فصل اول

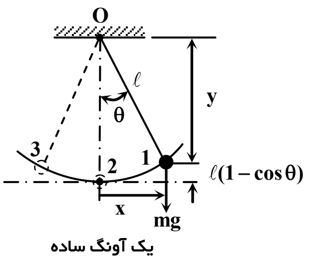
«مفاهیم اولیه ارتعاشات»

ارتعاش

هر حرکتی که پس از یک بازه زمانی تکرار شود ارتعاش یا نوسان خوانده می‌شود. نوسان یک آونگ و حرکت یک تار کشیده شده نمونه‌هایی از ارتعاش می‌باشند. نظریه ارتعاش با مطالعه حرکت رفت و برگشتی اجسام و نیروهای همراه با آنها سروکار دارد.

بخش‌های اولیه سیستم ارتعاشی

به‌طور کلی، یک سیستم ارتعاشی شامل وسیله‌ای برای ذخیره‌سازی انرژی پتانسیل (فنر یا الاستیسیته)، وسیله‌ای برای ذخیره انرژی جنبشی (جرم یا اینرسی) و وسیله‌ای برای هدر دادن تدریجی انرژی (دمپر یا میراکننده) می‌باشد.



یک آونگ ساده

ارتعاش یک سیستم شامل تبدیل انرژی پتانسیل آن به انرژی جنبشی و بالعکس، به صورت متناوب است. اگر یک سیستم میراشونده باشد مقداری از انرژی در هر سیکل ارتعاشی هدر می‌رود و در صورت تمایل به حفظ یک ارتعاش پایدار باید با یک منبع خارجی جایگزین شود.

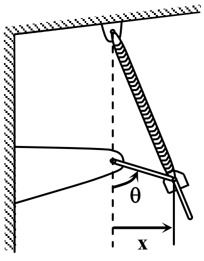
به عنوان نمونه، ارتعاش یک آونگ ساده را که در شکل بالا نشان داده شده است، در نظر بگیرید. فرض کنید که جرم m پس از جابه‌جایی زاویه‌ای θ رها شود. در موقعیت ۱، سرعت جرم و بنابراین انرژی جنبشی آن برابر صفر است. این در حالی است که با در نظر گرفتن نقطه ۲ به عنوان مرجع، انرژی پتانسیل این جسم برابر $mg\ell(1-\cos\theta)$ می‌باشد. به خاطر اینکه نیروی جاذبه mg شامل گشتاور $mg\ell(\sin\theta)$ حول نقطه o می‌باشد، جرم از موقعیت ۱ شروع به نوسان به سمت چپ می‌کند.

این گشتاور شتاب زاویه‌ای خاصی را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به جسم می‌دهد و زمانی که به موقعیت ۲ می‌رسد همه انرژی پتانسیل آن به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود؛ بنابراین جرم در موقعیت ۲ از حرکت بازنمی‌ایستد؛ بلکه به نوسان خود تا رسیدن به موقعیت ۳ ادامه می‌دهد. با وجود این، هنگامی‌که از موقعیت متوسط ۲ عبور می‌کند و تا رسیدن به موقعیت ۳، یک گشتاور در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به علت نیروی جاذبه بر آن عمل کرده، سبب کاهش سرعت جرم می‌گردد. سرعت جرم در آخرین نقطه سمت چپ (۳)، به صفر می‌رسد. در این لحظه همه انرژی جنبشی آن به انرژی پتانسیل تبدیل شده است. باز هم به خاطر گشتاور نیروی جاذبه، این جرم دارای سرعتی در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌گردد؛ بنابراین جرم شروع به نوسان برگشتی با سرعت افزاینده کرده، باز هم از موقعیت متوسط عبور می‌کند. این فرایند ادامه پیدا می‌کند و آونگ حرکت نوسانی خواهد داشت. در عمل مقدار نوسان یعنی θ به تدریج کاهش پیدا کرده و در نهایت آونگ به خاطر مقاومت (میرایی) اعمال شده از طریق محیط اطراف (هوا) از حرکت بازمی‌ایستد. این بدان معنی است که مقداری از انرژی ارتعاشات در هر سیکل ارتعاشی به خاطر میرایی هوا به هدر می‌رود.

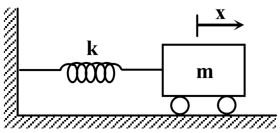
درجات آزادی

کمترین تعداد مختصات مستقلی را که برای تعیین کامل موقعیت همه بخش‌های یک سیستم در هر لحظه از زمان نیاز است، درجات آزادی آن سیستم می‌گویند. آونگ ساده نشان داده شده در شکل بالا و نیز هر کدام از سیستم‌های نشان داده شده در شکل بعد، نمایشگر یک سیستم تک درجه آزادی می‌باشند. برای مثال، حرکت آونگ ساده را می‌توان برحسب زاویه θ یا برحسب مختصات کارتزین x و y بیان کرد. اگر مختصات x و y برای بیان حرکت استفاده شوند، باید به یاد داشت که این مختصات مستقل از هم نیستند. آن‌ها از طریق معادله $x^{2}+y^{2}=l^{2}$ ارتباط دارند که در آن l طول ثابت آونگ می‌باشد؛ بنابراین هر مختصه دلخواه دیگری نیز می‌تواند حرکت آونگ را توصیف کند. در این مثال، انتخاب θ به عنوان مختصه مستقل آسان‌تر از انتخاب x یا y می‌باشد. برای

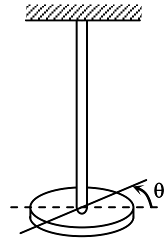
لغزنده نشان داده شده در شکل a یا مختصه زاویه‌ای θ و یا مختصه x را می‌توان برای بیان حرکت استفاده کرد. در شکل b، مختصه خطی x و برای سیستم پیچشی (میله طولانی با یک دیسک سنگین در یک انتها) نشان داده شده در شکل c، مختصه زاویه‌ای θ را می‌توان برای مشخص کردن حرکت استفاده کرد.



مکانیزم لغزنده ـ لنگ ـ فنر (a)



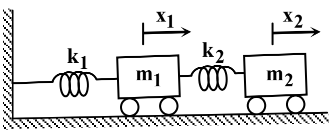
سیستم جرم ـ فنر (b)



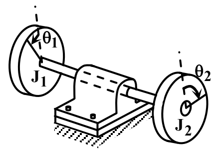
سیستم پیچشی (c)

سیستم‌های تک درجه آزادی

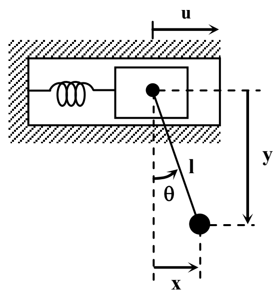
برخی از نمونه‌های سیستم‌های دو و سه درجه آزادی به ترتیب در دو شکل بعد نشان داده شده‌اند. شکل اول نشان‌دهنده یک سیستم دارای دو جرم و دو فنر است که توسط دو مختصه خطی x_1 و x_2 می‌تواند بیان شود. بخش b نشان‌دهنده یک سیستم دارای دو جرم چرخشی می‌باشد که حرکت آن را می‌توان به طور کامل برحسب θ_1 و θ_2 بیان کرد. حرکت سیستم نشان داده شده در بخش c را می‌توان به طور کامل توسط u و θ یا توسط x، y و u توصیف کرد. در صورتی که حرکت این سیستم توسط روش دوم بیان شود، باید توجه داشت که مختصه‌های x و y توسط $x^2 + y^2 = l^2$ مقید می‌شوند که در آن l مقدار ثابتی است؛ بنابراین سیستم همچنان دارای همان دو درجه آزادی می‌باشد.



(a)

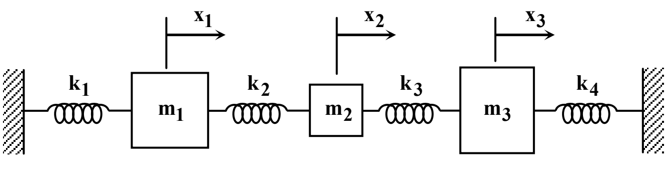


(b)

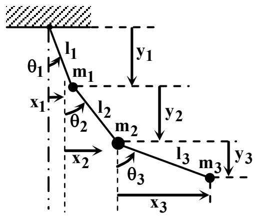


سیستم‌های دو درجه آزادی

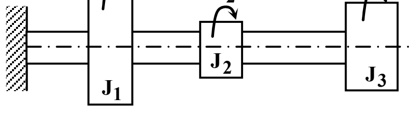
برای سیستم‌های نشان داده شده در شکل‌های زیر مختصات $x_i\,(i=1,2,3)$ و $\theta_i\,(i=1,2,3)$ را می‌توان به ترتیب برای بیان حرکت سیستم‌های a و c به‌کار برد. در مورد سیستم نشان داده شده در شکل b مختصات $\theta_i\,(i=1,2,3)$ مکان‌های جرم‌های $m_i\,(i=1,2,3)$ را مشخص می‌کند. یک روش دیگر برای توصیف سیستم برحسب x_i و y_i است که در آن $(i=1,2,3)$ می‌باشد؛ ولی باید توجه داشت که در این مورد قیدهای $x_i^2 + y_i^2 = l_i^2\,(i=1,2,3)$ وجود دارند و در نتیجه سیستم به‌جای شش درجه آزادی، دارای سه درجه آزادی مستقل است.



(a)



(b)



(c)

سیستم‌های سه درجه آزادی

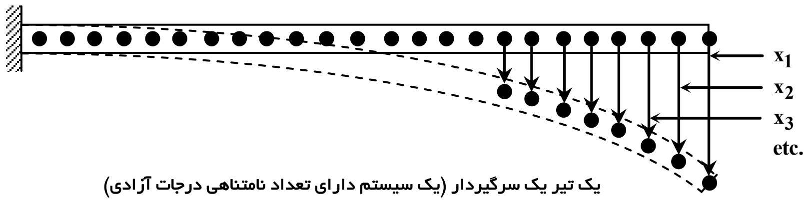
مثال۱: تعداد درجات آزادی یک سیستم مکانیکی:

۱) برابر با تعداد اجرام آن سیستم است.
۲) برابر با تعداد فنرهای آن سیستم است.
۳) برابر با حداقل مختصات مستقل آن سیستم است.
۴) برابر با حداکثر مختصات مستقل آن سیستم است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به مطالب بیان شده گزینه‌ی (۳) صحیح است.

سیستم‌های گسسته و پیوسته

تعداد بسیار زیادی از سیستم‌های عملی را می‌توان با استفاده از تعداد متناهی درجات آزادی مانند سیستم‌های ساده نشان داده شده در شکل‌های قبل توصیف کرد. برخی از سیستم‌ها به ویژه آنهایی که شامل اعضای الاستیک پیوسته هستند، دارای تعداد درجات آزادی نامتناهی می‌باشند. به عنوان یک مثال ساده، تیر یک سرگیردار شکل زیر را در نظر بگیرید. به خاطر اینکه این تیر دارای تعداد نامتناهی نقاط جرمی است، بنابراین برای مشخص کردن حالت تغییر شکل یافته آن به تعداد نامتناهی مختصات نیاز است؛ در نتیجه تیر یک سرگیردار دارای تعداد نامتناهی درجات آزادی است. بسیاری از سیستم‌های سازه‌ای و ماشینی دارای اعضای تغییرشکل‌پذیر (الاستیک) اند؛ بنابراین دارای تعداد نامتناهی درجات آزادی می‌باشند.



یک تیر یک سرگیردار (یک سیستم دارای تعداد نامتناهی درجات آزادی)

به سیستم‌هایی که دارای تعداد متناهی درجات آزادی‌اند، سیستم‌های گسسته یا پارامتر ـ متمرکز گفته می‌شود و آنهایی که دارای تعداد نامتناهی درجات آزادی‌اند، سیستم‌های پیوسته یا توزیع شده خوانده می‌شوند.

در سیستم‌های گسسته، جرم قسمت‌های مختلف سیستم به صورت متمرکز در محل مرکز جرم آن‌ها به صورت نقاط مجزا در نظر گرفته می‌شود. همچنین معادلات حرکت سیستم‌های گسسته به صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشد و به تعداد درجات آزادی سیستم، معادله حرکت، فرکانس طبیعی و مود ارتعاشی وجود دارد. معادلات حرکت سیستم‌های پیوسته از نوع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشد و واضح است که سیستم‌های پیوسته دارای بی‌نهایت فرکانس طبیعی و شکل مود ارتعاشی هستند.

طبقه‌بندی ارتعاشات

ارتعاشات را می‌توان به چندین شیوه طبقه‌بندی کرد. برخی از طبقه‌بندی‌های مهم به صورت زیر می‌باشند:

ارتعاشات آزاد

اگر سیستمی پس از یک اغتشاش اولیه، آزادانه و به خودی خود ارتعاش کند، ارتعاشات حاصل به عنوان ارتعاشات آزاد شناخته می‌شود. در این حالت هیچ نیروی خارجی بر سیستم وارد نمی‌شود و در واقع ارتعاشات حاصل پاسخ به تحریک اولیه می‌باشد. نوسان یک آونگ ساده نمونه‌ای از ارتعاشات آزاد است.

ارتعاشات واداشته

اگر سیستمی تحت تأثیر یک نیروی خارجی قرار گیرد (اغلب یک نوع نیروی تکرارشونده) ارتعاشات حاصل را ارتعاشات واداشته یا اجباری می‌گویند. نوسانی که در ماشین‌ها مانند ماشین‌های دیزل به‌وجود می‌آید، نمونه‌ای از ارتعاشات واداشته است.

اگر فرکانس نیروی خارجی (تحریک) با یکی از فرکانس‌های طبیعی سیستم تطابق داشته باشد، شرایطی به نام تشدید رخ می‌دهد و نوسانات شدیدی به سیستم وارد می‌شود. شکست سازه‌هایی مانند ساختمان‌ها، پل‌ها، توربین‌ها و بال هواپیماها با رخ دادن تشدید همراه است.

ارتعاشات میرا و غیرمیرا

اگر مقداری از انرژی سیستم در حال ارتعاش در اثر اصطکاک یا مقاومت‌های دیگر هدر رود، ارتعاشات از نوع میرا نامیده می‌شود و اگر هیچ مقداری از انرژی سیستم در حال ارتعاش از بین نرود ارتعاشات از نوع غیرمیرا می‌باشد. در بسیاری از سیستم‌های فیزیکی، مقدار میرایی به اندازه‌ای کوچک است که برای بسیاری از مقاصد مهندسی قابل صرف‌نظر کردن می‌باشد. با وجود این، در نظر گرفتن میرایی در تحلیل سیستم‌های ارتعاشی نزدیک تشدید بسیار حائز اهمیت است.

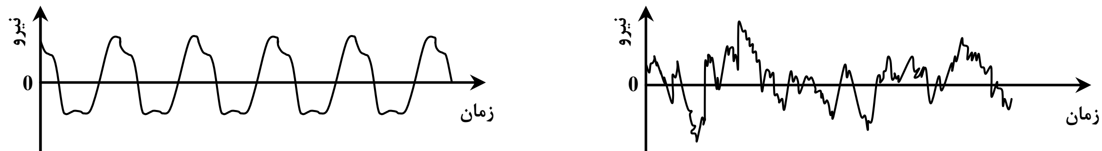
سیستم‌های خطی و غیرخطی

اگر همه مؤلفه‌های اصلی یک سیستم ارتعاشی ـ جرم، فنر و دمپر (میراکننده) ـ به صورت خطی عمل کنند، ارتعاشات حاصل را ارتعاشات خطی می‌نامند. از طرف دیگر، اگر حداقل یکی از مؤلفه‌های اصلی به صورت غیرخطی عمل کند، ارتعاشات حاصل را ارتعاشات غیرخطی می‌گویند. معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم‌های ارتعاشی خطی و غیرخطی، به ترتیب به‌صورت معادله دیفرانسیل خطی و غیرخطی می‌باشند. برخلاف ارتعاشات غیرخطی، در ارتعاشات خطی اصل بر هم‌نهی یا جمع آثار (سوپرپوزیشن) برقرار می‌باشد و می‌توان در تحلیل سیستم‌های خطی از این اصل استفاده کرد. به خاطر اینکه سیستم‌های ارتعاشی با افزایش دامنه نوسان تمایل به رفتار غیرخطی دارند، برای سیستم‌های ارتعاشی واقعی باید از تحلیل ارتعاشات غیرخطی سیستم‌ها استفاده کرد. در ارتعاشات خطی فرکانس طبیعی به خواص ذاتی سیستم بستگی دارد و به مقدار تحریک اولیه وابسته نیست، اما در ارتعاشات غیرخطی فرکانس طبیعی سیستم به دامنه و فرکانس تحریک اولیه نیز وابسته است.

ارتعاشات معین و تصادفی

اگر مقدار یا اندازه تحریک (نیرو یا مُمان) اعمال‌شونده بر یک سیستم ارتعاشی در هر لحظه از زمان داده شده باشد، آن تحریک را معین گویند و ارتعاشات حاصل شده به عنوان ارتعاشات معین شناخته می‌شود.

در برخی از موارد تحریک اعمال شده بر یک سیستم ارتعاشی قابل تعیین نیست یا تصادفی است و در نتیجه در یک زمان مشخص، مقدار تحریک قابل پیش‌بینی نمی‌باشد. به ارتعاشات حاصل شده در این حالت ارتعاشات تصادفی (اتفاقی) گویند. مثال‌هایی از تحریک‌های تصادفی، سرعت باد، ناهمواری جاده‌ای و حرکت زمین هنگام زمین‌لرزه می‌باشند. در مورد ارتعاشات تصادفی باید توجه داشت که پاسخ ارتعاشی این سیستم‌ها نیز تصادفی است و آن را می‌توان تنها برحسب کمیت‌های آماری توصیف کرد. شکل زیر نشان‌دهنده نمونه‌هایی از تحریک‌های معین و تصادفی می‌باشد.



تحریک معین یا تناوبی (a) تحریک تصادفی (b)

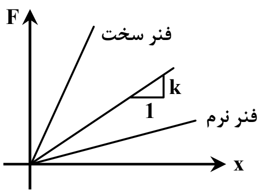
تحریک‌های معین و تصادفی

المان‌های الاستیک (فنرها)

فنرها اجزایی از سیستم‌های ارتعاشی هستند که در برابر تغییر مکان از خود عکس‌العمل نشان می‌دهند و معمولاً از جرم و میرایی آنها صرف‌نظر می‌شود. هنگامی در فنر نیرو به وجود می‌آید که بین دو انتهای آن جابه‌جایی نسبی وجود داشته باشد. برای فنرهای خطی نیروی فنر با مقدار تغییر شکل متناسب است و توسط معادله زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{F = kx} \qquad (۱)$$

که در رابطه فوق F نیروی فنر، x میزان تغییر شکل فنر (جابه‌جایی یک انتها نسبت به انتهای دیگر فنر) و k سختی یا ثابت فنر می‌باشد. با توجه به رابطه نیرو ـ تغییر مکان فوق برای فنرهای خطی، شکل تغییرات نیرو برحسب تغییر مکان را می‌توان به صورت مقابل رسم کرد:

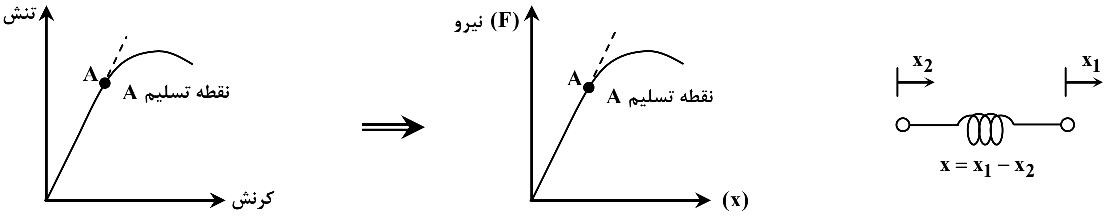


همان‌طور که در شکل نیز دیده می‌شود، هرچه فنر سخت‌تر باشد شیب خط بیشتر خواهد بود.

کار انجام شده برای تغییر شکل یک فنر به صورت انرژی کرنشی یا پتانسیل، در فنر ذخیره می‌شود و توسط معادله زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{U = \int kx dx = \frac{۱}{۲}kx^{۲}} \qquad (۲)$$

فنرهای واقعی غیرخطی‌اند و تنها تا تغییر شکل معینی از رابطه (۱) پیروی می‌کنند. هنگامی‌که تغییر شکل از مقدار خاصی بالاتر رود (پس از نقطه A در شکل زیر) تنش از نقطه تسلیم ماده بالاتر می‌رود و رابطه نیرو- تغییر شکل غیرخطی خواهد شد. در بسیاری از کاربردهای عملی فرض می‌شود که تغییر شکل‌ها کوچک‌اند و از رابطه خطی معادله $F = kx$ استفاده می‌شود.



خطی نبودن در نواحی بالاتر از حد تناسب (نواحی بعد از نقطه A)

نکته۱: اگر رابطه نیرو ـ تغییر شکل یک فنر غیرخطی باشد (فنر غیرخطی)، با استفاده از فرآیند خطی‌سازی می‌توان آن را با یک فنر خطی تقریب زد. ثابت خطی شده فنر معادل از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

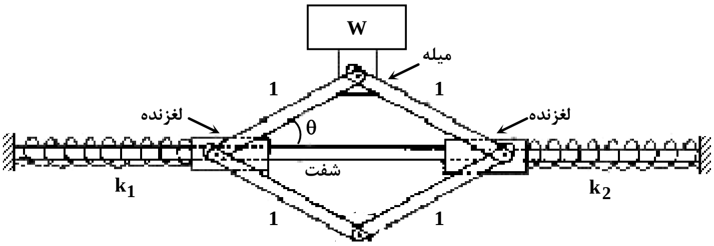
$$K_{eq} = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x^*}$$

که x^* در رابطه فوق، نشان‌دهنده نقطه تعادل استاتیکی فنر می‌باشد.

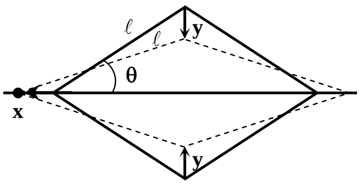
المان‌های الاستیکی مانند تیرها به عنوان فنر عمل می‌کنند. برای مثال، یک تیر یک سرگیردار را با یک جرم انتهایی m همانند شکل بعد در نظر بگیرید. برای سادگی از جرم تیر در مقایسه با جرم m صرف‌نظر شده است. از مقاومت مصالح می‌دانیم که تغییر شکل استاتیکی تیر در انتهای آزاد آن به صورت زیر است:

$$\delta_{st} = \frac{Wl^{۳}}{۳EI}$$

مثال۲۵: یک جک قیچی‌مانند برای بلند کـردن وزنـه W استفاده می‌شود. میله‌های جک صلب است و لغزنده‌هـا همانـند شکل می‌توانند به راحتی روی میله بلغزند و فنرهای k_1 و k_2 را فشرده کنند. فرکانس طبیعی ارتعاش وزنه را در جهـت عمـودی به‌دست آورید.



پاسخ: شکل سیستم پس از حرکت وزنه W به میزان کوچک y در راستای عمودی به صورت مقابل است. در این شکل x میزان جابه‌جایی لغزنده در جهت افقی و y میزان جابه‌جایی وزنه می‌باشد.



برای یافتن فرکانس طبیعی با توجه به رابطه $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k_{eq}}{m}}$ ابتدا باید سختی معادل سیستم داده شده در راسـتای عمـودی را بیـابیم و بـرای ایـن منظـور همانطور که قبلاً بیان شد، انرژی‌های پتانسیل در دو حالت بیان شده را با هم برابر قرار می‌دهیم، یعنی:

$$\frac{1}{2}k_{eq}y^2 = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2x^2 \qquad (*)$$

حال کافی است که رابطه بین x و y را بیابیم. میزان جابه‌جایی x برابر است با:

$$x = \sqrt{l^2 - (l\sin\theta - y)^2} - l\cos\theta = \sqrt{l^2\cos^2\theta - y^2 + 2ly\sin\theta} - l\cos\theta = l\cos\theta\sqrt{1 - \frac{y^2}{l^2\cos^2\theta} + \frac{2ly\sin\theta}{l^2\cos^2\theta}} - l\cos\theta$$

برای مقادیر کوچک y داریم:

$$\sqrt{1+y} \simeq 1 + \frac{y}{2}, y^2 \simeq 0 \Rightarrow \sqrt{1 - \cancel{\frac{y^2}{L^2\cos^2\theta}}^{\,0} + \frac{2Ly\sin\theta}{L^2\cos^2\theta}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\,\frac{2Ly\sin\theta}{L^2\cos^2\theta} \simeq 1 + \frac{y\sin\theta}{L\cos^2\theta}$$

بنابراین x برابر است با:

$$x \simeq L\cos\theta\left(1 + \frac{y\sin\theta}{L\cos^2\theta}\right) - L\cos\theta = \frac{y\sin\theta}{\cos\theta} = y\,tg\theta$$

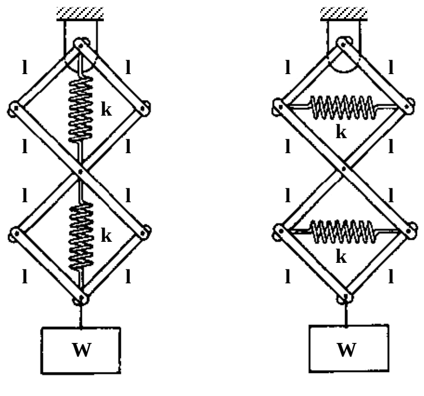
لذا با جایگذاری در رابطه (*) داریم:

$$k_{eq}y^2 = k_1(y^2tg^2\theta) + k_2(y^2tg^2\theta) \Rightarrow k_{eq} = (k_1 + k_2)tg^2\theta$$

بنابراین فرکانس طبیعی به صورت مقابل خواهد بود:

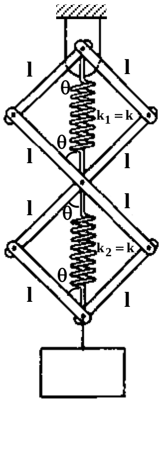
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)g}{W}}\,\tan\theta$$

مثال۲۶: یک وزنه با استفاده از شش میله صلب و دو فنر به دو شـیوه مختلـف معلق شده است. فرکانس طبیعی نوسان دو سیستم داده شده را بیابید.



(a) (b)

پاسخ: دو حالت را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم:



حالت a) برخلاف آنچه که در ظاهر تصور می‌شـود فنرهـای k_1 و k_2 مـوازی هسـتند نـه سـری؛ زیرا به واسطه میله‌های صلب، فنرها دارای تغییر طول یکسان می‌باشند.

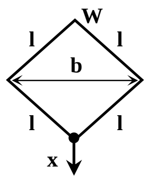
طول فنر k_1: $x_1 = 2L\cos\theta \Rightarrow$ تغییر طول فنر k_1 به ازای دوران کوچک $\delta\theta$ میله: $\Delta x_1 = 2L\sin\theta\delta\theta$

طول فنر k_2: $x_2 = 2L\cos\theta \Rightarrow$ تغییر طول فنر k_2 به ازای دوران کوچک $\delta\theta$ میله: $\Delta x_2 = 2L\sin\theta\delta\theta$

دیده می‌شود که فنرهای k_1 و k_2 دارای تغییر طول یکسان می‌باشند و با هم موازی‌اند، لذا:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 = k + k = 2k \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

حالت b) همان‌طور که در مثال ۱۵ فصل قبل به دست آمد، در اثر جابه‌جایی جرم به اندازه x، هر کدام از فنرها به اندازه x_s فشرده می‌شوند:



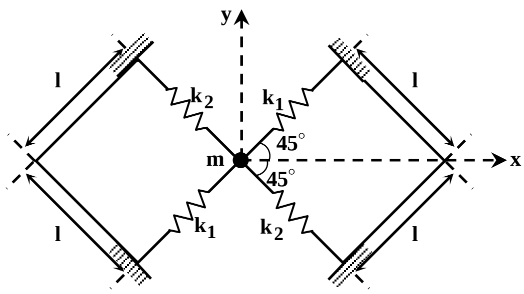
$$x_s = x\frac{۲}{b}\sqrt{l^۲ - \frac{b^۲}{۴}}$$

و برای به‌دست آوردن سختی معادل در راستای عمودی، از برابری انرژی پتانسیل در دو حالت استفاده می‌کنیم:
$$\frac{۱}{۲}k_{eq}x^۲ = ۲(\frac{۱}{۲}kx_s^۲)$$

$$k_{eq} = ۲k(\frac{x_s}{x})^۲ = ۲k(\frac{۴}{b^۲})(l^۲ - \frac{b^۲}{۴}) = \frac{۸k}{b^۲}(l^۲ - \frac{b^۲}{۴})$$

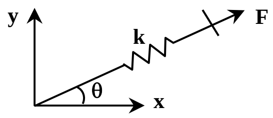
با توجه به معادله حرکت $m\ddot{x} + k_{eq}x = ۰$، فرکانس طبیعی به صورت مقابل به‌دست می‌آید:
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{۸k}{b^۲m}(l^۲ - \frac{b^۲}{۴})}$$

مثال ۲۷: شکل زیر نشان‌دهنده یک جرم کوچک m است که توسط چهار فنر الاستیک خطی، هر کدام با طول آزاد l، و با زاویه قرارگیری ۴۵ درجه‌ای نسبت به محور x نگه داشته شده است. معادله حرکت را برای جابه‌جایی‌های کوچک جرم در جهت x به‌دست آورید.



پاسخ: معادله حرکت سیستم داده شده در جهت x به صورت مقابل است:
$$m\ddot{x} + k_{eq}x = ۰$$

بنابراین کافی است که سختی معادل سیستم داده شده در راستای x را بیابیم. از طرفی با توجه به نکته بیان شده برای یافتن سختی فنرهای تحت زاویه از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

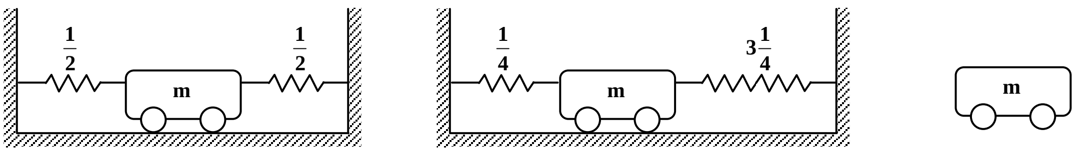


$$\Rightarrow \begin{cases} k_x = k\cos^۲\theta \\ k_y = k\sin^۲\theta \end{cases}$$

بنابراین برای سختی معادل سیستم داده شده داریم:
$$k_{eq} = ۲k_۱\cos^۲ ۴۵ + ۲k_۲\cos^۲ ۴۵ = ۲k_۱ \times \frac{۱}{۲} + ۲k_۲ \times \frac{۱}{۲} = k_۱ + k_۲$$

بنابراین معادله حرکت به صورت روبه‌رو خواهد بود:
$$m\ddot{x} + (k_۱ + k_۲)x = ۰$$

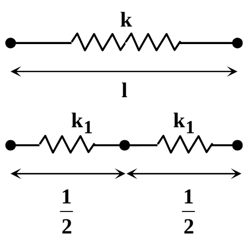
مثال ۲۸: دو فنر با سختی k به دو نیم تقسیم شده و یک جرم m بین دو نیمه همانند شکل قرار گرفته است. دوره زمانی طبیعی این سیستم برابر ۰/۵ ثانیه می‌باشد. اگر یک فنر مشابه را به گونه‌ای تقسیم کنیم که یک چهارم طول اولیه آن به یک سمت همان جرم و سه چهارم طول اولیه آن به طرف دیگر همانند شکل بسته شود، دوره طبیعی نوسان سیستم چه مقدار خواهد بود.



(a)　　(b)

پاسخ: فنرهایی را که در شکل به جرم m بسته شده‌اند می‌توان فنرهایی موازی به حساب آورد؛ زیرا تغییر شکل یکسانی بر آنها اعمال می‌شود. همچنین با کنار هم گذاردن دو بخش فنر، باید فنر با سختی اولیه به‌دست آید؛ بنابراین می‌توان سختی هر بخش را با استفاده از قاعده فنرهای سری محاسبه کرد.

حالت a)



$$\frac{۱}{k_{total}} = \frac{۱}{k_۱} + \frac{۱}{k_۱}$$

$$k_{total} = \frac{k_۱}{۲} \equiv k;\ k_۱ = ۲k$$

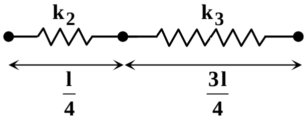
بنابراین سختی هر کدام از بخش‌ها برابر $2k$ می‌باشد که با توجه به موازی بسته شدن آنها در سیستم a، ضریب فنریت معادل برابر $4k$ خواهد بود. پس خواهیم داشت:

$$\tau_n = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}} \Rightarrow ۰/۵ = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{۴k}} \Rightarrow \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{۱}{۲\pi}$$

برای به دست آوردن سختی در حالت دوم (حالت b) ابتدا فنر را به ۴ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم که یکی از آنها را به سمت چپ و سه‌تای دیگر را به سمت راست جرم m متصل می‌کنیم، لذا:

$\Rightarrow$ چهار فنر k' با هم سری هستند $\Rightarrow \frac{۱}{k'}+\frac{۱}{k'}+\frac{۱}{k'}+\frac{۱}{k'}=\frac{۱}{k} \Rightarrow \frac{۴}{k'}=\frac{۱}{k} \Rightarrow k_۲ = k' = ۴k$

سه فنر سری با سختی k' فنر $k_۳$ با طول $\frac{۳l}{۴}$ را تشکیل می‌دهند، لذا:



$$\Rightarrow \frac{۱}{k'}+\frac{۱}{k'}+\frac{۱}{k'}=\frac{۱}{k_۳} \Rightarrow \frac{۳}{k'}=\frac{۱}{k_۳} \Rightarrow k_۳=\frac{k'}{۳} \Rightarrow k_۳=\frac{۴k}{۳}$$

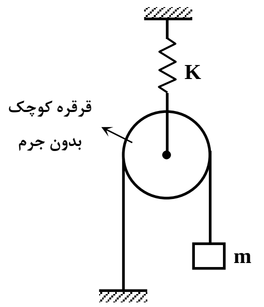
بنابراین فنر با طول $\frac{l}{۴}$ دارای سختی $k_۲ = ۴k$ می‌باشد و فنر با طول $\frac{۳l}{۴}$ دارای سختی $k_۳ = \frac{۴k}{۳}$ می‌باشد که با توجه به موازی بسته شدن آنها در سیستم b داریم:

$$k_{eq} = ۴k + \frac{۴k}{۳} = \frac{۱۶k}{۳} \Rightarrow \text{دوره طبیعی } \tau_n = \frac{۲\pi}{\omega_n} = \frac{۲\pi}{(\frac{k_{eq}}{m})^{\frac{۱}{۲}}} = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}} \Rightarrow \tau_n = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{۱۶k}{۳}}} = \frac{۲\pi\sqrt{۳}}{۴}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{۱}{۲\pi} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(s)$$

بررسی چگونگی محاسبه فرکانس طبیعی سیستم‌های قرقره‌ای

برای محاسبه فرکانس طبیعی سیستم‌های قرقره‌ای یک درجه آزادی، بهتر است ابتدا با استفاده از روش‌های بیان شده‌ی قبل، سختی معادل کل سیستم را به‌دست آوریم و سپس از رابطه $\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}$ استفاده کنیم و یا روش اصل پایستگی انرژی را برای به دست آوردن معادله حرکت و فرکانس طبیعی سیستم به‌کار بریم.

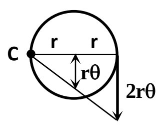
مثال۲۹: فرکانس طبیعی سیستم نشان داده شده برابر است با:



۱) $\sqrt{\frac{k}{m}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۲k}{m}}$

۳) $\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{k}{m}}$ ۴) $۲\sqrt{\frac{k}{m}}$

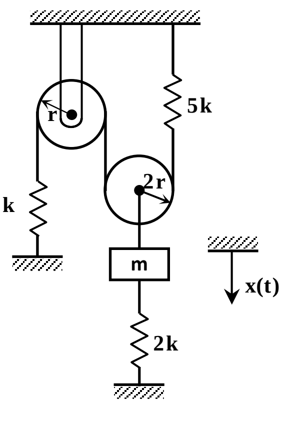
پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از روش پایستگی انرژی داریم (با توجه به نکته ۶ از اثر وزن صرف‌نظر می‌شود):



$$T = \frac{۱}{۲}m(۲r\dot{\theta})^۲ = ۲mr^۲\dot{\theta}^۲ \quad ; \quad V_e = \frac{۱}{۲}k(r\theta)^۲ = \frac{۱}{۲}kr^۲\theta^۲$$

$$\frac{d}{dt}(T+V_e) = ۰ \Rightarrow ۴mr^۲\ddot{\theta}\dot{\theta} + kr^۲\theta\dot{\theta} = ۰ \Rightarrow ۴m\ddot{\theta} + k\theta \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{۴m}} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

مثال۳۰: معادله حرکت شکل زیر را با رسم دیاگرام آزاد جسم و استفاده از قانون دوم نیوتن بیابید.

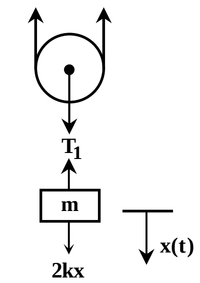


پاسخ: فرض کنید که فنرهای متصل به قرقره‌ها (توسط طناب‌ها) با همدیگر سری باشند (این فرض، با توجه به ناچیز بودن جرم طناب، فرض صحیحی است).

در این صورت داریم:

$$\frac{۱}{k_{eq}} = \frac{۱}{k} + \frac{۱}{۵k}$$

$$k_{eq} = \frac{۵}{۶}k$$

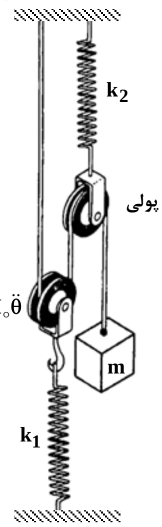


حال اگر جابه‌جایی جرم m برابر x باشد، کشیدگی طناب (متصل شده به قرقره‌ها) برابر است بـا ۲x. از دیاگرام آزاد جسم نشان داده شده، معادله حرکت جرم m به صورت زیر است:

$$m\ddot{x}+۲kx+k_{eq}(۲x)=۰ \Rightarrow$$

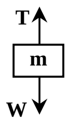
$$m\ddot{x}+\frac{۱۱}{۳}kx=۰$$

مثال۳۱: فرکانس طبیعی سیستم نشان داده شده در شکل زیر را به‌دست آورید. فرض کنید که قرقره‌ها بدون اصطکاک‌اند و جرم ناچیزی دارند.



(a)

☑ **پاسخ:** به خاطر بدون جرم و بدون اصطکاک بودن قرقره‌ها کشش طناب ثابت است و برابـر بـا وزن W می‌باشد.



$\Rightarrow T=W$

برای یافتن فرکانس طبیعی سیستم داده شده با توجه به رابطـه $\omega_n=\sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$، کـافی اسـت کـه سختی معادل فنرها را بیابیم و برای این منظور با استفاده از رابطه زیر داریم:

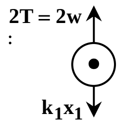
$$\text{جابه‌جایی خالص جرم m} = \frac{\text{وزن}}{\text{ثابت فنریت معادل}}$$

بنابراین ابتدا جابه‌جایی خالص جرم m را می‌یابیم:

۲× (جابه‌جایی مرکز قرقره ۲ رو به پایین+ جابه‌جایی مرکز قرقره ۱ رو به بالا)= جابه‌جایی خالص جرم m

و برای محاسبه جابه‌جایی قرقره‌های ۱و۲ داریم:

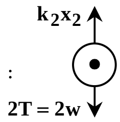
قرقره ۱ :



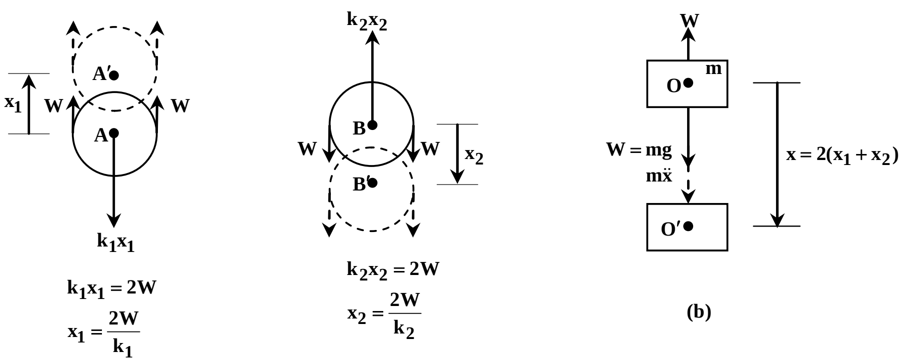
$\Rightarrow k_۱x_۱=۲w \Rightarrow x_۱=\frac{۲w}{k_۱}$

$\Rightarrow$ جابه‌جایی خالص جرم m : $x=۲\times(\frac{۲w}{k_۱}+\frac{۲w}{k_۲})$

قرقره ۲ :



$\Rightarrow k_۲x_۲=۲w \Rightarrow x_۲=\frac{۲w}{k_۲}$



(b)

بنابراین با جایگذاری در عبارت (*) داریم:

ثابت فنریت معادل: $k_{eq}=\frac{w}{x}=\frac{w}{۴w(\frac{۱}{k_۱}+\frac{۱}{k_۲})}=\frac{k_۱k_۲}{۴(k_۱+k_۲)}$

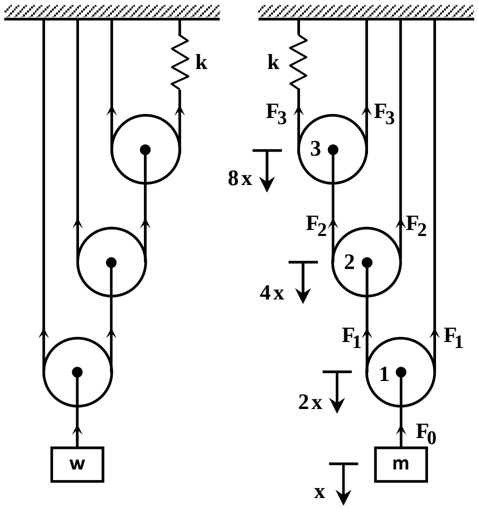
در نتیجه، فرکانس طبیعی سیستم داده شده برابر است با:

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}=\sqrt{\frac{k_۱k_۲}{۴m(k_۱+k_۲)}}\ \frac{rad}{see}$$

و یا به عبارت دیگر:

$$f_n=\frac{\omega_n}{۲\pi}=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k_۱k_۲}{۴m(k_۱+k_۲)}}\ \frac{cycles}{sec}$$

مثال۳۲: وزنه W توسط سه قرقره بدون اصطکاک و بدون جرم و یک فنر با سختی k همانند شکل نگه داشته شده است. فرکانس طبیعی ارتعاش وزنه W را برای نوسانات کوچک به‌دست آورید.



پاسخ: با توجه به شکل، برای جابه‌جایی جرم m به اندازه x، قرقره‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب ۲x، ۴x و ۸x جابه‌جا خواهند شد. برای محاسبه فرکانس طبیعی از اصل پایستاری انرژی استفاده می‌کنیم و با توجه به نکته ۳ و ۶ اثر وزن را در نظر نمی‌گیریم؛ زیرا با افزایش جرم m سیستم شروع به حرکت می‌کند و از حال تعادل خارج می‌شود، بنابراین:

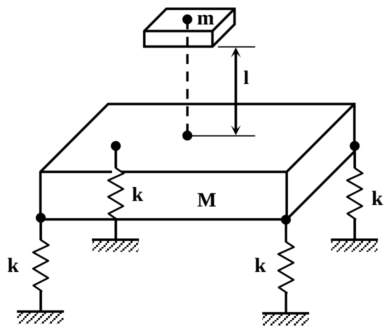
انرژی جنبشی: $T=\frac{۱}{۲}m\dot{x}^۲$

انرژی پتانسیل: $U=\frac{۱}{۲}k(۸x)^۲=۳۲kx^۲$

اصل پایستاری انرژی: $\frac{d}{dt}(T+U)=۰ \Rightarrow m\ddot{x}+۶۴kx=۰$

بنابراین فرکانس طبیعی برابر است با: $\omega_n=\sqrt{\frac{۶۴k}{m}}=۸\sqrt{\frac{k}{m}}$

مثال۳۳: یک بلوک صلب به جرم M روی چهار نگهدارنده الاستیک همانند شکل قرار گرفته است. جسمی به جرم m از ارتفاع l سقوط کرده و بدون برگشت به بلوک صلب می‌چسبد. اگر ثابت فنریت هر کدام از نگهدارنده‌های الاستیکی برابر k باشد، فرکانس طبیعی ارتعاش سیستم را (الف) با صرف‌نظر از جرم m، (ب) با در نظر گرفتن جرم m بیابید. همچنین حرکت حاصل شده سیستم را در حالت (ب) پیدا کنید.



پاسخ: با توجه به اینکه فنرها به صورت موازی بسته شده‌اند و جرم کل در حالت اول برابر M و در حالت دوم برابر M + m است، داریم:

الف) $\omega_n=\sqrt{\frac{۴k}{M}}$ ، ب) $\omega_n=\sqrt{\frac{۴k}{(M+m)}}$

شرایط اولیه: سرعت جرم سقوط‌کننده در لحظه برخورد با بلوک برابر است با: $v^۲-\cancel{u^۲}^{۰}=۲gl \Rightarrow v=\sqrt{۲gl}$

اگر مختصات x، میزان جابه‌جایی دو جرم نسبت به موقعیت تعادل (حالتی که هر دو جرم به همدیگر چسبیده‌اند) به سمت پایین باشد، در لحظه برخورد که هنوز هیچ‌گونه جابه‌جایی صورت نپذیرفته، دو جرم در موقعیت $x_۰$ می‌باشند که اولاً منفی است (زیرا دو جرم نسبت به موقعیت تعادل بالاتر قرار گرفته‌اند) و ثانیاً مقدار آن از تقسیم وزن بر سختی فنرها به‌دست می‌آید: $x_۰=x(t=۰)=-\frac{mg}{۴k}$

حال برای به‌دست آوردن سرعت اولیه این سیستم (دو جرم با همدیگر) از قانون پایستگی اندازه حرکت خطی، داریم:

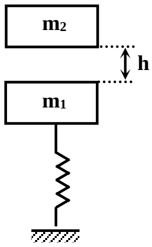
$$x(t)=A_۰\sin(\omega_n t+\phi_۰) \qquad \dot{x}_۰=\dot{x}(t=۰)=\frac{m}{M+m}\sqrt{۲gl} \;\; ; \qquad (M+m)\dot{x}_۰=mv=m\sqrt{۲gl} \;\; ;$$

بنابراین پاسخ کامل به صورت زیر خواهد بود:

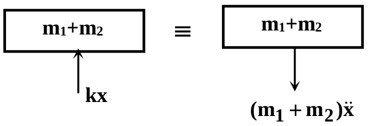
$$A_۰=\sqrt{x_۰^۲+(\frac{\dot{x}_۰}{\omega_n})^۲}=\sqrt{\frac{m^۲g^۲}{۱۶k^۲}+\frac{m^۲gl}{۲k(M+m)}} \quad ; \quad \phi_۰=\tan^{-۱}(\frac{x_۰\omega_n}{\dot{x}_۰})=\tan^{-۱}(\frac{-\sqrt{g(M+m)}}{\sqrt{۸lk}})$$

و در نتیجه حرکت هارمونیک حاصل شده به‌صورت روبه‌رو خواهد بود:

$$x(t)=(\frac{mg}{۴k})\sqrt{۱+\frac{۸kL}{g(M+m)}}\sin(\sqrt{\frac{۴k}{M+m}}\,t-\tan^{-۱}(\sqrt{\frac{g(M+m)}{۸KL}}))$$



مثال۳۴: **در شکل زیر جرم m_1 از فنری با سختی k آویزان است و در تعادل استاتیکی قرار دارد. جرم m_2 از ارتفاع h سقوط می‌کند و بدون واجهشی به جرم m_1 می‌چسبد. ماکزیمم شتاب مجموعه بعد از چسبیدن جرم m_2 به m_1 کدام است؟**



☑ **پاسخ:** برای یافتن شتاب ماکزیمم سیستم پس از برخورد جرم m_2 به m_1، باید ابتدا معادله حرکت آن را بیابیم، لذا:

$$\Rightarrow (m_1+m_2)\ddot{x} = -kx \ \Rightarrow (m_1+m_2)\ddot{x} + kx = 0$$

باید توجه داشت که از اثر نیروی وزن در دیاگرام آزاد نیروهای فوق صرف‌نظر شده است؛ زیرا همانطور که قبلاً بیان شد، افزایش نیروی وزن سیستم در حالت تعادل استاتیکی سبب حرکت سیستم می‌شود. پاسخ معادله فوق به شکل کلی زیر است:

$$(m_1+m_2)\ddot{x} + kx = 0 \ \Rightarrow x(t) = A\sin\omega_n t + B\cos\omega_n t \ , \ \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$$

برای یافتن ثابت‌های A و B باید از شرایط اولیه استفاده کنیم؛ لذا برای به‌دست آوردن جابه‌جایی اولیه ابتدا تغییر مکان استاتیکی قبل و بعد از برخورد جرم m_2 به m_1 را محاسبه می‌کنیم:

$$m_1 g = k\delta_{st1} \ \Rightarrow \delta_{st1} = \frac{m_1 g}{k}$$

$$(m_1+m_2)g = k\delta_{st2} \ \Rightarrow \delta_{st2} = \frac{(m_1+m_2)g}{k}$$

از آنجایی که معادله حرکت حول نقطه تعادل استاتیکی بعد از برخورد جرم m_2 به m_1 نوشته شده است، بنابراین تفاوت دو مقدار تغییر مکان استاتیکی فوق، جابه‌جایی اولیه سیستم را نتیجه می‌دهد:

$$x(0) = \delta_{st1} - \delta_{st2} = \frac{m_1 g}{k} - \frac{(m_1+m_2)g}{k} = -\frac{m_2 g}{k}$$

و برای سرعت اولیه $\dot{x}(t)$ داریم:

$$V^2 - \cancel{V_0^2}^{\,0} = 2gh \ \Rightarrow V = \sqrt{2gh}$$

از بقاء تکانه حرکت خطی در راستای برخورد داریم:

$$m_2 V = (m_1+m_2)V' \ \Rightarrow V' = \frac{m_2}{m_1+m_2}V$$

$$V = \sqrt{2gh} \ \Rightarrow V' = \frac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2gh} \ \Rightarrow \dot{x}(0) = \frac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2gh}$$

$$x(t) = A\sin\omega_n t + B\cos\omega_n t \ \Rightarrow \dot{x}(t) = A\omega_n\cos\omega_n t - B\omega_n\sin\omega_n t$$

$$\begin{cases} x(0) = B, x(0) = -\dfrac{m_2 g}{k} \ \Rightarrow B = -\dfrac{m_2 g}{k} \\ \dot{x}(0) = A\omega_n, \dot{x}(0) = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2gh} \ \Rightarrow A\omega_n = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2gh} \end{cases}$$

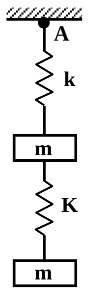
$$\Rightarrow A = \frac{m_2}{\omega_n(m_1+m_2)}\sqrt{2gh} \xrightarrow{\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}} A = m_2\sqrt{\frac{2gh}{k(m_1+m_2)}}$$

$$\Rightarrow x(t) = m_2\sqrt{\frac{2gh}{k(m_1+m_2)}}\sin\omega_n t - \frac{m_2 g}{k}\cos\omega_n t$$

$$\ddot{x}(t) = -m_2\omega_n^2\sqrt{\frac{2gh}{k(m_1+m_2)}}\sin\omega_n t + \frac{m_2 g}{k}\omega_n^2\cos\omega_n t$$

$$[\ddot{x}(t)]_{max} = \sqrt{m_2^2\omega_n^4\frac{2gh}{k(m_1+m_2)} + (\frac{m_2 g}{k})^2\omega_n^4} \ , \ \omega_n^2 = \frac{k}{m_1+m_2}$$

$$[\ddot{x}(t)]_{max} = (\frac{m_2}{m_1+m_2})\sqrt{\frac{2kgh}{m_1+m_2} + g^2}$$



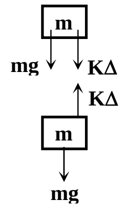
مثال۳۵: دو جسم از نخ آویزان هستند. مطابق شکل در یک لحظه معین نخ A را با کبریت می‌سوزانیم و اجسام سقوط می‌کنند. کدام گزینه صحیح است؟

۱) در لحظه اول سقوط، شتاب جسم پائینی از شتاب جسم بالایی بیشتر است.

۲) در لحظه‌ی اول سقوط، شتاب جسم بالایی از شتاب جسم پائینی بیشتر است.

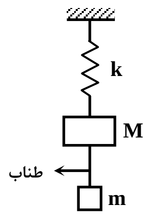
۳) در لحظه‌ی اول سقوط، شتاب هر دو جسم مساوی است.

۴) در لحظه‌ی اول سقوط، شتاب هر دو جسم مساوی و برابر (g) شتاب ثقل است.



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» پس از پاره شدن نخ از نقطه‌ی A، دیاگرام آزاد روبه‌رو را برای هر دو جرم خواهیم داشت: در این دیاگرام، Δ به منزله‌ی تغییر طول اولیه‌ی فنر در اثر آویزان شدن جرم پائینی است. همانطور که ملاحظه می‌شود در صورت عدم وجود نیروی $k\Delta$ هر دو جرم با شتاب g سقوط می‌کنند ولی نیروی $k\Delta$ باعث کم شدن شتاب سقوط جرم پائینی و بالاتر رفتن شتاب جرم بالایی می‌شود. دقت شود که در اینجا فنر بالایی هیچ تأثیری در شتاب جرم‌های پایینی ندارد.

مثال۳۶: در سیستم نشان داده شده در شکل مقابل ناگهان طناب را پاره می‌کنیم. معادله‌ی حرکت سیستم کدام است؟



۱) $x=\frac{۲mg}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{M}}t$

۲) $x=\frac{g}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\sin\sqrt{\frac{k}{M}}t$

۳) $x=\frac{mg}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{M}}t$

۴) $x=\frac{mg}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{M}}t+\frac{Mg}{k}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» جرم m به منزله‌ی یک جابه‌جایی اولیه برای سیستم جرم M و فنر k از حالت تعادل است. این جابه‌جایی برابر است با:

$$x(\circ)=\frac{mg}{k}$$

در هنگام بریده شدن طناب، سیستم M و k با فرکانس $\sqrt{\frac{k}{M}}$ شروع به نوسان خواهند کرد و سرعت اولیه این نوسان صفر است؛ بنابراین پاسخ سیستم برابر است با:

شرایط اولیه
$$\begin{cases}\dot{x}(\circ)=\circ\\ x(\circ)=\frac{mg}{k}\end{cases},\quad \left.\begin{array}{l}x(t)=A\cos\sqrt{\frac{k}{M}}t+B\sin\sqrt{\frac{k}{M}}t\\ x(\circ)=\frac{mg}{k}\rightarrow A=\frac{mg}{k}\\ \dot{x}(\circ)=\circ\rightarrow B=\circ\end{array}\right\}\Rightarrow x(t)=\frac{mg}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{M}}t$$

مثال۳۷: فرکانس طبیعی یک سیستم جرم و فنر برابر ۳ هرتز می‌باشد. هنگامی‌که جرم اضافی ۸ کیلوگرمی به جرم اولیه m اضافه می‌شود، فرکانس طبیعی آن به ۱ هرتز کاهش می‌یابد. سختی k و جرم m را بیابید.

☑ **پاسخ:** در حالت اول روابط روبه‌رو را داریم:

$$f=۳Hz\Rightarrow\omega_n=۲\pi f=۶\pi\frac{rad}{s}=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

بنابراین رابطه k و m به‌صورت روبه‌رو خواهد بود:

$$\sqrt{k}=۶\pi\sqrt{m}$$

با افزودن جرم هشت کیلوگرمی، فرکانس جدید ارتعاش به صورت مقابل خواهد بود:

$$\omega_n'=\sqrt{\frac{k'}{m'}}=\sqrt{\frac{k}{m+۸}}=۲\pi\frac{rad}{sec}$$

بنابراین داریم:

$$\sqrt{k}=۲\pi\sqrt{m+۸}=۶\pi\sqrt{m}$$

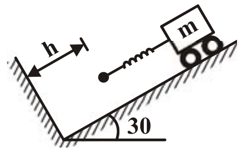
پس می‌توان نوشت:

$$\sqrt{m+۸}=۳\sqrt{m}\quad,\quad m=۸kg$$

$$k=(۶\pi)^۲m=۳۶\pi^۲\frac{N}{m}$$

آزمون فصل چهارم

۱ـ سیستم جرم فنر شکل زیر بر روی یک سطح هموار با شیب ۳۰° می‌لغزد. بیشترین مقدار نیروی منتقل شده به جرم m در لحظه برخورد فنر به تکیه‌گاه چقدر است؟



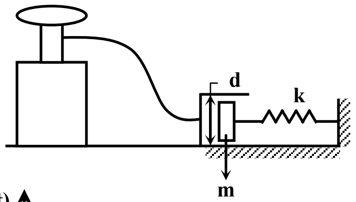
۱) $F_{max} = m\omega_n^۲\sqrt{\frac{۲gh}{\omega_n^۲}+(\frac{g}{\omega_n^۲})^۲}$

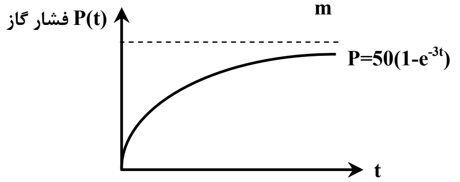
۲) $F_{max} = m\omega_n^۲\sqrt{\frac{gh}{\omega_n^۲}+(\frac{g}{\omega_n^۲})^۲}$

۳) $F_{max} = m\omega_n^۲\sqrt{\frac{۲gh}{\omega_n^۲}+(\frac{g}{۲\omega_n^۲})^۲}$

۴) $F_{max} = m\omega_n^۲\sqrt{\frac{gh}{\omega_n^۲}+(\frac{g}{۲\omega_n^۲})^۲}$

۲ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر معادله‌ی حرکت سیستم ارتعاشی را بعد از باز شدن شیر نشان می‌دهد؟





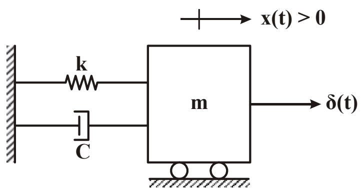
۱) $x(t)=\frac{۱}{m\omega_n}\sin(\omega_n(t-\tau))$

۲) $x(t)=\int_۰^t ۵۰(۱-e^{-۳t})\frac{۱}{m\omega_n}\sin(\omega_n(t-\tau))d\tau$

۳) $x(t)=\frac{۱}{m\omega_n}\cos(\omega_n(t-\tau))$

۴) $\frac{۱}{m\omega_n}\sin(\omega_n(t-\tau))+\int_۰^t ۵۰(۱-e^{-۳t})\frac{۱}{m\omega_n}\sin(\omega_n(t-\tau))d\tau$

۳ـ سیستم یک درجه آزادی فنرـ وزنه ـ دمپر مطابق شکل زیر تحت تحریک ضربه واحد داریم (شرایط اولیه برابر صفر فرض شود). برای سیستم بدون ورودی، چه شرایط اولیه‌ای در نظر بگیریم، تا پاسخ ارتعاش آن مشابه حالت اول باشد؟



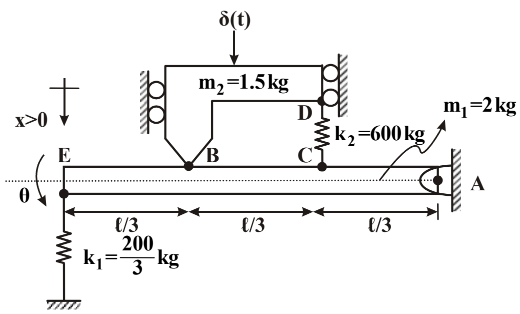
۱) $x(۰)=۰$ ، $\dot{x}(۰)=m$

۲) $x(۰)=m$ ، $\dot{x}(۰)=۰$

۳) $x(۰)=۰$ ، $\dot{x}(۰)=\frac{۱}{m}$

۴) $x(۰)=\frac{۱}{m}$ ، $\dot{x}(۰)=۰$

۴ـ در سیستم ارتعاشی زیر تیر صُلب به جرم $m_۱$، همواره در حین ارتعاش با جسم صُلب به جرم $m_۲$ در یک نقطه (B) در تماس است و جرم $m_۲$ مقید به حرکت در شیار قائم می‌باشد. اگر بار ضربه واحد $\delta(t)$ به جرم $m_۲$ وارد شود، پاسخ ارتعاش سیستم با توجه به داده‌های مسئله برابر است با:



۱) $x(t)=۰/۱۵\sin(۱۰t)$

۲) $\theta(t)=۳\sin(۱۰t)$

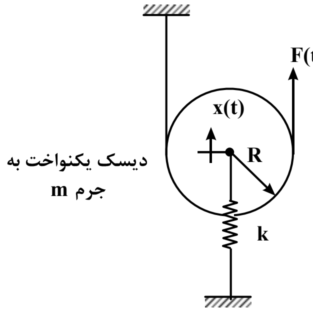
۳) $x(t)=۲۰\sin(۱۰t)$

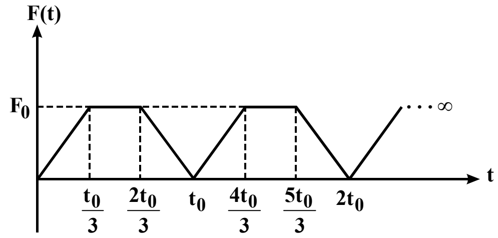
۴) $\theta(t)=۰/۳\sin(۱۰t)$

۵ـ یک سیستم فنرـ وزنهـ دمپر یک درجه آزادی با ارتعاش اجباری تحت ضربه واحد داریم. اگر همان سیستم را بدون ورودی در نظر بگیریم، در چه صورت امکان این وجود دارد که پاسخ سیستم بدون ورودی به شرایط اولیه با پاسخ سیستم بدون شرایط اولیه با ورودی ضربه واحد مساوی شود؟

۱) اگر $\dot{x}(۰)=۰$ باشد.
۲) اگر $x(۰)=۰$ باشد.
۳) اگر شتاب اولیه صفر باشد.
۴) امکان ندارد.

۶ـ دیسک یکنواختی به جرم m و شعاع R مطابق شکل تحت تحریک متناوب $F(t)$ قرار گرفته است. پاسخ ارتعاش اجباری سیستم $x(t)$ عبارت است از: (فرض کنید: $x(0) = \dot{x}(0) = 0$)





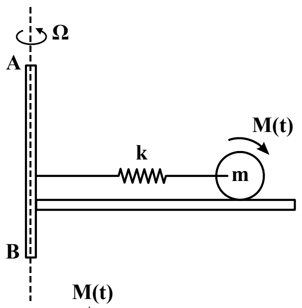
۱) $x(t) = \dfrac{2F_0}{3k} + \dfrac{9F_0}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{+\infty}\dfrac{\cos(\frac{2\pi i}{t_0}t)}{i^2(-k+\frac{6m\pi^2 i^2}{t_0^2})}$

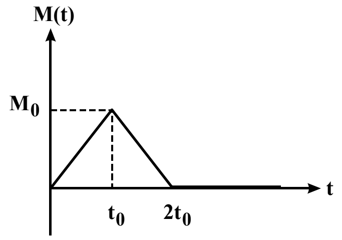
۲) $x(t) = \dfrac{F_0}{3k} + \dfrac{9F_0}{2\pi^2}\sum_{i=1,2,4,5,7,8,\dots}^{+\infty}\dfrac{\cos(\frac{2\pi i}{t_0}t)}{i^2(-k+\frac{6m\pi^2 i^2}{t_0^2})}$

۳) $x(t) = \dfrac{F_0}{3k} + \dfrac{9F_0}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{\cos(\frac{2\pi i}{t_0}t)}{i^2(-k+\frac{6m\pi^2 i^2}{t_0^2})}$

۴) $x(t) = \dfrac{2F_0}{3k} + \dfrac{9F_0}{2\pi^2}\sum_{i=1,2,4,5,7,8,\dots}^{\infty}\dfrac{\cos(\frac{2\pi i}{t_0}t)}{i^2(-k+\frac{6m\pi^2 i^2}{t_0^2})}$

۷ـ تبدیل لاپلاس پاسخ ارتعاش اجباری سیستم ارتعاشی داده شده با کدام گزینه برابر است؟ (دیسک به جرم m و شعاع R به یک فنر با ثابت k متصل شده و مجموعه حول محور AB با سرعت ثابت Ω دوران می‌کند. تحریک گشتاور خارجی $M(t)$ به صورت شکل زیر داده شده است و شرایط اولیه $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ است)





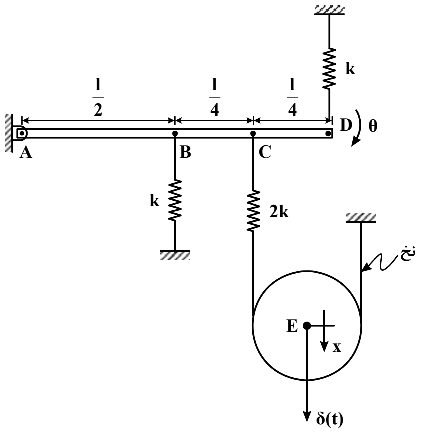
۱) $\theta(s) = \dfrac{2M_0}{3t_0 s^2}\ \dfrac{1-2e^{-t_0 s}+e^{-2t_0 s}}{s^2+\frac{2}{3}(\frac{k}{m}-\Omega^2)}$

۲) $\theta(s) = \dfrac{M_0}{t_0 s^2}\ \dfrac{1-2e^{-t_0 s}+e^{-2t_0 s}}{s^2+\frac{2}{3}(\frac{k}{m}-\Omega^2)}$

۳) $\theta(s) = \dfrac{2M_0}{3mR^2 t_0 s^2}\ \dfrac{1-2e^{-t_0 s}+e^{-2t_0 s}}{s^2+\frac{2}{3}(\frac{k}{m}-\Omega^2)}$

۴) $\theta(s) = \dfrac{M_0}{mR^2 t_0 s^2}\ \dfrac{1-2e^{-t_0 s}+e^{-2t_0 s}}{s^2+\frac{2}{3}(\frac{k}{m}-\Omega^2)}$

۸ـ تیر صلب بدون جرم AD به طول l در نقطه A مفصل شده و در نقاط B و D توسط دو فنر با ثابت k مهار شده است. دیسک یکنواختی به جرم m و شعاع R که تحت تحریک ضربه‌ای واحد در نقطه E مرکز دیسک قرار گرفته است، بر روی یک نخ غیرقابل انعطاف قرار گرفته که دو انتهای این نخ به دیوار و فنر $2k$ متصل شده است. با فرض $x(0) = \dot{x}(0) = 0$، انتگرال کانولوشن پاسخ $x(t)$ سیستم به ضربه واحد $\delta(t)$ برابر است با:



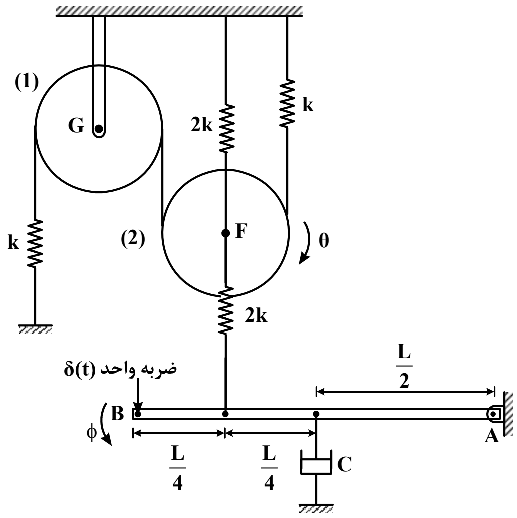
۱) $\omega_n = \sqrt{\dfrac{80k}{19m}}\quad,\quad x(t) = \dfrac{2}{3m\omega_n}\int_0^t \sin\omega_n(t-\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau$

۲) $\omega_n = \sqrt{\dfrac{160k}{57m}}\quad,\quad x(t) = \dfrac{2}{3m\omega_n}\int_0^t \sin\omega_n(t-\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau$

۳) $\omega_n = \sqrt{\dfrac{80k}{19m}}\quad,\quad x(t) = \dfrac{2}{m\omega_n}\int_0^t \sin(\omega_n\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$

۴) $\omega_n = \sqrt{\dfrac{160k}{57m}}\quad,\quad x(t) = \dfrac{2}{m\omega_n}\int_0^t \sin(\omega_n\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$

۹ـ دو دیسک بدون جرم (۱) و (۲) به شعاع R مطابق شکل در نظر بگیرید. فرض کنید میله AB به جرم m و طول l که حول نقطه A مفصل شده است، توسط دمپر C و فنر ۲k که به مرکز دیسک (۲) متصل شده، مهار شده باشد. با در نظر گرفتن شرایط اولیه $\phi(\circ)=\dot{\phi}(\circ)=\circ$ و نیروی ضربه واحد $\delta(t)$ در انتهای B از میله، تبدیل لاپلاس پاسخ تیر به ضربه واحد؛ $\phi(s)$، عبارت است از:



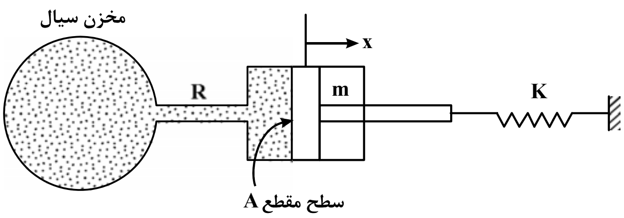
۱) $\phi(s)=\dfrac{۳}{m\ell s^۲+(\frac{۳cL}{۴})s+(\frac{۸۱kL}{۳۲})}$

۲) $\phi(s)=\dfrac{۱/۵}{ms^۲+(\frac{۳c}{۴})s+(\frac{۸۱k}{۳۲})}$

۳) $\phi(s)=\dfrac{۳}{ms^۲+(\frac{۳c}{۴})s+(\frac{۸۱k}{۳۲})}$

۴) $\phi(s)=\dfrac{۱/۵}{m\ell s^۲+(\frac{۳cL}{۴})s+(\frac{۸۱kL}{۳۲})}$

۱۰ـ سیستم شکل زیر مکانیزم یک دستگاه اندازه‌گیری فشار را نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم فشار مخزن سیال برابر با $p(t)=e^{-\sigma t}\sin(\omega t)$ باشد. مقاومت R جریان سیال از نوع مقاومت‌های خطی است یعنی تغییرات فشار بر اثر عبور از مقاومت R برابر $\Delta p=R.\Delta q$ می‌باشد که در آن Δq تغییرات دبی جریان سیال عبوری می‌باشد. انتگرال کانولوشن پاسخ $x(t)$ با در نظر گرفتن شرایط اولیه $x(\circ)=\dot{x}(\circ)=\circ$ برای جرم m برابر است با:



۱) $\omega_d=\sqrt{\dfrac{k}{m}-(\dfrac{RA^۲}{۲m})^۲}\quad,\quad x(t)=\dfrac{Ae^{-\xi\omega_n t}}{m\omega_d}\int_\circ^t e^{(\xi\omega_n-\sigma)\tau}.\sin(\omega\tau).\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau$

۲) $\omega_d=\sqrt{\dfrac{k}{m}-(\dfrac{RA^۲}{m})^۲}\quad,\quad x(t)=\dfrac{Ae^{-\sigma t}}{m\omega_d}\int_\circ^t e^{(\sigma-\xi\omega_n)\tau}.\sin(\omega_d\tau).\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$

۳) $\omega_d=\sqrt{\dfrac{k}{m}-(\dfrac{RA^۲}{۲m})^۲}\quad,\quad x(t)=\dfrac{Ae^{-\sigma t}}{۲m\omega_d}\int_\circ^t e^{(\sigma-\xi\omega_n)\tau}.\sin(\omega_d\tau).\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$

۴) $\omega_d=\sqrt{\dfrac{k}{m}-(\dfrac{RA^۲}{m})^۲}\quad,\quad x(t)=\dfrac{Ae^{-\xi\omega_n t}}{۲m\omega_d}\int_\circ^t e^{(\xi\omega_n-\sigma)\tau}.\sin(\omega\tau).\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau$

فصل پنجم

«سیستم‌های دو درجه آزادی»

مقدمه

برای توصیف حرکت برخی سیستم‌ها نیاز به بیش از یک مختصه است که هر مختصه بیانگر یک درجه آزادی در سیستم می‌باشد. به این‌گونه سیستم‌ها چند درجه آزادی یا N درجه آزادی می‌گویند که در آن‌ها N تعداد مختصات لازم برای توصیف حرکت می‌باشد.

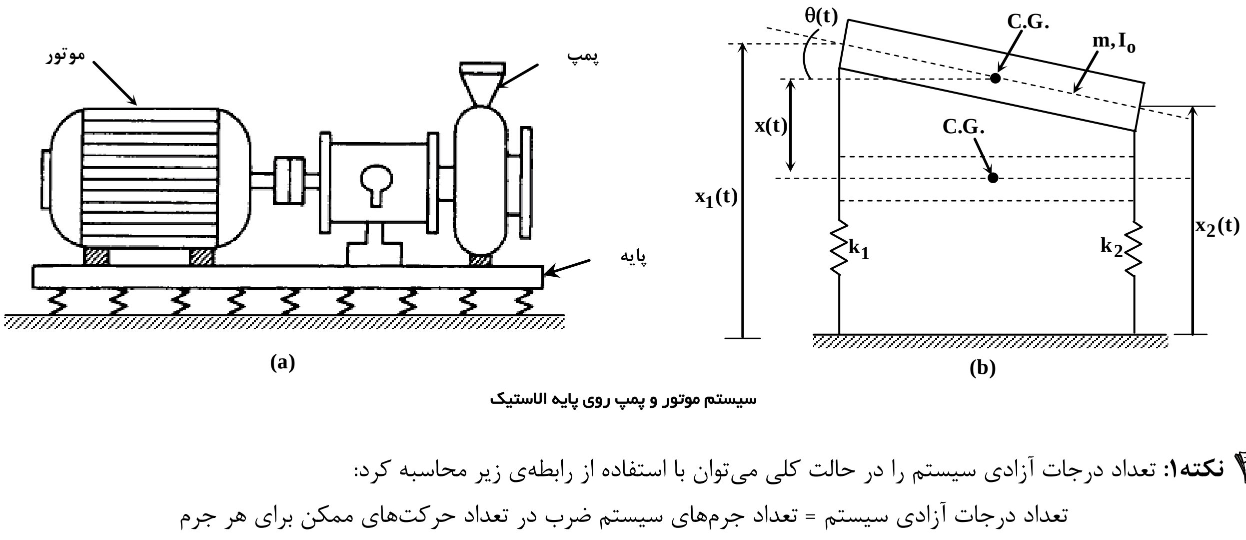
ساده‌ترین سیستم N درجه آزادی، دو درجه آزادی می‌باشد.

تفاوت عمده یک سیستم N درجه آزادی با سیستم ۱ درجه آزادی در تعداد فرکانس‌های طبیعی است، به طوری‌که سیستم N درجه آزادی دارای N فرکانس طبیعی می‌باشد و برای هر یک از فرکانس‌هاس طبیعی، یک حالت طبیعی نوسان با یک وضعیت تغییر مکان به نام مود طبیعی یا مود نرمال (اصلی) وجود دارد.

ارتعاشات در مود طبیعی، ارتعاشات آزاد نامیرایی هستند که به جرم و سختی (سفتی) سیستم و نحوه‌ی توزیع آن‌ها بستگی دارند. هنگامی که سیستم در یکی از مودهای طبیعی ارتعاش می‌کند، کلیه نقاط سیستم دارای حرکت هارمونیک ساده بوده و به طور هم‌زمان از وضعیت تعادل خود عبور می‌کنند. برای اینکه سیستم در مود طبیعی معینی به ارتعاش درآید، شرایط اولیه‌ی سیستم باید منطبق بر همان مود طبیعی باشد و برای شرایط اولیه عمومی‌تر ممکن است ارتعاشات شامل ترکیبی از تمام مودهای طبیعی باشد.

در این فصل به منظور بیان مفاهیم اصلی سیستم‌های چند درجه آزادی، ارتعاشات سیستم‌های دو درجه آزادی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

سیستم موتور- پمپ نشان داده شده در شکل a را در نظر بگیرید. با این فرض که سیستم در صفحه عمودی ارتعاش می‌کند، می‌توان آن را به صورت یک جسم با جرم m و ممان اینرسی I_o در نظر گرفت که روی دو فنر به سختی k_1 و k_2 همانند شکل b قرار دارد. حرکت این سیستم در هر لحظه را می‌توان با دو مختصه $x(t)$ و $\theta(t)$ که به ترتیب نشانگر جابه‌جایی عمودی مرکز جرم (C.G.) و دوران جرم m حول مرکز جرم آن می‌باشد، مشخص کرد. همچنین به جای $x(t)$ و $\theta(t)$، می‌توان از $x_1(t)$ و $x_2(t)$ مشخص شده در شکل زیر به عنوان مختصات مستقل برای مشخص کردن حرکت سیستم استفاده کرد؛ بنابراین سیستم شکل زیر دارای دو درجه آزادی می‌باشد.



(a) (b)

سیستم موتور و پمپ روی پایه الاستیک

نکته۱: تعداد درجات آزادی سیستم را در حالت کلی می‌توان با استفاده از رابطه‌ی زیر محاسبه کرد:

تعداد درجات آزادی سیستم = تعداد جرم‌های سیستم ضرب در تعداد حرکت‌های ممکن برای هر جرم

برای هر جرم یا به طور دقیق‌تر برای هر درجه آزادی، یک معادله حرکت وجود دارد؛ بنابراین برای سیستم دو درجه آزادی دو معادله حرکت داریم و اگر پاسخ هر مختصه به صورت هارمونیک فرض شود، معادلات حرکت منجر به یک معادله فرکانسی شده که با استفاده از این معادله می‌توان دو فرکانس طبیعی سیستم را به‌دست آورد.

اگر یک تحریک اولیه دلخواه به سیستم اعمال شود، ارتعاش آزاد به وجود آمده برایندی از دو مود نرمال ارتعاش خواهد بود و به ازای شرایط اولیه خاص، ارتعاشات می‌تواند تنها در یکی از مودهای طبیعی (نرمال) اتفاق بیفتد. اگر سیستم تحت اثر یک نیروی هارمونیک خارجی ارتعاش کند، همانند سیستم‌های یک درجه آزادی، یک ارتعاش هارمونیک در فرکانس نیروی تحریک رخ می‌دهد و در صورتی که فرکانس نیرو برابر یکی از فرکانس‌های طبیعی سیستم باشد، تشدید رخ می‌دهد و دامنه‌های دو مختصه ماکزیمم می‌شوند. در حالت کلی معادلات دیفرانسیل حرکت یک سیستم دو درجه آزادی به صورت کوپل شده می‌باشند؛ یعنی هر معادله شامل همه مختصات است. البته ممکن است به ازای یک مجموعه مختصات خاص، هر یک از معادلات حرکت تنها شامل یک مختصه باشد. بدین ترتیب معادلات حرکت از هم مجزا شده و می‌توانند به صورت مستقل حل شوند. چنین مجموعه‌ای از مختصات را که باعث به وجود آمدن معادلات حرکت دی کوپله می‌شوند، مختصات اصلی می‌گویند.

معادلات حرکت برای ارتعاش واداشته (اجباری)

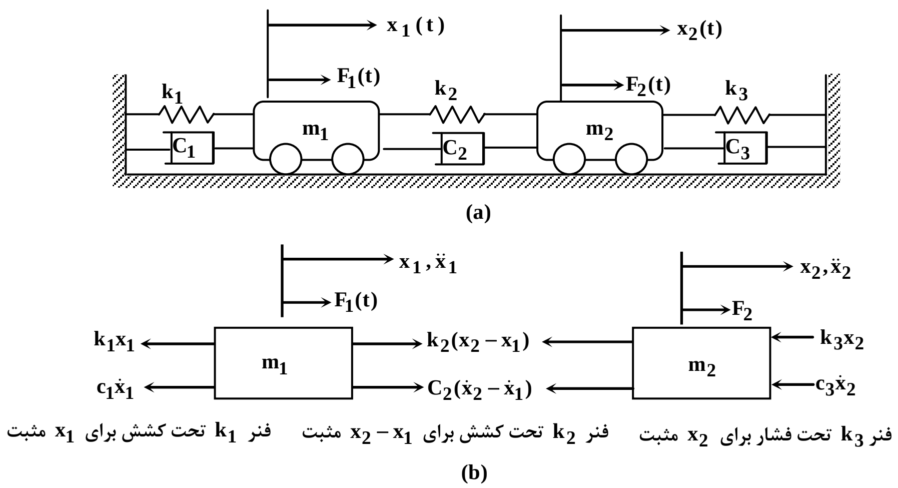
یک سیستم جرم، فنر و دمپر دو درجه آزادی را که در شکل زیر نشان داده شده است، در نظر بگیرید. حرکت این سیستم به طور کامل توسط مختصات $x_1(t)$ و $x_2(t)$ که مکان جرم‌های m_1 و m_2 در هر لحظه از زمان از موقعیت‌های تعادل متناظر می‌باشد، توصیف می‌شود. نیروهای خارجی $F_1(t)$ و $F_2(t)$ به ترتیب روی جرم‌های m_1 و m_2 عمل می‌کنند. دیاگرام‌های آزاد نیروهای وارد بر جرم‌های m_1 و m_2 در شکل b نشان داده شده‌اند. اعمال قانون دوم نیوتن برای حرکت هر کدام از جرم‌ها، معادلات حرکت زیر را نتیجه می‌دهد:

$$m_1\ddot{x}_1+(c_1+c_2)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=F_1$$

$$m_2\ddot{x}_2-c_2\dot{x}_1+(c_2+c_3)\dot{x}_2-k_2x_1+(k_2+k_3)x_2=F_2$$

دیده می‌شود که معادلات فوق شامل هر دو مختصه x_1 و x_2 می‌باشند؛ بنابراین سیستم دو درجه آزادی فوق دارای معادلات کوپل شده است، یعنی حرکت جرم‌های m_1 و m_2 متأثر از یکدیگر خواهند بود. این معادلات را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\boxed{[m]\ddot{\vec{x}}(t)+[c]\dot{\vec{x}}(t)+[k]\vec{x}(t)=\vec{F}(t)}$$



یک سیستم جرم – فنر – دمپر با دو درجه آزادی

که در رابطه فوق $[m]$، $[c]$ و $[k]$ به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی می‌باشند که از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$[m]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad [c]=\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix} \quad ; \quad [k]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}$$

و $\vec{x}(t)$ و $\vec{F}(t)$ به ترتیب بردارهای جابه‌جایی و نیرو می‌باشند و عبارتند از:

$$\vec{F}(t)=\begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{x}(t)=\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$$

می‌توان دید که ماتریس‌های $[m]$، $[c]$ و $[k]$ همگی ماتریس‌های 2×2 هستند که المان‌های آنها به ترتیب جرم‌ها، ضرایب میرایی و سختی‌های معلوم سیستم می‌باشند. همچنین دیده می‌شود که این ماتریس‌ها تا زمانی که سیستم خطی است، متقارن می‌باشند به گونه‌ای که:

$$\boxed{[m]^T=[m] \quad , \quad [c]^T=[c] \quad , \quad [k]^T=[k]}$$

که در روابط فوق بالانویس T، ترانهاده ماتریس می‌باشد.

زمانی که $c_2=k_2=0$ باشد، معادلات حرکت دی‌کوپل خواهد بود که نشان‌دهنده عدم ارتباط فیزیکی جرم‌های m_1 و m_2 می‌باشد. در چنین حالتی ماتریس‌های $[m]$، $[c]$ و $[k]$ قطری می‌شوند.

ارتعاش آزاد یک سیستم بدون میرایی

برای تحلیل ارتعاش آزاد سیستم نشان داده شده در شکل قبل، $F_1(t)$ و $F_2(t)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم. افزون بر این اگر میرایی در نظر گرفته نشود $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ بوده و معادلات حرکت به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$m_1\ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2x_2(t) = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2(t) - k_2x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) = 0$$

می‌خواهیم مود نرمال (طبیعی) را بررسی کنیم. در مود طبیعی نوسان تمام جرم‌ها دارای حرکت هارمونیک با فرکانس و فاز یکسان است و هم‌زمان از وضعیت تعادل عبور می‌کنند؛ بنابراین برای این حرکت می‌توان نوشت:

$$x_1(t) = X_1\cos(\omega t + \psi)$$
$$x_2(t) = X_2\cos(\omega t + \psi)$$

که در آن X_1 و X_2 ثابت‌هایی هستند که نشانگر دامنه‌های ماکزیمم $x_1(t)$ و $x_2(t)$ می‌باشند و ψ نیز نشان‌دهنده زاویه فاز است. با جایگذاری این معادلات در معادلات حرکت داریم:

$$[\{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\}X_1 - k_2X_2]\cos(\omega t + \psi) = 0$$
$$[-k_2X_1 + \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\}X_2]\cos(\omega t + \psi) = 0$$

با توجه به اینکه این معادلات باید برای همه مقادیر زمان t برقرار باشند، جمله‌های بین براکت‌ها باید برابر صفر باشند، بنابراین داریم:

$$\{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\}X_1 - k_2X_2 = 0$$
$$-k_2X_1 + \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\}X_2 = 0$$

معادلات فوق نشان‌دهنده دو معادله جبری همگن با مجهول‌های X_1 و X_2 می‌باشد. می‌توان دید که این معادلات با پاسخ بدیهی $X_1 = X_2 = 0$ ارضا می‌شوند که نشان‌دهنده حالت سکون و بدون ارتعاش می‌باشد. برای یک پاسخ غیرصفر برای X_1 و X_2، باید دترمینان ضرایب X_1 و X_2 برابر صفر باشد:

$$\det\begin{bmatrix} \{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\} & -k_2 \\ -k_2 & \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\} \end{bmatrix} = 0$$

معادله حاصل از دترمینان فوق، معادله فرکانسی یا مشخصه نامیده می‌شود؛ زیرا پاسخ این معادله فرکانس‌ها یا مقادیر مشخصه این سیستم را نتیجه می‌دهد.

مقادیر X_1 و X_2 به فرکانس‌های طبیعی ω_1 و ω_2 بستگی دارند. به خاطر همگن بودن معادلات حرکت، تنها می‌توان نسبت‌های $r_1 = \{\frac{X_2}{X_1}\}^{(1)}$ و $r_2 = \{\frac{X_2}{X_1}\}^{(2)}$ را پیدا کرد (بالانویس (۱) و (۲) مربوط به فرکانس طبیعی می‌باشد). برای $\omega^2 = \omega_1^2$ و $\omega^2 = \omega_2^2$، از معادلات همگن حرکت نتیجه می‌شود که:

$$r_1 = \{\frac{X_2}{X_1}\}^{(1)} = \frac{-m_1\omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_1^2 + (k_2 + k_3)}$$
$$r_2 = \{\frac{X_2}{X_1}\}^{(2)} = \frac{-m_1\omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_2^2 + (k_2 + k_3)}$$

توجه کنید که دو نسبت به دست آمده برای هر کدام از $r_i\ (i = 1,2)$ ها در این معادله مشابه‌اند. مودهای نرمال ارتعاش متناظر با ω_1^2 و ω_2^2 را می‌توان به ترتیب به صورت زیر بیان کرد:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ r_1X_1 \end{Bmatrix}^{(1)} \qquad \varphi_1 = \begin{Bmatrix} 1/00 \\ r_1 \end{Bmatrix}$$
$$\vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ r_2X_1 \end{Bmatrix}^{(2)} \qquad \varphi_2 = \begin{Bmatrix} 1/00 \\ r_2 \end{Bmatrix}$$

که در رابطه فوق φ_1 و φ_2 مودهای طبیعی نرمالیز شده سیستم می‌باشند.

روش محاسبه فرکانس طبیعی و مودهای طبیعی

همان‌طور که در مراحل حل مسئله قبل مشاهده شد، برای محاسبه‌ی فرکانس و مودهای طبیعی سیستم‌های چند درجه آزادی، ابتدا باید معادلات حرکت را استخراج کرد که این‌کار به دو روش انجام می‌گیرد:

۱) قوانین نیوتن

۲) معادلات لاگرانژ

که در این فصل از روش اول استفاده می‌شود. بعد از استخراج معادلات حرکت ماتریس‌های جرم، سفتی و میرایی مشخص می‌شوند؛ بنابراین می‌توان معادلات را به فرم ماتریسی نوشت:

$$\boxed{[m]\ddot{x}+[c]\dot{x}+[k]x=0}$$

برای محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی سیستم، دترمینان مقابل را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\boxed{\det([k]-\lambda[m])=0\ ,\ \lambda=\omega_i^2}$$

با حل معادله فوق (معادله مشخصه) فرکانس‌های طبیعی سیستم (ω_i) به دست می‌آیند. همان‌طور که اشاره شد برای هر فرکانس طبیعی یک مود طبیعی ارتعاش داریم که با قرار دادن فرکانس طبیعی به دست آمده در معادلات زیر می‌توان بردار ویژه مربوط به مود طبیعی همان فرکانس را تعیین کرد.

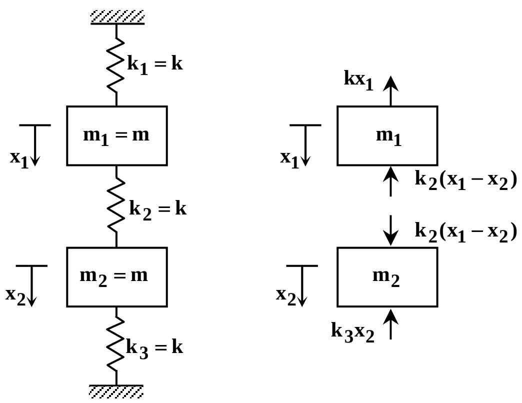
$$\boxed{([k]-\lambda[m])X=0\ \ ,\ \ X=\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{Bmatrix}}$$

از روابط فوق نسبت $\frac{X_1}{X_2}$ و $\frac{X_1}{X_3}$ و ... برای هر فرکانس طبیعی به دست می‌آید که با برابر ۱ قرار دادن یکی از دامنه‌ها (نرمالیزه کردن دامنه‌ها) مود طبیعی که با φ_i نشان داده می‌شود، به دست می‌آید.

$$\boxed{r_i=\{\frac{X_1}{X_2}\}^{(i)}\quad ;\quad \varphi_i=\begin{Bmatrix}1/00\\r_i\end{Bmatrix}}$$

نکته۲: چنانچه نسبت دو دامنه مثبت باشد، دو درجه آزادی مربوط به این دامنه‌ها هم‌فاز هستند و چنانچه منفی باشد، در فاز مخالف می‌باشند.

مثال۱: فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای یک سیستم جرم و فنر نشان داده شده در شکل روبه‌رو را که تنها می‌تواند در راستای عمودی حرکت کند، بیابید.



پاسخ: اگر x_1 و x_2 را از موقعیت تعادل استاتیکی جرم‌های m_1 و m_2 به عنوان مختصات برای این سیستم در نظر بگیریم، با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:

$$\sum F_{x_i}=m\ddot{x}_i$$

$$-k_1x_1-k_2(x_1-x_2)=m_1\ddot{x}_1$$

$$k_2(x_1-x_2)-k_3x_2=m_2\ddot{x}_2$$

معادلات را به شکل ماتریسی می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix}m&0\\0&m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\\ddot{x}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}2k&-k\\-k&2k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=0$$

با فرض پاسخ هارمونیک $x_i(t)=X_i\cos(\omega t+\psi)$ و $i=1,2$ داریم:

$$\det([k]-\lambda[m])=0\qquad ,\qquad \lambda=\omega_i^2$$

$$\begin{vmatrix}(2k-m\lambda)&-k\\-k&(2k-m\lambda)\end{vmatrix}=0\Rightarrow(2k-m\lambda)(2k-m\lambda)-k^2=0\Rightarrow 4k^2-2mk\lambda+m^2\lambda^2-k^2=0$$

$$m^2\lambda^2-4mk\lambda+3k^2=0\Rightarrow\lambda_1=\frac{k}{m}\ ,\ \lambda_2=\frac{3k}{m}$$

بنابراین فرکانس‌های طبیعی سیستم برابر است با:

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\ \omega_2=\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

برای محاسبه بردار ویژه مربوط به مود طبیعی داریم:

$$\begin{cases}(۲k-m\lambda)X_۱-kX_۲=۰\\-kX_۱+(۲k-m\lambda)X_۲=۰\end{cases}$$

اگر $\lambda_۱=\dfrac{k}{m}\Rightarrow(۲k-m\dfrac{k}{m})X_۱-kX_۲=۰\Rightarrow kX_۱=kX_۲\Rightarrow X_۱=X_۲\Rightarrow\varphi_۱=\begin{Bmatrix}۱/۰۰\\۱/۰۰\end{Bmatrix}$

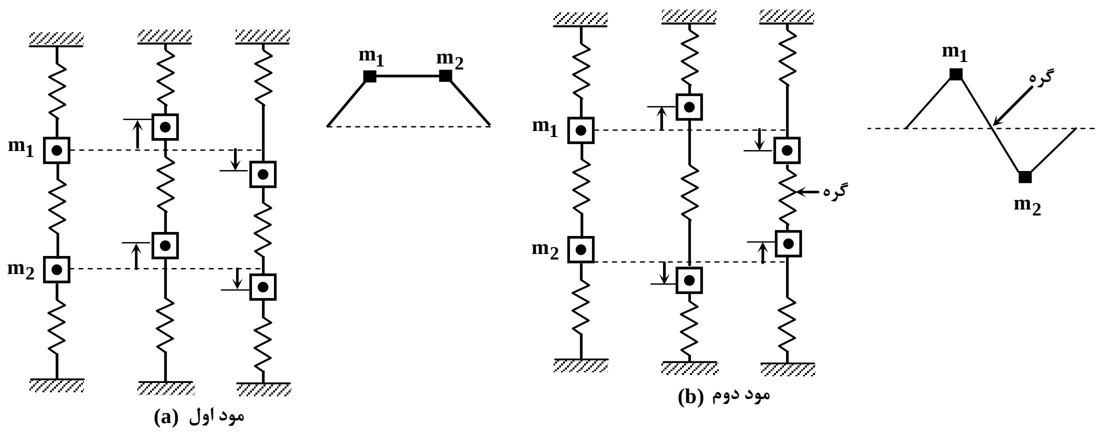
اگر $\lambda_۲=\dfrac{۳k}{m}\Rightarrow(۲k-m\dfrac{۳k}{m})X_۱-kX_۲=۰\Rightarrow -kX_۱=kX_۲\Rightarrow X_۱=-X_۲\Rightarrow\varphi_۲=\begin{Bmatrix}۱/۰۰\\-۱/۰۰\end{Bmatrix}$

بنابراین پاسخ سیستم برای مودهای اول و دوم به صورت زیر می‌باشد:

پاسخ سیستم به ازای مود اول: $\begin{Bmatrix}x_۱\\x_۲\end{Bmatrix}^{(۱)}=c_۱\begin{Bmatrix}۱/۰۰\\۱/۰۰\end{Bmatrix}\cos(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\psi_۱)$

پاسخ سیستم به ازای مود دوم: $\begin{Bmatrix}x_۱\\x_۲\end{Bmatrix}^{(۲)}=c_۲\begin{Bmatrix}۱/۰۰\\-۱/۰۰\end{Bmatrix}\cos(\sqrt{\dfrac{۳k}{m}}t+\psi_۲)$

از معادله مود اول دیده می‌شود که هنگام ارتعاش سیستم با مود اول، دامنه‌های دو جرم همانند هم می‌باشند. این نشان می‌دهد که طول فنر میانی ثابت باقی می‌ماند؛ بنابراین حرکت جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$، با همدیگر هم‌فاز است (شکل a را ببینید). هنگامی که این سیستم در مود دوم خود ارتعاش می‌کند، معادله مود دوم نشان می‌دهد که دامنه جابه‌جایی‌های دو جرم دارای مقادیر مساوی و علامت‌های مخالف می‌باشند؛ بنابراین حرکت جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$، به اندازه ۱۸۰ درجه با همدیگر اختلاف فاز دارند (شکل b را ببینید). در این حالت نقطه میانی فنر وسط برای همه زمان‌های t، ثابت باقی می‌ماند. چنین نقطه‌ای یک نود (گره) نامیده می‌شود. با استفاده از معادلات $\{x(t)\}^{(۱)}$ و $\{x(t)\}^{(۲)}$، حرکت (پاسخ عمومی) این سیستم را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:



مودهای ارتعاشی یک سیستم دو درجه آزادی

$$\begin{Bmatrix}x_۱\\x_۲\end{Bmatrix}=c_۱\begin{Bmatrix}۱\\۱\end{Bmatrix}\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\psi_۱)+c_۲\begin{Bmatrix}۱\\-۱\end{Bmatrix}\cos(\sqrt{\frac{۳k}{m}}t+\psi_۲)$$

شرایط اولیه

بعد از محاسبه‌ی فرکانس‌ها و مودهای طبیعی سیستم با جمع‌زنی مناسب مودهای طبیعی می‌توان ارتعاشات آزاد سیستم را برای هر شرایط اولیه تعیین کرد. برای شرایط اولیه خاص می‌توان ارتعاشات آزاد مربوط به یکی از مودها را داشت.

$$\begin{Bmatrix}x_۱\\x_۲\end{Bmatrix}^{(i)}=C_i\varphi_i\sin(\omega_i t+\psi_i)$$

برای شرایط عمومی‌تر ارتعاشات شامل ترکیبی از تمام مودهای طبیعی می‌باشد.

$$\begin{Bmatrix}x_۱\\x_۲\end{Bmatrix}=\sum_{i=۱}^{n}C_i\varphi_i\sin(\omega_i t+\psi_i)$$

که C_i و ψ_i ثابت‌هایی هستند که با توجه به شرایط اولیه زیر به دست می‌آیند.

$$x_۱(۰)\ ,\ \dot{x}_۱(۰)\quad ;\quad x_۲(۰)\ ,\ \dot{x}_۲(۰)$$

➢ **توجه:** روابط به صورت سینوسی نوشته شده‌اند؛ همچنین می‌توانند به صورت کسینوسی بیان شوند.

مثال۲: شرایط اولیه مورد نیاز برای اعمال به سیستم نشان داده شده در شکل مثال قبل را طوری بیابید که باعث ارتعاش آن (۱) در مود اول، و (۲) در مود دوم شود.

☑ **پاسخ:** برای شرایط دلخواه اولیه، حرکت جرم‌ها با معادلات $x^{(1)}(t)$ و $x^{(2)}(t)$ توصیف می‌شود. همان‌طور که در مثال قبل دیده شد، برای این مسئله $r_1 = 1$ و $r_2 = -1$ می‌باشد؛ بنابراین این معادلات به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x_1(t) = C_1\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \psi_1) + C_2\cos(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \psi_2)$$

$$x_2(t) = C_1\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \psi_1) - C_2\cos(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \psi_2)$$

با فرض شرایط اولیه کلی قبل، ثابت‌های C_1، C_2، ψ_1 و ψ_2 را می‌توان با استفاده از این شرایط اولیه به‌دست آورد:

$$C_1 = -\frac{1}{2}\{[x_1(0) + x_2(0)]^2 + \frac{m}{k}[\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)]^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$C_2 = -\frac{1}{2}\{[-x_1(0) + x_2(0)]^2 + \frac{m}{3k}[\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)]^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\psi_1 = \tan^{-1}\{\frac{-\sqrt{m}[\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)]}{\sqrt{k}[x_1(0) + x_2(0)]}\} \quad ; \quad \psi_2 = \tan^{-1}\{\frac{\sqrt{m}[\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)]}{\sqrt{3k}[-x_1(0) + x_2(0)]}\}$$

مود نرمال اول این سیستم از معادله زیر به دست می‌آید:

$$\vec{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} C_1\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \psi_1) \\ C_1\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \psi_1) \end{Bmatrix}$$

مقایسه معادلات اول و آخر نشان می‌دهد که حرکت سیستم تنها در صورتی مشابه با مود نرمال اول است که داشته باشیم $C_2 = 0$؛ بنابراین با توجه به رابطه فوق برای C_2 داریم: $x_1(0) = x_2(0)$ و $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$

مود نرمال دوم این سیستم از معادله زیر به دست می‌آید:

$$\vec{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} C_2\cos(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2) \\ -C_2\cos(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2) \end{Bmatrix}$$

مقایسه معادله اول و این معادله نشان می‌دهد که حرکت این سیستم تنها در صورتی با مود نرمال دوم منطبق است که داشته باشیم $C_1 = 0$؛ بنابراین با توجه به رابطه فوق برای C_1 داریم: $x_1(0) = -x_2(0)$ و $\dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)$

سیستم پیچشی

یک سیستم پیچشی شامل دو دیسک را که روی یک محور نصب شده‌اند همانند شکل زیر در نظر بگیرید. سه بخش این محور دارای ثابت‌های فنریت پیچشی k_{t1}، k_{t2} و k_{t3} می‌باشند. دیسک‌ها با ممان اینرسی جرمی J_1 و J_2 و گشتاورهای اعمال شده M_{t1} و M_{t2} و درجات آزادی پیچشی θ_1 و θ_2 در شکل نشان داده شده‌اند. معادلات دیفرانسیل حرکت پیچشی برای دیسک‌های J_1 و J_2 را می‌توان به صورت زیر به‌دست آورد:

$$J_1\ddot{\theta}_1 = -k_{t1}\theta_1 + k_{t2}(\theta_2 - \theta_1) + M_{t1}$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 = -k_{t2}(\theta_2 - \theta_1) - k_{t3}\theta_2 + M_{t2}$$

که پس از آرایش مجدد به صورت زیر درمی‌آید:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + (k_{t1} + k_{t2})\theta_1 - k_{t2}\theta_2 = M_{t1}$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 - k_{t2}\theta_1 + (k_{t2} + k_{t3})\theta_2 = M_{t2}$$

برای تحلیل ارتعاش آزاد این سیستم، معادلات فوق به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + (k_{t1} + k_{t2})\theta_1 - k_{t2}\theta_2 = 0$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 - k_{t2}\theta_1 + (k_{t2} + k_{t3})\theta_2 = 0$$

فصل ششم

«سیستم‌های چند درجه آزادی»

مقدمه

همان‌گونه که در فصل اول بیان شد، بسیاری از سیستم‌های مهندسی پیوسته بوده، دارای تعدادی نامحدود از درجات آزادی‌اند. تحلیل ارتعاشی سیستم‌های پیوسته به حل معادلات دیفرانسیل جزئی نیاز دارد که نسبتاً پیچیده است و در بسیاری مواقع پاسخ تحلیلی برای این معادلات وجود ندارد. از طرف دیگر، تحلیل یک سیستم چند درجه آزادی به پاسخ مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی نیاز دارد که نسبتاً ساده‌اند. بنابراین، برای سادگی تحلیل، سیستم‌های پیوسته را اغلب به صورت سیستم‌های چند درجه آزادی تخمین می‌زنند.

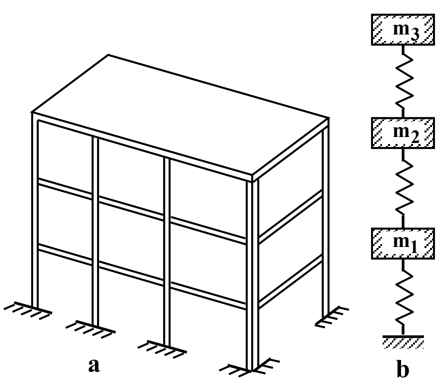
همه مفاهیم معرفی شده در فصل قبل را می‌توان مستقیماً برای سیستم‌های چند درجه آزادی بسط داد. برای این سیستم‌ها می‌توان معادلات حرکت را همانند سیستم‌های دو درجه آزادی با استفاده از قانون دوم نیوتن و یا روش ضرایب تأثیر و روش معادله لاگرانژ که در این فصل توضیح داده می‌شوند، به دست آورد. برای هر درجه آزادی یک معادله دیفرانسیل وجود دارد.

برای یک سیستم n درجه آزادی، n فرکانس طبیعی وجود دارد که هر کدام از آن‌ها دارای شکل مودی مربوط به خود هستند. همانند فصل قبل فرکانس‌های طبیعی سیستم‌های n درجه آزادی را می‌توان از طریق صفر کردن دترمینان و به دست آوردن معادله مشخصه محاسبه کرد. با وجود این، با افزایش تعداد درجات آزادی، حل معادله مشخصه مشکل‌تر می‌شود. همچنین شکل مودها خاصیتی از خود نشان می‌دهد که به تعامد مودها معروف است و اغلب امکان ساده کردن تحلیل سیستم‌های چند درجه آزادی را فراهم می‌کند.

مدل‌سازی سیستم‌های پیوسته به صورت سیستم‌های چند درجه آزادی

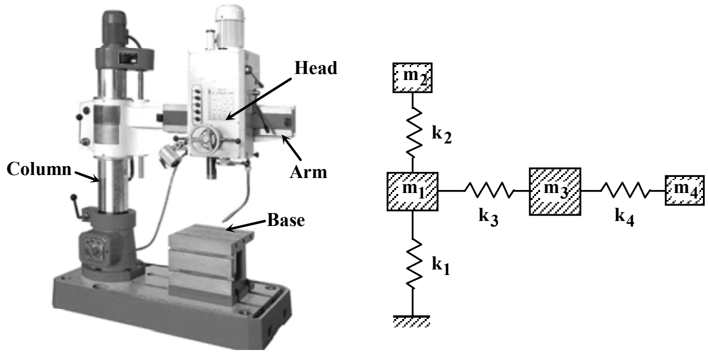
روش‌های مختلفی برای تخمین یک سیستم پیوسته به عنوان یک سیستم چند درجه آزادی استفاده می‌شود. یک روش ساده شامل جایگزینی جرم توزیع شده یا اینرسی توزیع شده سیستم با تعداد محدودی از جرم‌های متمرکز یا جسم‌های صلب می‌باشد. در این روش فرض می‌شود که جرم‌های متمرکز از طریق اعضای الاستیک و میراکننده‌های بدون جرم به همدیگر متصل می‌باشند. همچنین مختصات خطی (یا زاویه‌ای) برای توصیف حرکت جرم‌های متمرکز (یا اجسام صلب) استفاده می‌شود. به چنین مدل‌هایی، سیستم با جرم متمرکز یا جرم گسسته می‌گویند. کمترین تعداد مختصات لازم برای توصیف حرکت جرم‌های متمرکز یا اجسام صلب، تعداد درجات آزادی سیستم را تعیین می‌کند. به طور طبیعی، هرچه تعداد جرم‌های متمرکز استفاده شده در مدل بیشتر باشد، دقت تحلیل بیشتر است.

در برخی مسائل نوع مدل با پارامترهای متمرکزی که باید استفاده شوند، به سادگی قابل تشخیص است. برای مثال، مدل ارائه شده برای ساختمان سه طبقه نشان داده شده در شکل a، سه جرم متمرکز همانند شکل b می‌باشد. در این مدل، اینرسی سیستم به صورت متمرکز در سه جرم نقطه‌ای فرض شده و فنریت ستون‌ها با فنرهایی جایگزین شده‌اند.



ساختمان سه طبقه

به‌طور مشابه، ماشین سوراخ‌کننده شعاعی نشان داده شده در شکل a را می‌توان با استفاده از شکل b از چهار جرم متمرکز و چهار المان فنری (تیرهای الاستیک) همانند شکل b مدل کرد.



(a) (b)

ماشین تراش سوراخ‌کننده شعاعی

روش عمومی دیگر تخمین یک سیستم پیوسته به عنوان یک سیستم چند درجه آزادی، شامل جایگزینی آن سیستم با تعداد زیادی از المان‌های کوچک است. با فرض یک پاسخ ساده برای هر المان می‌توان پاسخ تقریبی سیستم اولیه را به دست آورد.

استفاده از قانون دوم نیوتن برای تعیین معادلات حرکت

روند زیر را می‌توان جهت به‌دست آوردن معادلات حرکت یک سیستم چند درجه آزادی با استفاده از قانون دوم نیوتن برای حرکت در پیش گرفت:

۱ـ مختصات مناسب را برای توصیف مکان جرم‌های نقطه‌ای مختلف و جسم‌های صلب در سیستم اختیار کنید. جهت‌های مثبت مناسبی را برای جابه‌جایی‌ها، سرعت‌ها و شتاب‌های جرم‌ها و اجسام صلب در نظر بگیرید.

۲ـ شکل تعادل استاتیکی سیستم را تعیین کرده، جابه‌جایی جرم‌ها و اجسام صلب از موقعیت‌های تعادل استاتیکی آنها را اندازه‌گیری کنید.

۳ـ دیاگرام آزاد نیروهای هر جرم یا جسم صلب داخل سیستم را رسم کنید. فنر، میراکننده و نیروهای خارجی عمل‌کننده بر هر جرم یا جسم صلب را هنگامی که جابه‌جایی یا سرعت مثبت به آن جرم یا جسم صلب داده می‌شود، مشخص کنید.

۴ـ قانون دوم نیوتن برای حرکت هر جرم یا جسم صلب نشان داده شده توسط دیاگرام آزاد جسم را به صورت زیر اعمال کنید:

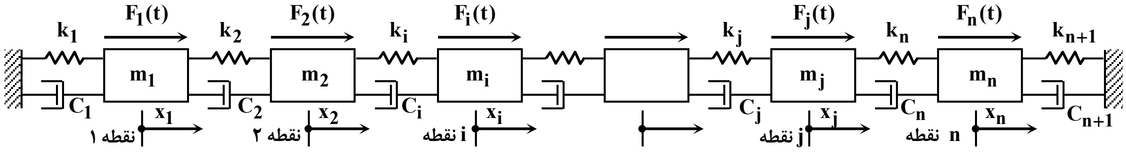
$$\boxed{m_i\ddot{x}_i = \sum_j F_{ij} \quad \text{(برای هر جرم } m_i\text{)}}$$

یا

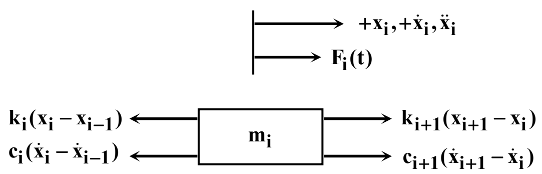
$$\boxed{I_i\ddot{\theta}_i = \sum_j M_{ij} \quad \text{(برای جسم صلب با ممان اینرسی } I_i\text{)}}$$

که در آن $\sum_j F_{ij}$ نشان‌دهنده جمع همه نیروهای خارجی عمل‌کننده روی جرم m_i و $\sum_j M_{ij}$ نشان‌دهنده جمع گشتاور همه نیروهای خارجی (حول یک محور مناسب) عمل‌کننده بر جسم صلب می‌باشد.

مثال۱: معادلات حرکت را برای سیستم جرم- فنر- میراکننده نشان داده شده در شکل a زیر، به‌دست آورید.



(a)



(b)

☑ **پاسخ:** مختصات توصیف‌کننده مکان جرم‌ها، $x_i(t)$، از موقعیت تعادل استاتیکی متناظر آن‌ها همانند آنچه در شکل a نشان داده شده، اندازه‌گیری می‌شوند. دیاگرام آزاد نیروهای وارد بر جرم m_i از رابطه $m_i\ddot{x}_i = \sum_j F_{ij}$ (برای هر جرم m_i)، به همراه جهت‌های مثبت فرض شده برای جابه‌جایی، سرعت و شتاب آن در شکل b نشان داده شده است. اعمال قانون دوم نیوتن برای حرکت جرم m_i، رابطه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$m_i\ddot{x}_i = -k_i(x_i - x_{i-1}) + k_{i+1}(x_{i+1} - x_i) - c_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + c_{i+1}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) + F_i \quad ; \quad i = ۲,۳,...,n-۱$$

یا

$$m_i\ddot{x}_i - c_i\dot{x}_{i-1} + (c_i + c_{i+1})\dot{x}_i - c_{i+1}\dot{x}_{i+1} - k_i x_{i-1} + (k_i + k_{i+1})x_i - k_{i+1}x_{i+1} = F_i \quad ; \quad i = ۲,۳,...,n-۱$$

معادلات حرکت جرم‌های $m_۱$ و m_n به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} m_۱\ddot{x}_۱ + (c_۱ + c_۲)\dot{x}_۱ - c_۲\dot{x}_۲ + (k_۱ + k_۲)x_۱ - k_۲x_۲ = F_۱ \\ m_n\ddot{x}_n - c_n\dot{x}_{n-۱} + (c_n + c_{n+۱})\dot{x}_n - k_n x_{n-۱} + (k_n + k_{n+۱})x_n = F_n \end{cases}$$

نکات:

۱ـ همان‌طور که در فصل قبل اشاره شد، معادلات حرکت سیستم را می‌توان به شکل ماتریسی مقابل نوشت: $[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F}$

که در آن $[m]$، $[c]$ و $[k]$ به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی (سفتی) نامیده می‌شوند و برای سیستم فوق عبارتند از:

$$m = \begin{bmatrix} m_۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & m_۲ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & m_۳ & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & m_n \end{bmatrix}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} (c_۱ + c_۲) & -c_۲ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ -c_۲ & (c_۲ + c_۳) & -c_۳ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & -c_۳ & (c_۳ + c_۴) & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & \cdots & -c_n & (c_n + c_{n+۱}) \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} (k_۱ + k_۲) & -k_۲ & & \cdots & ۰ & ۰ \\ -k_۲ & (k_۲ + k_۳) & -k_۳ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & -k_۳ & (k_۳ + k_۴) & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & -k_n & (k_n + k_{n+۱}) \end{bmatrix}$$

و $\vec{x}$، $\dot{\vec{x}}$، $\ddot{\vec{x}}$ و $\vec{F}$ بردارهای جابه‌جایی، سرعت، شتاب و نیرو بوده و عبارتند از:

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_۱(t) \\ x_۲(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \quad , \quad \dot{\vec{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_۱(t) \\ \dot{x}_۲(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{Bmatrix} \quad , \quad \ddot{\vec{x}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_۱(t) \\ \ddot{x}_۲(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_n(t) \end{Bmatrix} \quad , \quad \vec{F} = \begin{Bmatrix} F_۱(t) \\ F_۲(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{Bmatrix}$$

۲ـ برای سیستم‌های بدون میرایی (با رابطه $c_i = ۰, i = ۱,۲,...,n+۱$)، معادلات حرکت به صورت مقابل ساده می‌شوند: $[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F}$

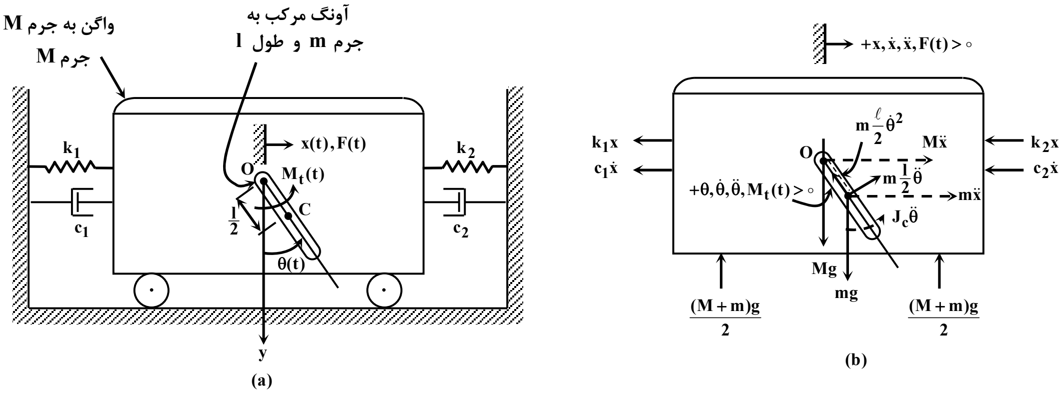
۳ـ سیستم جرم- فنر- میراکننده (دمپر) در نظر گرفته شده در بالا، یک حالت خاص از یک سیستم جرم- فنر- میراکننده n درجه آزادی کلی می‌باشد. در کلی‌ترین حالت، ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی به صورت زیر می‌باشند:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{۱۱} & m_{۱۲} & m_{۱۳} & \cdots & m_{۱n} \\ m_{۱۲} & m_{۲۲} & m_{۲۳} & \cdots & m_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{۱n} & m_{۲n} & m_{۳n} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[c]=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & c_{3n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [k]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1n} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & k_{3n} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

می‌توان دید که معادلات دیفرانسیل سیستم جرم و فنر در نظر گرفته شده در مثال اول این فصل (شکل a) کوپل می‌باشند؛ هر معادله شامل بیش از یک مختصه است. این بدان معنی است که معادلات را نمی‌توان به تنهایی و جدا از هم حل کرد. آنها تنها می‌توانند به صورت هم‌زمان حل شوند. علاوه بر این، می‌توان دید که این سیستم از لحاظ استاتیکی، کوپل می‌باشد؛ زیرا ماتریس سختی دست‌کم دارای یک عبارت غیرقطری غیرصفر می‌باشد. از طرف دیگر، اگر ماتریس جرم دارای دست‌کم یک عبارت غیرقطری غیرصفر باشد، گفته می‌شود که سیستم از لحاظ دینامیکی کوپل شده است. افزون بر این اگر هم ماتریس جرم و هم ماتریس سختی دارای عبارت‌های غیرقطری غیرصفر باشند، گفته می‌شود این سیستم هم از لحاظ استاتیکی و هم از لحاظ دینامیکی کوپل شده می‌باشد.

مثال۲: معادلات حرکت یک سیستم آونگ متصل به واگن شکل a را به‌دست آورید.



☑ **پاسخ:** مختصات $x(t)$ و $\theta(t)$ به ترتیب برای توصیف جابه‌جایی خطی واگن و جابه‌جایی زاویه‌ای آونگ مرکب از مکان‌های تعادل استاتیکی متناظر خود استفاده می‌شوند. مقادیر مثبت برای جابه‌جایی‌های $x(t)$ و $\theta(t)$، در شکل b فوق مشخص شده‌اند. همانند آنچه در شکل b فوق نشان داده شده است، نیروهای خارجی واگن شامل نیروی اعمال شده $F(t)$، نیروهای فنر k_1x و k_2x و نیروهای میرایی $c_1\dot{x}$ و $c_2\dot{x}$ می‌باشند و نیروهای خارجی روی آونگ مرکب شامل گشتاور اعمال شده $M_t(t)$ و نیروی جاذبه mg می‌باشند. نیروهای اینرسی عمل‌کننده بر واگن و آونگ مرکب، با خطوط نقطه چین در شکل b نشان داده شده‌اند. توجه کنید که حرکت دورانی آونگ مرکب حول لولای O یک نیروی شعاعی به سمت داخل (به سمت O) و برابر $m\frac{\ell}{2}\dot{\theta}^2$ و یک نیروی عمودی (عمود بر OC) و برابر $m\frac{\ell}{2}\ddot{\theta}$ همانند شکل b به وجود می‌آورد. اعمال قانون دوم نیوتن برای حرکت انتقالی در جهت افقی رابطه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$M\ddot{x}+m\ddot{x}+m\frac{l}{2}\ddot{\theta}\cos\theta-m\frac{l}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta=-k_1x-k_2x-c_1\dot{x}-c_2\dot{x}+F(t)$$

به طور مشابه، اعمال قانون دوم نیوتن برای حرکت دورانی حول لولای O رابطه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$(m\frac{l}{2}\ddot{\theta})\frac{l}{2}+(m\frac{l^2}{12})\ddot{\theta}+(m\ddot{x})\frac{l}{2}\cos\theta=-(mg)\frac{l}{2}\sin\theta+M_t(t)$$

می‌توان دید که معادلات حرکت به خاطر وجود عبارت‌هایی شامل $\sin\theta$ غیرخطی می‌باشند.

در صورتی که عبارت‌های شامل $(\dot{\theta})^2\sin\theta$ را کوچک و قابل صرف‌نظر کردن فرض کنیم و جابه‌جایی‌ها کوچک فرض شوند به گونه‌ای که $\cos\theta\approx 1$ و $\sin\theta\approx\theta$ باشد، معادلات خطی می‌شوند. معادلات خطی شده را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$(M+m)\ddot{x}+(m\frac{l}{2})\ddot{\theta}+(k_1+k_2)x+(c_1+c_2)\dot{x}=F(t)$$

$$(\frac{ml}{2})\ddot{x}+(\frac{ml^2}{3})\ddot{\theta}+(\frac{mgl}{2})\theta=M_t(t)$$

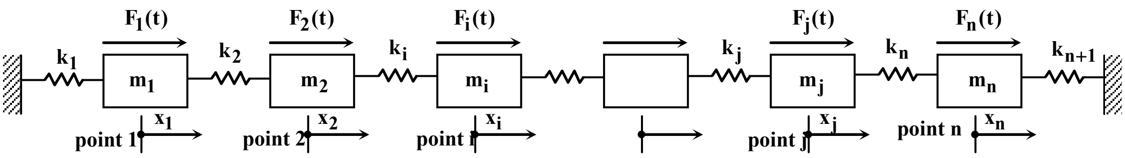
ضرایب تأثیر

معادلات حرکت یک سیستم چند درجه آزادی را می‌توان با استفاده از ضرایب تأثیر نوشت که به طور وسیع در مهندسی سازه‌ای استفاده می‌شوند. ضرایب تأثیر را می‌توان برحسب ماتریس‌های سختی و جرم به دست آورد که ضرایب تأثیر متناظر با هر یک از این دو به ترتیب با نام ضرایب تأثیر سختی و اینرسی (جرم) معروف می‌باشند. در برخی از موارد، بازنویسی معادلات حرکت با استفاده از معکوس ماتریس سختی (که به ماتریس نرمی معروف است) یا معکوس ماتریس جرم ساده‌تر است.

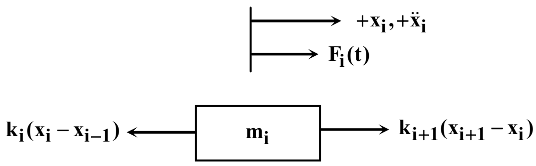
ضرایب تأثیر سختی

برای یک فنر خطی ساده، نیروی مورد نیاز برای ایجاد افزایش طول واحد، سختی فنر نامیده می‌شود. در سیستم‌های پیچیده‌تر می‌توان رابطه بین جابه‌جایی در یک نقطه و نیروهای عمل‌کننده در نقاط مختلف دیگر سیستم را با استفاده از ضرایب تأثیر سختی بیان کرد. ضرایب تأثیر سختی که با k_{ij} نشان داده می‌شود، به صورت نیروی مورد نیاز در نقطه i، برای ایجاد یک جابه‌جایی واحد در نقطه j تعریف می‌شود، هنگامی که همه نقاط غیر از نقطه j ثابت باشند. با استفاده از این تعریف، برای سیستم جرم و فنر نشان داده شده در شکل زیر، نیروی کل در نقطه i و F_i را می‌توان با جمع نیروها در اثر همه جابه‌جایی‌های $x_j(j=1,2,...,n)$ به صورت زیر بیان کرد:

$$\boxed{F_i=\sum_{j=1}^{n}k_{ij}x_j \quad , \quad i=1,2,...,n}$$



(a)



(b)

سیستم جرم ـ فنر n درجه آزادی

این معادله را می‌توان به شکل ماتریسی مقابل نوشت: $\vec{F}=[k]\vec{x}$

که در آن $\vec{x}$ و $\vec{F}$ بردارهای جابه‌جایی و نیرو بوده و $[k]$ ماتریس سختی است که به صورت زیر می‌باشد:

$$[k]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

نکات زیر در مورد ضرایب تأثیر سختی قابل توجه می‌باشند:

۱ـ به خاطر اینکه نیروی مورد نیاز در نقطه i برای ایجاد تغییر شکل واحد در نقطه j و تغییر شکل صفر در کلیه نقاط دیگر، با نیروی مورد نیاز در نقطه j برای ایجاد یک تغییر شکل واحد در نقطه i و تغییر شکل صفر در همه نقاط دیگر یکسان است (قضیه معکوس‌پذیری مکسول)، داریم:

$$\boxed{k_{ij}=k_{ji}}$$

۲ـ ضرایب تأثیر سختی را می‌توان با اعمال اصول استاتیک و مکانیک جامدات محاسبه کرد.

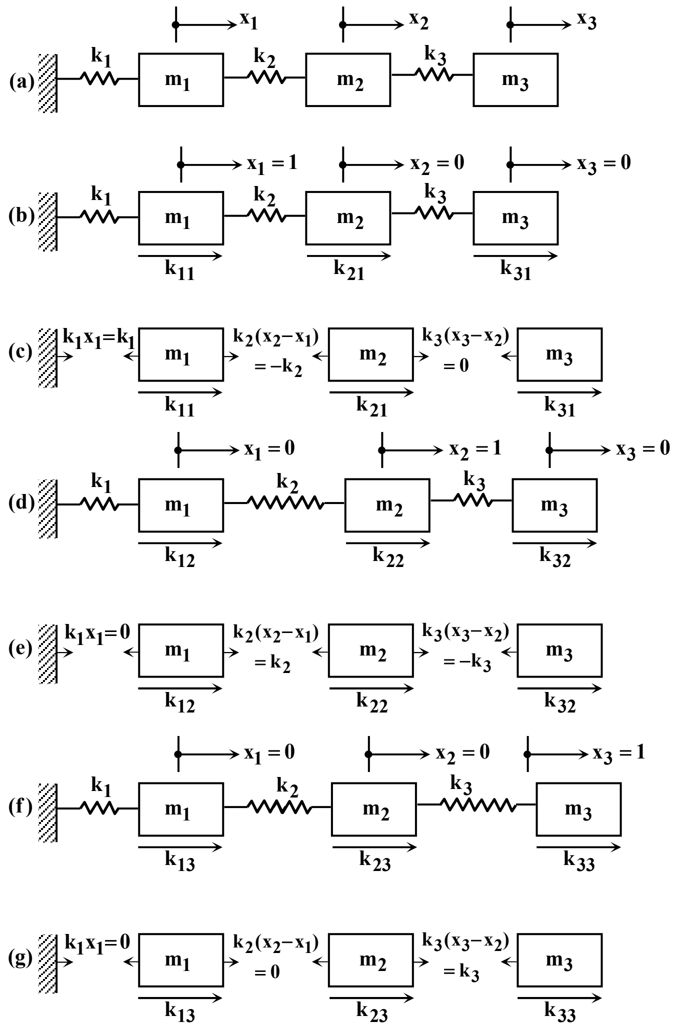
۳ـ ضرایب تأثیر سختی برای سیستم‌های پیچشی را می‌توان برحسب جابه‌جایی زاویه‌ای واحد و گشتاوری که باعث ایجاد این جابه‌جایی زاویه‌ای می‌شود، تعریف کرد. برای مثال، در یک سیستم پیچشی چند روتوری k_{ij} را می‌توان به صورت گشتاور مورد نیاز در نقطه i (روتور i) برای ایجاد جابه‌جایی زاویه‌ای واحد در نقطه j و جابه‌جایی زاویه‌ای صفر در کلیه نقاط دیگر تعریف کرد.

ضرایب تأثیر سختی یک سیستم چند درجه آزادی را می‌توان به صورت زیر تعیین کرد:

۱ـ مقدار واحد را برای جابه‌جایی x_j (برای شروع $j=1$ می‌باشد) و مقدار صفر را برای همه جابه‌جایی‌های دیگر $(x_1,x_2,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n)$ در نظر بگیرید. با این تعریف، مجموعه نیروهایی که این سیستم را در این حالت $(x_j=1, x_1=x_2=...=x_{j-1}=x_{j+1}=...=x_n=0)$ نگه می‌دارد، $k_{ij}(i=1,2,\cdots,n)$ می‌باشد. در این صورت، معادلات تعادل استاتیکی برای هر کدام از جرم‌ها اعمال و مجموعه n معادله برای یافتن n ضریب تأثیر $k_{ij}(i=1,2,...,n)$ حل می‌شود.

۲ـ پس از تکمیل مرحله اول برای $j=1$، این روند برای $j=2,3,\cdots,n$ تکرار می‌شود.

مثال۳: ضرایب تأثیر سختی سیستم نشان داده شده در شکل a زیر را بیابید.



پاسخ: فرض کنید $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ به ترتیب نشانگر جابه‌جایی‌های جرم‌های $m_۱$، $m_۲$ و $m_۳$ باشند. ضرایب تأثیر سختی k_{ij} این سیستم را می‌توان برحسب سختی فنرهای $k_۱$، $k_۲$ و $k_۳$ به‌دست آورد. همانند آنچه در شکل b نشان داده شده است، ابتدا جابه‌جایی $m_۱$ را برابر واحد قرار داده $(x_۱ = ۱)$ و جابه‌جایی‌های $m_۲$ و $m_۳$ را برابر صفر قرار می‌دهیم. فرض می‌شود مجموعه نیروهای $k_{i۱}(i = ۱,۲,۳)$ سیستم را در این چیدمان نگه می‌دارد. دیاگرام آزاد جرم‌های متناظر با شکل b، در شکل c نشان داده شده است. نیروهای تعادل برای جرم‌های $m_۱$، $m_۲$ و $m_۳$ در جهت افقی، رابطه‌های زیر را نتیجه می‌دهد:

جرم $m_۱ : k_۱ = -k_۲ + k_{۱۱}$

جرم $m_۲ : k_{۲۱} = -k_۲$

جرم $m_۳ : k_{۳۱} = ۰$

پاسخ این معادلات، رابطه مقابل را نتیجه می‌دهد: $k_{۱۱} = k_۱ + k_۲, k_{۲۱} = -k_۲, k_{۳۱} = ۰$

سپس جابه‌جایی جرم‌ها همانند آنچه در شکل d نشان داده شده، به صورت $x_۱ = ۰$، $x_۲ = ۱$ و $x_۳ = ۰$ در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود نیروهای $k_{i۲}(i = ۱,۲,۳)$، این سیستم را در این حالت نگه می‌دارند. دیاگرام‌های جسم آزاد جرم‌ها را می‌توان همانند آنچه در شکل e نشان داده شده است، رسم کرد. معادلات تعادل نیرویی جرم‌ها به صورت زیر است:

جرم $m_۱ : k_{۱۲} + k_۲ = ۰$

جرم $m_۲ : k_{۲۲} - k_۳ = k_۲$

جرم $m_۳ : k_{۳۲} = -k_۳$

پاسخ این معادلات، منجر به روابط مقابل می‌شود: $k_{۱۲} = -k_۲, k_{۲۲} = k_۲ + k_۳, k_{۳۲} = -k_۳$

در نهایت فرض می‌شود مجموعه نیروهای $k_{i۳}(i = ۱,۲,۳)$، این سیستم را در حالت $x_۱ = ۰$، $x_۲ = ۰$ و $x_۳ = ۱$ نگه می‌دارد (شکل f). دیاگرام‌های جسم آزاد جرم‌های مختلف در این چیدمان، در شکل g نشان داده شده و معادلات تعادل نیرویی منجر به روابط زیر می‌شود:

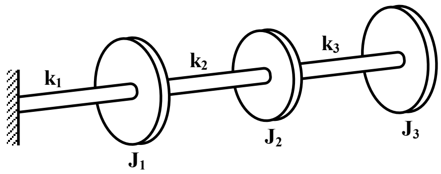
جرم $m_۱ : k_{۱۳} = ۰$ جرم $m_۲ : k_{۲۳} + k_۳ = ۰$ جرم $m_۳ : k_{۳۳} = k_۳$

حل این معادلات رابطه مقابل را نتیجه می‌دهد: $k_{۱۳} = ۰, k_{۲۳} = -k_۳, k_{۳۳} = k_۳$

بنابراین، ماتریس سختی این سیستم از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$[k] = \begin{bmatrix} (k_۱ + k_۲) & -k_۲ & ۰ \\ -k_۲ & (k_۲ + k_۳) & -k_۳ \\ ۰ & -k_۳ & k_۳ \end{bmatrix}$$

مثال۴: ماتریس سختی برای شکل زیر برابر است با:



۱) $K=\begin{bmatrix} K_۱+K_۲ & -K_۲ & ۰ \\ -K_۱ & K_۲+K_۳ & -K_۲ \\ ۰ & -K_۲ & K_۳ \end{bmatrix}$

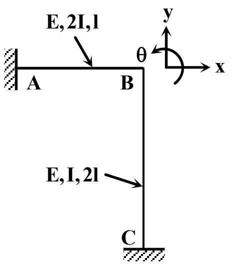
۲) $K=\begin{bmatrix} K_۱+K_۲ & -K_۲ & ۰ \\ -K_۲ & K_۳ & -K_۲ \\ ۰ & -K_۲ & K_۲+K_۳ \end{bmatrix}$

۳) $K=\begin{bmatrix} K_۱+K_۲ & -K_۲ & ۰ \\ -K_۲ & K_۲+K_۳ & -K_۳ \\ ۰ & -K_۳ & K_۳ \end{bmatrix}$

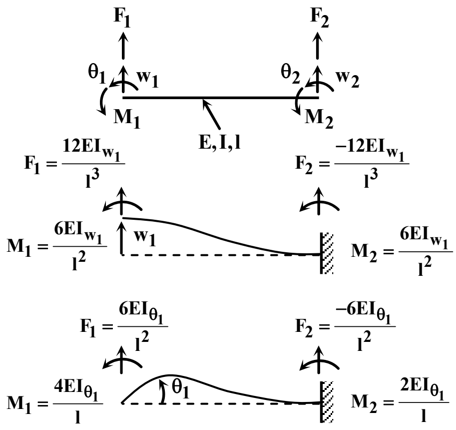
۴) $K=\begin{bmatrix} K_۱+K_۲ & -K_۲ & ۰ \\ -K_۲ & K_۲+K_۳ & -K_۳ \\ ۰ & -K_۳ & -K_۳ \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» برای ماتریس سختی، عناصر روی قطر اصلی برابر سختی معادل برای جرم متناظر است. در اینجا به جرم اینرسی $J_۱$، فنرهای $K_۱$ و $K_۲$ اعمال می‌شوند؛ پس عنصر اول قطر اصلی (مربوط به مختصات $\theta_۱$ جرم $J_۱$) $K_۱+K_۲$ خواهد بود. به طریق مشابه، عنصر دوم و سوم قطر اصلی به ترتیب $K_۲+K_۳$ و $K_۳$ خواهند بود. همچنین ماتریس سختی باید متقارن باشد.

مثال۵: ماتریس سختی قاب نشان داده شده در شکل a زیر را تعیین کنید. از اثر سختی محوری اعضای AB و BC صرف‌نظر کنید.



(a)



(b)

☑ **پاسخ:** به خاطر اینکه بخش‌های AB و BC این قاب را می‌توان به صورت تیر در نظر گرفت، فرمول‌های نیرو-تغییر شکل تیرها را می‌توان برای ایجاد ماتریس سختی این قاب استفاده کرد. نیروهای لازم برای ایجاد جابه‌جایی در راستای یک مختصه، با صفر نگه داشتن جابه‌جایی‌ها در راستای مختصه‌های دیگر یک تیر در شکل b نشان داده شده است. درشکل a، انتهای A و C ثابت‌اند و بنابراین اتصال B دارای سه جابه‌جایی ممکن x، y و θ همانند آنچه نشان داده شده می‌باشد. نیروهای مورد نیاز برای نگه داشتن جابه‌جایی واحد در راستای x و جابه‌جایی صفر در راستای y و θ در اتصال B از رابطه زیر به دست می‌آید (از شکل b):

$$F_x=\left(\frac{۱۲EI}{l^۳}\right)_{BC}=\frac{۳EI}{۲l^۳},F_y=۰,M_\theta=\left(\frac{۶EI}{l^۲}\right)_{BC}=\frac{۳EI}{۲l^۲}$$

به طور مشابه، هنگامی که جابه‌جایی واحد در راستای y در اتصال B با جابه‌جایی‌های صفر در راستای x و θ داده شود، نیروهای مورد نیاز برای نگه داشتن این حالت را می‌توان از شکل b به صورت مقابل نوشت:

$$F_x=۰,F_y=\left(\frac{۱۲EI}{l^۳}\right)_{BA}=\frac{۲۴EI}{l^۳},M_\theta=-\left(\frac{۶EI}{l^۲}\right)_{BA}=-\frac{۱۲EI}{l^۲}$$

در نهایت، نیروهای مورد نیاز برای نگه داشتن جابه‌جایی واحد در راستای θ و جابه‌جایی‌های صفر در راستای x و y در اتصال B از شکل b، از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$F_x=\left(\frac{۶EI}{l^۲}\right)_{BC}=\frac{۳EI}{۲l^۲},F_y=-\left(\frac{۶EI}{l^۲}\right)_{BA}=-\frac{۱۲EI}{l^۳}$$

$$M_\theta=\left(\frac{۴EI}{l}\right)_{BC}+\left(\frac{۴EI}{l}\right)_{BA}=\frac{۲EI}{l}+\frac{۸EI}{l}=\frac{۱۰EI}{l}$$