## مکانیک ـ مکانیک جامدات

**۱ـ تفاوت شکل انتگرالی و دیفرانسیلی معادلات در چیست؟**

☑ **پاسخ:** از مکانیک محیط‌های پیوسته می‌دانیم که معادلات حاکم بر یک محیط پیوسته را می‌توان به دو صورت انتگرالی و دیفرانسیلی نوشت. در شکل انتگرالی از نظر ریاضی برای معادلات اصول عمومی، اصول برای یک حجم محدود ماده در محیط پیوسته فرمول‌بندی می‌شوند. در شکل معادلات میدانی یا دیفرانسیلی، معادلات برای یک حجم بی‌نهایت کوچک ماده (یعنی ذره) در هر نقطه از میدان مورد نظر قالب‌بندی می‌شوند.

**۲ـ انواع کمیت‌های فیزیکی و خصوصیات هریک را بیان کنید؟**

☑ **پاسخ:** ۱ـ کمیت اسکالر: فقط مقدار دارند. این کمیت، همان تانسور مرتبه صفر می‌باشد. ۲ـ کمیت برداری: مقدار و جهت دارند. این کمیت، همان تانسور مرتبه یک می‌باشد. ۳ـ کمیت تانسور مرتبه ۲: علاوه بر مقدار و جهت، صفحه‌ای که در آن اعمال می‌شوند نیز اهمیت دارد.

**۳ـ تفاوت دیدگاه‌های لاگرانژی (مادی) و اویلری (فضایی) را توضیح دهید.**

☑ **پاسخ:** در دیدگاه لاگرانژی یا به عبارتی دیگر مادی، ذرات را در محیط پیوسته تعقیب می‌کنیم. به عبارت دیگر هر مشخصه فیزیکی (مثل دما) را به صورت توابعی از موقعیت اولیه ($t = \circ$) ذرات و زمان نشان می‌دهیم. چنین توصیفی را توصیف مرجع نیز گویند و اما در دیدگاه اویلری یا فضایی، در مکان ثابتی ایستاده‌ایم و تغییرات فیزیکی را بررسی می‌کنیم.

**۴ـ می‌دانیم که تانسور تنش کلی را می‌توان به‌صورت مجموعی از دو تانسور دیگر نوشت. این تانسورها چه می‌باشند و چه تأثیری بر روی تغییر شکل و تغییر حجم جسم دارند؟**

☑ **پاسخ:** تانسور تنش کلی را به‌صورت مجموع تانسورهای $\tilde{\sigma}$ و $\hat{\sigma}$ می‌توان نوشت. اولی تانسور تنش کروی (هیدرواستاتیک) و دومی تانسور تنش انحرافی می‌باشد.

تنش هیدرواستاتیک در جسم فقط باعث تغییر حجم می‌شود و روی تغییر شکل جسم تأثیری ندارد. تنش انحرافی باعث تغییر شکل می‌شود و حجم جسم را تغییر نمی‌دهد.

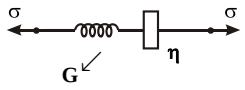
**۵ـ آیا تانسور تنش همواره متقارن است؟ توضیح دهید.**

☑ **پاسخ:** در تشکیل معادلات مربوط به اصل اندازه حرکت زاویه‌ای، فرض می‌شود که زوج نیروهای سطحی و یا حجمی روی جسم اعمال نشده است و معادلات ذکر شده در این حالت منتج به تانسور تنش متقارن می‌شود. ولی اگر چنین ممان‌های متمرکزی به جسم وارد شود، مواد را مواد قطبی می‌گویند و خاصیت متقارن بودن تانسور تنش دیگر برقرار نیست که یک وضعیت خاص است. بنابراین خاصیت متقارن بودن تانسور تنش با در نظر گرفتن شرایطی خاص برقرار است.

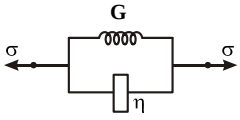
**۶ـ دو مدل مرسوم برای مدل‌سازی مواد ویسکوالاستیک را نام برده و رسم کنید.**

☑ **پاسخ:** برخی از مواد در مکانیک وجود دارند که دارای دمپینگ (میرایی) داخلی می‌باشند که به ذات خود ماده برمی‌گردد. برای مدل کردن چنین موادی معمولاً از دو مدل رایج استفاده می‌شود.

این دو مدل مرسوم، مدل‌های کلوین و ماکسول می‌باشند که به‌صورت زیر هستند:




مدل ماکسول




مدل کلوین

**۷ـ نظریه دیورژانس گوس را توضیح دهید.**

☑ **پاسخ:** طبق این نظریه، رابطه‌ای بین انتگرال سطح که دارای عبارت زیر انتگرال $T_{ij\ldots k}$ است نسبت به انتگرال حجم که مشتق یک مختصه $T_{ij\ldots k}$ را به عنوان زیر انتگرال دارد، ایجاد می‌شود:

$$\int_S T_{ij\ldots k} n_q dS = \int_V T_{ij\ldots k,q} dV$$

در واقع نظریه گوس، یک انتگرال روی یک حجم بسته را به یک انتگرال روی سطح محصورش ارتباط می‌دهد. نظریه دیگری نیز به اسم نظریه استوکس در حسابان وجود دارد که کاربرد زیادی دارد.

در مقایسه با نظریه گوس، در نظریه استوکس، یک انتگرال روی یک سطح باز به یک انتگرال حول منحنی محصور سطح مرتبط می‌شود.

نظریه دیورژانس گوس برای اثبات بعضی از قوانین و روابط مهم در مکانیک محیط‌های پیوسته به‌کار می‌رود.

برای مثال معادلات تعادل محلی را می‌توان با توجه به این قضیه به‌دست آورد.

◆ ◆ ◆ ◆

**۸ـ فرض کنید که ضریب پواسون برای یک ماده‌ای برابر ۰/۵ می‌باشد. در مورد خاصیت فیزیکی چنین ماده‌ای چه اظهارنظری می‌توان کرد؟**

☑ **پاسخ:** همان‌طورکه می‌دانیم مدول بالک (مدول حجمی) برای یک ماده به‌صورت $k = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ قابل تعریف است. این مدول می‌تواند نشان‌دهنده مقاومت ماده در مقابل تغییرات حجمی باشد. اگر ضریب پواسون $\nu$ برابر ۰/۵ شود، مدول بالک نامحدود خواهد شد؛ گویا که ماده دچار تغییرشکل حجمی نمی‌شود یا به عبارتی ماده تراکم‌ناپذیر خواهد بود.

◆ ◆ ◆ ◆

**۹ـ مفهوم تنش پسماند چیست؟**

☑ **پاسخ:** تنش پسماند (Residual Stress) بعد از برداشتن عامل اصلی بارگذاری در ماده باقی می‌ماند. این تنش می‌تواند برای ما مضر یا سودده باشد. از طرفی می‌تواند طی فرایندهای مختلف مانند تغییر شکل‌های غیرالاستیک (پلاستیک)، تغییرات دما و یا تغییرات ساختاری (تبدیل فاز در ماده) ایجاد شود. اصطکاک بین صفحات داخلی یک جسم که روی هم می‌لغزند نیز تنش پسماند را به‌وجود می‌آورد.

برای نمونه تنش پسماند محلی (موضعی) می‌تواند در اثر گرمای ناشی از فرآیند جوشکاری در جسم (ماده) تولید شود. در بعضی از مواقع خودمان عمداً تنش پسماند فشاری در سیستم ایجاد می‌کنیم تا از گسیختگی ترد در ماده جلوگیری کنیم. در بعضی از مواقع مورد نیاز هم از روش‌های مختلفی می‌توان برای تولید تنش پسماند در ماده استفاده کرد.

◆ ◆ ◆ ◆

**۱۰ـ در مورد مقادیر و جهت‌های اصلی تانسورهای کرنش اویلری و لاگرانژی چه اظهارنظری می‌توان کرد؟**

☑ **پاسخ:** می‌دانیم که هر دوی تانسورهای کرنش اویلری و لاگرانژی، تانسورهای مرتبه دوم متقارن می‌باشند که دارای مقادیر ویژه یکسان می‌باشند. ولی این موضوع در مورد راستاها (جهت‌ها)ی اصلی صادق نمی‌باشد. به عبارت دیگر این دو تانسور دارای جهت‌های اصلی متفاوتی می‌باشند.

**۱۱ـ ضریب پواسون منفی به چه معنا می‌باشد؟**

☑ **پاسخ:** مواد دارای ضریب پواسون منفی، در هنگام اعمال تنش کششی عمودی، در راستای عمود بر نیروی وارده ضخیم‌تر می‌شوند. حال آنکه در مواد معمولی دیگر (مواد رایج) که دارای ضریب پواسون مثبت می‌باشند، جسم در راستای عمود بر نیروی وارد شده نازک‌تر می‌شود.

رابطه بین تنش و کرنش در یک ماده الاستیک خطی به صورت زیر و از طریق ضریب پواسون به هم مرتبط می‌شوند:

$$e_x = \frac{1}{E}\{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\}$$

$$e_y = \frac{1}{E}\{\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\}$$

$$e_z = \frac{1}{E}\{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\}$$

برای بسیاری از مواد معمولی (مواد رایج)، ضریب پواسون مثبت می‌باشد. بنابراین با توجه به روابط بالا و به‌صورت تجربی، مشخص است که اگر چنین جسمی (دارای ضریب پواسون مثبت) تحت تنش کششی $\sigma_x$ قرار گیرد خواهیم داشت:

$$e_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad e_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x \qquad e_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x$$

با توجه به این که می‌دانیم که $E$ (مدول یانگ) همواره مثبت است، بنابراین جسم در راستای عمود بر نیروی وارد شده نازک‌تر می‌شود:

$$e_y \, , \, e_z < 0$$

حال اگر $\nu < 0$ باشد، در این صورت کرنش‌های $e_y$ و $e_z$ بزرگ‌تر از صفر خواهند شد. در این صورت در بارگذاری ذکر شده، جسم در راستای عمود بر نیروی وارد شده ضخیم‌تر خواهد شد.

---

**۱۲ـ تانسوری را در نظر بگیرید که تمام مقادیر ویژه آن برابر و یکسان هستند. در مورد بردارهای ویژه این تانسور چه اظهارنظری می‌توان کرد؟**

☑ **پاسخ:** می‌دانیم که برای هر تانسوری می‌توان با تشکیل معادله مقادیر ویژه، مقادیر ویژه آن تانسور را به‌دست آورد. برای مثال برای تانسور $\sigma_{ij}$ خواهیم داشت:

$$\left|\sigma_{ij} - S\delta_{ij}\right| = 0$$

که در آن $S$ مقادیر ویژه تانسور $\sigma_{ij}$ می‌باشد. با صفر قرار دادن دترمینان بالا، مقادیر ویژه تانسور و به تبع آن برای هر مقدار ویژه می‌توان یک بردار ویژه به‌دست آورد. حال ممکن است برای یک تانسور حقیقی، تمام مقادیر ویژه برابر باشند. برای چنین تانسوری، هر برداری می‌تواند یک بردار ویژه باشد.

---

**۱۳ـ به‌نظر شما، فشار هیدرواستاتیک چه تأثیری روی تنش فون‌میسز دارد؟**

☑ **پاسخ:** همان‌طوری که می‌دانیم در فشار هیدرواستاتیک، جسم در تمام جهات تحت فشار یکنواخت قرار می‌گیرد. در این حالت، تانسور تنش به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix} = -P\delta_{ij}$$

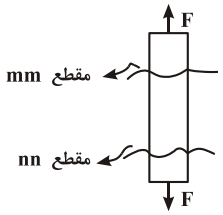
این حالت، یکی از حالت‌های خاص بارگذاری می‌باشد که منجر به تعریف مفهوم مدول مالک یا مدول حجمی می‌شود که نشان‌دهنده مقاومت یک ماده در مقابل فشار می‌باشد.

یکی از نکات خیلی ریز در مورد این حالت تنش این است که، تنش هیدرواستاتیک هیچ اثری روی تنش فون میسز ندارد.

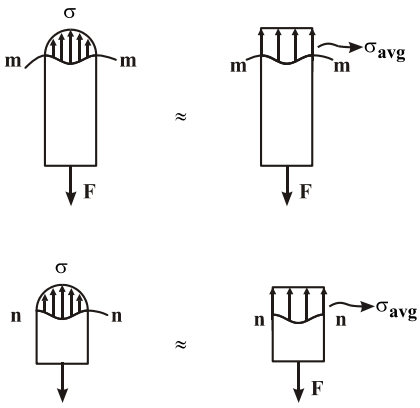
**۱۴ـ اصل Saint–Venant چه می‌گوید؟ توضیح دهید.**

☑ **پاسخ:** این اصل، یکی از اصول مهم مکانیک می‌باشد. طبق این اصل، میدان‌های تنش، کرنش و جابه‌جایی که از دو بارگذاری استاتیکی متفاوت با نیروهای معادل ایجاد می‌شوند، برای نقاط و نواحی دور از نقاط بارگذاری به صورت تقریبی برابر و یکسان می‌باشند.

برای مثال یک میله‌ای به طول L و قطر D را درنظر بگیرید که تحت نیروی کششی F قرار دارد:



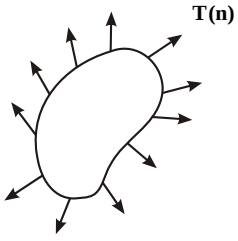

در این صورت برای مقاطع mm و nn که فاصله زیادی با نقاط بارگذاری دارند، توزیع تنش σ به صورت یکنواخت در نظر گرفته می‌شود:



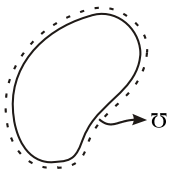

**۱۵ـ شرایط مرزی معمول در مسائل الاستیسیته کدام‌ها هستند؟**

☑ **پاسخ:** در مسائل الاستیسیته در حالت کلی ممکن است با سه نوع شرط مرزی روبه‌رو شویم:

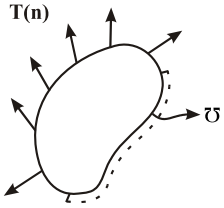
۱ـ شرط ترکشن (Traction Conditions)




۲ـ شرط جابه‌جایی (Displacement Conditions)

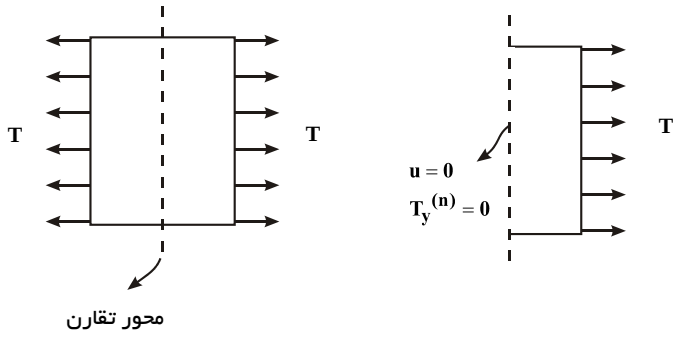



۳ـ شرط ترکیبی (Mixed Conditions) که ترکیبی از حالت‌های ۱ و ۲ می‌باشد.



همان‌طوری که مشاهده می‌شود، در شرط مرزی ترکشن، جسم تحت ترکشن (تنش بیرونی) قرار دارد. ولی در شرط مرزی جابه‌جایی، جسم فقط دارای جابجایی می‌باشد. در شرط مرزی سوم، حالت‌های اول و دوم با هم ترکیب شده‌اند.

برای مثال، جسم متقارن محوری زیر دارای شرط ترکیبی می‌باشد:




همان‌طوری‌که مشخص است جسم در صفحات کناری دارای شرط مرزی ترکشن و در نقاط محور تقارن (با توجه به تقارن) دارای شرط مرزی ترکیبی می‌باشد، یعنی هم جابه‌جایی و هم ترکشن برای این نقاط صفر است.

باید توجه داشت که شرایط مرزی نقش کلیدی در حل مسائل الاستیسیته ایفا می‌کنند. بنابراین برای حل چنین مسائلی باید بتوان به‌درستی شرایط مرزی را تشخیص داد.

◆ ◆ ◆ ◆

**۱۶ـ تانسورهای مثبت (منفی) معین و مثبت (منفی) نیمه معین دارای چه ویژگی‌هایی می‌باشند (به چه تانسورهایی گفته می‌شود)؟**

☑ **پاسخ:** در ابتدا باید گفت که چنین تانسورهایی باید متقارن باشند. بدین صورت که:

یک تانسور متقارن را مثبت (منفی) معین گویند هر گاه تمام مقادیر اصلی آن مثبت (منفی) باشد. همچنین یک تانسور متقارن را مثبت (منفی) نیمه معین گویند، اگر یک مقدار اصلی صفر و بقیه مقادیر اصلی آن مثبت (منفی) باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

**۱۷ـ اصل مومنتوم خطی چیست؟**

☑ **پاسخ:** می‌دانیم که برای یک ذره با جرم $m$ و سرعت $\vec{v}$، اندازه حرکت خطی به صورت حاصلضرب جرم و سرعت تعریف می‌شود و بدیهی است که با توجه به برداری بودن سرعت، اندازه حرکت خطی (مومنتوم خطی) نیز یک کمیت برداری می‌باشد. از طرف دیگر می‌دانیم که آهنگ تغییرات اندازه حرکت خطی برابر با نیروی وارد بر جسم (ذره) می‌باشد.

اصل بقای اندازه خطی یکی از اصول مهم مکانیک می‌باشد و به نوعی دیگر همان قانون دوم نیوتن است. این اصل بیان می‌دارد که نرخ زمانی تغییرات مومنتوم خطی یک ذره برابر است با نیروی منتجه وارد بر آن. بنابراین اگر بر ذره نیرویی وارد نشود یا حتی اگر برآیند نیروهای وارد شده بر جسم صفر باشد، آهنگ تغییرات مومنتوم خطی صفر بوده؛ یا به عبارت دیگر مومنتوم خطی ثابت است.

به عبارت بهتر، مومنتوم خطی آن ذره بقا دارد یا پایسته است که همان اصل بقای مومنتوم خطی می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

**۱۸ـ تانسورهای تنش پایولا ـ کیرشهف اول و دوم چه مفاهیمی را بیان می‌کنند و دارای چه ویژگی‌هایی می‌باشند؟**

☑ **پاسخ:** می‌دانیم که در علم مکانیک، تانسورهای تنش مختلف مثل کوشی، پایولا ـ کیرشهف اول و پایولا ـ کیرشهف دوم تعریف می‌شوند. تانسور پایولا ـ کیرشهف اول رابطه بین نیروهای موجود در پیکربندی فعلی و مساحت‌ها در پیکربندی مرجع را نشان می‌دهد. حال آنکه تانسور پایولا ـ کیرشهف دوم، رابطه بین نیروهای موجود در پیکربندی مرجع و مساحت‌ها در همین پیکربندی را تعیین می‌کند.

تانسور پایولا ـ کیرشهف اول نامتقارن بوده و تانسور پایولا ـ کیرشهف دوم متقارن می‌باشد.

**۱۹ـ تانسورهای تنش کوشی و پایولا ـ کیرشهف در چه حالتی با هم معادل هستند؟**

☑ **پاسخ:** فرض کنیم که یک جسم تحت تأثیر یک سری نیرو وجود دارد. بسته به در نظر گرفتن مساحت اولیه (قبل از تغییر شکل) و یا مساحت بعد از تغییر شکل (لحظه‌ای) می‌توان انواع مختلف تنش (کوشی ـ کیرشهف اوّل و کیرشهف دوم) را تعریف را کرد. این تغییر سطح در برخی از موارد بسیار ناچیز و قابل صرف‌نظر کردن می‌باشد.

می‌توان ثابت کرد که در نظریه‌های خطی و در تغییر شکل‌های بسیار کوچک (بی‌نهایت کوچک)، تنش‌های کوشی، پایولا ـ کیرشهف اول و پایولا ـ کیرشهف متقارن همگی معادل یکدیگر هستند.

---

**۲۰ـ مفهوم تنش کوشی چیست و برای نواحی الاستیک چگونه تعریف می‌شود؟**

☑ **پاسخ:** این تنش به صورت نیروی واردشده تقسیم بر مساحت تغییرشکل یافته تعریف می‌شود. در ناحیه الاستیک چون تغییر سطح زیاد نیست، می‌توان مساحت تغییرشکل یافته را همان مساحت اولیه در نظر گرفت (همان تنشی که در مقاومت با آن سر و کار داشتیم).

---

**۲۱ـ رفتار الاستیک به چه رفتاری اطلاق می‌شود؟ چگونه توصیف می‌شود؟**

☑ **پاسخ:** رفتار الاستیک با دو شرط اصلی توصیف می‌شود:

۱ـ وقتی که تنش در ماده تابعی منحصر به فرد از کرنش باشد.

۲ـ هنگامی‌که ماده دارای ویژگی برگشت کامل به حالت طبیعی خود را با برداشتن نیروهای اعمالی داشته باشد.

با توجه به این مفهوم، در نمودار تنش ـ کرنش، قسمتی از این نمودار بیان‌کننده رفتار خطی و الاستیک می‌باشد که خاصیت برگشت‌پذیری دارد. در مقاومت مصالح معمولاً با این قسمت سروکار داریم. ولی ماده پس از گذر از حالت و منطقه خطی، وارد فاز پلاستیک می‌شود. در تغییر شکل پلاستیک، تغییر شکل‌ها برگشت‌پذیر نمی‌باشند و تحلیل پاسخ ماده در این فاز متفاوت خواهد بود.

---

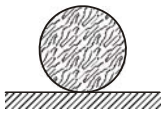
**۲۲ـ ماده الاستیک همسانگرد به چه ماده‌ای اطلاق می‌شود؟**

☑ **پاسخ:** در صورتی‌که خواص الاستیک یک ماده که توسط تانسور الاستیک $C$ تعریف می‌شود در هر مجموعه محورهای مرجع در هر نقطه از یک وضعیت مورد بررسی یکسان باشد، آن ماده را ماده الاستیک همسانگرد می‌گویند. برای چنین موادی، معادله اساسی فقط دو ثابت الاستیک دارد.

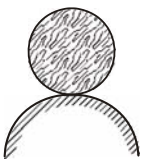
---

**۲۳ـ حالت‌های تعادل را نام برده و توضیح دهید.**

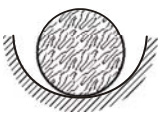
☑ **پاسخ:** تعادل سه حالت دارد: تعادل پایدار، تعادل ناپایدار و تعادل خنثی. این حالت‌ها در زیر نشان داده شده‌اند:



تعادل خنثی



تعادل ناپایدار



تعادل پایدار

در تعادل پایدار، انرژی پتانسیل سیستم دارای مقدار مینیمم است. در این حالت، یک انحراف کوچک از وضع تعادل، باعث افزایش انرژی پتانسیل می‌شود و سیستم می‌خواهد به وضعیت اولیه برگردد. در حالت تعادل ناپایدار، انرژی پتانسیل سیستم دارای مقدار ماکزیمم می‌باشد. در این حالت، یک انحراف کوچک از وضع تعادل باعث کاهش انرژی پتانسیل می‌شود و سیستم می‌خواهد از وضع تعادل اولیه دور شود. در حالت تعادل خنثی، انرژی پتانسیل سیستم دارای یک مقدار ثابت می‌باشد و انحراف سیستم باعث تغییر انرژی پتانسیل آن نمی‌شود.