فصل اول

«آنالیز ترکیبی و احتمال»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل اول

۱ـ سه شخص A و B و C به هدفی تیراندازی می‌کنند. احتمال زدن به هدف این سه شخص به ترتیب $\frac{۱}{۶}$، $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۳}$ است. اگر بدانیم که فقط یک تیر به هدف خورده است احتمال آن که تیر شخص A به هدف خورده باشد برابر است با: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۷)

۱) $\frac{۳۱}{۷۲}$　۲) $\frac{۶}{۳۱}$　۳) $\frac{۱۰}{۳۱}$　۴) $\frac{۱۵}{۳۱}$

۲ـ ظرفی حاوی ۱۰ توپ سفید و ۱۰ توپ سیاه است. هر بار ۲ توپ به تصادف و بدون جایگذاری از ظرف بیرون می‌آوریم تا زمانی که همه توپ‌ها بیرون آورده شوند. احتمال آنکه در هر مرحله، یک توپ سفید و یک توپ سیاه بیرون آورده شود، کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{(۱۰!)^۲}{۲۰!}$　۲) $\frac{۲^{۱۰}(۱۰!)^۲}{۲۰!}$　۳) $\frac{۲^{۱۰}(۱۰!)}{۲۰!}$　۴) $\frac{(۱۰!)^۲}{۲^{۱۰}(۲۰!)}$

۳ـ یک سیستم کامپیوتری دارای سه بخش A,B,C است. احتمال آنکه A,B,C هر یک بدون خرابی به مدت ۱۰۰ ساعت کارکند به ترتیب ۹۰%، ۸۰% و ۷۰% است. احتمال آنکه C,B هر دو به مدت ۱۰۰ ساعت کار کنند، ۶۰% است. کارکرد بخش A مستقل از کارکرد بخش‌های C,B است. برای آنکه این سیستم کار کند باید بخش A و حداقل یکی از بخش‌های C,B کار کنند. در این صورت احتمال آنکه این سیستم بدون خرابی به مدت ۱۰۰ ساعت کار کند برابر است با : (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) ٪ ۶۸　۲) ٪ ۷۵　۳) ٪ ۸۱　۴) ٪ ۸۶

۴ـ احتمال اینکه فردی که دارای مدرک کارشناسی ارشد است در یک آزمون استخدامی قبول شود ۰/۴ است. احتمال اینکه فردی که استخدام می‌شود دارای مدرک کارشناسی ارشد باشد ۰/۳ است. احتمال اینکه در این جامعه آماری فردی دارای مدرک کارشناسی ارشد باشد ۰/۷ است. مطلوبست احتمال اینکه یک فرد قبول شود. (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)

۱) ٪۲۱　۲) $\frac{۲}{۳۰}$　۳) ۰/۲۸　۴) $\frac{۲۸}{۳۰}$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل اول

۱ـ گزینه «۲» E : فقط یک تیر به هدف خورده است؛　A : شخص A به هدف بزند. با یک مسئله بیز روبه‌رو هستیم:

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{P(A)\times P(E|A)}{P(A)\times P(E|A)+P(B)\times P(E|B)+P(C)\times P(E|C)}=\frac{\cancel{\frac{۱}{۳}}(\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۶}\times\frac{۳}{۴})}{\cancel{\frac{۱}{۳}}(\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۶}\times\frac{۳}{۴}+\frac{۲}{۳}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۳}{۴})}=\frac{۶}{۳۱}$$

۲ـ گزینه «۲» مراحل برداشت یک توپ سفید و یک توپ سیاه را نوشته و تا آخرین مرحله اجرا می‌کنیم. توجه کنید که برداشت توپها بدون جایگذاری می‌باشد:

$$\frac{\binom{۱۰}{۱}\binom{۱۰}{۱}}{\binom{۲۰}{۲}}\times\frac{\binom{۹}{۱}\binom{۹}{۱}}{\binom{۱۸}{۲}}\times\cdots\times\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۱}{۱}}{\binom{۲}{۲}}=\frac{۱۰^۲}{\frac{۲۰\times۱۹}{۲}}\times\frac{۹^۲}{\frac{۱۸\times۱۷}{۲}}\times\cdots\times\frac{۱^۲}{\frac{۲\times۱}{۲}}=\frac{(۱۰!)^۲}{\frac{۲۰!}{۲^{۱۰}}}=\frac{۲^{۱۰}(۱۰!)^۲}{۲۰!}$$

توجه کنید در هر مرحله برداشت، هم از توپ‌های سفید و هم از توپ‌های سیاه کاسته می‌شود. در مرحله اول یک توپ از ۱۰ توپ سفید $\binom{۱۰}{۱}$ و یک توپ از ۱۰ توپ سیاه خارج می‌کنیم $\binom{۱۰}{۱}$ و در حالت کل هم که ۲ توپ از کل توپها انتخاب می‌کنیم.

۳ـ گزینه «۳»

$$P(\text{احتمال کارکردن}) = P\big(A \cap (B \cup C)\big) = P(A) \times [P(B) + P(C) - P(B \cap C)] = ۰/۹ \times [۰/۸ + ۰/۷ - ۰/۶] = ۰/۸۱$$

۴ـ گزینه «۴» از رابطه احتمال شرطی استفاده می‌کنیم، ابتدا $P(B \cap A)$ را به دست می‌آوریم، چرا که داده‌های مسئله به صورت زیر است:

$P(A) = ۰/۷$

$P(B|A) = ۰/۴$

$P(A|B) = ۰/۳$

$P(B) = ?$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = \frac{۲۸}{۱۰۰}$$

اکنون در رابطه شرطی $P(A|B)$ استفاده می‌کنیم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{۳}{۱۰} = \frac{\frac{۲۸}{۱۰۰}}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{۲۸}{۳۰}$$

فصل دوم

«متغیرهای تصادفی»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل دوم

۱ـ اگر Y یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f_Y(y)=\begin{cases}0/2 & -1<y\le 0\\ 0/2+Cy & 0<y\le 1\\ 0 & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$ باشد، مقدار ثابت C کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)

۱) $-0/4$ ۲) 0 ۳) $0/4$ ۴) $1/2$

۲ـ اگر چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت $0<x<\infty$ ، $0<y<\infty$ ؛ $f_{(X,Y)}(x,y)=\dfrac{e^{-x/y}.e^{-y}}{y}$ باشد، مقدار $E(X\,|\,Y=y)$ کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)

۱) y ۲) $\dfrac{1}{y}$ ۳) y^2 ۴) $\dfrac{1}{y^2}$

۳ـ تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی Y,X به صورت $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}6x & 0<x<y<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$ زیر مفروض است. در اینصورت، مقدار $P(X+Y<1)$ کدام است؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\dfrac{3}{4}$ ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) $\dfrac{1}{3}$ ۴) $\dfrac{1}{4}$

۴ـ متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال زیر است: $f(x)=\begin{cases}ax+bx^2 & , 0\le x\le 1\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$ اگر بدانیم $E(X)=0/6$، آنگاه احتمال $P(X<0/5)$ کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

۱) $0/3$ ۲) $0/35$ ۳) $0/4$ ۴) $0/45$

۵ـ فرض می‌کنیم X و Y متغیرهای تصادفی مستقل بوده و هر کدام به طور یکنواخت بر بازهٔ $[0,2]$ توزیع شده باشند و $Z=Y-X$ و $A=\{|Y-X|\le 1\}$، در این صورت $P(A\,|\,X=1)$ و $f_{Z/X}(0\,|\,1)$ و $F_{Z/X}(0\,|\,1)$ به ترتیب برابرند با:

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

۱) $\dfrac{3}{4}$، 1، $\dfrac{1}{2}$ ۲) 1، 0، 1 ۳) 1، $\dfrac{1}{2}$، $\dfrac{1}{2}$ ۴) 1، 0، $\dfrac{1}{2}$

۶ـ چگالی احتمال مشترک دو متغیر تصادفی X و Y به صورت روبه‌رو تعریف شده است. $f(x,y)=\begin{cases}8xy & , 0\le x\le y\le 1\\ 0 & , \text{در غیر این صورت}\end{cases}$، مقدار $COV(X,Y)$ کدام است؟

(معدن ـ سراسری ۸۶)

۱) $\dfrac{8}{225}$ ۲) $\dfrac{4}{225}$ ۳) $\dfrac{2}{225}$ ۴) صفر

۷ـ اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}k & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{در سایر جاها}\end{cases}$ باشد، مقدار k کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۸)

۱) $\dfrac{1}{2}$ ۲) $\dfrac{1}{\pi}$ ۳) $\dfrac{2}{\pi}$ ۴) 1

۸ـ اگر $X_1,X_2,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی $(n\ge 30)$ از جامعه‌ای با تابع مولد گشتاور $M_X(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2t}};(t<\dfrac{1}{2})$ باشد، آنگاه میانگین و واریانس متغیر تصادفی $\bar{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$ کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۸)

۱) $\sigma_{\bar{X}}^2=\dfrac{1}{n}\,,\,\mu_{\bar{X}}=1$ ۲) $\sigma_{\bar{X}}^2=\dfrac{2}{n}\,,\,\mu_{\bar{X}}=1$ ۳) $\sigma_{\bar{X}}^2=\dfrac{2}{n}\,,\,\mu_{\bar{X}}=n$ ۴) $\sigma_{\bar{X}}^2=\dfrac{2}{n}\,,\,\mu_{\bar{X}}=\dfrac{1}{n}$

۹ـ در صورتی که دو دپوی معدنی با مشخصات زیر را با هم مخلوط نماییم (بدون همگن‌سازی) میانگین و واریانس دپوی حاصل به ترتیب چقدر است؟

ـ دپوی اول: ۵۰۰ تن، میانگین عیار ۶ درصد و واریانس عیار ۶

ـ دپوی دوم: ۱۰۰۰ تن، میانگین عیار ۳ درصد و واریانس عیار ۶ (معدن ـ سراسری ۸۹)

۱) ۶،۴ ۲) ۸،۴ ۳) ۱۲،۴ ۴) ۶,۴/۵

۱۰ـ اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با میانگین ۲ و انحراف معیارهای به ترتیب ۲ و ۳ باشند، مقدار $E[(X+Y)(X-Y)]$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) ۵- ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۵

۱۱ـ فرض کنید تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر باشد:

$$f(x,y)=\begin{cases} ۶(۱-x-y) & ۰<y<۱-x,\ x>۰ \\ ۰ & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار $f(X\mid Y=y)$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۹۰)

۱) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{۶(۱-x-y)}{(۱-x)(۱-y)} & ۰<y<۱-x \\ ۰ & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$

۲) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{۶(۱-x-y)}{(۱-x)(۱-y)} & ۰<x<۱-y \\ ۰ & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$

۳) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{۲(۱-x-y)}{(۱-x)^۲} & ۰<y<۱-x \\ ۰ & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$

۴) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{۲(۱-x-y)}{(۱-y)^۲} & ۰<x<۱-y \\ ۰ & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$

۱۲ـ تابع چگالی احتمال یک قطعه الکترونیکی بر حسب ساعت به صورت $f(x)=\begin{cases} \dfrac{C}{x^۲} & x>۱۰ \\ ۰ & x\le ۱۰ \end{cases}$ است. احتمال آنکه از ۶ قطعه‌ی الکترونیکی حداکثر ۲ قطعه برای حداقل ۱۵ ساعت کار کنند (با فرض مستقل بودن پیشامد خراب شدن قطعات) کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۴)

۱) $\dfrac{۶۰}{۳^۶}$ ۲) $\dfrac{۷۳C}{۳^۶}$ ۳) $\dfrac{۷۳}{۳^۶}$ ۴) $\dfrac{۶۰C}{۳^۶}$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل دوم

۱ـ گزینه «۴» طبق خاصیت تابع چگالی احتمال باید انتگرال این تابع برابر با ۱ شود. توجه کنید که تابع دو ضابطه‌ای است:

$$f(y)=\begin{cases} ۰/۲ & -۱<y\le ۰ \\ ۰/۲+Cy & ۰<y\le ۱ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases} \Rightarrow \int_{-۱}^{۰} ۰/۲dy+\int_{۰}^{۱}(۰/۲+Cy)\,dy=۱ \Rightarrow [۰/۲y]_{-۱}^{۰}+\left[۰/۲y+\frac{Cy^۲}{۲}\right]_{۰}^{۱}=۱$$

$$\Rightarrow ۰/۲+(۰/۲+\frac{C}{۲})=۱ \Rightarrow C=۱/۲$$

۲ـ گزینه «۱» ابتدا چگالی شرطی $x|y$ را به دست می‌آوریم. توجه کنید که مخرج تابع چگالی کناری Y است که باید جداگانه محاسبه کنیم:

$$f(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{\dfrac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}}{\int_{۰}^{\infty} f(x,y)dx}=\frac{\dfrac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}}{e^{-y}}=\frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}$$

$$f_y(y)=\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-\frac{x}{y}}.e^{-y}}{y}dx=e^{-y}\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx=e^{-y}(-\int_{۰}^{\infty}-\frac{۱}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx)=e^{-y}(-e^{-\frac{x}{y}}|_{۰}^{\infty})=e^{-y}(۰-(-۱))=e^{-y}$$

اکنون از فرمول امید ریاضی شرطی استفاده می‌کنیم:

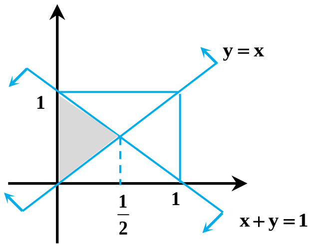
$$E(X|Y)=\int_0^\infty xf(x|y)dx=\underbrace{\int_0^\infty \frac{x}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx}_{\text{انتگرال‌گیری جزء به جزء}}=\begin{cases}u=x\to du=dx\\ -\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx=dv\to v=e^{-\frac{x}{y}}\end{cases}\to uv-\int vdu=y$$

۳ـ گزینه «۴» برای محاسبه احتمال باید روی فضای تابع چگالی احتمال، فضای احتمال را مشخص کنیم. به کران‌های انتگرال دوگانه دقت کنید:

$$f(x,y)=\begin{cases}6x & 0<x<y<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$P(X+Y<1)=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_x^{1-x}6xdydx=\int_0^{\frac{1}{2}}6x(1-2x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(6x-12x^2)dx=3x^2-4x^3\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$



نقطه تلاقی $x=1-x\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

۴ـ گزینه «۲» طبق خاصیت تابع چگالی احتمال مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$\int_0^1(ax+bx^2)dx=1\Rightarrow\left[\frac{ax^2}{2}+\frac{bx^3}{3}\right]_0^1=1\Rightarrow 3a+2b=6$$

$$E(X)=\int_0^1 x(ax+bx^2)dx=0.6\Rightarrow\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^4}{4}\right]_0^1=0.6\Rightarrow 4a+3b=7.2\xrightarrow[\text{و دو مجهول}]{\text{از حل دو معادله}}a=3.6\,,\,b=-2.4$$

اکنون روی فاصله خواسته شده انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$P(X<0.5)=\int_0^{0.5}(3.6x-2.4x^2)dx=\left[\frac{3.6x^2}{2}-\frac{2.4x^3}{3}\right]_0^{0.5}=0.35$$

۵ـ گزینه «۳» متغیرهای تصادفی X و Y مستقل بوده و هرکدام دارای توزیع یکنواخت در فاصله $[0,2]$ هستند:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0<x<2\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}=F(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & 0<x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}\quad \text{و}\quad f(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0<y<2\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}=F(y)=\begin{cases}\frac{y}{2} & 0<y<2\\ 1 & y\ge 2\end{cases}$$

مستقل‌اند $Y,X\Rightarrow f(x,y)=f(x).f(y)$

$$\Rightarrow f(x,y)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow F(x,y)=\int_0^x\int_0^y\frac{1}{4}dydx=\frac{xy}{4}$$

اکنون به ترتیب مقادیر احتمال شرطی $P(A|X=1)$ و $f_{Z|X}(0,1)$ و $F_{Z||X}(0|1)$ را به دست می‌آوریم:

$$1)\ P(A|X=1)=P(|Y-X|\le 1|X=1)=P(|y-1|\le 1)=P(0<y<2)=\int_0^2\frac{1}{2}dy=\frac{y}{2}\Big|_0^2=1$$

$$2)f_{Z|X}(0|1)=\frac{f(Z=0,X=1)}{f(X=1)}\;\underline{\underline{Z=Y-X}}\;\frac{f(X=Y=1)}{f(X=1)}=\frac{\frac{1}{4}\Big|_{x=y=1}}{\frac{1}{2}\Big|_{x=1}}=\frac{1}{2}$$

$$3)F_{z|x}(0|1)=\frac{F(z=0|x=1)}{F(x=1)}=\frac{F(x=y=1)}{F(x=1)}=\frac{\frac{xy}{4}\Big|_{x=y=1}}{\frac{x}{2}\Big|_{x=1}}=\frac{y}{2}\Big|_{x=y=1}=\frac{1}{2}$$

۶ـ گزینه «۲» توجه کنید که متغیرها پیوسته‌اند. برای به‌دست آوردن $E(X)$ و $E(Y)$ ابتدا چگالی‌های حاشیه‌ای X و Y را به‌دست می‌آوریم:

$$f_X(x)=\int_x^1 8xy\,dy=4xy^2\Big|_x^1=4x(1-x^2)\qquad ;\qquad 0<x<1$$

$$\Rightarrow E(X)=\int_0^1 4x^2(1-x^2)dx=\frac{4}{3}x^3-\frac{4}{5}x^5\Big|_0^1=\frac{4}{3}-\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$$

$$f_Y(y)=\int_0^y 8xy\,dx=4x^2y\Big|_0^y=4y^3\qquad ;\qquad 0<y<1\qquad \Rightarrow E(Y)=\int_0^1 4y^4dy=\frac{4}{5}y^5\Big|_0^1=\frac{4}{5}$$

حال نوبت محاسبه $E(XY)$ است.

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^y 8x^2y^2dx\,dy=\int_0^1 \frac{8}{3}x^3\Big|_0^y y^2dy=\int_0^1\frac{8}{3}y^5dy=\frac{8}{3}.\frac{y^6}{6}\Big|_0^1=\frac{8}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{4}{9}$$

مقادیر به دست آمده را در فرمول کوواریانس قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{9}-(\frac{8}{15}\times\frac{4}{5})=\frac{4}{225}$$

۷ـ گزینه «۲» با توجه به خاصیت مهم تابع چگالی توأم $\iint f(x,y)dxdy=1$ بنابراین:

$$x^2+y^2\le 1$$

$$\iint k\,dx\,dy=1\to k\iint dx\,dy=1\to k\times\pi\times 1^2=1\qquad k=\frac{1}{\pi}$$

$$x^2+y^2\le 1\qquad \underbrace{x^2+y^2\le 1}_{\text{مساحت کل دایره‌ای به شعاع ۱}}$$

۸ـ گزینه «۲» با توجه به رابطه بین مولد گشتاور و گشتاورها خواهیم داشت.

برای محاسبه σ^2 باید $E(X^2)$ و $E(X)$ را داشته باشیم:

$$E(\bar{X})=\mu\qquad\qquad Var(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$$

هر بار که از تابع مولد گشتاور مشتق‌گیری کنیم گشتاور مرتبه مشتق داده می‌شود. اگر یک بار مشتق بگیریم و $t=0$ باشد گشتاور اول یا همان $E(X)$ داده می‌شود و ...

$$\mu'_X(t)\Big|_{t=0}=E(X)=\mu=\frac{+1}{\sqrt{1-2t}}\Big|_{t=0}=1$$

$$\mu''_X(t)\Big|_{t=0}=E(X^2)\Rightarrow\sigma^2=E(X^2)-(E(X))^2=3-1=2\Rightarrow Var(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{2}{n}$$

۹ـ گزینه «۲» از میانگین و واریانس ادغام شده استفاده می‌کنیم.

اگر μ_1 میانگین جامعه اول و μ_2 میانگین جامعه دوم N_1 مقدار جامعه اول و N_2 مقدار جامعه دوم σ_1^2 واریانس جامعه اول و σ_2^2 واریانس جامعه دوم باشد:

$$\mu_{\text{کل}}=\frac{N_1\mu_1+N_2\mu_2}{N_1+N_2}=\frac{500\times6+1000\times3}{500+1000}=\frac{6000}{1500}=4$$

$$\sigma^2_{\text{کل}}=\frac{\sum N_i\sigma_i^2}{N}+\frac{\sum N_i(\mu_i-\mu)^2}{N}=\frac{500\times6+1000\times6}{1500}+\frac{500(6-4)^2+1000(3-4)^2}{1500}=\frac{9000}{1500}+\frac{2000+1000}{1500}=6+2=8$$

۱۰ـ گزینه «۱» **یادآوری:** اگر X و Y مستقل باشند آنگاه $E(XY)=E(X).E(Y)$ می‌باشد.

یادآوری: $Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

برای به دست آوردن مقدار $E((X+Y)(X-Y))$ ابتدا پرانتزها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$E(X^2-XY+YX-Y^2)\xrightarrow[\text{عملگر خطی است}]{\text{امید ریاضی یک}}E(X^2)-E(\cancel{XY})+E(\cancel{YX})$$

$$-E(Y^2)=(Var(X)+(E(X)^2))-(Var(Y)+(E(Y))^2)=(4+(2)^2)-(9+(2)^2)=8-13=-5$$

۱۱ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. طبق فرمول چگالی احتمال شرطی $f(X\mid Y=y)=\dfrac{f(x,y)}{f_y(y)}$ می‌باشد، بنابراین برای مخرج این کسر باید کناری y را به دست آوریم که چگالی احتمال کناری y به صورت روبه‌رو به دست می‌آید: $f_y(y)=\int f(x,y)dx$

اما توجه کنید که کران‌های x و y به هم وابسته‌اند و تغییرات x به تغییرات y بستگی دارد (برای کران انتگرال)

$$\begin{cases} 0<y<1-x \\ x>0 \end{cases} \to 0<x<1-y$$

بنابراین تابع چگالی احتمال متغیر y به صورت مقابل به دست می‌آید: $f_y(y)=\int_0^{1-y} 6(1-x-y)dx = 6\int_0^{1-y}(1-x-y)dx$

$$6(x-\frac{x^2}{2}-yx\,|_0^{1-y})=6(1-y-\frac{(1-y)^2}{2}-y(1-y))=6\times\frac{2-2y-y^2+2y-1-2y+2y^2}{2}=6\times\frac{y^2-2y+1}{2}=6\times\frac{(y-1)^2}{2}=3(y-1)^2$$

اکنون این چگالی را در مخرج کسر فرمول چگالی شرطی قرار می‌دهیم: $f(X\mid Y=y)=\dfrac{6(1-x-y)}{3(y-1)^2}=\dfrac{2(1-x-y)}{(y-1)^2}$

به نظر می‌رسد با کمی اغماض گزینه (۴) صحیح باشد.

۱۲ـ گزینه «۳» ابتدا مقدار مجهول را به دست می‌آوریم. دقت کنید گزینه‌هایی که برحسب C می‌باشند نادرست هستند.

طبق خاصیت تابع چگالی احتمال: $\int f(x)dx=1$

$$\int_{10}^{\infty}\frac{c}{x^2}dx=\int_{10}^{\infty}cx^{-2}dx=1\Rightarrow -cx^{-1}\Big|_{10}^{\infty}=1\Rightarrow \frac{c}{10}=1\Rightarrow c=10$$

$$P=P(\text{حداقل ۱۵ساعت})=\int_{15}^{\infty}\frac{10}{x^2}dx=\frac{-10}{x}\Big|_{15}^{\infty}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

اکنون با یک متغیر دوجمله‌ای به صورت $Y\sim Bin(6,p)$ روبه‌رو هستیم.

$$P(Y\le 2)=P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)=\binom{6}{0}(\frac{2}{3})^0(\frac{1}{3})^6+\binom{6}{1}\cdot(\frac{2}{3})^1(\frac{1}{3})^5+\binom{6}{2}\cdot(\frac{2}{3})^2\cdot(\frac{1}{3})^4=\frac{1}{3^6}+\frac{12}{3^6}+\frac{60}{3^6}=\frac{73}{3^6}$$

فصل سوم

«توزیع‌های احتمال خاص»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل سوم

۱ـ فرض کنید X_1, X_2, X_3, X_4 نمونه تصادفی از یک توزیع نرمال با میانگین ۱۰ و واریانس ۹ و Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 نیز نمونه تصادفی از یک توزیع نرمال دیگر با میانگین ۳ و واریانس ۴ باشند (دو توزیع مستقل از هم فرض می‌شوند). اگر $\bar{x}$ و $\bar{y}$ به ترتیب میانگین‌های نمونه‌های فوق باشند، در این صورت $P(\bar{X} > 2\bar{Y})$ برابر است با: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) $\int_{-\infty}^{1/6} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$
۲) $\int_{-\infty}^{-0/6} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$
۳) $\int_{-\infty}^{0/6} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$
۴) $\int_{-\infty}^{-1/6} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$

۲ـ چگالی احتمال متغیرهای تصادفی مستقل از هم X و Y به‌صورت $f_2(y) = \begin{cases} 3e^{-3y} & y \ge 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$ و $f_1(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ است. چگالی احتمال مجموع آنها یعنی $Z = X + Y$ چیست؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $f_3(z) = \begin{cases} 6(e^{-2z} - e^{-3z}) & z \ge 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$
۲) $f_3(z) = \begin{cases} 2e^{-2z} - 3e^{-3z} & z \ge 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$
۳) $f_3(z) = \begin{cases} 6(e^{-3z} - e^{-2z}) & z \ge 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$
۴) $f_3(z) = \begin{cases} 6(e^{-3z} + e^{-3z}) & z \ge 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$

۳ـ اگر $X \sim N(1,4)$ و $Y \sim N(1,9)$، و X و Y مستقل باشند، آنگاه به ازای کدام مقدار a، رابطه زیر برقرار است؟

$$P(2X + Y \le a) = P(4X - 2Y \ge 4a)$$

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{4}{3}$
۴) ۰

۴ـ فرض کنید X یک متغیر تصادفی با چگالی $0 < x < 1$ ؛ $f(x) = 2x$ و $0 < c < 1$ عدد ثابتی باشد. $E[\max(X,c)]$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{2}{3}c^3$
۲) $\frac{2}{3}(1 - c^3)$
۳) $\frac{1}{3}(c^3 - 2)$
۴) $\frac{1}{3}(c^3 + 2)$

۵ـ اگر X و Y دو متغیر تصادفی نمایی مستقل با میانگین‌های به ترتیب $\frac{1}{\mu_1}$ و $\frac{1}{\mu_2}$ باشند، آنگاه توزیع متغیر تصادفی $Z = \min(X, Y)$ و میانگین آن به ترتیب عبارت خواهد بود از: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

۱) نمایی و $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$
۲) نمایی و $\frac{1}{\mu_1 + \mu_2}$
۳) ارلانگ مرتبه ۲ و $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$
۴) ارلانگ مرتبه ۲ و $\frac{1}{\mu_1 + \mu_2}$

۶ـ فرض کنید که طول عمر یک دستگاه (برحسب روز) متغیر تصادفی گسسته‌ای با تابع احتمال روبه‌رو باشد. $f(x) = \frac{1}{51}, x \in \{0, 1, \dots, 50\}$

اگر بدانیم که این دستگاه ۱۵ روز کار کرده است، میانگین عمر باقیمانده آن کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)

۱) ۱۸/۵
۲) ۱۹/۵
۳) ۱۹
۴) ۱۸

۷ـ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y هر دو دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(0,1)$ و مستقل از هم باشند. اگر تعریف کنیم $Z = X + Y$، $V = X - Y$ آنگاه $Cov(Z, V)$ چقدر است؟ (معدن ـ سراسری ۸۸)

۱) -1
۲) ۰
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۱

۸ـ متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $f_X(x)=\begin{cases}2x & ; 0\le x\le 1\\ 0 & ;\end{cases}$ است. اگر از این متغیر تصادفی مقدار x مشاهده شود و عدد تصادفی Y با توزیع یکنواخت در فاصله $[0,x]$ انتخاب شود، تابع چگالی احتمال y، یعنی $f_Y(y)$ چگونه است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۹)

۱) $1 \;;\; 0\le y\le 1$
۲) $2 \;;\; 0\le y\le x$
۳) $\frac{1}{x} \;;\; 0\le y\le 1$
۴) $2(1-y) \;;\; 0\le y\le 1$

۹ـ در میان ۱۰۰ تراشه تولیدی ۴ تراشه معیوب است. یک نمونه تصادفی ۱۰ تایی، بدون جایگذاری از این تراشه‌ها انتخاب می‌کنیم. احتمال تقریبی اینکه یک تراشه معیوب در نمونه انتخابی باشد کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{5}{2}(\frac{24}{25})^3$
۲) $\frac{3\times 2^{10}}{5^7}$
۳) $(\frac{24}{25})^3$
۴) $\frac{2^{10}}{5^7}$

۱۰ـ فرض کنید T یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد. اگر $N(t)$ یک متغیر تصادفی با توزیع $P(\lambda t)$ باشد، با فرض استقلال T و $N(T)$، مقدار $V(N(T))$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) λt
۲) $\mu\lambda$
۳) $\lambda\sigma^2$
۴) $\mu\lambda+\lambda^2\sigma^2$

۱۱ـ تابع چگالی احتمال طول عمر یک قطعه الکترونیکی برحسب ساعت به‌صورت روبه‌رو است:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{10}{x^2} & 10<x<\infty\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

احتمال اینکه از ۶ قطعه الکترونیکی لااقل ۳ تا برای حداقل ۱۵ ساعت کار کنند، کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{72}{739}$
۲) $1-\frac{73}{729}$
۳) $\frac{73}{729}$
۴) $1-\frac{72}{739}$

۱۲ـ یک ذره واقع در مبدأ با احتمال $q=1-p, p$ روی محور x به ترتیب یک واحد به راست یا به چپ حرکت می‌کند. احتمال اینکه پس از $2k$ بار حرکت $2n$ واحد از مبدأ دور شده باشد $(k\ge n)$ برابر است با: (مهندسی برق ـ سراسری ۹۱)

۱) $c_{2k}^{k+n}p^{k-n}q^{k+n}$
۲) $c_{2k}^{2n}(p^{2n}+q^{2n})$
۳) $c_{2k}^{k+n}p^{k+n}q^{k-n}$
۴) $c_{2k}^{k+n}p^{k-n}q^{k-n}(p^{2n}+q^{2n})$

۱۳ـ فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $E(1)$ باشد، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $W=\min(X_1,X_2,\dots,X_n)$ کدام است؟ (اگر $X\sim E(\lambda)$، آنگاه $x>0$ و $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$). (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)

۱) $U(1,e)$
۲) $E(\frac{1}{n})$
۳) $E(1)$
۴) $E(n)$

۱۴ـ در یک جعبه ۱۶ مهره قرمز با شماره‌های ۱ تا ۱۶ و ۴ مهرهٔ سفید با شماره‌های ۱ تا ۴ قرار دارد. یک مهره را به تصادف از جعبه خارج می‌کنیم. اگر رنگ آن سفید نباشد یا شماره آن یک نباشد. آن را به جعبه برمی‌گردانیم. آزمایش را آنقدر تکرار می‌کنیم تا مهرهٔ بیرون آمده سفید یا شمارهٔ آن ۱ باشد. متغیر تصادفی X را مساوی تعداد دفعات آزمایش فرض کنید. احتمال $p\{x=n\}$ برای $n=1,2,3,\cdots$ چقدر است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۳)

۱) $(\frac{1}{2})^n$
۲) $\frac{5}{8}(\frac{3}{8})^{n-1}$
۳) $\frac{1}{3}(\frac{3}{4})^n$
۴) $\frac{1}{8}(\frac{3}{8})^{n-1}+\frac{1}{16}(\frac{7}{8})^{n-1}$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل سوم

۱ـ گزینه «۱» باتوجه به اینکه $\bar{X} \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ بنابراین می‌توانیم درمورد $\bar{y}$ نیز بنویسیم، $\bar{Y} \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$.
باید متغیر $\bar{x}-2\bar{y}$ را استاندارد کنیم، بنابراین میانگین و واریانس این متغیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\bar{X} \sim N(10,\frac{9}{4}) \;;\; \bar{Y} \sim N(3,\frac{4}{4}) \Rightarrow P(\bar{X} > 2\bar{Y}) = P(\bar{X}-2\bar{Y} > 0)$$

$$\mu_{\bar{x}-2\bar{y}} = \mu_{\bar{x}} - 2\mu_{\bar{y}} = 10-6 = 4 \qquad \sigma^2_{\bar{x}-2\bar{y}} = \sigma^2_{\bar{x}} + 4\sigma^2_{\bar{y}} = \frac{25}{4}$$

اکنون استاندارد می‌کنیم:

$$P(\bar{x}-2\bar{y} > 0) = P(Z > \frac{-4}{\frac{5}{2}}) = P(Z > -\frac{8}{5}) = P(Z < \frac{8}{5}) = \int_{-\infty}^{1.6} f(z)dz$$

۲ـ گزینه «۱» باتوجه به فرمول گفته شده در متن خواهیم داشت:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy = \int_0^z 3e^{-3(z-x)} \times 2e^{-2x}dx = 6\int_0^z e^{-3z}e^{x}dx = 6e^{-3z}e^{x}\Big|_0^z = 6e^{-3z}(e^z-1) = 6(e^{-2z}-e^{-3z})$$

۳ـ گزینه «۳» توجه کنید که $4x-2y$ و $2x+y$ ترکیب خطی از توزیع نرمال هستند؛ بنابراین باز هم توزیع آن نرمال است. واریـانس و میـانگین آنهـا را جداگانه محاسبه کرده و آنها را استاندارد می‌کنیم:

$$P(2x+y \le a) = P(4x-2y \ge 4a) \xrightarrow{\text{استاندارد می‌کنیم}} P(z < \frac{a-\mu_{2x+y}}{\sigma_{2x+y}}) = P(z > \frac{4a-\mu_{4x-2y}}{\sigma_{4x-2y}})$$

از تقارن نرمال استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow P(z < \frac{a-3}{5}) = P(z > \frac{4a-2}{10}) \Rightarrow \frac{a-3}{5} = -\frac{4a-2}{10} \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} \mu_{2x+y} = 2\mu_x + \mu_y = 3 \\ \sigma^2_{2x+y} = 4\sigma^2_x + \sigma^2_y = 25 \\ \sigma_{2x+y} = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu_{4x-2y} = 4\mu_x - 2\mu_y = 2 \\ \sigma^2_{4x-2y} = 16\sigma^2_x + 4\sigma^2_y = 100 \\ \sigma_{4x-2y} = 10 \end{cases}$$

۴ـ گزینه «۴» ابتدا تابع $\max(x,c)$ را به‌صورت زیر بازمی‌نویسیم؛ چرا که اگر $x \ge c$ بزرگ‌تر باشد ایـن تـابع برابـر بـا x خواهـد شـد و اگـر $x < c$ باشـد $\max(x,c)$ برابر با c خواهد شد بنابراین:

$$k = \max(x,c) = \begin{cases} x & x \ge c \\ c & x < c \end{cases}$$

اما توجه کنید که متغیر تصادفی $0 < x < 1$ می‌باشد و همچنین $0 < c < 1$ بنابراین:

$$k = \begin{cases} x & c < x < 1 \\ c & 0 < x < c \end{cases} \Rightarrow E(k) = \int_c^1 x.f(x)dx + \int_0^c c.f(x)dx = \int_c^1 x.2xdx + \int_0^c c.2xdx = \int_c^1 2x^2dx + \int_0^c 2cxdx$$

$$= \frac{2x^3}{3}\Big|_c^1 + \frac{\cancel{2}cx^2}{\cancel{2}}\Big|_0^c = \frac{2}{3}(1-c^3) + c.(c^2-0) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}c^3 + c^3 = \frac{1}{3}c^3 + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(c^3+2)$$

۵ـ گزینه «۲» از روش تابع توزیع استفاده می‌کنیم ابتدا تابع توزیع را به‌دست آورده سپس مشتق گرفته تابع چگالی را محاسبه می‌کنیم:

$$F_Z(Z) = p(Z \le Z) = p(\min(X,Y) \le Z) = 1 - p(\min(X,Y) \ge Z) = 1 - p(X \ge Z, Y \ge Z)$$

$$= 1 - p(X \ge Z).p(Y \ge Z) = 1 - [(1-F_X(Z))(1-F_Y(Z))] = 1 - [(1-[1-e^{-\mu_1 z}])(1-[1-e^{-\mu_2 z}])] = 1 - [e^{-(\mu_1+\mu_2)z}] \Rightarrow \lambda = \mu_1 + \mu_2$$

$$\Rightarrow \; f_Z(Z) = (\mu_1+\mu_2).e^{-(\mu_1+\mu_2)z} \sim \exp(\frac{1}{\mu_1+\mu_2})$$

۶ـ گزینه «۴» اگر طول عمر این متغیر برحسب روز ۰ تا ۵۰ در نظر گرفته شود و این دستگاه ۱۵ روز کار کرده باشد، یعنی شما ۱۵ روز کارکرد را نباید در نظر بگیرید. پس ۱۵ روز از ۵۰ روز کارکرد را در نظر نمی‌گیریم در نتیجه طول عمر باقیمانده $۵۰ - ۱۵ = ۳۵$ روز است که تابع احتمال آن می‌تواند به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \frac{۱}{۳۵} \qquad x = ۱, ۲, \dots ۳۵$$

اکنون با یک تابع احتمال یکنواخت گسسته روبه‌رو هستیم که می‌دانیم امید ریاضی این متغیر به‌صورت زیر است:

$$E(X) = \frac{N+۱}{۲} = \frac{۳۵+۱}{۲} = ۱۸$$

۷ـ گزینه «۲» یادآوری:

۱) $COV(x,x) = Var(x)$ ۲) $COV(x,y) = COV(y,x)$ ۳) در توزیع یکنواخت $U(۰,۱)$ واریانس برابر است با: $\frac{(b-a)^۲}{۱۲} = \frac{۱}{۱۲}$

باتوجه به خواص کوواریانس مقدار $COV(Z,V)$ را به‌صورت زیر باز می‌نویسیم:

$$COV(x+y, x-y) = COV(x,x) - \cancel{COV(x,y)} + \cancel{COV(y,x)} - Cov(y,y) \xrightarrow[\text{یادآوری ۱و۲}]{\text{باتوجه به}} Var(x) - Var(y) = \frac{۱}{۱۲} - \frac{۱}{۱۲} = ۰$$

۸ـ گزینه «۴» همان‌طور که مشاهده می‌شود $۰ \le x \le ۱$ می‌باشد پس بیشترین مقداری که اختیار می‌کند عدد ۱ می‌باشد، بنابراین:

$$۰ \le y \le x \Rightarrow ۰ \le y \le x \le ۱$$

$$f_Y(y) = \int f(x,y)dx = \int_y^۱ f(y|x).f(x)dx = \int_y^۱ \frac{۱}{\cancel{x}}.۲\cancel{x}dx = ۲(۱-y)$$

از آنجا که y در فاصله $[۰, x]$ با توزیع یکنواخت انتخاب می‌شود بنابراین می‌توان نوشت: $f(y|x) = \frac{۱}{x}$

۹ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با یک توزیع فوق هندسی روبه‌رو هستیم که آن را با توزیع دوجمله‌ای تقریب می‌زنیم:

$$\begin{matrix} N = ۱۰۰ \\ M = ۴ \\ n = ۱۰ \end{matrix} \Rightarrow P = \frac{M}{N} = \frac{۴}{۱۰۰} \ , \ n = ۱۰$$

$$p(x = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \Rightarrow p(x=۱) = \binom{۱۰}{۱} \times (\frac{۴}{۱۰۰})^۱ \times (\frac{۹۶}{۱۰۰})^۹ = ۱\cancel{۰} \times \frac{۴}{۱۰\cancel{۰}} \times (\frac{۲۴ \times \cancel{۴}}{\cancel{۴} \times ۲۵})^۹ = \frac{۲}{۵} \times (\frac{۲۴}{۲۵})^۹$$

۱۰ـ گزینه «۴» اگر $N(t)$ تعداد اتفاقات در یک فاصله زمانی مانند T باشد به گفته مسئله دارای توزیع پواسون با میانگین λt می‌باشد، از طرفی T نیز زمان و یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ است بنابراین:

$$Var(N(t)) = Var(N(t))$$

اما توجه کنید که طبق فرمول واریانس شرطی داریم:

$$Var(Y) = E(Var(Y|X=x)) + Var(E(Y|X=x))$$

به‌جای $Y = N(t)$ و به‌جای X متغیر T را قرار می‌دهیم:

$$Var(N(t)) = E(Var(N(t)|T=t) + Var(E(N(t)|T=t))$$

اکنون به‌دلیل استقلال $N(t)$ و T شرط‌ها از بین می‌روند.

توجه کنید که $N(t)$ دارای توزیع پواسون است و در توزیع پواسون امید ریاضی و واریانس برابر است: $E(N(t)) = Var(N(t)) = \lambda t$

$$E(Var(N(t))) + Var(E(N(t)) = E(\lambda t) + Var(\lambda t) = \lambda E(T) + \lambda^۲ Var(T) = \lambda\mu + \lambda^۲\sigma^۲$$

۱۱ـ گزینه «۲» با کمی دقت متوجه می‌شویم، با یک توزیع دوجمله‌ای سروکار داریم:

$$P(x \geq ۳) = ۱ - P(x < ۳) = ۱ - P(x = ۰) - P(x = ۱) - P(x = ۲) = ۱ - \binom{۶}{۰} P^{۰}(۱-p)^{۶} - \binom{۶}{۱} p^{۱}(۱-p)^{۵} - \binom{۶}{۲} p^{۲}(۱-p)^{۴}$$

اما توجه کنید که:

$$P = P(x > ۱۵) = \int_{۱۵}^{\infty} f(x)dx = \int_{۱۵}^{\infty} \frac{۱۰}{x^{۲}} dx = -۱۰\, x^{-۱}\Big|_{۱۵}^{\infty} = \frac{۱۰}{۱۵} = \frac{۲}{۳}$$

بنابراین:

$$p(x \geq ۳) = ۱ - ((\frac{۱}{۳})^{۶} - (۶ \times \frac{۲}{۳} \times (\frac{۱}{۳})^{۵}) - (۱۰ \times (\frac{۲}{۳})^{۲} (\frac{۱}{۳})^{۴})) = ۱ - \frac{۱}{۷۲۹} - \frac{۱۲}{۷۲۹} - \frac{۶۰}{۷۲۹} = ۱ - \frac{۷۳}{۷۲۹}$$

۱۲ـ گزینه «۴» برای آنکه ۲n واحد از مبدأ دور شویم باید اختلاف حرکت‌های سمت راست و چپ n واحد باشد بنابراین باید $k+n$ حرکت به سمت راست و $k-n$ حرکت به سمت چپ و یا برعکس $k-n$ حرکت به سمت راست و $k+n$ حرکت به سمت چپ داشته باشیم. مثلاً اگر بخواهیم پس از ۶ بار حرکت ۴ واحد از مبدأ دور شویم $(k = ۳\ ,\ n = ۲)$ باید همواره $k+n = ۵$ حرکت به راست و یک حرکت به چپ حرکت کنیم یا برعکس۵ حرکت به چپ و ۱ حرکت به راست اکنون با توجه به اینکه احتمال حرکت ثابت است توزیع تعداد حرکت ۲k بار با احتمال p دارای توزیع دوجمله‌ای است؛ چرا که در توزیع دوجمله‌ای آزمایشی دو حالتی با احتمال ثابت p به تعداد دفعات تکرار می‌شود. تابع احتمال دوجمله‌ای به‌صورت زیر است:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x}$$

$$p\ (\text{دور شدن ۲n واحد از مبدأ}) = \binom{۲k}{k-n} p^{k-n}(۱-p)^{k+n} + \binom{۲k}{k+n} p^{k+n}(۱-p)^{k-n}$$

$$= C_{۲k}^{k-n} p^{k-n}(۱-p)^{k+n} + C_{۲k}^{k+n} p^{k+n}(۱-p)^{k-n} = C_{۲k}^{k+n}(p^{k-n}q^{k+n} + p^{k+n}q^{k-n})$$

عبارت بالا را در $p^{k-n}.q^{k-n}$ ضرب و بر آن تقسیم می‌کنیم:

$$= C_{۲k}^{k+n}.p^{k-n}q^{k-n}(\frac{p^{k-n}.q^{k+n}}{p^{k-n}.q^{k-n}} + \frac{p^{k+n}.q^{k-n}}{p^{k-n}.q^{k-n}}) = C_{۲k}^{k+n} p^{k-n} q^{k-n}(p^{۲n} + q^{۲n})$$

۱۳ـ گزینه «۴» **یادآوری ۱:** اگر $x > ۰$ \ $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ باشد آن‌گاه تابع توزیع $F(x) = ۱ - e^{-\lambda x}$.

یادآوری ۲: اگر $X_۱, X_۲, \dots, X_n$ باشد تابع چگالی $Y = \min(X_i)$ برابر است با:

$$f_Y(y) = nf_X(y).(۱ - F_X(y))^{n-۱}$$

بنابراین با استفاده از دو یادآوری بالا چگالی و توزیع آن به این صورت است:

$$\lambda = ۱ \rightarrow f(x) = e^{-x} \quad , \quad F(x) = ۱ - e^{-x}$$

تابع چگالی $y = \min(X_i)$ را به دست می‌آوریم:

$$f_Y(y) = nf_X(y)(۱ - F_X(y))^{n-۱} = n.e^{-y}(۱ - (۱ - e^{-y}))^{n-۱} = n.e^{-y}.e^{-(n-۱)y} = ne^{-ny} \sim E(n)$$

۱۴ـ گزینه «۳» اگر مهره‌های قرمز را با $R_۱, R_۲, \cdots, R_{۱۶}$ و مهره‌های سفید را با $W_۱, W_۲, W_۳, W_۴$ معرفی کنیم. طبق گفته صورت مسئله موفقیت و شکست به صورت زیر تعریف می‌شوند:

موفقیت: $R_۱, W_۱, W_۲, W_۳, W_۴$

شکست: $R_۲, R_۳, \cdots, R_{۱۶}$

$$P = P\ (\text{موفقیت}) = \frac{۵}{۲۰} = \frac{۱}{۴}$$

بنابراین با یک توزیع هندسی روبه‌رو هستیم:

X: تعداد آزمایش‌های لازم تا رسیدن به یک موفقیت

$$x \sim Ge(\frac{۱}{۴}) \Rightarrow P(X = x) = \frac{۱}{۴}.(\frac{۳}{۴})^{x-۱} \Rightarrow P(x = n) = pq^{n-۱} = \frac{۱}{۴} \times (\frac{۳}{۴})^{n-۱} = \frac{۱}{\cancel{۴}} \times \frac{\cancel{۴}}{۳} \times (\frac{۳}{۴})^{n} = \frac{۱}{۳}(\frac{۳}{۴})^{n}$$

«نظریه برآورد»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل چهارم

۱ـ فرض کنید $\circ < x < \theta$ و $f(x) = \frac{۱}{\theta}$. به ازای یک نمونه n تایی برآورد گشتاوری θ چیست؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)

۱) $\overline{x}$ ۲) $\frac{\overline{x}}{۲}$ ۳) $۲\overline{x}$ ۴) $\frac{۲}{\overline{x}}$

۲ـ فرض کنید $X_۱,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع بتا با تابع چگالی احتمال $\circ < x < ۱$, $f_X(x) = \theta x^{\theta-۱}$ باشد. برآوردگر درست‌نمایی ماکزیمم (MLE) پارامتر θ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)

۱) $-\frac{۱}{n}\ln(\prod_{i=۱}^{n} X_i)$ ۲) $\frac{۱}{n}\prod_{i=۱}^{n}\ln X_i$ ۳) $-\frac{۱}{n}\ln(\sum_{i=۱}^{n} X_i)$ ۴) $\frac{۱}{n}\ln(\sum_{i=۱}^{n} X_i)$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل چهارم

۱ـ گزینه «۳» طبق خاصیت برآورد گشتاوری امید ریاضی توزیع یکنواخت عبارت است از $\frac{\theta}{۲}$، آن را برابر با $\overline{x}$ قرار می‌دهیم: $E(x) = \overline{x} = \frac{\theta}{۲} \Rightarrow \tilde{\theta} = ۲\overline{x}$

۲ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. مراحل به دست آوردن برآوردگر درست‌نمایی را به ترتیب انجام می‌دهیم.

۱) تابع درست‌نمایی را تشکیل می‌دهیم $(L(\theta))$:

$$L(\theta) = \prod_{i=۱}^{n} f(x_i;\theta) = f(x_۱,\theta)\times f(x_۲,\theta)\times\cdots\times f(x_n,\theta) = \theta x_۱^{\theta-۱}\times\theta x_۲^{\theta-۱}\times\cdots\times\theta x_n^{\theta-۱} = \theta^n\prod_{i=۱}^{n} x_i^{\theta-۱}$$

۲) از تابع درست‌نمایی لگاریتم در پایه نپر می‌گیریم:

$$\ell(\theta) = n\text{Ln}\theta + (\theta-۱)\text{Ln}\prod_{i=۱}^{n} x_i$$

۳) از تابع بالا مشتق گرفته آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\ell'(\theta) = \circ \to \frac{n}{\theta} + \text{Ln}\prod_{i=۱}^{n} x_i = \circ \to \frac{n}{\theta} = -\text{Ln}\prod_{i=۱}^{n} x_i \Rightarrow \hat{\theta} = -\frac{n}{\text{Ln}\prod_{i=۱}^{n} x_i} = -\frac{n}{\sum_{i=۱}^{n}\text{Ln}\, x_i}$$

فصل پنجم

«آزمون فرض و استنباط آماری»

تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل پنجم

س ۱ـ دو سری نمونه‌برداری از یک دپوی معدنی صورت گرفته است، فروشنده مدعی است که براساس ۲۵ نمونه گرفته شده، عیار میانگین آن‌ها برابر ۶۲ درصد و واریانس آن‌ها برابر ۶ است ولی خریدار مدعی است که براساس ۲۰ نمونه گرفته شده، عیار میانگین برابر ۶۰ درصد و واریانس آن‌ها برابر ۵ است، با فرض نرمال بودن توزیع‌ها در سطح اعتماد ۹۵ درصد اختلاف بین دو میانگین معنادار .... و .... فرض مساوی بودن میانگین‌ها را رد کرد.

(مقدار بحرانی برابر ۲ فرض شود) (معدن ـ سراسری ۸۹)

۱) است، می‌توان ۲) است، نمی‌توان ۳) نیست، می‌توان ۴) نیست، نمی‌توان

۲ـ فرض کنید $X \sim Bin(4,p)$ است. علاقمند به آزمون $H_0 : p = \frac{1}{3}$ در مقابل $H_1 : p = \frac{1}{5}$ هستیم. اگر ملاک رد فرض H_0 مشاهده صفر باشد، احتمال خطای نوع اول کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $\left(\frac{1}{3}\right)$ ۲) $1-\left(\frac{1}{5}\right)^2$ ۳) $1-\left(\frac{1}{3}\right)^3$ ۴) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده کنکوری فصل پنجم

۱ـ گزینه «۴» از تعریف خطای نوع اول استفاده می‌کنیم:

$$\alpha = P(H_0 \text{ رد } | H_0 \text{ درست باشد}) = P(\text{مشاهده صفر} \,|\, P = \frac{1}{3}) = P(X = 0 \,|\, P = \frac{1}{3}) \xrightarrow[\text{ناحیه بحرانی}]{x \sim Bin(4,\frac{1}{3})} \binom{4}{0} \times (\frac{1}{3})^0 \times (\frac{2}{3})^4 = (\frac{2}{3})^4$$

یادآوری: اگر $X \sim Bin(n,P) \to P(X = x) = \binom{n}{x} P^x q^{n-x}$

۲ـ گزینه «۳» در آزمون فرض ساده H_0 در مقابل فرض ساده H_1 توان آزمون $\beta^* = 1-\beta$ می‌باشد و به راحتی می‌توانیم بیان کنیم که:

$$\beta^* + \beta = 1 \cancel{-\beta} \cancel{+\beta} = 1$$

توجه کنید که مجموع $\alpha + \beta \le 1$ می‌باشد و لزوماً ۱ نیست.