مدرسان شریف

پیشگفتار

« آشنایی با مفاهیم اولیه معادلات دیفرانسیل معمولی»

مقدمه

❖ تعریف. هر معادله که در ضابطه آن علاوه بر متغیر مستقل و متغیر وابسته، مشتقات مراتب مختلف متغیر وابسته نسبت به متغیر مستقل نیز موجود باشد، **معادله دیفرانسیل معمولی** نامیده می‌شود.

❖ تعریف. بالاترین مرتبه مشتق‌گیری حاضر در ضابطه یک معادله دیفرانسیل معمولی را **مرتبه** آن **معادله دیفرانسیل** گویند.

به عنوان مثال، معادله دیفرانسیل مرتبه n، با متغیر مستقل x و متغیر وابسته y دارای نمایش عمومی $f(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ است.

❖ تعریف. اگر بتوان ضابطه یک معادله دیفرانسیل معمولی را نسبت به مرتبه مشتق‌گیری به صورت یک چند جمله‌ای نوشت، بزرگترین توان حاضر در" جملات تعیین‌کننده مرتبه " را **درجه** آن **معادله دیفرانسیل** گویند. به عنوان مثال؛

ـ معادله دیفرانسیل $xy'+y=\sec x$ ، یک معادله دیفرانسیل از مرتبه ۱، با درجه ۱ و نسبت به y برحسب x است.

ـ معادله دیفرانسیل $u''+u=\sec x$، یک معادله دیفرانسیل از مرتبه ۲، با درجه ۱ و نسبت به u بر حسب x است.

ـ معادله دیفرانسیل $v''+2v'+v=t$، یک معادله دیفرانسیل از مرتبه ۲، با درجه ۱ و نسبت به v بر حسب t است.

ـ معادله دیفرانسیل $y'''^{2}-y'''+y''-y-e^{x}=0$، یک معادله دیفرانسیل از مرتبه ۳، با درجه ۲ و نسبت به y بر حسب x است.

ـ معادله دیفرانسیل $\sin x=\frac{d^2x}{dy^2}x-(\frac{d^4x}{dy^4})^3$، یک معادله دیفرانسیل از مرتبه ۴، با درجه ۳ و نسبت به x بر حسب y است.

مفهوم جواب در معادلات دیفرانسیل

❖ تعریف. هر تابع که در ضابطه یک معادله دیفرانسیل مفروض صدق کند، **جواب** آن **معادله دیفرانسیل** خوانده می‌شود. لازم به ذکر است، تابع جواب می‌تواند به هر سه صورت صریح، ضمنی و پارامتری بیان شود.

به عنوان مثال. ثابت کنید تابع $y=\sin x$ ، یک جواب معادله دیفرانسیل $y''+y=0$ است؟

حل. کافیست مشتق دوم y را نسبت به x محاسبه کنیم و حاصل را در عبارت فوق جایگذاری کنیم.

$$(y=\sin x\ \Rightarrow\ y'=\cos x\ \Rightarrow\ y''=-\sin x)\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله}} y''+y=-\sin x+\sin x=0$$

پس $y=\sin x$ در معادله دیفرانسیل $y''+y=0$ صدق می‌کند.

جواب یک معادله دیفرانسیل مفروض را می‌توان به یکی از صورت‌های زیر محاسبه کرد:

ــ اگر جواب معادله دیفرانسیل، توسط یک رابطه با ثابت‌های دلخواه بیان شود، **جواب عمومی** آن معادله نامیده می‌شود. در واقع، جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل به صورت یک دسته منحنی nــ پارامتری با نمایش عمومی $g(x,y,c_1,\dots,c_n)=0$ ارائه می‌گردد.

ــ اگر جواب معادله دیفرانسیل، فاقد هرگونه ثابت دلخواه بوده و با اِعمال شرایط اولیه بر جواب عمومی به دست آید، **جواب خصوصی** یا به تعبیر هندسی، **خم انتگرال** نامیده می‌شود.

لازم به ذکر است، شرایط موجود در یک معادله دیفرانسیل، که منجر به تعیین ثابت‌های موجود در جواب عمومی می‌شود، **شرایط اولیه** نامیده می‌شود و هم چنین یک معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه را، **مسأله با مقدار اولیه** می‌نامیم.

به عنوان مثال، دسته منحنی ۱ــ پارامتری $y=ce^x$، جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'-y=0$ است. جوابی از این معادله، با شرط اولیه $y(0)=1$، اینگونه به دست می‌آید:

حل. با جایگذاری مختصات $(0,1)$ در دسته منحنی، ثابت c استخراج می‌شود.

$$y=ce^x \xrightarrow{x=0} y(0)=ce^0 \xrightarrow{y(0)=1} c=1$$

در این صورت $y=e^x$ یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'-y=0$ است که از نقطه $(0,1)$ می‌گذرد.

ــ اگر جواب معادله دیفرانسیل، به ازای هیچ شرایط اولیه‌ای، از جواب عمومی محاسبه نگردد، **جواب غیرعادی** نامیده می‌شود. می‌توان نشان داد، منحنی نمایش یک جواب غیرعادی، بر تمام منحنی‌های جواب عمومی در یک و فقط یک نقطه مماس است.

تذکر ۱.

۱ــ جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n، یک دسته منحنی با حداقل nــ پارامتر است، بنابراین هر گروه از جواب‌ها، با کمتر از n ثابت دلخواه، دسته‌ای از جواب‌های غیرعادی معادله است. همچنین لزومی ندارد که تعداد ثابت‌های دلخواه جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل با مرتبه آن برابر باشد.

۲ــ هر معادله دیفرانسیل با نمایش $a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=b(x)$، معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n، نامیده می‌شود. این دسته از معادلات فقط دارای جواب عمومی بوده و جواب غیرعادی ندارند.

۳ــ یک معادله دیفرانسیل می‌تواند بدون جواب، با تعداد معینی جواب، دارای یک جواب عمومی یا نامتناهی جواب عمومی و غیرعادی باشد.

مثال ۱. **چنانچه $y=(x^2-1)^n$ باشد، داریم:**

۱) $(x^2-1)y'=2n^2xy$ ‏ ۲) $(x^2-1)^n y'=2nxy$ ‏ ۳) $(x^2-1)y'=2nxy$ ‏ ۴) $(x^2-1)y'=2nx^2y$

☑ **حل.** گزینه «۳». از آنجایی که در تمامی گزینه‌ها مشتقِ اولِ y موجود است، از طرفین عبارت داده شده در صورت سؤال مشتق مرتبه اول می‌گیریم و با عملیات جبری جواب از بین گزینه‌ها استخراج می‌شود.

$$y=(x^2-1)^n \Rightarrow y'=n(2x)(x^2-1)^{n-1} \Rightarrow y'=2nx(x^2-1)^{n-1}$$

$$\xrightarrow{(x^2-1)\times(\text{طرفین})} (x^2-1)y'=2nx(x^2-1)^n \xrightarrow{(x^2-1)^n=y} (x^2-1)y'=2nxy$$

مثال ۲. **تابع با ضابطه $y=\sqrt{2x-x^2}$ در کدام معادله دیفرانسیل صدق می‌کند؟**

۱) $y^2y''+y'=0$ ‏ ۲) $y^2y''+1=0$ ‏ ۳) $y^3y''+y'=0$ ‏ ۴) $y^3y''+1=0$

☑ **حل.** گزینه «۴». برای یافتن جواب ابتدا از طرفین عبارت داده شده مشتق می‌گیریم:

$$y=\sqrt{2x-x^2} \Rightarrow y'=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

بر طبق صورت سؤال داریم: $\sqrt{2x-x^2}=y$. لذا داریم: $y'=\frac{1-x}{y}\ ;\quad (1)\quad \Rightarrow$

$$y'y=1-x \xrightarrow{\frac{d}{dx}\text{(طرفین)}} y''y+y'^2=-1 \xrightarrow{\text{تساوی (1)}} y''y+\left(\frac{1-x}{y}\right)^2=-1 \xrightarrow{y^2\times\text{(طرفین)}} y''y^3+(1-x)^2=-y^2 \Rightarrow$$

$$y''y^3+(1-2x+x^2)=-y^2 \Rightarrow y''y^3+1-(2x-x^2)=-y^2 \xrightarrow{\sqrt{2x-x^2}=y} y''y^3+1-y^2=-y^2 \Rightarrow y''y^3+1=0$$

مثال ۳. **جواب معادله دیفرانسیل زیر عبارت است از:**

$$xy''+3y'+4x^3y=0$$

۱) $\begin{cases} y_1=x^2 \\ y_2=x^{-2}\end{cases}$ ۲) $\begin{cases} y_1=e^x \\ y_2=e^x \operatorname{Ln}x\end{cases}$ ۳) $\begin{cases} y_1=x^{-2}\sin x^2 \\ y_2=x^{-2}\cos x^2\end{cases}$ ۴) $\begin{cases} y_1=x\sin x \\ y_2=x\cos x\end{cases}$

☑ **حل.** گزینه «۳». با توجه به اینکه هیچ یک از جواب‌های y_1 و y_2 در چهار گزینه داده شده مشترک نیستند، بنابراین کافیست از هر گزینه تنها یک تابع y_1 یا y_2، بررسی شود: گزینه (۱): $(y=x^2 \Rightarrow y'=2x \quad \& \quad y''=2)$

حال این مقادیر را در معادله دیفرانسیل صورت سؤال جایگذاری می‌کنیم:

$$xy''+3y'+4x^3y=x\times 2+3\times 2x+4x^3\times x^2=8x+4x^5\neq 0$$

گزینه (۲): $(y=e^x \Rightarrow y'=e^x \quad \& \quad y''=e^x)$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله مفروض}} xy''+3y'+4x^3y=xe^x+3e^x+4x^3e^x\neq 0$$

گزینه (۳): $(y=x^{-2}\sin x^2 \Rightarrow y'=-2x^{-3}\sin x^2+2x^{-1}\cos x^2 \ \& \ y''=6x^{-4}\sin x^2-6x^{-2}\cos x^2-4\sin x^2)$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله مفروض}} xy''+3y'+4x^3y=6x^{-3}\sin x^2-6x^{-1}\cos x^2-4x\sin x^2-6x^{-3}\sin x^2+6x^{-1}\cos x^2+4x\sin x^2=0$$

برای اطمینان بیشتر می‌توان گزینه (۴) را نیز بررسی کرد.

مثال ۴. **به ازای چه مقدار m یک جواب معادله دیفرانسیل $x^2y''-y=0$ برابر $y=x^m$، است؟**

۱) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

☑ **حل.** گزینه «۲». برای یافتن مقدار m باید از عبارت y دوبار مشتق بگیریم و در معادله دیفرانسیل داده شده قرار دهیم:

$$(y=x^m \Rightarrow y'=mx^{m-1} \quad \& \quad y''=m(m-1)x^{m-2})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله مفروض}} x^2y''-y=x^2\times m(m-1)x^{m-2}-x^m=0 \Rightarrow m(m-1)x^m-x^m=0 \Rightarrow (m^2-m-1)x^m=0$$

حالا با حل معادله درجه دوم برحسب m مقادیر مختلف m قابل محاسبه است:

$$(m^2-m-1)x^m=0 \Rightarrow m^2-m-1=0 \Rightarrow m=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

مثال ۵. **معادله دیفرانسیلی که $y=e^x\sin x$، جواب آن باشد عبارت است از:**

۱) $y''-2y'-2y=0$ ۲) $y''+2y'-2y=0$ ۳) $y''+2y'+2y=0$ ۴) $y''-2y'+2y=0$

☑ **حل.** گزینه «۴». برای یافتن جواب باید مشتقات اول و دوم y را نسبت به x محاسبه کنیم و رابطهٔ y، y' و y'' را پیدا کنیم:

$$y = e^x \sin x \;; \quad (1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y' = e^x \sin x + e^x \cos x \;; & (2) \\ y'' = 2e^x \cos x \quad \Rightarrow \quad e^x \cos x = \dfrac{y''}{2} \;; & (3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری تساوی‌های (۱) و (۳) در (۲)}} y' = e^x \sin x + e^x \cos x = y + \frac{y''}{2} \quad \Rightarrow \quad y'' - 2y' + 2y = 0$$

رابطه بین معادلات دیفرانسیل و دسته منحنی

تعیین معادله دیفرانسیل متناظر با یک دسته منحنی.

می‌دانیم جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل، نمایشی به صورت یک دسته منحنی nـ پارامتری دارد. حال سؤالی که در ذهن مطرح می‌شود، این است که به ازای یک دسته منحنی چند پارامتری، آیا می‌توان معادله دیفرانسیلی پیدا کرد که ضابطه دسته منحنی مفروض جواب عمومی آن باشد؟

به طور کلی،

برای تعیین معادله دیفرانسیل متناظر با دسته منحنی nـ پارامتری $g(x,y,c_1,\dots,c_n)=0$ کافی است، به تعداد ثابت‌های دلخواه موجود، از معادله مفروض نسبت به x مشتق‌گیری کرده و سپس با حذف n پارامتر c_1، ... تا c_n در $n+1$ معادلهٔ دستگاه روبرو یک معادله دیفرانسیل مرتبه n، به دست آوریم:

$$\begin{cases} g\;(x,y,c_1,\dots,c_n)=0 \\ g'_x\;(x,y,c_1,\dots,c_n)=0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ g_x^{(n)}(x,y,c_1,\dots,c_n)=0 \end{cases}$$

تذکر ۲. در مورد دسته منحنی ۱ـ پارامتری، جهت تعیین معادله دیفرانسیل متناظر کافیست c را از معادله $g(x,y,c)=0$ محاسبه کرده و سپس نسبت به x مشتق‌گیری کنیم.

تذکر ۳. اگر معادله یک دسته منحنی به صورت $y = c_1 g_1(x) + \dots + c_n g_n(x)$ بیان شود، ضابطه معادله دیفرانسیل متناظر را می‌توان از بسط دترمینان زیر به دست آورد:

$$\begin{vmatrix} g_1(x) & g_2(x)\dots\dots g_n(x) & y \\ g'_1(x) & g'_2(x)\dots\dots g'_n(x) & y' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_1^{(n)}(x) & g_2^{(n)}(x)\dots\dots g_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

به عنوان مثال. معادله دیفرانسیل متناظر دسته منحنی $y = Ax + BLnx$ ، کدام است؟

حل. حل اول. در روش اول باید به تعداد ثابت‌های موجود در دسته منحنی از آن مشتق‌گیری کرده و با استفاده از اعمال جبری لازم جهت حذف ثابت‌ها به معادله دیفرانسیل مطلوب دست یابیم:

$$\xrightarrow{\text{حذف ثابت‌ها به کمک مشتق‌گیری}} \begin{cases} y = Ax + BLnx \;; & (1) \\ y' = A + \dfrac{B}{x} \quad \Rightarrow \quad A = y' - \dfrac{B}{x} & \\ y'' = \dfrac{-B}{x^2} \quad \Rightarrow \quad B = -x^2 y'' \;; & (2) \end{cases} \Bigg\} \Rightarrow \quad A = y' + \frac{x^2 y''}{x} = y' + xy'' ; \qquad (3)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری (۲) و (۳) در تساوی (۱)}} y = (y' + xy'')x - x^2 y'' Lnx \quad \Rightarrow \quad y = xy' + x^2(1 - Lnx)y'' \quad \Rightarrow \quad x^2(1-Lnx)y'' + xy' - y = 0$$

حل دوم. طبق تذکر ۳. کافیست بسط دترمینان زیر را محاسبه کنیم:

$$\begin{vmatrix} x & \operatorname{Ln}x & y \\ 1 & \frac{1}{x} & y' \\ 0 & -\frac{1}{x^2} & y'' \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{بسط دترمینان نسبت به ستون اول}} x\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & y' \\ \frac{-1}{x^2} & y'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \operatorname{Ln}x & y \\ \frac{-1}{x^2} & y'' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

با محاسبه دترمینان‌های فوق خواهیم داشت:

$$x\left(\frac{1}{x}y'' + \frac{1}{x^2}y'\right) - \left(\operatorname{Ln}x \times y'' + \frac{1}{x^2}y\right) = 0 \Rightarrow y'' + \frac{1}{x}y' - y''\operatorname{Ln}x - \frac{1}{x^2}y = 0 \xrightarrow{x^2 \times (\text{طرفین})} x^2(1-\operatorname{Ln}x)y'' + xy' - y = 0$$

مثال ۶. **معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های به معادله $y = ae^x - bx$ کدام است؟**

۱) $y''(1-x) + xy' - y = 0$ ۲) $y''' = y'' + 1$ ۳) $y''x - xy' - y = 0$ ۴) $y'' - y = 0$

☑ **حل.** گزینه «۱». حل اول. از آنجایی که دسته منحنی دو ثابت a و b را دارد، ابتدا از دسته منحنی داده شده دوبار مشتق‌گیری کنیم و ثابت‌ها را محاسبه کنیم:

$$\xrightarrow{\text{حذف ثابت‌ها به کمک مشتق‌گیری}} \begin{cases} y = ae^x - bx\ ; & (1) \\ y' = ae^x - b \Rightarrow b = ae^x - y' \\ y'' = ae^x \Rightarrow a = \frac{y''}{e^x} \Rightarrow ae^x = y''\ ; & (2) \end{cases} \Rightarrow b = y'' - y'\ ; \quad (3)$$

سپس با جایگذاری (۲) و (۳) در تساوی (۱) داریم:

$$y = ae^x - bx = y'' - (y'' - y')x \Rightarrow y = y'' - y''x + y'x \Rightarrow y''(1-x) + xy' - y = 0$$

حل دوم. با استفاده از تذکر ۳ و محاسبه بسط دترمینان خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} e^x & x & y \\ e^x & 1 & y' \\ e^x & 0 & y'' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow e^x\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 1 & y' \\ 1 & 0 & y'' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 1 & y' \\ 1 & 0 & y'' \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{بسط دترمینان نسبت به سطر سوم}} \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix} + y''\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow xy' - y + y''(1-x) = 0$$

مثال ۷. **معادله دیفرانسیل سهمی‌های به معادله $y = cx^2 + d$، کدام است؟**

۱) $x^2y'' - 2xy' + y = 0$ ۲) $y'' + (x^2 - 2x)y' - y = 0$ ۳) $xy'' - y' = 0$ ۴) $2xy'' - x^2y' + y = 0$

☑ **حل.** گزینه «۳». چون دسته منحنی داده شده دارای دو ثابت است، ابتدا دوبار از آن مشتق می‌گیریم:

$$\xrightarrow{\text{حذف ثابت‌ها به کمک مشتق‌گیری}} (y = cx^2 + d \Rightarrow y' = 2cx \quad (1) \quad \& \quad y'' = 2c) \quad (2)$$

با محاسبه c از معادله (۲) برحسب y و جایگذاری در معادله (۱) خواهیم داشت:

$$y' = 2 \times \frac{y''}{2}x \Rightarrow xy'' - y' = 0$$

مثال ۸. **معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت A در معادله توابع $y = A\cos 2x + \sin 2x$، کدام است؟**

۱) $(2\sin 2x)y' + (\cos 2x)y = 2$ ۲) $(2\cos 2x)y' + (\sin 2x)y = 2$

۳) $(\cos 2x)y' + (2\sin 2x)y = 2$ ۴) $(\sin 2x)y' + (2\cos 2x)y = 2$

حل. گزینه «۳». از آنجایی که تنها ثابت معادله A می‌باشد، تنها کافی است از آن یک‌بار مشتق بگیریم و A را از بین دو معادله حاصل حذف کنیم.

$$\xrightarrow{\text{حذف ثابت‌ها به کمک مشتق‌گیری}} \begin{cases} y = A\cos 2x + \sin 2x\,; & (1)\\ y' = -2A\sin 2x + 2\cos 2x\,; & (2)\end{cases} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{2\sin 2x\times(\text{معادله}1)+\cos 2x\times(\text{معادله}2)} (\cos 2x)y' + (2\sin 2x)y = 2(\sin^2 2x + \cos^2 2x) \Rightarrow (\cos 2x)\,y' + (2\sin 2x)\,y = 2$$

مثال ۹. معادله دیفرانسیلی که جواب آن $y = c\sin x + x$ باشد، کدام است؟

۱) $y = x - (y'-1)\operatorname{tag}x$ ۲) $y = (y'-1)\operatorname{tag}x + x$ ۳) $y = (y'+1)\operatorname{tag}x + x$ ۴) $y' = (y-1)\operatorname{tag}x + x$

حل. گزینه «۲». برای یافتن معادله دیفرانسیل کافیست معادله مفروض را نسبت به c حل کرده و از طرفین آن مشتق‌گیری کنیم:

$$y = c\sin x + x \Rightarrow c = \frac{y-x}{\sin x} \xrightarrow{\frac{d}{dx}\text{(طرفین)}} 0 = \frac{(y'-1)\sin x - \cos x(y-x)}{\sin^2 x} \Rightarrow$$

$$(y'-1)\sin x = (y-x)\cos x \Rightarrow y - x = (y'-1)\operatorname{tag}x \Rightarrow y = x + (y'-1)\operatorname{tag}x$$

مثال ۱۰. معادله دیفرانسیل سهمی‌ها به معادله $x = c_1y^2 + c_2$ عبارت است از:

۱) $y'^2 + yy'' = 0$ ۲) $yy'' - y'^2 = 0$ ۳) $y'^2 - yy'' = 0$ ۴) $y'^2 - y^2y'' = 0$

حل. گزینه «۱». کافیست ثابت‌ها به کمک مشتق‌گیری حذف شوند:

$$x = c_1y^2 + c_2 \xrightarrow{\frac{d}{dx}\text{(طرفین)}} 1 = 2c_1yy' \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2yy'} \xrightarrow{\frac{d}{dx}\text{(طرفین)}} 0 = \frac{-2(y'^2 + yy'')}{(2yy')^2} \Rightarrow y'^2 + yy'' = 0$$

تعیین مسیرهای متعامد یک دسته منحنی ۱ـ پارامتری

I. تعیین مسیرهای متعامد دسته منحنی ۱ـ پارامتری در دستگاه مختصات دکارتی.

❖ **تعریف.** دو دسته منحنی ۱ـ پارامتری $g(x,y,c)=0$ و $g^{\perp}(x,y,c)=0$ را متعامد گوییم، هر گاه هر منحنی از یک دسته، بر کلیه منحنی‌های دسته دیگر عمود باشد.

برای تعیین مسیرهای متعامد بر دسته منحنی مفروض $g(x,y,c)=0$ ، کافیست مطابق روند زیر عمل کنیم:

گام اول: معادله دیفرانسیل متناظر $g(x,y,c)=0$ را تعیین می‌کنیم. به عبارت دیگر، پارامتر c را به کمک مشتق‌گیری حذف می‌کنیم.

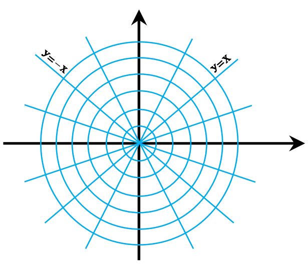
گام دوم: در معادله دیفرانسیل به دست آمده ، به جای y' ، $(-\frac{1}{y'})$ قرار می‌دهیم.

گام سوم: معادله دیفرانسیل حاصل از گام دوم را حل می‌کنیم.

جواب عمومی به دست آمده، دسته منحنی‌های متعامد بر دسته $g(x,y,c)=0$ است.

به عنوان مثال. مسیرهای متعامد دسته خطوط $y = cx$ را بیابید؟

حل. برای یافتن مسیرهای متعامد ابتدا باید معادله دیفرانسیل متناظر با دسته منحنی داده شده را محاسبه نماییم.



$$\xrightarrow{\text{تعیین معادله دیفرانسیل متناظر : گام اول}} c = \frac{y}{x} \xrightarrow{\frac{d}{dx}\text{(طرفین)}} xy' - y = 0$$

در گام دوم، پس از محاسبه معادله دیفرانسیل متناظر، برای یافتن مسیرهای متعامد به جای y' ، $\frac{-1}{y'}$ را جایگذاری کنیم:

$$\xrightarrow{\text{گام دوم}\,:\,y' \mapsto (-\frac{1}{y'})} x(-\frac{1}{y'}) - y = 0 \Rightarrow -\frac{x}{y'} = y \Rightarrow yy' + x = 0$$

حال کافیست معادله حاصله‌ی فوق را حل کنیم:

$$\xrightarrow{\text{حل معادله دیفرانسیل به دست آمده : گام سوم}} yy' = -x \Rightarrow y\frac{dy}{dx} = -x \Rightarrow ydy = -xdx$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری از طرفین}} y^{۲} = -x^{۲} + c \Rightarrow y^{۲} + x^{۲} = c$$

همانگونه که از شکل نیز مشخص است دسته منحنی به دست آمده، بر دسته خطوط $y = cx$ متعامد است.

II. تعیین مسیرهای متعامد دسته منحنی ۱ـ پارامتری در دستگاه قطبی.

لازم است یادآوری کنیم که، تمامی مفاهیمی که تاکنون در دستگاه مختصات دکارتی بیان گردید، در دستگاه مختصات قطبی نیز قابل طرح است.

برای تعیین مسیرهای متعامد بر یک دسته منحنی ۱ـ پارامتری در دستگاه مختصات قطبی، کافیست از روند زیر پیروی کنیم:

گام اول: معادله دیفرانسیل متناظر $g(\theta, r, c) = ۰$ را تعیین می‌کنیم.

گام دوم: در معادله دیفرانسیل به دست آمده، به جای $\frac{r d\theta}{dr}$، $(-\frac{dr}{r d\theta})$ قرار می‌دهیم.

گام سوم: معادله دیفرانسیل حاصل از گام دوم را حل می‌کنیم. جواب عمومی به دست آمده، دسته منحنی متعامد بر دسته $g(\theta, r, c) = ۰$ است.

به عنوان مثال. مسیرهای متعامد بر دسته منحنی ۱ـ پارامتری $r = a\cos ۲\theta$ را تعیین کنید.

حل. ابتدا معادله دیفرانسیل متناظر دسته منحنی داده شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{تعیین معادله دیفرانسیل متناظر : گام اول}} \begin{cases} r = a\cos ۲\theta \\ \frac{dr}{d\theta} = -۲a\sin ۲\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{r}{(\frac{dr}{d\theta})} = -(\frac{\cos ۲\theta}{-۲\sin ۲\theta}) \Rightarrow \frac{r d\theta}{dr} = \frac{۱}{۲}\cot g\, ۲\theta$$

$$\xrightarrow{\text{گام دوم}: r\frac{d\theta}{dr} \mapsto (-\frac{dr}{r d\theta})} -\frac{dr}{r d\theta} = \frac{۱}{۲}\cot g ۲\theta \xrightarrow{\text{حل معادله دیفرانسیل حاصل : گام سوم}} ۲\frac{dr}{r} = -\cot g ۲\theta \; d\theta$$

سپس با انتگرال‌گیری از طرفین به حل معادله دیفرانسیل حاصله می‌پردازیم:

$$\xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری از طرفین}} ۲\int \frac{dr}{r} = -\int \cot g ۲\theta d\theta \Rightarrow ۲Lnr = -\frac{۱}{۲}Ln|\sin ۲\theta| + c \qquad (\text{دسته منحنی ۱ـ پارامتری متعامد})$$

مثال ۱۱. معادلات مسیرهای قائم دسته منحنی‌های $xy^{۲} = c$ ، کدام است؟

۱) $x^{۲} - ۲y^{۲} = a$　　۲) $y^{۲} - ۲x^{۲} = a$　　۳) $x^{۲}y = a$　　۴) $y = ax^{۳}$

☑ **حل.** گزینه «۲». با مشتق‌گیری از طرفین دسته منحنی داده شده، معادله دیفرانسیل متناظر به راحتی قابل محاسبه است.

$$xy^{۲} = c \xrightarrow{\text{حذف c به کمک مشتق‌گیری :گام اول}} y^{۲} + ۲xyy' = ۰ \Rightarrow y' = -\frac{y}{۲x}$$

در گام دوم، در معادله حاصله فوق، تبدیل y' به $\frac{-۱}{y'}$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{گام دوم}: y' \mapsto -\frac{۱}{y'}} -\frac{۱}{y'} = -\frac{y}{۲x} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y}{۲x} \Rightarrow ydy = ۲xdx$$

در پایان معادله دیفرانسیل فوق را با انتگرال‌گیری از طرفین حل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{گام سوم}: \int (\text{طرفین})} \int y\, dy = \int ۲x\, dx \Rightarrow \frac{y^{۲}}{۲} = x^{۲} + c \Rightarrow y^{۲} - ۲x^{۲} = a; \qquad (۲c = a)$$

مثال ۱۲. مسیرهای قائم خانواده سهمی‌های $y = cx^۲$ ، عبارت است از:

۱) $\frac{۱}{۲}x^۲ + y^۲ = c_۱$ ۲) $y^۲ - x^۲ = c_۱$ ۳) $x = c_۱ y^۲$ ۴) $yx = c_۱$

حل. گزینه «۱».

$$\xrightarrow{\text{حذف c به کمک مشتق‌گیری : گام اول}} (y = cx^۲ \Rightarrow y' = ۲cx) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{۲}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{گام دوم: } y' \mapsto -\frac{۱}{y'}} \frac{-\frac{۱}{y'}}{y} = \frac{۲}{x} \Rightarrow -yy' = \frac{x}{۲} \Rightarrow ۲y\frac{dy}{dx} = -x \Rightarrow ۲ydy = -xdx$$

$$\xrightarrow{\text{گام سوم : } \int \text{(طرفین)}} \int ۲y\,dy = -\int x\,dx \Rightarrow y^۲ = -\frac{x^۲}{۲} + c \Rightarrow y^۲ + \frac{x^۲}{۲} = c$$

مثال ۱۳. معادله منحنی‌ای را پیدا کنید که از نقطه $(۲,۱)$ بگذرد و عمود بر منحنی در نقطهٔ (x,y) دارای شیب $-\frac{y}{x}$ باشد؟

۱) $x^۲ - y^۲ = ۳$ ۲) $x^۲ + y^۲ = ۳$ ۳) $y^۲ - x^۲ = ۳$ ۴) $x^۲ + xy = ۳$

حل. گزینه «۱». اگر $y' = -\frac{y}{x}$ شیب منحنی مفروض باشد، شیب منحنی متعامد، با جایگذاری $(y' \mapsto -\frac{۱}{y'})$ به دست می‌آید:

$$-\frac{۱}{y'} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y}{x} \Rightarrow y\,dy = x\,dx \xrightarrow{\int \text{(طرفین)}} \int y\,dy = \int x\,dx \Rightarrow \frac{y^۲}{۲} = \frac{x^۲}{۲} + c \quad \text{(جواب عمومی)}$$

حال برای از بین بردن ثابت c کافیست مختصات $(۲,۱)$ را در معادله فوق جایگزین کنیم:

$$\frac{۱}{۲} = \frac{(۲)^۲}{۲} + c \Rightarrow c = \frac{-۳}{۲} \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} \frac{y^۲}{۲} = \frac{x^۲}{۲} - \frac{۳}{۲} \Rightarrow x^۲ - y^۲ = ۳$$

مثال ۱۴. خطوط هم پتانسیل جریانی برابر $\phi(x,y) = x^۲ - y^۲ = c$ است. خطوط جریان برای این پتانسیل عبارت است از:

۱) $\psi(x,y) = xy$ ۲) $\psi(x,y) = x^۲y$

۳) $\psi(x,y) = xy^۲$ ۴) $\psi(x,y) = x^۲y^۲$

حل. گزینه «۱».

نکته. خطوط هم پتانسیل و خطوط جریان برای یک جریان پتانسیل، بر هم عمود هستند.

طبق نکته فوق، منظور از یافتن خطوط جریان برای پتانسیل داده شده، یافتن خطوط عمود بر خطوط هم‌پتانسیل جریانی داده شده می‌باشد:

$$x^۲ - y^۲ = c \xrightarrow{\text{حذف c به کمک مشتق‌گیری : گام اول}} ۲x - ۲yy' = ۰ \Rightarrow x = yy'$$

$$\xrightarrow{\text{گام دوم: } y' \mapsto -\frac{۱}{y'}} x = y(-\frac{۱}{y'}) \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{۱}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{گام سوم: } \int \text{(طرفین)}} \text{Ln}|y| = -\text{Ln}|x| + \text{Lnc} \Rightarrow \text{Ln}|y| + \text{Ln}|x| = \text{Lnc} \Rightarrow xy = c$$

مثال ۱۵. مسیرهای قائم خانواده منحنی‌های $x^2+\frac{y^2}{b^2}=1$ که در آن b یک پارامتر ثابت حقیقی است، عبارت است از:

۱) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}xy^2=x+c$ ۲) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}y^2=x+c$ ۳) $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}y^2=\operatorname{Ln}x+\operatorname{Ln}c$ ۴) $x^2+y^2=\operatorname{Ln}(cx)^2$

حل. گزینه «۴».

ابتدا b^2 را از معادله داده شده جداسازی می‌کنیم تا با مشتق‌گیری از طرفین معادله به راحتی معادله دیفرانسیل حاکم بر این معادله جبری مفروض به دست آید:

$$x^2+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1-x^2 \Rightarrow b^2=\frac{y^2}{1-x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{حذف ثابت به کمک مشتق‌گیری : گام اول}} 0=\frac{2yy'(1-x^2)+2xy^2}{(1-x^2)^2} \Rightarrow y'(1-x^2)+xy=0 \Rightarrow y'=-\frac{xy}{1-x^2}$$

حال برای یافتن مسیر قائم، به جای y' از عبارت $\frac{-1}{y'}$ را جایگزین کرده و معادله دیفرانسیل حاصله را حل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{گام دوم : } y'\mapsto -\frac{1}{y'}} -\frac{1}{y'}=-\frac{xy}{1-x^2} \Rightarrow y'=\frac{1-x^2}{xy} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1-x^2}{xy} \Rightarrow ydy=\frac{1-x^2}{x}dx$$

$$\xrightarrow{\text{گام سوم : } \int \text{(طرفین)}} \int y\,dy=\int\frac{1}{x}dx-\int xdx \Rightarrow y^2=2\operatorname{Ln}x-x^2+k \xrightarrow{k=2\operatorname{Ln}c} y^2=\operatorname{Ln}(cx)^2-x^2 \Rightarrow y^2+x^2=\operatorname{Ln}(cx)^2$$

فصل اول

« معادلات دیفرانسیل مرتبه اول »

مقدمه

نمایش عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $f(x,y,y')=0$ است. بررسی این دسته از معادلات، عمدتاً معطوف به یکی از حالت‌های زیر است:

حالت اول: معادله مفروض نسبت به y' قابل حل باشد؛ $y'=f(x,y)$. **حالت دوم:** معادله مفروض نسبت به y قابل حل باشد؛ $y=f(x,y')$.

حالت سوم: معادله مفروض نسبت به x قابل حل باشد؛ $x=f(y,y')$.

حالت اول. معادلات دیفرانسیل مرتبه اول که نسبت به y' قابل حل هستند؛ $y'=f(x,y)$.

تذکر ۱. معادلات دیفرانسیل به فرم عمومی $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ ، نسبت به y' قابل حل هستند:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \Rightarrow p(x,y)dx=-Q(x,y)dy \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=f(x,y) \quad \text{یا} \quad y'=f(x,y)$$

بنابراین، یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول ـ حالت اول می‌تواند به یکی از دو فرم عمومی زیر ارائه گردد:

الف ــ فرم بسته یا عادی که نمایش عمومی آن به صورت $y'=f(x,y)$ است. به عنوان مثال:

$$y'=e^{x+y} \quad \text{یا} \quad y'+(tagx)y=\cos x \quad \text{یا} \quad y'=\cos x-(tagx)y$$

ب ــ فرم باز یا دیفرانسیلی که نمایش عمومی آن به صورت $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ است. به عنوان مثال:

$$y\,dx+x\,dy=0 \quad \text{یا} \quad (e^x+y)dx+(Lny+x)dy=0$$

برای بررسی منظم‌تر و ساده‌تر معادلات دیفرانسیل مرتبه اول حالت اول، آن‌ها را در دسته‌های زیر طبقه‌بندی می‌کنیم.

معادلات دیفرانسیل جدا شونده

معادلات دیفرانسیلی که بتوان آن‌ها را با استفاده از اعمال ریاضی به دو بخشِ جملات شامل متغیر مستقل و جملات شامل متغیر وابسته، تفکیک نمود، معادلات جدا شونده نامیده می‌شوند.

الف ــ معادلات دیفرانسیل جدا شونده به فرم بسته.

نمایش عمومی این دسته از معادلات به صورت $y'=f(x)h(y)$ است، که حل آن‌ها با الگوی عمومی زیر صورت می‌گیرد:

$$y'=f(x)h(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=f(x)h(y) \Rightarrow \frac{dy}{h(y)}=f(x)dx$$

با انتگرال‌گیری از طرفین تساوی فوق، جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض به دست می‌آید:

$$\xrightarrow{\text{(طرفین)} \int \text{؛ جدا شونده}} \int\frac{dy}{h(y)}=\int f(x)dx \Rightarrow g(x,y,c)=0$$