



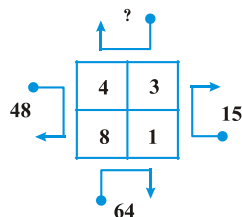
سؤالات آزمون سراسری ۹۵

استعداد و آمادگی تحصیلی ویژه رشته مدیریت

الف) حل مسئله

راهنمایی: هر سؤال این آزمون، یک مسئله است. برای پاسخگویی به هر سؤال، مسئله را حل کرده و گزینه‌ای که بهترین پاسخ را مشخص می‌سازد، انتخاب کنید. هر سؤال فقط یک پاسخ صحیح دارد.

۱- در شکل زیر، بین علائم و اعداد، ارتباط خاصی برقرار است. به جای علامت سؤال، کدام عدد باید قرار بگیرد؟



(۱) ۳۶

(۲) ۳۹

(۳) ۴۲

(۴) ۶۰

۲- با حداقل چند مرتبه برداشتن مداد از روی صفحه‌ی کاغذ، شکل زیر را به‌طور کامل می‌توان رسم کرد به نحوی که از هیچ مسیری روی شکل، بیش از یک مرتبه عبور نکنیم؟



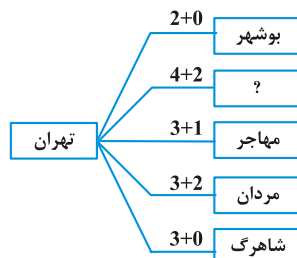
(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۳- بین کلمات و اعداد در شکل زیر، ارتباط خاص و یکسانی برقرار است. به جای علامت سؤال، کدام کلمه می‌تواند قرار بگیرد؟



(۱) تکریم

(۲) تاریخ

(۳) کارتن

(۴) ترکان

۴- پس از آنکه علی ۲۰ هزار تومان به خواهر کوچک‌تر از خودش عیدی می‌دهد، مبلغ عیدی که آنها از بزرگ‌ترهایشان گرفته‌اند، به ترتیب از نسبت ۷ به ۳ به نسبت ۶ به ۳ تغییر می‌کند. خواهر علی تقریباً چند درصد از عیدی‌هایش را از علی گرفته است؟

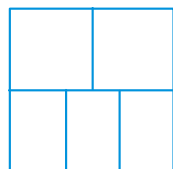
(۴) ۱۶

(۳) ۱۴

(۲) ۱۱

(۱) ۱۰

۵- یک مقوای مربع شکل را با قیچی مطابق شکل زیر، به پنج مستطیل با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌کنیم. مساحت بزرگ‌ترین دایره‌ای که از تکه‌های مقوا می‌توان جدا نمود، تقریباً چند درصد مساحت مقوای اولیه است؟



(۱) ۲۲/۵

(۲) ۱۸/۸

(۳) ۸/۸

(۴) ۱۲/۵

۶- حسن و دو فرزندش کار مشخصی را هر کدام با سرعت ثابتی انجام می‌دهند. سرعت حسن در انجام این کار، دو برابر یکی از فرزندان و سه برابر فرزند دیگری است. اگر حسن و دو فرزندش این کار را با هم در مدت ۱۲ ساعت انجام دهند، فرزندی که سریع‌تر کار می‌کند، آن کار را به تنهایی در چند ساعت انجام می‌دهد؟

(۴) ۲۲

(۳) ۳۳

(۲) ۴۴

(۱) ۶۶



کد ۷- چهار نفر که سوار خودرویی هستند (دو نفر جلو و دو نفر دقیقاً پشت سر آنها)، از خودرو پیاده می‌شوند. این چهار نفر به چند طریق مختلف می‌توانند مجدداً سوار خودرو شوند، به طوری که هیچ‌کس جای قبلی خود ننشیند؟

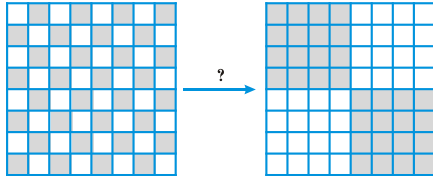
۸ (۴)

۹ (۳)

۱۲ (۲)

۱۶ (۱)

کد ۸- مطابق شکل زیر، یک صفحه شطرنج که دارای ۸ سطر و ۸ ستون است را در نظر بگیرید. اگر در هر مرتبه تغییر، مجاز باشیم جای دو سطر را با هم یا جای دو ستون را با هم عوض کنیم، حداقل با چند تغییر می‌توان شکل صفحه شطرنج را به صورت داده شده، تبدیل کرد؟



۴ (۱)

۸ (۲)

۱۶ (۳)

۲۴ (۴)

کد ۹- پنج رابطه‌ی نادرست، با نمایش دیجیتالی ارقام صفر تا ۹ ساخته شده توسط چوب کبریت، در زیر داده شده است. چند رابطه از پنج رابطه را با جابه‌جایی (نه حذف) فقط یک چوب کبریت، می‌توان به تساوی تبدیل کرد؟

$$\begin{array}{ll} 2 + 9 = 8 & 1 + 0 = 7 \\ 8 - 6 = 6 & 3 - 4 = 6 \\ 5 + 2 = 3 & \end{array}$$

۵ (۱)

۴ (۲)

۳ (۳)

۲ (۴)

کد ۱۰- سه لامپ به طور هم‌زمان روشن می‌شوند. یکی از لامپ‌ها به طور اتوماتیک سه ثانیه روشن و سه ثانیه خاموش می‌شود و این روال ادامه پیدا می‌کند. دو لامپ دیگر نیز با همین روال، اما با بازه‌های زمانی ۶ و ۸ ثانیه‌ای به طور اتوماتیک روشن و خاموش می‌شوند. در چند ثانیه از بازه‌ی زمانی یک دقیقه‌ای، هر سه لامپ، خاموش بوده‌اند؟

۹ (۴)

۱۲ (۳)

۱۳ (۲)

۲۴ (۱)

ب) استدلال منطقی

راهنمایی: برای پاسخگویی به سؤالات ۱۱ تا ۲۰، لازم است موقعیتی را که در هر سؤال مطرح شده، مورد تجزیه و تحلیل قرار دهید و سپس گزینه‌ای را که فکر می‌کنید پاسخ مناسب‌تری برای آن سؤال است، انتخاب کنید. هر سؤال را با دقت بخوانید و با توجه به واقعیت‌های مطرح شده در هر سؤال و نتایجی که بیان شده و بیان نشده ولی قابل استنتاج است، پاسخی را که صحیح‌تر به نظر می‌رسد، انتخاب و در پاسخنامه علامت بزنید.

کد ۱۱- در این مرحله که بچه زبان باز می‌کند و صداهای مختلفی تولید می‌کند، اکثر والدین مصمم هستند که به کودک خود اجازه ندهند این نوع زبان را به کار برد. آنها می‌کشند که کودکشان کلمه صحیح و بامعنی را بیان کند تا واژه‌های بی‌معنی، غافل از اینکه این مرحله، مرحله‌ای معین و ضروری است که طفل بایستی برای تکلم بعدی از آن عبور نماید. همان‌طور که والدین نمی‌توانند از کودک بخواهند بعد از مرحله نشستن بدون وساطت مراحل خزیدن و ایستادن، یک‌باره راه برود، در مورد تکلم هم نباید از کودک انتظار داشت که بعد از تولید صداهای نامفهوم، یک‌باره به تولید واژه‌ای که آمادگی پذیرش آن را ندارد، وادار شود. کدام مورد، از فرضیات مندرج در استدلال فوق است؟

(۱) فراگیری زبان اول، فرایندی قانونمند و تکاملی است که بسیاری از والدین از آن ناآگاهند.

(۲) والدین باید تحمل‌پذیری خود را در مقابل واژه‌های بی‌معنی که کودکشان بر زبان می‌آورد، بالا ببرند.

(۳) برای کمک به تسریع در تحول زبانی در کودک، آموزش والدین از نحوه به حرف درآمدن کودک لازم است.

(۴) یک فرد آگاه می‌تواند از هر آنچه یک کودک می‌گوید، حتی وقتی آنچه می‌گوید بی‌معنی است، مقصود او را دریابد.

پاسخنامه آزمون سراسری ۹۵

استعداد و آمادگی تحصیلی ویژه رشته مدیریت

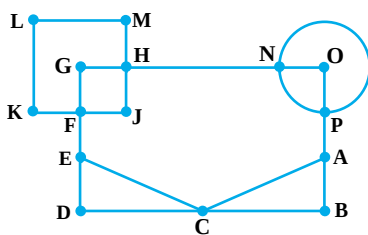
الف) حل مسئله

۱- گزینه «۲» در هر جهتی که حرکت می‌کنیم، قاعده آن است که اولین رقم را در مجموع ۳ رقم بعدی ضرب کنیم:

$$\begin{array}{c}
 ? \\
 \uparrow \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 3 \\ \hline 8 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 \downarrow
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 4 \times (3 + 1 + 8) = 48 \\
 1 \times (8 + 4 + 3) = 15 \\
 8 \times (4 + 3 + 1) = 64
 \end{array}$$

بنابراین در مورد (?) داریم:

$$? = 3 \times (1 + 8 + 4) = 3 \times 13 = 39$$



۲- گزینه «۱» با توجه به نامگذاری‌های انجام شده در شکل مقابل می‌توانیم از نقطه‌ی A شروع کنیم و بدون برداشتن قلم از روی کاغذ و بدون عبور تکراری از مسیرها، کل شکل را رسم کنیم. به مسیر زیر توجه کنید:

A B C D E F G H J F K L M H N O P N P A C E
بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

توضیح کامل تر: در هر گراف، نقاط را رئوس می‌نامند و تعداد پاره‌خط‌های متصل به آن نقطه را درجه‌ی آن رأس می‌گویند. اگر درجه‌ی همه‌ی رئوس به جز دو تا از آن‌ها زوج باشد، می‌توانیم از یک رأس با درجه‌ی فرد آغاز کرده و بدون برداشتن قلم از روی کاغذ، کل گراف را رسم کنیم و از هر پاره‌خط فقط یک بار عبور کنیم. در این صورت حتماً نقطه‌ی پایانی، رأسی است که آن هم درجه‌ی فرد دارد.

در این سؤال، مطابق شکل فقط رئوس A و E دارای درجه‌ی فرد ۳ هستند و در سایر رئوس تعداد پاره‌خط‌ها یعنی درجه‌ی رئوس زوج است. بنابراین با شروع از نقطه A می‌توان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ و بدون عبور تکراری از پاره‌خط‌ها، کل شکل را رسم کرده و در پایان به نقطه‌ی E رسید. پس تعداد دفعات موردنیاز برای برداشتن قلم از روی کاغذ، صفر است.

نکته: اگر درجه‌ی همه‌ی رئوس زوج باشد، باز هم می‌توان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ و بدون عبور تکراری از پاره‌خط‌ها گراف را رسم کرد. با این تفاوت که در این حالت نقطه‌ی شروع و پایان مسیر بر هم منطبق هستند و در ضمن از هر رأس دلخواه می‌توان رسم را آغاز کرد. به این نوع از گراف‌ها، گراف اویلری می‌گویند.

۳- گزینه «۳» اعداد صحیح $n + m$ هرکدام نشان‌دهنده‌ی تعدادی از حروف کلمه‌ی «تهران» هستند. اولین عدد، یعنی n نشان می‌دهد که در کلمه‌ی بعدی چند تا از حروف واژه‌ی «تهران» وجود دارند. عدد m نیز نشان می‌دهد که چند تا از این حروف دقیقاً در همان محلی آمده‌اند که جایگاه آن حرف در واژه‌ی «تهران» بوده است.

۵	۴	۳	۲	۱		۵	۴	۳	۲	۱
ن	ا	ر	ه	ت		ر	ه	ش	و	ب

برای مثال در کلمه‌ی «بوشهر» حروف (ه) و (ر) آمده‌اند، اما هیچ‌کدام از آن‌ها در همان محل قبلی قرار ندارند. پس رابطه‌ی «بوشهر» با «تهران» به صورت $2 + 0$ نوشته شده است.

٥	٤	٣	٢	١		٥	٤	٣	٢	١
ن	ا	ر	هـ	ت		ن	ا	د	ر	م

ت	ه	ر	ا	ن
ك	ا	ر	ت	ن

www.modaresanesharif.ac.ir



۳۹- مردم دورمان را گرفته بودند. دیدم کار افتتاح می‌شود. بیست‌وشش کوزه شکسته بود، بیست‌وشش ریال پول درسی که گرفته بودم را دادم و

۳

۲

۱

راضی رفتم. بدون خطا

۴

۴۰- سالیان درازی در خانه استجاره‌ای زندگی می‌کردم. وقتی از اداره استعفا کردم، پول زیادی برای خرید خانه مسکونی نداشتم. مجبور بودم که در

۲

۱

خرج روزانه افراط نکنم و شیوه بهتری برای ادامه زندگی در پیش بگیرم. بدون خطا

۴

۳

ریاضیات عمومی ۱ و ۲ دوره فنی و مهندسی

۴۱- فرض کنید z ریشه‌ای از معادله $z^5 + z^2 + z + 1 = z^5 + z^2 + z^2 + 1 = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ باشد، مقدار z کدام است؟

$$\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \quad (۴)$$

$$\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \quad (۳)$$

$$\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \quad (۲)$$

$$\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

۴۲- مکان هندسی تمام z هایی از صفحه مختلط که $\operatorname{Re}(z + \frac{1}{z}) = \operatorname{Im}(z - \frac{1}{z})$ ، کدام است؟

(۲) یک دایره به استثنای یک نقطه روی آن

(۱) یک دایره به مرکز مبدأ مختصات

(۴) یک خط گذرنده از مبدأ مختصات

(۳) یک خط به استثنای نقطه‌ای روی آن خط

۴۳- بازه همگرایی $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{1397}}{7^n} (x-3)^n$ کدام است؟

$$[\frac{1}{7}, 4] \quad (۴)$$

$$(\frac{1}{7}, 4] \quad (۳)$$

$$[1, 5) \quad (۲)$$

$$(1, 5) \quad (۱)$$

۴۴- فرض کنید R_1 و R_2 به ترتیب، شعاع همگرایی دو سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{7^n} (\Delta x - 3)^n$ و $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{7^n} (\Delta x - 3)^n$ باشند، در این صورت کدام مورد صحیح است؟

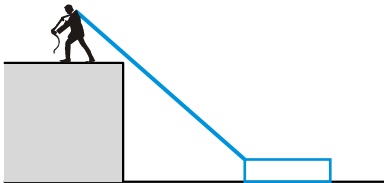
$$R_2 > R_1 \quad (۴)$$

$$R_1 > R_2 \quad (۳)$$

$$R_1 = R_2 \quad (۲)$$

$$R_1 + R_2 = 1 \quad (۱)$$

۴۵- شخصی بالای یک دیواره در ارتفاع ۲۰ متری سطح آب ایستاده است و طنابی را مانند شکل با سرعت $4 \frac{m}{s}$ می‌کشد و این طناب به قایقی درون آب متصل است. هنگامی که هنوز ۲۵ متر از طناب بین شخص و قایق باقی مانده است، سرعت نزدیک شدن قایق به پای دیوار چند متر بر ثانیه است؟



$$\frac{20}{7} \quad (۲)$$

$$\frac{20}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{16}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{16}{7} \quad (۳)$$

۴۶- نردبانی به طول ۱۵ متر را به دیواری تکیه داده‌ایم به نحوی که طرف دیگر نردبان روی زمین قرار دارد. حال اگر سمتی از نردبان که روی زمین قرار دارد را با سرعت ۷ از دیوار دور کنیم، طرف دیگر نردبان با سرعت v_1 به سمت زمین حرکت می‌کند، در این صورت زمانی که فاصله پای نردبان تا

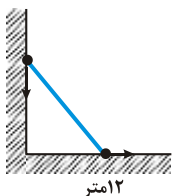
دیوار ۱۲ متر است $|\frac{v}{v_1}|$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۳)$$



۴۷- فرض کنید $A = \int_0^1 e^{x^2} dx$ ، در این صورت مقدار $\int_0^1 (e^{x^2+1} - A) dx$ کدام است؟

- (۱) e (۲) $(e-1)A$ (۳) eA (۴) $(e-1)A$

۴۸- منحنی $y = \sin x$ را بر $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ حول محور x ها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi^2 - 1}{4}$ (۲) $\frac{\pi^2}{4}$ (۳) $\frac{\pi^2 - \pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi(\pi-1)}{4}$

۴۹- فرض کنید $x^y = y^x$ ، در این صورت $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{y(x \ln x - y)}{x(y \ln y - x)}$ (۲) $\frac{y(y \ln y - y)}{x(x \ln x - x)}$ (۳) $\frac{y(x \ln y - y)}{x(y \ln x - x)}$ (۴) $\frac{y(y \ln y - x)}{x(x \ln x - y)}$

۵۰- کدام گزینه در مورد سری‌های $\sum_{n=1}^{+\infty} n(\cos \frac{1}{n} - 1)$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} n(\cos \frac{1}{n} - 1)$ به ترتیب، صحیح است؟

- (۱) واگرا - همگرا (۲) همگرا - همگرا (۳) همگرا - واگرا (۴) واگرا - واگرا

۵۱- انتگرال‌های $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 e^{x^2}}$ و $J = \int_1^{+\infty} \frac{(1+x)dx}{x^2 + \ln x + 1}$ به ترتیب و هستند.

- (۱) واگرا - همگرا (۲) همگرا - همگرا (۳) همگرا - واگرا (۴) واگرا - واگرا

۵۲- فرض کنیم $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$ ، مقدار $f^{(13)}(-\frac{1}{4})$ کدام است؟ (منظور از $f^{(13)}(x_0)$ مشتق ۱۳ ام از $f(x)$ در نقطه x_0 است.)

- (۱) $\frac{13!}{2}$ (۲) $-\frac{13!}{2}$ (۳) $13!$ (۴) $-13!$

۵۳- اگر y تابعی بر حسب x باشد که در رابطه‌ی $x^{2x} - 2x^x \cot y - 1 = 0$ صدق کند، $y'(1)$ کدام است؟

- (۱) $\log 2$ (۲) $-\log 2$ (۳) -1 (۴) 1

۵۴- فرض کنید سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x-3)^n$ دارای بازه همگرایی $[0, 6]$ باشد و $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ موجود باشد. در این صورت بازه همگرایی سری

$\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n a_n (x-1)^n$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 3]$ (۲) $(-1, 3)$ (۳) $(0, 2)$ (۴) $[0, 2]$

۵۵- مقدار $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\lambda}(\pi+1)$ (۲) $\frac{1}{\lambda}(\pi+2)$ (۳) $\frac{1}{\lambda}(\pi+3)$ (۴) $\frac{1}{\lambda}\pi$

۵۶- فرض کنید $\sin z = x^2 - 2xy + xy^2$. معادله صفحه مماس بر این رویه در نقطه $(1, 0, \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) $x - y = 1$ (۲) $x + y = 1$ (۳) $z - y = \frac{\pi}{4}$ (۴) $z + y = \frac{\pi}{4}$

۵۷- اگر $A = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = A$ و $B = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = B$ ، کدام گزینه در مورد A و B صحیح است؟

- (۱) A وجود ندارد و $B = 1$ (۲) $A = 0$ و B وجود ندارد (۳) $A = 1$ و $B = 0$ (۴) $A = 0$ و $B = 1$

۵۸- فرض کنید $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ، مقدار مشتق جهتی $D_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})} f(0, 0)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{\lambda}$ (۳) 0 (۴) $\frac{\sqrt{3}}{\lambda}$



ریاضیات عمومی ۱ و ۲ دوره فنی و مهندسی

۴۱- گزینه «۴» ابتدا معادله داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم و با مجموع ۷ جمله اول یک تضاد هندسی که جمله اول آن ۱ و قدر نسبت آن

$$-z \text{ می‌باشد روبه‌رو هستیم که مجموع این جملات از رابطه‌ی } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \text{ به‌دست می‌آید و داریم:}$$

$$1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+z^6=0 \Rightarrow S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1 \times (1-(-z)^7)}{1+z} = 0$$

$$1+z^7=0 \Rightarrow z^7=-1 \Rightarrow z=\sqrt[7]{-1} \Rightarrow r=1, \tan \theta=0 \Rightarrow \theta=\pi$$

$$\sqrt[7]{z} = \sqrt[7]{\cos \frac{\pi+2k\pi}{7} + i \sin \frac{\pi+2k\pi}{7}} \quad k=0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

توجه داشته باشید که ریشه‌ی n ام عدد مختلط z از رابطه‌ی $z = r \left(\cos \frac{\theta+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta+2k\pi}{n} \right)$, $k=0,1,2,\dots,n-1$ به‌دست می‌آید.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۲- گزینه «۳» عدد مختلط z را به صورت دکارتی $x+iy$ در نظر می‌گیریم و باید قسمت‌های حقیقی $z + \frac{1}{z}$ و موهومی $z - \frac{1}{z}$ را مساوی هم قرار دهیم.

$$(x+iy) + \frac{1}{x+iy} = (x+iy) - \frac{1}{x+iy}$$

عبارت‌های کسری را در مزدوج مخرج آن‌ها ضرب و تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$(x+iy) + \frac{x-iy}{x^2+y^2} = (x+iy) - \frac{x-iy}{x^2+y^2} \Rightarrow \operatorname{Re}\left(z + \frac{1}{z}\right) = x + \frac{x}{x^2+y^2}, \operatorname{Im}\left(z - \frac{1}{z}\right) = y + \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\xrightarrow{\text{باید}} x + \frac{x}{x^2+y^2} = y + \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow (x-y)\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0 \xrightarrow{\text{باید}} x-y=0 \Rightarrow x=y$$

خط $y=x$ البته به غیر از مبدأ چرا که باید $z \neq 0$ باشد، به دلیل وجود $\frac{1}{z}$.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۳- گزینه «۱» برای به‌دست آوردن بازه همگرایی باید ابتدا شعاع همگرایی را از رابطه‌ی $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}$ به‌دست آوریم.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)^{1397}}{n^{1397}} \times \frac{r^n}{n^{1397}} \right| = \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{R} \Rightarrow R=r$$

اکنون بازه همگرایی را از رابطه‌ی $|x-3| \leq 2$ به‌دست می‌آوریم و داریم:

$$-2 \leq x-3 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5$$

دو سر بازه یعنی $x=1$ و $x=5$ باید جداگانه بررسی شوند.

به‌ازای $x=5$ سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} n^{1397}$ در می‌آید که یک سری واگراست.

و به‌ازای $x=1$ هم سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^{1397}$ در می‌آید که این سری هم یک سری واگراست (چون حد جمله عمومی مخالف صفر است)، پس دو سر بازه‌ی همگرایی باید باز باشد یعنی $(1,5)$.

روش تستی: طبق نکته گفته شده در کتاب ریاضی عمومی بدون دخالت دست مدرسان شریف، در این مثال $\alpha=1397, \beta=0$ می‌باشد و چون $\beta-\alpha=-1397 < 0$ می‌باشد، پس دو سر بازه همگرایی باید باز باشد و این یعنی گزینه (۱) صحیح است.

نکته: برای به‌دست آوردن بازه همگرایی سری‌های توانی به صورت سریع از عبارت‌هایی مانند e^n و $2^n, n^n$ و ... صرف‌نظر می‌کنیم و سری را به فرم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta} (x-c)^n$$

تبدیل می‌کنیم و سه حالت زیر را داریم:

(۱) اگر $\beta-\alpha > 1$ باشد، دو سر بازه همگرایی باید بسته باشد.

(۲) اگر $0 < \beta-\alpha \leq 1$ باشد، بازه همگرایی قطعاً باید به صورت نیم‌باز باشد، یعنی یک سرش بسته و سر دیگرش باز باشد.

(۳) اگر $\beta-\alpha \leq 0$ باشد، دو سر بازه همگرایی حتماً باز می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆



۴۴- گزینه «۲» شعاع همگرایی سری اول را از رابطه‌ی $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}$ به دست می‌آوریم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{r^n} (\Delta x - r)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} \times \frac{r^n}{n!} \right| = \frac{1}{R_1} \Rightarrow \infty = \frac{1}{R_1} \Rightarrow R_1 = 0$$

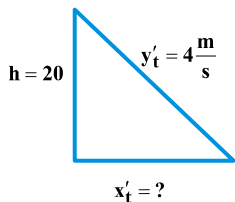
شعاع همگرایی سری دوم را از رابطه‌ی $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ به دست می‌آوریم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{r^n} (\Delta x - r)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^n}}{\sqrt[n]{r^n}} = \frac{1}{R_r} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{r} = \frac{1}{R_r} \Rightarrow \infty = \frac{1}{R_r} \Rightarrow R_r = 0$$

پس $R_1 = R_r$ می‌باشد.

۴۵- گزینه «۱» برای حل مسائل کمیت‌های وابسته به زمان باید با توجه به داده‌های مسئله و همچنین شکل سؤال یک رابطه بین داده‌های مسئله برقرار کنیم (معمولاً طبق قضیه فیثاغورث یا تالس...) و سپس از دو طرف تساوی برقرار شده نسبت به زمان مشتق بگیریم که تغییرات x را با x'_t و تغییرات y را هم با y'_t نشان می‌دهیم.

در این مثال با توجه به شکل بین ناظر و دیوار و قایق روی آب که یک مثلث قائم‌الزاویه داریم، قضیه فیثاغورث را می‌نویسیم و داریم:



$$h^2 + x^2 = (y\Delta)^2$$

$$400 + x^2 = 625$$

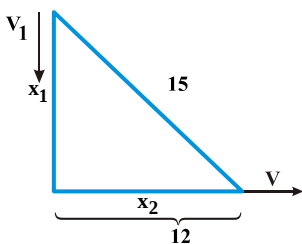
$$x^2 = 225 \Rightarrow x = 15$$

اکنون از دو طرف رابطه زیر نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و داریم: از طرفین نسبت به t مشتق می‌گیریم:

$$x^2 + h^2 = y^2 \Rightarrow 2xx'_t = 2yy'_t \Rightarrow 2(15)x'_t = 2(25)4 \Rightarrow x'_t = \frac{25 \times 4}{15} = \frac{20}{3} \left(\frac{m}{s} \right)$$

۴۶- گزینه «۴» برای حل مسائل مربوط به کمیت‌های وابسته به زمان ابتدا باید با توجه به داده‌های مسئله یک رابطه بین این داده‌ها برقرار کنیم و سپس با استفاده از این رابطه هم یک مقدار مجهول را به دست آوریم و هم با مشتق‌گیری از رابطه نسبت به زمان، خواسته سؤال را به دست آوریم.

در این مثال با توجه به شکل داده شده باید یک رابطه‌ی فیثاغورث بین داده‌های مسئله برقرار کنیم تا مقدار مجهول x_1 را ابتدا بیابیم. یعنی:



$$x_1^2 + (12)^2 = (15)^2$$

$$x_1^2 + 144 = 225 \Rightarrow x_1^2 = 81 \Rightarrow x_1 = 9$$

اکنون از دو طرف رابطه‌ی $x_1^2 + x_2^2 = 225$ نسبت به متغیر زمان مشتق می‌گیریم و داریم:

$$2x_1x'_1 + 2x_2x'_2 = 0$$

با توجه به اینکه تغییر مسافت برابر سرعت می‌باشد، قرار می‌دهیم $x'_1 = V_1$ و $x'_2 = V$ و داریم:

$$2(9)V_1 + 2V(12) = 0 \Rightarrow 18V_1 = -24V \Rightarrow \left| \frac{V}{V_1} \right| = \left| -\frac{18}{24} \right| = \frac{3}{4}$$

۴۷- گزینه «۳» مقدار A را که حاصل انتگرال می‌باشد و یک عدد ثابت است در انتگرال خواسته شده جایگذاری می‌کنیم و داریم:

$$\int_0^1 e^{x^2} \times e dx - \int_0^1 A dx = e \int_0^1 e^{x^2} dx - (Ax)_0^1 = eA - A = (e-1)A$$

۴۸- گزینه «۲» حجم حاصل از دوران تابع $f(x)$ حول محور x ها در بازه $[a, b]$ برابر است با:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi^2}{4}$$



سؤالات آزمون سراسری ۱۴۰۱

زبان تخصصی

PART A: Structure

Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then mark the correct choice on your answer sheet.

✎ 1- There is talk of the two struggling companies merge, and it is believed that they would benefit significantly from synergy..... .

- | | |
|--------------------|------------------------------|
| 1) happens to this | 2) whether this had happened |
| 3) this happened | 4) were this to happen |

✎ 2- The two former rivals have formed an unlikely strategic alliance.....everyone perplexed as to why they were at loggerheads for so long.

- | | | | |
|-----------|---------------|---------|------------|
| 1) leaves | 2) and leaves | 3) left | 4) leaving |
|-----------|---------------|---------|------------|

✎ 3- A meeting of the Board of Directors has been convened..... by Manton Investments.

- | | |
|--|--|
| 1) to table the offer tabled the implications of | 2) for the offer to table to discuss the implications of |
| 3) to discuss the implications of the offer tabled | 4) about the implications discuss the tabled offer |

✎ 4- The company was quick to reassure shareholders that its cash flow is in a very healthy state.....there is no liquidity issue.

- | | | | |
|----------|-------------|--------|------------|
| 1) which | 2) and that | 3) and | 4) besides |
|----------|-------------|--------|------------|

✎ 5- You will never reach the top of the corporate unless you change your attitude towards your superiors; it is.....at your job, but also how well liked you might be.

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) not only about how good you are | 2) about how good not only are you |
| 3) not only about how good are you | 4) about how good not only you are |

✎ 6- In published work spanning more than four decades,.....by both individuals and institutions is systematically and significantly influenced by natural human cognitive limitations and biases.

- | |
|--|
| 1) it was explored by Thaler how decision making is economic |
| 2) Thaler explored how economic decision making |
| 3) how decision making was explored economic by Thaler and |
| 4) it was Thaler explored how economic decision making |

✎ 7- Although mental accounting may have the benefit of preventing a person from spending too much in one account, it can result in

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1) some situations increased costs in | 2) some situations of costs increased |
| 3) increased costs in some situations | 4) costs are increased in some situations |

✎ 8- their most ardent champions concede that a technical or scientific breakthrough is necessary before solar cells can meet the goal of providing one percent of the nation's energy needs.

- | | | | |
|-------------|---------|----------------|--------------|
| 1) Although | 2) Even | 3) In spite of | 4) No matter |
|-------------|---------|----------------|--------------|

✎ 9- Several employees of the company believe that the reason.....the design department knows little about marketing and strategy.

- | | |
|---|---|
| 1) why the alarming decline in sales is | 2) why there is in sales an alarming decline of |
| 3) the alarming decline in sales that | 4) for the alarming decline in sales is that |

✎ 10- In light of her extraordinarily creative budgeting proposal, a recent poll put Susan ahead of George in the race for governor and found her to be.....candidate of the two.

- | | | | |
|-------------|---------------|-----------|-------------|
| 1) the best | 2) the better | 3) better | 4) a better |
|-------------|---------------|-----------|-------------|

**PART B: Vocabulary**

Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the mark the answer on your answer sheet.

- ✎ 11- I'm sorry I can't lend you \$10, because I'm really.....up this month.
 1) broken 2) gone 3) hard 4) far
- ✎ 12- Management has promised to facilitate an easy.....to the new ownership structure.
 1) catalyst 2) relevance 3) transition 4) seizure
- ✎ 13- The board has put forward a motion of no confidence in the Chief Executive and his days at the head of the company now appear
 1) numbered 2) short-lived 3) null 4) short-sighted
- ✎ 14- It is often alleged that.....is inconsistent with economic rationality, which assumes that people behave selfishly.
 1) utilitarianism 2) isolation 3) altruism 4) pleasure
- ✎ 15- It is a huge conglomeration with activities in.....industries ranging from extraction and mining to call center support services.
 1) initial 2) derivative 3) interchangeable 4) diverse
- ✎ 16- To this day, researchers and theorists debate whether bubonic plague caused The Black Death, a pandemic that.....the world in the middle of the fourteenth century.
 1) violated 2) sought 3) swept 4) exploited
- ✎ 17- Even though Mrs. Wilson was a very wealthy woman, she still lived an.....life and only spent money on the basic essentials.
 1) obsolete 2) indifferent 3) abstemious 4) unrivaled
- ✎ 18- Motivate consumers to want your product by positioning it in the marketplace to.....to a single desire certain customers have. Trying to be everything to everyone makes no one feel special.
 1) appeal 2) attribute 3) render 4) reveal
- ✎ 19- A/n.....is the process by which a landlord forces a tenant out of the property the tenant is renting.
 1) vacancy 2) extrication 3) eviction 4) refuge
- ✎ 20- The business is.....as it can no longer meet the repayments on its debt.
 1) spurious 2) insolvent 3) groundless 4) unattainable

PART C: Cloze Test

Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

The Economic Importance of Coral Reefs

A lot of people around the world are dependent, or partly dependent, on coral reefs for their livelihoods. They often live (21) the reef, and their livelihood revolves around the direct extraction, processing and sale of reef (22) such as shell fish and seaweeds. In addition, their homes are (23) by the reef from wave action.

Reef flats and (24) reef lagoons are accessible on foot, without the need for a boat, and so allow women, children and the elderly to engage directly in manual harvesting, or 'reef-gleaning'. This is a significant factor (25) reef-based fisheries from near-shore sea fisheries. Near-shore fisheries are typically the domain of adult males, in particular where they involve the use of boats, with women and children (26) mainly to shore-based activities. However, in a coral-reef fishery the physical accessibility of the reef opens up opportunities for direct participation by women, and (27) increases their independence and the importance of their role in the community. It also provides a place for children to play, and to (28) important skills and knowledge for later in life. For example, in the South West Island of Tobi, in the Pacific Ocean, young boys use simple hand lines with

پاسخنامه آزمون سراسری ۱۴۰۱

زبان تخصصی

بخش اول: ساختار

دستورالعمل: لغت یا عبارت (۱)، (۲)، (۳) یا (۴) را که به بهترین وجه جای خالی را کامل می‌کند، انتخاب کنید. سپس گزینه‌ی صحیح را در پاسخ‌نامه تان علامت بزنید.

۱- گزینه «۴» صحبت‌هایی وجود دارد مبنی بر اینکه شاید این دو شرکت مخالف با هم ادغام شوند و باور بر این است که اگر این اتفاق بیفتد، هر دو از این همکاری و ادغام سود می‌برند.

توضیح گرامری: شرطی نوع دوم مدنظر است. یعنی در ابتدا داشتیم:

There is talk of the two struggling companies merge, and it is believed that they **would benefit** significantly from synergy **if this were to happen**.

همانطور که می‌بینید و می‌دانیم، در شرطی نوع دوم فعل جواب شرط باید به زمان آینده در گذشته (would benefit) و فعل جمله شرط باید به زمان گذشته (were) باشد. اکنون می‌توانیم if را حذف کنیم و were را ببریم قبل از this:

There is talk of the two struggling companies merge, and it is believed that they **would benefit** significantly from synergy **were this to happen**.

۲- گزینه «۴» این دو شرکت رقیب یک اتحاد استراتژیک غیرمحمتمل با هم شکل داده‌اند که همه را مات و مبهوت می‌کند که چرا آنها {این دو شرکت} برای مدت طولانی با هم بحث و اختلاف داشتند.

توضیح گرامری: این جمله در اصل به این شکل بوده:

The two former rivals have formed an unlikely strategic alliance **which leaves** everyone perplexed ...

می‌توانیم which را حذف کنیم و با تبدیل leaves به leaving یک عبارت وصفی (adjective phrase) بسازیم:

The two former rivals have formed an unlikely strategic alliance **leaving** everyone perplexed ...

گزینه (۱) باید به صورت which leaves باشد. گزینه (۳) کنار می‌رود چون شکل کوتاه‌شده which leaves می‌شود leaving نه left. گزینه (۲) کنار می‌رود چون در صورت استفاده از این گزینه leaves با فاعل جمع rivals مطابقت و همخوانی ندارد.

۳- گزینه «۳» جلسه‌ای بین هیئت‌مدیره ترتیب داده شده تا در مورد پیامدهای پیشنهاد مطرح‌شده توسط شرکت مانتون اینوستمنت صحبت کنند. توضیح گرامری: جلسه چرا ترتیب داده شده؟ «تا» در مورد پیامدها بحث و صحبت کنند. این یعنی بیان هدف مدنظر است و جای خالی باید با infinitive شروع شود. پس گزینه‌های (۲) و (۴) کنار می‌روند. گزینه (۱) کنار می‌رود چون table دو بار استفاده شده. حتی اگر این اشتباه را به پای بی‌دقتی طراح بگذاریم، باز این گزینه به خاطر ترکیب به‌وضوح نادرست the implications of by Manton کنار می‌رود. همین ایراد را از گزینه (۲) هم می‌شود گرفت. پس این شما و این هم گزینه (۳):

A meeting of the Board of Directors has been convened **to discuss** the implications of the offer (**that was**) tabled **by** Manton Investments.

۴- گزینه «۲» آن شرکت سریعاً به سهامداران اطمینان خاطر داد که گردش نقدینگی‌اش در وضعیت بسیار سالمی است و اینکه هیچ مسئله نقدینگی وجود ندارد. توضیح گرامری: بعد از فعل reassure به معنی «اطمینان خاطر دادن، قوت قلب دادن» اول مفعول و بعد از آن that clause می‌آید. یعنی داریم:

The company was quick to **reassure shareholders** **that its cash flow is in a very healthy state**

اکنون می‌توانیم با استفاده از and یک that clause دیگر هم به جمله بالا اضافه کنیم (با رعایت ساختار موازی):

The company was quick to **reassure shareholders** **that its cash flow is in a very healthy state** **and** **that there is no liquidity issue**.

گزینه (۱) با توجه به ترجمه جمله کنار می‌رود و کوچکترین ایرادی که می‌شود از گزینه (۴) گرفت این است که باید بعد از besides کاما بیاید. گزینه (۳) هم تاحدودی صحیح است اما گزینه (۲) صحیح‌تر است.

۵- گزینه «۱» شما هرگز به جایگاه بالایی در شرکت‌تان نمی‌رسید مگر اینکه نگرش‌تان را به مافوق‌هایتان تغییر دهید. و این نه تنها به میزان خوب بودن شما در کار، بلکه به میزان محبوبیت‌تان هم مرتبط می‌شود.

توضیح گرامری: از ساختار not only ... but also استفاده شده. گزینه‌های (۲) و (۳) کنار می‌روند چون گفتیم هر وقت not only در ابتدای جمله بیاید، باید وارونگی صورت گیرد. اما در این سؤال جمله با it is شروع شده نه با not only. بنابراین نیازی نیست که بگوییم are you (یعنی همان اتفاقی که در گزینه‌های (۲) و (۳) افتاده). همچنین می‌دانیم که not only ... but also مستلزم رعایت ساختار موازی است. پس گزینه (۴) رد می‌شود و گزینه (۱) صحیح است:

towards your superiors; **it is not only** about how good you are at your job, **but also** how well liked you might be.
البته درست‌تر این است که بعد از but also هم از about استفاده شود.

۶- گزینه «۲» در یک اثر منتشرشده که بیش از چهار دهه قدمت دارد، «تالر» کشف کرد که چگونه تصمیم‌گیری اقتصادی توسط افراد و مؤسسات به صورت نظاممند و به میزان زیادی از محدودیت‌ها و سوگیری‌های شناختی انسان طبیعی اثر می‌پذیرد.

توضیح گرامری: در چنین مواقعی بهتر است که جای خالی با اسم خاص (در اینجا Thaler) شروع شود. پس این شما و این هم گزینه (۲):
In published work spanning more than four decades, **Thaler explored how economic decision making by both individuals and institutions is influenced**

در اینجا Thaler فاعل، explored فعل اصلی و از how تا آخر جمله هم یک wh-clause است که در جایگاه مفعول استفاده شده. همانطور که می‌دانیم wh-clause (جمله‌واره اسمی) باید فقط و فقط یک فعل داشته باشد که در اینجا فعل این کلاز is influenced است.
بررسی سایر گزینه‌ها: گزینه (۱) کنار می‌رود چون در صورت استفاده، wh-clause دو تا فعل خواهد داشت:

... it was explored by Thaler how decision making **is** economic by both individuals and institutions **is influenced**... [X]
گزینه (۳) کنار می‌رود چون از صفت economic (و نه از قید economically) برای توصیف فعل explored استفاده کرده:

how decision making **was explored economic** by Thaler and ... [X]
گزینه (۴) زمانی ارزش بررسی کردن دارد که به صورت مقابل باشد:
it was Thaler **who** explored how economic decision making

۷- گزینه «۲» گرچه حسابداری ذهنی ممکن است این مزیت را داشته باشد که مانع از این شود که یک فرد بیش از حد در یک حساب هزینه کند، اما می‌تواند منجر به قیمت‌های افزایش‌یافته در برخی از موقعیت‌ها شود.

توضیح گرامری: فعل دو کلمه‌ای result in به معنی «منجر شدن» متعدی است و این یعنی جای خالی باید با مفعول پُر شود. مفعول نباید فعل اصلی داشته باشد. پس همین اول کار گزینه (۴) را رد می‌کنیم:

... it can **result in** costs are increased in some situations. [X]
گزینه‌های (۱) و (۲) کنار می‌روند چون in some situations باید در آخر جمله بیاید. پس این شما و این هم گزینه (۳):

it can **result in** increased costs in some situations ...
در اینجا قسمتی که زیرش خط کشیده‌ایم مفعول و increased (به معنی افزایش‌یافته) هم صفت مفعولی است.

۸- گزینه «۲» حتی مشتاق‌ترین طرفداران آنها {سلول‌های خورشیدی} هم قبول دارند که یک پیشرفت فنی یا علمی لازم است تا سلول‌های خورشیدی بتوانند هدف تأمین یک درصد از نیاز کشور به انرژی را محقق سازند.

توضیح گرامری: با توجه به مفهوم تست گزینه (۲) صحیح است.

۱	Although	۲	Even	حتی
۳	In spite of	۴	No matter	مهم نیست که
				اگرچه، به‌رغم

۹- گزینه «۴» چندین تن از کارکنان این شرکت باور دارند که دلیل افتِ نگران‌کننده‌ی فروش این است که دپارتمان طراحی شناخت کمی از بازاریابی و استراتژی دارد.

توضیح گرامری: بعد از reason هم می‌تواند why بیاید و هم for. همچنین می‌تواند چیزی نیاید (دقیقاً مثل گزینه (۳)). البته ناگفته نماند که گزینه (۳) در اصل این طوری است: **the reason (why) the alarming decline in sales that**. پس تا اینجا همه گزینه‌ها بدون ایراداند و باید عمیق‌تر بررسی شوند. بیایید گزینه (۱) را در جای خالی قرار دهیم:

Several employees of the company believe that **the reason why the alarming decline in sales is**... [X]
همانطور که می‌بینید جمله‌مان ناقص است و باید به این صورت باشد:

Several employees of the company believe that **the reason why (there is) an alarming decline in sales is**...
گزینه (۲) ایراد گزینه (۱) را برطرف کرده (یعنی آمده از there is استفاده کرده) اما علاوه بر مشکلات دیگر، آن of آخر گزینه نادرست و غیرضروری است.

۱۰۰- فرض کنید میانگین تابع $f(x) = e^{x^2-x}$ در بازه $[0, 2]$ برابر A باشد، کدام مورد درست است؟

- (۱) $A < e^{-\frac{1}{4}}$ (۲) $A \geq e^{-\frac{1}{4}}$ (۳) $A > e^{\frac{1}{4}}$ (۴) $A \geq e^{\frac{1}{4}}$

۱۰۱- اگر به ازای $0 < \alpha < 1$ ، تساوی $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - \alpha^2 \cos^2(x)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-\alpha^2}}$ برقرار باشد، آنگاه مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \alpha \cos^2(x)}{1 - \alpha^2 \cos^2(x)} dx$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{(\alpha - 1 + \sqrt{1 - \alpha^2})\pi}{2\alpha\sqrt{1 - \alpha^2}}$ (۲) $\frac{(\alpha - 1 + \sqrt{1 + \alpha^2})\pi}{2\alpha\sqrt{1 + \alpha^2}}$ (۳) $\frac{(\alpha + 1 + \sqrt{1 - \alpha^2})\pi}{2\alpha\sqrt{1 - \alpha^2}}$ (۴) $\frac{(\alpha + 1 + \sqrt{1 + \alpha^2})\pi}{2\alpha\sqrt{1 + \alpha^2}}$

۱۰۲- فرض کنید $a > 1$ و طول قوس منحنی $y = a \ln\left(\frac{a^2}{a^2 - x^2}\right)$ در بازه $[0, 1]$ برابر $\ln \frac{9}{e}$ باشد. مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) 2 (۴) 3

۱۰۳- فرض کنید $I = \int_0^1 \frac{e^x}{x^2} dx$ و $J = \int_1^\infty \frac{\cos^2(x)}{x^2} dx$. کدام مورد درست است؟

- (۱) I و J همگرا است. (۲) I همگرا و J واگرا است. (۳) I و J هر دو همگرا است. (۴) I و J هر دو واگرا است.

۱۰۴- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+n)}} \right)$ ، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2} - 1$ (۲) $2 - \sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2} - 1$ (۴) $2\sqrt{2} - 2$

۱۰۵- اگر I بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^\infty \frac{(1+2x)^{2n}}{n \times 3^n}$ باشد، کدام مورد در شرط $J \subset I$ ، صدق می‌کند؟

- (۱) $J = \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ (۲) $J = \left[-1, \frac{1}{3}\right]$ (۳) $J = \left[-1, \frac{1}{4}\right]$ (۴) $J = \left[-\frac{1}{4}, 1\right]$

۱۰۶- انحنای منحنی $\vec{r}(t) = (t+1)\sin t \vec{i} + t\cos t \vec{j} + t\vec{k}$ در لحظه $t = 0$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\sqrt{\frac{5}{6}}$ (۳) $\frac{2}{\sqrt{54}}$ (۴) $\sqrt{\frac{5}{54}}$

۱۰۷- صفحه مماس بر خم $e^t \vec{k} + \cos t \vec{j} + (t^2 + 1)\vec{i}$ ، در لحظه $t = 0$ ، محور y را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) -1 (۳) 1 (۴) $\frac{3}{2}$

۱۰۸- کدام مورد برای نقاط بحرانی تابع $f(x, y) = x^4 - 2xy^2 - 3xy^2$ ، درست است؟

- (۱) f در نقطه $B\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, -1\right)$ ، کمینه موضعی است. (۲) f در نقطه $A(0, -1/5)$ ، کمینه موضعی است.

- (۳) f در نقطه $A(0, -1/5)$ ، بیشینه موضعی است. (۴) f در نقطه $B\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, -1\right)$ ، زینی است.

۱۰۹- منحنی C با معادلات پارامتری $\begin{cases} x(t) = 2t^5 \\ y(t) = \frac{1}{1+2t^2} \end{cases}$ به ازای $t \geq 0$ مفروض است. اگر R ناحیه محصور به منحنی C ، محور x ها، محور y ها و خط $x = 2$ باشد، آنگاه مساحت ناحیه R ، کدام است؟

- (۱) $3 - \ln 3$ (۲) $3 - \ln 4$ (۳) $2 - \ln 3$ (۴) $4 - \ln 3$



۱۱۰- به ازای کدام مقدار ثابت $a > 1$ ، مساحت ناحیه محصور به منحنی‌های $y = \frac{1}{x}$ ، $y = \frac{a^x}{x}$ و خطوط $x=1$ و $x=e$ ، برابر ۲۶ واحد سطح است؟

(۴) ۲

(۳) ۳

(۲) ۴

(۱) $2e$

۱۱۱- مقدار $\int_0^{\infty} te^{-t^2} dt$ ، کدام است؟

(۴) $\sqrt{\pi}$ (۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

۱۱۲- مقدار کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}(x, y, z) = (2 + 2xe^y \sin z)\vec{i} + (-2y + x^2e^y \sin z)\vec{j} + (1 + x^2e^y \cos z)\vec{k}$ روی مسیر

$\vec{r}(t) = t\vec{i} + (1 - \cos(\pi t))\vec{j} + (t^2 - t)\vec{k}$ در بازه $t \in [0, 1]$ ، در جهت افزایش t ، کدام است؟

(۴) -۲

(۳) -۱

(۲) صفر

(۱) ۲

۱۱۳- فرض کنید C منحنی $y = 1 - x^2$ در بازه $[-1, 1]$ در جهت مثبت باشد. مقدار $\int_C (4y + \frac{x}{x^4 + 1})dx + (4x - ye^{y^2})dy$ ، کدام است؟

(۴) $\frac{\pi}{4}$

(۳) صفر

(۲) $-\frac{\pi}{4}$ (۱) $-\frac{\pi}{2}$

۱۱۴- مقدار شار گذرا از سطح خارجی هرم بسته با رئوس $(0, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ ، $(1, 0, 0)$ ، $(0, 0, 1)$ و $(0, 0, 0)$ توسط میدان برداری $3x\vec{i} + 2y\vec{j} + zk\vec{k}$ ، کدام است؟

(۴) ۱

(۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{6}$

(۱) صفر

۱۱۵- اگر $\vec{F}(x, y, z) = (2x - y, 2z + x, -2x - y)$ و سطح S بخشی از رویه $z = 4 - x^2 - y^2$ در نیم‌فضای $z \geq 0$ باشد، آنگاه مقدار $\iint_S \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ ، کدام است؟

(۴) صفر

(۳) 2π (۲) 4π (۱) 8π



۹۶- گزینه «۲» حد داده شده به فرم $\frac{0}{0}$ مبهم است. با استفاده از قاعده هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{f(x)+1}}{1 - \sqrt{x}} = \frac{3 - \sqrt{f(1)+1}}{1 - \sqrt{1}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+1}}}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{f'(1)}{\sqrt{f(1)+1}} = \frac{-1}{3}$$

۹۷- گزینه «۱» با توجه به اینکه $y' = \cos x e^{\sin x}$ می‌باشد و $\cos x$ به ازای جواب‌های $\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$ یا $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ همواره برابر صفر می‌باشد و این یعنی مخرج کسر داده شده در سمت چپ تساوی به ازای جواب‌های داده شده برابر صفر می‌شود و در نتیجه هیچ کدام از جواب‌های داده شده برای x قابل قبول نمی‌باشد. پس بین گزینه‌های داده شده صرفاً گزینه (۱) می‌تواند انتخاب درست باشد.

توضیح مهم: همان‌طور که گفتیم سه گزینه دیگر مخرج را صفر می‌کند؛ یعنی $\cos x$ را صفر می‌کنند برای همین با توجه به گزینه (۱) ما آن را انتخاب کردیم ولی حل دقیق‌تر این است که شرط $\cos x \neq 0$ را هم بررسی کنیم با جایگذاری $y = e^{\sin x}$ در معادله و ساده‌سازی داریم:

$$\frac{y'' - y}{y'} = \frac{(-\sin x + \cos x - 1)e^{\sin x}}{\cos x e^{\sin x}} = \frac{\cos x - \sin x - 1}{\cos x} = \cos x \Rightarrow \cos x - \sin x - 1 = \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x - \cos x + \sin x + 1 = 0$$

که البته ممکن است این معادله جواب داشته یا نداشته باشد؛ ولی حل دقیق‌تر این است که جواب این معادله تعیین شود! با توجه به گزینه (۱) دیگر نیازی به بررسی این معادله نیست.

۹۸- گزینه «۲» با توجه به قضیه مقدار میانگین (لاگرانژ) داریم:

$$f(x) = \sqrt{x}, [1, 4]$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{4} - \sqrt{1}}{4 - 1} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{2 - 1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow 2\sqrt{c} = 3 \Rightarrow \sqrt{c} = \frac{3}{2} \Rightarrow c = \frac{9}{4}$$

۹۹- گزینه «۴» برای حل این انتگرال ابتدا آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$I = \int \frac{\cos x}{(\cos x + \sin x)^3} dx = \int \frac{\cos x}{[\cos x(1 + \frac{\sin x}{\cos x})]^3} dx = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{(1 + \tan x)^3} dx$$

$$\tan x = u \Rightarrow (1 + \tan^2 x) dx = \frac{dx}{\cos^2 x} = du$$

$$I = \int \frac{du}{(1+u)^3} = \frac{-1}{2(1+u)^2} + C = \frac{-1}{2(1+\tan x)^2} + C$$

حالا به راحتی با تغییر متغیر مقابل داریم:

۱۰۰- گزینه «۲» با استفاده از رابطه اصلی مقدار میانگین تابع داریم:

$$A = \frac{\int_0^2 f(x) dx}{2 - 0} = \frac{1}{2} \int_0^2 e^{x^2 - x} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 e^{x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}} \int_0^2 e^{(x - \frac{1}{2})^2} dx$$

$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 0 \leq (x - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{9}{4} \Rightarrow 1 \leq e^{(x - \frac{1}{2})^2} \leq e^{\frac{9}{4}}$$

$$\int_0^2 1 dx \leq \int_0^2 e^{(x - \frac{1}{2})^2} dx \leq \int_0^2 e^{\frac{9}{4}} dx \Rightarrow 2 \leq 2Ae^{\frac{9}{4}} \leq 2e^{\frac{9}{4}} \Rightarrow e^{-\frac{1}{4}} \leq A \leq e^{\frac{1}{4}}$$

۱۰۱- گزینه «۱» با توجه به انتگرال داده شده در صورت سؤال، باید انتگرال خواسته شده را طوری تفکیک کنیم که به انتگرال داده شده برسیم و بتوانیم از آن در محاسبه انتگرال استفاده کنیم، بنابراین داریم:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \alpha \cos^2 x}{1 - \alpha^2 \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\underbrace{1 - \alpha^2 \cos^2 x}_I} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha \cos^2 x}{1 - \alpha^2 \cos^2 x} dx = I - \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha^2 \cos^2 x}{1 - \alpha^2 \cos^2 x} dx$$

$$I - \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-1 + \frac{1}{1 - \alpha^2 \cos^2 x} \right) dx = I - \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1) dx - \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\underbrace{1 - \alpha^2 \cos^2 x}_I}$$

$$J = \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) I - \frac{1}{\alpha} \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) I + \frac{\pi}{2\alpha} = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right) \frac{\pi}{2\sqrt{1 - \alpha^2}} + \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{(\alpha - 1 + \sqrt{1 - \alpha^2})\pi}{2\alpha\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

۱۰۲- گزینه «۳» با توجه به رابطه طول قوس منحنی به فرم $y = f(x)$ داریم:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$y = a[\ln(a^x) - \ln(a^x - x^x)] \Rightarrow y' = a\left(\frac{x}{a^x - x^x}\right) \Rightarrow y'^2 = \frac{a^2 x^2}{(a^x - x^x)^2}$$

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{a^2 x^2}{(a^x - x^x)^2} = \frac{(a^x - x^x)^2 + a^2 x^2}{(a^x - x^x)^2} = \frac{(a^x + x^x)^2}{(a^x - x^x)^2}$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{\frac{(a^x + x^x)^2}{(a^x - x^x)^2}} dx = \int_0^1 \frac{|a^x + x^x|}{|a^x - x^x|} dx \xrightarrow[0 \leq x \leq 1]{a > 1} L = \int_0^1 \frac{a^x + x^x}{a^x - x^x} dx = \int_0^1 \frac{a^x + x^x - a^x}{a^x - x^x} dx$$

$$L = \int_0^1 \frac{x^x}{a^x - x^x} dx - \int_0^1 dx = \int_0^1 a \left(\frac{1}{a + x} + \frac{1}{a - x} \right) dx - 1 = a \ln \left(\frac{a + x}{a - x} \right) \Big|_0^1 - 1 = a \ln \left(\frac{a + 1}{a - 1} \right) - 1 = \ln \frac{a}{e} = \ln a - \ln e = \ln a - 1$$

$$\Rightarrow a \ln \left(\frac{a + 1}{a - 1} \right) = \ln a \Rightarrow \left(\frac{a + 1}{a - 1} \right)^a = a = 2 \Rightarrow a = 2$$

۱۰۳- گزینه «۱» انتگرال I در نقطه $x = 0$ ناسره است. از طرفی با توجه به هم‌ارزی در همسایگی این نقطه، انتگرال هم‌ارز $\int_0^1 \frac{e^x}{x^2} dx$ خواهد بود

که چون انتگرال $\int_0^a \frac{dx}{x^p}$ به ازای $p < 1$ در همسایگی مبدأ همگراست، پس چون $p = 2 > 1$ است این انتگرال واگراست.

انتگرال J در بی‌نهایت ناسره است. از طرفی با توجه به اینکه به ازای هر $x > 1$ داریم $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} < \int_1^{\infty} \left| \frac{\cos^2 x}{x^2} \right| dx \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ و انتگرال به فرم $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ به ازای

$p > 1$ همگراست، پس $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ همگرا بوده و در نتیجه $\int_1^{\infty} \left| \frac{\cos^2 x}{x^2} \right| dx$ نیز همگرا خواهد بود.

۱۰۴- گزینه «۴» ابتدا حد داده شده را به فرم زیر بازنویسی کرده و سپس داریم:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{n}{n}\right)}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{n}{n}}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{i}{n}}}$$

حالا با فرض $f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{i}{n}}}$ حد ریمان به دست آمده برابر انتگرال مقابل خواهد بود:

$$L = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + x}} dx = 2\sqrt{1 + x} \Big|_0^1 = 2\sqrt{2} - 2$$