری است تنش‌های قائم در راستای y و z مساوی صفر است.)

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \qquad \sigma_y = 0 \qquad \sigma_z = 0$$

تغییر حجم برای المانی تحت تنش محوری و تغییرات دما طبق قانون هوک عمومی برابر است با:

$$\Delta V = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)V$$

طبق قانون هوک عمومی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \upsilon(\sigma_y + \sigma_z)) + \alpha T \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \upsilon(\sigma_x + \sigma_z)) + \alpha T \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \upsilon(\sigma_x + \sigma_y)) + \alpha T \end{cases}$$

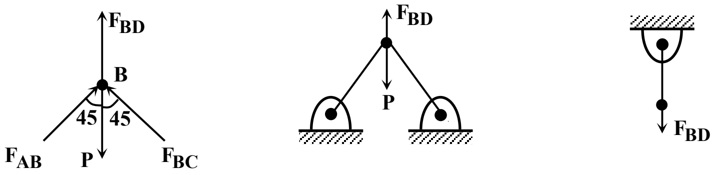
$$\Rightarrow \Delta V = [\frac{1-2\upsilon}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + 3\alpha T]V \quad ; \quad \left.\begin{matrix} \Delta V = [\frac{1-2\upsilon}{E}\frac{P}{A} + 3\alpha T]V \\ V = AL \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta V = \frac{1-2\upsilon}{E}PL + 3AL\alpha T$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه آزمون (۳)

۱ـ گزینه «۱»



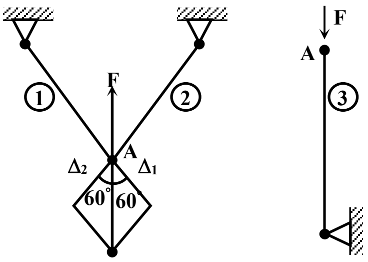
از معادله تعادل در مفصل B نوشته می‌شود:

$$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow F_{BD} + ۲F_{AB}\cos ۴۵ = P \xrightarrow{\text{(با فرض مساوی بودن نیروی سه میله)}} F = \frac{P}{۱+\sqrt{۲}}$$

اگر دو میله AB و BC به تنهایی تحت نیروی P در راستای محور تقارن سازه قرار گیرند، جابجایی مفصل D در راستای نیرو مساوی $\frac{PL}{۲AE\cos^۲\theta}$ می‌باشد و با تغییر مکان مفصل B از سازه ناشی از افزایش طول میله BD، مساوی است.

$$\text{رابطه سازگاری}: \frac{(P-F)L}{۲A_۱E\cos^۲ ۴۵} = \frac{F\times L}{AE} \Rightarrow \frac{(P-\frac{P}{۱+\sqrt{۲}})}{۲\times A_۱\times(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲} = \frac{\frac{P}{۱+\sqrt{۲}}}{A} \Rightarrow \frac{A_۱}{A} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}}}{۲\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}} = \frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \sqrt{۲}$$

۲ـ گزینه «۲» میله‌های (۱) و (۲) تحت اثر افزایش دما، افزایش طولی برابر $\Delta_۱$ داشته و همچنین تحت اثر نیروی فشاری وارده از طرف میله (۳) کاهش طول خواهند داشت. عکس‌العمل نیروی F نیز باعث کاهش طول میله (۳) خواهد شد. بنابراین جابجایی مفصل A تحت عوامل ΔT و F برابر است با:



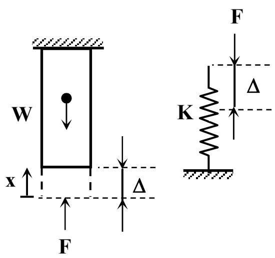
$$\alpha L\Delta T = \Delta_۱$$

$$\text{رابطه سازگاری}: \frac{\Delta_۱}{\cos ۶۰} - \frac{FL}{۲AE\cos^۲ ۶۰} = \frac{FL}{AE} \Rightarrow ۲\alpha L\Delta T = F(\frac{L}{AE}+\frac{۲L}{AE}) \Rightarrow F = \frac{۲}{۳}AE\alpha\Delta T$$

جمله دوم از رابطه فوق مربوط به تغییر مکان مفصل A تحت نیروی خارجی است.

چون زاویه بین سه میله برابر است، در نتیجه نیروی فشاری به وجود آمده در سه میله مساوی و برابر F می‌باشد.

۳ـ گزینه «۴» تغییر طول فنر و میله در نقطه اتصال به یکدیگر با هم برابرند، از آنجائیکه تغییر طول میله ناشی از نیروی وزن و نیروی فشاری فنر می‌باشد، در نتیجه:



تغییر طول یک میله تحت اثر وزن آن برابر است با:

$$\delta = \int\frac{wdx}{AE}, w = \gamma v = \gamma Ax$$

$$\Rightarrow \delta = \int_۰^L \frac{\gamma Axdx}{AE} = \frac{\gamma}{E}\frac{L^۲}{۲} = \frac{\gamma(AL)L}{۲AE} = \frac{WL}{۲AE} = \frac{WL}{۲AE}$$

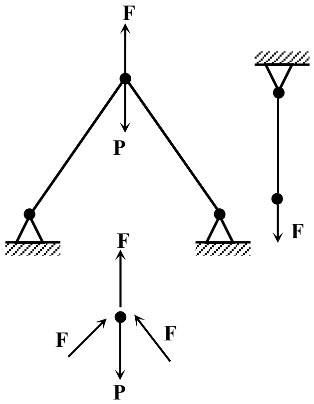
البته می‌توان وزن را به صورت نیروی متمرکز در نظر گرفت و به راحتی به جواب بالا رسید.

$$\frac{WL}{۲AE} - \frac{FL}{AE} = \frac{F}{K} = \Delta \Rightarrow \frac{WL}{۲AE} = F(\frac{L}{AE}+\frac{۱}{K}) \Rightarrow F = \frac{\frac{WL}{۲AE}}{\frac{L}{AE}+\frac{L}{۲AE}} = \frac{\frac{WL}{۲AE}}{\frac{۳L}{۲AE}} = \frac{W}{۳}$$

$$\Delta = \frac{F}{K} = \frac{FL}{۲AE} = \frac{WL}{۶AE}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir



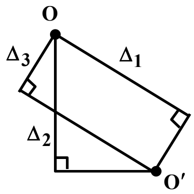
۴ـ گزینه «۲» با توجه به روابط (۱) و (۲) در مثال ۳۳ متن درس می‌توان نوشت:

$$\Delta=\frac{(P-F)L}{۲A_۲E\cos^۲ ۴۵}=\frac{FL}{A_۱E}\Rightarrow\frac{A_۲}{A_۱}=\frac{(P-F)}{۲\times\frac{۱}{۲}F}=\frac{P-F}{F}$$: رابطه سازگاری

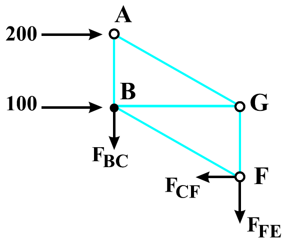
با نوشتن رابطه تعادل در راستای y برای نقطه اتصال ۳ میله نتیجه می‌شود که:

$$\Sigma F_y=\circ\Rightarrow P=F+۲F\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=F(۱+\sqrt{۲})$$

$$\frac{A_۲}{A_۱}=\frac{F(۱+\sqrt{۲})-F}{F}=\sqrt{۲}$$



۵ـ گزینه «۴» به دلیل اینکه نیروی P در راستای قائم است ، نیرو در میله‌های (۱) و (۳) مساوی می‌باشد، از طرفی چون $A_۱<A_۳$ در نتیجه طبق رابطه $\Delta=\frac{PL}{AF}$، $\Delta_۱>\Delta_۳$ و نقطه O به طرف پایین و سمت راست انحراف می‌یابد.

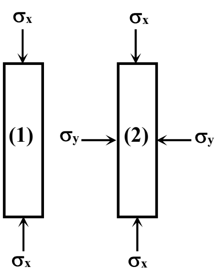


۶ـ گزینه «۳» یک برش مایل در خرپا زده و با کمک معادله‌ی تعادل نیروی داخلی در عضو CF را به دست می‌آوریم.

$$\sum F_x=\circ\Rightarrow -F_{CF}+۱۰۰+۲۰۰=\circ\Rightarrow F_{CF}=۳۰۰\text{kips}$$

$$\sigma_{CF}=\frac{F_{CF}}{A}=\frac{۳۰۰\text{kips}}{۲\text{in}^۲}=۱۵۰\text{ ksi}$$

۷ـ گزینه «۲»



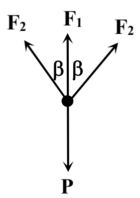
$$\frac{\Delta V_۲}{\Delta V_۱}=\frac{\varepsilon_{V_۲}}{\varepsilon_{V_۱}}=\frac{(\frac{۱-۲\nu}{E})(\sigma_{x_۲}+\sigma_{y_۲}+\sigma_{z_۲})}{(\frac{۱-۲\nu}{E})(\sigma_{x_۱}+\sigma_{y_۱}+\sigma_{z_۱})}$$

$$\sigma_{x_۱}=-P\ ,\ \sigma_{y_۱}=\sigma_{z_۱}=\circ$$

$$\sigma_{x_۲}=-P\ ,\ \sigma_{y_۲}\neq\circ\ ,\ \sigma_{z_۲}=\circ$$

$$\varepsilon_{y_۲}=\circ=\sigma_{y_۲}-\nu\sigma_{x_۲}=\circ\Rightarrow\sigma_{y_۲}=\nu\sigma_{x_۲}=-\nu P$$

$$\frac{\Delta V_۲}{\Delta V_۱}=\frac{-P-\nu P+\circ}{-P+\circ+\circ}=\frac{۱+\nu}{۱}\ ,\ \circ<\nu<\circ/۵\Rightarrow ۱<۱+\nu<۱/۵\Rightarrow\frac{\Delta v_۲}{\Delta v_۱}>۱$$



۸ـ گزینه «۴» با توجه به مثال ۲۰ در فصل اول درسنامه (۶) می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_y=\circ\Rightarrow ۲F_۲\cos\beta+F_۱=P\\ F_۱=\dfrac{P}{۱+۲\cos^۳\beta}\qquad(۱)\end{array}\right\}\Rightarrow ۲F_۲\cos\beta+\frac{P}{۱+۲\cos^۳\beta}=P$$

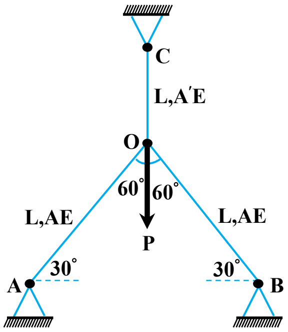
$$\Rightarrow ۲F_۲\cos\beta=\frac{۲\cos^۳\beta\times P}{۱+۲\cos^۳\beta}\Rightarrow F_۲=\frac{\cos^۲\beta}{۱+۲\cos^۳\beta}\times P\qquad(۲)\qquad;(۱),(۲)\Rightarrow\frac{F_۱}{F_۲}=\frac{۱}{\cos^۲\beta}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲$$

---

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

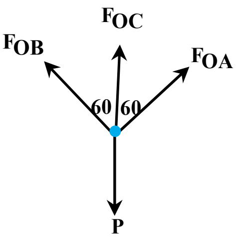
۹ـ گزینه «۳» برای حل مسئله می‌توان ابتدا میله OC را در نظر نگرفت و به جای آن نیروی داخلی آن میله را قرار داد، سپس از رابطه سازگاری استفاده نمود.



$$\Delta_O = \frac{(P-F_{OC})L}{2AE\cos^2 60} = \frac{F_{OC}L}{A'E} \Rightarrow \frac{P-F_{OC}}{2A\times\frac{1}{4}} = \frac{F_{OC}}{A'} \qquad (1)$$

از طرفی نیرو در میله‌ها مساوی است.

از نوشتن تعادل برای مفصل O نتیجه می‌شود:

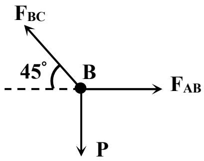


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{OC} + F_{OA}\cos 60 + F_{OB}\cos 60 - P = 0 \Rightarrow F_{OC} = \frac{P}{2} \qquad (2)$$

با قرار دادن نتیجه (۲) در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$\frac{P-\frac{P}{2}}{\frac{A}{2}} = \frac{\frac{P}{2}}{A'} \Rightarrow \frac{A'}{A} = \frac{1}{2}$$

۱۰ـ گزینه «۲» اعضای AB, BC هرکدام دو نیرویی بوده و نیرو را در راستای خط واصل نقاط ابتدا به انتهای عضو تحمل می‌کنند. بنابراین امتداد نیرو در عضو BC در راستای BC است.



$$\cot g45 = \frac{F_{AB}}{P} \Rightarrow F_{AB} = P \Rightarrow \Delta_{AB} = \frac{PR}{AE}$$

۱۱ـ گزینه «۲» در اثر تغییر دما در میله‌ی مرکب دو سرگیردار، تغییر طول میله برابر صفر است، بنابراین طبق رابطه‌ی سازگاری می‌توان نوشت:

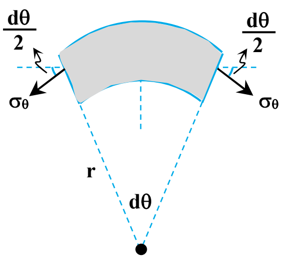
$$\delta = \delta_T + \delta_F = 0 \Rightarrow \alpha\frac{L}{3}\Delta T + \frac{\alpha}{2}\frac{L}{3}\Delta T + 2\alpha\frac{L}{3}\Delta T - \frac{F\frac{L}{3}}{A(2E)} - \frac{F\frac{L}{3}}{2AE} - \frac{F\frac{L}{3}}{3A(\frac{E}{2})} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha\Delta T\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right) = \frac{F}{AE}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{9}\right) \Rightarrow \alpha\Delta T\frac{7}{6} = \frac{F}{AE}\frac{10}{18} \Rightarrow F = \frac{21}{10}AE\alpha\Delta T$$

حداکثر تنش فشاری در میله‌ی باریک‌تر ایجاد شده بنابراین مقدار آن مساوی است با:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{21}{10}E\alpha\Delta T$$

۱۲ـ گزینه «۲» برای یک المان کوچک به زاویه مرکزی $d\theta$ می‌توان قانون دوم نیوتن را به صورت زیر نوشت:



$$\sum F_n = ma_n$$

اگر ضخامت المان در جهت عمود بر صفحه برابر یک در نظر گرفته شود، می‌توان نوشت:

$$[\sigma_\theta \sin\frac{d\theta}{2}\times dr]\times 2 = a_n dm = r\omega^2 dm$$

از آن‌جا که زاویه $\frac{d\theta}{2}$ بسیار کوچک است پس: $\sin\frac{d\theta}{2} \simeq \frac{d\theta}{2}$.

$$\sigma_\theta\frac{d\theta}{2}\times 2dr = r\omega^2\rho dV$$

از طرفی حجم المان برابر است با:

$$dV = dr\times 1\times rd\theta$$

در نتیجه:

$$\sigma_\theta = \frac{r\omega^2\rho\times dr\times 1\times rd\theta}{dr\ \ d\theta} = \rho r^2\omega^2$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۳ـ گزینه «۳» تغییرات حجم با استفاده از کرنش حجمی در یک المان مکعبی برابر است با:

$$\Delta V = \varepsilon_v V_\circ = \varepsilon_v \times a^3 = \frac{(1-2\nu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)a^3 \qquad (1)$$

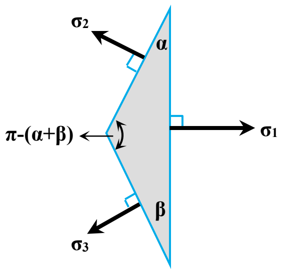
$$\left.\begin{array}{l} \text{حجم مکعب } V = a^3 \\ \text{قطر مکعب } d = a\sqrt{3} \Rightarrow a = \dfrac{d}{\sqrt{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow V = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$$

از طرفین رابطه فوق دیفرانسیل می‌گیریم، در نتیجه ارتباط بین تغییرات حجم و تغییرات قطر به دست می‌آید:

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{3d^2\Delta d}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \Delta d = \frac{3\sqrt{3}\Delta V}{3d^2} = \frac{\sqrt{3}\Delta V}{d^2} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \Delta d = \frac{\sqrt{3}(1-2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)a^3}{E \times (a\sqrt{3})^2} \Rightarrow \Delta d = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{(1-2\nu)a}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

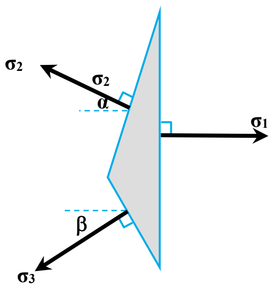
۱۴ـ گزینه «۴» با نوشتن معادلات تعادل برای المان و همچنین قانون مثلث برای المان مثلثی نشان داده شده می‌توان نتیجه گرفت گزینه «۴» صحیح است.



$$\text{قانون مثلث} \quad \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}a \;\; ; \;\; c = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}a$$

معادلات تعادل برای المان مثلثی به صورت زیر نوشته می‌شوند:



$$\sum F_y = \circ \Rightarrow \sigma_2 \sin\alpha \times b = \sigma_3 \sin\beta \times c \Rightarrow \sigma_2 = \sigma_3$$

$$\sum F_x = \circ \Rightarrow \sigma_2 \cos\alpha \times b + \sigma_3 \sin\beta \times c = \sigma_1 a$$

$$\Rightarrow \sigma_2 \cos\alpha \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}a + \sigma_3 \cos\beta \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}a = \sigma_1 a \Rightarrow$$

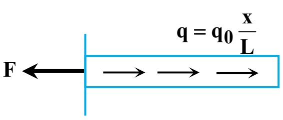
$$\frac{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}a = \sigma_1 a \;\Rightarrow \sigma_2 \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}a = \sigma_1 a \;\Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

۱۵ـ گزینه «۴» تغییر مکان انتهای میله که تحت بارگذاری گسترده محوری $q(x)$ قرار دارد، عبارت است از :

$$\delta = \int_\circ^L \frac{F}{EA}dx$$

چون نیروی خارجی به صورت بار گسترده است، برای محاسبه نیروی داخلی باید از رابطه انتگرالی زیر استفاده نمود.

در این تست:



$$\delta = \int_\circ^L \frac{\frac{q_\circ}{2L}x^2}{EA}dx = \frac{q_\circ}{2LEA}\int_\circ^L x^2 dx = \frac{q_\circ}{2LEA}\left.\frac{x^3}{3}\right|_\circ^L = \frac{q_\circ}{LEA}\frac{L^3}{6} \Rightarrow \delta = \frac{q_\circ L^2}{6EA}$$

۱۶ـ گزینه «۱» در صورتی که تغییر مکان $\Delta(x)$ در هر نقطه تابعی از مکان باشد، کرنش ε_x برابر است با:

$$\varepsilon_x = \frac{d\Delta(x)}{dx}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{در این تست } \varepsilon_x = \dfrac{d(kx^3)}{dx} = 3kx^2 \\ \text{جابجایی انتهای میله } \Delta_\circ = kL^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{3\Delta_\circ}{L^3}x^2$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۷ـ گزینه «۴» طبق تذکر ۵ درسنامه ۶ فصل اول می‌توان نوشت:

$$\theta=\frac{M}{\sum_{i=1}^{2}k_i a_i^2}=\frac{3PL}{\frac{2AE}{L}(L)^2+\frac{4AE}{L}(2L)^2}=\frac{3PL}{18AEL}=\frac{P}{6AE}$$

۱۸ـ گزینه «۳» در حالت نهایی هر سه میله نیرویی به اندازه‌ی بار تسلیم تحمل می‌کنند، بنابراین با نوشتن معادله تعادل $\sum F_y=0$ برای مفصل تحت بار خارجی می‌توان بار نهایی سازه را به صورت زیر به دست آورد.

$$\sum F_y=0\Rightarrow 2\sigma_y A\cos 60+2\sigma_y A\cos 60+\sigma_y A-P_u=0\Rightarrow P_u=3\sigma_y A$$

۱۹ـ گزینه «۴» نیروی خارجی باید در مرکز سختی میله اثر کند بنابراین می‌توان نوشت:

$$x=\frac{A_1E_1x_1+A_2E_2x_2}{A_1E_1+A_2E_2}=\frac{3AE\times L}{AE+3AE}=\frac{3}{4}L$$

۲۰ـ گزینه «۲» میله‌ها وقتی رها می‌شوند که نیرویی به آن‌ها وارد نشود، بنابراین هنگام رها شدن یکی از میله‌ها، نیروی P باید تماماً به میله‌ی دیگر وارد شود.

$$\left.\begin{array}{l}\text{در حالت اول}:\ \frac{PL}{2AE_2}=T(\alpha_1-\alpha_2)L\\[2mm]\text{در حالت دوم}:\ \frac{PL}{AE_1}=3T(\alpha_1-\alpha_2)L\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\text{حالت اول}}{\text{حالت دوم}}\Rightarrow\frac{E_1}{E_2}=\frac{2}{3}$$

۲۱ـ گزینه «۳» تغییر طول میله در اثر نیروی محوری در ناحیه الاستیک میله در حالت اولیه به اندازه‌ی ۷mm کشیده می‌شود، بعد از باربرداری مقدار جابجایی الاستیک به حالت اولیه باز می‌گردد در صورتی که تغییر مکان پلاستیک، دیگر باز نمی‌گردد. در نتیجه:

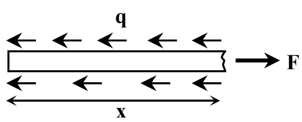
$$\delta=\frac{PL}{EA}\Rightarrow\delta=\frac{\sigma_y L}{E}=\frac{(300\times10^6)(500\times10^{-3})}{200\times10^9}\Rightarrow\delta=0/75\,mm$$

۲۲ـ گزینه «۳» با توجه به این که حجم نمونه در تغییر شکل پلاستیک ثابت است می‌توان نوشت:

$$V_1=V_2\Rightarrow\frac{\pi}{4}d_1^2L_0=\frac{\pi}{4}d^2L\Rightarrow\frac{L}{L_0}=\frac{d_1^2}{d^2}=(\frac{d_1}{d})^2$$

$$\Rightarrow e=Ln\frac{L}{L_0}=Ln(\frac{d_1}{d})^2=2Ln\frac{d_1}{d}$$

۲۳ـ گزینه «۱» اگر در یک فاصله دلخواه x از انتهای میله برش بزنیم نیروی محوری داخلی برابر خواهد بود با:



$$F=\int q\,dx=\int_0^x q_0(\frac{x}{L})^2dx=\frac{q_0x^3}{3L^2}$$

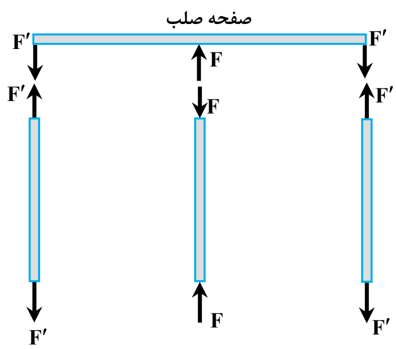
و اما تغییر طول میله تحت بار داخلی F برابر است با:

$$\delta=\int_0^L\frac{Fdx}{AE}=\frac{1}{AE}\int_0^L\frac{q_0x^3}{3L^2}dx=\frac{q_0}{3AEL^2}[\frac{x^4}{4}]_0^L=\frac{q_0L^2}{12AE}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۴ـ گزینه «۲» دیاگرام آزاد صفحه صلب و سه میله به صورت مقابل می‌باشد.



$\delta_T = L\alpha\Delta T$ تغییر طول ناشی از تغییر دما

$\delta = \frac{PL}{EA}$ تغییر طول ناشی از نیروهای محوری

$\delta_۱ = L\alpha\Delta T - \frac{FL}{EA}$ برای میله وسط

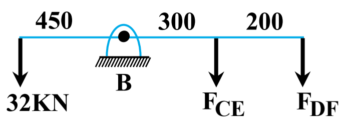
$\delta_۲ = \frac{F'L}{EA}$ برای میله‌های کناری

مطابق با دیاگرام آزاد صفحه صلب $\Rightarrow F' = \frac{F}{۲}$

به دلیل تقارن باید $\delta_۱ = \delta_۲$ باشد. $\delta_۱ = \delta_۲ \Rightarrow L\alpha\Delta T - \frac{FL}{EA} = \frac{FL}{۲EA} \Rightarrow \frac{۳}{۲}\frac{FL}{EA} = L\alpha\Delta T \Rightarrow F' = \frac{F}{۲} = \frac{EA\alpha\Delta T}{۳}$

برای میله‌های کناری $\Rightarrow \sigma = \frac{F'}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{E\alpha\Delta T}{۳}$

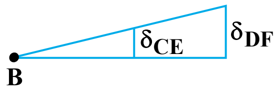
۲۵ـ گزینه «۴»

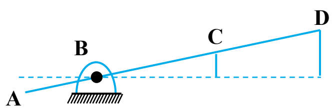


$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow ۳۲\times ۴۵۰ - F_{CE}\times ۳۰۰ - F_{DF}\times ۵۰۰ = ۰ \quad (۱)$$

در اثر اعمال نیروی خارجی، میله صلب ABCD به شکل زیر کج می‌شود که می‌توان قانون تشابه مثلث را برای آن نوشت.

تشابه مثلث : $\frac{\delta_{DF}}{\delta_{CE}} = \frac{۵۰۰}{۳۰۰} = \frac{۵}{۳} \quad (۲)$

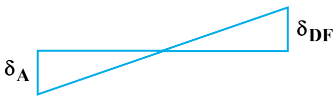




$$\delta = \frac{FL}{AE} \xrightarrow{(۲)} \frac{\frac{F_{DF}\times ۷۵۰}{\frac{\pi}{۴}\times ۱۵^۲\times E}}{\frac{F_{CE}\times ۶۰۰}{\frac{\pi}{۴}\times ۱۰^۲\times E}} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow \frac{F_{DF}}{F_{CE}} = \frac{۵\times ۶۰۰\times ۱۵^۲}{۳\times ۷۵۰\times ۱۰^۲} = ۳/۰ \Rightarrow F_{CE} = \frac{F_{DF}}{۳/۰} \quad (۳)$$

$$(۱),(۳) \Rightarrow F_{DE} = ۲۴kN$$

۲۶ـ گزینه «۴» با توجه به مثلث رسم شده و استفاده از نسبت تشابه می‌توان نوشت:



$$\frac{\delta_A}{\delta_{DF}} = \frac{۴۵۰}{۵۰۰} \quad ; \quad \frac{\delta_A}{\frac{F_{DF}\times ۷۵۰}{\frac{\pi}{۴}\times ۱۵^۲\times ۷۰}} = \frac{۹}{۱۰} \Rightarrow \delta_A = \frac{۹}{۱۰}\times \frac{۲۴\times ۷۵۰}{\frac{\pi}{۴}\times ۱۵^۲\times ۷۰} = ۱/۳mm$$

۲۷ـ گزینه «۱»

$$\varepsilon_z = \frac{۱}{E}\{\sigma_z - \upsilon(\sigma_x + \sigma_y)\} = \frac{۱}{E}[\sigma_۰ - \upsilon(\sigma_۰ + ۰)] \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{\sigma_۰}{E}(۱-\upsilon) \Rightarrow \frac{\sigma_۰}{\varepsilon_z} = \frac{E}{۱-\upsilon}$$

۲۸ـ گزینه «۴» کرنش در جهت y برابر نسبت تغییرات قطر به قطر اولیه است.

$$G = \frac{E}{۲(۱+\nu)} \Rightarrow \nu = \frac{E}{۲G} - ۱ = \frac{۲۰۰}{۱۶۰} - ۱ = ۰/۲۵ \quad ; \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{F}{AE} \quad (۱)$$

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x \ , \ \frac{\Delta d}{d} = \varepsilon_y \quad (۲) \xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{\Delta d}{d} = -۰/۲۵\times \frac{F}{AE} \Rightarrow \Delta d = -۰/۲۵\times \frac{۲۰۰۰\times ۱۰}{\frac{\pi}{۴}\times ۱۰^۲\times ۲۰۰\times ۱۰^۳}$$

$$\Rightarrow \Delta d = ۳/۱۸\times ۱۰^{-۴} \ mm$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۹ـ گزینه «۴» کرنش در راستای محور x با استفاده از قانون هوک عمومی برابر است با:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\} \qquad (1)$$

اما طبق فرض صورت مسأله کرنش در راستای محور z برابر صفر است، در نتیجه داریم:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\} = 0 \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \varepsilon_x = \frac{1}{E}\{\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu \times \nu(\sigma_x + \sigma_y)\} \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{1}{E}\{\sigma_x(1-\nu^2) - \nu\sigma_y(1+\nu)\}$$

۳۰ـ گزینه «۱» تغییر طول میله مخروطی تحت اثر افزایش دما برابر $\alpha L\Delta T$ می‌باشد، اما تکیه‌گاهها با اعمال نیروی فشاری P مانع این تغییر طول می‌شوند. با توجه به حل تشریحی مثال (۷) فصل اول درسنامه‌ی (۳) مقدار تغییر طول میله‌ی مخروطی ناقص تحت اثر نیروی محوری P برابر است با:

$$\delta_P = \frac{4PL}{\pi d_1 d_2 E}$$

اکنون طبق رابطه‌ی سازگاری می‌توان نوشت:

$$\delta = \delta_T + \delta_P = 0 \Rightarrow \alpha L\Delta T - \frac{4PL}{\pi d_1 d_2 E} = 0 \Rightarrow P = \frac{\pi\alpha E d_1 d_2 \Delta T}{4}$$

بیشترین تنش در اثر نیروی محوری P در باریک‌ترین بخش میله رخ خواهد داد.

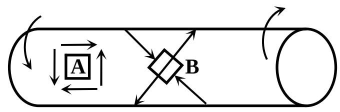
$$\sigma_{max} = \frac{P}{A_{min}} = \frac{P}{\frac{\pi}{4}d_2^2} = \frac{4}{\pi} \times \frac{\frac{\pi\alpha E d_1 d_2 \Delta T}{4}}{d_2^2} = E\alpha\frac{d_1}{d_2}\Delta T$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه آزمون خودسنجی فصل دوم

پاسخنامه آزمون (۱)



۱ـ گزینه «۲» تنش در میله تحت پیچش به صورت شکل نشان داده شده می‌باشد. چون چدن ماده ترد می‌باشد لذا در برابر تنش کششی ضعیف‌تر از برش و فشار می‌باشد، در نتیجه در راستای صفحه‌ای گسیخته خواهد شد که عمود بر تنش کششی می‌باشد.

اگر المان A به اندازه 45° پاد ساعتگرد دوران کند به المان B خواهیم رسید، این المان در دو وجه تحت تنش کششی و در دو وجه دیگر تحت تنش فشاری است. سطح شکست عمود بر تنش کششی خواهد بود.

۲ـ گزینه «۱»

$$\frac{\phi_1}{\phi_2}=\frac{\frac{T_1L}{GJ_1}}{\frac{T_2L}{GJ_2}}=\frac{J_2}{J_1}=\frac{\frac{\pi}{32}\left(d^4-\left(\frac{d}{2}\right)^4\right)}{\frac{\pi}{32}d^4}=\frac{15}{16}$$

۳ـ گزینه «۱» مواد ترد تحت تنش کششی ماکزیمم و مواد نرم تحت تنش برشی ماکزیمم گسیخته می‌شوند. از طرفی اگر میله تحت گشتاور پیچشی قرار گیرد در مقطع عمود بر محور میله، تنش برشی ماکزیمم بوده و در زاویه 45° با محور میله تنش کششی ماکزیمم است. بنابراین ماده ترد تحت پیچش در صفحه 45° و ماده نرم در زاویه 90° گسیخته می‌شود.

۴ـ گزینه «۱» در پیچش خالص تنش برشی ماکزیمم و تنش کششی ماکزیمم برابرند، از طرفی:

$$\tau=\frac{TR}{J}=\frac{TR}{\frac{\pi}{2}R^4}=\frac{2T}{\pi R^3}=\frac{2T}{\pi R^2\times R}=\frac{2T}{AR}=\frac{4T}{Ad}=\sigma_{max}$$

۵ـ گزینه «۱» حداکثر تنش برشی در سطح بیرونی محور ایجاد شده و برابر است با:

$$\tau_{max}=\frac{TR}{J}=\frac{2T}{\pi d^3}=\frac{2\times 62/8\times 10^3}{\pi\times 40^3}=\frac{10000}{1600}=\frac{100}{16}=6/25$$

۶ـ گزینه «۲» طبق فرض مسئله تنش برشی ماکزیمم در دو محور برابر است، بنابراین:

$$\tau_{max_2}=\tau_{max_1}\,,\,\tau_{max}=\frac{TC}{j}\Rightarrow\frac{T\frac{D}{2}}{\frac{\pi}{32}\left(D^4-(0/75D)^4\right)}=\frac{T\frac{d}{2}}{\frac{\pi}{32}d^4}\Rightarrow\frac{\frac{D}{2}}{D^4-(0/75)^4D^4}=\frac{\frac{d}{2}}{d^4}$$

$$\Rightarrow 1/367\,D^3=2d^3\Rightarrow d=0/881\,D\qquad(1)$$

از طرفی وزن هر میله با حجم میله متناسب بوده اما چون طول دو میله برابر است، بنابراین نسبت وزن دو میله مساوی نسبت مساحت سطح مقطع‌هایشان می‌باشد.

$$\frac{W_2}{W_1}=\frac{A_2}{A_1}\Rightarrow\frac{W_2}{W_1}=\frac{D^2-0/75^2D^2}{d^2}\xrightarrow{(1)}\frac{0/4375D^2}{0/881^2D^2}=0/5636$$

۷ـ گزینه «۳» تنش برشی در مقطع جدار نازک برابر است با:

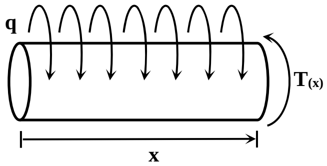
$$\tau=\frac{T}{2A_mt}\Rightarrow\frac{\tau_1}{\tau_2}=\frac{A_{m_2}t_2}{A_{m_1}t_1}\qquad(1)$$

$$t_1=t\quad,\quad t_2=\frac{t}{2}\quad,\quad A_{m_1}=\pi R^2\quad,\quad A_{m_2}=4\pi R^2\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{\tau_1}{\tau_2}=2$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۸ـ گزینه «۴» چون بار گسترده پیچشی بر کل محور وارد می‌شود، بنابراین در هر مقطع دلخواه از محور به فاصله x از انتهای محور، لنگر پیچشی داخلی تابعی از x شده و به همین دلیل برای محاسبه زاویه پیچش انتهای محور باید از انتگرال‌گیری استفاده نمود.



$$\sum M = 0 \Rightarrow T = qx$$

$$\phi = \int \frac{Tdx}{GJ} = \int_0^L \frac{qxdx}{GJ} = \frac{qL^2}{2GJ}$$

۹ـ گزینه «۲»

$$\left.\begin{array}{l} P = T\omega = \dfrac{2\pi n}{60}\times T \\ \tau = \dfrac{16T}{\pi d^3} \Rightarrow T = \dfrac{\pi d^3}{16}\tau \end{array}\right\} \Rightarrow P = \frac{2\pi n}{60}\times\frac{\pi d^3}{16}\tau \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16\times 60 P}{2n\pi^2\tau}}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16\times 60\times 31400}{2\times 300\pi^2\times 48\times 10^6}} = 0/0473\ \text{m} \simeq 48\ \text{mm}$$

۱۰ـ گزینه «۲» در حالتی که کل مقطع وارد فاز پلاستیک می‌شود گشتاور پلاستیک را می‌توان توسط رابطه زیر به دست آورد:

$$T_P = \int r dF = \int r\tau_y dA = \int r\tau_y 2\pi r dr = 2\pi\tau_y \int_{37/5}^{50} r^2 dr = \frac{2\pi}{3}\tau_y [r^3]_{37/5}^{50}$$

در حالت کاملاً پلاستیک، تنش در تمامی سطح مقطع یکسان و برابر τ_y می‌باشد.

$$\Rightarrow T_P = \frac{2\pi}{3}\times 150(50^3 - 37/5^3) = 22/7\times 10^6\ \text{N.mm} = 22/7\,\text{kN.m}$$

۱۱ـ گزینه «۴» طبق رابطه $\phi = \frac{TL}{GJ}$ و با توجه به اینکه برای هر دو مقطع لنگر پیچشی و طول و J و G یکسان است، زاویه پیچش زمانی که هر دو انتهای یک محور می‌چرخند با حالتی که یک انتهای محور می‌چرخد و انتهای دیگر ثابت است مساوی می‌باشد. همچنین تنش برشی ماکزیمم طبق رابطه $\tau_{max} = \frac{16T}{\pi d^3}$ و با توجه به اینکه در هر دو محور لنگر پیچشی و قطر محورها یکی می‌باشد، با هم برابر است.

۱۲ـ گزینه «۳»

$$\phi = \frac{TL}{GJ} = \frac{2\times 1/5}{30\times 10^6\times 10^{-6}} = \frac{3}{30} = 0/1\ \text{rad} = 0/1\times\frac{180}{\pi} = 6^\circ$$

احتمالاً در صورت مسئله به جای $G = 30\ \text{GPa}$ به اشتباه $30\,\text{MPa}$ نوشته شده است. در این صورت گزینه ۳ صحیح است.

۱۳ـ گزینه «۲» محورهای AB و BC مانند دو فنر موازی رفتار می‌کنند، بنابراین زاویه پیچش مقطع مشترک آن‌ها برابر خواهد بود با:

$$\phi = \frac{T}{k_{eq}} = \frac{T}{k_{AC} + k_{BC}} = \frac{T}{\dfrac{2GJ}{L} + \dfrac{GJ}{L}} = \frac{TL}{3GJ}$$

۱۴ـ گزینه «۲»

$$P = T\omega = T(2\pi f)$$

اگر فرکانس و گشتاور پیچشی دو برابر شود، توان چهار برابر خواهد شد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

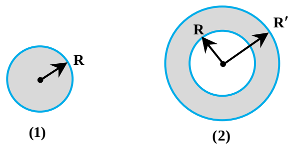
۱۵ـ گزینه «۲» آن مقطعی که تو خالی است برای آنکه مساحتش با مقطع توپر برابر شود باید شعاع خارجی بزرگ‌تری داشته باشد، از طرفی ممان اینرسی قطبی با شعاع به توان ۴ مقطع، متناسب است، بنابراین نتیجه می‌شود که مقطع توخالی با فرض یکسان بودن مساحت، گشتاور بزرگ‌تری انتقال می‌دهد. روش دیگر این است که فرض نماییم شعاع مقطع توپر برابر با R و شعاع داخلی مقطع توخالی نیز برابر R باشد. برای برابر شدن مساحت‌ها مقدار شعاع خارجی مقطع توخالی برابر می‌گردد با:

$$A_1 = A_2 \Rightarrow \pi R^2 = \pi(R'^2 - R^2) \Rightarrow 2R^2 = R'^2 \Rightarrow R' = \sqrt{2}R$$

میزان انتقال گشتاور توسط هر محور، مطابق رابطه روبرو تعیین می‌شود:

$$\tau = \frac{TR}{J} \Rightarrow T = \tau\frac{J}{R}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\tau\frac{J_2}{R_2}}{\tau\frac{J_1}{R_1}} = \frac{J_2}{J_1}\times\frac{R_1}{R_2} = \frac{\frac{\pi}{2}[(\sqrt{2}R)^4 - R^4]}{\frac{\pi}{2}R^4}\times\frac{R}{\sqrt{2}R} = \frac{(4-1)}{1}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2/12$$



۱۶ـ گزینه «۱»

$$P = T\omega = 2\pi f T \Rightarrow 100\pi\times 10^3 = 2\pi\times 10\times T \Rightarrow T = 5000\ \text{N.m}$$

۱۷ـ گزینه «۲»

$$\left.\begin{array}{l}\phi = 720^\circ = 4\pi = \dfrac{TL}{GJ}\\ \tau_{max} = \dfrac{TR}{J}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\tau_{max}}{\phi} = \frac{\tau_{max}}{4\pi} = \frac{\frac{TR}{J}}{\frac{TL}{GJ}} = \frac{RG}{L} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{4\pi RG}{L} \xrightarrow{R=C} \tau_{max} = \frac{4\pi CG}{L}$$

۱۸ـ گزینه «۱» چون قطر خارجی هر دو محور برابر است بنابراین $d_1 = d_2$ و $R_1 = R_2$ می‌باشد.

$$\frac{\tau_{max_1}\ \text{توپر}}{\tau_{max_2}\ \text{توخالی}} = \frac{\frac{TR}{J_1}}{\frac{TR}{J_2}} = \frac{J_2}{J_1} = \frac{J\ \text{توخالی}}{J\ \text{توپر}} = \frac{\frac{\pi}{32}(d^4 - (\frac{d}{2})^4)}{\frac{\pi}{32}d^4} = \frac{\frac{15}{16}}{1} = \frac{15}{16}$$

۱۹ـ گزینه «۱» طبق توضیحات ارائه شده در متن درس در گوشه‌های مستطیل تنش برشی صفر و در وسط ضلع بزرگ‌تر تنش برشی ماکزیمم است.

۲۰ـ گزینه «۲» ابتدا روابط تنش برشی ماکزیمم و زاویه پیچش در محورهای مدور نوشته شده سپس مقادیر آن‌ها بر هم تقسیم می‌شود، در نتیجه:

$$\left.\begin{array}{l}\tau_{max} = \dfrac{TR}{J}\\ \phi = \dfrac{TL}{GJ}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\tau_{max}}{\phi} = \frac{\frac{TR}{J}}{\frac{TL}{GJ}} = \frac{RG}{L} \Rightarrow \frac{140\text{MPa}}{0/01\text{rad}} = \frac{R\times 70000\text{MPa}}{2000\text{mm}} \Rightarrow R = 400\text{mm} \Rightarrow d = 800\text{mm}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه آزمون (۲)

۱ـ گزینه «۴» طبق فرض مسئله ممان اینرسی قطبی دو محور برابر است با:

مممان اینرسی محور توپر $= J$ ، ممان اینرسی محور توخالی $= \frac{J}{2}$

$$\phi = \frac{TL_s}{GJ} + \frac{TL_n}{G\frac{J}{2}} = \frac{T}{GJ}(L_s + \frac{2}{1}L_n) = 3^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{60} \Rightarrow T = \frac{\pi}{60} \times GJ \frac{1}{L_s + 2L_n}$$

۲ـ گزینه «۲» با توجه به روابط $\tau_{max} = \frac{TR}{J} = \frac{2T}{\pi d^3}$ و $\phi = \frac{TL}{GJ} = \frac{64TL}{\pi G d^4}$ می‌توان نتیجه گرفت گزینه (۲) صحیح است.

۳ـ گزینه «۳» حداکثر تنش برشی در مقطع قوطی در ضخامت نازک‌تر جداره ایجاد می‌شود.

$$\tau_{max} = \frac{T}{2A_m t_{min}}$$

اما مساحت داخل خطچین مرکزی برابر است با:

$$A_m = (98-4-4)(156-3-3) = 90 \times 150 = 13500\,mm^2$$

$$\tau_{max} = \frac{135 \times 10^3}{2 \times 13500 \times 6} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}MPa$$

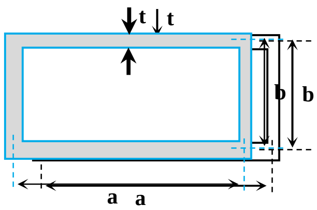
۴ـ گزینه «۲» لنگر پیچشی متمرکز معادل لنگر پیچشی گسترده، مساوی ۲۰ KN.m می‌باشد که به دلیل تقارن محور، عکس‌العملهای تکیه‌گاهی مساوی بوده و برابر نیمی از لنگر پیچشی خارجی می‌باشد، لذا عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها برابر ۱۰ KN.m می‌باشد.

۵ـ گزینه «۴» در صورتی که طول دو میله AC و BC یکسان در نظر گرفته شود، می‌توان پاسخ مسئله را تعیین نمود. اقتصادی‌ترین طرح آن است که تنش ماکزیمم در دو میله یکسان باشد، در نتیجه:

$$\tau_{AC} = \tau_{BC} \Rightarrow \frac{T\frac{d_{AC}}{2}}{J_a} = \frac{3T\frac{d_{BC}}{2}}{J_b} \Rightarrow \frac{d_a}{d_b} = 3\frac{J_a}{J_b}$$

ذکر این نکته ضروری است که در سازه‌هایی که طراحی آن بهینه می‌باشد، تنش تا حد امکان در آن یکنواخت می‌باشد.

۶ـ گزینه «۲» ممان اینرسی قطبی یک مقطع جدار نازک بسته توسط رابطه زیر قابل بیان است.



$$A_m = ab$$

$$J = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4(ab)^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4a^2b^2t}{2(a+b)} = \frac{2a^2b^2t}{a+b}$$

۷ـ گزینه «۴» راستای تنش برشی فقط در روی دو قطر بیضی بر شعاع حامل آن نقطه عمود است و در دیگر نقاط عمود نمی‌باشد. (به توضیحات متن درس توجه شود.)

۸ـ گزینه «۲»

مقاومت $K' = \frac{T}{\tau} = \frac{J}{r} = \frac{\pi}{2}r^3 \Rightarrow (r \to \alpha r) \Rightarrow K'_2 = \alpha^3 K'_1$

سختی $K = \frac{T}{\phi} = \frac{GJ}{L} = \frac{G\pi r^4}{2L} \Rightarrow (r \to \alpha r, L \to \alpha L) \Rightarrow K_2 = \alpha^3 K_1$

۹ـ گزینه «۱»

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

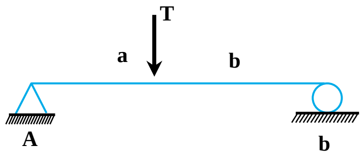
۱۰ـ گزینه «۴» باید در صورت مسئله گفته می‌شد که مقطع جدار نازک است، با این فرض تنش برشی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\tau = \frac{T}{2At} \Rightarrow q = \tau t = \frac{T}{2At} \times t \Rightarrow q = \frac{T}{2A}$$

۱۱ـ گزینه «۳» ممان اینرسی پیچشی مقاطع جدار نازک بسته توسط رابطه زیر تعیین می‌گردد:

$$J = \frac{4A_m^2 t}{\oint \frac{ds}{t}} \xrightarrow{\text{چون ضخامت قوطی ثابت است t از داخل انتگرال بیرون می‌آید.}} J = \frac{4A_m^2 t}{\oint ds} = \frac{4 \times (a^2)^2 t}{\text{(محیط مقطع)}\, S} = \frac{4a^4 t}{4a} = a^3 t$$

۱۲ـ گزینه «۴»



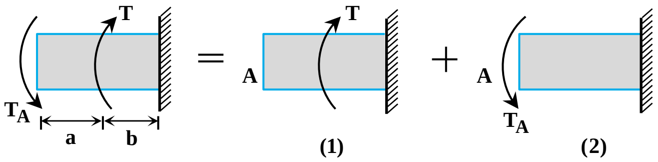
روش اول: چون حاصل‌ضرب GJ در طول محور ثابت است، بنابراین می‌توان گشتاور تکیه‌گاه A را از رابطه روبرو تعیین نمود:

$$T_A = \frac{Tb}{L}$$

برای حل این تست می‌توان محور را با فرض GJ ثابت به یک تیر ساده تحت بارگذاری عرضی شبیه‌سازی کرد. در این حالت لنگر T تبدیل به یک بار برشی می‌شود. (مطابق شکل) در این حالت اگر حول تکیه‌گاه B گشتاورگیری شود، نیروی تکیه‌گاه A به دست آمده که همان پاسخ مسئله است.

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -A_y \times L + T \times b = 0 \Rightarrow A_y = T_A = \frac{Tb}{L}$$

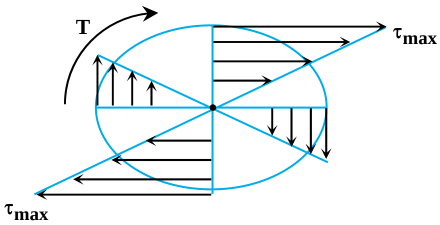
روش دوم: اساس روش حل، استفاده از اصل جمع آثار است. بدین صورت که تکیه‌گاه A را برداشته و به جای آن لنگر پیچشی T_A را قرار می‌دهیم. سپس با توجه به اصل سازگاری که زاویه‌ی پیچش A باید صفر باشد، مقدار T_A به دست می‌آید.



$$\phi_A = \phi_{(1)} + \phi_{(2)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Tb}{GJ} + \frac{-T_A L}{GJ} = 0 \Rightarrow T_A = \frac{Tb}{L}$$

۱۳ـ گزینه «۴» در دو سر قطر کوچک بیضی تنش برشی ماکزیمم می‌شود. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، توزیع تنش برشی نیز در روی اقطار بیضی خطی و عمود بر شعاع می‌باشد. اما در دیگر نقاط تنش برشی عمود بر شعاع نیست.



۱۴ـ گزینه «۴» دو چرخ‌دنده، درگیر با هم مانند دو دایره مماس بر هم بوده که بر روی یکدیگر حرکت غلتشی خالص دارند. بنابراین طول کمان‌های طی شده توسط دو چرخ‌دنده مساوی است. (به توضیحات تذکر ۳ مراجعه شود.)

$$r_C \phi_C = r_B \phi_B$$

۱۵ـ گزینه «۴» با توجه به آن‌که حداکثر تنش برشی مجاز در محور معین می‌باشد، بنابراین می‌توان حداکثر گشتاور پیچشی در محور AB را به دست آورد:

$$\tau_{max} = \tau_{all} = \frac{TR}{J_{AB}} \Rightarrow \tau_{all} = \frac{2T_0}{\pi d_{AB}^3} \Rightarrow T_0 = \frac{\pi d_{AB}^3}{2}\tau_{all} \Rightarrow T_0 = \frac{\pi \times 18^3}{2} \times 55 = 503845\,N.mm \simeq 504\,N.m$$

اما رابطه‌ی بین لنگر پیچشی محور AB و محور CD برابر است با:

$$\frac{T_0}{r_B} = \frac{T_{CD}}{r_C} \Rightarrow T_{CD} = \frac{36}{20}T_0 = 1/8 T_0 \qquad (1)$$

اما رابطه‌ی T_{CD} با تنش برشی مجاز مساوی خواهد بود با:

$$T_{CD} = \frac{\pi d_{CD}^3}{2}\tau_{all} \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} 1/8 T_0 = \frac{\pi \times 24^3}{2} \times 55 \Rightarrow T_0 = 663504\,N.m \simeq 663\,N.m$$

از بین دو پاسخ به دست آمده پاسخ کوچک‌تر قابل قبول می‌باشد. گزینه (۴) قابل قبول است.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۶ـ گزینه «۴» زاویه‌ی پیچش مقطع A برابر مجموع زاویه پیچش محور AB و گردش چرخدنده‌ی B است.

$$\phi_A = \phi_{A/B} + \phi_B = \frac{T_\circ L_{AB}}{GJ_{AB}} + \frac{r_C \phi_C}{r_B} = \frac{T_\circ L_{AB}}{GJ_{AB}} + \frac{r_C}{r_B}\frac{T_{CD} L_{CD}}{GJ_{CD}}$$

$$\phi_A = \frac{504 \times 0/8}{80 \times 10^9 \times \frac{\pi}{32}(0/018)^4} + \frac{36}{20} \times \frac{(1/8 \times 504) \times 0/9}{80 \times 10^9 \times \frac{\pi}{32}(0/024)^4} \Rightarrow \phi_A \simeq 1 \text{rad}$$

۱۷ـ گزینه «۳» در صورتی که ماده از جنس نرم باشد در صفحه تنش برشی ماکزیمم گسیخته می‌شود که در بارگذاری پیچشی صفحه عمود بر محور تیر همان صفحه تنش برشی ماکزیمم است. اما مواد نرم تحت لنگر پیچشی دچار ترک‌خوردگی نمی‌شوند. در صورتی که تیر از جنس ترد باشد، ترک‌ها به صورت مورب و تحت زاویه 45° می‌باشند.

۱۸ـ گزینه «۳» نسبت مقاومت پیچشی به سختی پیچشی محور طبق تعریف ارائه شده در متن درس برابر است با:

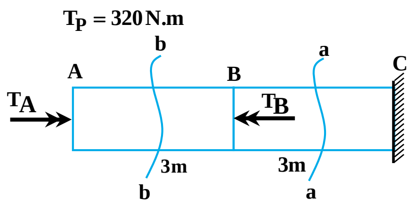
$$\frac{k'}{k} = \frac{\frac{J}{R}}{\frac{GJ}{L}} = \frac{L}{RG}$$

اگر طول محور و شعاع محور دو برابر شوند نسبت آن‌ها تغییر نخواهد کرد.

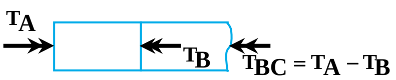
۱۹ـ گزینه «۱» گشتاور پلاستیک کامل $\frac{4}{3}$ برابر گشتاور آغاز تسلیم است، بنابراین داریم:

$$T_P = \frac{4}{3}T_y = \frac{4}{3} \times \frac{\pi}{2} R^3 \tau_y = \frac{4}{3} \times \frac{3}{16} \times 40^3 \times 200 = 32 \times 10^5 \text{ N.mm}$$

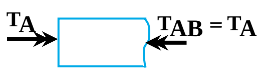
۲۰ـ گزینه «۳» دوران یا پیچش مقطع B برابر است با زاویه پیچش مقطع B نسبت به مقطع C.



طبق فرض مسئله دوران مقطع B، برابر صفر است. بنابراین:



$$\Rightarrow \varphi_B = \varphi_{B/C} = \frac{T_{BC} L_{BC}}{GJ} = \frac{(T_A - T_B) L_{BC}}{GJ} = 0$$



$$T_{BC} = T_A - T_B = 0 \Rightarrow T_A = T_B = 8\pi \text{ kN.m}$$

اکنون با روش جمع آثار می‌توان زاویه پیچش مقطع A را محاسبه نمود:

$$\varphi_A = \varphi_{A/B} + \varphi_{B/C} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{GJ} + \frac{T_{BC} L_{BC}}{GJ} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{GJ} + 0 = \frac{T_A (3)}{GJ} = \frac{(8\pi \times 10^3)(3)}{(8 \times 10^{10})\pi(\frac{60 \times 10^{-3}}{32})^4} \Rightarrow \varphi_A = 0/741 \text{ rad}$$

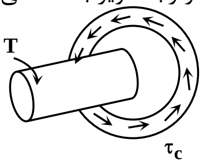
www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه آزمون (۳)

۱ـ گزینه «۴» چون میله BC صلب بوده لذا پیچش دو سر آنها یکی می‌باشد، از طرفی چون لنگرهای اعمالی بر B و C خلاف جهت یکدیگرند، لـذا زاویه پیچش میله صلب BC صفر بوده، بنابراین دو سرمیله صلب دورانی نداشته و زاویه پیچش مساوی صفر می‌باشد. در نتیجه لنگرهای ایجاد شـده در قسمتهای AB و BC مساوی صفر است.

۲ـ گزینه «۴» اگر تنش برشی ناشی از اصطکاک مابین میله‌های AB , CD با τ_c نشان داده شود، در نتیجه لنگر پیچشی T از رابطه زیر بدست می‌آید:



$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow F\times r_2 = T \Rightarrow (\tau_c)A\times r_2 = T$$

$$\Rightarrow \tau_c = \frac{T}{Ar_2} = \frac{T}{(2\pi r_2 t)r_2} = \frac{T}{2\pi r_2^2 t}$$

۳ـ گزینه «۳» چون زاویه پیچش پره‌ها و مقطع جدار نازک دایره‌ای مساوی است، بنابراین می‌توان آنها را مانند فنرهای مـوازی در نظـر گرفت. در چنـین حالتی سختی معادل مساوی جمع سختی‌های پره‌ها و مقطع جدار نازک دایره‌ای است. $K_{eq} = K_1 + K_2$

$$J_1 = 2\pi R^3 t \quad , \quad J_2 = 8\times\frac{1}{3}at^3 = \frac{8}{3}\times 2\pi Rt^3 = \frac{16\pi Rt^3}{3}$$

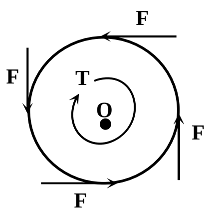
$$K_1 = 2\pi R^3 t\frac{G}{L} \qquad K_2 = \frac{16\pi Rt^3}{3}\frac{G}{L}$$

و اما زاویه پیچش برای کل مقطع برابر است.

$$\phi = \frac{T_1}{K_1} = \frac{T_2}{K_2} = \frac{T}{K_{eq}} \Rightarrow T_1 = \frac{K_1}{K_{eq}}T$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{2\pi R^3 t\frac{G}{L}\times T}{2\pi R^3 t\frac{G}{L} + \frac{16\pi Rt^3}{3}\frac{G}{L}} = \frac{1\times T}{1+\frac{8}{3}(\frac{t}{R})^2} = \frac{1\times T}{1+\frac{8}{3}\times(\frac{1}{10})^2} \Rightarrow T_1 = 0/974T \Rightarrow \frac{T_1}{T}\times 100 = 97/4\%$$

۴ـ گزینه «۴»



$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow T - 4FR = 0 \Rightarrow T = 4FR \Rightarrow T = 4K\Delta\times R$$

ولی تغییر طول هر فنر را برحسب زاویه پیچش می‌توان به صورت روبرو نوشت: $\Delta = R\phi$، در نتیجه:

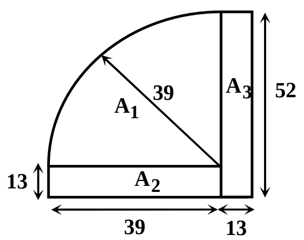
$$T = 4KR^2\phi \Rightarrow \phi = \frac{T}{4KR^2} = \frac{T}{K_\theta}$$

مخرج کسر معادل سختی پیچشی صفحه صلب می‌باشد، در نتیجه:

$$K_\theta = 4KR^2 \Rightarrow K_\theta = 4\times 10\times 0/1^2 = 0/4\,\text{ton}.\frac{m}{rad}$$

۵ـ گزینه «۴» مقدار تنش برشی در هر نقطه متناسب با بیشترین شیب در آن نقطه می‌باشد و کمترین شیب در آن نقطه نیز جهت تنش برشی را نمایش می‌دهد.

۶ـ گزینه «۲» در ابتدا خط چین مرکزی به دقت رسم شده، سپس آن را به سه سطح A_1, A_2, A_3 تقسیم نموده و مساحت هر یک را جداگانه محاسبه می‌کنیم.



$$\tau_a = \frac{T}{2A_m t_a} \quad , \quad t_a = 4mm \quad , \quad T = 90\times 10^3 \text{ N.mm}$$

$$A_m = A_1 + A_2 + A_3 \Rightarrow A_m = \frac{\pi}{4}\times(40-1)^2 + (40-1)\times$$

$$(55-40-2) + (55-1-2)\times(55-2-40)$$

$$\Rightarrow A_m = \frac{\pi}{4}\times 39^2 + 13\times 39 + 52\times 13 = 2377/6 \Rightarrow \tau_a = \frac{90\times 10^3}{2\times 4\times 2377/6} = 4/731\text{ MPa}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۷ـ گزینه «۳» در صورت تست به مقدار G اشاره‌ای نشده است در صورتی که محورها از جنس فولاد و مدول برشی آن‌ها برابر $G = 11/5 \times 10^{6}$ Psi در نظر گرفته شود، می‌توان مسئله را حل نمود.

چون دو نیمه کوپلینگ می‌توانند نسبت به هم دارای زاویه پیچش باشند، بنابراین رابطه سازگاری به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\Delta\phi = \frac{1^{\circ}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{360}\,\text{rad} \Rightarrow \phi_{C/D} = \phi_{B/A} + \frac{\pi}{360} \Rightarrow \frac{T_D \times 60}{11/5 \times 10^{6} \times \frac{\pi}{32} \times 1/5^{4}} = \frac{T_A \times 40}{11/5 \times 10^{6} \times \frac{\pi}{32} \times 1/2^{4}} + \frac{\pi}{360} \qquad (1)$$

از طرفی طبق معادله تعادل می‌توان نوشت:

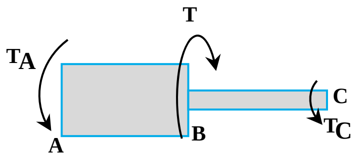
$$T_A + T_D = 4000\,\text{lb.in} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} &(1)\ \begin{cases} 1/0497 \times 10^{-5}\, T_D - 1/7086 \times 10^{-5}\, T_A = \dfrac{\pi}{360} \\ \end{cases} \\ &(2)\ \begin{cases} T_A = 4000 - T_D \end{cases} \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_D = 2794/1\,\text{lb.in}$$

$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{T_D R}{J_{CD}} = \frac{2T_D}{\pi R^{3}} = \frac{2 \times 2794/1}{\pi \times 0/75^{3}} = 4216\ \text{Psi} \simeq 4/2\,\text{ksi}$$

۸ـ گزینه «۴»

روش اول: چون مقطع B فصل مشترک دو محور AB و BC است بنابراین زاویه پیچش دو محور در این مقطع مساوی است. از این نکته می‌توان برای نوشتن رابطه سازگاری استفاده نمود.



$$\text{معادله تعادل}: T_A + T_C = T \qquad (1)$$

$$\text{رابطه سازگاری}: \phi_{B/A} = \phi_{B/C} \Rightarrow \frac{T_A a}{GJ_{AB}} = \frac{T_C b}{GJ_{BC}} \Rightarrow \frac{T_A}{T_C} = \frac{b}{a}\frac{J_{AB}}{J_{BC}} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow T_C \frac{b}{a}\frac{J_{AB}}{J_{BC}} + T_C = T \Rightarrow T_C = \frac{T}{\frac{b}{a}\frac{J_{AB}}{J_{BC}} + 1} = \frac{T a J_{BC}}{b J_{AB} + a J_{BC}} = \frac{\frac{Ta}{J_{AB}}}{\frac{a}{J_{AB}} + \frac{b}{J_{BC}}}$$

روش دوم: معادل‌سازی میله‌ها با فنر: چون زاویه پیچش دو میله در مقطع B مساوی است، بنابراین دو میله مانند دو فنر موازی رفتار می‌کنند، در این حالت لنگر تکیه‌گاهی C مساوی لنگر داخلی تحمل شده به وسیله محور BC است، بنابراین:

$$T_C = T_{BC} = \frac{k_{BC}}{k_{eq.}} \times T = \frac{k_{BC}}{k_{AB} + k_{BC}} \times T = \frac{\frac{GJ_{BC}}{b}}{\frac{GJ_{AB}}{a} + \frac{GJ_{BC}}{b}} \times T \xrightarrow[\text{صورت و مخرج ضرب در } \frac{ab}{J_{AB}J_{BC}}]{\text{پس از ساده‌سازی}} \frac{\frac{Ta}{J_{AB}}}{\frac{a}{J_{AB}} + \frac{b}{J_{BC}}}$$

۹ـ گزینه «۱» بیشترین گشتاور اعمالی بر محور توخالی باعث خواهد شد تا در شعاع داخلی محور، تنش برشی به حد تسلیم برسد. در نتیجه شعاع هسته الاستیک مساوی شعاع داخلی محور خواهد شد. در این حالت کل جداره مقطع پلاستیک شده و از شعاع داخلی به مرکز محور حالت الاستیک وجود دارد که البته در این بخش میله توخالی است.

$$r_y\phi = \gamma_y L \Rightarrow \phi = \frac{0/002 \times 2}{0/02} = 0/2\,\text{rad}$$

۱۰ـ گزینه «۳» طبق رابطه زیر گشتاور انتقالی در قطر خارجی ثابت و با ممان اینرسی قطبی نسبت مستقیم دارد، بنابراین:

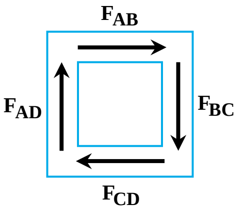
$$\tau = \frac{TR}{J} \Rightarrow T = \tau\frac{J}{R} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{J_2}{J_1} = \frac{\frac{\pi}{32}(d_2^{4} - d_1^{4})}{\frac{\pi}{32}d^{4}} = \frac{70^{4} - 58^{4}}{70^{4}} = 0/53 \times 100 = 53\%$$

$$\text{کاهش ظرفیت انتقال گشتاور} = 100\,\% - 53\,\% = 47\,\%$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۱ـ گزینه «۴» برای محاسبه سهم پیچش، کافی است نیرو در وجه‌های افقی و قائم محاسبه شود و سپس گشتاور حاصل از این نیروها به دست آیند:



$$F_{AD}=F_{CD}=\tau A=\frac{T}{۲A_m t_۲}\times bt_۲=\frac{T}{۲abt_۲}\times bt_۲=\frac{T}{۲}$$

$$F_{AB}=F_{CD}=\tau A=\frac{T}{۲A_m t_۱}\times at_۱=\frac{T}{۲abt_۱}at_۱=\frac{T}{۲b}$$

گشتاور ناشی از نیروهای افقی $=\frac{T}{۲b}\times b=\frac{T}{۲}$ (۱)

گشتاور ناشی از نیروهای قائم $=\frac{T}{۲a}\times a=\frac{T}{۲}$ (۲)

$$\Rightarrow\frac{(۱)}{(۲)}\Rightarrow\frac{\frac{T}{۲}}{\frac{T}{۲}}=۱$$

۱۲ـ گزینه «۱» در صورتی که a محیط مقطع و b عرض مقطع جدار نازک باز باشد، آنگاه:

ممان اینرسی پیچشی مقاطع جدار نازک باز $J_۱=C_۲ab^۳\ ,\ (\frac{a}{b}>۱۰)\Rightarrow C_۲=\frac{۱}{۳}\Rightarrow J_۱=\frac{۱}{۳}(۳a)t^۳=at^۳$ (۱)

ممان اینرسی پیچشی مقاطع جدار نازک بسته $J_۲=\frac{۴A_m^۲}{\oint\frac{ds}{t}}=\frac{۴A_m^۲t}{\oint ds}=\frac{۴(\frac{۱}{۲}\times a\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a)^۲t}{۳a}=\frac{۱}{۴}a^۳t$ (۲)

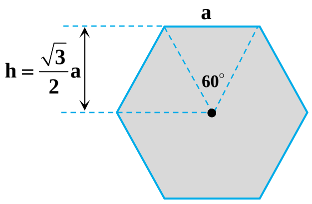
$$\frac{(۲)}{(۱)}\Rightarrow\frac{J_۲}{J_۱}=\frac{۱}{۴}(\frac{a}{t})^۲=\frac{۱}{۴}\times۱۰۰=۲۵$$

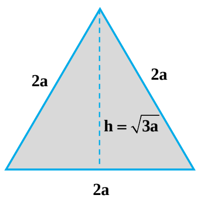
یادآوری می‌شود که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{۱}{۲}a\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ می‌باشد.

۱۳ـ گزینه «۴» مقاومت پیچشی در مقاطع جدار نازک بسته مساوی است با: $\tau=\frac{T}{۲A_m t}\Rightarrow$ مقاومت پیچشی $K'=\frac{T}{\tau}=۲A_m t$

$$K'_۱=K'_۲\Rightarrow۲A_{m_۱}t_۱=۲A_{m_۲}t_۲\Rightarrow۶(\frac{۱}{۲}a\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a)t_۱=\frac{۱}{۲}\times۲a\times\sqrt{۳}at_۲\Rightarrow\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲t_۱=\sqrt{۳}a^۲t_۲\Rightarrow t_۲=\frac{۳}{۲}t_۱=۱/۵t_۱$$

برای محاسبه مساحت داخل شش ضلعی منتظم می‌توان آن را به شش مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم نموده، مساحت هر مثلث را محاسبه نموده آن را در ضریب ۶ ضرب کرده تا مساحت شش ضلعی به دست آید.





۱۴ـ گزینه «۱» (مساحت سطح مقطع لوله دایره‌ای) $A_۱=$ (مساحت سطح مقطع لوله مربعی) $A_۲\Rightarrow۲\pi rt=۴bt\Rightarrow\pi r=۲b$ (۱)

از طرفی، نسبت تنش برشی در لوله دایروی به لوله مربعی برابر است با:

$$\frac{\tau_۱}{\tau_۲}=\frac{\frac{T}{۲(A_m)_۱t}}{\frac{T}{۲(A_m)_۲t}}=\frac{(A_m)_۲}{(A_m)_۱}=\frac{b^۲}{\pi r^۲}\overset{(۱)}{=\!=}\frac{(\frac{\pi r}{۲})^۲}{\pi r^۲}=\frac{\pi}{۴}$$

۱۵ـ گزینه «۱» (محور توپر) $\tau_{max۱}=$ (محور توخالی) $\tau_{max۲}\Rightarrow\frac{T\times\frac{d}{۲}}{\frac{\pi}{۳۲}d^۴}=\frac{T\times۲/۰}{\frac{\pi}{۳۲}(۴^۴-۳^۴)}\Rightarrow\frac{۱۶}{d^۳}=\frac{۳۲\times۲/۰}{۱۷۵}\Rightarrow d=۳/۵۲''$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۶ـ گزینه «۳» برای مقطع جداره نازک باز، تحت پیچش داریم:

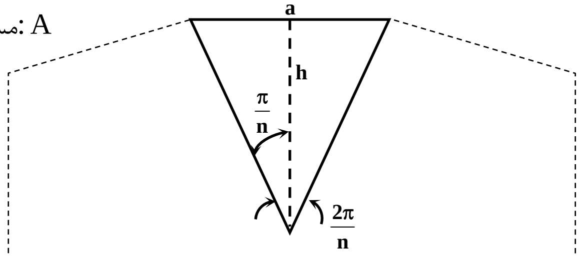
$$\tau = \frac{Tt}{J} \quad , \quad \varphi = \frac{TL}{JG}$$

که در آن $J = \frac{۱}{۳} t^۳ b$ و b، طول مقطع می‌باشد

برای مقطع n ضلعی به ضلع a: $b = na$

$$\varphi = \frac{TL}{\frac{۱}{۳} t^۳ naG} \;\text{جداره نازک باز}\Rightarrow \varphi = \frac{۳TL}{Gt^۳ na}$$

برای مقطع جداره نازک بسته، تحت پیچش داریم:



$$\tau = \frac{T}{۲AT}$$

A: مساحت سطح محصور به منحنی بسته‌ی مقطع

$$\varphi = \frac{TL}{JG} = \frac{TL}{۴A^۲G}\int \frac{ds}{t}$$

$$\text{در این تست}\;\varphi = \frac{TL}{۴A^۲G} \times \frac{na}{t}$$

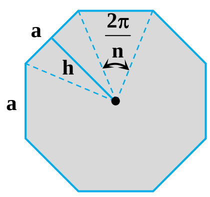
مساحت داخل خطچین مرکزی n برابر مساحت مثلث رسم شده است.

$$A = n(\frac{۱}{۲}ah) = n(\frac{۱}{۲}a \times \frac{a}{۲}\text{Cotg}\frac{\pi}{n}) = \frac{na^۲}{۴}\text{Cotg}\frac{\pi}{n} \;\text{جدار نازک بسته}\; \Rightarrow \varphi = \frac{۴TL}{Gtna^۳\text{Cotg}^۲\frac{\pi}{n}}$$

$$\text{پاسخ}: \frac{\phi_{\text{باز}}}{\phi_{\text{بسته}}} = \frac{\frac{۳TL}{GT^۳na}}{\frac{۴TL}{GTna^۳\text{Cotg}^۲\frac{\pi}{n}}} = \frac{۳}{۴}(\frac{a}{t})^۲\text{Cotg}^۲\frac{\pi}{n}$$

۱۷ـ گزینه «۴»

۱۸ـ گزینه «۱» در مقاطع جدار نازک تحت پیچش، تنش برشی برابر است با:



$$\tau = \frac{T}{۲A_m t}$$

t: ضخامت مقطع

A_m: مساحت محصور شده توسط خطچین مرکزی

$$\Rightarrow A_m = n\left(\frac{۱}{۲}ah\right) = n\left(\frac{۱}{۲}a \times \frac{a}{۲}\text{Cotg}\frac{\pi}{n}\right) = \frac{na^۲}{۴}\text{Cotg}\frac{\pi}{n} \Rightarrow \tau = \frac{T}{۲tA_m} = \frac{T}{۲t\frac{na^۲}{۴}\text{Cotg}\frac{\pi}{n}} = \frac{۲Ttg\frac{\pi}{n}}{na^۲t}$$

---

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۹ـ گزینه «۲» برای حالت تنش محوری، می‌توان با استفاده از تنش قائم مجاز، حداکثر نیروی محوری قابل تحمل به وسیله پین را به دست آورد.

$$A=\pi\frac{d^{2}}{4}\ ,\ \sigma_{max}=\frac{P}{A}\Rightarrow P=\sigma_{max}.A=(250\times10^{6})(\frac{\pi}{4}(6\times10^{-3})^{2}=7065N$$

این حداکثر باری است که پین می‌تواند تحمل کند که از بار محوری فشاری وارد بر پین بیشتر است. بنابراین پین از نظر تنش عمودی مناسب است.

برای حالت تنش برشی، می‌توان با استفاده از تنش برشی مجاز، حداکثر نیروی برشی قابل تحمل به وسیله پین را به دست آورد.

$$\tau=\frac{TR}{J}\Rightarrow T=\frac{\tau_{max}\times J}{R}\Rightarrow T_{max}=\frac{(250\times10^{6})\times(\frac{\pi(6\times10^{-3})^{4}}{32})}{(\frac{6\times10^{-3}}{2})}=10/6N.m$$

این حداکثر گشتاور پیچشی است که پین می‌تواند تحمل کند که از بار برشی وارد بر پین بیشتر است. بنابراین پین از نظر تنش برشی، مناسب است.

۲۰ـ گزینه «۲»

$$d_{out}=50mm\quad ;\quad P=100kw\quad ;\quad f=20Hz\quad ;\quad \tau_{max}=60Mpa\quad ;\quad d_{in}=?$$

داریم $P=T\omega\ ,\ \omega=2\pi f\Rightarrow\omega=2\pi\times20=40\pi\Rightarrow T=\frac{P}{\omega}\Rightarrow T=\frac{10^{5}}{40\pi}$

برای تیر با مقطع دایره تحت پیچش داریم

$$\left.\begin{array}{l}\tau=\frac{TP}{J}\\ J=\frac{\pi}{32}(d_{2}^{4}-d_{1}^{4})\end{array}\right\}\Rightarrow 60\times10^{6}=\frac{\frac{10^{5}}{40\pi}\times25\times10^{-3}}{\frac{\pi}{32}((50\times10^{-3})^{4}-d_{in}^{4}}\Rightarrow d_{in}=41/2mm$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه آزمون خودسنجی فصل سوم

پاسخنامه آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۲» حداکثر تنش در تکیه‌گاه ایجاد شده و مقدار آن برابر است با:

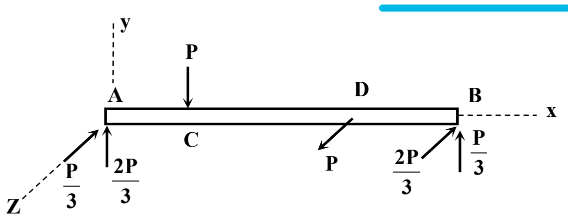
$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}C}{I}=\frac{۶M_{max}}{Ah}=\frac{۶(۱۲۰۰\times۱\times۰/۵)\times۱۰^{۳}}{۴۰\times۶۰\times۶۰}$$

$$\Rightarrow \sigma_{max}=\frac{۳۶\times۱۰^{۵}}{۱۴۴\times۱۰^{۳}}=۲۵\,MPa$$

۲ـ گزینه «۳» انحنای یک تیر در محدوده‌ی ارتجاعی برابر است با:

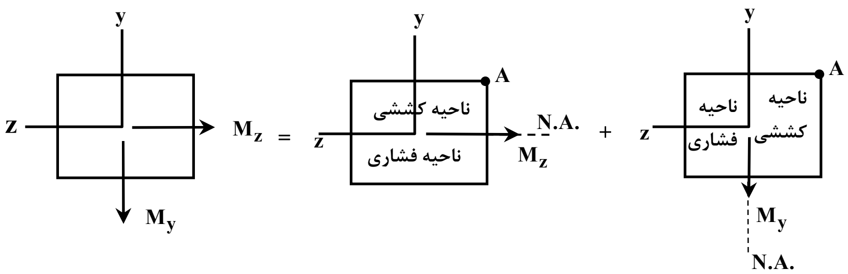
$$\frac{۱}{\rho_{min}}=\frac{M_{max}}{EI}\Rightarrow \rho_{min}=\frac{EI}{\frac{PL}{۴}}=\frac{۴EI}{PL}$$

۳ـ گزینه «۳» در تیرهای تحت بار متمرکز لنگر خمشی ماکزیمم در زیر یکی از بارهای متمرکز اتفاق می‌افتد، در این تست مقدار لنگر خمشی ماکزیمم در زیر هر دو بار به وجود آمده و با یکدیگر تفاوتی نمی‌کند.



$$\left.\begin{array}{l} M_z=M_۱=\frac{۲P}{۳}\times\frac{L}{۳}=\frac{۲PL}{۹}\quad,\quad M_y=M_۲=\frac{P}{۳}\times\frac{L}{۳}=\frac{PL}{۹} \\ S_۱=S_۲=\frac{I}{C}=\frac{\frac{a^۴}{۱۲}}{\frac{a}{۲}}=\frac{a^۳}{۶}\end{array}\right\}\Rightarrow \sigma_{max}=\frac{M_۱}{S_۱}+\frac{M_۲}{S_۲}=\frac{\frac{۲PL}{۹}}{\frac{a^۳}{۶}}+\frac{\frac{PL}{۹}}{\frac{a^۳}{۶}}=\frac{۲PL}{a^۳}$$

در مقطع C دو لنگر خمشی در راستای y و z به ترتیب ناشی از نیروی $\frac{P}{۳}$ و $\frac{۲P}{۳}$ وجود دارد که این لنگرها تولید تنش خمشی در راستای x می‌کنند. همان‌طور که از شکل زیر قابل مشاهده است ماکزیمم تنش در نقطه A به وقوع پیوسته که ناشی از لنگرهای M_y و M_z تنش کششی در آن تولید می‌شود.



۴ـ گزینه «۳» بار به صورت غیر محوری بر ستون وارد شده، بنابراین ابتدا باید نیروی P را به مرکز سطح مقطع انتقال داده و سپس تنش ناشی از بار محوری و تنش ناشی از لنگر خمشی را در این دو نقطه محاسبه نمود.

$$\sigma_A=-\frac{P}{A}-\frac{MC}{I}=-\frac{P}{۲a^۲}-\frac{(Pa)a}{\frac{۱}{۱۲}a(۲a)^۳}=-\frac{P}{۲a^۲}-\frac{۳P}{۲a^۲}=-\frac{۴P}{۲a^۲}\Rightarrow\sigma_A=-۲\frac{P}{a^۲}\qquad(۱)$$

$$\sigma_B=-\frac{P}{A}+\frac{MC}{I}=-\frac{P}{۲a^۲}+\frac{۳}{۲}\frac{P}{a^۲}=\frac{P}{a^۲}\qquad(۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\left|\frac{\sigma_A}{\sigma_B}\right|=۲$$

۵ـ گزینه «۳» با توجه به توضیحات متن درس‌نامه (۲) ابعاد هسته مرکزی لوزی، $\frac{b}{۶}$ و $\frac{h}{۶}$ می‌باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۶ـ گزینه «۱»

$$\sigma_{max}=\frac{MC}{I}=\frac{(۲\times۳۰\times۱۰۰)۵}{\frac{۱}{۱۲}[۱۰^۴-۷^۴]}=۴۷\,MPa$$

۷ـ گزینه «۱» طول تسمه بعد از خمش مساوی محیط دایره است. $(L=۲\pi R)$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$L=۲\pi\rho\quad;\quad \varepsilon_{max}=\frac{c}{\rho}=\frac{\frac{a}{۲}}{\frac{L}{۲\pi}}=\frac{\pi a}{L}\Rightarrow\sigma_{max}=\sigma_y=E\varepsilon_{max}=E\frac{\pi a}{L}\Rightarrow\frac{L}{a}=\frac{\pi E}{\sigma_y}$$

۸ـ گزینه «۴» کرنش پیوسته، ولی تنش ناپیوسته است. چرا که کرنش در هر نقطه تابعی از موقعیت هندسی آن نقطه نسبت به تار خنثی است ولی تنش در هر نقطه علاوه بر موقعیت نقطه نسبت به تار خنثی به جنس قطعه در آن نقطه نیز بستگی دارد.

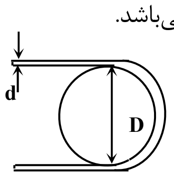
۹ـ گزینه «۳» تار خنثی همواره بین محور کوپل خمشی و محور ممان اینرسی حداقل قرار دارد.

۱۰ـ گزینه «۲» میله‌ای که تحت لنگر پیچشی قرار دارد در آن تنش برشی ایجاد می‌شود، اما در صفحاتی که با صفحه تنش برشی ماکزیمم زاویه ۴۵° تشکیل می‌دهند، تنش قائم ماکزیمم شده که مقدار این تنش با تنش برشی ماکزیمم برابر است. از طرفی رابطه بین I و J برای مقطع دایروی به قرار زیر است:

$$I=\frac{\pi}{۴}R^۴\quad,\quad J=\frac{\pi}{۲}R^۴\Rightarrow J=۲I$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{در خمش}:\ \sigma_{max}=\sigma=\dfrac{MC}{I}\\ \text{در پیچش}:\ \sigma_{max}=\tau_{max}=\dfrac{TC}{J}=\dfrac{MC}{۲I}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\tau_{max}\ \text{پیچش}}{\sigma\ \text{خمش}}=\frac{\tau_{max}}{\sigma}=\frac{\frac{MC}{۲I}}{\frac{MC}{I}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\tau_{max}=\frac{\sigma}{۲}$$

۱۱ـ گزینه «۴» شعاع انحنای سیم مساوی شعاع استوانه بوده و ماکزیمم فاصله مقطع سیم از تار خنثی مساوی شعاع سیم $\frac{d}{۲}$ می‌باشد.



$$\sigma_{max}=E\varepsilon_{max}=E\frac{c}{\rho}=E\times\frac{\frac{d}{۲}}{\frac{D}{۲}}=E\frac{d}{D}$$

۱۲ـ گزینه «۳» تنش ناشی از خمش در نقطه A کششی بوده که باید تنش فشاری ناشی از بار غیرمحوری را خنثی کند.

$$\sigma_A=-\frac{P}{A}+\frac{MC}{I}=-\frac{P}{A}+\frac{۶M}{Ah}=-\frac{۹۰۰۰}{۱۰۰\times۶۰}+\frac{۶\times(۹۰۰۰x)}{(۱۰۰\times۶۰)\times۱۰۰}=۰\Rightarrow x=\frac{۱۰۰}{۶}=\frac{۵۰}{۳}mm$$

۱۳ـ گزینه «۲» با استفاده از رابطه‌ی $M'=M\times\frac{I'}{I}$ می‌توان مقدار لنگر تحمل شده توسط بخش هاشورخورده را به دست آورد.

$$I'=\frac{b'h'^۳}{۱۲}+A'd^۲=\frac{b(\frac{b}{۳})^۳}{۱۲}+(b\times\frac{b}{۳})(\frac{۲b}{۳}+\frac{b}{۶})^۲=b^۴[\frac{۱}{۲۷\times۱۲}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۲۵}{۳۶}]\Rightarrow I'=۰/۲۳۴۵b^۴\qquad(۱)$$

$$I=\frac{b(۲b)^۳}{۱۲}=\frac{۲}{۳}b^۴=۰/۶۶۶b^۴\qquad(۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\frac{M'}{M}=\frac{I'}{I}=\frac{۰/۲۳۴۵b^۴}{۰/۶۶۶b^۴}=۰/۳۵\Rightarrow\frac{M'}{M}\times۱۰۰\simeq۳۵\%$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۴ـ گزینه «۲» گشتاور خمشی ماکزیمم در تیر ساده تحت بار گسترده یکنواخت مساوی $\frac{WL^2}{8}$ است.

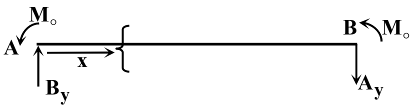
$$\sigma_{max}=\frac{MC}{I}=\frac{6M}{Ah}\Rightarrow 80=\frac{6\times(\frac{650}{100}kg/cm\times\frac{(600)^2}{8})}{(b\times 1/2b)\times 1/2b}\Rightarrow b^3=15234/375\Rightarrow b\simeq 24/79\ cm\Rightarrow h\simeq 29/75$$

$$\Rightarrow A=bh\simeq 737\ cm^2$$

۱۵ـ گزینه «۲» بارگذاری خارج از مرکز بوده، بنابراین تنش محوری در آن ناشی از بار P و لنگر خمشی است.

$$\sigma_{max}=-\frac{P}{A}-\frac{MC}{I}=-\frac{P}{a\times\frac{a}{2}}-\frac{(\frac{Pa}{4})\times\frac{a}{4}}{\frac{1}{12}\times a\times(\frac{a}{2})^3}=-\frac{2P}{a^2}-\frac{6P}{a^2}=-\frac{8P}{a^2}$$

۱۶ـ گزینه «۱» نیمه راست تیر نیمه بالایی تحت فشار و نیمه سمت چپ تحت کشش می‌باشد، در نتیجه مجموعاً هیچ گونه تغییر طولی در تار بالایی به وجود نمی‌آید. این مسئله را به روش تحلیلی نیز می‌توان حل نمود.



لنگر خمشی در یک مقطع دلخواه به فاصله x از ابتدای تیر مساوی است با:

$$M=B_yx-M_\circ=\frac{2M_\circ}{L}x-M_\circ\Rightarrow\sigma_x=\frac{MC}{I}\quad,\quad\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}\Rightarrow\varepsilon_x=\frac{MC}{EI}=\frac{C}{EI}(\frac{2M_\circ}{L}x-M_\circ)$$

$$\Rightarrow\Delta L=\int_\circ^L\varepsilon_x dx\Rightarrow\Delta L=\frac{C}{EI}\int_\circ^L(\frac{2M_\circ}{L}x-M_\circ)dx=\frac{2M_\circ}{L}(\frac{x^2}{2})-M_\circ x\Big|_\circ^L=M_\circ L-M_\circ L=0$$

۱۷ـ گزینه «۱» حداکثر تنش خمشی در موقعیت تکیه‌گاهها رخ داده و مقدار آن برابر است با:

$$\sigma_{max}=\frac{MC}{I}=\frac{(15700\times 150)100}{\frac{\pi}{64}(200)^4}\simeq 3\,MPa$$

۱۸ـ گزینه «۳» در تیر ساده تحت بار گسترده یکنواخت لنگر خمشی در وسط تیر ماکزیمم بوده که مقدار آن مساوی $\frac{qL^2}{8}$ می‌باشد.

$$\sigma_{max}=\frac{MC}{I}=\frac{6M}{Ah}=\frac{6\times\frac{8000\times 4^2}{8}}{6\times 10\times 10\times 10^{-6}}=160\times 10^6\ Pa=160Mpa$$

۱۹ـ گزینه «۲» تغییر طول الیاف‌های طولی تیر با استفاده از انتگرال‌گیری از کرنش طولی تیر امکان‌پذیر است.

$$\delta=\int\varepsilon dx\Rightarrow\delta=\int\frac{\sigma}{E}dx=\int\frac{My}{EI}dx\Rightarrow\delta EI=\int M\times(5cm)dx\Rightarrow 0/5\times 2\times 10^6\times\frac{15\times 20^3}{12}=5\int_{100}^{300}Mdx\qquad(1)$$

y در رابطه فوق فاصله الیاف AB از تار خنثی می‌باشد.

مقدار لنگر خمشی در فاصله AB را می‌توان با برش زدن تیر در این فاصله و محاسبه لنگر خمشی داخلی به دست آورد.

$$M=\frac{P}{2}x\overset{(1)}{\Rightarrow}15\times 8\times 10^9=3\times 5[Px^2]_{100}^{300}=P(90000-10000)\times 15$$

$$P=\frac{8\times 10^9}{80000}=10^5\ kg.N\simeq 10^6\ N=10^3\ kN$$

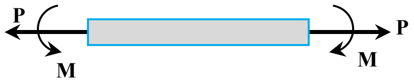
۲۰ـ گزینه «۲»

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}\Rightarrow M=\frac{EI}{\rho}=\frac{200\times 10^3\times\frac{1}{12}\times 60\times 6^3}{\frac{3000}{8}}=576000\ N.mm=576N.m$$

www.modaresanesharif.ac.ir

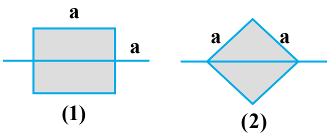
www.modaresanesharif.ac.ir

۲۱ــ گزینه «۲» نیروی P را به مرکز مقطع انتقال داده سپس از روش جمع آثار تنش‌ها را با هم جمع می‌کنیم. نقطه A تحت اثر نیروی P تحت کشش قرار گرفته اما لنگر خمشی آن را تحت فشار قرار می‌دهد.



$$\sigma_A = \frac{P}{A} - \frac{MC}{I} = \frac{۴۰۰۰۰}{\frac{\pi}{۴}\times ۵۰^۲} - \frac{(۴۰۰۰۰\times ۸۰)\times ۲۵}{\frac{\pi}{۶۴}\times ۵۰^۴} = -۲۴۰/۳۸\ \text{MPa}$$

۲۲ــ گزینه «۴» مقاومت خمشی مقطعی بیشتر است که دارای مدول مقطع بزرگ‌تری باشد. (ممان اینرسی دو مقطع نسبت به محور افقی یکسان است $I_۲ = I_۱$)



$$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{\frac{I_۱}{C_۱}}{\frac{I_۲}{C_۲}} = \frac{I_۱}{I_۲}\times\frac{C_۲}{C_۱} = \frac{C_۲}{C_۱} = \frac{a\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{a}{۲}} = \sqrt{۲} \Rightarrow S_۱ > S_۲$$

(همان طور که قبلاً نیز گفته شده، ممان اینرسی مقطع مربعی حول تمامی محورهای گذرنده از مرکز سطح برابر است.)

۲۳ــ گزینه «۳»

$$C = \frac{t}{۲} \quad ; \quad \rho = R$$

$$\sigma_{max} = E\varepsilon_{max} = E\frac{C}{\rho} = ۲\times ۱۰^۶ \times \frac{\frac{۲}{۲}}{۱۰\times ۱۰۰} = ۲\times ۱۰^۳\ \frac{kg}{cm^۲}$$

۲۴ــ گزینه «۳»

۲۵ــ گزینه «۲» ارتفاع تمامی مقاطع یکسان است، مقطعی در برابر خمش مقاوم‌تر است که بیشترین توزیع جرم آن در حداکثر فاصله از تار خنثی باشد. در چنین حالتی اساس مقطع حداکثر خواهد بود، این حالت در گزینه ۲ اتفاق می‌افتد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه آزمون (۲)

۱ــ گزینه «۲» حداکثر تنش خمشی در تیر ساده تحت بار گسترده‌ی یکنواخت برابر $\frac{qL^2}{8}$ می‌باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$M_{max}=\frac{qL^2}{8}=\frac{100qb^2}{8}=12/5qb^2$$

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}C}{I}=\frac{(12/5qb^2)b}{\frac{b(2b)^3}{12}}=\frac{12\times 12/5}{8}\frac{q}{b^2}=\frac{150q}{8b^2}\Rightarrow \sigma_{max}=18/75\frac{q}{b^2}$$

۲ــ گزینه «۲»

$$A_1=A_2\Rightarrow 2a^2=\frac{\pi}{4}D^2\Rightarrow \frac{a^2}{D^2}=\frac{\pi}{8}\Rightarrow \frac{a}{D}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1=\frac{1}{6}Ah=\frac{1}{6}Aa \\ S_2=\frac{1}{8}AD \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{6}Aa}{\frac{1}{8}AD}=\frac{4}{3}\frac{a}{D}=\frac{4}{3}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2\pi}}{3}$$

۳ــ گزینه «۲» مقدار تنش ناشی از بار محوری و لنگر خمشی در نقطه‌ی A عبارت است از:

$$\sigma_A=-\frac{P}{A}-\frac{M_1C_1}{I_1}+\frac{M_2C_2}{I_1}$$

اما $M_1=M_2=P\frac{a}{12}$ و $I_1=I_2$ و $C_1=C_2$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\sigma_A=-\frac{P}{a^2}$$

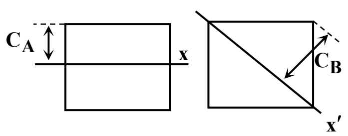
۴ــ گزینه «۲» چون میله تحت اثر لنگر خالص می‌باشد، تنش از رابطه مقابل محاسبه می‌شود:

$$\sigma=\frac{MC}{I}\Rightarrow M=\frac{\sigma I}{C}$$

مقطع (۲) مربعی است که نسبت به مقطع (۱)، 45° دوران داشته است در چنین حالت خاصی از دوران، ممان اینرسی هر دو مقطع نسبت بـه تـار خنثـی مساوی است. بنابراین: $I_1=I_2$.

$$\frac{M_1}{M_2}=\frac{C_2}{C_1}\times\frac{I_1}{I_2}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}}\times 1=\sqrt{2}$$

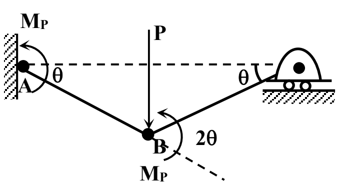
۵ــ گزینه «۲» با توجه به ثابت بودن مقدار خمش و ممان اینرسی مقدار تنش فقط به فاصله نقطه تا محور خنثی بستگی دارد.



$$\frac{\sigma_A}{\sigma_B}=\frac{M_A}{M_B}\times\frac{C_A}{C_B}\times\frac{I_B}{I_A}\Rightarrow \frac{\sigma_A}{\sigma_B}=\frac{C_A}{C_B}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ممان اینرسی مربع حول محور افقی x و حول قطرش یکسان است.

۶ــ گزینه «۲» چون تیر نامعین از درجه یک است برای ناپایداری تیر کافی است دو مفصل پلاسـتیک در طـول تیر در نقاط A و B ایجاد شود. (نقاط B, A نقاطی هستند که لنگر خمشی در آنها ماکزیمم است.)



رابطه کار مجازی: $M_P\times 2\theta+M_P\times\theta-P_u\frac{L}{2}\times\theta=0\Rightarrow P_u=\frac{6M_P}{L}$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۷ـ گزینه «۳» طبق رابطه $\sigma_{max}=\frac{M}{S}$، حداکثر مقاومت خمشی مربوط به زمانی است که مدول مقطع ماکزیمم شود.

$$S=\frac{I}{C}=\frac{\frac{۱}{۱۲}uv^۳}{\frac{v}{۲}}=\frac{uv^۲}{۶}$$

و اما طبق رابطه فیثاغورث $u^۲+v^۲=d^۲$، در نتیجه $v^۲=d^۲-u^۲$.

$$S=\frac{u(d^۲-u^۲)}{۶}=\frac{ud^۲}{۶}-\frac{u^۳}{۶}\xrightarrow[\text{مشتق آن نسبت به u مساوی صفر شود}]{\text{برای آنکه S برحسب متغیر u ماکزیمم شود کافی است}}\frac{ds}{du}=۰\Rightarrow\frac{d^۲}{۶}-\frac{u^۲}{۲}=۰\Rightarrow u^۲=\frac{d^۲}{۳}$$

$$\Rightarrow v^۲=d^۲-(\frac{d^۲}{۳})=\frac{۲d^۲}{۳}\Rightarrow\frac{u^۲}{v^۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{u}{v}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۸ـ گزینه «۱» طبق فرض صورت مسئله تنش خمشی حداکثر در دو تیر برابر می‌باشد در نتیجه داریم:

$$\sigma_{max_۱}=\sigma_{max_۲}\Rightarrow\frac{M_{max_۱}}{S_۱}=\frac{M_{max_۲}}{S_۲}\xrightarrow{S_۱=S_۲}M_{max_۱}=M_{max_۲}\Rightarrow\frac{FL_۱}{۴}=FL_۲\Rightarrow\frac{L_۱}{L_۲}=۴$$

۹ـ گزینه «۳» بارگذاری خارج از مرکز بوده، بنابراین تنش ایجاد شده در ستون‌ها ناشی از بار محوری و لنگر خمشی است.

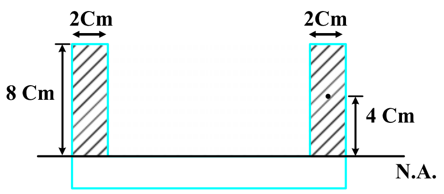
$$(\sigma_{max})_s=-\frac{P}{A}-\frac{MC}{I}=-\frac{P}{a^۲}-\frac{۶M}{bh^۲}=-\frac{P}{a^۲}-\frac{۶P\times\frac{a}{۲}}{a\times a^۲}=-\frac{۴P}{a^۲}$$

$$(\sigma_{max})_C=-\frac{P}{A}-\frac{MC}{I}=-\frac{P}{\pi r^۲}-\frac{Pr\times r}{\frac{۱}{۴}\pi r^۴}=-\frac{P}{\pi r^۲}-\frac{۴P}{\pi r^۲}=-\frac{۵P}{\pi r^۲}$$

از طرفی طبق فرض مسئله مساحت مقطع دو ستون با یکدیگر برابرند، در نتیجه: $a^۲=\pi r^۲$

$$\frac{(\sigma_{max})_s}{(\sigma_{max})_c}=\frac{-\frac{۴P}{a^۲}}{-\frac{۵P}{\pi r^۲}}=\frac{۴}{۵}\times\frac{\pi r^۲}{a^۲}=\frac{۴}{۵}$$

۱۰ـ گزینه «۱» در حالت پلاستیک کامل، تار خنثی سطح مقطع را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، در نتیجه مدول پلاستیک برابر است با:



$$Z=\sum Q_i=A_۱\bar{y}_۱+A_۲\bar{y}_۲$$

$$Z=(۲۰\times۸۰)(۴۰)\times۲+۱۶۰\times۲۰\times۱۰\Rightarrow Z=۱۶۰\times۱۰^۳\ mm^۳$$

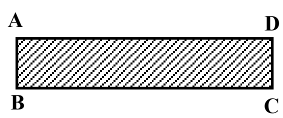
$$M_P=\sigma_y Z=۴۰۰\times۱۶۰\times۱۰^۳=۶۴\times۱۰^۵\ N.mm$$

$$M_P=۶۴۰۰N.m$$

۱۱ـ گزینه «۴» ρ فاصله مرکز انحناء (مرکز پولی) تا تار خنثی می‌باشد.

$$\sigma_{max}=E\varepsilon_{max}=E\frac{c}{\rho}=E\times\frac{\frac{d}{۲}}{r+\frac{d}{۲}}=\frac{Ed}{۲r+d}$$

۱۲ـ گزینه «۲» تنش ماکزیمم مساوی تنش ناشی از خمش و تنش ناشی از نیروی محوری است. این تنش در روی لبه CD ناشی از هر دو عامل ذکر شده کششی است.



$$\sigma_{CD}=\sigma_{max}=\frac{F}{A}+\frac{MC}{I}\Rightarrow\sigma_{max}=\frac{۵۰۰}{A}+\frac{(۵۰۰\times۱۲)\times\frac{a}{۲}}{\frac{۱}{۱۲}\times b\times a^۳}=$$

$$\frac{۵۰۰}{A}+\frac{۷۲\times۵۰۰}{A\times a}=\frac{۵۰۰}{A}+\frac{۶\times۵۰۰}{A}=\frac{۷(۵۰۰)}{A}$$

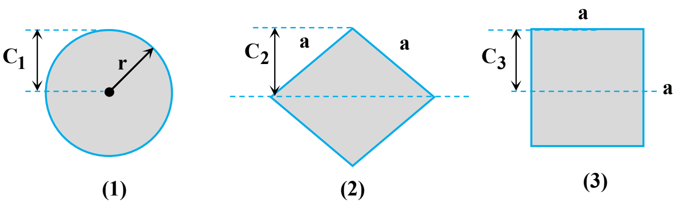
www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۳ـ گزینه «۲» برای تعیین شعاع انحنای تیر از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود:

$$\frac{۱}{\rho}=\frac{M}{EI}\Rightarrow \rho=\frac{E\times\frac{۱}{۱۲}a(۲a)^{۳}}{F\frac{a}{۲}}=\frac{۴}{۳}\frac{Ea^{۳}}{F}$$

۱۴ـ گزینه «۱» هر تیری که دارای مدول مقطع بزرگ‌تری است دیرتر به تسلیم می‌رسد. از طرفی چون وزن دو تیر یکسان است بنابراین مساحت سطح مقطع آن‌ها با هم برابر است در نتیجه: $A_۱=A_۲=A_۳\Rightarrow \pi r^{۲}=a^{۲}\Rightarrow \frac{r}{a}=\frac{۱}{\sqrt{\pi}}$: چون وزن تیرها برای دو مقطع یکسان است.



$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{I_۱}{I_۲}\times\frac{C_۲}{C_۱}=\frac{\frac{\pi}{۴}r^{۴}}{\frac{a^{۴}}{۱۲}}\times\frac{\frac{a\sqrt{۲}}{۲}}{r}$$

$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{۳\pi\sqrt{۲}}{۲}\frac{r^{۳}}{a^{۳}}=\frac{۳\pi\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{۱}{\sqrt{\pi}}\right)^{۳}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲\sqrt{\pi}}=۱/۱۹۶>۱ \qquad (۱)$$

$$\frac{S_۳}{S_۲}=\frac{I_۳}{I_۲}\times\frac{C_۲}{C_۳}\xrightarrow[\text{افقی گذرنده از مرکز سطح یکسان است}]{\text{ممان اینرسی مربع حول قطر و حول ضلع}}\frac{S_۳}{S_۲}=\frac{C_۲}{C_۳}\Rightarrow\frac{S_۳}{S_۲}=\frac{a\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{a}{۲}}=\sqrt{۲}>۱ \qquad (۲)$$

از ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که مدول مقطع برای حالت ۲ از همه کمتر است، پس تیر با این مقطع زودتر تسلیم می‌شود.

۱۵ـ گزینه «۳» در این حالت بردار لنگر خمشی در راستای محور اصلی نبوده، در نتیجه تغییر مکان در هر دو راستای y و z دارای مؤلفه است.

۱۶ـ گزینه «۱» به پاسخ تشریحی مثال ۱۳ مراجعه شود.

طبق رابطه $\sigma_{max}=\frac{M}{S}$، حداکثر مقاومت خمشی مربوط به زمانی است که مدول مقطع ماکزیمم شود.

$$S=\frac{I}{C}=\frac{\frac{۱}{۱۲}uv^{۳}}{\frac{v}{۲}}=\frac{uv^{۲}}{۶}$$

و اما طبق رابطه فیثاغورث $u^{۲}+v^{۲}=d^{۲}$، در نتیجه $v^{۲}=d^{۲}-u^{۲}$.

$$S=\frac{u(d^{۲}-u^{۲})}{۶}=\frac{ud^{۲}}{۶}-\frac{u^{۳}}{۶}\xrightarrow[\text{مشتق آن نسبت به u مساوی صفر شود}]{\text{برای آنکه S برحسب متغیر u ماکزیمم شود کافی است}}\frac{ds}{du}=۰\Rightarrow\frac{d^{۲}}{۶}-\frac{u^{۲}}{۲}=۰\Rightarrow u^{۲}=\frac{d^{۲}}{۳}$$

$$\Rightarrow v^{۲}=d^{۲}-\left(\frac{d^{۲}}{۳}\right)=\frac{۲d^{۲}}{۳}\Rightarrow\frac{v^{۲}}{u^{۲}}=۲\Rightarrow\frac{v}{u}=\sqrt{۲}$$

۱۷ـ گزینه «۴» در نقطه‌ای تنش برشی حداکثر وجود دارد که تنش قائم آن بزرگ‌تر باشد و در نقطه B تنش قائم فشاری ناشی از نیروی محوری و لنگر خمشی حداکثر است. (این مسئله را می‌توان با توجه به دایره مور نیز استنباط کرد.)

۱۸ـ گزینه «۴» ممان اینرسی مقطع مرکب را با استفاده از قضیه انتقال محورها می‌توان محاسبه نمود.

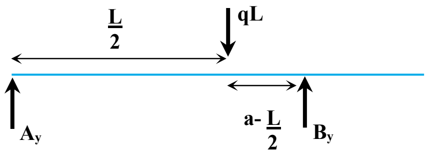
$$S=\frac{I}{C}=\frac{۱}{\frac{۵h}{۴}}\times\left\{۲\times\frac{۱}{۱۲}\times۲/۲۵h\times\left(\frac{h}{۴}\right)^{۳}+۲\times\left(۲/۲۵h\times\frac{h}{۴}\right)\times\left(h+\frac{h}{۸}\right)^{۲}+\frac{۱}{۱۲}\times\frac{h}{۴}\times(۲h)^{۳}\right\}$$

$$S=\frac{۴}{۵}\left\{\frac{۴/۵h^{۳}}{۷۶۸}+\frac{۳۶۴/۵h^{۳}}{۲۵۶}+\frac{h^{۳}}{۶}\right\}=۱/۲۷۷h^{۳}\Rightarrow h^{۳}=\frac{۲۷۰}{۱/۲۷۷}\Rightarrow h^{۳}=۲۱۱/۴۳۳\Rightarrow h=۵/۹۵۷cm$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۹ـ گزینه «۱»



$$\sum M_B = ० \Rightarrow -aA_y + qL(a-\frac{L}{۲}) = ०$$

$$A_y = \frac{qL(a-\frac{L}{۲})}{a}\ ;$$ تنش خمشی در فاصله x از تکیه‌گاه A: $M = A_y x - \frac{qx^۲}{۲}$ (۱)

برای حل مسئله، باید ممان‌های خمشی ماکزیمم در تیر با هم برابر باشند.

در دو موقعیت ممان در تیر اکسترمم خواهد شد. اولین موقعیت آن به طریق زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{dM}{dx} = ० \Rightarrow A_y - qx = ० \xrightarrow{(۱)} x = \frac{A_y}{q} \Rightarrow M_{max۱} = \frac{A_y^۲}{q} - \frac{A_y^۲}{۲q} = \frac{A_y^۲}{۲q}$$

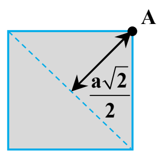
و دومین موقعیت در تکیه‌گاه B می‌باشد.

$$M_{max۲} = \frac{qb^۲}{۲}\ ;\ M_{max۱} = M_{max۲} \Rightarrow \frac{A_y^۲}{۲q} = \frac{qb^۲}{۲} \Rightarrow b^۲ = \frac{A_y^۲}{q^۲} \Rightarrow b = \frac{A_y}{q} = \frac{L}{a}(a-\frac{L}{۲}) \qquad (۲)$$

$$a = L - b \xrightarrow{(۲)} b = \frac{L}{L-b}(\frac{L}{۲} - b) \Rightarrow Lb - b^۲ = \frac{L^۲}{۲} - Lb \Rightarrow b^۲ - ۲Lb + \frac{L^۲}{۲} = ० \Rightarrow b = L - L\frac{\sqrt{۲}}{۲} \simeq ०/۳L$$

۲۰ـ گزینه «۳» تنش خمشی در یک تیر با مدول مقطع تیر نسبت عکس دارد اگر ابعاد مقطع α برابر شود مدول مقطع $\alpha^۳$ برابر شده بنابراین تنش خمشی ماکزیمم $\frac{۱}{\alpha^۳}$ برابر می‌شود.

۲۱ـ گزینه «۳» در اثر انتقال نیروی P از رأس مقطع به مرکز، لنگری مساوی $Pa\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ایجاد می‌شود. در نتیجه تنشی ناشی از این لنگر برابر است با:



$$\left.\begin{array}{l} (\text{سهم تنش خمشی})\sigma_A = \frac{MC}{I} \Rightarrow \sigma_A = \frac{M \times \frac{a\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{a^۴}{۱۲}} = \frac{۶\sqrt{۲}\ M}{a^۳} = \frac{۶\sqrt{۲}}{a^۳} \times \frac{Pa\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۶P}{a^۲} \\ \sigma_{max} = \frac{MC}{I} + \frac{P}{A} = \frac{۶P}{a^۲} + \frac{P}{a^۲} = \frac{۷P}{a^۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sigma_A}{\sigma_{max}} = \frac{۶}{۷}$$

۲۲ـ گزینه «۳»

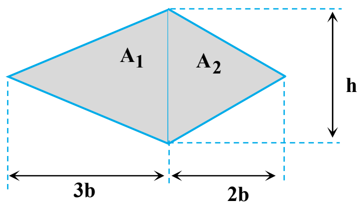
$$\left.\begin{array}{l} (\sigma_{max})_۱ = \frac{MC}{I} = \frac{Mr}{\frac{\pi}{۴}r^۴} = \frac{۴M}{Ar} \\ \left.\begin{array}{l} L \to ۹L \xrightarrow{\text{با نه برابر شدن طول بازو، مقدار گشتاور نیز نه برابر می‌شود.}} M \to ۹M \\ A \to ۹A \ \Rightarrow r \to ۳r \end{array}\right\} \Rightarrow (\sigma_{max})_۲ = \frac{۴ \times ۹M}{۹A \times ۳r} = \frac{۴M}{۳Ar} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(\sigma_{max})_۲}{(\sigma_{max})_۱} = \frac{۱}{۳}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۳ـ گزینه «۲»

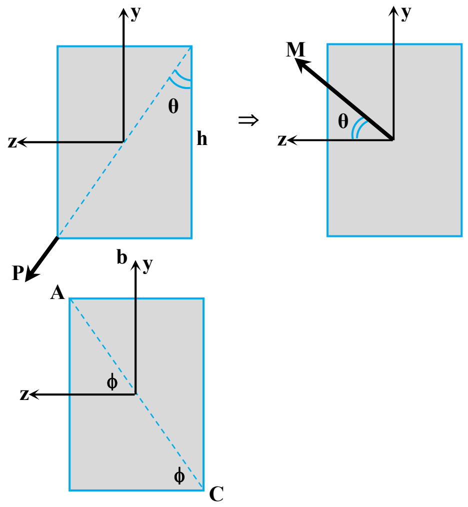
$$n = \frac{E_1}{E_2} = 3$$



در نتیجه ارتفاع مثلث (۱) موازی تار خنثی، یعنی در راستای افقی سه برابر می‌شـود. از طرفـی میـزان لنگـر تحمل شده توسط مقطع، ارتباط مستقیم با مدول مقطع (S) دارد. مدول مقطع نیز وابسته به مساحت سطح مقطع و ارتفاع سطح در راستای عمود بر M است چون ارتفاع تغییر نکرده در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{3b\frac{h}{2}}{2b\frac{h}{2}} = \frac{3}{2}$$

۲۴ـ گزینه «۲» لنگر M ناشی از نیروی P بر بردار P عمود بوده و در سطح yz واقع است.



اگر ϕ زاویه تار خنثی با محور z باشد، آنگاه می‌توان مقدار ϕ را توسط رابطه زیر به دست آورد:

$$\tan\phi = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta \Rightarrow \tan\phi = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{hb^3}{12}} \times \frac{b}{h} \Rightarrow \tan\phi = \frac{h}{b}$$

چون $\tan\phi$ مساوی $\frac{h}{b}$ شده است، در نتیجه تار خنثی بر قطر AC منطبق است.

۲۵ـ گزینه «۳» ماکزیمم تنش خمشی تیر در وسط آن ایجاد می‌شود. در این موقعیت لنگر خمشی حداکثر شده که مقدار آن برابر است با:

$$M_{max} = 1000\times 2 - 1000\times 1\times\frac{1}{2} = 1500\,N.m = 15\times 10^5\ N.mm$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}C}{I} = \frac{6M_{max}}{Ah} = \frac{6\times 15\times 10^5}{(25\times 50)50} = 144\,MPa$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه آزمون (۳)

۱ـ گزینه «۳» در یک فاصله x از انتهای آزاد تیر لنگر خمشی برابر است با:

$$M = Fx$$

از طرفی تنش خمشی حداکثر برابر است با:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{S} = \frac{۶M}{Ah} = \frac{۶Fx}{bh^{۲}} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{۶Fx}{b\sigma_{\circ}}} \qquad (۱)$$

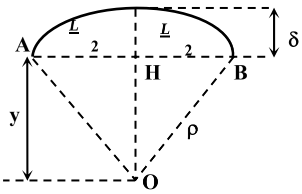
اما در تکیه‌گاه ارتفاع مقطع برابر h_B می‌باشد در نتیجه رابطه بالا به صورت مقابل تبدیل می‌شود:

$$h_B = \sqrt{\frac{۶FL}{b\sigma_{\circ}}} \qquad (۲)$$

از تقسیم روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{h}{h_B} = \sqrt{\frac{x}{L}} \Rightarrow h = h_B\sqrt{\frac{x}{L}}$$

۲ـ گزینه «۳» لنگر خمشی در فاصله بین دو تکیه‌گاه ثابت بوده بنابراین شعاع انحناء در این محدوده ثابت است.



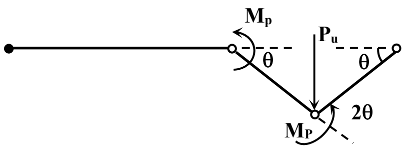
$$\delta = \rho - OH = \rho - y \Rightarrow \delta = \rho - \sqrt{\rho^{۲} - \frac{L^{۲}}{۴}} \Rightarrow \delta = \rho - \frac{۱}{۲}\sqrt{۴\rho^{۲} - L^{۲}}$$

۳ـ گزینه «۲» حداکثر تنش در میلگردهای فولادی و بتن تقویت شده به ترتیب برابر است با:

$$\sigma_s = n\frac{M(d-x)}{I} \quad ; \quad \sigma_c = \frac{Mx}{I}$$

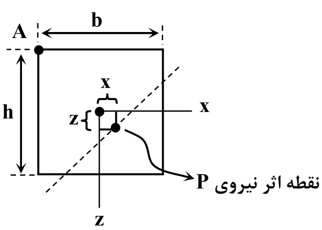
$$\Rightarrow \frac{\sigma_s}{\sigma_c} = \frac{n(d-x)}{x} = n\frac{d}{x} - ۱ = \frac{E_s}{E_c}\frac{d}{x} - ۱ \Rightarrow \frac{d}{x} = ۱ + \frac{E_c}{E_s}\frac{\sigma_s}{\sigma_c} \Rightarrow x = \frac{d}{۱ + \frac{E_c}{E_s}\frac{\sigma_s}{\sigma_c}}$$

۴ـ گزینه «۲» تیر نامعین از درجه یک می‌باشد و برای ناپایداریش ایجاد دو مفصل پلاستیک لازم است، دو مفصل در نقاط B و D که دارای ماکزیمم لنگر خمشی می‌باشند اتفاق می‌افتد.



$$P_u \times \frac{L}{۲}\theta = M_P \times ۲\theta + M_P \times \theta \Rightarrow P_u = \frac{۶M_P}{L}$$

۵ـ گزینه «۳» در صورتی که نقطه اثر نیروی P با مبداء مختصات فواصل x, y داشته باشد آنگاه تنش در نقطه A مساوی است با:

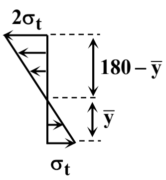


$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{(Px)\frac{b}{۲}}{\frac{۱}{۱۲}b^{۳}h} + \frac{(Pz)\frac{h}{۲}}{\frac{۱}{۱۲}h^{۳}b} = \circ$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{bh} = \frac{۶x}{hb^{۲}} + \frac{۶z}{bh^{۲}} \Rightarrow \frac{۱}{۶} = \frac{x}{b} + \frac{z}{h} \xrightarrow{b=h} x + z = \frac{b}{۶}$$

توجه شود که تنش ناشی از لنگر خمشی در نقطه A از طریق قاعده دست راست تعیین علامت شده است.

۶ـ گزینه «۱» از توزیع تنش‌ها و با استفاده از قانون تشابه مثلث‌ها می‌توان نوشت:



$$\frac{۱۸\circ - \bar{y}}{\bar{y}} = \frac{۲\sigma_t}{\sigma_t} \Rightarrow ۱۸\circ - \bar{y} = ۲\bar{y} \Rightarrow ۳\bar{y} = ۱۸\circ \Rightarrow \bar{y} = ۶\circ \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} \Rightarrow \bar{y} = ۶\circ = \frac{۱۸\circ \times b \times ۹\circ - ۱۶۲ \times ۱۸(۱۶ + \frac{۱۶۲}{۲})}{۱۸\circ b - ۱۶۲ \times ۱۸} \Rightarrow b \simeq ۲\circ \text{ cm}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۷ـ گزینه «۱» لنگر خمشی در تکیه‌گاه سمت چپ ماکزیمم می‌شود و مقدار آن مساوی است با:

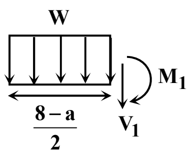
$$M_{max} = F \times ۱۰۰ = ۱۰۰F \quad kg.cm$$

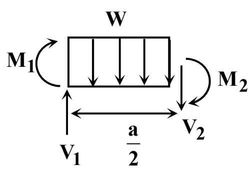
$$\sigma_{max} = \frac{MC}{I} = \frac{۶M}{Ah} = \frac{۶ \times ۱۰۰F}{(۲۰ \times ۱۲) \times ۲۰} = ۰/۱۲۵F$$

چون ماکزیمم تنش کششی کوچکتر است، بنابراین برای محاسبه نیروی مجاز F از مقدار آن استفاده می‌شود.

$$۰/۱۲۵F = ۴۰ \Rightarrow F = ۳۲۰\,kg$$

۸ـ گزینه «۴» در صورتی لنگر خمشی ماکزیمم در تیر در حد ممکن کوچک خواهد بود که لنگر خمشی منفی در تکیه‌گاه مساوی لنگر خمشی مثبت در وسط تیر باشد. با برش زدن در روی تکیه‌گاه A و در وسط تیر و نوشتن معادله گشتاور، لنگر داخلی در تکیه‌گاه و وسط تیر بدست می‌آید، توجه شود که لنگر ناشی از بار گسترده w در تیر یکسر گیردار به طول L برابر $\frac{wL^۲}{۲}$ می‌باشد:





$$M_۱ = \frac{w(\frac{۸-a}{۲})^۲}{۲} = \frac{w(۸-a)^۲}{۸} \quad \text{در تکیه‌گاه A}$$

در بارگذاری متقارن نیروی برشی در وسط تیر مساوی صفر است بنابراین $V_۲ = ۰$:

$$M_۲ = \frac{w(\frac{a}{۲})^۲}{۲} - M_۱ = \frac{wa^۲}{۸} - \frac{w(۸-a)^۲}{۸} \quad \text{در وسط تیر}$$

$$M_۱ = M_۲ \Rightarrow \frac{w(۸-a)^۲}{۸} = \frac{wa^۲}{۸} - \frac{w(۸-a)^۲}{۸} \Rightarrow \frac{w(۸-a)^۲}{۴} = \frac{wa^۲}{۸}$$

$$\Rightarrow (۸-a)^۲ = \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow ۸-a = \frac{a}{\sqrt{۲}} \Rightarrow a(۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}) = ۸ \Rightarrow a = ۴/۷\,m$$

۹ـ گزینه «۱» برای تهیه تیری با بالاترین مقاومت خمشی کافی است مدول مقطع تیر ماکزیمم باشد.

$$S = \frac{I}{C} = \frac{\frac{bh^۳}{۱۲}}{\frac{h}{۲}} = \frac{bh^۲}{۶} = \frac{b}{۶}(d^۲ - b^۲) = \frac{bd^۲}{۶} - \frac{b^۳}{۶} \Rightarrow \frac{ds}{db} = ۰ \Rightarrow \frac{d^۲}{۶} - \frac{b^۲}{۶} = ۰ \Rightarrow b = \frac{d}{\sqrt{۳}}$$

۱۰ـ گزینه «۲» رابطه‌ی بین M_y و ρ_y در آغاز تسلیم به صورت مقابل می‌باشد:

$$\frac{۱}{\rho_y} = \frac{M_y}{EI}$$

در محدوده‌ی الاستیک پلاستیک رابطه‌ی بین M و M_y به صورت زیر می‌باشد:

$$M = \frac{۳}{۲}M_y(۱-\frac{۱}{۳}\frac{\rho^۲}{\rho_y^۲}) \Rightarrow ۱/۲۵M_y = \frac{۳}{۲}M_y(۱-\frac{۱}{۳}\frac{\rho^۲}{\rho_y^۲}) \Rightarrow \frac{۵\times۲}{۴\times۳} = ۱-\frac{۱}{۳}(\frac{\rho}{\rho_y})^۲ \Rightarrow (\frac{\rho}{\rho_y})^۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_y} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۱ـ گزینه «۲» گشتاور پلاستیک M_P برابر حاصل‌ضرب مدول پلاستیک در تنش تسلیم است.

$$M_P = \sigma_y Z = \sigma_y \sum A_i \bar{y}_i = ۲۴۰۰(۰/۳\times۰/۱\times۰/۰۵ + ۰/۳\times۰/۱\times۰/۱۵) \Rightarrow M_P = ۱۴/۴\,kg.m$$

---

www.modaresanesharif.ac.ir

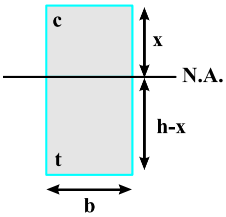
www.modaresanesharif.ac.ir

۱۲ـ گزینه «۱» اگر E_t را به عنوان مدول مبنا در نظر گرفته و n را برابر $\frac{E_c}{E_t}$ تعریف نماییم خواهیم داشت:

$$(\sum Q_i)_{N.A.}=0 \Rightarrow (nbx)\frac{x}{2}-b(h-x)\frac{h-x}{2}=0 \Rightarrow nx^2=(h-x)^2 \Rightarrow x=\frac{h}{\sqrt{n}+1} \Rightarrow h-x=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}h$$

و اما ممان اینرسی مقطع تبدیل یافته حول تار خنثی برابر است با:

$$I_t=n(\frac{bx^3}{3})+\frac{b(h-x)^3}{3}=[\frac{n}{3}(\frac{1}{\sqrt{n}+1})^3+(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1})^3]bh^3 \Rightarrow I_t=\frac{1}{3}\frac{n}{(\sqrt{n}+1)^2}bh^3$$



از طرفی شعاع انحنای تیر برابر است با:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{E_tI_t}=\frac{M}{E_rI} \Rightarrow E_r=\frac{E_tI_t}{I}$$

در رابطه‌ی بالا $I=\frac{bh^3}{12}$ می‌باشد.

$$E_r=\frac{12}{bh^3}E_t\frac{n}{3(\sqrt{n}+1)^2}bh^3=\frac{4E_tE_c}{E_t(\sqrt{\frac{E_c}{E_t}}+1)^2}=\frac{4E_tE_c}{(\sqrt{E_c}+\sqrt{E_t})^2}$$

در نهایت شعاع انحنای تیر برابر است با:

$$\rho=\frac{4E_tE_c}{(\sqrt{E_t}+\sqrt{E_c})^2}\frac{I}{M}$$

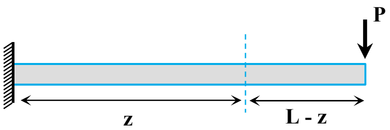
۱۳ـ گزینه «۲» در ابتدا حداکثر لنگر خمشی در تیر محاسبه می‌شود. M_{max} در وسط تیر برابر است با:

$$M_{max}=\frac{q_0L}{2}\times L-\frac{q_0L}{2}\times\frac{2L}{3}=\frac{q_0L^2}{6}$$

اکنون مقدار تنش خمشی ماکزیمم برابر است با:

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}C}{I}=\frac{6M_{max}}{Ah}=\frac{6\frac{q_0L^2}{6}}{a^3}=\frac{q_0L^2}{a^3}=\frac{100q_0}{a}$$

۱۴ـ گزینه «۳»



$$\left.\begin{array}{l}\text{از طرفی}\ \sigma=\frac{My}{I}\\ M=P(L-z)\end{array}\right\}\Rightarrow \sigma=\frac{P(L-z)y}{\frac{\pi}{4}R^4} \qquad (1)$$

$$\text{طبق فرض مسئله}\ \sigma=k(L-z)y \qquad (2)\xrightarrow{(2),(1)}k=\frac{4}{\pi}\frac{P}{R^4}$$

۱۵ـ گزینه «۴»

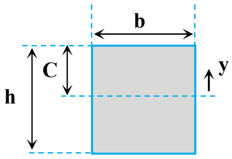
$$\left\{\begin{array}{l}S_I=\frac{I_1}{C_1}=\frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{a}{2}}=\frac{a^3}{6}\\ S_{II}=\frac{I_2}{C_2}=\frac{2[\frac{1}{12}a\times a^3]}{a}=\frac{a^3}{6}\end{array}\right.\Rightarrow S_I=S_{II}$$

۱۶ـ گزینه «۳» k برای لوله جدار نازک برابر $\frac{4}{\pi}$ می‌باشد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۱۷ـ گزینه «۱»



$$\varepsilon=\frac{y}{\rho}\quad ;\quad \varepsilon=k\sigma^{n}\ \Rightarrow \sigma=\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{\frac{۱}{n}}=\left(\frac{y}{\rho k}\right)^{\frac{۱}{n}}$$

$$M=\int ydF=\int y\sigma dA=۲\int_{\circ}^{C} y\left(\frac{y}{\rho k}\right)^{\frac{۱}{n}}(bdy)\Rightarrow M=\frac{۲nb}{۲n+۱}\,\frac{C^{۲+\frac{۱}{n}}}{(\rho k)^{\frac{۱}{n}}}=\frac{۲nb}{۲n+۱}\times C^{۲}\times\left(\frac{C}{\rho k}\right)^{\frac{۱}{n}}=\frac{۲nbC^{۲}}{۲n+۱}\sigma_{max}$$

$$\Rightarrow \sigma_{max}=\frac{۲n+۱}{۲n}\,\frac{M}{bC^{۲}}\ (۱)\ ;\quad I=\frac{bh^{۳}}{۱۲}=\frac{b}{۱۲}\times(۲C)^{۳}=\frac{۲}{۳}bC^{۳}\Rightarrow bC^{۲}=\frac{۳}{۲}\,\frac{I}{C}\xrightarrow{(۱)}\sigma_{max}=\frac{۲n+۱}{۲n}\times\frac{M}{\frac{۳}{۲}\,\frac{I}{C}}$$

$$\Rightarrow \sigma_{max}=\frac{۲n+۱}{۳n}\,\frac{MC}{I}$$

۱۸ـ گزینه «۳» حتی اگر رابطه تنش و کرنش غیرخطی باشد، اما باز هم رابطه کرنش و شعاع انحناء همواره مساوی $\varepsilon=\frac{C}{\rho}$ است.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{۱}&=E\varepsilon_{۱}^{۲}=E\frac{C^{۲}}{\rho_{۱}^{۲}}\\ \sigma_{۲}&=E\varepsilon_{۲}^{۲}=E\frac{C^{۲}}{\rho_{۲}^{۲}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \sigma=\sigma_{۱}+\sigma_{۲}\Rightarrow E\frac{C^{۲}}{\rho^{۲}}=E\frac{C^{۲}}{\rho_{۱}^{۲}}+E\frac{C^{۲}}{\rho_{۲}^{۲}}\Rightarrow\frac{۱}{\rho^{۲}}=\frac{۱}{۶^{۲}}+\frac{۱}{۸^{۲}}\Rightarrow\rho=۴/۸\ m$$

۱۹ـ گزینه «۲» در صورتی که ω وزن در واحد طول باشد، آنگاه لنگر خمشی در تیر متناسب با $\omega L^{۲}$ است، از طرفی وزن واحد طول متناسب با سطح مقطع تیر بوده، اگر تمامی ابعاد سطح مقطع α برابر شود، آنگاه تغییرات ω متناسب با $\alpha^{۲}$ خواهد بود، بنابراین:

$$\frac{\sigma_{۲}}{\sigma_{۱}}=\frac{M_{۲}}{M_{۱}}\times\frac{C_{۲}}{C_{۱}}\times\frac{I_{۱}}{I_{۲}}=\frac{\omega_{۲}}{\omega_{۱}}\times\frac{L_{۲}^{۲}}{L_{۱}^{۲}}\times\frac{C_{۲}}{C_{۱}}\times\frac{I_{۱}}{I_{۲}}=\alpha^{۲}\times\alpha^{۲}\times\alpha\times\frac{۱}{\alpha^{۴}}=\alpha$$

۲۰ـ گزینه «۲» اگر وزن کل تیر مساوی W در نظر گرفته شود، آنگاه:

$$M_{a-a}=W\times\frac{L}{۳}$$

$$h_{۱}=\frac{h}{۲}\ ,\ w=\gamma V\ ,\ V=\frac{۱}{۲}AL\ ,\ W=\frac{۱}{۲}\times ht\times L\ ,\ W_{b-b\ \text{سمت راست}}=\frac{۱}{۲}h_{۱}t\times\frac{L}{۲}=\frac{۱}{۲}\times\left(\frac{h}{۲}\right)t\times\frac{L}{۲}=\frac{W_{\text{کل}}}{۴}$$

وزن سمت راست مقطع b_b مساوی یک چهارم وزن کل میله است به دلیل آن که مساحت مقطع سمت راست b-b یک چهارم مساحت کل مثلث است.

در نتیجه:

$$M_{b-b}=\frac{W}{۴}\times\frac{L/۲}{۳}=\frac{WL}{۲۴}$$

اگر t عرض مقطع در طول تیر باشد، آنگاه:

$$S=\frac{I}{C}=\frac{۱}{۶}Ah$$

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_{max})_{a-a}&=\frac{M_{a-a}}{S_{a-a}}=\frac{\frac{WL}{۳}}{\frac{th^{۲}}{۶}}=\frac{۲WL}{th^{۲}}\\ (\sigma_{max})_{b-b}&=\frac{M_{b-b}}{S_{b-b}}=\frac{\frac{WL}{۲۴}}{\frac{t}{۶}\left(\frac{h}{۲}\right)^{۲}}=\frac{WL}{th^{۲}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow(\sigma_{max})_{a-a}=۲(\sigma_{max})_{b-b}$$

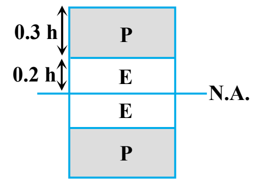
www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۲۱ــ گزینه «۳» تغییر طول تار فوقانی تیر با استفاده از کرنش طولی در طول تار فوقانی به دست می‌آید:

$$\delta=\int\varepsilon_x dx=\int\frac{\sigma_x}{E}dx=\int\frac{MC}{EI}dx=\frac{C}{EI}\int Mdx=\frac{\frac{a}{2}}{E\frac{a^4}{12}}\int_0^L\frac{Wx^2}{2}dx=\frac{6}{Ea^3}\times\frac{W}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L=\frac{WL^3}{Ea^3}=\frac{1000W}{E}$$

۲۲ــ گزینه «۴» چون ۶۰ درصد مقطع پلاستیک شده است، بنابراین ۴۰ درصد آن هنوز الاستیک می‌باشد به عبارت دیگر به اندازه $0/4h$ از ارتفاع همچنان در ناحیه الاستیک قرار دارد. بنابراین:



شعاع هسته الاستیک $y_y=0/2h$

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_y=\dfrac{y_y}{\rho}\Rightarrow\rho=\dfrac{y_y}{\varepsilon_y}\\ \text{از طرفی: }\varepsilon_y=\dfrac{\sigma_y}{E}\end{array}\right\}\Rightarrow\rho=\frac{0/2hE}{\sigma_y}$$

۲۳ــ گزینه «۲»

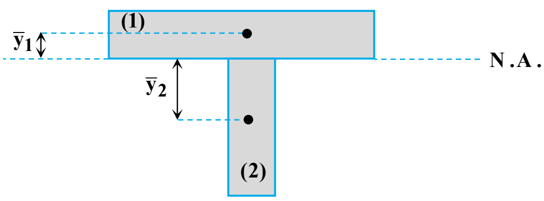
$$\frac{\sigma_{max2}}{\sigma_{max1}}=\frac{n\frac{Mh_2}{I}}{\frac{Mh_1}{I}}=n\frac{h_2}{h_1}\qquad(1)\qquad(n=\frac{E_2}{E_1})$$

تار خنثی از مرکز سطح مقطع گسترش یافته می‌گذرد، در نتیجه گشتاور اول سطح حول تار خنثی باید مساوی صفر باشد. چون در صورت مسئله اشاره شده است که محور خنثی بر فصل مشترک منطبق است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$nA_2\bar{y}_2=A_1\bar{y}_1\Rightarrow n(bh_2)\frac{h_2}{2}=bh_1\times\frac{h_1}{2}\Rightarrow nh_2^2=h_1^2\Rightarrow\frac{h_2}{h_1}=\frac{1}{\sqrt{n}}\qquad(2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow\frac{\sigma_{max2}}{\sigma_{max1}}=\frac{h_1^2}{h_2^2}\times\frac{h_2}{h_1}=\frac{h_1}{h_2}=\sqrt{n}=\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}$$

۲۴ــ گزینه «۲» تار خنثی در حالت پلاستیک کامل از موقعیتی عبور می‌کند که سطح مقطع کل را به دو مساحت مساوی تفکیک نماید. در این مسئله محل اتصال دو مقطع مستطیل محل عبور تار خنثی است. از طرفی:



$$M_P=\sigma_y\sum Q_i\Rightarrow M_P=\sigma_y(A_1\bar{y}_1+A_2\bar{y}_2)$$

$$\Rightarrow M_P=\sigma_y bh(\frac{b}{2}+\frac{h}{2})=\frac{bh}{2}\sigma_y(b+h)$$

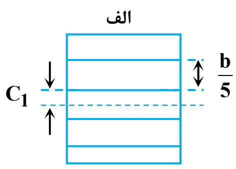
۲۵ــ گزینه «۳» اگر تیغه‌ها به هم چسبانیده شوند آنگاه در هر دو حالت تیری واحد تشکیل می‌دهند. از طرفی مقاومت خمشی در آن مقطعی بالاتر است که مدول مقطع بزرگ‌تری داشته باشد.

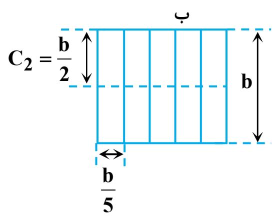
$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{I_2}{I_1}\times\frac{C_1}{C_2}=\frac{I_2}{I_1}\times1=\frac{I_2}{I_1}\quad;\quad I_2=[\frac{1}{12}\times\frac{b}{5}\times b^3]\times5=\frac{b^4}{12}$$

برای محاسبه ممان اینرسی مقطع (۱) حول تار خنثی باید ابتدا ممان اینرسی هر یک از تیغه‌های فولادی حول محور مرکزیش محاسبه شده سپس با استفاده از قضیه انتقال به تار خنثی انتقال داده شود.

$$I_1=\frac{1}{12}\times b\times(\frac{b}{5})^3+2[\frac{1}{12}\times b(\frac{b}{5})^3+\frac{b^2}{5}\times(\frac{b}{5})^2]+2[\frac{1}{12}\times b(\frac{b}{5})^3+\frac{b^2}{5}\times(\frac{2b}{5})^2]\Rightarrow I_1=\frac{b^4}{12}\quad,\quad\frac{S_2}{S_1}=1$$

اما اگر تیغه‌ها به هم چسبیده نباشند، هر یک از تیغه‌ها به صورت یک تیر جداگانه در نظر گرفته می‌شود و بنابراین کافی است ممان اینرسی مقطع هر تیر حول محور مرکزیش محاسبه شده و نتیجه آن در ضریب ۵ ضرب شود. در نتیجه می‌توان نوشت:





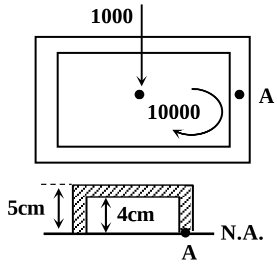
$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{I_2}{I_1}\times\frac{C_1}{C_2}=\frac{5\times\frac{1}{12}\times\frac{b}{5}\times b^3}{5\times\frac{1}{12}\times b\times(\frac{b}{5})^3}\times\frac{\frac{b}{10}}{\frac{b}{2}}\Rightarrow\frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5^3}}\times\frac{1}{5}=5$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه آزمون خودسنجی فصل چهارم

پاسخنامه آزمون (۱)



۱ـ گزینه «۳» تنش برشی ماکزیمم در روی تار خنثی در نقطه (A) اتفاق می‌افتد چون تنش‌ها هم‌جهت می‌باشند.

$$A_m = (۲۰-۰/۵-۰/۵)\times(۱۰-۰/۵-۰/۵) = ۱۹\times۹$$

$$\tau_{max} = \frac{VQ}{It} + \frac{T}{۲A_m t} = \frac{۱۰۰۰\times\left[(۵\times۱)\times۲/۵\times۲+(۱۸\times۱)۴/۵\right]}{([\frac{۱}{۱۲}\times۲۰\times۱۰^۳]-[\frac{۱}{۱۲}\times۱۸\times۸^۳])\times۲} + \frac{۱۰۰۰\times۱۰}{۲\times۱۹\times۹\times۱}$$

$$\tau_{max} = ۸۸/۲۱\frac{kgf}{cm^۲}$$

۲ـ گزینه «۱» تنش برشی ماکزیمم در مقطع مستطیل برابر است با:

$$\tau_{max} = \frac{۳}{۲}\frac{V}{A} = \frac{۳}{۲}\times\frac{۶۰۰۰}{۲\times۱۰} = ۴۵۰$$

۳ـ گزینه «۱» نقطه B بروی تار خنثی قرار دارد در نتیجه حداکثر تنش برشی ناشی از نیروی برش را تحمل می‌کند ولی در اثر لنگر پیچشی مقدار تنش برشی در مرکز مقطع صفر است.

$$\tau_{max} = (\frac{VQ}{It})_{max} + ۰ = \frac{۴}{۳}\frac{P}{A} = \frac{۴}{۳}\frac{P}{\frac{\pi}{۴}d^۲} = \frac{۱۶P}{۳\pi d^۲}$$

۴ـ گزینه «۳» چون در مقطع A-A در اثر انتقال نیروی P، لنگر خمشی و لنگر پیچشی بوجود می‌آید، در نتیجه تنش ناشی از خمش و پیچش دراین مقطع خواهیم داشت. اما از طرفی تنش برشی ناشی از نیروی برش نیز در این مقطع وجود دارد.

۵ـ گزینه «۳» در صورتی که سطحی دارای دو محور تقارن متعامد باشد، دارای مرکز تقارن بوده، از طرفی مرکز سطح و مرکز برش بر مرکز تقارن منطبق خواهند بود.

۶ـ گزینه «۴» در صورتی که مساحت همه‌ی مقاطع برابر باشند تنش برشی ماکزیمم برای مقاطع مختلف برابر خواهد بود با:

لوزی $\tau_{max} \simeq \frac{۹}{۸}\frac{V}{A}$ ؛ مثلث $\tau_{max} = \frac{۳}{۲}\frac{V}{A}$ ؛ دایره $\tau_{max} = \frac{۴}{۳}\frac{V}{A}$ ؛ مربع $\tau_{max} = \frac{۳}{۲}\frac{V}{A}$

(با مقایسه روابط زیر می‌توان نتیجه گرفت که مقطعی در برابر برش اقتصادی‌تر است که تحت اثر نیروی برشی یکسان V، کمترین تنش برشی را تولید کند. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.)

۷ـ گزینه «۱» در بین مقاطع مختلف، در مقاطع مثلث و لوزی حداکثر تنش برشی در روی تار خنثی ایجاد نمی‌شود.

۸ـ گزینه «۳» حداکثر تنش برشی در یک تیر تحت بار عرضی با مقطع مستطیلی برابر است با:

$$\tau_{max} = \frac{۳}{۲}\frac{V_{max}}{A}$$

نیروی برش ماکزیمم در تکیه‌گاه گیردار ایجاد شده و مقدار آن برابر نیروی تکیه‌گاهی است.

$$V_{max} = A_y = \frac{۱۲۰۰\times۳۰۰}{۲} = ۱۸۰۰۰۰kg \Rightarrow \tau_{max} = \frac{۳}{۲}\times\frac{۱۸۰۰۰۰}{۳\times۶} = ۱۵۰۰۰\frac{kg}{cm^۲}$$

۹ـ گزینه «۱» مقطع جدار نازک بسته بوده پس مرکز برش در داخل مقطع واقع است. از طرفی نیروی برشی تحمل شده توسط جان مقطع با مساحت آن متناسب است. پس مقطع ضخیم‌تر سهم بیشتری از نیروی برشی را تحمل می‌کند و در نتیجه مرکز برش به جان ضخیم‌تر نزدیک‌تر می‌باشد.

۱۰ـ گزینه «۳» حداکثر تنش برشی در تیر در تکیه‌گاه A و بر روی تار خنثی ایجاد می‌شود.

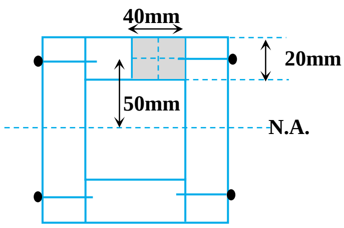
$$\tau_{max} = \frac{۳}{۲}\frac{V_{max}}{A} = \frac{۳}{۲}\frac{A_y}{A} = \frac{۳}{۲}\frac{\frac{۲}{۶}\times۶۰۰۰\times۳}{۳\times۴} = ۷۵۰\frac{kg}{cm^۲}$$

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

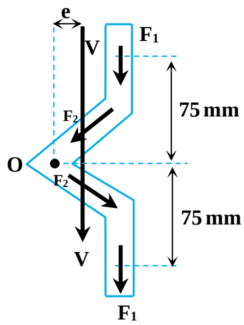
پاسخنامه آزمون (۲)

۱ـ گزینه «۳» مرکز برش برروی محور تقارن قرار گرفته است لذا گزینهٔ صحیح (۱) یا (۳) می‌باشد، ولی اگر اجزاء مایل کوچکتر و کوچکتر شوند تا در نهایت مقدارشان مساوی صفر شود مقطع به یک ناودانی تبدیل می‌شود که در متن درس مرکز برش آن محاسبه شد. در این حالت نقطه a بر جان مقطع منطبق شده و تنها گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد.



۲ـ گزینه «۱» اگر فاصله طولی بین میخها برابر x باشد، آنگاه نیروی وارد بر هر پیچ مساوی $F = qx = \frac{VQ}{I}x$ می‌باشد. برای محاسبه Q، از محور تقارن عمودی تا محل تماس الوارها توسط میخ، هاشور زده شده و ممان استاتیک آن محاسبه می‌شود.

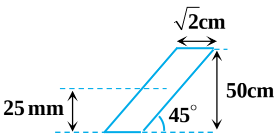
$$F = \frac{VQ}{I}x \Rightarrow F = \frac{۱۲۰۰\times(۴۰\times۲۰)\times۵۰}{\frac{۱}{۱۲}[۱۲۰\times۱۲۰^{۳} - ۸۰\times۸۰^{۳}]}\times۳۰ = ۱۰۳/۸\text{N}$$



۳ـ گزینه «۴» چون نیروی برشی عمودی است، بنابراین جریان برش در مقطع جدار نازک تولید نیروهای برشی داخلی مطابق شکل می‌کند. با گشتاورگیری این نیروها حول نقطه O خواهیم داشت:

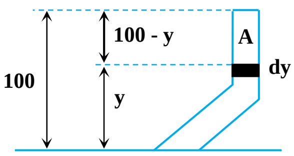
$$\sum M_O = ۲F_۱\times۵۰ = Ve \Rightarrow e = \frac{۱۰۰F_۱}{V}$$

ضخامت جداره مقطع داده نشده است، اما اگر آن را مساوی ۱mm در نظر بگیریم می‌توان مسئله را حل نمود. اما طبق شکل زیر عرض (افقی) مقطع در بخش مایل برابر $\sqrt{۲}$ می‌باشد.



$$I = ۲(\frac{۱}{۱۲}\times۱\times۵۰^{۳} + ۵۰\times۷۵^{۲}) + ۲(\frac{۱}{۱۲}\times\sqrt{۲}\times۵۰^{۳} + ۵۰\sqrt{۲}\times۲۵^{۲}) = ۷۰۱۱۸۴\text{mm}^{۴}$$

$$dF_۱ = \tau dA = \frac{VQ}{It}\times tdy = \frac{VQ}{I}dy$$



$$Q = ۱\times(۱۰۰-y)(y+\frac{۱۰۰-y}{۲}) = \frac{۱}{۲}(۱۰۰^{۲}-y^{۲})$$

$$F_۱ = \int_{۵۰}^{۱۰۰}\frac{V}{۲I}(۱۰۰^{۲}-y^{۲})dy = \frac{V}{۲\times۷۰۱۱۸۴}[۱۰۰^{۲}\times۵۰ - \frac{۱}{۳}(۱۰۰^{۳}-۵۰^{۳})]$$

$$\Rightarrow e = \frac{۱۰۰\times V\times۲۰۸۳۳۳}{۲\times۷۰۱۱۸۴\times V} = ۱۴/۸\text{mm}$$

۴ـ گزینه «۴» در صورتی که I_i ممان اینرسی هر بخش از جداره مقطع حول تار خنثی و x_i فاصله مرکز سطح هر بخش از جداره تا یک نقطه مشخص باشد، (که در این مسئله جان تیر می‌باشد) آنگاه می‌توان موقعیت مرکز برش را توسط رابطه زیر تعیین نمود:

$$e = \frac{\sum I_i x_i}{\sum I_i} = \frac{۲\times\frac{a}{۲}[\frac{۱}{۱۲}at^{۳} + (at)(\frac{۳}{۲}a)^{۲}] + ۲\times\frac{a}{۲}[\frac{۱}{۱۲}at^{۳} + (at)(\frac{a}{۲})^{۲}]}{\frac{۱}{۱۲}t(۳a)^{۳} + ۲[\frac{۱}{۱۲}at^{۳} + at(\frac{۳}{۲}a)^{۲}] + ۲[\frac{۱}{۱۲}at^{۳} + at(\frac{a}{۲})^{۲}]}$$

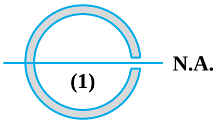
$$e = \frac{a\times\frac{۹}{۴}a^{۳}t + a\times\frac{a^{۳}t}{۴}}{\frac{۲۷a^{۳}t}{۱۲} + ۲\times\frac{۹}{۴}a^{۳}t + ۲\times\frac{۱}{۴}a^{۳}t} = \frac{\frac{۱۰}{۴}a^{۴}t}{\frac{۲۷+۵۴+۶}{۱۲}a^{۳}t} = \frac{۱۲۰}{۳۴۸}a \Rightarrow e = ۰/۳۴۴a$$

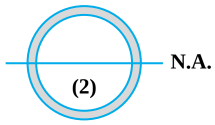
---

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۵ـ گزینه «۲» تنش برشی در هر دو مقطع در روی تار خنثی ماکزیمم می‌شود. بنابراین ممان استاتیک Q، سطح بالای تار خنثی برای هردو مقطع برابر است.





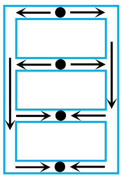
$$\tau_۱ = \frac{VQ_۱}{I_۱ t_۱} \qquad \tau_۲ = \frac{VQ_۲}{I_۲ t_۲}$$

از طرفی گشتاور سطح دوم، یا ممان اینرسی نیز برای هر دو مقطع مساوی است. بنابراین می‌توان نوشت: $Q_۱ = Q_۲ \quad ; \quad I_۱ = I_۲$

اما عرض مقطع در روی تار خنثی در مقطع (۲) دو برابر مقطع (۱) است چون برای جدا کردن مقطع لوله بدون درز نیاز است که از دو طرف مقابل، مقطع برش زده شود. این در حالی است که در مقطع جدار نازک درزدار تنها یک برش در سمت چپ کافی است. در نتیجه:

$$\frac{\tau_۱}{\tau_۲} = \frac{t_۲}{t_۱} = ۲$$

۶ـ گزینه «۳» در وسط اضلاع AB و CD و EF و GH تنش برشی مساوی صفر است. چرا که این نقاط واقع بر محور تقارن بوده و نیروی برشی نیز در راستای محور تقارن بر مقطع اعمال شده است.

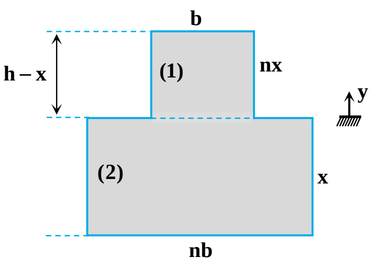


۷ـ گزینه «۳» تار خنثی در مقطع تیر، جدا کننده ناحیه کششی و فشاری مقطع تیر است. بنابراین با فرض اینکه پایین تار خنثی، تحت فشار باشد، باید آن قسمت از مقطع را با ضریب n گسترش داد. بنابراین برای تعیین موقعیت تار خنثی باید ممان استاتیک کل سطح، حول تار خنثی مساوی صفر قرار داده شود.

$$\frac{E_C}{E_t} = n$$

$$\Rightarrow \bar{y} = ۰ \Rightarrow \frac{A_۱ y_۱ + A_۲ y_۲}{A_۱ + A_۲} = ۰ \Rightarrow \frac{(h-x)b(\frac{h-x}{۲}) + (x)(nb)(-\frac{x}{۲})}{A_۱ + A_۲} = ۰ \Rightarrow (h-x)^۲ = nx^۲ \Rightarrow (h-x) = x\sqrt{n} \Rightarrow x = \frac{h}{۱+\sqrt{n}}$$

تنش برشی ماکزیمم در تار خنثی رخ می‌دهد $\Rightarrow \tau = \dfrac{VQ}{It} \quad (t = b)$



$$Q = A\bar{y} = b(h-x)\frac{(h-x)}{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_۱ = \dfrac{b(h-x)^۳}{۱۲} + b(h-x)(\dfrac{h-x}{۲})^۲ \quad \text{حول محور خنثی} \\ I_۲ = \dfrac{nbx^۳}{۱۲} + nbx(\dfrac{x}{۲})^۲ \quad \text{حول محور خنثی} \end{array}\right\} \Rightarrow I_{eq} = I_۱ + I_۲ = \frac{b(h-x)^۳}{۳} + \frac{nbx^۳}{۳}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{Vb\frac{(h-x)^۲}{۲}}{b(\frac{b(h-x)^۳}{۳} + \frac{bnx^۳}{۳})} = \frac{۳}{۲}\frac{V}{b}(\frac{(h-x)^۲}{(h-x)^۳ + nx^۳}) = \frac{۳}{۲}\frac{V}{b}(\frac{nx^۲}{nx^۳\sqrt{n} + nx^۳})$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{۳}{۲}\frac{V}{b}(\frac{۱}{x\sqrt{n} + x}) = \frac{۳}{۲}\frac{V}{b}\frac{۱}{x}(\frac{۱}{\sqrt{n}+۱}) = \frac{۳}{۲}\frac{V}{b}(\frac{۱+\sqrt{n}}{h}) \times (\frac{۱}{\sqrt{n}+۱}) \Rightarrow \tau = \frac{۳}{۲}\frac{V}{bh}$$

۸ـ گزینه «۴» اگر طول α برابر شود، M نیز α برابر می‌شود. چرا که M مقدار گشتاور خمشی ماکزیمم در تیر است که در تیر ساده با اعمال بار متمرکز در وسط آن، مقدار لنگر خمشی ماکزیمم برابر $\frac{PL}{۴}$ می‌باشد. از طرفی اگر ابعاد مقطع α برابر شود مدول مقطع $\alpha^۳$ برابر می‌شود. بنابراین:

$$\sigma_۱ = \frac{M}{S} \to \sigma = \frac{\alpha M}{\alpha^۳ S} = \frac{۱}{\alpha^۲}\frac{M}{S} = \frac{۱}{\alpha^۲}\sigma_۱$$

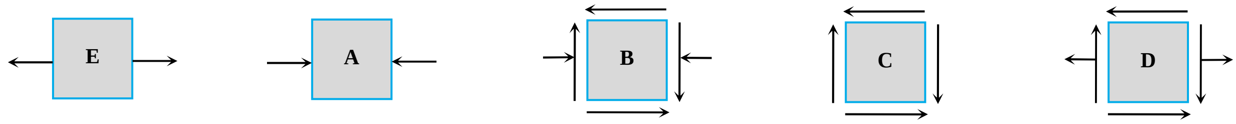
اما تنش برشی ماکزیمم برای مقطع مستطیل مساوی $\frac{۳}{۲}\frac{V}{A}$ بوده بنابراین با α برابر شدن تمامی ابعاد تیر می‌توان تغییرات تنش برشی را توسط رابطه روبرو به دست آورد:

$$\tau_{max_۱} = \frac{۳}{۲}\frac{V}{A} \to \tau_{max} = \frac{۳}{۲}\frac{V}{\alpha^۲ A} \Rightarrow \tau_{max_۲} = \frac{۱}{\alpha^۲}\tau_{max_۱}$$

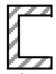
www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۹ـ گزینه «۴» شکل صحیح بارگذاری روی المان‌ها به صورت زیر است، در المان B تنش‌ها به شکل صحیح رسم نشده است، چون در این المان تنش قـائم در جهت y وجود ندارد. اما المان‌های E, A تنش‌ها به صورت صحیح نمایش داده شده است چرا که اگر المان‌ها مطابق شکل صورت مسئله دوران کنند بـه همان نتیجه موجود خواهند رسید.



(در المان D علاوه بر تنش قائم کششی، تنش برشی نیز وجود دارد)　(در المان C واقع بر روی تار خنثی، تنش برشی ماکزیمم است)　(در المان B علاوه بر تنش برشی، قائم فشاری نیز وجود دارد)　(در المان A تنها تنش قائم فشاری وجود دارد)　(در المان E تنها تنش قائم کششی وجود دارد)

۱۰ـ گزینه «۳» در مقطع  (ناودانی) مرکز برش سمت چپ جان قرار دارد و از طرفی در مقطع داده شده در این تست دو صـفحهٔ بـه بالهـای نـاودانی جوش شده است این باعث می‌شود که مرکز برش به سمت جان تیر حرکت کند. ولی چون اندازهٔ صفحات مساوی طول بال‌ها نیست، در نتیجه مرکـز بـرش مقطع همچنان در طرف چپ جان قرار دارد.

www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

پاسخنامه آزمون (۳)

۱ـ گزینه «۴»

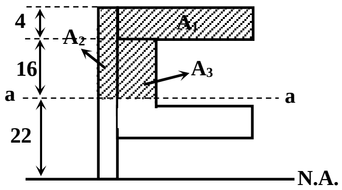
$$V_{max} = A_y = \frac{qL}{۲} \quad ; \quad M_{max} = \frac{qL^۲}{۸}$$

در مقطع مستطیلی: $\tau_{max} = \frac{۳}{۲}\frac{V_{max}}{A} = \frac{۳}{۲}\frac{\frac{qL}{۲}}{A} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{۳}{۴}\frac{qL}{bh}$ (۱)

در مقطع مستطیلی: $\sigma_{max} = \frac{MC}{I} = \frac{۶M_{max}}{Ah} = ۶\frac{\frac{qL^۲}{۸}}{bh^۲} = \frac{۳}{۴}\frac{qL^۲}{bh^۲}$ (۲)

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}} = \frac{L}{h} \Rightarrow L = h \times \frac{\sigma_w}{\tau_w}$$

۲ـ گزینه «۲»

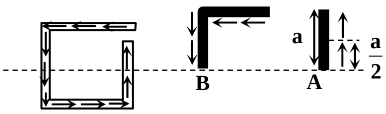


$$\tau = \frac{VQ}{It} = ۰/۰۱ \times \frac{۲(۲۴\times۴\times۴۰)+۲۰\times۴\times۳۲+۱۶\times۴\times۳۰\times۲}{۴} \Rightarrow \tau = ۳۵/۲\,MPa$$

Q سطح بالای مقطع $a-a$ حول تار خنثی با تفکیک سطح هاشور خورده به سه سطح قابل محاسبه است.

$$Q = ۲A_۱y_۱ + A_۲y_۲ + ۲A_۳y_۳$$

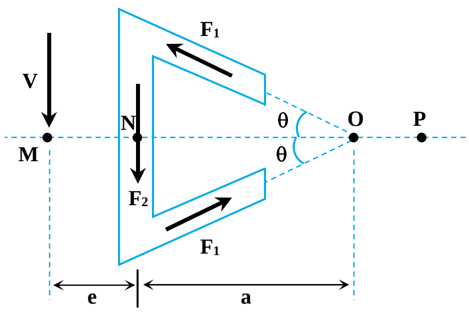
۳ـ گزینه «۲»



$$\frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{-Q_A}{Q_B} = \frac{-(at)\frac{a}{۲}}{(at)\frac{a}{۲}+(at)a} = \frac{-۱}{۳}$$

بخاطر اینکه مقطع جدار نازک باز می‌باشد، جهت جریان برش در مقاطع A و B مخالف یکدیگرند.

۴ـ گزینه «۱» اگر گشتاور حول O گرفته شود گشتاور نیروهای $F_۱$ مساوی صفر خواهد شد.



طبق معادله تعادل می‌توان نوشت:

$$\sum F_y = (\text{برش خارجی})\ V = (\text{برآیند برش داخلی})\ F_۲ - ۲F_۱\sin\theta$$

$$\Rightarrow F_۲ - V = ۲F_۱\sin\theta \quad (۱)$$

$$\sum M_O = F_۲\times a = V(a+e) \Rightarrow F_۲a - Va = Ve \Rightarrow (F_۲ - V)a = Ve \quad (۲)$$

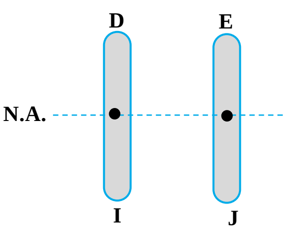
$$(۲),(۱) \Rightarrow e = \frac{۲F_۱\sin\theta a}{V}$$

عبارت به دست آمده برای e از رابطه فوق، یک مقدار مثبت می‌باشد. به عبارت دیگر مرکز برش سمت چپ جان تیر قرار دارد.

۵ـ گزینه «۱» با توجه به پاسخ مثال (۱۹) فصل پنجم درس‌نامه (۲) فاصله مرکز برش از مرکز جان مقطع قوطی جدار نازک باز برابر است با:

$$e = \frac{b(۲h+۳b)}{۲h+۶b} \xrightarrow{h=b} e = \frac{۵h}{۸}$$

۶ـ گزینه «۳» در نقاط واقع بر سطح آزاد مقطع مانند I ،A، J و H و نقطهٔ وسط شاخه DE واقع بر محور تقارن، تنش برشی مساوی صفر است. همچنین تنش برشی در جایی صفر می‌شود که Q مساوی صفر باشد، در چنین موقعیتی جریان برش نیز صفر خواهد شد. چون تار خنثی از وسط ارتفاع $(\bar{y} = \frac{h}{۲})$ می‌گذرد، بنابراین تنش برشی در نقاط E, D مساوی صفر می‌گردد. به عبارت دیگر برای محاسبه تنش برشی در نقاط E,D کافی است در این نقاط مقطع را برش زده سپس Q سطح جدا شده محاسبه شود. چون مرکز سطح جدا شده بر روی تار خنثی واقع است، بنابراین گشتاور اول سطح آن صفر بوده و در نتیجه تنش برشی در این نقاط صفر است: $\bar{y} = ۰ \Rightarrow Q_D = Q_E = ۰ \Rightarrow \tau_D = \tau_E = ۰$



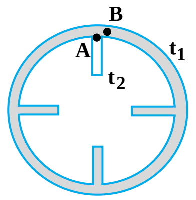
www.modaresanesharif.ac.ir

www.modaresanesharif.ac.ir

۷ـ گزینه «۴» بخشی از مقطع که وارد ناحیه پلاستیک شده است تنش برشی را نمی‌تواند تحمل کند، در نتیجه آن بخش از مقطع که هنوز در ناحیه الاستیک است تنش برشی را متحمل می‌شود. از طرفی تنش برشی ماکزیمم ناشی از نیروی برش در روی تار خنثی بوده و مساوی $\frac{۳}{۲}\frac{V}{A}$ است، در نتیجه:

(A' مساحت بخش الاستیک بوده که مساوی ۰/۷۵ از مساحت کل مقطع می‌باشد.) $\tau_{max} = ۱/۵\frac{V}{A'} = ۱/۵\frac{P}{۰/۷۵A} = ۲\frac{P}{A}$

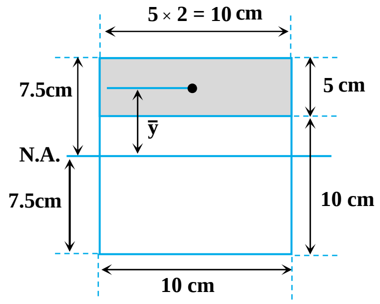
۸ـ گزینه «۱» برای τ_B باید زبانه‌ی بالا از دو قسمت برش بخورد تا جدا گردد، یا برش قائم در نقطه B و قرینه‌ی B نسبت به محور تقارن قائم بایستی برش بخورد بنابراین طول قسمت برش خورده برابر $۲t_۱$ بوده و مقدار تنش برشی در مقطع B برابر است با:



$$\tau_B = \frac{VQ_B}{I(۲t_۱)}$$

اما برای τ_A، با یک برش افقی در A زبانه بالا جدا می‌شود و تنش برشی در نقطه A برابر است با $\tau_A = \frac{VQ_A}{It_۲}$ و با صرف‌نظر از جملات $t^۲$ در محاسبه‌ی Q ها داریم: $Q_A = Q_B$. در نتیجه: $\frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{۲t_۱}{t_۲}$.

۹ـ گزینه «۱»



روش اول: چون جنس (۱) قوی‌تر می‌باشد، بنابراین سطح مقطع ماده (۱) به موازات تار خنثی با ضریب n افزایش می‌یابد. در این حالت مقطع گسترش یافته مانند یک مستطیل می‌شود که ممان اینرسی آن برابر است با:

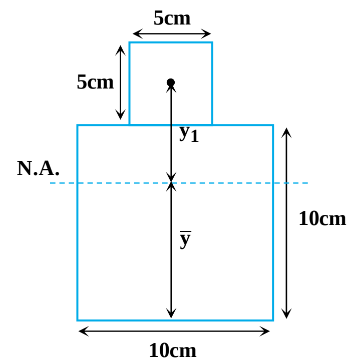
$$n = \frac{E_۱}{E_۲} = ۲$$

$$I = \frac{۱}{۱۲} \times ۱۰ \times ۱۵^۳ = ۲۸۱۲/۵cm^۴$$

سطح بالای فصل مشترک دو ماده را هاشور زده، سپس ممان استاتیک آن حول تار خنثی محاسبه می‌شود. در محاسبه تنش برشی در فصل مشترک دو ماده باید Q و I مربوط به سطح مقطع گسترش یافته محاسبه شود، در حالی که t بیانگر ضخامت واقعی قطعه در نقطه مورد نظر است.

$$Q = A\bar{y} = (۵\times۱۰)(۷/۵ - ۲/۵) = ۲۵۰\,cm^۳ \quad ; \quad \tau = \frac{VQ}{It} = \frac{۶۰۰۰\times۲۵۰}{۲۸۱۲/۵\times۵} = ۱۰۶/۶۶\frac{kg}{cm^۲}$$

روش دوم:



$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=۱}^{۲} y_i A_i E_i}{\sum_{i=۱}^{۲} A_i E_i} = \frac{۱۲/۵\times(۵\times۵)\times E_۱ + ۵\times(۱۰\times۱۰)\times E_۲}{۵\times۵\times E_۱ + ۱۰\times۱۰\times E_۲}$$

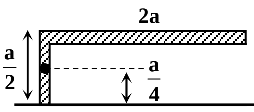
$$E_۱ = ۲E_۲$$

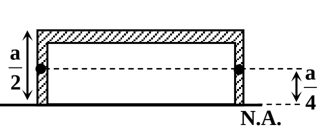
$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{۱۲/۵\times۵\times۵\times۲E_۲ + ۵\times۱۰\times۱۰\,E_۲}{۵\times۵\times۲E_۲ + ۱۰\times۱۰\,E_۲} = ۷/۵cm$$

اما تنش برشی در محل اتصال برابر می‌شود با:

$$\tau = \frac{VA_۱E_۱y_۱}{t\sum_{i=۱}^{۲}E_iI_i} = \frac{۶۰۰۰\times(۵\times۵)\times۲E_۲\times۵}{۵\times\left[۲E_۲\times(\frac{۱}{۱۲}\times۵^۴ + ۵^۲\times۵^۲) + E_۲(\frac{۱}{۱۲}\times۱۰^۴ + ۱۰\times۱۰\times۲/۵^۲)\right]} \Rightarrow \tau = ۱۰۶/۶\frac{kg}{cm^۲}$$

۱۰ـ گزینه «۴»





$$\frac{\tau_{max_۱}}{\tau_{max_۲}} = \frac{\frac{VQ_۱}{It_۱}}{\frac{VQ_۲}{It_۲}} = \frac{Q_۱/t_۱}{Q_۲/t_۲} = \frac{(۲at\times\frac{a}{۲} + \frac{a}{۲}t\times\frac{a}{۴})/t}{(۲at\times\frac{a}{۲} + ۲\times\frac{a}{۲}t\times\frac{a}{۴})/۲t} \Rightarrow \frac{\tau_{max_۱}}{\tau_{max_۲}} = ۱/۸$$

www.modaresanesharif.ac.ir