فصل اول

«آنالیز برداری»

تست‌های تألیفی فصل اول

مثال ۱: طول تصویر بردار $\vec{A}=2\hat{i}-\hat{j}$ بر بردار $\vec{B}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» دقت کنید که در این‌جا طول تصویر بردار $\vec{A}$ به روی بردار $\vec{B}$ خواسته شده است. بنابراین از رابطه اول استفاده می‌کنیم:

$$\text{Proj}_{\vec{B}}^{\vec{A}}=\frac{|\vec{A}.\vec{B}|}{|\vec{B}|}=\frac{|2\times1+(-1)\times1+0\times1|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال ۲: تصویر بردار $\vec{A}=-\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ بر روی بردار $\vec{B}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\hat{i}-\frac{1}{4}\hat{j}+\frac{1}{2}\hat{k}$ ۲) $\frac{4}{9}\hat{i}-\frac{2}{9}\hat{j}+\frac{4}{9}\hat{k}$ ۳) $\frac{-2}{9}\hat{i}-\frac{4}{9}\hat{j}+\frac{6}{9}\hat{k}$ ۴) $\frac{-1}{4}\hat{i}-\frac{1}{4}\hat{j}+\frac{3}{4}\hat{k}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» این مثال بردار تصویر را از ما خواسته است. پس ابتدا باید طول تصویر بردار $\vec{A}$ روی بردار $\vec{B}$ را به دست آوریم و سپس آن را در بردار یکّه بردار $\vec{B}$ ضرب می‌کنیم. یا این که می‌توانیم مستقیم از رابطه (۲) در صفحه قبل استفاده کنیم که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\text{Proj}_{\vec{B}}^{\vec{A}}=(\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|})\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}=(\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|^2})\vec{B}=(\frac{(-1)\times2+2\times(-1)+3\times2}{(\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(2)^2})^2})(2,-1,2)=\frac{2}{9}(2,-1,2)=\frac{4}{9}\hat{i}-\frac{2}{9}\hat{j}+\frac{4}{9}\hat{k}$$

مثال ۳: مختصات بردار واحد (یکه) عمود بر دو بردار $\vec{A}=4\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ و $\vec{B}=-2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ کدام است؟

۱) $(1,-2,2)$ ۲) $(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3})$ ۳) $(\frac{-1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ ۴) $(-1,2,2)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» همان‌طور که گفتیم، بردار عمود بر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر حاصل‌ضرب خارجی آن دو بردار می‌باشد. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\vec{N}=\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\4&-1&3\\-2&1&-2\end{vmatrix}=(-1,2,2)$$

حالا بردار واحد متناظر با $\vec{N}$ را به دست می‌آوریم:

$$\hat{a}_N=\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}=\frac{(-1,2,2)}{\sqrt{(-1)^2+(2)^2+(2)^2}}=(\frac{-1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$$

مثال ۴: بردار $\vec{A}=2\hat{a}_x+3\hat{a}_y+z\hat{a}_z$ با صفحه xy زاویه 30° می‌سازد. مقدار z تقریباً چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲/۱ ۳) ۳/۲ ۴) ۴/۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تجزیه بردار $\vec{A}$ روی صفحه xy به صورت زیر است:

$$\hat{n}:\hat{a}_z:\vec{A}_n=(\vec{A}.\hat{a}_z)\hat{a}_z=z\hat{a}_z\xrightarrow{\vec{A}_t=\vec{A}-\vec{A}_n}\vec{A}_t=2\hat{a}_x+3\hat{a}_y$$

$$tg\alpha=\frac{|\vec{A}_n|}{|\vec{A}_t|}\Rightarrow|\vec{A}_n|=|\vec{A}_t|tg\alpha\Rightarrow z=\sqrt{13}tg30^\circ\Rightarrow z=\sqrt{13}.\frac{1}{\sqrt{3}}\approx2/1$$

مثال۵: معادله خط گذرنده از نقطه $(-۲,۳,۴)$ و موازی صفحات $۲x+۳y+۴z=۵$ و $۳x+۴y+۵z=۶$ کدام است؟

۱) $\frac{x+۲}{۱}=\frac{y-۳}{۱}=\frac{z-۲}{-۲}$ ۲) $\frac{x+۲}{۲}=\frac{y-۳}{۱}=\frac{z-۴}{-۱}$ ۳) $\frac{x+۲}{۱}=\frac{y-۳}{۲}=\frac{z-۴}{-۱}$ ۴) $\frac{x+۲}{-۱}=\frac{y-۳}{۲}=\frac{z-۴}{-۱}$

پاسخ : گزینه «۴» چون معادله خط موازی با دو صفحه خواسته شده است، می‌توانیم معادله خطی که موازی با خط فصل مشترک دو صفحه است را به دست آوریم. برای این که خطی که با خط فصل مشترک دو صفحه موازی باشد حتماً با خود دو صفحه موازی است. اینجاست که تذکر ۲ به کمک ما می‌آید تا بردار هادی خط مربوطه را به دست آوریم. ابتدا به سراغ بردارهای عمود بر دو صفحه می‌رویم. با توجه به معادله دو صفحه داده شده، بردارهای عمود بر آنها عبارتند از: $\vec{N}_۱=(۲,۳,۴)$ و $\vec{N}_۲=(۳,۴,۵)$.

حال برای به دست آوردن بردار هادی خط مربوطه باید جواب ضرب خارجی $\vec{N}_۱$ و $\vec{N}_۲$ را پیدا کنیم:

$$\vec{V}=\vec{N}_۱\times\vec{N}_۲=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ ۲ & ۳ & ۴\\ ۳ & ۴ & ۵\end{vmatrix}=(-۱,۲,-۱)$$

با داشتن یک نقطه و بردار هادی، می‌توانیم معادله‌ی خط را به این صورت بنویسیم:

$$\frac{x+۲}{-۱}=\frac{y-۳}{۲}=\frac{z-۴}{-۱}$$

مثال۶: اگر $\vec{A}=\hat{a}_x+\hat{a}_y+\hat{a}_z$ و $\vec{B}=\frac{۱}{۲}(\vec{A}.\vec{A})\hat{a}_y$ باشد، حاصل $\vec{A}\times\vec{B}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}\hat{a}_y$ ۲) $-\frac{۳}{۲}\hat{a}_y$ ۳) $-\frac{۳}{۲}\hat{a}_x+\frac{۳}{۲}\hat{a}_z$ ۴) $\frac{۳}{۲}\hat{a}_x+\frac{۳}{۲}\hat{a}_z$

پاسخ: گزینه «۳» بردار $\vec{B}$ برابر است با:

$$\vec{B}=\frac{۱}{۲}(\vec{A}.\vec{A})\hat{a}_y=\frac{۱}{۲}|A|^۲\,\hat{a}_y=\frac{۱}{۲}(۱^۲+۱^۲+۱^۲)\hat{a}_y=\frac{۳}{۲}\hat{a}_y$$

بنابراین داریم:

$$\vec{A}\times\vec{B}=(\hat{a}_x+\hat{a}_y+\hat{a}_z)\times\frac{۳}{۲}\hat{a}_y=\frac{۳}{۲}\hat{a}_z-\frac{۳}{۲}\hat{a}_x$$

مثال۷: حاصل $|\hat{a}_\varphi\times(\hat{a}_r.\hat{a}_r)\hat{a}_z+\hat{a}_\varphi|$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه «۴» این سؤال اندازه بردار زیر را از ما می‌خواهد:

$$\vec{A}=\hat{a}_\varphi\times(\hat{a}_r.\hat{a}_r)\hat{a}_z+\hat{a}_\varphi=\hat{a}_\varphi\times(۱\hat{a}_z)+\hat{a}_\varphi=(\hat{a}_\varphi\times\hat{a}_z)+\hat{a}_\varphi\ \Rightarrow\vec{A}=\hat{a}_r+\hat{a}_\varphi\Rightarrow|\vec{A}|=\sqrt{۲}$$

مثال۸: بردار $\vec{A}=\frac{۱۰}{R}\hat{a}_r+\sin\theta\hat{a}_\theta$ در دستگاه کروی داده شده است. اندازه این بردار را در نقطه $(۳,۴,۰)$ که در دستگاه دکارتی بیان شده، بیابید.

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به نقطه $(۳,۴,۰)$ داریم:

$$R=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$$

$$\cos\theta=\frac{z}{R}=۰\ ,\ \sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱\to\sin\theta=\pm\sqrt{۱-\cos^۲\theta}\xrightarrow{۰\le\theta\le\pi}\sin\theta=\sqrt{۱-۰}=۱$$

مقدار مثبت یا منفی به مکان نقطه بستگی دارد. با توجه به اینکه مقدار y مثبت است، مؤلفه مثبت قابل قبول است.

$$\vec{A}=\frac{۱۰}{۵}\hat{a}_r+\hat{a}_\theta\ \Rightarrow\vec{A}=۲\hat{a}_r+\hat{a}_\theta\ \to|\vec{A}|=\sqrt{A_r^۲+A_\theta^۲+A_\phi^۲}=\sqrt{۲^۲+۱^۲}=\sqrt{۵}$$

مثال۹: بردار $\vec{A}=۲\hat{a}_R+۳\hat{a}_\theta$ در دستگاه کروی داده شده است. معادل این بردار در نقطه $(R,\theta,\varphi)=(۱,\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۶})$ در دستگاه کارتزین چگونه است؟

۱) $\vec{A}=\frac{۳}{۲}\hat{a}_x+(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۴})\hat{a}_y-(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱)\hat{a}_z$

۲) $\vec{A}=\frac{۳}{۲}\hat{a}_x+\frac{\sqrt{۳}}{۴}\hat{a}_y+(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱)\hat{a}_z$

۳) $\vec{A}=(\frac{۳}{۲}+\frac{۳\sqrt{۳}}{۴})\hat{a}_x+(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۳}{۴})\hat{a}_y+(۱-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲})\hat{a}_z$

۴) $\vec{A}=(\frac{۳}{۲}-\frac{۳\sqrt{۳}}{۴})\hat{a}_x+(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۳}{۴})\hat{a}_y+(۱+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲})\hat{a}_z$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» بردار داده شده در مسأله را می‌توان برحسب بردارهای یکه مختصات کارتزین نوشت:

$$\vec{A}=۲(\sin\theta\cos\varphi\hat{a}_x+\sin\theta\sin\varphi\hat{a}_y+\cos\theta\hat{a}_z)+۳(\cos\theta\cos\varphi\hat{a}_x+\cos\theta\sin\varphi\hat{a}_y-\sin\theta\hat{a}_z)$$

این بردار در نقطه $(R,\theta,\varphi)=(۱,\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۶})$ برابر است با:

$$\vec{A}=۲(\sin\frac{\pi}{۳}\cos\frac{\pi}{۶}\hat{a}_x+\sin\frac{\pi}{۳}\sin\frac{\pi}{۶}\hat{a}_y+\cos\frac{\pi}{۳}\hat{a}_z)+۳(\cos\frac{\pi}{۳}\cos\frac{\pi}{۶}\hat{a}_x+\cos\frac{\pi}{۳}\sin\frac{\pi}{۶}\hat{a}_y-\sin\frac{\pi}{۳}\hat{a}_z)$$

$$\vec{A}=۲(\frac{۳}{۴}\hat{a}_x+\frac{\sqrt{۳}}{۴}\hat{a}_y+\frac{۱}{۲}\hat{a}_z)+۳(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\hat{a}_x+\frac{۱}{۴}\hat{a}_y-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\hat{a}_z)\ \Rightarrow\vec{A}=(\frac{۳}{۲}+\frac{۳\sqrt{۳}}{۴})\hat{a}_x+(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۳}{۴})\hat{a}_y+(۱-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲})\hat{a}_z$$

مثال۱۰: حاصل $\cos\varphi+\tan\theta$ در نقطه $(x,y,z)=(۳,۴,-۵)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $-\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $-\frac{۳}{۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به سادگی می‌توان θ و φ را برحسب x و y و z به دست آورد:

$$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=\dfrac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{z}=\dfrac{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}{-۵}=-۱\\[2ex]\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}}=\dfrac{۳}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\dfrac{۳}{۵}\end{array}\right\}\Rightarrow\cos\varphi+\tan\theta=-\frac{۲}{۵}$$

مثال۱۱: بردار $\vec{A}=\frac{۲۷\sqrt{۲}}{R^۲}\hat{a}_\theta$ در نقطه $(۲,۲,۱)$ در دستگاه مختصات قائم کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}\hat{a}_x+۲\sqrt{۲}\hat{a}_y-۴\hat{a}_z$ ۲) $۲\sqrt{۲}\hat{a}_x+۲\sqrt{۲}\hat{a}_y+\sqrt{۲}\hat{a}_z$ ۳) $\hat{a}_x+\hat{a}_y-۴\hat{a}_z$ ۴) $\hat{a}_x+\hat{a}_y+۴\hat{a}_z$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از رابطه بین مختصات کروی و دکارتی، در نقطه $(۲,۲,۱)$ داریم:

$$R=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=\sqrt{۲^۲+۲^۲+۱^۲}=۳$$

$$\cos\theta=\frac{z}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}=\frac{z}{R}=\frac{۱}{۳}\rightarrow\sin\theta=\sqrt{۱-\cos^۲\theta}=\sqrt{۱-(\frac{۱}{۳})^۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\cos\phi=\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}}=\frac{x}{r}=\frac{۲}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\rightarrow\sin\phi=\sqrt{۱-\cos^۲\phi}=\sqrt{۱-(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

بنابراین بردار $\vec{A}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\vec{A}=\frac{۲۷\sqrt{۲}}{۳^۲}[\cos\theta\cos\phi\hat{a}_x+\cos\theta\sin\phi\hat{a}_y-\sin\theta\hat{a}_z]$$

$$\vec{A}=\frac{۲۷\sqrt{۲}}{۹}[\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{\sqrt{۲}}\hat{a}_x+\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{\sqrt{۲}}\hat{a}_y-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\hat{a}_z]=\hat{a}_x+\hat{a}_y-۴\hat{a}_z$$

مثال۱۲: زاویه بین دو بردار $\vec{A}=۲R\hat{a}_R+۲R\hat{a}_\theta+\sqrt{۵}\hat{a}_\phi$ و $\vec{B}=\hat{a}_r-\sqrt{۵}a_\phi+\hat{a}_z$ در نقطه $(\frac{۱}{۴},\frac{\sqrt{۲}}{۴},\frac{۱}{۴})$ (در دستگاه دکارتی) کدام است؟

۱) $\cos^{-۱}(-\frac{۵}{۷})$ ۲) $\cos^{-۱}(\frac{۳}{۷})$ ۳) $\cos^{-۱}(-\frac{۴}{۷})$ ۴) $\cos^{-۱}(\frac{۵}{۷})$

پاسخ: گزینه «۳» در نقطه $(\frac{۱}{۴},\frac{\sqrt{۲}}{۴},\frac{۱}{۴})$ داریم:

$$\cos\theta=\frac{z}{R}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}\quad , \quad R=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}=\sqrt{(\frac{۱}{۴})^{۲}+(\frac{\sqrt{۲}}{۴})^{۲}+(\frac{۱}{۴})^{۲}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\vec{A}=\hat{a}_R+\hat{a}_\theta+\sqrt{۵}\hat{a}_\phi$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}=\frac{(\hat{a}_R+\hat{a}_\theta+\sqrt{۵}\hat{a}_\phi).(\hat{a}_r-\sqrt{۵}\hat{a}_\phi+\hat{a}_z)}{\sqrt{۷}\times\sqrt{۷}}=\frac{(\hat{a}_R.\hat{a}_r+\hat{a}_R.\hat{a}_z+\hat{a}_\theta.\hat{a}_r+\hat{a}_\theta.\hat{a}_z-۵)}{۷}$$

$$=\frac{\sin\theta+\cos\theta+\cos\theta-\sin\theta-۵}{۷}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۲\cos\theta-۵}{۷}=\frac{۲\times\frac{۱}{۲}-۵}{۷}=\frac{-۴}{۷}\Rightarrow\alpha=\cos^{-۱}(-\frac{۴}{۷})$$

مثال ۱۳: دو بردار $\vec{A}=۳\hat{a}_x+\sqrt{۲}\hat{a}_y+\sqrt{۲}\hat{a}_z$ و $\vec{B}=۲\hat{a}_R-۳\hat{a}_\phi$ در کدام‌یک از نقاط زیر با هم موازی‌اند؟

۱) $(۰,\sqrt{۲},\sqrt{۲})$ ۲) $(۰,-\sqrt{۲},\sqrt{۲})$ ۳) $(۰,\sqrt{۲},-\sqrt{۲})$ ۴) گزینه ۲و۳

پاسخ: گزینه «۱» بردار $\vec{B}$ را به دستگاه دکارتی منتقل می‌کنیم.

$$\vec{B}=۲(\sin\theta\cos\phi\hat{a}_x+\sin\theta\sin\phi\hat{a}_y+\cos\theta\hat{a}_z)-۳(-\sin\phi\hat{a}_x+\cos\phi\hat{a}_y)$$

$$\vec{B}=(۲\sin\theta\cos\phi+۳\sin\phi)\hat{a}_x+(۲\sin\theta\sin\phi-۳\cos\phi)\hat{a}_y+۲\cos\theta\hat{a}_z$$

با داشتن نیم‌نگاهی به گزینه‌ها درمی‌یابیم که در تمامی آنها:

$$\cos\phi=\frac{x}{R}=۰$$

$$\vec{B}=۳\sin\phi\hat{a}_x+۲\sin\theta\sin\phi\hat{a}_y+۲\cos\theta\hat{a}_z$$

برای اینکه دو بردار با هم موازی باشند، باید رابطه روبه‌رو برقرار باشد:

$$\frac{۳\sin\phi}{۳}=\frac{۲\sin\theta\sin\phi}{\sqrt{۲}}=\frac{۲\cos\theta}{\sqrt{۲}}$$

با توجه به گزینه ۱، $\cos\theta=\frac{z}{r}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است و $\sin\phi=\frac{y}{R}=۱$ و $\sin\theta=\sqrt{۱-\cos^{۲}\theta}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ می‌باشد؛ پس: $\frac{۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}}=۱$.

مثال ۱۴: سطح قسمتی از کره $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۲$ که محدود به مخروط $z=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ و صفحات $\phi=۰$ و $\phi=\frac{\pi}{۲}$ می‌باشد، کدام است؟

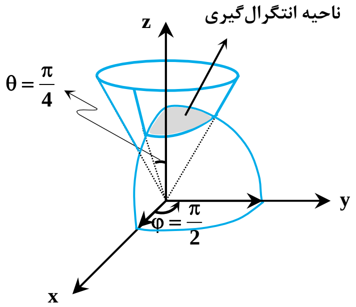
۱) $(۲-\sqrt{۲})\pi$ ۲) $(۲-\sqrt{۲})\frac{\pi}{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}\pi$ ۴) $۲\sqrt{۲}+\pi$

پاسخ: گزینه «۲» برای حل این سوال دو روش داریم:

روش اول: با توجه به این‌که رویه مورد نظر منطبق با سطح‌های دستگاه کروی می‌باشد، می‌توان چنین نوشت: $ds=R^{۲}\sin\theta d\theta d\varphi$

از طرفی φ از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر می‌کند. همچنین با توجه به رابطه بیان شده در بخش دستگاه مختصات کروی $tg\theta=\frac{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}{z}$، زاویه رأس مخروط با محور zها برابر $\frac{\pi}{۴}=Arc\tan ۱=Arc\tan\frac{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}{z}$ بوده و لذا در رویه مورد نظر حدود تغییرات θ از ۰ تا $\frac{\pi}{۴}$ است و شعاع کره برابر $\sqrt{۲}$ می‌باشد.

ناحیه انتگرال‌گیری را در شکل روبرو می‌بینید.بنابراین داریم:

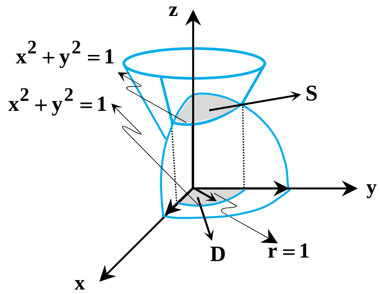


$$S=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}R^{۲}\sin\theta d\theta d\varphi=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}۲\sin\theta d\theta d\varphi=\pi[-\cos\theta]_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}=\pi(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\pi}{۲}(۲-\sqrt{۲})$$

روش دوم: فرض کنید $g(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲-۲=\circ$. حالا می‌توانیم بنویسیم:

$$|\vec{\nabla} g|=\sqrt{(۲x)^۲+(۲y)^۲+(۲z)^۲}=۲\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=۲\sqrt{۲}$$
$$|g_z|=|۲z|=۲\sqrt{۲-x^۲-y^۲}$$

همچنین می‌دانیم که محل برخورد رویه $x^۲+y^۲+z^۲=۲$ و مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ به صورت $x^۲+y^۲+(\sqrt{x^۲+y^۲})^۲=۲$ است که با ساده کردن آن داریم: $x^۲+y^۲=۱$. پس مرز برخورد کره $x^۲+y^۲+z^۲=۲$ با مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ می‌شود یک دایره به شعاع یک و تصویر آن روی صفحه xy هم یک دایره به شعاع یک $(x^۲+y^۲=۱)$ خواهد بود که در شکل مقابل نشان دادیم. بنابراین:



$$S=\iint_S ds=\iint_D \frac{|\vec{\nabla} g|}{|g_z|}dA=\iint_D \frac{۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲-x^۲-y^۲}}dxdy$$

با توجه به مقدار $-x^۲-y^۲$ در زیر رادیکال در مخرج نتیجه می‌گیریم که حل این انتگرال ساده نیست، ولی با توجه به مقدار $r^۲=x^۲+y^۲$ در مختصات استوانه‌ای می‌توانیم این انتگرال را در این دستگاه به راحتی حل کنیم. با انتقال انتگرال بالا به مختصات استوانه‌ای داریم:

$$S=\sqrt{۲}\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}\int_\circ^{۱}(۲-r^۲)^{-\frac{۱}{۲}}rdrd\varphi=\frac{\pi}{۲}(۲-\sqrt{۲})$$

مثال ۱۵: مقدار $\iint_S ۳zds$ که در آن S قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ زیر صفحه $z=۱$ است، برابر کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌باشد؟

۱) $\sqrt{۲}\pi$ ۲) ۲π ۳) π ۴) $۲\sqrt{۲}\pi$

پاسخ : گزینه «۴»

روش اول: سطح S منطبق با سطح مخروطی شکل (θ ثابت) در دستگاه کروی می‌باشد. برای محاسبه مقدار θ مربوط به این سطح از رابطه $\tan\theta=\frac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{z}$ استفاده می‌کنیم:

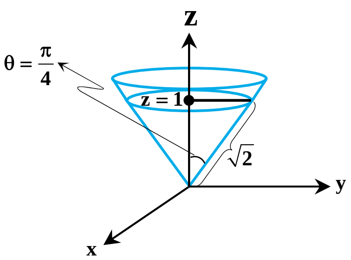
$$\theta=\tan^{-۱}(\frac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{z})=\tan^{-۱}(\frac{z}{z})=\frac{\pi}{۴}$$

با توجه به این‌که روی سطح مخروطی $\theta=\frac{\pi}{۴}$ مقدار θ ثابت است، پس فقط R و φ تغییر می‌کنند. از طرفی ضریب طولی جزءهای دیفرانسیلی dR و $d\varphi$ به ترتیب ۱ و $R\sin\theta$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$ds=R\sin\theta dRd\varphi=\frac{\sqrt{۲}}{۲}RdRd\varphi$$

همان‌طور که در بخش دستگاه مختصات کروی گفتیم، مقدار z برحسب R و θ به صورت روبرو بیان می‌شود.

$$z=R\cos\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}R$$



با توجه به شکل مقابل داریم: $\circ<R<\sqrt{۲}$ و $\circ<\varphi<۲\pi$.

حال با استفاده از روابط به دست آمده، انتگرال داده شده را به مختصات کروی انتقال می‌دهیم:

$$\iint_S ۳zds=\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{\sqrt{۲}}۳(\frac{\sqrt{۲}}{۲}R)(\frac{\sqrt{۲}}{۲}RdRd\varphi)=\frac{۳}{۲}\int_\circ^{۲\pi}d\varphi\int_\circ^{\sqrt{۲}}R^۲dR=۲\sqrt{۲}\pi$$

روش دوم: حتماً می‌دانید از محل برخورد رویه $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و صفحه $z=1$ چه شکلی به دست می‌آید؟ بله! دایره $x^2+y^2=1$. بنابراین تصویر رویه S روی صفحه xy، ناحیه داخل دایره $x^2+y^2=1$ خواهد بود. از طرفی با انتخاب $g(x,y,z)=z-\sqrt{x^2+y^2}=0$ خواهیم داشت:

$$|\vec{\nabla} g|=\sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+1}=\sqrt{2} \quad , \quad |g_z|=1$$

$$\iint_S 3z\,ds=\iint_D 3\sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{|\vec{\nabla} g|}{|g_z|}\right)dA=\iint_D 3\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}\,dA$$

حالا اگر مختصات دکارتی را به استوانه‌ای تبدیل کنیم به جواب نهایی خواهیم رسید.

$$\iint_D 3\sqrt{x^2+y^2}(\sqrt{2}dA)=\int_0^{2\pi}\int_0^1 3r(\sqrt{2}r\,dr\,d\varphi)=\sqrt{2}\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)\left(\int_0^1 3r^2dr\right)=2\sqrt{2}\pi$$

مثال ۱۶: مقدار انتگرال $\iiint_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdydz$ که در آن D ناحیه محصور به صفحه $z=0$، دو کره به مرکز مبدأ با شعاع‌های ۱ و ۲ و خارج نیم مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ می‌باشد، برابر کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟

۱) $-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$
۲) 0
۳) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$
۴) $\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{6}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ناحیه D منطبق با مرزهای دستگاه مختصات کروی می‌باشد. بنابراین بهتر است از روش تبدیل مختصات دکارتی به کروی استفاده کنیم. دقت کنید که محدوده تغییرات R با توجه به مرزهای کروی به شعاع‌های ۱ و ۲ به دست می‌آید. (R از ۱ تا ۲ تغییر می‌کند.)

و محدوده تغییرات θ را با توجه به مرزهای مخروطی شکل $z=0$ و $z=\sqrt{x^2+y^2}$ تعیین می‌کنیم.

$$z=0 \Rightarrow \theta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{0}=\tan^{-1}\infty=\frac{\pi}{2}$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \theta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=\tan^{-1}\frac{z}{z}=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$$

حدود تغییرات φ نیز از ۰ تا 2π است.

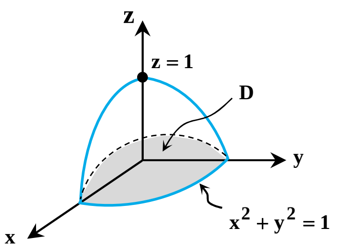
حالا با توجه به روابط $dxdydz=R^2\sin\theta\, d\theta d\varphi dR$ و $x=R\sin\theta\cos\varphi$ و $y=R\sin\theta\sin\varphi$ پاسخ را به دست می‌آوریم:

$$\iiint \frac{x}{x^2+y^2}dxdydz=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 \frac{R\sin\theta\cos\varphi}{R^2\sin^2\theta}R^2\sin\theta\, dR\,d\theta\, d\varphi=\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2 R\,dR=0$$

مثال ۱۷: حجم محصور بین سطوح $z=1-x^2-y^2$ و $z=0$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$
۲) π
۳) 2π
۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در انتگرال‌های حجمی و سطحی همیشه بهتر است شکل محدوده انتگرال را در ذهن تجسم کنیم. مثلاً در این تست، شکل رویه $z=1-(x^2+y^2)$ یک سهموی برعکس است که روی محور z ها به اندازه یک واحد به سمت بالا منتقل شده است (توجه کنید که شکل رویه $z=(x^2+y^2)$ یک سهموی است) که در شکل آن را می‌بینید. با حل مثال‌های مختلف الان دیگر به راحتی می‌دانید که محل برخورد دو سطح $z=1-x^2-y^2$ و $z=0$ می‌شود دایره $x^2+y^2=1$. حال اگر D را ناحیه داخل دایره $x^2+y^2\le 1$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



$$V=\iint_D\left\{\int_0^{1-x^2-y^2}dz\right\}dxdy=\iint_D(1-x^2-y^2)dxdy$$

با توجه به این‌که تابع $1-x^2-y^2$ و ناحیه D را می‌توان بر حسب مختصات استوانه‌ای (قطبی) نوشت، داریم:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1(1-r^2)r\,dr\,d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r(1-r^2)dr=\frac{\pi}{2}$$

مثال۱۸: اگر بردار $\vec{F} = \sin\phi\hat{a}_r + \cos\phi\hat{a}_\phi + \frac{۱}{۲}\hat{a}_z$ باشد، کار انجام شده توسط بردار $\vec{F}$ جهت تغییر مکان جسمی از نقطه $A(۱,۰,۰)$ به نقطه $B(۰,۲,-۱)$ در دستگاه دکارتی در امتداد یک خط مستقیم از A به B، کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به اینکه نقاط در دستگاه دکارتی داده شده است، پس $d\vec{l}$ در دستگاه دکارتی است و بردار $\vec{F}$ را باید به دستگاه دکارتی منتقل کنیم.

$$\vec{F} = \sin\phi(\cos\phi\hat{a}_x + \sin\phi\hat{a}_y) + \cos\phi(-\sin\phi\hat{a}_x + \cos\phi\hat{a}_y) + \frac{۱}{۲}\hat{a}_z$$

$$\vec{F} = (\sin\phi\cos\phi - \sin\phi\cos\phi)\hat{a}_x + (\sin^۲\phi + \cos^۲\phi)\hat{a}_y + \frac{۱}{۲}\hat{a}_z \Rightarrow \hat{a}_y + \frac{۱}{۲}\hat{a}_z$$

$$\int \vec{F}.d\vec{l} = \int_۰^۲ dy + \frac{۱}{۲}\int_۰^{-۱} dz = y\Big|_۰^۲ + \frac{۱}{۲}z\Big|_۰^{-۱} = ۲ - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

مثال۱۹: اگر $\vec{A} = ۳R^۲\sin\theta\sin۲\phi\hat{a}_R + R^۲\cos\theta\sin۲\phi\hat{a}_\theta + ۲R^۲\cos۲\phi\hat{a}_\phi$ باشد $\int \vec{A}.d\vec{l}$ از نقطه $P_۱(۲,\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۴})$ به نقطه $P_۲(۱,\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۳})$ کدام است؟ مسیر انتگرال‌گیری را شامل سه بخش در نظر بگیرید: ۱ـ $R:۲ \to ۱$ و $\theta = \frac{\pi}{۶}$، $\phi = \frac{\pi}{۴}$، ۲ـ $R:۱$ و $\theta:\frac{\pi}{۶} \to \frac{\pi}{۲}$، $\phi = \frac{\pi}{۴}$، ۳ـ $R = ۱$ و $\theta = \frac{\pi}{۲}$ و $\phi:\frac{\pi}{۴} \to \frac{\pi}{۳}$ (مختصات نقاط در دستگاه کروی می‌باشد)

۱) $-\frac{۷}{۴}(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ ۲) $-\frac{۷}{۲}(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ ۳) $-۲+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $-۴+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» باید سه انتگرال $\int ۳R^۲\sin\theta\sin۲\varphi dr$ و $\int R^۳\cos\theta\sin۲\varphi d\theta$ و $\int ۲R^۳\sin\theta\cos۲\varphi d\varphi$ را حل کنیم. سه مسیر را در نظر می‌گیریم.

مسیر اول: $R:۲ \to ۱$ در این مسیر $\theta = \frac{\pi}{۶}$ و $\varphi = \frac{\pi}{۴}$:

$$\int_{R=۲}^{۱} ۳R^۲\sin\theta\sin۲\varphi dr\Bigg|_{\varphi=\frac{\pi}{۴}}^{\theta=\frac{\pi}{۶}} = R^۳\Bigg|_۲^۱ (\frac{۱}{۲})(۱) = -\frac{۷}{۲}$$

مسیر دوم: $\theta:\frac{\pi}{۶} \to \frac{\pi}{۲}$ و به ازای $R = ۱$ و $\varphi = \frac{\pi}{۴}$:

$$\int_{\theta=\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}} R^۳\cos\theta\sin۲\varphi d\theta\Bigg|_{\varphi=\frac{\pi}{۴}}^{R=۱} = (۱)(۱)\sin\theta\Bigg|_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}} = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

مسیر سوم: $\varphi:\frac{\pi}{۴} \to \frac{\pi}{۳}$ به ازای $R = ۱$ و $\theta = \frac{\pi}{۲}$:

$$\int_{\varphi=\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}} ۲R^۳\sin\theta\cos۲\varphi d\varphi\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{۲}}^{R=۱} = \frac{۲(۱)}{۲}\sin۲\varphi\Bigg|_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}} = \sin\frac{۲\pi}{۳} - ۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۱$$

حال جواب کلی مجموع سه جواب بالاست:

$$-\frac{۷}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۱ = -۴ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

مثال۲۰: بردار $\vec{F} = \frac{xz}{۲}\hat{a}_x + ۲xy\hat{a}_y + \frac{۴}{۳}\hat{a}_z$ را در نظر بگیرید. $\int_A^B \vec{F}.d\vec{l}$ روی مسیر نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱ متر از $A(۱,۰,۰)$ به $B(-۱,۰,۰)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۴}{۳}$ ۳) ۰ ۴) $\frac{۲}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» دقت کنید که نیم‌دایره در صفحه xy یا $z=0$ قرار دارد؛ بنابراین $z=0$ و تغییرات z هم صفر می‌باشد؛ در نتیجه $\frac{xz}{2}\hat{a}_x = 0$.

از طرفی $\frac{4}{3}\hat{a}_z$ هم تأثیری در انتگرال‌گیری ندارد، پس فقط کافی است مؤلفه $\hat{a}_y$ را بررسی کنیم:

$$2xy\hat{a}_y = 2r^2\cos\phi\sin\phi(\sin\phi\hat{a}_r+\cos\phi\hat{a}_\phi) = 2\cos\phi\sin^2\phi\hat{a}_r + 2\cos^2\phi\sin\phi\hat{a}_\phi$$

چون مسیر انتگرال‌گیری از $x>0$ به $x<0$ می‌باشد، پس تغییرات φ باید از $\varphi=0$ تا $\varphi=\pi$ باشد.

چون مسیر روی دایره $r=1$ می‌باشد، $dr=0$ و در نتیجه مؤلفه $\hat{a}_r$ تأثیری در انتگرال‌گیری ندارد. پس پاسخ برابر است با:

$$\int\vec{F}.d\vec{l} = 2\int_0^\pi\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi = \frac{4}{3}$$

مثال ۲۱: اگر $\vec{F} = 3x^2y\hat{a}_x - 2z\hat{a}_y + 4\hat{a}_z$ باشد، انتگرال روی مسیری که از برخورد سطوح $z=x^2$ و $y=5$ حاصل می‌شود را از نقطه $P_1(-2,5,4)$ تا $P_2(1,5,1)$ محاسبه کنید.

۱) -33 ۲) -31 ۳) 33 ۴) 31

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» واضح است که $y=5$ ثابت بوده و تغییرات $(dy)y$ نیز صفر است، پس می‌توان نوشت:

$$\int_{P_1}^{P_2}\vec{F}.d\vec{l} = \int_{-2}^{1}3x^2ydx + \int_4^1 4dz = 5x^3\Big|_{-2}^{1} + 4z\Big|_4^1 = 5(1+8)+4(1-4) = 45-12 = 33$$

مثال ۲۲: اگر بردار $\vec{A} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$ باشد، $\int\vec{A}.d\vec{s}$ روی سطح مخروطی با نیم‌زاویه‌ی $\theta = \frac{\pi}{4}$ و اندازه یال $r=3$ کدام است؟

۱) $3\sqrt{2}\pi$ ۲) $18\sqrt{2}\pi$ ۳) 0 ۴) $-27\pi(\frac{\sqrt{2}}{2}-1)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» دقت کنید بردار مکان $\vec{A} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$ معادل با $\vec{A} = R\hat{a}_R$ در دستگاه کروی است. با توجه به سطح بیان شده، $d\vec{s} = R\sin\theta dRd\phi\hat{a}_\theta$ می‌باشد که حاصل $\vec{A}.d\vec{s} = 0$ است.

مثال ۲۳: اگر بردار $\vec{A} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$ باشد، $\int\vec{A}.d\vec{s}$ روی سطح جانبی استوانه‌ای که محور آن z بوده و ارتفاع آن از $z=-3$ تا $z=3$ تغییر می‌کند و شعاع آن $r=2$ است محاسبه کنید.

۱) 72π ۲) 48π ۳) 0 ۴) 12

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» بردار مکان $\vec{A} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$ معادل با $\vec{A} = r\hat{a}_r + z\hat{a}_z$ در دستگاه استوانه‌ای است. پس با توجه به سطح بیان شده $d\vec{s} = rd\varphi dz\hat{a}_r$ می‌باشد و داریم:

$$\vec{A}.d\vec{s} = r^2d\phi dz = 4d\phi dz$$

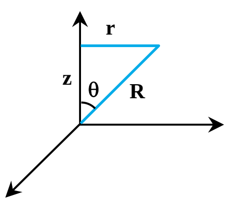
$$\int_s\vec{A}.d\vec{s} = \int_{z=-3}^{3}\int_{\phi=0}^{2\pi}4d\phi dz = 4\times2\pi\times6 = 48\pi$$

مثال ۲۴: اگر بردار $\vec{A} = R\hat{a}_R + \frac{1}{\sin\theta}\hat{a}_\theta + \tan^2\phi\hat{a}_\phi$ باشد، $\int\vec{A}.d\vec{s}$ را روی سطح جانبی استوانه با شعاع $r=1$ که محور آن محور z بوده و یک قاعده آن روی صفحه xy و قاعده دیگر آن روی صفحه $z=2$ واقع است محاسبه کنید.

۱) 4π ۲) 0 ۳) $2\pi(\sqrt{5}+1)$ ۴) 8π

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به اینکه شعاع ثابت است $d\vec{s} = rd\phi dz\hat{a}_r$. پس در تبدیل دستگاه کروی به استوانه‌ای کافی است فقط مؤلفه $\hat{a}_r$ را محاسبه کنیم.

$$\vec{A}.\hat{a}_r = R(\sin\theta) + \frac{1}{\sin\theta}(\cos\theta) \Rightarrow \vec{A}.\hat{a}_r = r + \cot\theta$$



$$\cot\theta = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه}}{\text{ضلع مقابل به زاویه}} = \frac{z}{r} \quad \text{یا} \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{z}{R}}{\frac{r}{R}} = \frac{z}{r} \Rightarrow \vec{A}.\hat{a}_r = r + \frac{z}{r}$$

$$\vec{A}.d\vec{s} = (r^2+z)d\phi dz \to \int\vec{A}.d\vec{s} = \int_{z=0}^{2}\int_{\phi=0}^{2\pi}(r^2+z)d\phi dz = \int_{z=0}^{2}\int_{\phi=0}^{2\pi}(1+z)d\phi dz = 8\pi$$

مثال ۲۵: مقدار انتگرال $\oint d\vec{s}$ روی سطح یک کره به شعاع R کدام است؟

۱) $4\pi r^2$ ۲) 3π ۳) 0 ۴) 3

پاسخ: گزینه «۳» برای سطح یک کره داریم: $d\vec{s} = R^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{a}_R$

توجه داشته باشید که چون $\hat{a}_R$ با تغییر θ و ϕ تغییر می‌کند، پس نمی‌توانیم آن را از انتگرال بیرون آوریم و باید برحسب بردارهای پایه دستگاه دکارتی بیان شود. زیرا جهت‌های $\hat{a}_x$ و $\hat{a}_y$ و $\hat{a}_z$ ثابت‌اند. پس داریم:

$$\oint d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2 \sin\theta d\theta d\phi(\sin\theta\cos\phi\hat{a}_x + \sin\theta\sin\phi\hat{a}_y + \cos\theta\hat{a}_z) = 0$$

و به طور کلی نیز اثبات می‌شود که $\oint d\vec{s}$ برای هر سطح بسته دلخواه صفر است.

مثال ۲۶: اگر بردار $\vec{A} = \frac{1}{x}\hat{a}_x - \frac{1}{y}\hat{a}_y + xy\hat{a}_z$ باشد، $\int \vec{A}.d\vec{s}$ را روی سطح جانبی مخروطی با نیم زاویه $\theta = \frac{\pi}{4}$ و اندازه یال $R = 2$ و تغییرات $\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{2}$ محاسبه کنید.

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) 0 ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به اینکه $\theta = \frac{\pi}{4}$ ثابت می‌باشد و $d\vec{s} = R\sin\theta dR d\phi \hat{a}_\theta$ است، پس در تبدیل به دستگاه کروی فقط مؤلفه $\hat{a}_\theta$ آن را محاسبه می‌کنیم.

$$A_\theta = \frac{1}{R\sin\theta\cos\phi}(\cos\theta\cos\phi) - \frac{1}{R\sin\theta\sin\phi}(\cos\theta\sin\phi) + R^2\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi(-\sin\theta)$$

$$A_\theta = \frac{\cos\theta}{R\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{R\sin\theta} - R^2\sin^3\theta\sin\phi\cos\phi$$

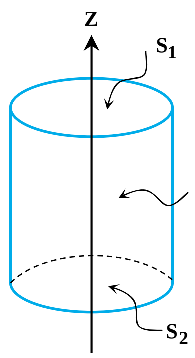
$$A_\theta ds = (-R^3\sin^4\theta\sin\phi\cos\phi)dRd\phi$$

$$\int A_\theta ds = \int_{\phi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{R=0}^{2} -R^3\sin^4\theta\sin\phi\cos\phi drd\phi = \frac{1}{4}\times\frac{R^4}{4}\Big|_0^2 \times \frac{1}{4}\cos2\phi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\times4\times\frac{1}{4}\times(-1) = -\frac{1}{4}$$

مثال ۲۷: اگر بردار $\vec{A} = \frac{1}{r}\hat{a}_r + \sin\phi\hat{a}_\phi + 3z\hat{a}_z$ باشد، $\oint \vec{A}.d\vec{s}$ را روی سطح بسته استوانه‌ای با شعاع $r = 2$ که محور آن منطبق بر محور z است و ارتفاع آن از $z = -2$ تا $z = 2$ تغییر می‌کند، به دست آورید.

۱) 48π ۲) 56π ۳) 24π ۴) 8π

پاسخ: گزینه «۲» انتگرال را روی دو قاعده و سطح جانبی استوانه می‌نویسیم:



$$\oint \vec{A}.d\vec{s} = \int_{s_1}\vec{A}.d\vec{s}_1 + \int_{s_2}\vec{A}.d\vec{s}_2 + \int_{s_3}\vec{A}.d\vec{s}_3$$

$$\int_{s_1}\vec{A}.d\vec{s}_1 = \int_{s_1}(3z\hat{a}_z).(rdrd\phi\hat{a}_z) = 3(2)\underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^2 rdrd\phi}_{\text{مساحت دایره به شعاع ۲}} = 24\pi$$

$$\int_{s_2}\vec{A}.d\vec{s}_2 = \int_{s_2}(3z\hat{a}_z).(rdrd\phi(-\hat{a}_z)) = 3(-2)(-1)\underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^2 rdrd\phi}_{\text{مساحت دایره به شعاع ۲}} = 24\pi$$

$$\int_{s_3}\vec{A}.d\vec{s}_3 = \int_{s_3}(\frac{1}{r}\hat{a}_r).(rd\phi dz\hat{a}_r) = \int_0^{2\pi}\int_{-2}^{2} d\phi dz = 8\pi$$

در نتیجه به جواب رسیدیم: $\oint \vec{A}.d\vec{s} = 56\pi$

مثال ۲۸: اگر $\vec{A} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$ باشد، $\int \vec{A}dv$ را روی بخشی از یک کره که در $\frac{۱}{۸}$ اول فضا واقع است (محدود به صفحات $x>۰$ و $y>۰$ و $z>۰$) و به شعاع $r=۱$ به دست آورید.

۱) $\frac{۱}{۲}\hat{a}_x - \frac{۱}{۲}\hat{a}_y + \frac{\pi}{۱۶}\hat{a}_z$ ۲) $\frac{\pi^۲}{۳۲}\hat{a}_x + \frac{۱}{۲}\hat{a}_y + \frac{\pi}{۳۲}\hat{a}_z$ ۳) $\frac{\pi}{۱۶}\hat{a}_x + \frac{\pi}{۱۶}\hat{a}_y + \frac{\pi}{۱۶}\hat{a}_z$ ۴) $\frac{\pi}{۸}\hat{a}_x + \frac{\pi}{۸}\hat{a}_y + \frac{\pi}{۸}\hat{a}_z$

پاسخ: گزینه «۳» از آنجا که قرار است روی یک کره انتگرال بگیریم، بهتر است بردار $\vec{A}$ را در دستگاه کروی بیان کنیم:

$$\vec{A} = R\sin\theta\cos\phi\hat{a}_x + R\sin\theta\sin\phi\hat{a}_y + R\cos\theta\hat{a}_z$$

$$\int_v \vec{A}dv = \int_v R^۳\sin^۲\theta\cos\phi dRd\theta d\phi\hat{a}_x + \int_v R^۳\sin^۲\theta\sin\phi dRd\theta d\phi\hat{a}_y + \int_v R^۳\sin\theta\cos\theta dRd\theta d\phi\hat{a}_z$$

$$= \frac{r^۴}{۴}]_۰^۱ \times \{\frac{۱}{۲}[\theta - \frac{۱}{۲}\sin ۲\theta]_۰^{\frac{\pi}{۲}} \times \sin\phi]_۰^{\frac{\pi}{۲}}\hat{a}_x - \frac{۱}{۲}[\theta - \frac{۱}{۲}\sin ۲\theta]_۰^{\frac{\pi}{۲}} \times \cos\phi]_۰^{\frac{\pi}{۲}}\hat{a}_y + \frac{۱}{۲}\sin^۲\theta]_۰^{\frac{\pi}{۲}} \times \frac{\pi}{۲}\hat{a}_z\} = \frac{\pi}{۱۶}[\hat{a}_x + \hat{a}_y + \hat{a}_z]$$

مثال ۲۹: دیورژانس میدان برداری $\vec{T} = r\sin\varphi\hat{a}_r + r^۲z\hat{a}_\varphi + z\cos\varphi\hat{a}_z$ کدام است؟

۱) $\sin\theta + \cos\theta$ ۲) $۲\sin\varphi + \cos\varphi$ ۳) $\sin\varphi + \cos\varphi$ ۴) $\sin\varphi + ۲\cos\varphi$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به رابطه داده شده برای دیورژانس در مختصات استوانه‌ای خیلی راحت می‌توانیم دیورژانس T را به دست آوریم:

$$\vec{\nabla}.\vec{T} = \frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^۲\sin\varphi) + \frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(r^۲z) + \frac{\partial}{\partial z}(z\cos\varphi) \Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{T} = ۲\sin\varphi + \cos\varphi$$

مثال ۳۰: بردار $\vec{R} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$ و $|\vec{R}| = R$ است. حاصل $curl(R^n\vec{R})$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{r}\vec{R}$ ۳) $n\vec{R}$ ۴) $\frac{n}{r}\vec{R}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این‌که میدان برداری مورد نظر در راستای $\hat{a}_R$ بوده و فقط تابعی از R می‌باشد (آهنگ تغییرات آن نسبت به متغیرهای φ و θ صفر است)، کرل آن صفر خواهد بود. با محاسبه ساده کرل هم می‌توانستیم به این نتیجه برسیم.

مثال ۳۱: کرل بردار $\vec{p} = \sin\varphi\hat{a}_r + r^۲z\hat{a}_\varphi + z\cos\varphi\hat{a}_z$ در نقطه $(۱,\pi,۰)$ کدام است؟

۱) $\hat{a}_r + \hat{a}_z$ ۲) $\hat{a}_r - \hat{a}_z$ ۳) $-\hat{a}_r + \hat{a}_z$ ۴) $-\hat{a}_r - \hat{a}_z$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به بردار $\vec{p}$ که در مختصات استوانه‌ای داده شده است و با استفاده از رابطه بالا، کرل آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{p} = \frac{۱}{r}\begin{vmatrix} \hat{a}_r & r\hat{a}_\varphi & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin\varphi & r^۳z & z\cos\varphi \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{p} = -\frac{۱}{r}(z\sin\varphi + r^۳)\hat{a}_r + (۳rz - \frac{\cos\varphi}{r})\hat{a}_z$$

حال با قرار دادن نقطه $(۱,\pi,۰)$ در جواب داریم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{p}(۱,\pi,۰) = -\hat{a}_r + \hat{a}_z$$

مثال ۳۲: لاپلاسین $S = ۱۰R\sin^۲\theta\cos\varphi$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۰\cos\varphi}{R}(۱-۲\cos ۲\theta)$ ۲) $\frac{۱۰\cos\varphi}{R}(-۱+۲\cos ۲\theta)$ ۳) $-\frac{۱۰\cos\varphi}{R}(۱+۲\cos ۲\theta)$ ۴) $\frac{۱۰\cos\varphi}{R}(۱+۲\cos ۲\theta)$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به اسکالر S که در مختصات کروی داده شده است، می‌توانیم با استفاده از رابطه لاپلاسین در مختصات کروی که در بالا بیان کردیم لاپلاسین آن را به دست آوریم:

$$\nabla^۲S = \frac{۱}{R^۲}\frac{\partial}{\partial R}(۱۰R^۲\sin^۲\theta\cos\varphi) + \frac{۱}{R^۲\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(۱۰R\sin ۲\theta\sin\theta\cos\varphi) + \frac{۱}{R^۲\sin^۲\theta}\frac{\partial^۲}{\partial\varphi^۲}(۱۰R\sin^۲\theta\cos\varphi)$$

$$\nabla^۲S = \frac{۱۰\cos\varphi}{R}(۲\sin^۲\theta + ۲\cos ۲\theta + ۲\cos^۲\theta - ۱) = \frac{۱۰\cos\varphi}{R}(۱+۲\cos ۲\theta)$$

مثال ۳۳: کدام‌یک از بردارهای زیر را می‌توان برحسب کرل یک بردار نوشت؟

۱) $\vec{A}=\dfrac{\cos\varphi\hat{a}_r}{r}+z\hat{a}_\varphi$ ۲) $\vec{A}=r\hat{a}_r+\sin\varphi\hat{a}_\varphi$ ۳) $\vec{A}=\hat{a}_\theta$ ۴) $\vec{A}=\hat{a}_R$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برداری را که دیورژانس آن صفر باشد می‌توان برحسب کرل یک بردار دیگر نوشت. گزینه (۱) را بررسی می‌کنیم:

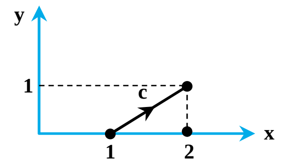
$$\vec{\nabla}.\vec{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\cos\varphi)+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0$$

گزینه‌های دیگر را خودتان بررسی کنید. می‌بینید که دیورژانس آن‌ها صفر نیست. حتماً دقت کرده‌اید که بردارهای گزینه‌های ۱و ۲ در مختصات استوانه‌ای و بردارهای گزینه‌های ۳و۴ در مختصات کروی نوشته شده‌اند!

مثال ۳۴: اگر C قطعه خط واصل از نقطه (۱,۰) به نقطه (۲,۱) و $\vec{F}(x,y,z)=(x^2-y)\hat{a}_x+(x-y^2)\hat{a}_y$ باشد، حاصل $\int_C \vec{F}.\vec{dl}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۲-

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» معادله قطعه خط C را می‌توان به صورت زیر نوشت:



$$\frac{y-0}{x-1}=\frac{1-0}{2-1}\Rightarrow y=x-1\Rightarrow dy=dx$$

$$\int_C\vec{F}.\vec{dl}=\int_C[(x^2-y)dx+(x-y^2)dy]=\int_C(x^2-y)dx+\int_C(x-y^2)dy$$

با توجه به شکل بالا، مقدار x از ۱ تا ۲ تغییر می‌کند. اگر مقدار y را بر حسب x بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\int\vec{F}.\vec{dl}=\int_1^2[x^2-(x-1)]dx+\int_1^2[x-(x-1)^2]dx=\int_1^2[x^2-x+1]dx+\int_1^2[3x-x^2-1]dx=3$$

مثال ۳۵: اگر C نیم‌دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع a واقع در صفحه xy و محدود به $0<\varphi<\pi$ و نیز $\vec{F}=2\sin\varphi\hat{a}_r$ باشد، حاصل $\int_C \vec{F}dl$ کدام است؟

۱) $\pi a\hat{a}_x$ ۲) $\pi a\hat{a}_y$ ۳) $-\pi a\hat{a}_x$ ۴) $-\pi a\hat{a}_y$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» از آنجایی که میدان $\vec{F}$ شامل بردار واحد $\hat{a}_r$ می‌باشد و این بردار در نقاط مختلف تغییر می‌کند، می‌دانیم که باید آن را بر حسب بردارهای واحد $\hat{a}_x$ و $\hat{a}_y$ که همواره ثابت هستند، بنویسیم. با توجه به تبدیل دستگاه استوانه‌ای به دستگاه دکارتی که قبلاً معرفی کردیم، داریم:

$$\hat{a}_r=\cos\varphi\,\hat{a}_x+\sin\varphi\,\hat{a}_y$$

روی بردار خم C مقدار شعاع ثابت است و فقط φ تغییر می‌کند. ضریب طولی جزء دیفرانسیلی dφ هم برابر $h_2=r=a$ می‌باشد و $dl=ad\varphi$ بوده، بنابراین می‌توانیم این‌گونه بنویسیم:

$$\int_C\vec{F}dl=\int_0^\pi(2\sin\varphi\hat{a}_r)(ad\varphi)=2a\int_0^\pi\sin\varphi[\cos\varphi\hat{a}_x+\sin\varphi\hat{a}_y]d\varphi=2a[\int_0^\pi\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\hat{a}_x+\int_0^\pi\sin^2\varphi d\varphi\hat{a}_y]=\pi a\hat{a}_y$$

مثال ۳۶: شار گذرنده از نیم‌کره $x^2+y^2+z^2=1\ ,\ z\geq 0$ توسط میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)=xz\hat{a}_x+yz\hat{a}_y+2\hat{a}_z$ در جهت zهای مثبت کدام است؟

۱) $\dfrac{5\pi}{2}$ ۲) $-\dfrac{5\pi}{2}$ ۳) $\dfrac{2}{3}$ ۴) $-\dfrac{2}{3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» در این مسأله معادله رویه نیم‌کره‌ای شکل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S:g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0 \qquad z\geq 0$$

با توجه به این‌که بردار عمود بر سطح رویه از رابطه $\hat{n}=\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g|}$ به دست می‌آید، خواهیم داشت:

$$\hat{n}=\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g|}=\frac{۲x\hat{a}_x+۲y\hat{a}_y+۲z\hat{a}_z}{|\vec{\nabla}g|}$$

بنابراین داریم:

$$\vec{F}.\hat{n}=(xz,yz,۲).\frac{(۲x,۲y,۲z)}{|\vec{\nabla}g|}=\frac{۲}{|\vec{\nabla}g|}(x^۲z+y^۲z+۲z)$$

در نتیجه مقدار شار گذرنده از رویه برابر است با:

$$\iint_S(\vec{F}.\hat{n})ds=\iint_S\frac{۲}{|\vec{\nabla}g|}(x^۲z+y^۲z+۲z)ds$$

انتگرال فوق یک انتگرال رویه‌ای است.پس با توجه به رابطه‌ای که در قسمت انتگرال سطحی توابع اسکالر معرفی کردیم، انتگرال سطحی به دست آمده در بالا را حل می‌کنیم:

$$\iint_S fds=\iint_D f\frac{|\vec{\nabla}g|}{|g_z|}dA$$

می‌دانیم که D ناحیه تصویر g روی صفحه xy است. خب، پس برای به دست آوردن آن در معادله رویه g که در بالا معرفی کردیم به جای z، مقدار صفر را قرار می‌دهیم:

$$|g_z|=|\frac{\partial g}{\partial z}|=|۲z| \quad\Rightarrow \iint_S(\vec{F}.\hat{n})ds=\iint_D\frac{۲}{|\vec{\nabla}g|}(x^۲z+y^۲z+۲z).\frac{|\vec{\nabla}g|}{۲z}dA=\iint_D(x^۲+y^۲+۲)dA$$

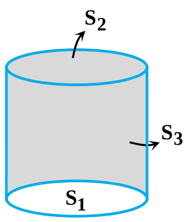
در این جا D ناحیه $x^۲+y^۲\le ۱$ است، پس بهتر است انتگرال فوق را در مختصات قطبی محاسبه کنیم:

$$\iint(\vec{F}.\hat{n})ds=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱(r^۲+۲)rdrd\varphi=\frac{۵\pi}{۲}$$

مثال ۳۷: شار گذرنده از سطح بسته S محدود به صفحات $z=۰$ و $z=L$ و سطح استوانه‌ای $r=a$ توسط میدان برداری $\vec{F}(r,\varphi,z)=r\cos\varphi\hat{a}_r+r\sin\varphi\hat{a}_\varphi+\hat{a}_z$ کدام است؟

۱) $۲\pi a^۲$ ۲) $\pi a^۲$ ۳) ۰ ۴) $-۲\pi a^۲$

پاسخ : گزینه «۳» می‌توانیم سطح بسته S را به صورت سه سطح مجزای زیر در نظر بگیریم:



$$S_۱: z=۰, ۰\le r\le a\Rightarrow d\vec{s}=rdrd\varphi(-\hat{a}_z)$$
$$S_۲: z=L, ۰\le r\le a\Rightarrow d\vec{s}=rdrd\varphi(+\hat{a}_z)$$
$$S_۳: r=a, ۰\le z\le L\Rightarrow d\vec{s}=ad\varphi dz(\hat{a}_r)$$

حال انتگرال سطحی روی سطح S را به سه انتگرال روی سطح‌های $S_۱, S_۲, S_۳$ می‌شکنیم که پاسخ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\oiint_S\vec{F}.d\vec{s}=\iint_{S_۱}\vec{F}.d\vec{s}+\iint_{S_۲}\vec{F}.d\vec{s}+\iint_{S_۳}\vec{F}.d\vec{s}=-\int_۰^a\int_۰^{۲\pi}rdrd\varphi+\int_۰^a\int_۰^{۲\pi}rdrd\varphi+\int_۰^{۲\pi}\int_۰^L a^۲\cos\varphi d\varphi dz=-\pi a^۲+\pi a^۲+۰=۰$$

مثال ۳۸: اگر S سطح نیم‌کره‌ای به شعاع a، هم‌مرکز با مبدأ مختصات و واقع در ناحیه $z>۰$ و $۰<\theta<\frac{\pi}{۲}$ و نیز $\vec{F}=R\cos\theta\hat{a}_\theta$ باشد، حاصل $\iint_S\vec{F}ds$ کدام است؟

۱) $\frac{۴\pi a^۳}{۳}\hat{a}_z$ ۲) $-\frac{۴\pi a^۳}{۳}\hat{a}_z$ ۳) $\frac{۲\pi a^۳}{۳}\hat{a}_z$ ۴) $-\frac{۲\pi a^۳}{۳}\hat{a}_z$

پاسخ : گزینه «۴» همان‌طور که در توضیحات قبل هم گفتیم، میدان برداری $\vec{F}$ شامل بردار واحد $\hat{a}_\theta$ می‌باشد. پس لازم است که این بردار را بر حسب بردارهای واحد $\hat{a}_x$ و $\hat{a}_y$ و $\hat{a}_z$ بنویسیم.

$$\hat{a}_\theta=\cos\theta\cos\varphi\hat{a}_x+\cos\theta\sin\varphi\hat{a}_y-\sin\theta\hat{a}_z$$

از طرفی بر روی سطح S مقدار شعاع ثابت بوده و θ و φ تغییر می‌کنند، بنابراین داریم:

$$ds=a^۲\sin\theta d\theta d\varphi$$

پس می‌توانیم به این صورت ادامه دهیم که:

$$\iint_S \vec{F}ds = \iint a\cos\theta[\cos\theta\cos\varphi\hat{a}_x + \cos\theta\sin\varphi\hat{a}_y - \sin\theta\hat{a}_z](a^2\sin\theta d\theta d\varphi)$$

$$= a^3[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta d\theta\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\hat{a}_x + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta d\theta\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\hat{a}_y - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\hat{a}_z]$$

با توجه به این که $\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi = 0$ و $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta d\theta = \frac{1}{3}$ در نتیجه می‌توان نوشت: $\iint_s \vec{F}ds = -\frac{2\pi a^3}{3}\hat{a}_z$

در الکترومغناطیس با انتگرال برداری به شکل $\iiint_V \vec{F}dv$ نیز سروکار داریم. به طور مثال، در محاسبه بردار مغناطیس‌شوندگی کل ناشی از حجم V با چگالی گشتاور دو قطبی مغناطیسی $\vec{F}$ از چنین انتگرال حجمی استفاده می‌کنیم. در این مورد هم یادتان باشد که اگر میدان $\vec{F}$ شامل بردارهـای واحد $\hat{a}_R$، $\hat{a}_\theta$ و یا $\hat{a}_\varphi$ باشد، با توجه به متغیر بودن آن‌ها، نمی‌توانیم این بردارها را از انتگرال بیرون آوریم. بلکه باید ابتدا آن‌ها را بر حسب بردارهای واحد $\hat{a}_x$ و $\hat{a}_y$ و $\hat{a}_z$ در دستگاه دکارتی بنویسیم و بعد از آن انتگرال را حل کنیم.

مثال ۳۹: **اگر V حجم $\frac{1}{8}$ کره‌ای به شعاع a هم مرکز با مبدأ مختصات و محـدود بـه $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ بـوده و $\vec{F} = \frac{1}{R^2}\hat{a}_R$ باشـد، حاصـل $\iiint_V \vec{F}dv$ کدام است؟**

۱) $\frac{\pi a}{4}(\hat{a}_x + \hat{a}_y)$ ۲) $\frac{\pi a}{4}(\hat{a}_x + \hat{a}_y + \hat{a}_z)$ ۳) $\frac{\pi a}{4}(\hat{a}_x - \hat{a}_y + \hat{a}_z)$ ۴) $\frac{\pi a}{4}(\hat{a}_x - \hat{a}_y)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» المان حجمی و بردار $\hat{a}_R$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{a}_R = \sin\theta\cos\varphi\hat{a}_x + \sin\theta\sin\varphi\hat{a}_y + \cos\theta\hat{a}_z \quad , \quad dv = R^2\sin\theta d\theta d\varphi dR$$

انتگرال حجمی در نهایت به‌صورت زیر ساده‌سازی می‌شود:

$$\iiint_V \vec{F}dv = \left[\int_0^a dR\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\right]\hat{a}_x + \left[\int_0^a dR\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\right]\hat{a}_y + \left[\int_0^a dR\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\right]\hat{a}_z$$

بنابراین با استفاده از روابط مقابل: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi = 1 \ , \ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{1}{2} \ , \ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta = \frac{\pi}{4}$

خواهیم داشت: $\iiint \vec{F}dV = \frac{\pi a}{4}(\hat{a}_x + \hat{a}_y + \hat{a}_z)$

مثال ۴۰: **مقدار انتگرال $\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ روی منحنی $C: x^2 + y^2 - x - y = 0$ از $(1,0)$ تا $(0,1)$ در جهت مثلثاتی کدام است؟**

۱) $-\frac{\pi}{2}$ ۲) 0 ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) 2π

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» میدان $\vec{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2}\hat{a}_x + \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{a}_y$ در کلیه نقاط به جز $(0,0)$ پایستار است. به عبارت دیگر می‌توان چنین نوشت:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\tan^{-1}\frac{y}{x})$$

بنابراین داریم:

$$\int_c \vec{F}.\vec{dl} = \int_{(1,0)}^{(0,1)}(\vec{\nabla}\phi).\vec{dl} = \phi(0,1) - \phi(1,0) = \tan^{-1}(\frac{1}{0}) - \tan^{-1}(\frac{0}{1}) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

مثال۴۱: در صورتی که $\vec{F} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$ و S سطح بیضی‌گون $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ و $\hat{n}$ بردار یکه قائم خارجی S باشد، مقدار $\oiint_S \vec{F}.\hat{n}ds$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}\pi abc$ ۲) $\frac{۳}{۲}\pi abc$ ۳) $۲\pi abc$ ۴) $۴\pi abc$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با استفاده از قضیه دیورژانس می‌توان چنین نوشت:

$$\oiint_S (\vec{F}.\hat{n})ds = \iiint_V (\vec{\nabla}.\vec{F})dv$$

از طرفی دیورژانس تابع برداری $\vec{F}$ به صورت مقابل می‌باشد:

$$\vec{\nabla}.\vec{F} = \vec{\nabla}.(x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z) = ۳$$

$$\oiint_S (\vec{F}.\hat{n})ds = \iiint ۳dv = ۳\,(\text{حجم بیضی گون}) = ۳(\frac{۴}{۳}\pi abc) = ۴\pi abc$$

مثال۴۲: مقدار انتگرال $\oiint_S (\vec{F}.\hat{n})ds$ که در آن S سطح بسته محدود به نیم‌کره $z=\sqrt{a^۲-x^۲-y^۲}$ از بالا و صفحه $z=۰$ از پایین است، $\hat{n}$ بردار قائم یکه خارجی S بوده و $\vec{F}(x,y,z)=(xz^۲, x^۲y-z^۳, ۲xy+y^۲z)$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi a^۵}{۳}$ ۲) $\frac{۴\pi a^۵}{۳}$ ۳) $\frac{۴\pi a^۵}{۵}$ ۴) $\frac{۲\pi a^۵}{۵}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» این مثال هم از قضیه‌ی دیورژانس حل می‌شود. طبق این قضیه داریم:

$$\oiint_S (\vec{F}.\hat{n})dS = \iiint_V (\vec{\nabla}.\vec{F})dv$$

با محاسبه دیورژانس بردار $\vec{F}$، رابطه‌ی زیر را به دست می‌آوریم:

$$\vec{\nabla}.\vec{F} = \frac{\partial(xz^۲)}{\partial x}+\frac{\partial(x^۲y-z^۳)}{\partial y}+\frac{\partial(۲xy+y^۲z)}{\partial z} = z^۲+x^۲+y^۲$$

با توجه به این‌که $R^۲=x^۲+y^۲+z^۲$ و حجم محصور شده توسط سطح بسته S هم کره‌ای شکل است، پس برای محاسبه انتگرال حجمی طرف دوم بهتر است از دستگاه مختصات کروی استفاده کنیم:

$$\iiint_V (x^۲+y^۲+z^۲)dxdydz = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{a} R^۲(R^۲\sin\theta dR d\theta d\varphi) = \frac{۲\pi a^۵}{۵}$$

مثال۴۳: با استفاده از قضیه استوکس مقدار انتگرال $I=\oint_C x^۲y^۳dx+ydy+zdz$ که در آن C دایره $\begin{cases}x^۲+y^۲=R^۲\\ z=۰\end{cases}$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $I=\pi R^۲$ ۲) $I=\frac{\pi R^۲}{۲}$ ۳) $I=\frac{\pi R^۳}{۲}$ ۴) $I=\frac{-\pi R^۶}{۸}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» روی خم C مقدار z برابر صفر است، پس با انتگرالی به شکل مقابل مواجه خواهیم بود:

$$I=\oint_C x^۲y^۳dx+ydy$$

حالا با در نظر گرفتن میدان برداری $\vec{F}=x^۲y^۳\hat{a}_x+y\hat{a}_y$ داریم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^۲y^۳ & y & ۰\end{vmatrix} = -۳x^۲y^۲\hat{a}_z$$

بردار جزء دیفرانسیلی سطح محصور شده توسط مرز C به صورت مقابل است:

$$d\vec{s} = dxdy\hat{a}_z$$

بنابراین با استفاده از قضیه استوکس می‌توان نوشت:

$$I=\oint_C \vec{F}.\vec{dl} = \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{F}).d\vec{s} = \iint_{x^۲+y^۲\le R^۲}(-۳x^۲y^۲)dxdy$$

با توجه به این‌که سطح S به شکل دایره می‌باشد، توصیه می‌کنیم که از دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده کنید.

پس با قرار دادن $dxdy = rdrd\varphi$, $x=r\cos\varphi$ و $y=r\sin\varphi$ در انتگرال بالا داریم:

$$I=\iint_S -۳(r\sin\varphi)^۲(r\cos\varphi)^۲\,rdrd\varphi$$

از آنجایی که S سطح یک دایره به شعاع R است، بنابراین $۰<r<R$ و $۰<\varphi<۲\pi$ می‌باشند. حالا با قرار دادن بازه‌های انتگرال داریم:

$$I=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{R} -۳r^۵\cos^۲\varphi\sin^۲\varphi drd\varphi = \frac{-\pi R^۶}{۸}$$

مثال ۴۴: بردار $\vec{A} = \tan\theta\hat{a}_R + \cos\phi\hat{a}_\theta + \frac{۱}{R^۳\sin\theta}\hat{a}_\phi$ می‌باشد، $\oint \vec{A}.d\vec{l}$ را روی مسیر محصورکننده ربع کره‌ای به شعاع a که توسط صفحات xy و xz و $y > ۰$ و $z > ۰$ محدود شده است را بیابید.

۱) πa ۲) $-\pi a$ ۳) $-\frac{\pi a}{۲}$ ۴) $\frac{\pi a}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. $\oint \vec{A}.d\vec{l} = \int \vec{\nabla}\times\vec{A}.d\vec{s}$ و $d\vec{s} = R^۲\sin\theta d\theta d\phi \hat{a}_r$ پس ما فقط به مؤلفه a_R نیاز داریم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{۱}{R^۲\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{a}_R & R\hat{a}_\theta & R\sin\theta\hat{a}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ \tan\theta & R\cos\phi & \frac{۱}{R^۲} \end{vmatrix} = \frac{-\sin\phi}{R\sin\theta}\hat{a}_R + \cdots$$

$$\int_s (\vec{\nabla}\times\vec{A}).d\vec{s} = \int \frac{-\sin\phi}{R\sin\theta}.R^۲\sin\theta d\theta d\phi = \int_{\phi=۰}^{\pi}\int_{\theta=۰}^{\frac{\pi}{۲}} -R\sin\phi d\theta d\phi = \pi a$$

مثال ۴۵: میدان برداری $\vec{F} = yz\hat{a}_x + zx\hat{a}_y + xy\hat{a}_z$:

۱) گرادیان یک اسکالر و کرل یک بردار می‌باشد.

۲) گرادیان یک اسکالر می‌باشد، اما کرل هیچ برداری نمی‌باشد.

۳) گرادیان هیچ اسکالری نمی‌باشد، اما کرل یک بردار می‌باشد.

۴) گرادیان هیچ اسکالر و کرل هیچ برداری نمی‌باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» دیورژانس و کرل $\vec{F}$ را حساب می‌کنیم:

$$\vec{\nabla}.\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(zx) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) = ۰ \Rightarrow (\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{A})$$ کرل یک بردار می‌باشد $\vec{F}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (x-x)\hat{a}_x - (y-y)\hat{a}_y + (z-z)\hat{a}_z = ۰ \Rightarrow (\vec{F} = \vec{\nabla}\Phi)$$ گرادیان یک اسکالر می‌باشد $\vec{F}$

به سادگی می‌توان دریافت که یک جواب برای Φ، $\Phi = xyz$ می‌باشد. برای یافتن $\vec{A}$، می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = yz \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = xz \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_z = \frac{۱}{۴}y^۲z + f(x,z)\ ;\ A_y = -\frac{۱}{۴}yz^۲ + g(x,y) \\ A_x = \frac{۱}{۲}z^۲x + h(x,y)\ ;\ A_z = -\frac{۱}{۴}zx^۲ + j(y,z) \\ A_y = \frac{۱}{۴}x^۲y + k(y,z)\ ;\ A_x = -\frac{۱}{۴}xy^۲ + l(x,y) \end{cases}$$

با در نظر گرفتن همه این مؤلفه‌ها با هم داریم:

$$\vec{A} = \frac{۱}{۴}\{x(z^۲ - y^۲)\hat{a}_x + y(x^۲ - z^۲)\hat{a}_y + z(y^۲ - x^۲)\hat{a}_z\}$$

یادتان باشد که پاسخ‌های Φ و $\vec{A}$ هیچ‌کدام منحصر به فرد نیستند و می‌توان جواب‌های دیگری برای آن‌ها یافت.

آزمون فصل اول

۱ـ معادله صفحه مماس بر سطح $x^{۲}+۴y^{۲}+۲z^{۲}=۱۰$ در نقطه (۱و۱و۲) کدام است؟

۱) $x+۲y-z=۵$ ۲) $x-۲y+z=۳$ ۳) $x+۲y+z=۵$ ۴) $x-۲y-z=۳$

۲ـ فاصله نقطه (۶و۱و۱) از سطح $x+y-z^{۲}=۰$ کدام است؟

۱) $۵\sqrt{۲}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۵\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۳ـ حاصل انتگرال حجمی $\int r\cos^{۲}\varphi dv$ که در آن V حجم محدود به سطوح $r=۲$ و $z=۳$ و $z=-۳$ می‌باشد، کدام است؟

۱) ۱۲π ۲) ۱۴π ۳) ۱۶π ۴) ۱۸π

۴ـ تابع عددی $v=(\sin\frac{\pi}{۲}x)(\sin\frac{\pi}{۲}y)e^{-z}$ داده شده است. اندازه حداکثر نرخ افزایش V در نقطه $p(۱,۲,۳)$ کدام است؟

۱) ۰/۲۱۲ ۲) ۰/۰۷۸۲ ۳) ۰/۰۱۵۴ ۴) ۰/۰۲۶

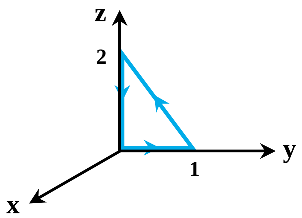
۵ـ تابع برداری $\vec{E}=y\hat{a}_x+x\hat{a}_y$ داده شده است. حاصل انتگرال خطی $\int \vec{E}.d\vec{L}$ از نقطه $p_1(۲,۱,-۱)$ تا نقطه $p_2(۸,۲,-۱)$ در امتداد سهمی $x=۲y^{۲}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۶ـ میدان برداری $\vec{F}=\hat{a}_x+۲\hat{a}_y+۳\hat{a}_z$ داده شده است. حاصل انتگرال $\int \vec{F}.d\vec{s}$ روی سطح مسطح مربعی شکل که رئوس آن در $(۰,۰,۲)$ و $(۲,۰,۲)$ و $(۲,۲,۰)$ و $(۰,۲,۰)$ هستند، کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۰ ۴) ۵

۷ـ حاصل انتگرال $\oint_c \vec{F}.d\vec{L}$ را که در آن $\vec{F}=۶\hat{x}+yz^{۲}\hat{y}+(۳y+z)\hat{z}$ بوده و c مسیر مثلثی نشان داده شده در شکل می‌باشد، کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۸ـ حاصل انتگرال $\oint_s \vec{D}.d\vec{s}$ را که در آن بردار $\vec{D}$ به صورت $\vec{D}=r^{۲}\sin\theta\hat{r}+۴r^{۲}\cos\theta\hat{\theta}+r\tan\theta\hat{\varphi}$ بوده و s سطح جانبی ناحیه $۰<r<R$ و $۰<\theta<\frac{\pi}{۶}$ و $۰<\varphi<۲\pi$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\pi R^{۴}}{۶}(۲\pi+۳\sqrt{۳})$ ۲) $\frac{\pi R^{۴}}{۱۲}(۲\pi+۹\sqrt{۳})$ ۳) $\frac{\pi R^{۴}}{۶}(۲\pi-۳\sqrt{۳})$ ۴) $\frac{\pi R^{۴}}{۱۲}(۲\pi-۳\sqrt{۳})$

۹ـ حاصل انتگرال $\int_v (r^{۲}+۲)\vec{\nabla}.(\frac{\hat{r}}{r^{۲}})dv$ که در آن v حجم کره‌ای به شعاع R واقع در مبدأ می‌باشد، کدام است؟

۱) ۳π ۲) ۶π ۳) ۴π ۴) ۸π

۱۰ـ حاصل ضرب خارجی بردارهای $\hat{a}_z$ و $\hat{a}_R$ کدام است؟

۱) $\sin\theta\hat{a}_\varphi$ ۲) $\cos\theta\hat{a}_\varphi$ ۳) $\sin\theta\hat{a}_x$ ۴) $\cos\theta\hat{a}_x$

۱۱ـ زاویه میان دو قطر مکعب کدام است؟

۱) $\cos^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{۳}})$ ۲) $\cos^{-۱}(\frac{۱}{۳})$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\cos^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{۴}})$

۱۲ـ اگر $\vec{A}=۲\hat{a}_x+۲\hat{a}_y+\hat{a}_z$ و $\vec{B}=\hat{a}_x-۳\hat{a}_y+۴\hat{a}_x$ باشد و رابطه بین **A** و **B** و **C** به صورت $[\vec{A}\times(\vec{B}\times C)]\times[\vec{B}[\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{A}+\vec{C}))]=۰$ باشد، $\vec{C}$ را به دست آورید.

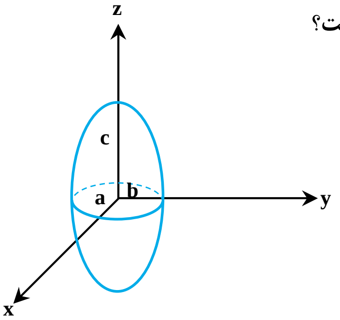
۱) $\vec{C}=\hat{a}_x-۲\hat{a}_y+۵\hat{a}_x$　　۲) $\vec{C}=-\hat{a}_x-۲\hat{a}_y+۵\hat{a}_z$　　۳) ۰　　۴) به ازای تمامی مقادیر $\vec{C}$ برقرار است.

۱۳ـ $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ سه برداری هستند که از مبدأ به نقاط **A** و **B** و **C** متصل شده‌اند. کدامیک از بردارهای زیر به صفحه‌ای که از نقاط **A** و **B** و **C** می‌گذرد عمود است؟

۱) $\vec{D}=(\vec{A}\times\vec{B})+(\vec{B}\times\vec{C})+(\vec{C}\times\vec{A})$　　۲) $\vec{D}=(\vec{A}\times\vec{B})+(\vec{B}\times\vec{C})+(\vec{A}\times\vec{C})$

۳) $\vec{D}=(\vec{B}\times\vec{A})+(\vec{B}\times\vec{C})+(\vec{A}\times\vec{C})$　　۴) $\vec{D}=(\vec{B}\times\vec{A})+(\vec{B}\times\vec{C})+(\vec{C}\times\vec{A})$

۱۴ـ انتگرال $\vec{S}=\int_S d\vec{s}$ مساحت برداری سطح S خوانده می‌شود. مساحت برداری بیضوی شکل زیر کدام است؟



۱) صفر

۲) $\pi abc\hat{z}$

۳) $۲\pi abc\hat{z}$

۴) $\frac{\pi}{۲}abc\hat{z}$

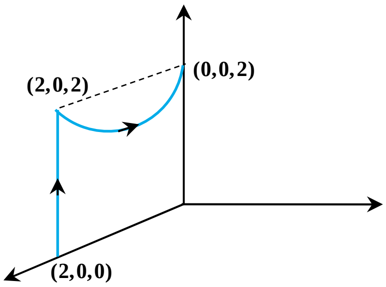
۱۵ـ حاصل انتگرال $\int_v \nabla(\frac{۱}{r})dV$ که در آن **V** حجم کره‌ای به شعاع **R** واقع در مبدأ می‌باشد، چقدر است؟

۱) $-۴\pi R\hat{a}_r$　　۲) $۴\pi R\hat{a}_r$　　۳) ۰　　۴) $۴\pi\hat{a}_r$

۱۶ـ انتگرال $\oint_S \vec{A}.d\vec{s}$ را برای بردار $\vec{A}=r\sin\theta\hat{a}_r+\cos\theta\sin\phi\hat{a}_\theta$ در مختصات کروی که سطح S به صورت نیم‌کره‌ای به شعاع ۲ و به مرکز مبدأ مختصات و محدود به صفحات **xy** می‌باشد، به دست آورید.

۱) صفر　　۲) $۲\pi^۲$　　۳) $۴\pi^۲$　　۴) $-۲\pi^۲$

۱۷ـ انتگرال $\int_M^N \vec{A}.d\vec{l}$ را در امتداد مسیر C به‌دست آورید. بردار $\vec{A}$ به‌صورت $\vec{A}=۳r\cos\phi\hat{a}_r+۴\sin\phi\hat{a}_\phi+۲\cos\phi\hat{a}_z$ است. مسیر C شامل یک پاره‌خط از نقطه $M(۲,۰,۰)$ به نقطه $P(۲,۰,۲)$ و یک نیم‌دایره مطابق شکل زیر است.



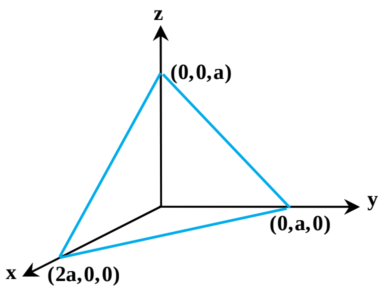
۱) -۲

۲) ۲

۳) -۱

۴) ۴

۱۸ـ انتگرال $\int \vec{A}.ds$ را برای سطح مثلثی شکل زیر به‌دست آورید. $(\vec{A}=۳\hat{y})$



۱) $۹a^۲$

۲) $۱۸a^۲$

۳) $\frac{۱}{\sqrt{۲۱}}a^۲$

۴) $\frac{۹}{\sqrt{۲۱}}a^۲$

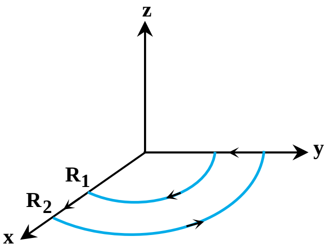
۱۹ـ در ناحیه محدود به سطوح $x=۰$، $y=۰$، $z=۰$ و $x+y-۲z=۲$ چگالی بار الکتریکی $\rho=۲y$ است. بار الکتریکی داخل این ناحیه را به‌دست آورید.

۱) $-\frac{۸}{۳}$　　۲) $+\frac{۸}{۳}$　　۳) $-\frac{۱۴}{۳}$　　۴) $\frac{۱۴}{۳}$

۲۰ـ در کره‌ای به شعاع R و مرکز مبدأ مختصات باری با چگالی حجمی $\rho = (R - z)$ توزیع شده است، کل بار داخل کره را به دست آورید.

۱) $\frac{۴}{۳}\pi R^{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۳}\pi R^{۴}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}\pi R^{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$

۲۱ـ مسیر نشان داده شده در شکل زیر از دو ربع دایره و دو پاره‌خط تشکیل شده است. حاصل $\int \vec{A}.d\vec{l}$ را که $\vec{A} = \frac{۱}{\rho}\hat{\phi}$ است، روی این مسیر به دست آورید.



۱) صفر

۲) $\frac{\pi}{۲}(R_{۲} - R_{۱})$

۳) $-\frac{\pi}{۲}(R_{۲}^{۲} - R_{۱}^{۲})$

۴) $\pi(R_{۲}^{۲} - R_{۱}^{۲})$

۲۲ـ کدام‌یک از روابط زیر برقرار نمی‌باشد؟

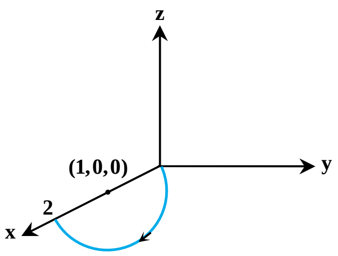
۱) $\int_S \vec{\nabla} f \times d\vec{s} = -\oint_C f d\vec{l}$ (f یک تابع اسکالر است)

۲) $\int_V (\vec{\nabla} f) dv = \oint_S f d\vec{s}$ (f یک تابع اسکالر است)

۳) $\int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) dv = \oint_S \vec{A} \times d\vec{s}$ ($\vec{A}$ یک تابع برداری است)

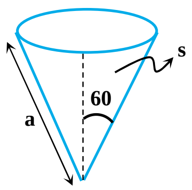
۴) $\nabla^{۲}(\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla}(\nabla^{۲} f)$ (f یک تابع اسکالر است)

۲۳ـ مسیر نشان داده شده در شکل زیر یک نیم‌دایره به شعاع ۱ و مرکز (۱,۰,۰) است. انتگرال میدان برداری $\vec{A}$ را بر روی این مسیر به دست آورید. $(\vec{A} = \rho^{۲} z\hat{\rho} + \sin\phi\cos\phi\hat{\phi} + \rho^{۲}\cos^{۲}\phi\hat{z})$



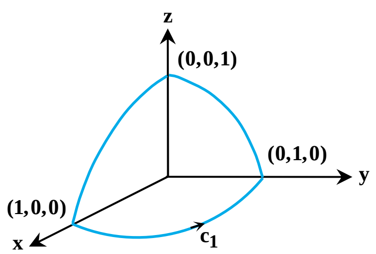
۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

۲۴ـ روی سطح مخروط شکل زیر، $\int_S \vec{A}.d\vec{s}$ را به دست آورید. $\vec{A} = r\cos\phi\hat{r} + r^{۲}\sin\theta\hat{\theta}$



۱) $\frac{۱}{۸}\pi a^{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۸}\pi a^{۴}$ ۳) $-\frac{۳}{۸}\pi a^{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}\pi a^{۴}$

۲۵ـ شکل زیر $\frac{۱}{۸}$ کره‌ای به شعاع ۱ را در فضای $z \geq ۰$ و $y \geq ۰$ و $x \geq ۰$ نشان می‌دهد. اگر $\vec{A} = \hat{r} + \hat{\theta} + \hat{\phi}$ باشد، حاصل $\int \vec{A}.d\vec{l}$ را روی مسیر $c_{۱} + c_{۲} + c_{۳}$ حساب کنید.

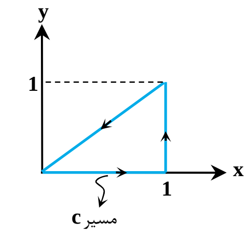


۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

۲۶ـ سه بردار $\vec{A} = ۲\hat{x} - \hat{z}$ و $\vec{B} = \hat{x} + ۵\hat{y}$ و $\vec{C} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$ دارای مبدأ مشترک $O(۰,۰,۰)$ هستند که مرکز مبدأ مختصات می‌باشند. مساحت مثلثی که رئوس آن نقاط انتهایی بردارهای A و B و C باشند را به دست آورید.

۱) $\frac{\sqrt{۹۸}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۹۸}}{۴}$ ۳) $\sqrt{۹۸}$ ۴) $\frac{\sqrt{۹۸}}{۸}$

۲۷ـ $\oint \vec{A}.d\vec{l}$ را برای $\vec{A} = (xy - x^2)\hat{x} - (2x^2 + y)\hat{y}$ و مسیر بسته C شکل زیر به دست آورید.

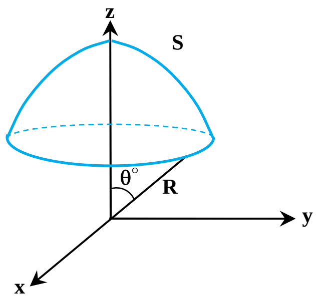


۱) صفر
۲) $\frac{10}{3}$
۳) $\frac{5}{3}$
۴) $-\frac{5}{3}$

۲۸ـ حاصل انتگرال $\int \vec{A}ds$ را روی کره‌ای به شعاع R و به مرکز مبدأ مختصات برای $\vec{A} = \frac{r}{r^2 + h^2}\hat{r}$ به دست آورید.

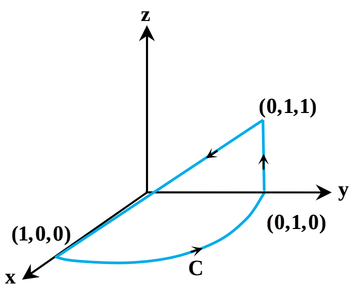
۱) صفر
۲) $\frac{R^3\pi}{R^2 + h^2}\hat{z}$
۳) $\frac{2\pi R^3}{R^2 + h^2}\hat{z}$
۴) $\frac{R^3}{R^2 + h^2}(\hat{x} + \hat{y} + \pi\hat{z})$

۲۹ـ سطح بسته S که در شکل زیر نشان داده شده است، بخشی از کره‌ای به شعاع R که برای آن $\theta \le \theta_0$ و یک دایره به شعاع $R\sin\theta_0$ است، برای میدان برداری $\vec{A} = \frac{k_1}{r}\hat{\phi} - \frac{k_2}{r\sin\theta}\hat{\theta}$ حاصل $\oint \vec{A}.d\vec{s}$ را به دست آورید.



۱) 2π
۲) 4π
۳) -4π
۴) π

۳۰ـ حاصل انتگرال $\oint_C \vec{A}.d\vec{l}$ را برای میدان برداری $\vec{A} = (r\cos^2\theta)\hat{r} - (r\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} - 3r\hat{\phi}$ روی مسیر شکل زیر پیدا کنید.



۱) صفر
۲) 2π
۳) π
۴) $\frac{3\pi}{2}$

فصل دوم

«میدان الکتریکی ساکن در فضای آزاد یا خلأ»

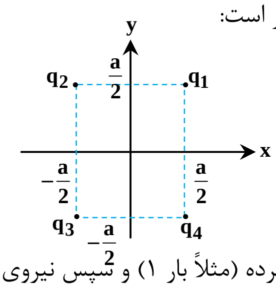
تست‌های تألیفی فصل دوم

مثال۱: بر روی چهار گوش مربعی به ضلع a، ۴ واحد بار الکتریکی قرار گرفته‌اند. اندازه نیرویی که هر بار از طرف سایر بارها احساس می‌کند برابر چند نیوتون است؟

۱) $(\sqrt{2}+\frac{1}{2})\frac{k}{a^2}$ ۲) $(\sqrt{2}+1)\frac{k}{2a^2}$ ۳) $(2+\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{k}{a^2}$ ۴) $(\sqrt{2}+1)\frac{k}{a^2}$

پاسخ: گزینه «۱» الگوریتم حل در این مرحله به صورت زیر است:

۱ـ ابتدا شکل را رسم می‌کنیم.



۲ـ باری که قرار است نیروی وارد بر آن را به دست آوریم تعیین کرده (مثلاً بار ۱) و سپس نیروی بین آن بار و بارهای دیگر را محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{F}_{21}=k\frac{q_1q_2}{R^2}\hat{a}_R=k\frac{1\times1}{a^2}\hat{a}_x \quad , \quad \vec{F}_{31}=k\frac{q_1q_3}{R^2}\hat{a}_R=k\frac{1\times1}{2a^2}(\frac{\hat{a}_x+\hat{a}_y}{\sqrt{2}}) \quad , \quad \vec{F}_{41}=k\frac{q_1q_4}{R^2}\hat{a}_R=k\frac{1\times1}{a^2}\hat{a}_y$$

۳ـ نیروها را با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$\vec{F}=\vec{F}_{21}+\vec{F}_{31}+\vec{F}_{41}=k[\frac{\hat{a}_x}{a^2}+\frac{\hat{a}_x+\hat{a}_y}{2\sqrt{2}a^2}+\frac{\hat{a}_y}{a^2}]=\frac{k}{a^2}[(1+\frac{1}{2\sqrt{2}})\hat{a}_x+(1+\frac{1}{2\sqrt{2}})\hat{a}_y]$$

$$|\vec{F}|=\frac{k}{a^2}\sqrt{(1+\frac{1}{2\sqrt{2}})^2+(1+\frac{1}{2\sqrt{2}})^2}=\frac{k}{a^2}\sqrt{2(1+\frac{1}{2\sqrt{2}})^2}=\frac{k}{a^2}\sqrt{(\sqrt{2}+\frac{1}{2})^2}=\frac{k}{a^2}(\sqrt{2}+\frac{1}{2})$$

مثال۲: بار Q را به دو قسمت q و $Q-q$ تقسیم می‌کنیم. اگر این دو قسمت را به فاصله معینی قرار دهیم اندازه بار q چقدر باشد تا این دو بار حداکثر نیروی دافعه را بر یکدیگر وارد کنند؟

۱) $\frac{2Q}{3}$ ۲) $\frac{Q}{2}$ ۳) $\frac{Q}{3}$ ۴) $\frac{Q}{4}$

پاسخ: گزینه «۲» برای به دست آوردن بار q، باید از اندازه نیروی دافعه $\vec{F}$ نسبت به q مشتق بگیریم و آن را برابر صفر قرار دهیم:

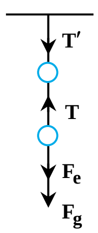
$$\vec{F}=k\frac{q(Q-q)}{R^2}\hat{a}_R \Rightarrow |\vec{F}|=k\frac{qQ-q^2}{R^2}$$

$$\frac{d|\vec{F}|}{dq}=\frac{k}{R^2}(Q-2q)=0 \Rightarrow q=\frac{Q}{2}$$

مثال۳: دو گلوله کوچک، هر یک دارای وزن ۰/۱ گرم که می‌توانند به طور عمودی حرکت نمایند، توسط نخ نایلونی آویزان شده‌اند. گلوله پایینی در سطح ثابتی قرار گرفته است. به دست آورید فاصله بین این دو گلوله را اگر هر یک از گلوله‌ها دارای بار مثبت $10^{-8}\,c$ باشد؟

۱) ۰/۸۲cm ۲) ۱/۶۲cm ۳) ۲/۴۴cm ۴) ۳/۰۳cm

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا شکل را رسم می‌کنیم و نیروهای وارد بر گلوله پایینی را تعیین می‌کنیم.



مانند آونگ، گلوله پایینی ۳ نوع نیرو را احساس می‌کند:

۱) نیروی الکتریکی $\vec{F}_e$: چون بار گلوله‌ها همنام است پس یکدیگر را دفع می‌کنند.

۲) نیروی گرانشی $\vec{F}_g$: نیروی گرانشی زمین همیشه عمود بر زمین و رو به پایین است.

۳) نیروی کشش نخ $\vec{T}$: نخ به گلوله بالایی نیروی $\vec{T}'$ و به گلوله پایینی نیروی $\vec{T}$ را وارد می‌کند.

چون صورت مسأله گفته که می‌خواهیم گلوله پایینی در سطح ثابتی قرار بگیرد، پس باید در حال تعادل باشد. یعنی برآیند نیروهای وارد بر آن صفر شود.

$\vec{T}=\vec{T}'$

اما چون $\vec{F}_e$ و $\vec{F}_g$ هم‌جهت‌اند، نیروی کل $\vec{F}$ برابر صفر نمی‌شود.

$$\vec{F}=\vec{T}-\vec{T}'-\vec{F}_e-\vec{F}_g=-\vec{F}_e-mg$$

ولی اگر گلوله‌ها ناهمنام باشند (یکی دارای بار مثبت و دیگری دارای بار منفی)، آنگاه نیروی الکتریکی از نوع جاذبه و رو به بالا خواهد بود.

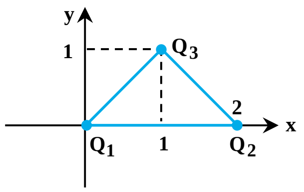
$$\vec{F}=\vec{T}-\vec{T}'+\vec{F}_e-\vec{F}_g=\vec{F}_e-mg \;\Rightarrow \vec{F}=۰ \;\Rightarrow \left|\vec{F}_e\right|=mg$$

برای آنکه گلوله پایینی در حال تعادل باشد باید:

$$\left|\vec{F}_e\right|=k\frac{Q_۱Q_۲}{R^۲}=mg \Rightarrow R=(k\frac{Q_۱Q_۲}{mg})^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow R=(۹\times ۱۰^۹\,\frac{۱۰^{-۸}\times ۱۰^{-۸}}{۰/۱\times ۱۰^{-۳}\times ۹/۸})^{\frac{۱}{۲}}=۰/۰۳۰۳(m)=۳/۰۳(cm)$$

این سؤال برای آن بیان شد که به شما بگوییم ممکن است برخی از تست‌ها به علت اشکال تایپی اشتباه به نظر بیایند (حق با شماست). ولی با کمی دقت و هوش خودمان می‌توانیم اشکال را پیدا کرده و آن را حل کنیم.

مثال ۴: سه بار نقطه‌ای $Q_۱$، $Q_۲$ و $Q_۳$ در رأس‌های یک مثلث مانند شکل زیر قرار گرفته‌اند. برآیند نیروی وارد بر بار $Q_۱$ کدام است؟



$Q_۱=۱C$

$Q_۲=-۴C$

$Q_۳=۲\sqrt{۲}\,C$

۱) $-\frac{۱}{۲\pi\varepsilon_۰}\hat{a}_y$ ۲) $-\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\hat{a}_y$

۳) $-\frac{۲\hat{a}_x+\hat{a}_y}{۲\pi\varepsilon_۰}$ ۴) $-\frac{۲\hat{a}_x+\hat{a}_y}{۴\pi\varepsilon_۰}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا نیرویی که بار $Q_۲$ بر $Q_۱$ وارد می‌کند را به دست می‌آوریم. از قانون کولن داریم:

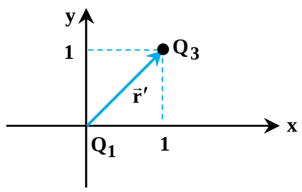
$$\vec{F}_{۲۱}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{Q_۱Q_۲}{|\vec{r}-\vec{r}'|^۲}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}'=۲\hat{a}_x\\ \vec{r}=۰\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{r}-\vec{r}'=-۲\hat{a}_x \Rightarrow |\vec{r}-\vec{r}'|=۲$$

به شکل نگاه کنید، بار $Q_۱$ در مبدأ مختصات قرار دارد، پس بردار مکان آن $(\vec{r})$ صفر می‌باشد. با جایگذاری $\vec{r}-\vec{r}'$ در رابطه بالا داریم:

$$\vec{F}_{۲۱}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{Q_۱Q_۲}{۲^۲}\frac{-۲\hat{a}_x}{۲}=-\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{Q_۱Q_۲}{۴}\hat{a}_x$$

حال نیرویی که بار $Q_۳$ بر بار $Q_۱$ وارد می‌کند را به دست می‌آوریم. با استفاده از قانون کولن و با توجه به شکل زیر داریم:



$$\vec{F}_{۳۱}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{Q_۱Q_۳}{|\vec{r}-\vec{r}'|^۲}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}'=\hat{a}_x+\hat{a}_y\\ \vec{r}=۰\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{r}-\vec{r}'=-(\hat{a}_x+\hat{a}_y) \Rightarrow |\vec{r}-\vec{r}'|=\sqrt{۲}$$

با جایگذاری $\vec{r}-\vec{r}'$ در رابطه $\vec{F}_{۳۱}$ داریم:

$$\vec{F}_{۳۱}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{Q_۱Q_۳}{(\sqrt{۲})^۲}\frac{-\hat{a}_x-\hat{a}_y}{\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{Q_۱Q_۳}{۲\sqrt{۲}}(-\hat{a}_x-\hat{a}_y)$$

حالا با جمع $\vec{F}_{۲۱}$ و $\vec{F}_{۳۱}$ برآیند نیروی وارد بر $Q_۱$ به دست می‌آید:

$$\vec{F}=\vec{F}_{۲۱}+\vec{F}_{۳۱}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}[-\frac{Q_۱Q_۲}{۴}\hat{a}_x-\frac{Q_۱Q_۳}{۲\sqrt{۲}}(\hat{a}_x+\hat{a}_y)] \Rightarrow \vec{F}=\frac{Q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰}[-(\frac{Q_۲}{۴}+\frac{Q_۳}{۲\sqrt{۲}})\hat{a}_x-\frac{Q_۳}{۲\sqrt{۲}}\hat{a}_y]$$

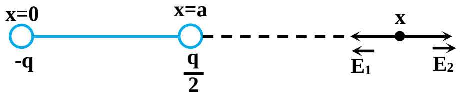
در این قسمت با جایگذاری مقادیر $Q_۱$، $Q_۲$ و $Q_۳$ در $\vec{F}$، برآیند نیروی خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\vec{F}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}[-(-۱+۱)\hat{a}_x-\hat{a}_y]=-\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\hat{a}_y$$

مثال۵: دو بار نقطه‌ای $-q$ و $+\frac{۱}{۲}q$ به ترتیب در مبدأ مختصات و در نقطه $(a,۰,۰)$ قرار گرفته‌اند. در چه نقطه‌ای روی محور x میدان الکتریکی صفر می‌شود؟

۱) $x=\frac{a}{۲}$ ۲) $x=(۲-\sqrt{۲})a$ ۳) $x=۲a$ ۴) $x=(۲+\sqrt{۲})a$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به صورت سوال می‌دانیم که بارها غیرهمنام هستند، پس میدان الکتریکی در نقطه‌ای خارج از فاصله بین دو بار صفر می‌شود. از طرفی اندازه بار مثبت کمتر از اندازه بار منفی است، در نتیجه نقطه موردنظر نزدیک به بار مثبت می‌باشد.



$$\left.\begin{aligned}\vec{E}_۱&=\frac{-q}{۴\pi\varepsilon_۰ x^۲}(\hat{a}_x)\\ \vec{E}_۲&=\frac{\frac{q}{۲}}{۴\pi\varepsilon_۰(x-a)^۲}(\hat{a}_x)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \vec{E}_۲=-\vec{E}_۱\quad\Rightarrow x=\begin{cases}(۲-\sqrt{۲})a & \text{غیرقابل قبول}\\ (۲+\sqrt{۲})a\end{cases}$$

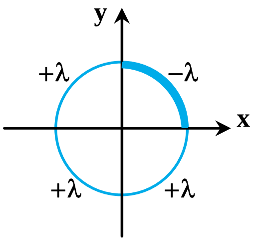
مثال۶: یک توزیع بار خطی با چگالی بار $\rho=\begin{cases}+\lambda & ۰<z<l\\ -\lambda & -l<z<۰\end{cases}$ که در آن l یک عدد ثابت است را در نظر می‌گیریم. اندازه گشتاور دوقطبی (Dipole moment) این توزیع بار برابر است با:

۱) $\lambda l^۲$ ۲) $۲\lambda l^۲$ ۳) $\frac{\lambda l^۲}{۲}$ ۴) $۴\lambda l^۲$

پاسخ: گزینه «۱» طبق روابط ارائه شده داریم:

$$\vec{P}=\int dq\vec{r}'\xrightarrow[\vec{r}'=z'\hat{a}_z]{dq=\rho_l dl'}\vec{P}=\int_{-l}^{l}(\rho dz')(z'\hat{a}_z)=\int_{-l}^{۰}(-\lambda dz')(z'\hat{a}_z)+\int_{۰}^{l}(\lambda dz')=\lambda l^۲$$

مثال۷: مطابق شکل دو میله پلاستیکی نازک با چگالی بار خطی λ و $-\lambda$ در صفحه xy، دایره‌ای به شعاع R تشکیل می‌دهند. (توزیع بار $-\lambda$ فقط در ربع اول قرار دارد) اندازه میدان الکتریکی در مرکز دایره چقدر است؟



۱) $\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰ R}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰ R}$

۳) $\frac{\lambda}{\sqrt{۲}\pi\varepsilon_۰ R}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۳}\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰ R}$

پاسخ: گزینه «۳» به علت تقارن، میدان‌های الکتریکی ناشی از بارهای واقع در ربع دوّم و چهارم یکدیگر را خنثی می‌کنند. از طرفی میدان‌های الکتریکی ناشی از بارهای واقع در ربع اول و سوم هم جهت و هم‌اندازه هستند. بنابراین کافی است میدان ناشی از یکی از آن‌ها (مثلاً بار واقع در ربع اول) را محاسبه کرده و نتیجه را در عدد ۲ ضرب کنیم.

برای محاسبه $\vec{E}$ با توجه به اینکه شکل دایره‌ای است مانند مثال قبل عمل می‌کنیم و $\vec{E}$ به صورت زیر را برای توزیع بار $-\lambda$ در ربع اول به دست می‌آوریم $۰<\varphi<\frac{\pi}{۲}$:

$$\vec{E}=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{dq}{۴\pi\varepsilon_۰ R^۲}\hat{a}_r$$

با توجه به اینکه بار به طور یکنواخت روی میله قرار گرفته است، داریم:

$$\lambda=\frac{dq}{dl}\Rightarrow dq=\lambda dl\Rightarrow dq=\lambda Rd\varphi$$

حال با قرار دادن dq در رابطه بالا و تبدیل $\hat{a}_r$ به مختصات دکارتی داریم:

$$\vec{E}=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\lambda d\varphi}{۴\pi\varepsilon_۰ R}(\cos\varphi\hat{i}+\sin\varphi\hat{j})=\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰ R}(\hat{i}+\hat{j})$$

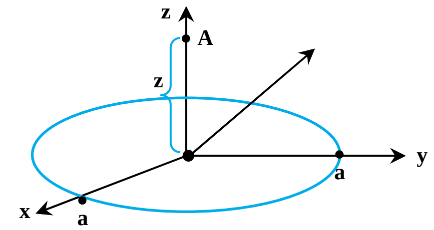
برای به دست آوردن کل میدان، مقدار $\vec{E}$ را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\vec{E}_{\text{کل}}=۲\vec{E}=\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰ R}(\hat{i}+\hat{j})$$

که اندازه آن برابر است با:

$$|\vec{E}_{\text{کل}}|=\frac{\lambda\sqrt{۲}}{۲\pi\varepsilon_۰ R}=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_۰\sqrt{۲}R}$$

مثال۸: **یک صفحه دایروی مانند شکل زیر با چگالی بار الکتریکی یکنواخت ρ_s در صفحه $z=0$ قرار گرفته است. شدت میدان الکتریکی در نقطه A روی محور z چقدر می‌باشد؟**



۱) $\hat{a}_z \dfrac{\rho_s z}{2\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{\sqrt{z}}-\dfrac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\right]$

۲) $\hat{a}_z \dfrac{\rho_s z}{4\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{\sqrt{z}}-\dfrac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\right]$

۳) $\hat{a}_z \dfrac{\rho_s z}{2\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{|z|}-\dfrac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\right]$

۴) $\hat{a}_z \dfrac{\rho_s z}{4\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{|z|}-\dfrac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\right]$

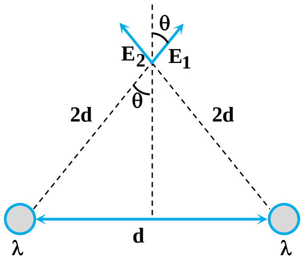
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» قبلاً این مثال را به‌طور مفصل و با روش تشریحی حل کردیم. در اینجا قصد داریم با یک روش سریع‌تر و از طریق بررسی گزینه‌ها آن را حل کنیم.

اگر a را به سمت بی‌نهایت میل دهیم، صفحه تبدیل به یک صفحه نامحدود می‌شود و همانطور که قبلاً اشاره شد، میدان یک صفحه نامحدود برابر با $\vec{E}=\dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{a}_n$ می‌باشد. بنابراین با میل دادن a به سمت بی‌نهایت فقط گزینه ۳ می‌تواند جواب درست باشد.

مثال۹: **دو سیم بسیار بلند با چگالی بارهای خطی λ، به فاصله d از یکدیگر قرار دارند. اندازه میدان الکتریکی در نقطه‌ای که فاصله آن از هر دو سیم 2d است، کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌باشد؟**

۱) $\dfrac{\sqrt{15}\lambda}{8\pi\varepsilon_0 d}$ ۲) $\dfrac{\sqrt{17}\lambda}{8\pi\varepsilon_0 d}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{15}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}$ ۴) $\dfrac{\sqrt{17}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اندازه میدان الکتریکی در فاصله r از خط بار نامتناهی با چگالی λ برابر $|\vec{E}|=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ می‌باشد.



$$\left|\vec{E}_1\right|=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(2d)} \quad \text{و} \quad \left|\vec{E}_2\right|=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(2d)}$$

برآیند شدت میدان‌های الکتریکی $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$\left|\vec{E}_T\right|=2\left|\vec{E}_1\right|\cos\theta=\frac{\lambda}{2\varepsilon_0 d}\cos\theta=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\left(\frac{\sqrt{(2d)^2-(\frac{d}{2})^2}}{2d}\right)=\frac{\sqrt{15}\lambda}{8\pi\varepsilon_0 d}$$

مثال۱۰: **میدان الکتریکی در نقاط روی سطح کره‌ای به شعاع R به شکل $\vec{E}=E_0\sin\phi(\hat{i}+\hat{j})$ است. مقدار بار الکتریکی داخل این کره کدام است؟**
(ϕ مختصه دستگاه کروی و E_0 مقدار ثابتی است.)

۱) صفر ۲) $\dfrac{\pi^2}{2}\varepsilon_0 E_0 R^2$ ۳) $\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E_0 R^2$ ۴) $4\pi\varepsilon_0 E_0 R^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از قانون گاوس استفاده می‌کنیم:

$$Q=\varepsilon_0\oint\vec{E}.d\vec{s}=\varepsilon_0\oint\left[E_0\sin\phi\left(\hat{a}_x+\hat{a}_y\right)\right].\left[R^2\sin\theta\ d\theta\ d\phi\ \hat{a}_R\right]$$

$$Q=\varepsilon_0 E_0 R^2\oint\sin\phi\sin\theta[\sin\theta\ \cos\phi+\sin\theta\ \sin\phi]d\theta\ d\phi$$

$$Q=\varepsilon_0 E_0 R^2\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}(\sin\phi\ \cos\phi\ \sin^2\theta+\sin^2\phi\sin^2\theta)d\phi d\theta$$

با جداسازی انتگرال‌ها داریم:

$$Q=\varepsilon_0 E_0 R^2\left(\left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta+\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{1-\cos2\phi}{2}d\phi\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta\right)$$

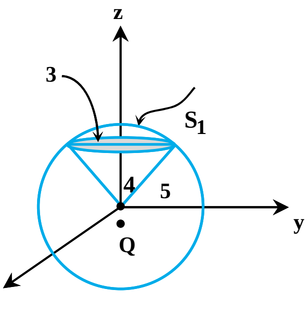
$$Q=\varepsilon_0 E_0 R^2\left(0+\left[\frac{\phi-\frac{1}{2}\sin2\phi}{2}\right]_{\phi=0}^{2\pi}\left[\frac{\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\pi}\right)=\varepsilon_0 E_0 R^2\left(\pi\times\frac{\pi}{2}\right)=\varepsilon_0 E_0 R^2\frac{\pi^2}{2}$$

مثال۱۱: بار نقطه‌ای Q در بالای یک سطح دایره‌ای به شعاع ۳ متر واقع است. فاصله بار مذکور از مرکز دایره ۴ متر است. مطلوب است محاسبه شار الکتریکی گذرنده از سطح دایره‌ای:

۱) $\frac{Q}{5}$ ۲) $\frac{Q}{10}$ ۳) $\frac{Q}{20}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}\,Q}{20}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» مسأله ساده‌ای است. ابتدا بیایید با هم شکل مسأله را رسم کنیم.

به این صورت که بار نقطه‌ای Q را در مرکز یک کره قرار می‌دهیم و شار گذرنده از سطح دایره که همان شار گذرنده از قسمتی از کره است را محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم کل شار عبوری از سطح کره برابر با Q است. بنابراین با توجه به تقارن موجود، می‌توان از روی نسبت مساحت S_1 به مساحت کره، شار موردنظر سؤال را محاسبه نمود.



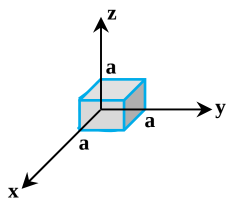
$$R = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \quad \text{شعاع کره}$$

$$\Phi = Q\frac{S_1}{S_{\text{کره}}} = \frac{Q\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\tan^{-1}\frac{3}{4}} R^2\sin\theta\; d\theta\; d\phi}{4\pi R^2} = \frac{Q\int_{\theta=0}^{\tan^{-1}\frac{3}{4}}\sin\theta\; d\theta\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi}{4\pi}$$

$$\Phi = \frac{Q}{2}\left[-\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\tan^{-1}\frac{3}{4}} = \frac{Q}{2}\left[1-\cos\left(\tan^{-1}\left(\tfrac{3}{4}\right)\right)\right] = \frac{Q}{2}\left[1-0/8\right] = \frac{Q}{10}$$

در نتیجه گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مثال۱۲: میدان الکتریکی $\vec{E}(x,y,z) = E_0\left[\sqrt{\frac{x}{a}}\,\hat{i} + \sqrt{\frac{y}{a}}\,\hat{j} + \sqrt{\frac{z}{a}}\,\hat{k}\right]$ در فضا وجود دارد. در حضور این میدان الکتریکی چه مقدار بار الکتریکی درون مکعب شکل روبه‌رو قرار می‌گیرد؟



۱) صفر   ۲) $6\varepsilon_0 E_0 a^2$

۳) $\frac{2}{3}\varepsilon_0 E_0 a^2$ ۴) $3\varepsilon_0 E_0 a^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به شکل انتگرالی قانون گاوس خواهیم داشت:

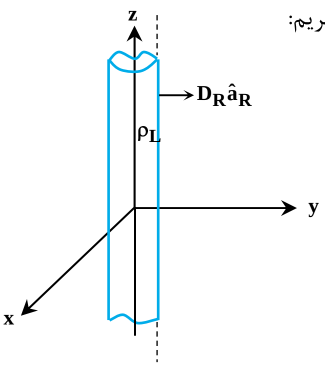
$$Q_{in} = \varepsilon_0\oint \vec{E}.d\vec{s} = \varepsilon_0\Big[\int_{z=0\ \text{سطح}}\vec{E}.d\vec{s} + \int_{z=a\ \text{سطح}}\vec{E}.d\vec{s} + \int_{x=0\ \text{سطح}}\vec{E}.d\vec{s} + \int_{x=a\ \text{سطح}}\vec{E}.d\vec{s} + \int_{y=0\ \text{سطح}}\vec{E}.d\vec{s} + \int_{y=a\ \text{سطح}}\vec{E}.d\vec{s}\Big]$$

$$= \varepsilon_0\left[0+a^2+0+a^2+0+a^2\right]E_0 = 3\varepsilon_0 E_0 a^2$$

مثال۱۳: یک بار خطی با $\rho_l = 15\ \frac{C}{m}$ در امتداد محور z ها در فضای آزاد قرار گرفته است. مؤلفه‌ای از $\vec{D}$ که در راستای بردار $-\hat{a}_x + 2\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$ در نقطه $(0,2,0)$ است را به دست آورید.

۱) $\frac{2/5}{\pi}\ \frac{C}{m}$ ۲) $\frac{5}{\pi}\ \frac{C}{m^2}$ ۳) $\frac{7/5}{\pi}\ \frac{C}{m^2}$ ۴) $\frac{10}{\pi}\ \frac{C}{m^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» استوانه‌ای با شعاع R و طول واحد در راستای محور z حول توزیع بارخطی در نظر می‌گیریم:



به دلیل تقارن چگالی بارالکتریکی نسبت به محور z، چگالی شار الکتریکی $(\vec{D})$ فقط در جهت $\hat{a}_r$ مؤلفه دارد. همچنین مقدار آن روی سطح استوانه ثابت است، پس می‌توانیم آن را از انتگرال بیرون آوریم.

$$\vec{D} = D_r\hat{a}_r$$

$$\oint_{\text{سطح بسته استوانه}} \vec{D}.d\vec{s} = \int \rho_l dL \Rightarrow \int D_r\hat{a}_r.ds\hat{a}_r = \rho_l(L)$$

$$\Rightarrow D_r(2\pi r)L = \rho_l L \Rightarrow D_r = \frac{\rho_L}{2\pi r} \Rightarrow \vec{D} = \frac{\rho_L}{2\pi r}\hat{a}_r$$

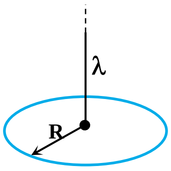
لازم به ذکر است در انتگرال‌گیری روی سطح استوانه، انتگرال روی دو قاعده استوانه برابر با صفر می‌شود، زیرا $\vec{D}$ بر بردارهای عمود بر قاعده‌های استوانه، عمود است: $\hat{a}_r \cdot (\pm \hat{a}_z) = ۰$

چون مقدار مؤلفه را در نقطه $(۰,۲,۰)$ خواسته شود، بنابراین می‌توان نوشت: $r = y = ۲,\ \hat{a}_r = \hat{a}_y \to \vec{D} = \frac{۱۵}{۴\pi}\hat{a}_y$

و حالا مؤلفه $\vec{D}$ در راستای $(-\hat{a}_x + ۲\hat{a}_y - ۲\hat{a}_z)$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{D}\cdot\frac{(-\hat{a}_x + ۲\hat{a}_y - ۲\hat{a}_z)}{\sqrt{۱+۴+۴}} = \frac{۵}{۴\pi}\hat{a}_y.(-\hat{a}_x + ۲\hat{a}_y - ۲\hat{a}z) = \frac{۵}{۲\pi} = \frac{۲/۵}{\pi}\left(\frac{C}{m^۲}\right)$$

مثال ۱۴: یک خط بار خیلی بلند در امتداد محور دایره‌ای به شعاع R قرار دارد به طوری که یک انتهای آن در مرکز دایره واقع شده است. خط بار دارای باری با چگالی یکنواخت λ است. شار الکتریکی عبوری از سطح مقطع دایره در کدام‌یک از گزینه‌های زیر به درستی داده شده است؟



۱) $\frac{\lambda R}{۴}$

۲) $\frac{\lambda R}{۲}$

۳) λR

۴) $۲\lambda R$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» همانطور که قبلاً بیان کردیم، میدان الکتریکی در انتهای پایین خط باردار و در فاصله r از آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰ r}(\hat{a}_r - \hat{a}_z)$$

برای به دست آوردن شار از سطح مقطع دایره از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم: $\psi = \int_s \vec{D}.d\vec{s}$

$\vec{D}$ را می‌توانیم از میدان $\vec{E}$ به دست آوریم: $\vec{D} = \varepsilon_۰\vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \frac{\lambda}{۴\pi r}(\hat{a}_r - \hat{a}_z)$

با توجه به اینکه S سطح مقطع یک دایره می‌باشد، از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم که بردار عمود بر سطح دایره در جهت $-\hat{a}_z$ می‌باشد. بنابراین: $d\vec{s} = rdrd\varphi(-\hat{a}_z)$

حال با جایگذاری $\vec{D}$ و $\vec{ds}$ در رابطه ψ داریم:

$$\psi = \int_s \vec{D}.d\vec{s} = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^R \frac{\lambda}{۴\pi r}(\hat{a}_r - \hat{a}_z).(-\hat{a}_z)rdrd\varphi \Rightarrow \psi = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^R \frac{\lambda}{۴\pi}drd\varphi = \frac{\lambda R}{۲}$$

مثال ۱۵: در یک فضای آزاد میدان الکتریکی با شدت $\vec{E} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$ وجود دارد. فلوی الکتریکی که از سطح جانبی استوانه‌ای به طول L و شعاع R و محور z به مرکز مبدأ مختصات می‌گذرد کدام است؟

۱) $۲\pi\varepsilon_۰ LR^۲$

۲) صفر

۳) $-\pi\varepsilon_۰ LR^۲$

۴) $۳\pi\varepsilon_۰ LR^۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق تعریف شار الکتریکی داریم: $\phi = \iint \vec{D}.d\vec{s}$

با توجه به $\vec{E}$ داده شده در صورت سؤال می‌توان نوشت: $\vec{D} = \varepsilon_۰(x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z)$

چون شار گذرنده از سطح یک استوانه هم محور با محور z ها را می‌خواهیم، $d\vec{s}$ به صورت $d\vec{s} = rdzd\varphi\hat{a}_r$ خواهد بود. با جایگذاری $\vec{D}$ و $d\vec{s}$ در رابطه ϕ داریم: $\phi = \iint \varepsilon_۰(x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z).(rdzd\varphi\hat{a}_r)$

برای اعمال ضرب داخلی بین دو بردار باید هر دو بردار در یک دستگاه مختصات بیان شوند، بنابراین $\hat{a}_r$ را به مختصات دکارتی انتقال می‌دهیم:

$$\hat{a}_r = \cos\varphi\hat{a}_x + \sin\varphi\hat{a}_y$$

$$\phi = \iint \varepsilon_۰(x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z).(\cos\varphi\hat{a}_x + \sin\varphi\hat{a}_y)rdzd\varphi \Rightarrow \phi = \iint \varepsilon_۰(rx\cos\varphi + ry\sin\varphi)dzd\varphi$$

حال با قرار دادن $x = r\cos\varphi$ و $y = r\sin\varphi$ در رابطه بالا داریم:

$$\phi = \iint \varepsilon_۰ r^۲(\cos^۲\varphi + \sin^۲\varphi)dzd\varphi = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^L \varepsilon_۰ R^۲ dzd\varphi = ۲\pi\varepsilon_۰ LR^۲$$

مثال ۱۶: داخل یک تیغه تخت به ضخامت $2d$ و طول و عرض نامتناهی، بار حجمی با چگالی $\rho(z)=\rho_\circ(1-\frac{|z|}{d})$ توزیع شده است. مبدأ مختصات در مرکز تیغه و محور z عمود بر سطح تیغه است. اندازه میدان الکتریکی در نقطه $z=2d$ کدام است؟

۱) $\frac{\rho_\circ d}{\varepsilon_\circ}$ ۲) $\frac{\rho_\circ d}{2\varepsilon_\circ}$ ۳) $\frac{2\rho_\circ d}{\varepsilon_\circ}$ ۴) $\frac{4\rho_\circ d}{\varepsilon_\circ}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چگالی بار حجمی داده شده، فقط تابعی از z بوده و نسبت به آن زوج می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$|\vec{E}|=|\frac{Q_{in}}{2\varepsilon_\circ}|=\frac{\int_{-d}^{d}\rho dz}{2\varepsilon_\circ}=\frac{2\int_\circ^d\rho_\circ(1-\frac{z}{d})dz}{2\varepsilon_\circ}=\frac{\rho_\circ d}{2\varepsilon_\circ}$$

مثال ۱۷: یک توزیع حجمی بار به وسیله یک سطح کروی به شعاع a محدود شده است. چگالی بار در داخل کره برابر $\rho=\rho_\circ(1-\frac{r}{a})$ می‌باشد. میدان الکتریکی در داخل این سطح کروی در کدام‌یک از گزینه‌های زیر به درستی بیان شده است؟

۱) $\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}[\frac{r^2}{4a}-\frac{1}{r}]$ ۲) $\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}[\frac{r}{4a}-\frac{r^2}{3}]$ ۳) $\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}[\frac{r^2}{a^2}-\frac{a}{r}]$ ۴) $\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}[\frac{r}{3}-\frac{r^2}{4a}]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به این‌که چگالی بار حجمی داده شده فقط تابعی از r می‌باشد، بنابراین با استفاده از تقارن کروی بار و قانون گاوس خواهیم داشت:

$$E=\frac{Q_{in}}{\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\pi}\varepsilon_\circ r^2\sin\theta d\theta d\varphi}=\frac{\int_\circ^r\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\pi}\rho r'^2\sin\theta d\theta d\varphi dr'}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}=\frac{\int_\circ^r 4\pi r'^2\rho_\circ(1-\frac{r'}{a})dr'}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}=\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}[\frac{r}{3}-\frac{r^2}{4a}]$$

مثال ۱۸: کره‌ای به شعاع R و با چگالی بار ρ داریم. میدان را در نقطه‌ای در بیرون کره حساب کنید.

۱) $\frac{\rho a}{3\varepsilon_\circ r^2}\hat{a}_r$ ۲) $\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_\circ r^2}\hat{a}_r$ ۳) $\frac{\rho r}{3\varepsilon_\circ}\hat{a}_r$ ۴) $\frac{\rho a^2}{3\varepsilon_\circ r^2}\hat{a}_r$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون توزیع بار یکنواخت است، پس تقارن کروی خواهیم داشت و از قانون گاوس استفاده می‌کنیم.

$$\oint\!\!\oint D.ds=\iiint\rho dV\Rightarrow\int_\circ^{\pi}\int_\circ^{2\pi}D.r^2\sin\theta d\theta d\varphi=\rho\int_\circ^a\int_\circ^{\pi}\int_\circ^{2\pi}r^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

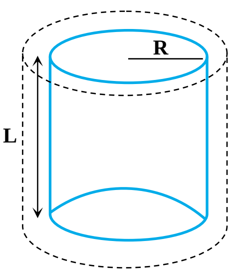
$$\Rightarrow D(4\pi r^2)=\rho(4\pi)\frac{r^3}{3}\Big|_\circ^a\Rightarrow D=\frac{\rho}{3r^2}a^3\Rightarrow\vec{E}=\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_\circ r^2}\hat{a}_r$$

مثال ۱۹: استوانه‌ای به طول L و شعاع R داریم که بار حجمی $\rho_\circ$ به طور یکنواخت درون آن توزیع شده است. میدان الکتریکی در بیرون و درون استوانه به ترتیب در کدام گزینه به درستی بیان شده است؟

۱) $\frac{\rho_\circ R^2}{2r\varepsilon_\circ}\hat{a}_r$ و $\frac{\rho_\circ r}{2\varepsilon_\circ}\hat{a}_r$ ۲) $\frac{\rho_\circ R^2}{2r\varepsilon_\circ}\hat{a}_r$ و $\frac{\rho_\circ r^2}{2\varepsilon_\circ}\hat{a}_r$ ۳) $\frac{\rho_\circ R}{2r\varepsilon_\circ}\hat{a}_r$ و $\frac{\rho_\circ r}{2\varepsilon_\circ}\hat{a}_r$ ۴) $\frac{\rho_\circ R}{2r^2\varepsilon_\circ}\hat{a}_r$ و $\frac{\rho_\circ r}{2\varepsilon_\circ}\hat{a}_r$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا میدان خارج استوانه را محاسبه می‌کنیم. از قانون گاوس داریم:

سطح گاوس را استوانه‌ای به شعاع r در نظر می‌گیریم. ابتدا محاسبه میدان خارج استوانه:



$$\oint\!\!\oint D_r(r).rdrdz=\iiint\rho_\circ rdrd\varphi dz$$

$$\Rightarrow D(2\pi rL)=\rho_\circ(2\pi L)\frac{R^2}{2}\Rightarrow\boxed{E=\frac{\rho_\circ R^2}{2\varepsilon_\circ r}\hat{a}_r}$$

محاسبه میدان داخل استوانه:

$$\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^r\varepsilon_\circ Erdrzd\varphi=\int_\circ^L\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^r\rho_\circ rdrd\varphi dz\Rightarrow(2\pi rL)\varepsilon_\circ E=\rho_\circ(2\pi L)\frac{r^2}{2}\Rightarrow\boxed{E=\frac{\rho_\circ r}{2\varepsilon_\circ}\hat{a}_r}$$

مثال۲۰: بار الکتریکی مثبت $q_۱$ و بار الکتریکی منفی $q_۲$ را در نظر بگیرید. یک خط نیرو با زاویه α نسبت به خط واصل بین دو بار از $q_۱$ خارج و با زاویه β نسبت به خط واصل دو بار به $q_۲$ وارد می‌شود. با توجه به این که $|q_۱|>|q_۲|$ است، کدام گزینه صحیح است؟

۱) همواره $\alpha<\beta$

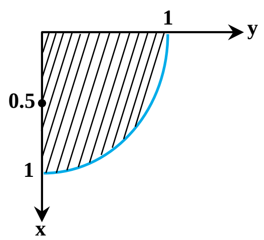
۲) همواره $\alpha>\beta$

۳) همواره $\alpha=\beta$

۴) بسته به فاصله دو بار، زاویه α می‌تواند بزرگتر، کوچکتر یا برابر β باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» گفتیم که خطوط میدان متناسب با مقدار بار است و هر چه مقدار آن بیشتر باشد خطوط به یکدیگر نزدیکتر و فشرده‌تر هستند و هر چه مقدار بار کمتر باشد خطوط میدان از یکدیگر دورتر و پخش‌تر هستند. بنابراین می‌توانیم بگوییم زاویه α که مربوط به بار $q_۱$ که بیشتر است، کمتر از زاویه β که مربوط به بار $q_۲$ که کمتر است می‌باشد. پس گزینه ۱ درست است.

مثال۲۱: در ناحیه هاشور خورده توزیع میدان $\vec{E}=\cos^۲\phi\hat{a}_r+r\cos\phi\hat{a}_\phi$ مفروض می‌باشد. چنانچه یک بار نقطه‌ای یک کولمبی در نقطه‌ای با مختصات $(r=۰/۵m,\phi=۰^\circ)$ رها شود، در چه نقطه‌ای از ناحیه هاشور خورده خارج می‌شود؟ (شعاع دایره=یک متر)



۱) $r=۱m,\phi=۴۵^\circ$

۲) $r=۱m,\phi=۳۰^\circ$

۳) $r=۱m,\phi=۶۱^\circ$

۴) $r=۱m,\phi=۸۴^\circ$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» همان‌طور که از صورت گزینه‌ها هم پیداست، بار نقطه قطعاً به ازای شعاع $r=۱m$ از ناحیه خارج می‌شود. ولی برای پیدا کردن زاویه ϕ باید معادله خطوط میدان را به دست آوریم. از آنجا که با مختصات استوانه کار می‌کنیم، داریم:

$$\frac{dr}{E_r}=\frac{rd\phi}{d\phi}\Rightarrow\frac{dr}{\cos^۲\phi}=\frac{rd\phi}{r\cos\phi}\Rightarrow dr=\cos\phi d\phi\Rightarrow r=\sin\phi+c$$

برای پیداکردن ثابت c از داده‌های مسأله استفاده می‌کنیم. بار موردنظر مسأله در ابتدا در نقطه $(r=۰/۵m,\phi=۰^\circ)$ قرار دارد. بنابراین معادله خط میدانی که از آن می‌گذرد، به این صورت به دست می‌آید:

$$۰/۵=\sin(۰^\circ)+c\Rightarrow c=۰/۵\Rightarrow r=\sin\phi+۰/۵$$

بار مسأله در راستای خط میدان حرکت می‌کند و در $r=۱m$ (محل خروج از ناحیه هاشورخورده) داریم:

$$۱=\sin\phi+۰/۵\Rightarrow\phi=۳۰^\circ$$

پس این بار با زاویه ۳۰° خارج می‌شود.

مثال۲۲: یک دوقطبی الکتریکی در مبدأ مختصات واقع است. یک الکترون را در نقطه $(R,\theta,\varphi)=(۱,۳۰,۰)$ قرار می‌دهیم. این الکترون در چه فاصله‌ای از مبدأ مختصات به محور x ها برخورد می‌کند؟

۱) به محور x ها برخورد نمی‌کند.

۲) $x=\sqrt{۱+۲Ln۲}$

۳) $x=-\sqrt{۱+۲Ln۲}$

۴) در بی‌نهایت به محور x ها برخورد می‌کند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» میدان دوقطبی الکتریکی برابر با $E=\frac{\rho}{۴\pi\varepsilon_۰r^۳}[۲\cos\theta\hat{a}_r+\sin\theta\hat{a}_\theta]$ است. حال معادله خطوط میدان را می‌نویسیم:

$$\frac{dr}{Er}=\frac{d\theta}{rd\theta}=\frac{d\varphi}{r\sin\theta E\varphi}\Rightarrow\frac{dr}{۲\cos\theta}=\frac{d\theta}{r\sin\theta}\Rightarrow\frac{rdr}{۲}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta$$

$$\Rightarrow\frac{r^۲}{۲}=Ln|\sin\theta|+k$$

برای پیدا کردن k نقطه موردنظر را در معادله قرار می‌دهیم.

$$(۱,۳۰,۰)\Rightarrow\frac{۱}{۲}=Ln\frac{۱}{۲}+k\Rightarrow k=\frac{۱}{۲}-Ln\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}+Ln۲\Rightarrow\frac{r^۲}{۲}=Ln|\sin\theta|+\frac{۱}{۲}+Ln۲$$

حال اگر به محور x ها برخورد کند، باید $\varphi = 0$ و $\theta = \frac{\pi}{2}$ باشد، در نتیجه:

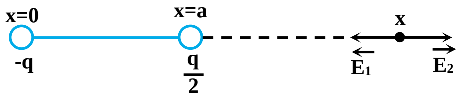
$$\frac{x^2}{2} = \mathrm{Ln}\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| + \frac{1}{2} + \mathrm{Ln}2 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} + \mathrm{Ln}2 \Rightarrow x^2 = 1 + 2\mathrm{Ln}2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1+2\mathrm{Ln}2}$$

چون بار موردنظر الکترون است، پس در خلاف جهت خطوط میدان حرکت می‌کند، پس $x = -\sqrt{1+2\mathrm{Ln}2}$.

مثال ۲۳: دو بار نقطه‌ای $-q$ و $+\frac{1}{2}q$ به ترتیب در مبدأ مختصات و در نقطه $(a,0,0)$ قرار گرفته‌اند. در چه نقطه‌ای روی محور x میدان الکتریکی صفر می‌شود؟

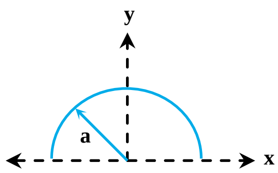
۱) $x = \frac{a}{2}$
۲) $x = (2-\sqrt{2})a$
۳) $x = 2a$
۴) $x = (2+\sqrt{2})a$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به صورت سوال می‌دانیم که بارها غیرهمنام هستند، پس میدان الکتریکی در نقطه‌ای خارج از فاصله بین دو بار صفر می‌شود. از طرفی اندازه بار مثبت کمتر از اندازه بار منفی است، در نتیجه نقطه موردنظر نزدیک به بار مثبت می‌باشد.



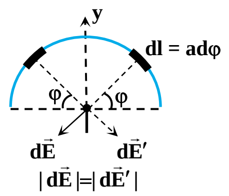
$$\left.\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}(\hat{a}_x)\\ \vec{E}_2 &= \frac{\frac{q}{2}}{4\pi\varepsilon_0 (x-a)^2}(\hat{a}_x)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{E}_2 = -\vec{E}_1 \Rightarrow x = \begin{cases}(2-\sqrt{2})a & \text{غیرقابل قبول}\\ (2+\sqrt{2})a\end{cases}$$

مثال ۲۴: بار مثبت خطی با چگالی $\rho_l = \rho_0 x^2$ روی نیم‌دایره‌ای به شعاع a در فضای آزاد توزیع شده است. دامنه میدان الکتریکی را در نقطه O، مرکز نیم دایره حساب کنید.



۱) $|\vec{E}| = \frac{\rho_0}{6\pi\varepsilon_0 a}$
۲) $|\vec{E}| = \frac{6a\rho_0}{\pi\varepsilon_0}$
۳) $|\vec{E}| = \frac{\pi\varepsilon_0}{6a\rho_0}$
۴) $|\vec{E}| = \frac{\rho_0 a}{6\pi\varepsilon_0}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»



$$dq = \rho_l dl = \rho_0 \times a d\varphi = \rho_0 (a\cos\varphi)^2 a d\varphi$$

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 a^2}(-\hat{a}_r) = \frac{\rho_0 a \cos^2\varphi d\varphi}{4\pi\varepsilon_0}(-\hat{a}_r)$$

با تجزیه بردار $d\vec{E}$ به مؤلفه‌های در راستای $\hat{a}_x$ و $\hat{a}_y$ خواهیم داشت:

$$d\vec{E} = |d\vec{E}|\cos\varphi(-\hat{a}_x) + |d\vec{E}|\sin\varphi(-\hat{a}_y)$$

به دلیل تقارن، مؤلفه میدان الکتریکی در راستای $\hat{a}_x$ صفر خواهد بود، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\vec{E}_y = \int d\vec{E}_y = \int \frac{\rho_0 a \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi}{4\pi\varepsilon_0}(-\hat{a}_y) = -\frac{\rho_0 a}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi} \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi \hat{a}_y = \frac{\rho_0 a}{6\pi\varepsilon_0}(-\hat{a}_y)$$

مثال ۲۵: روی دیسک دایره‌ای به شعاع a، هم مرکز با مبدأ مختصات و واقع در صفحه $z = 0$، بار الکتریکی با چگالی سطحی $\rho_s = k_0 r$ توزیع شده است. مطلوب است محاسبه فلوی الکتریکی که از نصف سطح کروی به شعاع R هم مرکز با مبدأ مختصات و واقع در ناحیه $z > 0$ از داخل به طرف خارج آن می‌گذرد، به طوری که $R > a > 0$ می‌باشد. به عبارت دیگر خصوصیات این سطح عبارتند از: ($R =$ شعاع , $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$).

۱) $\frac{\pi k_0 a^3}{3\varepsilon_0}$
۲) $\frac{2\pi k_0 a^3}{3\varepsilon_0}$
۳) $\frac{4\pi k_0 a^3}{3\varepsilon_0}$
۴) $\frac{\pi k_0 a^3}{\varepsilon_0}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» این مثال را بخاطر تقارن می‌توانیم با استفاده از رابطه گاوس حل کنیم. ابتدا کل شار خارج‌شده از کره به شعاع R را محاسبه می‌کنیم. طبق قضیه گاوس داریم:

$$\phi = \iint \vec{D}.d\vec{s} = Q$$

Q کل بار قرار گرفته در سطح کروی است. بنابر رابطه بالا نتیجه می‌گیریم که فلوی الکتریکی گذرنده از کل سطح کروی برابر مقدار بار درون آن است. با توجه به چگالی سطحی دیسک، مقدار بار قرار گرفته در سطح کروی برابر است با:

$$\rho_s = \frac{dq}{ds} \Rightarrow dq = \rho_s ds \Rightarrow Q = \iint \rho_s ds$$

از آنجا که ds سطح یک دایره می‌باشد بنابراین داریم:

$$0 < \varphi < 2\pi \quad , \quad 0 < r < a$$

$$Q = \int_0^a \int_0^{2\pi} (k_0 r)(r d\varphi dr) = 2\pi k_0 \frac{a^3}{3}$$

در نتیجه فلوی الکتریکی گذرنده از کل سطح کروی برابر است با:

$$\phi_{\text{کل}} = Q \Rightarrow \phi_{\text{کل}} = 2\pi k_0 \frac{a^3}{3}$$

اما صورت تست مقدار فلوی گذرنده از نیمکره بالایی را خواسته است، پس ϕ را باید بر ۲ تقسیم کنیم:

$$\phi = \frac{\phi_{\text{کل}}}{2} = \pi k_0 \frac{a^3}{3}$$

مثال ۲۶: در یک فضای آزاد میدان الکتریکی با شدت $\vec{E} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$ وجود دارد. فلوی الکتریکی که از سطح جانبی استوانه‌ای به طول L و شعاع R و محور z به مرکز مبدأ مختصات می‌گذرد کدام است؟

۱) $2\pi\varepsilon_0 LR^2$
۲) صفر
۳) $-\pi\varepsilon_0 LR^2$
۴) $3\pi\varepsilon_0 LR^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق تعریف شار الکتریکی داریم:

$$\psi = \iint \vec{D}.d\vec{s}$$

با توجه به $\vec{E}$ داده شده در صورت سؤال می‌توان نوشت:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z)$$

چون شار گذرنده از سطح یک استوانه هم محور با محور z ها را می‌خواهیم، $d\vec{s}$ به صورت $d\vec{s} = r dz d\varphi \hat{a}_r$ خواهد بود. با جایگذاری $\vec{D}$ و $d\vec{s}$ در رابطه ψ داریم:

$$\psi = \iint \varepsilon_0 (x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z).(r dz d\varphi \hat{a}_r)$$

برای اعمال ضرب داخلی بین دو بردار باید هر دو بردار در یک دستگاه مختصات بیان شود، بنابراین $\hat{a}_r$ را به مختصات دکارتی انتقال می‌دهیم:

$$\hat{a}_r = \cos\varphi \hat{a}_x + \sin\varphi \hat{a}_y$$

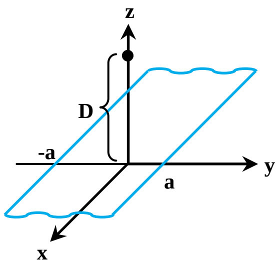
$$\psi = \iint \varepsilon_0 (x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z).(\cos\varphi \hat{a}_x + \sin\varphi \hat{a}_y) r dz d\varphi \Rightarrow \psi = \iint \varepsilon_0 (rx\cos\varphi + ry\sin\varphi) dz d\varphi$$

حال با قرار دادن $x = r\cos\varphi$ و $y = r\sin\varphi$ در رابطه بالا داریم:

$$\psi = \iint \varepsilon_0 r^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) dz d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^L \varepsilon_0 R^2 dz d\varphi = 2\pi\varepsilon_0 LR^2$$

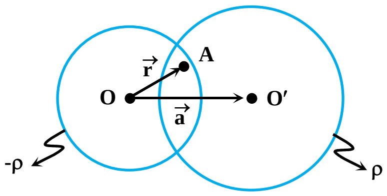
آزمون فصل دوم

۱ـ روی نوار به عرض $2a$ $(-a \le y \le a, -\infty < x < \infty, z = 0)$ باری به چگالی یکنواخت σ کولن بر مترمربع قرار دارد. شدت میدان الکتریکی در فاصله D از نوار و بالای محور آن کدام است؟



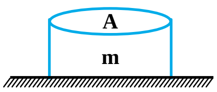
۱) $\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\tan^{-1}\frac{a}{D}\hat{z}$
۲) $\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\tan^{-1}\frac{a}{D}\hat{z}$
۳) $\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\tan^{-1}\frac{2a}{D}\hat{z}$
۴) $\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\tan^{-1}\frac{2a}{D}\hat{z}$

۲ـ دو کره یکی به شعاع R و چگالی بار $-\rho$ و دیگری به شعاع $2R$ و چگالی بار $+\rho$ مطابق شکل با هم همپوشانی دارند. میدان الکتریکی در نقطه A داخل ناحیه همپوشانی دو کره و به فاصله r از مرکز کره به شعاع R کدام است؟ ($\vec{a}$ برداری است که مرکز کره به شعاع R را به مرکز کره به شعاع $2R$ وصل می‌کند)



۱) $\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$
۲) $\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$
۳) $\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}-\vec{a})$
۴) $\frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}}{r^2}-\frac{\vec{r}-\vec{a}}{(r-a)^2}\right)$

۳ـ قرص یکنواخت نازک فلزی بزرگی روی صفحه رسانای نامحدودی قرار دارد. در ابتدا قرص و صفحه بدون بارند و سپس به تدریج بار اضافه می‌شود. چگالی بار الکتریکی صفحه چقدر باشد تا قرص از صفحه جدا شود؟ (m جرم قرص، A مساحت قاعده قرص و g شتاب جاذبه است.)

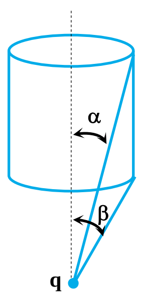


۱) $\left(\frac{2\varepsilon_0 mg}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$
۲) $\left(\frac{\varepsilon_0 mg}{4A}\right)^{\frac{1}{2}}$
۳) $\left(\frac{\varepsilon_0 mg}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$
۴) $\left(\frac{\varepsilon_0 mg}{2A}\right)^{\frac{1}{2}}$

۴ـ بار Q در مبدأ مختصات قرار دارد. شاری که از سطح مربعی شکل $x = 1$ و $0 \le z \le 1$ و $0 \le y \le 1$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $\frac{Q}{10}$
۲) $\frac{Q}{24}$
۳) $\frac{3Q}{8}$
۴) $\frac{Q}{8}$

۵ـ بار نقطه‌ای q روی محور یک پوسته استوانه‌ای به نحوی قرار دارد که لبه‌های پوسته استوانه‌ای با زاویه‌های α و β از محل بار دیده می‌شود. شاری که از سطح جانبی پوسته استوانه‌ای می‌گذرد کدام است؟

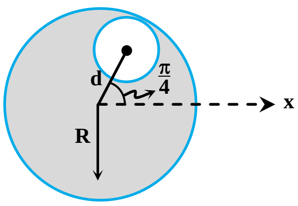


۱) $\frac{q}{2\varepsilon_0}(\cos\alpha+\cos\beta)$
۲) $\frac{q}{2\varepsilon_0}(\cos\alpha-\cos\beta)$
۳) $\frac{q}{2\varepsilon_0}(\sin\alpha+\sin\beta)$
۴) $\frac{q}{2\varepsilon_0}(\sin\alpha-\sin\beta)$

۶ـ بار سطحی به چگالی $\rho_s = 3\frac{c}{m^2}$ روی صفحه‌ای به معادله $x+y+z=1$ توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی در سمتی که مبدأ واقع است کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2\varepsilon_0}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$
۲) $\frac{-\sqrt{3}}{2\varepsilon_0}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$
۳) $\frac{\sqrt{3}}{\varepsilon_0}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$
۴) $\frac{-\sqrt{3}}{\varepsilon_0}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$

۷ـ بار الکتریکی با چگالی یکنواخت ρ کولن بر مترمکعب در حجم کره‌ای حفره‌دار مطابق شکل توزیع شده است. میدان الکتریکی در درون حفره کدام است؟



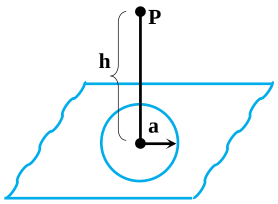
۱) $\frac{\rho}{۳\varepsilon_۰}(\frac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{۲}})$

۲) $\frac{\rho d}{۳\varepsilon_۰}(\frac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{۲}})$

۳) $\frac{\rho d}{۳\varepsilon_۰}\hat{i}$

۴) $\frac{\rho}{۳\varepsilon_۰}\hat{i}$

۸ـ روی یک صفحه بی‌نهایت باری با چگالی σ قرار دارد. دایره‌ای به شعاع **a** روی این صفحه در نظر بگیرید که مرکز آن تصویر نقطه **P** بر صفحه باشد. فاصله نقطه **P** تا صفحه **h** است. شعاع دایره چقدر باشد تا نصف شدت میدان الکتریکی در نقطه **P** از بارهای موجود در داخل دایره ناشی شود؟



۱) $a = h$

۲) $a = \sqrt{۲}h$

۳) $a = \sqrt{۳}h$

۴) $a = ۲h$

۹ـ بار نقطه‌ای **Q** در مبدأ مختصات قرار گرفته است. در چه نقطه‌ای از خط $x = ۱m$ و $z = ۳m$ میدان E_y حداکثر خواهد شد؟

۱) $y = ۱/۲۲m$ ۲) $y = ۱/۸۴m$ ۳) $y = ۲/۱m$ ۴) $y = ۳/۱۶m$

۱۰ـ بار موجود در کره‌ای به شعاع **2m** به مرکز مبدأ مختصات حاوی چگالی بار حجمی $\rho_v = ۲r(۱+\cos\theta)\sin\frac{\phi}{۲}$ کدام است؟

۱) ۸^C ۲) ۱۶^C ۳) ۳۲^C ۴) ۶۴^C

۱۱ـ چگالی بار سطحی $\sigma = \rho_۰\cos\theta$ ($\rho_۰$ مقدار ثابت) روی سطح کره‌ای به شعاع **a** توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی در مرکز کره کدام است؟

۱) $\frac{\rho_۰}{\varepsilon_۰}\hat{z}$ ۲) $-\frac{\rho_۰}{۲\varepsilon_۰}\hat{z}$ ۳) $-\frac{\rho_۰}{۳\varepsilon_۰}\hat{z}$ ۴) $\frac{\rho_۰}{۲\varepsilon_۰}\hat{z}$

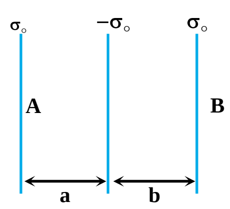
۱۲ـ معادله خطوط میدان الکتریکی ناشی از یک دو قطبی الکتریکی کدام است؟

۱) $r = A\sin^۲\theta$ ۲) $r = A\cos^۲\theta$ ۳) $r = A\sin۲\theta$ ۴) $r = A\cos۲\theta$

۱۳ـ بار نقطه‌ای **q** در داخل کره هادی به شعاع **a** قرار دارد. کره هادی به پتانسیل $V_۰$ متصل است. شار خارج شونده از سطح کروی فرضی به شعاع **R(R > a)** و هم مرکز با کره هادی کدام است؟

۱) q ۲) $q+۴\pi V_۰ a$ ۳) $q+۲\pi V_۰ a$ ۴) $۴\pi V_۰ a$

۱۴ـ سه صفحه موازی بی‌نهایت پهناور مطابق شکل با چگالی‌های بار سطحی $\sigma_۰, -\sigma_۰, \sigma_۰$ قرار دارند. شدت میدان الکتریکی در نقطه **A**، چند برابر شدت میدان الکتریکی در نقطه **B** می‌باشد؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۱-

۴) ۲-

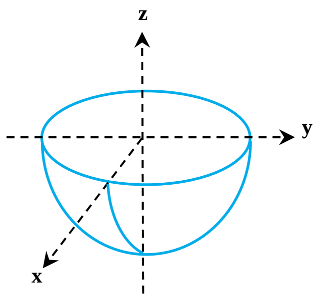
۱۵ـ کل بار موجود در حجم مکعبی به ضلع **2m** موازی با محورها در ناحیه $z > ۰$ و **x** و **y** با یک گوشه در مبدأ مختصات و چگالی بار حجمی $\rho = \frac{۲xy}{z+۱}$ کدام است؟

۱) $۸/۸^C$ ۲) $۱۳/۵^C$ ۳) ۶۴^C ۴) ۸۹^C

۱۶ـ بار حجمی $\rho = \frac{۱}{۴+x^۲}(\frac{c}{m^۳})$ در فضای آزاد در مختصات قائم پخش شده است. شدت میدان الکتریکی در نقطهٔ **P(1,1,1)** برابر است با:

۱) $\frac{۰/۱۳}{\varepsilon_۰}$ ۲) $\frac{۰/۲۳}{\varepsilon_۰}$ ۳) $\frac{۰/۳۲}{\varepsilon_۰}$ ۴) $\frac{۰/۴۶}{\varepsilon_۰}$

۱۷ـ در مختصات کروی، چگالی بار سطحی یکنواخت $\rho_s(\frac{c}{m^2})$ روی سطح نیمکره‌ای به شعاع **a** هم مرکز با مبدأ مختصات در ناحیه $z<0$ مطابق شکل مفروض است. شدت میدان الکتریکی در صفحه $z=0$ در سطح دایره ناحیهٔ $r<a$ به صورت زیر است.



۱) دارای دو مؤلفه در جهت $\hat{a}_r$ و $\hat{a}_z$ است.

۲) تنها دارای یک مؤلفه در راستای $\hat{a}_r$ است.

۳) تنها دارای یک مؤلفه در راستای $\hat{a}_\varphi$ است.

۴) تنها دارای یک مؤلفه در راستای $\hat{a}_z$ است.

۱۸ـ در یک ناحیه کروی به شعاع **R** چگالی بار طوری است که میدان الکتریکی در نقطه **r** داخل کره به شکل $\vec{E}=(\frac{E_0 r}{R^2})\hat{r}$ است. چگالی بار، ρ در این ناحیه برابر است با:

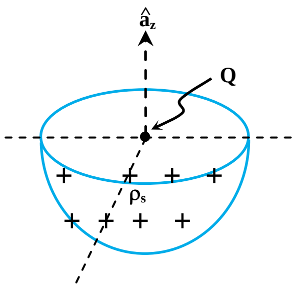
۱) $\frac{4\varepsilon_0 E_0}{R^2}r$ ۲) $\frac{3\varepsilon_0 E_0}{R^2}r$ ۳) $\frac{4\varepsilon_0 E_0}{R^3}r^2$ ۴) $\frac{\varepsilon_0 E_0}{R^3}r^2$

۱۹ـ بار نقطه‌ای **Q** در مبدأ مختصات کروی قرار دارد. شار عبوری از یک لایه کروی که با $\alpha \le \theta \le \beta$ مشخص می‌شود برابر کدام است؟

۱) $(\frac{Q}{2\varepsilon_0})(\cos\beta-\cos\alpha)$ ۲) $(\frac{Q}{2\varepsilon_0})(\cos\alpha-\cos\beta)$

۳) $(\frac{Q}{\varepsilon_0})(\cos\alpha-\cos\beta)$ ۴) $(\frac{Q}{\varepsilon_0})(\cos\beta-\cos\alpha)$

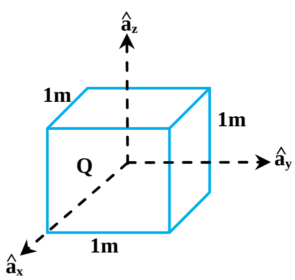
۲۰ـ پوسته نیم کروی شکل زیر دارای بار سطحی یکنواخت با چگالی $\rho_s \frac{c}{m^2}$ می‌باشد. یک ذرهٔ باردار با جرم **m** و بار **Q** همنام با ρ_s را در مرکز این نیم کره قرار می‌دهیم. جرم **m** باید چقدر باشد تا ذره سقوط نکند؟ (ε_0 ضریب دی‌الکتریک فضای آزاد و **g** شتاب ثقل زمین است.)



۱) $\frac{Q\rho_s}{2g\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{Q\varepsilon_0}{4g\rho_s}$

۳) $\frac{2Qg}{\varepsilon_0\rho_s}$ ۴) $\frac{4Qg}{\varepsilon_0\rho_s}$

۲۱ـ بار نقطه‌ای **Q** در مبدأ مختصات قرار دارد. یک مکعب به ضلع ۱m که مرکز آن بر بار **Q** منطبق است، در نظر بگیرید. مقدار شار میدان $\overline{D}$ که از سطوح جانبی مکعب خارج می‌شود، برابر است با:



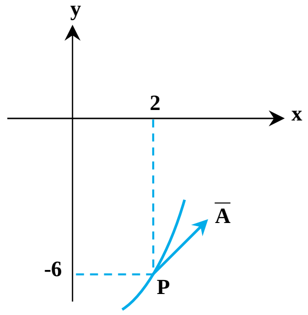
۱) $\frac{Q}{6}$ ۲) $\frac{Q}{\sqrt{2}}$

۳) $\frac{2Q}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}Q}{4}$

۲۲ـ بردار جابه‌جایی $\vec{D}=\frac{qk}{4\pi a^3}\vec{r}$ است. چگالی بار الکتریکی متناظر با این بردار $\vec{D}$ کدام است؟ (**k** ضریب دی‌الکتریک است.)

۱) $\frac{3qkr}{4\pi a^4}$ ۲) $\frac{qk}{4\pi a^3}$ ۳) $\frac{3qk}{4\pi a^3}$ ۴) 0

۲۳ـ شکل مقابل قسمتی از سطح مقطع یک رسانای کامل که در امتداد z بی‌نهایت فرض می‌شود را نشان می‌دهد. در نقطه (۲,−۶,۰) روی مرز رسانا و هوا چگالی بار سطحی $\rho_s=\sqrt{۱۰}\,\varepsilon_0$ وجود دارد. برداری مثل $\bar{A}=۳\hat{a}_x+\hat{a}_y$ در این نقطه بر سطح رسانا مماس است. شدت میدان الکتریکی در این نقطه کدام است؟



۱) $\bar{E}=\hat{a}_x-۳\hat{a}_y$

۲) $\bar{E}=-\hat{a}_x+۳\hat{a}_y$

۳) $\bar{E}=\sqrt{۱۰}(\hat{a}_x-۳\hat{a}_y)$

۴) $\bar{E}=\sqrt{۱۰}(-\hat{a}_x+۳\hat{a}_y)$

۲۴ـ بار نقطه‌ای q بر سطح کره‌ای به شعاع R قرار دارد. فلوی الکتریکی عبوری از سطح کره کدام است؟

۱) $\dfrac{q}{۲\varepsilon_0}$ ۲) $\dfrac{q}{۴\varepsilon_0}$ ۳) $\dfrac{q}{۳\varepsilon_0}$ ۴) $\dfrac{q}{\varepsilon_0}$

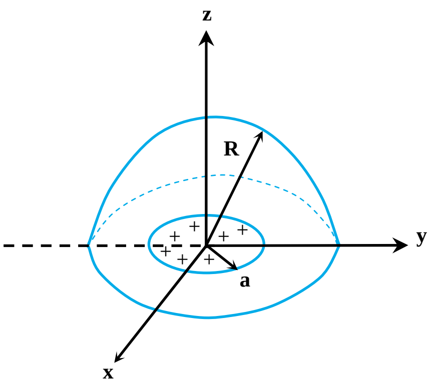
۲۵ـ باری برابر با $+۱۰^{-۹}$ در مبدأ مختصات و در فضای آزاد قرار گرفته است. چه باری در نقطه (۴,۰,۰) باید قرار گیرد تا E_y در نقطه (۴,۳,۲) برابر صفر گردد؟

۱) $-۰/۳nc$ ۲) $-۰/۲۵nc$ ۳) $+۰/۲۵nc$ ۴) $+۰/۳nc$

۲۶ـ در یک کره به شعاع R بار الکتریکی چنان توزیع شده است که چگالی آن برابر با $\rho=\dfrac{C}{r}$ می‌باشد که درآن C مقداری ثابت و r فاصله از مرکز کره است. اندازه میدان الکتریکی در داخل کره در نقطه‌ای به فاصله r از مرکز کره چقدر است؟

۱) $E=\dfrac{C}{۲\varepsilon_0}$ ۲) $E=\dfrac{Cr}{۲\varepsilon_0 R}$ ۳) $E=\dfrac{CR^۲}{۲\varepsilon_0 r^۲}$ ۴) $E=\dfrac{CR}{۲\varepsilon_0 r}$

۲۷ـ روی سطح دایره‌ای به شعاع a، هم مرکز با مبدأ مختصات و واقع در صفحه $z=۰$ بار الکتریکی با چگالی سطحی $\rho_s=k_0 r$ (r در مختصات استوانه‌ای و k_0 مقدار ثابت) توزیع شده است. مطلوب است محاسبه شار الکتریکی (توسط میدان $\bar{E}$) که از نصف سطح کروی به شعاع R هم مرکز با مبدأ مختصات و واقع در ناحیه $z>۰$ از داخل به طرف خارج آن می‌گذرد به طوری که $R>a>۰$ باشد.



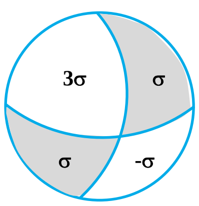
۱) $\dfrac{-\pi k_0 a^۳}{۳\varepsilon_0}$ ۲) $\dfrac{-۲\pi k_0 a^۳}{۳\varepsilon_0}$

۳) $\dfrac{\pi k_0 a^۳}{۳\varepsilon_0}$ ۴) $\dfrac{+۲\pi k_0 a^۳}{۳\varepsilon_0}$

۲۸ـ کدامیک از عبارت‌های زیر می‌تواند معرف میدان الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا باشد که فاقد بار الکتریکی است؟ (در این عبارت‌ها A مقدار ثابتی است و $\hat{i},\hat{j}$ و $\hat{k}$ بردارهای یکه در راستای محورهای y,x و z هستند.)

۱) $A(-xy\hat{j}+xz\hat{k})$ ۲) $A(۲xy\hat{j}-xz\hat{k})$ ۳) $A(xz\hat{j}+xz\hat{j})$ ۴) $Axy(\hat{i}+\hat{j})$

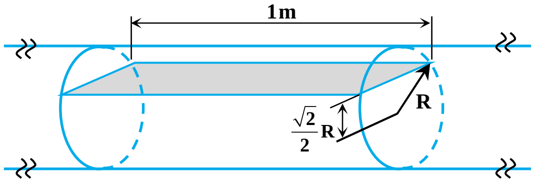
۲۹ـ اگر بدانیم که میدان الکتریکی حاصل از یک پوسته نیم کروی با توزیع بار یکنواخت σ در مرکز نیم کره $\dfrac{\sigma}{۴\varepsilon_0}$ است، میدان در مرکز پوسته کروی شکل کامل زیر که به چهار ربع مساوی با توزیع بارهای مختلف تقسیم شده است چقدر است؟



۱) $\dfrac{\sigma}{۳\varepsilon_0}$ ۲) $\dfrac{۲\sigma}{\sqrt{۲}\varepsilon_0}$

۳) $\dfrac{\sigma}{۲\varepsilon_0}$ ۴) $\dfrac{\sigma}{\sqrt{۲}\varepsilon_0}$

۳۰ـ استوانه‌ای بسیار طویل به شعاع R دارای چگالی حجمی بار ثابت ρ_0 است. شار میدان الکتریکی که از صفحه‌ای به ابعاد $1\times\sqrt{2}R$ که مطابق شکل (دور از دو انتهای استوانه) واقع شده، چقدر است؟

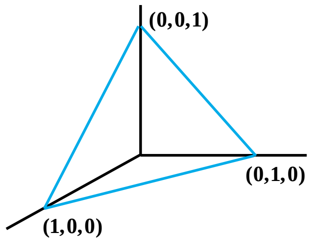


۱) $\frac{\rho_0 R^2}{\sqrt{2}\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{\rho_0 R^3}{2\varepsilon_0}$ ۳) $\frac{\rho_0 R^3\sqrt{2}}{2\varepsilon_0}$ ۴) $\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}$

۳۱ـ بار سطحی یکنواخت σ_s، روی صفحه بی‌نهایت $2x-4y+4z=1$ توزیع شده است. میدان الکتریکی را در نقطه $(-1,1,1)$ به دست آورید.

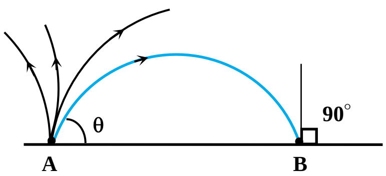
۱) $\frac{\sigma_s}{6\varepsilon_0}(\hat{x}-2\hat{y}+2\hat{z})$ ۲) $-\frac{\sigma_s}{6\varepsilon_0}(\hat{x}-2\hat{y}+2\hat{z})$ ۳) $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\hat{x}-2\hat{y}+2\hat{z})$ ۴) $-\frac{\sigma_s}{2\varepsilon_0}$

۳۲ـ بار الکتریکی به‌طور یکنواخت با چگالی λ_0 روی اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاعی توزیع شده است. میدان الکتریکی را در مبدأ مختصات حساب کنید.



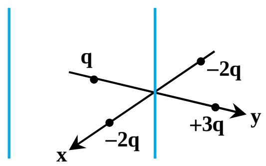
۱) $-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$ ۲) $-\frac{\lambda\sqrt{2}}{2\pi\varepsilon_0}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$ ۳) $-\frac{\lambda}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$ ۴) $-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$

۳۳ـ بار خطی با چگالی 3λ در نقطه A و بار خطی با چگالی $-\lambda$ در نقطه B قرار دارند. خط نیرویی که با زاویه 90° نسبت به خط AB به نقطه B وارد می‌شود با چه زاویه‌ای از A جدا می‌شود؟



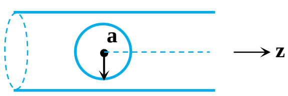
۱) 30° ۲) 60° ۳) 45° ۴) $\cos^{-1}(\frac{1}{3})$

۳۴ـ چهار بار نقطه‌ای با مقادیر $+q$ ، $-2q$ ، $3q$ و $-2q$ مطابق شکل زیر روی محورهای x و y قرار دارند و فاصله‌شان تا مبدأ d است، روی محور z و در فاصله‌ای بسیار دور میدان الکتریکی با کدام‌یک از گزینه‌های زیر متناسب خواهد بود؟



۱) $E=\frac{k_1}{z^2}$ ۲) $\frac{k_2}{z}$ ۳) صفر ۴) $\frac{k_3}{z^3}$

۳۵ـ بار الکتریکی با چگالی $+\rho_0$ در ناحیه $|z|<d$ به جز در درون کره‌ای به شعاع a که چگالی توزیع بار در آن برابر $-2\rho_0$ است، توزیع شده است. مرکز کره منطبق بر مبدأ مختصات است. میدان الکتریکی را در $z=\frac{q}{2}$ در درون کره به دست آورید.

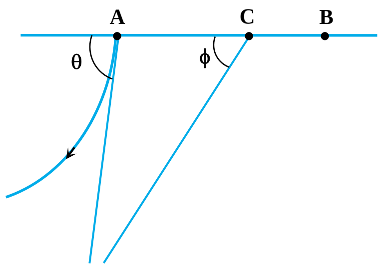


۱) $-\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\hat{z}$ ۲) صفر ۳) $-\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}a\hat{z}$ ۴) $-\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}\hat{z}$

۳۶ـ در مختصات استوانه‌ای میدان الکتریکی به صورت $E=\rho\cos 2\phi\hat{\rho}-\rho\sin 2\phi\hat{\phi}$ داده شده است. معادله خط نیروی گذرنده از نقطه $(2,30^\circ,0)$ کدام است؟

۱) $\rho=\frac{2\sqrt{2}}{\sin 2\phi}$ ۲) $\rho=\frac{2\sqrt{2}}{\cos 2\phi}$ ۳) $\rho^2=\frac{2\sqrt{2}}{\sin 2\phi}$ ۴) $\rho^2=\frac{2\sqrt{2}}{\cos 2\phi}$

۳۷ـ خطوط میدان دو بار نقطه‌ای q شکل زیر را در نظر بگیرید که در نقاط A و B قرار گرفته‌اند. خط میدانی که با زاویه θ از بار واقع در A جدا می‌شود در نقاط بسیار دور مجانبی دارد که خط AB را با زاویه ϕ در نقطه C قطع می‌کند. اگر $\theta = ۹۰^\circ$ باشد، زاویه ϕ را به دست آورید.



۱) $\phi = \frac{\pi}{۴}$

۲) $\phi = \cos^{-۱}(\frac{۱}{۲})$

۳) $\phi = \sin^{-۱}(\frac{۱}{۲})$

۴) ۳۰°

۳۸ـ در محیطی میدان الکتریکی به صورت $E = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ داده شده است. شاری را که از استوانه‌ای به شعاع R و ارتفاع l می‌گذرد، به دست آورید. استوانه هم‌محور با محور z و مرکزش مبدأ است.

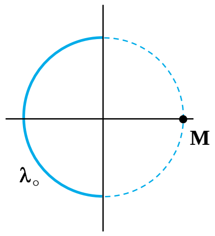
۱) صفر

۲) $۲\pi\varepsilon_\circ lR^۲$

۳) $-\pi\varepsilon_\circ lR^۲$

۴) $۳\pi\varepsilon_\circ lR^۲$

۳۹ـ بار الکتریکی با چگالی یکنواخت $\lambda_\circ$ روی نیم‌دایره‌ای به شعاع a در $\frac{۳\pi}{۲} \le \phi \le \frac{\pi}{۲}$ توزیع شده است. میدان الکتریکی را در نقطه M در $x = a$ حساب کنید.



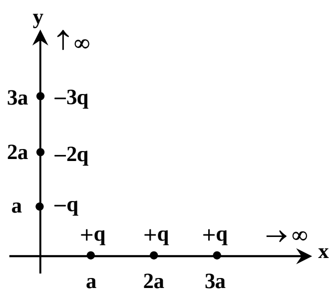
۱) $\frac{\lambda_\circ}{۸\pi\varepsilon_\circ a}\mathrm{Ln}\left(\frac{\tan\frac{۳\pi}{۸}}{\tan\frac{\pi}{۸}}\right)\hat{a}$

۲) $\frac{\lambda_\circ}{۴\pi\varepsilon_\circ a}\mathrm{Ln}\left(\frac{\tan\frac{۳\pi}{۸}}{\tan\frac{\pi}{۸}}\right)\hat{x}$

۳) $\frac{\lambda_\circ}{۲\pi\varepsilon_\circ a}\mathrm{Ln}\left(\frac{\tan\frac{۳\pi}{۸}}{\tan\frac{\pi}{۸}}\right)\hat{x}$

۴) $\frac{\lambda_\circ}{\pi\varepsilon_\circ a}\mathrm{Ln}\left(\frac{\tan\frac{۳\pi}{۸}}{\tan\frac{\pi}{۸}}\right)\hat{x}$

۴۰ـ شدت میدان الکتریکی در مبدأ مختصات ناشی از بی‌نهایت بار نقطه‌ای که به صورت زیر توزیع شده‌اند، چقدر است؟ $(\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲} = \frac{\pi^۲}{۶})$



۱) $\frac{-q\pi}{۴۸\varepsilon_\circ a^۲}(\hat{x}-\hat{y})$

۲) $\frac{-q\pi}{۲۴\varepsilon_\circ a^۲}(\hat{x}-\hat{y})$

۳) $\frac{-q}{۴۸\varepsilon_\circ a^۲}(\hat{x}-\hat{y})$

۴) $\frac{-q}{۲۴\varepsilon_\circ a^۲}(\hat{x}-\hat{y})$

فصل سوم

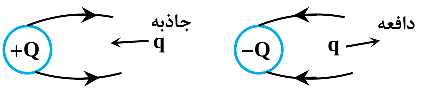
«پتانسیل الکتریکی»

تست‌های تألیفی فصل سوم

مثال۱: جهت حرکت یک بار نقطه‌ای شکل $(q<0)$ که زیر اثر یک میدان الکتریکی خارجی $\vec{E}$ قرار دارد به صورت زیر تعیین می‌شود.

۱) این جهت بستگی به علامت بار الکتریکی مولد $\vec{E}$ دارد.
۲) تابع محیطی است که بار الکتریکی در آن قرار دارد.
۳) جهت حرکت موافق جهت $\vec{E}$ است.
۴) حرکت در جهت خلاف $\vec{E}$ صورت می‌گیرد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اگر بار Q که مولد میدان الکتریکی $\vec{E}$ است را مثبت فرض کنیم، بار نقطه‌ای q تحت تأثیر این میدان در خلاف جهت آن حرکت می‌کند و اگر بار Q را منفی فرض کنیم، باز هم بار q در خلاف جهت میدان حرکت می‌کند.



بنابراین همواره حرکت در خلاف جهت $\vec{E}$ صورت می‌گیرد.

مثال۲: کار انجام شده برای جابجایی بار $-2C$ در صفحه $z=0$ از نقطه $x=2$ به نقطه $x=8$ در حضور میدان الکتریکی $\vec{E}=y\hat{a}_x+x\hat{a}_y$ در امتداد منحنی هذلولی $x=\frac{8}{7-3y}$ چقدر است؟

۱) $4J$
۲) $12J$
۳) $18J$
۴) $28J$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای حل این مسأله، احتمالاً شما یک انتگرال پیچیده را در امتداد هذلولی حل کرده‌اید. اما نیازی به این کار نیست؛ چون $\vec{E}$ پایستار است و کار الکتریکی به مسیر بستگی ندارد و تنها به نقاط ابتدایی و انتهایی بستگی دارد؛ پس می‌توانیم با استفاده از نقاط ابتدایی و انتهایی، مسیر دیگری را پیدا کنیم که انتگرال‌گیری از آن ساده‌تر باشد و چه مسیری ساده‌تر از یک مسیر خطی می‌شناسید؟! پس با رابطه منحنی داده شده و مقدار xها، مقدار yها را می‌یابیم.

$$7-3y=\frac{8}{x}\to y=\frac{7x-8}{3x}$$

$$\text{if } x=2\to y=\frac{7(2)-8}{3(2)}=1 \quad , \quad \text{if } x=8\to y=\frac{7(8)-8}{3(8)}=2$$

در نتیجه معادله خط به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)\Rightarrow y-1=\frac{2-1}{8-2}(x-2)\Rightarrow y=\frac{1}{6}x+\frac{2}{3} \quad , \quad dy=\frac{1}{6}dx$$

و حالا می‌توانیم کار را محاسبه کنیم.

$$W=-Q\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}=-(-2)\int_{x=2}^{8}[(\frac{1}{6}x+\frac{2}{3})\hat{a}_x+x\hat{a}_y].[dx\,\hat{a}_x+\frac{1}{6}dx\,\hat{a}_y]$$

$$=2\int_{x=2}^{8}(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3})dx=\frac{2}{3}\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{x=2}^{8}=\frac{2}{3}[32+16-2-4]=28J$$

شاید برای شما این سؤال پیش بیاید که آیا میدان $\vec{E}$ داده شده در این مسأله واقعاً یک میدان الکتریکی ساکن است؟ آیا واقعاً پایستار است؟ بنابراین با هم بررسی می‌کنیم که آیا می‌توان میدان برداری $\vec{E}$ را به صورت گرادیان یک تابع اسکالر نوشت:

$$\vec{E}=\vec{\nabla}\phi \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x}=y \;,\; \frac{\partial\phi}{\partial y}=x \;,\; \frac{\partial\phi}{\partial z}=0$$

که این شرایط را $\phi=xy+C$ برآورده می‌کند. پس $\vec{E}$ پایستار است. (با بررسی $\nabla\times\vec{E}$ هم می‌توانستیم به این نتیجه برسیم.)

مثال ۳: اختلاف پتانسیل الکتریکی پایانه‌های باتری یک خودرو برابر $30\,V$ است. اگر بار الکتریکی $+2C$ از پایانه مثبت تا پایانه منفی باتری جابجا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن چه اندازه و چگونه تغییر می‌کند؟

پاسخ: ابتدا بگویید انرژی پتانسیل چگونه تغییر می‌کند. می‌دانیم میدان الکتریکی از قطب مثبت به سمت قطب منفی است. بار در جهت میدان الکتریکی حرکت کرده است، یعنی خود میدان الکتریکی روی بار کار انجام داده و عامل خارجی روی آن کاری انجام نمی‌دهد. در واقع انرژی پتانسیل بار کاهش یافته است. پس انتظار داریم جواب منفی به دست آید.

$$\Delta V=\frac{\Delta W}{q}\Rightarrow \Delta W=q\,\Delta V=q(V^- - V^+)=2\times(-30)=-60\,J$$

بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی این بار به اندازه $60\,J$ کاهش یافته است.

مثال ۴: اگر پایانه مثبت یک باتری $10(V)$ را به زمین وصل کنیم، پتانسیل پایانه منفی آن چند ولت خواهد شد؟

پاسخ:
$$V^+ - V^- = 10(V)\Rightarrow 0 - V^- = 10(V)\Rightarrow V^- = -10(V)$$

مثال ۵: شدت میدان الکتریکی $\vec{E}=\frac{-10}{r^2}\hat{a}_r(\frac{V}{m})$ در مختصات کروی داده شده است. اختلاف پتانسیل نقطه $(2,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ نسبت به نقطه $(5,\frac{\pi}{4},\pi)$ چقدر است؟

۱) $-3V$ ۲) $+6V$ ۳) $+3V$ ۴) $-6V$

پاسخ: گزینه «۱» اول از همه بیایید بدون محاسبه، گزینه‌های غلط را کنار بگذاریم.

میدان الکتریکی $\vec{E}$ خلاف جهت افزایش r می‌باشد. زیرا علامت منفی نمایانگر مختلف‌الجهت بودن آن با مؤلفه $\hat{a}_r$ می‌باشد. در نتیجه اگر بار از مختصات $r=5$ به مختصات $r=2$ منتقل شود، در جهت میدان حرکت کردیم و در واقع کار منفی انجام دادیم. پس انتظار داریم پتانسیل الکتریکی کاهش یابد و علامت اختلاف پتانسیل منفی گردد.

پس گزینه‌های ۲ و ۳ نادرست هستند و اما برویم سراغ حل ریاضی آن. می‌خواهیم V_{BA} را پیدا کنیم.

اگر پتانسیل نقطه $B(2,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ را V_B و پتانسیل نقطه $A(5,\frac{\pi}{4},\pi)$ را V_A بنامیم، می‌توان نوشت:

$$V_{BA}=V_B-V_A=-\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}=-\int_{r=5}^{r=2}(\frac{-10}{r^2}\hat{a}_r).(dr\,\hat{a}_r)=\int_{r=5}^{2}\frac{10}{r^2}dr=\frac{-10}{r}\Big]_{r=5}^{2}=[-5+2]=-3\,V$$

مثال ۶: خط بارداری با چگالی بار خطی $\rho=10^{-9}\frac{C}{m}$ روی محور z ها در دست است. اگر $A(3,\frac{\pi}{2},0)$، $B(4,\frac{3\pi}{2},4)$ باشد، V_{AB} کدام است؟

۱) $3/26V$ ۲) $4/42V$ ۳) $5/18V$ ۴) $2/14V$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا میدان الکتریکی ناشی از توزیع بار خطی را به کمک قانون گاوس محاسبه می‌کنیم.

$$\oint \vec{E}.d\vec{s}=\frac{Q}{\varepsilon_0}\Rightarrow E_r=\frac{\int \rho_l\,dz}{\varepsilon_0\iint r\,d\phi\,dz}=\frac{10^{-9}}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{E}=2k\times\frac{10^{-9}}{r}\hat{a}_r=2\times9\times10^{9}\times\frac{10^{-9}}{r}\hat{a}_r=\frac{18}{r}\hat{a}_r$$

حال که میدان الکتریکی را داریم، می‌توانیم اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه A و B را به دست آوریم:

$$V_{AB}=V_A-V_B=-\int_B^A \vec{E}.d\vec{l}=-\int_{r=4}^{3}\frac{18}{R}.dr=-18\ln r\Big]_{r=4}^{3}=-18[\ln(3)-\ln(4)]=18\times0/29=5/18(v)$$

بدون حل هم می‌دانستیم که پاسخ مثبت می‌شود. زیرا اگر بار را از نقطه A به مختصات $r=3$ به نقطه B به مختصات $r=4$ هدایت کنیم، در جهت میدان حرکت کرده و پتانسیل آن کاهش می‌یابد. $(V_B<V_A)$ پس V_A-V_B مثبت می‌شود.

مثال ۷: یک خط باردار با چگالی بار $\rho_L(\frac{C}{m})$ بر روی محور zها و بار نقطه‌ای $Q = ۱/۸nc$ در مختصات (۱,۰,۰) در فضای آزاد قرار گرفته‌اند. با فرض (۵,۰,۰)B و (۴,۰,۰)A، اگر $V_{AB} = ۱V$ باشد، ρ_L کدام است؟

۱) $۸/۷۶\times۱۰^{-۱۱}\frac{C}{m}$
۲) $-۸/۷۶\times۱۰^{-۱۱}\frac{C}{m}$
۳) $۴/۱۶\times۱۰^{-۱۱}\frac{C}{m}$
۴) $-۴/۱۶\times۱۰^{-۱۱}\frac{C}{m}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» **گام اول:** میدان الکتریکی ناشی از توزیع یک بار خطی را محاسبه می‌کنیم.

طبق قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E}_۱.d\vec{s}=\frac{Q}{\varepsilon_۰}\rightarrow|\vec{E}_۱|=\frac{\int\rho_L\ dz}{\varepsilon_۰\iint r\ d\phi\ dz}\ \Rightarrow\ \vec{E}_۱=\frac{\rho_L}{۲\pi\varepsilon_۰ r}\hat{a}_r=۲k\frac{\rho_L}{r}\hat{a}_r$$

حال V_{AB} ناشی از این بار خطی را با $V_۱$ نمایش داده و آن را به دست می‌آوریم.

$$V_۱=-\int_B^A\vec{E}_۱.d\vec{l}=-۲\times۹\times۱۰^۹\int_{r=۵}^{۴}\frac{\rho_L}{r}dr=-۱۸\times۱۰^۹\rho_L[\ln r]_{R=۵}^{۴}=-۱۸\times۱۰^۹[\ln۴-\ln۵]\rho_L=۴/۰۲\times۱۰^۹\rho_L$$

گام دوم: میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای Q را محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{E}_۲=k\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}'|^۳}(\vec{r}-\vec{r}'),\ \begin{cases}\vec{r}=R\,\hat{a}_R\\ \vec{r}'=\hat{a}_R\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(\vec{r}-\vec{r}')=(R-۱)\hat{a}_R\\ |\vec{r}-\vec{r}'|=(R-۱)\end{cases}$$

$$\vec{E}_۲=\frac{kQ}{(R-۱)^۳}(R-۱)\hat{a}_R=k\frac{Q}{(R-۱)^۲}\hat{a}_R$$

پس اختلاف پتانسیل ناشی از بار نقطه‌ای $V_۲$ برابر است با:

$$V_۲=-\int_B^A\vec{E}_۲.d\vec{l}=-\int_{r=۵}^{۴}\frac{۹\times۱۰^۹\times۱/۸\times۱۰^{-۹}}{(R-۱)^۲}dR=۱۶/۲\left[\frac{۱}{R-۱}\right]_{R=۵}^{۴}=۱۶/۲\left[\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}\right]=۱/۳۵\,V$$

گام سوم: از جمع آثار استفاده کرده و V_{AB} را به دست می‌آوریم:

نزدیکترین گزینه به پاسخ ما گزینه (۲) می‌باشد.

$$V_{AB}=V_۱+V_۲=۴/۰۲\times۱۰^۹\rho_L+۱/۳۵=۱\Rightarrow\rho_L=-۸/۷۱\times۱۰^{-۱۱}(\frac{C}{m})$$

مثال ۸: یک بار نقطه‌ای در مبدأ مختصات قرار گرفته است. اگر اختلاف پتانسیل بین دو نقطه (۱,۰,۰)A و (۲,۰,۰)B برابر باشد با $V_{AB}=۱۰(v)$، فاصله نقطه C روی محور X از مبدأ چقدر باشد تا $V_{BC}=۶(v)$ شود؟

۱) ۵m
۲) ۳m
۳) ۱/۴m
۴) ۱/۲m

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» **گام اول:** طبق الگوریتم گفته شده عمل می‌کنیم. ابتدا از اختلاف پتانسیل V_{AB} داده شده استفاده می‌کنیم تا مقدار a را به دست آوریم.

$$V_{AB}=-\int_B^A\vec{E}.d\vec{l}=-\int_{r=۲}^{۱}\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}dr=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[\frac{۱}{r}\right]_{r=۲}^{۱}=\frac{Q}{۸\pi\varepsilon_۰}\Rightarrow V_{AB}=۱۰=\frac{Q}{۸\pi\varepsilon_۰}\rightarrow\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰}=۲۰$$

گام دوم: از اختلاف پتانسیل داده شده V_{BC} استفاده می‌کنیم تا نقطه C را پیدا کنیم.

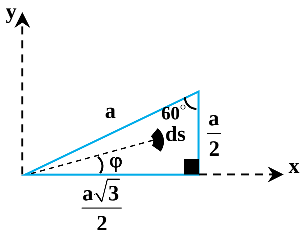
$$V_{BC}=-\int_C^B\vec{E}.d\vec{l}=-\int_{r=C}^{۲}\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}dr=-\int_{r=C}^{۲}\frac{۲۰}{r^۲}dr=۲۰\left[\frac{۱}{r}\right]_{r=c}^{۲}=۲۰\left[\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{C}\right]$$

$$۶=۲۰\left[\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{C}\right]\Rightarrow۰/۳=۰/۵-\frac{۱}{C}\Rightarrow C=۵(m)$$

مثال۹: بار سطحی $\sigma=\pi\varepsilon_0$ روی سطح مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی روی یکی از رأس‌های مثلث را حساب کنید.

۱) $\frac{a}{4}\ln\sqrt{3}$ ۲) $\frac{a\sqrt{3}}{4}\ln(2+\sqrt{3})$ ۳) $\frac{a}{4}\ln(2+\sqrt{3})$ ۴) $\frac{a\sqrt{3}}{4}\ln\sqrt{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا پتانسیل الکتریکی را برای یک مثلث قائم‌الزاویه به شکل روبه‌رو که نصف مثلث متساوی‌الاضلاع است، حساب می‌کنیم. در اینصورت سپس پتانسیل مثلث متساوی‌الاضلاع، ۲ برابر این مقدار خواهد بود. (برای حل مسئله از دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم.)



$$V=\int_{\varphi=0}^{30}\int_{\rho=0}^{\frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos\varphi}}\frac{\sigma\rho d\rho d\varphi}{4\pi\varepsilon_0\rho}=\frac{1}{4}\int_{\varphi=0}^{30}\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\cos\varphi}d\varphi=\frac{a\sqrt{3}}{8}\ln(\sec\varphi+\tan\varphi)\Big|_0^{30}=\frac{a\sqrt{3}}{8}\ln\left[\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right]=\frac{a\sqrt{3}}{8}\ln\frac{3\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{8}\ln\sqrt{3}$$

پس جواب برابر $\frac{a\sqrt{3}}{4}\ln\sqrt{3}$ است.

مثال۱۰: اگر یک بار نقطه‌ای در مکان $(2,1,3)$ قرار داشته باشد، نسبت پتانسیل الکتریکی نقطه $(-1,1,0)$ به پتانسیل نقطه $(1,-1,0)$ چقدر است؟

۱) ۰/۶۸ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸۸ ۴) ۰/۹۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» پتانسیل الکتریکی نقطه‌ای به فاصله r از بار نقطه‌ای q به صورت زیر است:

$$V(R)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\Rightarrow\frac{V(R_1)}{V(R_2)}=\frac{R_2}{R_1}$$

پس کافی است فاصله نقاط نامبرده در مسأله را از بار نقطه‌ای q به دست آوریم:

$$R_1=\sqrt{(-1-2)^2+(1-1)^2+(0-3)^2}=3\sqrt{2}\quad,\quad R_2=\sqrt{(1-2)^2+(-1-1)^2+(0-3)^2}=\sqrt{14}$$

$$\frac{V(R_1)}{V(R_2)}=\frac{\sqrt{14}}{3\sqrt{2}}\approx 0/88$$

مثال۱۱: بار $+Q$ به صورت یکنواخت روی سطح یک پوسته کروی به شعاع R پخش شده است. از طرفی در مرکز این کره یک ابر کروی با شعاع $\frac{R}{2}$، چگالی بار یکنواخت و بار کل $-Q$ قرار دارد. پتانسیل در نقطه‌ای درون ابر کروی به فاصله r از مرکز آن به چه صورت است؟

۱) $-\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 R}[(\frac{r}{R})^2-\frac{1}{2}]$ ۲) $\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 R}[(\frac{r}{R})^2-\frac{1}{2}]$ ۳) $-\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 R}[(\frac{r}{R})^2-\frac{1}{4}]$ ۴) $\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 R}[(\frac{r}{R})^2-\frac{1}{4}]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» بر طبق قانون گاوس داریم:

$$\vec{E}=\begin{cases}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{rQ}{(\frac{R}{2})^3}\hat{a}_r & ,\ 0\le r\le\frac{R}{2}\\ -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{a}_r & ,\ \frac{R}{2}\le r<R\\ 0 & ,\ r>R\end{cases}$$

با صفر در نظر گرفتن پتانسیل در بی‌نهایت، پتانسیل در $r < \frac{R}{2}$ به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}.d\vec{l} = -\int_{-\infty}^{R} 0\, d\vec{l} - \int_{R}^{\frac{R}{2}} \left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{Q}{r^2}\hat{a}_r.\hat{a}_r\, dr - \int_{\frac{R}{2}}^{r} \left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{rQ}{\left(\frac{R}{2}\right)^3}\hat{a}_r.\hat{a}_r dr$$

و در نتیجه داریم:

$$V(r) = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 R}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1}{2}\right]$$

مثال ۱۲: **اگر در سطح بسته S هیچگونه بار الکتریکی موجود نباشد و تمامی نقاط این سطح بسته دارای پتانسیل معلوم V_0 باشند، در مورد نقاط داخل این سطح بسته می‌توان گفت:**

۱) پتانسیل برابر صفر است.

۲) شدت میدان الکتریکی برابر صفر است.

۳) در حالت کلی پتانسیل نقاط داخل سطح بسته متفاوتند.

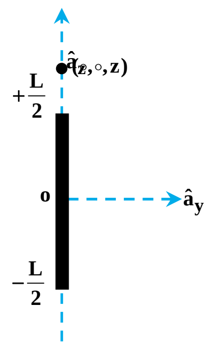
۴) شدت میدان الکتریکی برابر مقدار ثابتی مخالف صفر است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا میدان الکتریکی درون سطح بسته را به دست می‌آوریم. براساس قانون گاوس خواهیم داشت:

$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = 0$$

همانطور که می‌بینید بار داخل سطح بسته صفر است، پس بدون هیچ تردیدی گزینه ۲ درست می‌باشد.

مثال ۱۳: **پتانسیل الکتریکی بر روی محور z در نقطه $(0,0,z)$ وقتی $z > \frac{L}{2}$ است، برای یک توزیع بار الکتریکی خطی یکنواخت مطابق شکل مقابل و به طول L و چگالی بار ρ_l کدام است؟**



۱) $V = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{z-\frac{L}{2}}{z+\frac{L}{2}}$

۲) $V = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z-\frac{L}{2}}{z+\frac{L}{2}}\right)^2$

۳) $V = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z+\frac{L}{2}}{z-\frac{L}{2}}\right)^2$

۴) $V = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{z+\frac{L}{2}}{z-\frac{L}{2}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» فرمول مربوط به محاسبه پتانسیل الکتریکی ناشی از یک بار خطی را می‌نویسیم.

$$V = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\rho_l'\ dl'}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}$$

برای محاسبه آن لازم است که برخی از پارامترها را تعیین کنیم.

$$\rho_l' = \rho_l \quad , \quad dl' = dz' \quad , \quad \vec{r} = z\hat{a}_z \quad , \quad \vec{r}' = z'\hat{a}_z \quad , \quad \left|\vec{r}-\vec{r}'\right| = z - z'$$

$$V = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\rho_l\, dz'}{4\pi\varepsilon_0(z-z')} = \frac{-\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln\left[z-\frac{L}{2}\right] - \ln\left[z+\frac{L}{2}\right]\right)$$

$$V = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln\left[z+\frac{L}{2}\right] - \ln\left[z-\frac{L}{2}\right]\right) = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{z+\frac{L}{2}}{z-\frac{L}{2}}\right]$$

راستی! یک بار میدان الکتریکی این سؤال را محاسبه کرده‌ایم. یادتان می‌آید چه انتگرال‌گیری پیچیده‌ای داشت؟ پس منتظر یک مژده باشید که بتوانید از روی پتانسیل الکتریکی، میدان الکتریکی را به دست آورید.

مثال ۱۴: دیسک بارداری به شعاع $5m$ با کل بار $10^{-8}\,C$ بر روی صفحه $z=0$ قرار گرفته است. پتانسیل حاصل از این دیسک در نقطه $(0,0,5)$ را به دست آورید.

۱) $8/9\,(V)$ ۲) $10/3(V)$ ۳) $12/6(V)$ ۴) $14/9(V)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» رابطه زیر را برای محاسبه پتانسیل دیسک می‌نویسیم.

$$V=\int\frac{\rho'_s\,ds'}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}=k\int\frac{\rho'_s\,ds'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}$$

حال باید هر یک از پارامترها را در رابطه مشخص کنیم.

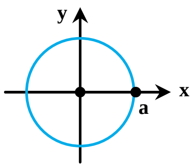
$$\rho'_s=\frac{Q}{S}=\frac{10^{-8}}{\pi(5)^2}=\frac{10^{-8}}{25\pi}\qquad,\qquad ds'=r'dr'd\phi'$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}=5\hat{a}_z\\ \vec{r}'=r'\hat{a}_r\end{array}\right.\Rightarrow\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|=(25+r'^2)^{\frac{1}{2}}$$

با یک جایگذاری ساده، پاسخ سؤال به‌دست خواهد آمد.

$$V=9\times10^9\int_{\phi'=0}^{2\pi}\int_{r'=0}^{5}\frac{\frac{10^{-8}}{25\pi}\times r'dr'd\phi'}{(25+r'^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{90}{25\pi}\left[\sqrt{25+r'^2}\right]_{r'=0}^{5}\left[\phi'\right]_{\phi'=0}^{2\pi}\Rightarrow V=\frac{90}{25\pi}\left[\sqrt{50}-5\right]\left[2\pi\right]=14/9\ V$$

مثال ۱۵: پتانسیل الکتریکی در مرکز یک حلقه با چگالی بار الکتریکی ρ_0 کدام است؟



۱) $\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}$

۳) $\frac{4\rho_0}{\varepsilon_0}$ ۴) $\frac{2\rho_0}{\varepsilon_0}$

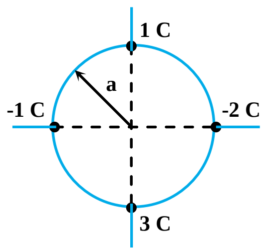
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به رابطه پتانسیل الکتریکی برای توزیع بار خطی داریم:

$$V(r)=\int\frac{\rho_0\,dl'}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\ ,\quad\left.\begin{array}{l}\vec{r}=0\\ \vec{r}'=a\hat{a}_r\end{array}\right\}\Rightarrow\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|=\left|-a\hat{a}_r\right|=a$$

چون پتانسیل در مرکز حلقه خواسته شده است، $\vec{r}=0$ می‌باشد و $\vec{r}'$ نقاط روی دایره است. بنابراین $\vec{r}'=a\hat{a}_r$. همان‌طور که در فصل اول گفتیم، جزء دیفرانسیل طولی (dl') در مختصات استوانه‌ای برابر $dl'=ad\varphi$ است. با قرار دادن $\vec{r}$ و $\vec{r}'$ و dl' در رابطه بالا داریم: $(0<\varphi<2\pi)$

$$V(r)=\int_0^{2\pi}\frac{\rho_0\,ad\varphi}{4\pi\varepsilon_0 a}=\frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\times2\pi=\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}$$

مثال ۱۶: چهار بار نقطه‌ای ۱- ، ۳، ۲- ، ۱ کولنی مطابق شکل مقابل روی محیط دایره‌ای به شعاع a مفـــروض است. هر یک از این بارها را به ترتیب روی محیط دایره به اندازه 45° در جهت عقربه ساعت می‌چرخانیم. کل کار انجام شده چقدر است؟



۱) $\frac{(\sqrt{3}+4)q^2}{2\varepsilon_0}$ ۲) صفر

۳) $\frac{(2\sqrt{3}+3)q^2}{2\varepsilon_0}$ ۴) $\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{2}q^2}{4\pi\varepsilon_0}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به اینکه موقعیت بارها نسبت به یکدیگر تغییر نمی‌کند، بنابراین انرژی الکتریکی در هر دو حالت یکسان است و بنـابراین کار انجام شده برابر صفر است.

مثال ۱۷: نسبت انرژی الکتریکی W لازم برای تشکیل یک لایه بار الکتریکی در فضای خالی بین دو سطح کروی $r = a$ و $r = 2a$ با چگالی حجمی ثابت ρ_0 به کل بار الکتریکی Q موجود در لایه چقدر است؟

۱) $\frac{W}{Q} = \frac{15}{24}\frac{a^2\rho_0}{\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{W}{Q} = \frac{47}{70}\frac{a^2\rho_0}{\varepsilon_0}$ ۳) $\frac{W}{Q} = \frac{35}{48}\frac{a^2\rho_0}{\varepsilon}$ ۴) $\frac{W}{Q} = \frac{31}{35}\frac{a^2\rho_0}{\varepsilon_0}$

پاسخ: گزینه «۲» برای حل این سوال ابتدا بیایید کار لازم برای تشکیل لایه را محاسبه کنیم. $W = \int V\,dq = \int V\rho dv$

در انتگرال $W = \int V\rho dv$ فقط rهای مربوط به ناحیه بار $(a < R < 2a)$ تأثیرگذار هستند. بنابراین به ازای $a < R < 2a$ داریم:

$$V = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 R} = \frac{\int \rho_0\,dv}{4\pi\,\varepsilon_0 R} = \frac{\rho_0[\frac{4}{3}\pi(R^3 - a^3)]}{4\pi\,\varepsilon_0\,R} = \frac{\rho_0(R^3 - a^3)}{3\varepsilon_0\,R}$$

$$W = \int \frac{\rho_0(R^3 - a^3)}{3\varepsilon_0\,R}(\rho_0\,R^2\sin\theta dR\,d\theta d\phi) = \frac{\rho_0^2}{3\varepsilon_0}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{R=a}^{2a}(R^4 - R\,a^3)\sin\theta\,dRd\theta\,d\phi$$

$$= \frac{4\pi\rho_0^2}{3\,\varepsilon_0}\left[\frac{R^5}{5} - \frac{R^2\,a^3}{2}\right]_{R=a}^{2a} = \frac{4\pi\,\rho_0^2}{3\varepsilon_0}\left[\frac{32a^5}{5} - \frac{4\,a^5}{2} - \frac{a^5}{5} + \frac{a^5}{2}\right] = \frac{4\pi\rho_0^2}{3\,\varepsilon_0}\left[\frac{47\,a^5}{10}\right]$$

و اما مقدار بار Q برابر است با:

$$Q = \int \rho_0 dv = \rho_0\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{R=a}^{2a} R^2\,\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$\rho_0\left[\frac{R^3}{3}\right]_{R=a}^{2a}[-\cos\theta]_{\theta=0}^{\pi}[\phi]_{\phi=0}^{2\pi} = \frac{4\pi}{3}\rho_0\left[8a^3 - a^3\right] = \frac{4}{3}\pi\rho_0\left[7a^3\right]$$

و حالا آنچه را مسأله از ما خواسته به دست می‌آوریم:

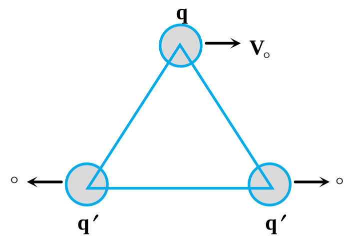
$$\frac{W}{Q} = \frac{\frac{4\pi\,\rho_0^2}{3\,\varepsilon_0}\left[\frac{47}{10}\,a^5\right]}{\frac{4\pi}{3}\rho_0\,\left[7a^3\right]} = \frac{47}{70}\,\frac{a^2\,\rho_0}{\varepsilon_0}$$

آزمون فصل سوم

۱ـ روی سطح یک نیمکره و قاعده آن باری با چگالی یکنواخت σ قرار دارد. پتانسیل در مرکز قاعده آن کدام است؟

۱) $\frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}$ ۲) $\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0}$ ۳) $\frac{\sigma a^2}{2\varepsilon_0}$ ۴) $\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}$

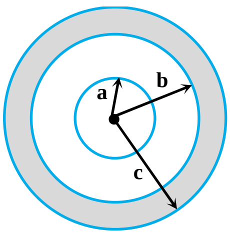
۲ـ سه کره یکسان به شعاع a در سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول L قرار گرفته‌اند. در ابتدا پتانسیل کره‌ها به ترتیب $V_0, 0, 0$ و بار آنها به ترتیب q, q', q' می‌باشد. اگر هر سه کره را به پتانسیل یکسان V متصل نماییم، بار هر یک از آنها برابر q'' خواهد شد. کدام رابطه زیر صحیح است؟



۱) $q''=(2q+q')\frac{V}{V_0}$ ۲) $q''=(2q'+q)\frac{V}{V_0}$

۳) $q''=(2q'-q)\frac{V}{V_0}$ ۴) $q''=(2q-q')\frac{V}{V_0}$

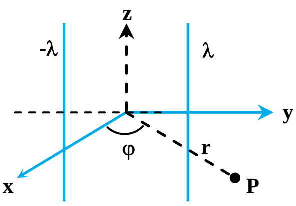
۳ـ کره هادی به شعاع a توسط یک پوسته کروی هادی هم مرکز با آن به شعاع داخلی b و شعاع خارجی c احاطه شده است. بار نقطه‌ای q را روی کره هادی داخلی قرار می‌دهیم، پتانسیل پوسته بیرونی در این حالت نسبت به نقطه‌ای در بی‌نهایت برابر V_0 می‌گردد. اگر بار q را از کره داخلی به پوسته بیرونی منتقل کنیم پتانسیل کره داخلی نسبت به نقطه‌ای در بی‌نهایت چقدر خواهد شد؟



۱) $V_0\frac{a}{c}$ ۲) $V_0\frac{a}{b}$

۳) V_0 ۴) $V_0\frac{a}{c-b}$

۴ـ دو بار خطی با چگالی‌های λ و −λ به ترتیب در $y=\frac{d}{2}$ و $y=-\frac{d}{2}$ قرار دارند. پتانسیل الکتریکی در نقطه $P(r,\varphi)$ کدام است؟ $(r>>d)$



۱) $V=\frac{\lambda d\sin\varphi}{2\pi\varepsilon_0 r}$ ۲) $V=\frac{-\lambda d\sin\varphi}{2\pi\varepsilon_0 r}$

۳) $V=\frac{\lambda d\cos\varphi}{2\pi\varepsilon_0 r}$ ۴) $V=\frac{-\lambda d\cos\varphi}{2\pi\varepsilon_0 r}$

۵ـ در یک میدان یکنواخت اختلاف پتانسیل بین نقاط $A(1,0,0)$ و $B(2,0,0)$ برابر ۱۰ ولت می‌باشد. هرگاه داشته باشیم $C(c,0,0)$ و $V_{BC}=6\,v$ در این صورت مقدار c کدام است؟

۱) ۵/۹ ۲) ۳/۲ ۳) ۲/۶ ۴) ۱/۸

۶ـ شدت میدان الکتریکی $\vec{E}=\frac{-10}{r^2}\hat{a}_r$ در مختصات کروی داده شده است. پتانسیل نقطه $(2,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ نسبت به نقطه $(5,\frac{\pi}{4},\pi)$ کدام است؟

۱) -3^V ۲) $+6^V$ ۳) 3^V ۴) -6^V

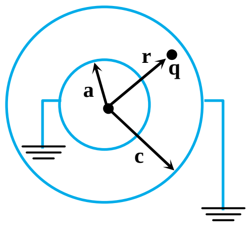
۷ـ اختلاف کار لازم برای آوردن بار نقطه‌ای $Q=5^{nc}$ از بی‌نهایت به نقطه $r=3\,m$ و از بی‌نهایت به نقطه $r=5\,m$ در میدان الکتریکی $\vec{E}=\frac{10^4}{r}\hat{a}_r$ کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $+2/55\times10^{-5}$ J ۲) $-1/65\times10^{5}$ J ۳) $-3/35\times10^{5}$ J ۴) $4/25\times10^{-5}$ J

۸ـ سه کره هادی هم اندازه در سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارند. کره اول را توسط یک باتری به پتانسیل V وصل کرده و سپس آن را از باتری جدا می‌کنیم. بار Q_1 روی این کره باقی می‌ماند. سپس کره دوم را به پتانسیل V وصل کرده و آن را جدا می‌کنیم. بار Q_2 روی این کره باقی می‌ماند. حال اگر کره سوم را به پتانسیل V وصل کرده و آن را از باتری جدا کنیم چه باری روی آن خواهیم داشت؟

۱) $Q_3=\frac{Q_2}{Q_1}$ ۲) $Q_3=Q_2+Q_1$ ۳) $Q_3=\frac{Q_2^2}{Q_1}$ ۴) $Q_3=\frac{Q_1Q_2}{Q_1+Q_2}$

۹ـ دو پوسته کروی هم مرکز به شعاع a و c $(c > a)$ به زمین متصل شده‌اند. بار نقطه‌ای q را در فاصله r $(a < r < c)$ از مرکز پوسته‌ها قرار می‌دهیم. بار القاء شده روی پوسته خارجی کدام است؟



۱) $-\frac{a(c-r)}{r(c-a)}q$

۲) $-\frac{c(r-a)}{r(c-a)}q$

۳) $-\frac{a^2}{a^2+c^2}q$

۴) $-\frac{a(c-r)}{c(r-a)}q$

۱۰ـ پتانسیل الکتریکی $V = V_0 \sin^2\varphi$ روی محیط حلقه‌ای به شعاع R توزیع شده است. پتانسیل در مرکز حلقه کدام است؟

۱) V_0 ۲) $\frac{V_0}{3}$ ۳) $\frac{V_0}{2}$ ۴) $2V_0$

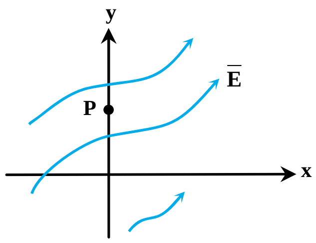
۱۱ـ پتانسیل کره‌ای رسانا به شعاع R، V_0 است. این کره توسط یک پوسته کروی رسانای بی بار به شعاع داخلی R_1 و خارجی R_2 پوشانیده شده است. پتانسیل کرۀ داخلی کدام است؟

۱) V_0 ۲) $V_0(1+\frac{R}{R_2}-\frac{R}{R_1})$ ۳) $V_0(1-\frac{R}{R_2}-\frac{R}{R_1})$ ۴) $\frac{V_0 R}{(R+R_1+R_2)}$

۱۲ـ چگالی بار الکتریکی یکنواخت $\rho_0(\frac{C}{m^3})$ در حجم کره‌ای از عایق کامل به شعاع a و ضریب دی‌الکتریک ε حضور دارد. پتانسیل الکتریکی داخل عایق چقدر است؟

۱) $\frac{\rho_0}{6\varepsilon}a^2-\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}r^2$ ۲) $\frac{\rho_0}{6(\varepsilon-\varepsilon_0)}(a^2-r^2)$ ۳) $\frac{\rho_0}{6}[\frac{a^2}{\varepsilon-\varepsilon_0}+\frac{r^2}{\varepsilon_0}]$ ۴) $\frac{\rho_0}{6\varepsilon}(a^2-r^2)+\frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0}$

۱۳ـ پتانسیل الکتریکی در صفحه $z = 0$ با رابطۀ $\phi(x,y) = -e^{-x}\sin y$ داده شده است. اگر یک الکترون در نقطه $P(0,\frac{\pi}{2})$ قرار داده شود، زاویه بین محور yها و جهت شروع حرکت الکترون چند درجه است؟



۱) ۳۰ ۲) ۶۰

۳) ۱۲۰ ۴) ۱۵۰

۱۴ـ سه بار الکتریکی q با جرم m در رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a قرار گرفته‌اند. اگر یکی از بارها مجاز به حرکت باشد و تنها نیروهای کولنی حضور داشته و فضای آزاد بدون اصطکاک فرض شود، سرعت آن در بی‌نهایت برابر است با:

۱) $v=\frac{\sqrt{3}q}{\sqrt{ma\pi\varepsilon_0}}$ ۲) $v=\frac{q}{\sqrt{ma\pi\varepsilon_0}}$ ۳) $v=\frac{q}{\sqrt{2ma\pi\varepsilon_0}}$ ۴) $v=\frac{\sqrt{3}q}{\sqrt{2ma\pi\varepsilon_0}}$

۱۵ـ خود انرژی یک توزیع بار الکتریکی به شعاع R و چگالی یکنواخت ρ عبارت است از:

۱) $\frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2R^5$ ۲) $\frac{3\pi}{4\varepsilon_0}\rho^2R^5$ ۳) $\frac{3\pi}{14\varepsilon_0}\rho^2R^5$ ۴) $\frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\rho^2R^5$

۱۶ـ بار سطحی $\sigma = \alpha\rho$ روی بیضی به قطر بزرگ a و قطر کوچک b توزیع شده است. (α مقداری است ثابت و ρ شعاع در مختصات قطبی استوانه‌ای است). پتانسیل الکتریکی در مرکز بیضی کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\alpha ab\pi}{4\varepsilon_0}$ ۳) $\frac{\alpha(a^2+b^2)}{4\varepsilon_0}$ ۴) $\frac{\alpha ab}{8\varepsilon_0}$

۱۷ـ دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 در نقاط $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ قرار دارند و میدان‌های الکتریکی آن‌ها در نقطه $\vec{r}$ به ترتیب برابر با $\vec{E}_1(\vec{r})$ و $\vec{E}_2(\vec{r})$ می‌باشد. چگالی انرژی الکتریکی این دو بار در نقطه $\vec{r}$ کدام است؟

۱) $w = \varepsilon_0 \vec{E}_1 . \vec{E}_2$

۲) $w = \frac{\varepsilon_0}{2} E_2^2 + \varepsilon_0 \vec{E}_1 . \vec{E}_2$

۳) $w = \frac{\varepsilon_0}{2} E_1^2 + \varepsilon_0 \vec{E}_1 . \vec{E}_2$

۴) $w = \frac{\varepsilon_0}{2} E_1^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}_2^2 + \varepsilon_0 \vec{E}_1 . \vec{E}_2$

۱۸ـ برای تشکیل کره‌ای با چگالی حجمی ثابت ρ و شعاع b کدام انرژی لازم است؟

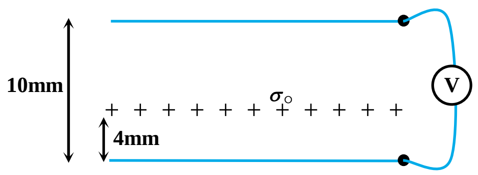
۱) $\frac{4\pi}{3\varepsilon_0} \rho^2 b^5$

۲) $\frac{4\pi}{3\varepsilon_0} b^5 \rho^2$

۳) $\frac{4\pi}{15\varepsilon_0} b^5 \rho^2$

۴) $\frac{4\pi}{9\varepsilon_0} b^2 \rho^3$

۱۹ـ همانند شکل در فضای بین دو صفحهٔ رسانای موازی نامتناهی، بار صفحه‌ای یکنواخت نامتناهی به چگالی σ_0 موجود است. اگر $\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = 100 \, V/m$، ولت‌متر متصل به دو صفحه چه ولتاژی را نشان می‌دهد؟



۱) $-0/2V$

۲) $0/2V$

۳) $-0/1V$

۴) $0/1V$

۲۰ـ پتانسیل الکتریکی را در ناحیهٔ $z > 0$ در خلأ به صورت $V = V_0 e^{-kx} \sin(kz)$ فرض می‌کنیم، که در آن V_0 و k اعداد ثابتی می‌باشند. اگر سطح $z = 0$ یک رسانای کامل باشد، مقدار بار نوار $0 < x < \infty$ و $0 < y < 1$ واقع بر صفحه $z = 0$ را به دست آورید.

۱) $-\varepsilon_0 V_0$

۲) $+\varepsilon_0 V_0$

۳) $-\frac{\varepsilon_0 V_0}{k^2}$

۴) $\frac{\varepsilon_0 V_0}{k^2}$

فصل چهارم

«الکترواستاتیک عایق‌ها و هادی‌ها»

تست‌های تألیفی فصل چهارم

مثال ۱: چگالی حجمی توزیع بار الکتریکی در کره‌ای به شعاع R با رابطه $\rho=\rho_0 r\cos\theta$ داده می‌شود که درآن ρ_0 ثابت و منفی است و r و θ مربوط به مختصات کروی است و مبدأ مختصات در مرکز کره واقع شده است. کدام گزینه صحیح است؟

۱) گشتاور دو قطبی این کره متناسب با R^2 و در راستای مثبت محور z ها است.

۲) گشتاور دو قطبی این کره مستقل از محل مبدأ مختصات است.

۳) گشتاور دو قطبی این کره صفر است.

۴) گشتاور دو قطبی این کره متناسب با R^5 و در راستای منفی محور z ها است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از رابطه‌ی گشتاور دو قطبی خواهیم داشت:

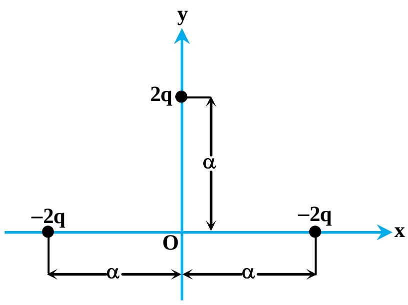
$$\vec{P}=\int\rho(r)\vec{r}d^3r'=\rho_0\int r\cos\theta r^2 dr d(\cos\theta)d\varphi r(\hat{z}\cos\theta+\hat{i}\sin\theta\cos\varphi+\hat{j}\sin\theta\sin\varphi)$$

که در آن برداری را به مختصات دکارتی تجزیه کرده‌ایم. انتگرال $\int_0^{2\pi}d\varphi\begin{Bmatrix}\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{Bmatrix}=0$ است. بنابراین تنها مؤلفه‌ی z باقی خواهد ماند:

$$\vec{P}=\rho_0\hat{z}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}r^4\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\phi dr$$

دقت کنید نیاز به محاسبه‌ی انتگرال نیست، زیرا به طور واضح گشتاور دو قطبی با توجه به منفی بودن ρ_0 در راستای $-\hat{z}$ است و با R^5 متناسب است لذا گزینه‌ی (۴) درست است.

مثال ۲: با توجه به رابطه $Q_{ij}=\int\limits_V(3x'_ix'_j-\delta_{ij}r'^2)\rho(\vec{r}')dv'$ مؤلفه Q_{xx} گشتاور چهارقطبی توزیع بار مقابل کدام است؟



۱) $-12qa^2$

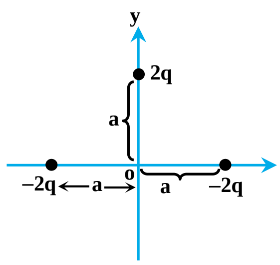
۲) $-10qa^2$

۳) صفر

۴) $2qa^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تانسور گشتاور چهار قطبی برابر است با: $Q_{ij}=\int\limits_V(3x'_ix'_j-\delta_{ij}r'^2)\rho(r')dv'$

چون بارها گسسته هستند پس تانسور گشتاور چهار قطبی به شکل زیر درمی‌آید:



$$Q_{ij}=\sum_{m=1}^{N}(3x'_{im}x'_{jm}-\delta_{ij}r'^2_m)q_m$$

بنابراین با توجه به موقعیت بارها داریم:

$$Q_{yy}=Q_{xy}=Q_{zx}=Q_{zy}=0$$

$$Q_{xx}=-10qa^2\quad,\quad Q_{yy}=\underset{0}{\cancel{4qa^2-4qa^2}}\ ,\quad Q_{zz}=2qa^2$$

مثال ۳: یک استوانه به شعاع a و طول L به صورت دائمی پلاریزه شده است به طوری که $\vec{P} = P_\circ \hat{a}_z$. کدام گزینه بارهای مقید حجمی و سطحی را به‌درستی مشخص می‌کند؟

۱) بار مقید حجمی صفر و بار مقید سطحی با چگالی $+P_\circ$ و $-P_\circ$ به ترتیب در قاعده بالا و پایین استوانه

۲) بار مقید حجمی صفر و بار مقید سطحی با چگالی $-P_\circ$ و $+P_\circ$ به ترتیب در قاعده بالا و پایین استوانه

۳) بار حجمی به چگالی $P_\circ$ در داخل استوانه

۴) صفر

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» همان‌طور که می‌دانید بردار عمود بر سطح جانبی استوانه $\hat{a}_r$ و بردار عمود بر سطح بالایی $\hat{a}_z$ و بر سطح پایینی $-a_z$ می‌باشد.

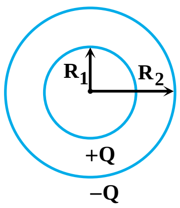
با ضرب داخلی این پارامترها در $\vec{P}$ می‌توان چگالی بار پلاریزه سطحی آن‌ها را به دست آوریم.

$$\rho_{sb} = \vec{P}.\hat{a}_n = \begin{cases} \vec{P}.\hat{a}_r = P_\circ \hat{a}_z.\hat{a}_r = \circ & \text{(سطح جانبی)} \\ \vec{P}.\hat{a}_z = P_\circ \hat{a}_z.\hat{a}_z = P_\circ & \text{(سطح بالایی)} \\ \vec{P}.(-\hat{a}_z) = -P_\circ & \text{(سطح پایینی)} \end{cases}$$

از طرف دیگر چگالی بار پلاریزه حجمی از طریق دیورژانس بردار $\vec{P}$ به دست می‌آید:

$$\rho_{vb} = -\vec{\nabla}.\vec{P} = \circ$$

مثال ۴: ضریب دی‌الکتریک عایق بین صفحات خازن استوانه‌ای نشان داده شده در شکل به طور خطی از ε_1 روی صفحه داخلی تا ε_2 روی صفحه خارجی تغییر می‌کند. بردار قطبی شدگی به چه صورت است؟



۱) $\dfrac{Q}{4\pi r^2}\left[1+\dfrac{\varepsilon_\circ}{\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{R_2-R_1}(r-R_1)+\varepsilon_1}\right]\hat{a}_r$

۲) $-\dfrac{Q}{4\pi r^2}\dfrac{\varepsilon_\circ}{\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{R_2-R_1}(r-R_1)+\varepsilon_1}\hat{a}_r$

۳) $\dfrac{Q}{4\pi r^2}\left[1-\dfrac{\varepsilon_\circ}{\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{R_2-R_1}(r-R_1)+\varepsilon_1}\right]\hat{a}_r$

۴) $\dfrac{Q}{4\pi r^2}\dfrac{\varepsilon_\circ}{\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{R_2-R_1}(r-R_1)+\varepsilon_1}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق قانون گاوس داریم:

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{a}_r$$

از طرفی می‌توان نوشت:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{R_2-R_1}(r-R_1)+\varepsilon_1$$

بنابراین میدان الکتریکی به صورت مقابل می‌باشد:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi r^2}\left[\frac{1}{\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{R_2-R_1}(r-R_1)+\varepsilon_1}\right]\hat{a}_r$$

در نتیجه بردار پلاریزاسیون از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\vec{P} = \vec{D}-\varepsilon_\circ\vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2}\left[1-\frac{\varepsilon_\circ}{\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{R_2-R_1}(r-R_1)+\varepsilon_1}\right]\hat{a}_r$$

روش رد گزینه: اگر محیط همگن باشد، یعنی $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_\circ$، آنگاه باید بردار پلاریزاسیون صفر شود، بنابراین فقط گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۵: در یک استوانه عایق به طول L که محور آن روی محور $\hat{a}_z$ قرار دارد، بردار قطبی شدگی الکتریکی یکنواخت بوده و برابر است با $\vec{P} = P_\circ \hat{a}_z$. میدان و پتانسیل ناشی از این قطبی شدگی در مرکز استوانه عبارت است از:

۱) پتانسیل صفر و میدان در جهت $-\hat{a}_z$ است.

۲) پتانسیل صفر و میدان در جهت $\hat{a}_z$ است.

۳) میدان صفر و پتانسیل مثبت است.

۴) میدان صفر و پتانسیل منفی است.

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$\rho_{sb} = \vec{P}.\hat{a}_n \qquad \rho_b = -\vec{\nabla}.\vec{P} = \circ$$

روی سطح جانبی استوانه نیز $\hat{a}_n = \hat{a}_r$ و بنابراین چگالی بار مقید سطحی صفر است. در نتیجه بار سطحی فقط روی قاعده بالائی و پایینی استوانه وجود دارد:

$$\rho_{sb} = \begin{cases} \vec{P}.\hat{a}_z = P_\circ & \text{قاعده بالایی} \\ \vec{P}.(-\hat{a}_z) = -P_\circ & \text{قاعده پایینی} \end{cases}$$

پس پتانسیل کل در مرکز صفر خواهد شد (پتانسیل ناشی از بارهای منفی و مثبت یکدیگر را خنثی می‌کنند). میدان کل هم در جهت $-\hat{a}_z$ خواهد شد (از مثبت به منفی).

مثال ۶: بار نقطه‌ای q در مرکز کره‌ای با شعاع R از جنس عایقی خطی با پذیرفتاری X_e قرار دارد. بار مقید روی سطح کره چقدر است؟

۱) $\dfrac{qX_e}{4\pi(1+X_e)R^2}$ ۲) $q\dfrac{X_e}{1+X_e}$ ۳) $\dfrac{qX_e}{4\pi(1-X_e)R^2}$ ۴) $\dfrac{qX_e}{2\pi(1+X_e)R^2}$

پاسخ : گزینه «۲» طبق قانون گاوس داریم:

$$\oint \vec{D}.d\vec{s} = q \Rightarrow \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{a}_r \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(1+X_e)r^2}\hat{a}_r$$

بنابراین بردار قطبش برابر است با:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 X_e \vec{E} = \frac{qX_e}{4\pi(1+X_e)r^2}\hat{a}_r$$

چگالی بار مقید سطحی از رابطه مقابل حاصل می‌شود:

$$\rho_{sb} = \vec{P}.\hat{a}_r|_{r=R} = \frac{qX_e}{4\pi(1+X_e)R^2}$$

بنابراین کل بار مقید سطحی برابر است با:

$$Q_s = \rho_{sb}(4\pi R^2) = q\frac{X_e}{1+X_e}$$

مثال ۷: یک استوانه عایق به شعاع a به ارتفاع h هم محور با محور z به صورت $\vec{P} = \frac{1}{r}\hat{a}_r + z\hat{a}_z$ به طور دائمی پلاریزه شده است. چگالی بار پلاریزه سطحی ρ_{sb} روی سطح جانبی استوانه کدام است؟

۱) $\rho_{sb} = \dfrac{1}{ah}$ ۲) $\rho_{sb} = \dfrac{1}{a}$ ۳) $\rho_{sb} = 0$ ۴) $\rho_{sb} = -1$

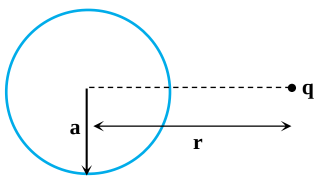
پاسخ: گزینه «۲» چگالی بار سطحی ρ_{sb} از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\rho_{sb} = \vec{P}.\hat{a}_n$$

روی سطح جانبی استوانه بردار واحد عمود بر سطح به صورت $\hat{a}_n = \hat{a}_r$ می‌باشد. بنابراین:

$$\rho_{sb} = (\frac{1}{r}\hat{a}_r + z\hat{a}_z).\hat{a}_r = \frac{1}{r} \xrightarrow{r=a} \rho_{sb} = \frac{1}{a}$$

مثال ۸: بار q در فاصله r از یک کره رسانا قرار دارد. کمترین بار مثبتی که می‌توان به یک کره رسانا به شعاع a افزود تا چگالی بار سطحی کره در تمام جای سطحش مثبت باشد، کدام است؟



۱) $\dfrac{a^2(3r+a)}{r(r+a)}$ ۲) $\dfrac{a}{r}q+q$ ۳) $\dfrac{a}{r}q$ ۴) $\dfrac{a^2(3r-a)}{r(r-a)}$

پاسخ: گزینه «۳» تصویر بار ناشی از بار q در فاصله $r' = \frac{a^2}{r}$ برابر است با $q' = \frac{-a}{r}q$. حال بار q'' که باید به کره اضافه کرد تا بار سطحی کره در تمامی نقاط مثبت باشد برابر است با $q''+q' > 0$. در نتیجه:

$$q'' = \frac{a}{r}q$$

مثال ۹: ناحیه $x < 0$ از ماده عایق ناهمگن $\varepsilon = \varepsilon_0(1+\frac{1}{x})\frac{F}{m}$ پر شده و در ناحیه $x > 0$ که هوا است، میدان الکتریکی $\bar{E} = E_0\hat{a}_x\frac{V}{m}$ وجود دارد. چگالی حجمی بارهای مقید در ناحیه $x < 0$ چقدر است؟

۱) $\rho_b = 0$ ۲) $\rho_b = \varepsilon_0 E_0(\dfrac{x+1}{x})\dfrac{c}{m^3}$ ۳) $\rho_b = \varepsilon_0 E_0(\dfrac{x}{x+1})\dfrac{c}{m^3}$ ۴) $\rho_b = \dfrac{\varepsilon_0 E_0}{(x+1)^2}\dfrac{c}{m^3}$

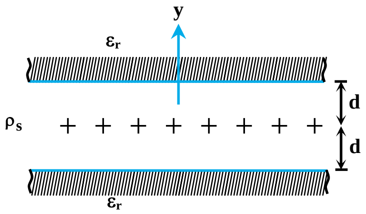
پاسخ: گزینه «۴» ابتدا با استفاده از شرایط مرزی، میدان در داخل ناحیه $x < 0$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \Rightarrow E_0\hat{a}_x = \vec{E}_{2t}$$

بنابراین میدان در ناحیه $x < 0$ برابر $E_0\hat{a}_x$ می‌باشد. برای به دست آوردن چگالی بار حجمی مقید باید ابتدا بردار $\vec{P}$ را به دست آوریم:

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_d = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r} = \frac{\varepsilon_0 E_0}{x+1} \quad , \quad \rho_b = -\vec{\nabla}.\vec{P} = \frac{\varepsilon_0 E_0}{(x+1)^2}$$

مثال۱۰: ناحیه $|y| > d$ در شکل زیر با عایقی به ضریب دی‌الکتریک نسبی ε_r پر شده است. در صفحه $y = 0$ بار سطحی نامتناهی به چگالی ثابت ρ_s وجود دارد که باعث قطبی شدگی فضای $y > d$ و $y < -d$ شده است. مطلوب است چگالی بار سطحی مقید ρ_{sb} ناشی از این قطبی شدگی بر روی فصل مشترک $y = d$.



۱) $\rho_{sb} = \frac{1-\varepsilon_r}{2\varepsilon_r}\rho_s$

۲) $\rho_{sb} = \frac{-1}{\varepsilon_r}\rho_s$

۳) $\rho_{sb} = -\rho_s$

۴) $\rho_{sb} = \frac{1-\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\rho_s$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا میدان الکتریکی در ناحیه $|y| < d$ را با استفاده از قانون گاوس پیدا می‌کنیم. سپس با استفاده از شرایط مرزی میدان در ناحیه $y > d$ را به دست می‌آوریم.

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{a}_y \qquad 0 < y < d$$

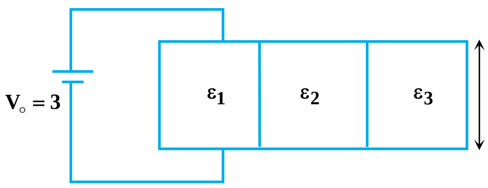
با استفاده از شرایط مرزی داریم (توجه شود که در مرز دو ناحیه بار آزاد وجود ندارد):

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \Rightarrow D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \varepsilon_0\varepsilon_r E_{1n} = \frac{\rho_S}{2} \Rightarrow \vec{E}_{1n} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon}\hat{a}_y$$

چون میدان مؤلفه مماسی ندارد بنابراین $\vec{E}_1 = \vec{E}_{1n}$ می‌باشد. پس ابتدا بردار $\vec{P}$ و سپس ρ_{sb} را به دست می‌آوریم:

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_d = (\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{\rho_s}{2\varepsilon}\hat{a}_z \quad , \quad \rho_{sb} = \vec{P}.(-\hat{a}_z) = \frac{1-\varepsilon_r}{2\varepsilon_r}\rho_s$$

مثال۱۱: سه محیط با گذردهی‌های $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$ و $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ و $\varepsilon_3 = 2\varepsilon_0$ مطابق شکل زیر به پتانسیل $V_0 = 3(v)$ متصل‌اند. میدان $\vec{E}_2$ و $\vec{E}_3$ به ترتیب کدام است؟



۱) $1\frac{V}{m}, 2\frac{V}{m}$

۲) $1\frac{V}{m}, 1\frac{V}{m}$

۳) $2\frac{V}{m}, 1\frac{V}{m}$

۴) $2\frac{V}{m}, 2\frac{V}{m}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق نکته بیان شده $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}_3 = \frac{3}{3}\frac{V}{m} = 1\frac{V}{m}$ پس گزینه (۲) صحیح است.

مثال۱۲: کره $R = 3$ رسانای کامل است. در نقطه $(1,2,-2)$ میدان به صورت $\vec{E} = E_x\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + E_z\hat{a}_z$. مجهول‌های E_x و E_z را پیدا کنید.

۱) $E_z = -2, E_x = 0$

۲) $E_z = 2, E_x = 1$

۳) $E_z = -2, E_x = -1$

۴) $E_z = -2, E_x = 1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» روی سطح کره رسانا میدان به فرم $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{a}_r$ است. پس باید در نقطه $(1,2,-2)$، $\hat{a}_r$ را به دست آوریم.

$$\hat{a}_r = \frac{\vec{R}}{|R|} = \frac{\hat{a}_x + 2\hat{a}_y - 2\hat{a}_z}{3} \Rightarrow \hat{a}_r = \frac{1}{3}\hat{a}_x + \frac{2}{3}\hat{a}_y - \frac{2}{3}\hat{a}_z \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}[\frac{1}{3}\hat{a}_x + \frac{2}{3}\hat{a}_y - \frac{2}{3}\hat{a}_z]$$

از طرفی میدان داده شده در صورت مسأله $E = E_x\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + E_z\hat{a}_z$ است. پس:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(\frac{2}{3}) = 2 \Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 3 \Rightarrow E_x = \frac{1}{3}(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}) = \frac{1}{3}(3) = 1 \quad , \quad E_z = -\frac{2}{3}(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}) = -\frac{2}{3}(3) = -2$$

مثال۱۳: در مثال بالا نیرویی که دو بار q_1 و q_2 به هم وارد می‌کنند، کدام است؟

۱) $\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

۲) صفر

۳) $-\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

۴) $\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0(R_1+R_2)^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق نکته بالا میدان خارج حفره به داخل حفره اثری ندارد، پس جواب صفر است.

مثال ۱۴: فضای بیرون یک حفره کروی به شعاع R به طور یکنواخت در راستای x قطبیده شده است. میدان مرکز حفره را پیدا کنید.

۱) $\frac{\vec{P}_0}{6\varepsilon_0}\hat{a}_x$ ۲) $\frac{\vec{P}_0}{3\varepsilon_0}\hat{a}_y$ ۳) $\frac{\vec{P}_0}{3\varepsilon_0}\hat{a}_x$ ۴) $\frac{\vec{P}_0}{6\varepsilon_0}\hat{a}_y$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از آنجا که به طور یکنواخت قطبیده شده پس $\nabla.\vec{P}=0$ و σ بار مقید سطحی روی سطح داخلی حفره:

$$\sigma_b=\vec{P}.(-\hat{a}_r)=P_0\hat{a}_x.(-\hat{a}_r)=-P_0\sin\theta\cos\varphi$$

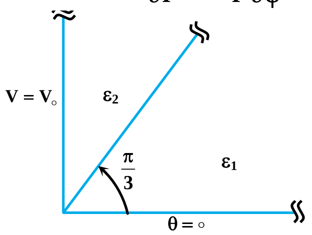
حال: $\vec{R}=-R\hat{a}_r$

$$E=\iint\frac{\sigma_b ds'}{4\pi^4.|R|^3}\vec{R}$$

$$\vec{E}=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-P_0\sin\theta'\cos\varphi'}{4\pi\varepsilon_0R^3}.R^2\sin\theta'd\theta'd\varphi'(-R\hat{a}_r)\Rightarrow\vec{E}=\frac{-P_0}{4\pi\varepsilon_0}\iint\sin^2\theta\cos\varphi[\sin\theta\cos\varphi\hat{a}_x+\sin\theta\sin\varphi\hat{a}_y+\cos\theta\hat{a}_z]$$

$$=-\frac{P_0\hat{a}_x}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\cos^2\varphi d\theta d\varphi=\frac{+P_0}{3\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

مثال ۱۵: دو نیم‌صفحه رسانا واقع در $\varphi=0$ و $\varphi=\frac{\pi}{2}$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای به ترتیب دارای پتانسیل‌های صفر و V_0 می‌باشند. ناحیه $0<\varphi<\frac{\pi}{3}$ را عایق کاملی با ضریب دی‌الکتریک ε_1 و ناحیه $\frac{\pi}{3}<\varphi<\frac{\pi}{2}$ را عایق دیگری با ضریب دی‌الکتریک ε_2 فرا گرفته است. (شکل زیر) به فرض اینکه تابع پتانسیل فقط تابع φ باشد چگالی بارهای سطحی مقید حاصل از دو قطبی شدن عایق‌ها در مرز $\varphi=\frac{\pi}{3}$ برابر است با: (در مختصات قطبی $\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial r}\hat{a}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{a}_\varphi$)



۱) $\rho_{sb}=\frac{V_0(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)r}$ ۲) $\rho_{sb}=\frac{V_0\varepsilon_0(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}{2\pi(\varepsilon_1-\varepsilon_2)r}$

۳) $\rho_{sb}=\frac{V_0\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r}$ ۴) $\rho_{sb}=\frac{6V_0\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\pi(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)r}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

روش اول: هرگاه $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ در این صورت مقدار بار سطحی مقید روی سطح مشترک دو عایق صفر خواهد بود. (گزینه ۱و ۲ نادرست‌اند) همچنین چگالی بار سطحی مقید در حالتی که کل ناحیه با ضریب دی‌الکتریک ε_1 را فلز در نظر بگیریم $(\varepsilon_1\to\infty)$ [بار خازن صفحه‌ای با $\varphi=\frac{\pi}{6}$] با چگالی بار سطحی مقید در حالتی که کل ناحیه با ضریب دی‌الکتریک ε_2 را فلز در نظر بگیریم [=بار خازن صفحه با $\varphi=\frac{\pi}{3}$] یکسان نخواهد بود. زیرا ظرفیت خازنی ناحیه دی‌الکتریک ε_2 دو برابر ظرفیت خازنی ناحیه ε_1 می‌باشد. این ویژگی فقط در گزینه ۴ وجود دارد.

روش دوم: حل این تست با استفاده از معادله لاپلاس می‌باشد که در چند فصل بعد آن را توضیح می‌دهیم.

با توجه به معادله لاپلاس $\vec{\nabla}V^2=0$ و همچنین فقط وابسته بودن پتانسیل به φ داریم:

$$\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}=0\Rightarrow\begin{cases}V_1=A_1\varphi+B_1 & \text{پتانسیل در ناحیه یک}\\ V_2=A_2\varphi+B_2 & \text{پتانسیل در ناحیه دو}\end{cases}$$

$$V_1(0)=0\Rightarrow B_1=0\qquad,\qquad V_2(\frac{\pi}{2})=V_0=A_2\times\frac{\pi}{2}+B_2\Rightarrow B_2=-\frac{A_2\pi}{2}+V_0$$

با استفاده از رابطه $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$ میدان الکتریکی را دو ناحیه به دست می‌آوریم:

$$\vec{E}_1=-\frac{1}{r}\frac{\partial V_1}{\partial\varphi}\hat{a}_\varphi\Rightarrow\vec{E}_1=-\frac{A_1}{r}\hat{a}_\varphi\quad;\quad\vec{E}_2=-\frac{1}{r}\frac{\partial V_2}{\partial\varphi}\hat{a}_\varphi\Rightarrow\vec{E}_2=-\frac{A_2}{r}\hat{a}_\varphi$$

با توجه به شرایط مرزی در $\varphi=\frac{\pi}{3}$ چونکه بار آزاد وجود ندارد مؤلفه‌های عمودی $\vec{D}$ باید مساوی باشند:

$$\left.\begin{array}{l}D_{1n}=D_{2n}\\D_{1n}=\varepsilon_1\vec{E}_1\\D_{2n}=\varepsilon_2\vec{E}_2\end{array}\right\}\Rightarrow\varepsilon_1\frac{A_1}{r}=\varepsilon_2\frac{A_2}{r}\Rightarrow A_2=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}A_1$$

با استفاده از شرط‌های بالا و شرط پیوسته بودن پتانسیل در $\varphi=\frac{\pi}{3}$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} V_1(\frac{\pi}{3})=V_2(\frac{\pi}{3}) \Rightarrow A_1\times\frac{\pi}{3}=A_2\times\frac{\pi}{3}+B_2 \\ A_2=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}A_1 \\ B_2=-\frac{A_2\pi}{2}+V_\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A_1=\frac{V_\circ}{\pi}\frac{6\varepsilon_2}{2\varepsilon_2+\varepsilon_1} \\ A_2=\frac{V_\circ}{\pi}\frac{6\varepsilon_1}{2\varepsilon_2+\varepsilon_1} \end{array}\right.$$

حال چگالی بار سطحی مقید را به دست می‌آوریم:

$$\rho_{sb1}=\varepsilon_\circ(\varepsilon_{r_1}-1)\vec{E}_1.\hat{a}_\varphi=-(\varepsilon_1-\varepsilon_\circ)\frac{V_\circ}{\pi r}\frac{6\varepsilon_2}{2\varepsilon_2+\varepsilon_1}$$

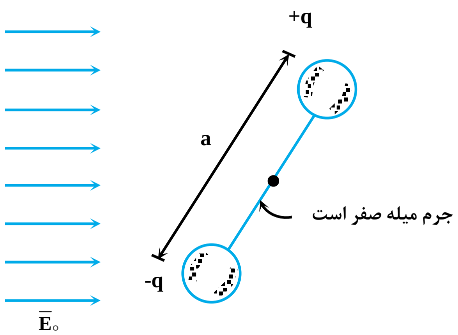
$$\rho_{sb2}=\varepsilon_\circ(\varepsilon_{r2}-1)\vec{E}_2.(-\hat{a}_\varphi)=+(\varepsilon_2-\varepsilon_\circ)\frac{V_\circ}{\pi r}\frac{6\varepsilon_1}{2\varepsilon_2+\varepsilon_1}$$

مقدار کل بار مقید روی مرز $\varphi=\frac{\pi}{3}$ برابر است با:

$$\rho_{sb1}+\rho_{sb2}=\frac{6V_\circ\varepsilon_\circ}{\pi r}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}$$

مثال ۱۶: **یک دو قطبی الکتریکی که می‌تواند بدون اصطکاک حول محورش دوران کند، همانند شکل در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}_\circ$ قرار گرفته است. اگر جرم کل دو قطبی m بوده و زاویهٔ اولیه دو قطبی با خطوط $\vec{E}_\circ$ بسیار کوچک باشد، دو قطبی با کدام فرکانس حول محورش نوسان می‌کند؟ (جواب‌ها برحسب هرتز هستند.)**

(برق ـ سراسری ۸۰)



۱) $\sqrt{\frac{q|\vec{E}_\circ|}{2ma}}$

۲) $\sqrt{\frac{q|\vec{E}_\circ|}{\pi ma}}$

۳) $\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{q|\vec{E}_\circ|}{ma}}$

۴) $2\sqrt{\frac{q|\vec{E}_\circ|}{ma}}$

پاسخ: گزینه «۳» انرژی یک دو قطبی $\vec{P}$ در میدان الکتریکی خارجی $\vec{E}$ برابر است با: $U=-\vec{P}.\vec{E}$ $\quad (P=qa)$

متوسط این انرژی در هر نوسان از رابطه مقابل به دست می‌آید: $U_{ave}=\frac{1}{2}qaE_\circ$

از طرفی انرژی یک نوسانگر با دامنه نوسان A و فرکانس f از رابطه مقابل به دست می‌آید: $U=\frac{1}{2}mA^2.4\pi^2f^2$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}qaE_\circ=\frac{1}{2}m(\frac{a}{2})^2.4\pi^2f^2$$

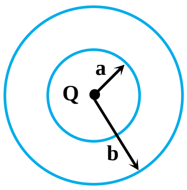
$$f=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{qE_\circ}{ma}}$$

آزمون فصل چهارم

۱ـ دو قطبی الکتریکی $P = P_0\hat{z}$ در مبدأ مختصات واقع است. انرژی الکترواستاتیکی موجود در فضای بیرون از کره‌ای به مرکز مبدأ و به شعاع R کدام است؟

۱) $\dfrac{P^2}{32\pi\varepsilon_0 R^3}$ ۲) $\dfrac{P^2}{16\pi\varepsilon_0 R^3}$ ۳) $\dfrac{P^2}{12\pi\varepsilon_0 R^3}$ ۴) $\dfrac{P^2}{64\pi\varepsilon_0 R^3}$

۲ـ یک پوسته کروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b از عایقی با ضریب گذردهی الکتریکی ε ساخته شده است. بار نقطه‌ای Q در مرکز این پوسته قرار دارد. انرژی ذخیره شده در پوسته کدام است؟



۱) $\dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon}(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b})$ ۲) $\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon}(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b})$

۳) $\dfrac{Q^2}{16\pi\varepsilon}(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b})$ ۴) $\dfrac{Q^2}{12\pi\varepsilon}(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b})$

۳ـ بار Q بر روی یک هادی کروی به شعاع R_1 قرار دارد. اطراف این هادی را تا شعاع R_2 با عایقی می‌پوشانیم. اگر گذردهی الکتریکی عایق ε باشد، چقدر انرژی صرف پوشاندن کره هادی شده است؟

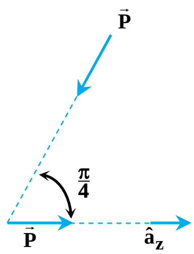
۱) $\dfrac{Q^2}{4\pi}(\dfrac{1}{\varepsilon_0}-\dfrac{1}{\varepsilon})(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2})$ ۲) $\dfrac{Q^2}{8\pi}(\dfrac{1}{\varepsilon_0}-\dfrac{1}{\varepsilon})(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2})$

۳) $\dfrac{Q^2}{4\pi(\varepsilon_0-\varepsilon)}(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2})$ ۴) $\dfrac{Q^2}{8\pi(\varepsilon_0-\varepsilon)}(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2})$

۴ـ بار Q به طور یکنواخت روی یک کره هادی به شعاع R توزیع شده است. نیمکره بالایی و نیمکره پایینی چه نیرویی بر یکدیگر وارد می‌کنند؟ (کره در فضای آزاد قرار دارد)

۱) $\dfrac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 R^2}$ ۲) $\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$ ۳) $\dfrac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2}$ ۴) $\dfrac{Q^2}{12\pi\varepsilon_0 R^2}$

۵ـ دو دو قطبی الکتریکی یکسان مطابق شکل قرار دارند. فاصله مراکز دو قطبی‌ها از یکدیگر برابر r بوده و راستای بردار دو قطبی‌ها با هم زاویه $\dfrac{\pi}{4}$ می‌سازند. نیرویی که این دو قطبی‌ها بر هم وارد می‌کنند کدام است؟



۱) $\dfrac{P^2}{2\pi\varepsilon_0 r^4}(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\hat{r}+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\hat{\theta})$ ۲) $\dfrac{P^2}{2\pi\varepsilon_0 r^4}(\sqrt{2}\hat{r}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\hat{\theta})$

۳) $\dfrac{P^2}{2\pi\varepsilon_0 r^4}(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\hat{r}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\hat{\theta})$ ۴) $\dfrac{P^2}{2\pi\varepsilon_0 r^4}(\sqrt{2}\hat{r}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\hat{\theta})$

۶ـ در یک دی‌الکتریک خطی و همگن با ضریب نفوذپذیری الکتریکی $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ چنانچه چگالی بارهای حجمی آزاد و مقید را به ترتیب با ρ_f و ρ_b نشان دهیم، کدام رابطه صحیح می‌باشد؟

۱) $\varepsilon_r = \dfrac{\rho_f}{\rho_f-\rho_b}$ ۲) $\varepsilon_r = \dfrac{\rho_f}{\rho_f+\rho_b}$ ۳) $\varepsilon_r = \dfrac{\rho_f-\rho_b}{\rho_f}$ ۴) $\varepsilon_r = \dfrac{\rho_f+\rho_b}{\rho_f}$

۷ـ صفحه $y-2x+2z=5$ مرز بین دو ناحیه با گذردهی‌های نسبی $\varepsilon_{r1} = 4/5$ و $\varepsilon_{r2} = 3$ است. مبدأ در ناحیه ۱ قرار دارد. اگر میدان ناحیه ۱ به صورت $E_1 = -4\hat{x}-2\hat{y}+6\hat{z}$ باشد، میدان در ناحیه ۲ کدام است؟

۱) $E_2 = 6\hat{x}-\hat{y}+8\hat{z}$ ۲) $E_2 = -6\hat{x}+\hat{y}+8\hat{z}$ ۳) $E_2 = -6\hat{x}-\hat{y}+8\hat{z}$ ۴) $E_2 = -6\hat{x}+3\hat{y}+6\hat{z}$

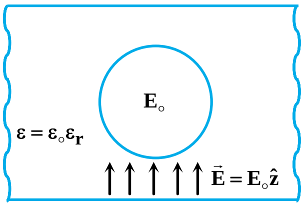
۸ـ بار نقطه‌ای q به فاصله d از مرز عایقی با گذردهی الکتریکی نسبی ε_r قرار دارد. کل بار القا شده روی سطح مرزی عایق کدام است؟

۱) $-\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}q$ ۲) $-\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}q$ ۳) $-\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r-1}q$ ۴) $-\frac{\varepsilon_r+1}{\varepsilon_r-1}q$

۹ـ ماده‌ای با ضریب گذردهی نسبی $\varepsilon = \frac{4\varepsilon_0}{(1+\frac{z}{d})^2}$ در فضای $0 \le z \le d$ قرار دارد. میدان الکتریکی $\vec{E} = E_0\hat{z}$ را به این ماده اعمال می‌کنیم. چگالی بارهای سطحی مقید روی سطوح $z=0$ و $z=d$ به ترتیب کدامند؟

۱) 0 و $-3\varepsilon_0 E_0$ ۲) $-3\varepsilon_0 E_0$ و 0 ۳) 0 و $-\varepsilon_0 E_0$ ۴) $-\varepsilon_0 E_0$ و 0

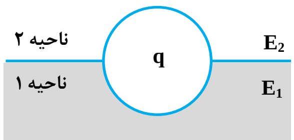
۱۰ـ در داخل یک قطعه دی‌الکتریک بزرگ به ضریب نفوذپذیری الکتریکی $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$، حفره‌ای کروی به شعاع a ایجاد شده است. اگر شدت میدان الکتریکی در داخل قطعه دی‌الکتریک یکنواخت و به صورت $\vec{E} = E_0\hat{z}$ باشد، شدت میدان الکتریکی در داخل حفره کدام گزینه می‌باشد؟



۱) $\frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}E_0\hat{z}$ ۲) $\frac{3\varepsilon_r}{2\varepsilon_r+1}E_0\hat{z}$

۳) $\frac{3\varepsilon_r}{\varepsilon_r+2}E_0\hat{z}$ ۴) $\frac{3}{\varepsilon_r+2}E_0\hat{z}$

۱۱ـ کره هادی به شعاع R در مرکز دو ناحیه با گذردهی‌های الکتریکی ε_1 و ε_2 قرار دارد، به نحوی که مرز دو ناحیه از مرکز کره می‌گذرد. اگر بار q روی کره قرار داشته باشد چگالی بارهای سطحی القاء شده در ناحیه ۱ کدام است؟



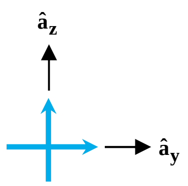
۱) $-\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)}{2\pi R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$ ۲) $-\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}{2\pi R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$

۳) $\frac{-(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}{4\pi R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$ ۴) $-\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)}{4\pi R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$

۱۲ـ درون ماده‌ای عایق میدان الکتریکی برقرار است. در کدام گزینه میدان به گونه‌ای است که باعث ایجاد چگالی بار مقید حجمی درون عایق می‌شود؟

۱) $E_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}$ ۲) $E_\theta = \frac{1}{r^2\sin\theta}$ ۳) $E_r = \frac{1}{r^2}$ ۴) $E_\theta = \frac{1}{r^2}$

۱۳ـ مطابق شکل دو دوقطبی الکتریکی عمود بر هم با گشتاورهای یکسان در مبدأ مختصات قرار دارند. میدان الکتریکی در کدام جهت دارای بیشترین مقدار است؟



۱) $\theta = \frac{\pi}{6}$ ۲) $\theta = \frac{\pi}{4}$

۳) $\theta = \frac{\pi}{3}$ ۴) $\theta = \frac{\pi}{2}$

۱۴ـ بار سطحی با چگالی σ روی سطح یک سهمی فلزی به معادله $y = x^2$ قرار دارد. میدان الکتریکی در نقطه $(1,1,2)$ به کدام صورت است؟

۱) $\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(2\hat{x}-\hat{y})$ ۲) $\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(2\hat{x}+\hat{y})$ ۳) $\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(\hat{x}-2\hat{y})$ ۴) $\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(-\hat{x}+2\hat{y})$

۱۵ـ محور استوانه‌ای به ارتفاع h و شعاع قاعده a با محور z زاویه α می‌سازد. درون این استوانه بردار قطبی شدگی به صورت $\vec{P} = P_0\hat{a}_z$ وجود دارد. کل بار حجمی مقید درون استوانه برابر است با:

۱) $Q_b = \pi a h P_0 \sin\alpha$ ۲) $Q_b = -\pi a h P_0 \sin\alpha$ ۳) $Q_b = 2\pi a h P_0 \sin\alpha$ ۴) $Q_b = -2\pi a h P_0 \sin\alpha$

فصل پنجم

«خازن‌ها»

تست‌های تألیفی فصل پنجم

مثال۱: بین صفحه‌های یک خازن موازی ـ صفحه یک دی‌الکتریک مجهول قرار گرفته است و خازن از خود ظرفیت C را نشان می‌دهد. دی‌الکتریک را از بین صفحات خازن خارج می‌کنیم و ظرفیت آن را اندازه می‌گیریم. در این حالت ظرفیت نصف شده است، ثابت دی‌الکتریک (ε) چقدر بوده است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 2 ۳) $\frac{\varepsilon_0}{2}$ ۴) $2\varepsilon_0$

پاسخ: گزینه «۴» توجه داشته باشید که ظرفیت خازن در حالت بدون دی‌الکتریک برابر $C_0 = \frac{1}{2}C$ می‌باشد. بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{C}{C_0} = \dfrac{C}{\frac{1}{2}C} = 2 \\[2ex] \dfrac{C}{C_0} = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon = 2\varepsilon_0$$

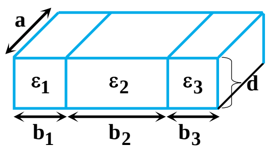
مثال۲: دو خازن استوانه‌ای C_1 و C_2 به شعاع‌های داخلی a و شعاع‌های خارجی b_1 و b_2 و طول L مفروض‌اند. در صورت برابر بودن بار الکتریکی ذخیره شده در دو خازن، b_2 چقدر باید تا انرژی ذخیره شده در خازن C_2 نصف خازن C_1 باشد؟ (انرژی ذخیره‌شده در خازن از رابطه $W = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ به‌دست می‌آید.)

۱) $\sqrt{ab_1}$ ۲) $\sqrt{2ab_1}$ ۳) $\frac{a^2}{b_1}$ ۴) $a + \frac{b_1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به رابطه‌ی انرژی و صورت سؤال خواهیم داشت:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{b}{a}} \quad ; \quad W_1 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1} \quad W_2 = \frac{1}{2}W_1 = \frac{q^2}{2C_2} \Rightarrow \frac{\ln\frac{b_1}{a}}{\ln\frac{b_2}{a}} = 2 \Rightarrow r = \sqrt{ab_1}$$

مثال۳: بین صفحه‌های یک خازن مسطح مطابق شکل زیر ۳ دی‌الکتریک با ثابت دی‌الکتریک $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ قرار داده‌ایم. ظرفیت خازن در این حالت نسبت به حالتی که بین صفحه‌های خازن دی‌الکتریکی با ثابت دی‌الکتریک $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ قرار گرفته است چقدر می‌باشد؟



۱) $\frac{\varepsilon_1 b_1 + \varepsilon_2 b_2 + \varepsilon_3 b_3}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}$ ۲) $\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{b_1 + b_2 + b_3}$

۳) $\frac{\varepsilon_1 b_1 + \varepsilon_2 b_2 + \varepsilon_3 b_3}{b_1 + b_2 + b_3}$ ۴) $\frac{\varepsilon_1 b_1 + \varepsilon_2 b_2 + \varepsilon_3 b_3}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)(b_1 + b_2 + b_3)}$

پاسخ: گزینه «۴» در حالت اول سه خازن موازی داریم که ظرفیت معادل از جمع ظرفیت این سه خازن به دست می‌آید:

$$C'_1 = C_1 + C_2 + C_3 \Rightarrow C'_1 = \frac{\varepsilon_1 ab_1}{d} + \frac{\varepsilon_2 ab_2}{d} + \frac{\varepsilon_3 ab_3}{d} = (\varepsilon_1 b_1 + \varepsilon_2 b_2 + \varepsilon_3 b_3)\frac{a}{d}$$

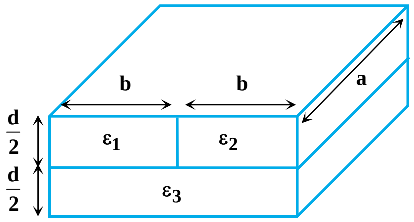
حال اگر دی‌الکتریک‌ها را از بین صفحه‌ها خارج کنیم و دی‌الکتریکی با ثابت دی‌الکتریک $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ قرار دهیم، ظرفیت خازن برابر است با:

$$C'_2 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)a(b_1 + b_2 + b_3)}{d}$$

پس نسبت ظرفیت خازن در هر دو حالت برابر است با:

$$\frac{C'_1}{C'_2} = \frac{\varepsilon_1 b_1 + \varepsilon_2 b_2 + \varepsilon_3 b_3}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)(b_1 + b_2 + b_3)}$$

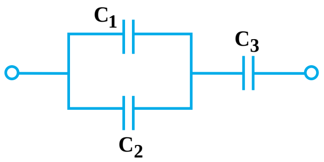
مثال۴: ظرفیت خازن زیر کدام است؟ (A سطح مقطع صفحات و d فاصله بین صفحات است)



۱) $\frac{A}{d}\frac{\varepsilon_۳\varepsilon_۱\varepsilon_۲}{\varepsilon_۱+\varepsilon_۲+\varepsilon_۳}$　　۲) $\frac{۲A}{d}\frac{\varepsilon_۳(\varepsilon_۱+\varepsilon_۲)}{۲\varepsilon_۳+\varepsilon_۱+\varepsilon_۲}$

۳) $\frac{۴A}{d}(\frac{\varepsilon_۳(\varepsilon_۱+\varepsilon_۲)}{\varepsilon_۳+\varepsilon_۱+\varepsilon_۲})$　　۴) $\frac{A}{d}\frac{\varepsilon_۳+\varepsilon_۱+\varepsilon_۲}{\varepsilon_۱\varepsilon_۲\varepsilon_۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» مرز مشترک دو محیط $\varepsilon_۱$ و $\varepsilon_۲$ عمود بر صفحات خازن است، پس دو خازن $C_۱$ و $C_۲$ با هم موازی‌اند و معادل این دو خازن با خازن $C_۳$ سری هستند. زیرا مرز مشترکشان موازی صفحات خازن است. پس معادل شکل مقابل را در زیر می‌نویسیم:



$$C_T=(C_۱+C_۲)\,||\,C_۳$$

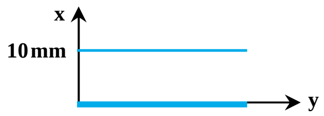
$$C_۱=\frac{\varepsilon_۱\frac{A}{۲}}{\frac{d}{۲}}=\frac{\varepsilon_۱A}{d}\quad,\quad C_۲=\frac{\varepsilon_۲\frac{A}{۲}}{\frac{d}{۲}}=\frac{\varepsilon_۲A}{d}\quad,\quad C_۳=\frac{\varepsilon_۳A}{\frac{d}{۲}}=\frac{۲\varepsilon_۳A}{d}$$

$$C_T=\frac{A}{d}(\varepsilon_۱+\varepsilon_۲)\,||\,\frac{۲\varepsilon_۳A}{d}=\frac{\frac{۲A^۲}{d^۲}\varepsilon_۳(\varepsilon_۱+\varepsilon_۲)}{\frac{A}{d}[۲\varepsilon_۳+\varepsilon_۱+\varepsilon_۲]}=\frac{\frac{۲A}{d}\varepsilon_۳(\varepsilon_۱+\varepsilon_۲)}{۲\varepsilon_۳+\varepsilon_۱+\varepsilon_۲}$$

مثال۵: یک خازن صفحه‌ای دارای صفحاتی است به مساحت $۱۰۰cm^۲$ که به فاصله $۱۰mm$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند. بین دو صفحه، دی‌الکتریک غیرهمگنی با تغییرات خطی $\varepsilon_r=۱$ تا $\varepsilon_r=۲۱$ قرار گرفته است. ظرفیت این خازن کدام است؟

۱) $۵/۴۲\varepsilon_۰$　　۲) $۶/۵۷\varepsilon_۰$　　۳) $۷/۸۱\varepsilon_۰$　　۴) $۸/۶۳\varepsilon_۰$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» فرض می‌کنیم که تغییرات در جهت عمود بر صفحه‌های خازن و خازن عمود بر محور xها باشد.



با توجه به مقادیر داده شده رابطه خطی ε_r به صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_r=۲۰۰۰x+۱$$

حال با استفاده رابطه انتگرالی خازن‌های سری که در متن درس معرفی کردیم داریم:

$$\frac{۱}{C}=\int_۰^{۰/۰۱}\frac{dx}{\varepsilon_۰\iint(۲۰۰۰x+۱)ds}=\frac{۱}{\varepsilon_۰\times۰/۰۱}\times\frac{۱}{۲۰۰۰}\ln(۲۰۰۰x+۱)\Big|_۰^{۰/۰۱}$$

$$\frac{۱}{C}=\frac{\ln ۲۱}{۲۰\varepsilon_۰}\Rightarrow C=۶/۵۷\varepsilon_۰$$

مثال۶: کره‌ای فلزی به شعاع a در فضای آزاد، هم مرکز با مبدأ مختصات و دارای پتانسیل $V_۰$ است. انرژی پتانسیل الکتریکی کل سیستم $W_۰$ چقدر است؟ (انرژی ذخیره‌شده در خازن از رابطه $\frac{۱}{۲}CV_۰^۲$ محاسبه می‌شود.)

۱) $۲\pi\varepsilon_۰aV_۰^۲$　　۲) $\frac{۲\pi\varepsilon_۰a^۲V_۰^۲}{\sqrt{a^۲-۲}}$　　۳) $\frac{۱}{۲}\pi\varepsilon_۰aV_۰^۲$　　۴) $\frac{۲\pi\varepsilon_۰a^۲V_۰^۲}{\sqrt{a^۲-\sqrt{۲}}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» همان‌طور که در تذکر قبل گفتیم، ظرفیت الکتریکی کره فلزی منفرد برابر است با:

$$C=۴\pi\varepsilon_۰a$$

با توجه به اینکه کره رسانا به پتانسیل $V_۰$ متصل است، بنابراین برای انرژی خازن خواهیم داشت:

$$W=\frac{۱}{۲}CV_۰^۲=۲\pi\varepsilon_۰aV_۰^۲$$

مثال ۷: یک کره مسی به شعاع ۵ سانتیمتر دارای ظرفیت C_1 می‌باشد. اگر لایه‌ای از دی‌الکتریک یکنواخت به ضخامت **d** بر روی کره مسی کشیده شده باشد، **d** را طوری تعیین کنید که ظرفیت خازن مجموعه جدید برابر با $2C_1$ شود. ($\varepsilon_r = 3$ (دی‌الکتریک) و ظرفیت بین دو کره هم مرکز به شعاع‌های **a** و **b** را برابر با $C = \dfrac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$ در نظر بگیرید.)

۱) $5cm$ ۲) $10\,cm$ ۳) $20\,cm$ ۴) $15cm$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به ظرفیت خازن کروی می‌توان نوشت: $C_1 = 4\pi\varepsilon_0 a$ (کره منزوی)

ظرفیت سیستم پس از کشیدن لایه‌ی دی‌الکتریک معادل دو خازن سری شده یکی با ضریب دی‌الکتریک $\varepsilon_r = 3$ (از $R = a$ تا $R = a+d$) و یکی با دی‌الکتریک هوا (از $R = a+d$ تا بی‌نهایت)

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0(a+d)} + \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a+d}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a+d}+\frac{1}{\varepsilon_r}.\frac{d}{a(a+d)}\right)$$

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0(a+d)}\left(1+\frac{d}{\varepsilon_r a}\right) \Rightarrow C_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0(a+d)}{1+\frac{d}{a\varepsilon_r}} \Rightarrow C_2 = 2C_1 \Rightarrow \frac{(a+d)}{1+\frac{d}{a\varepsilon_r}} = 2a \Rightarrow a+d = 2a+2a.\frac{d}{a\varepsilon_r}$$

$$a+d = 2a+\frac{2d}{\varepsilon_r} \Rightarrow d\left(1-\frac{2}{\varepsilon_r}\right) = 2a-a = a \Rightarrow d = \frac{a}{1-\frac{2}{\varepsilon_r}} \quad , \quad a = 5$$

$$\varepsilon_r = 3 \Rightarrow d = \frac{5}{1-\frac{2}{3}} = \frac{5}{\frac{1}{3}} = 3\times 5 = 15cm$$

مثال ۸: یک خازن کروی به شعاع‌های داخلی و خارجی ۴ و ۱۰ سانتی‌متر با عایق هوا مفروض است. ضخامت عایقی که با ثابت دی‌الکتریک نسبی $\varepsilon_r = 5$ باید روی سطح رسانای داخلی قرار دهیم تا ظرفیت خازنی سه برابر شود، چند سانتی‌متر است؟

۱) ۲   ۲) ۲/۵   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۴» در حالت اول ظرفیت خازن کروی برابر است با:

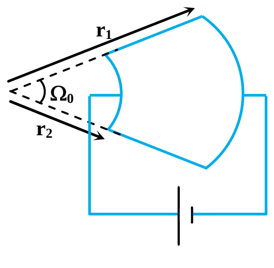
$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

در حالت دوم، مجموعه را می‌توان به منزله دو خازن سری با هم در نظر گرفت:

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{d}\right)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{b}\right)$$

$C_2 = 3C_1 \Rightarrow d = 8cm \Rightarrow$ ضخامت عایق $= d-a = 4cm$

مثال ۹: ظرفیت خازنی با دی‌الکتریک به شکل زیر و ضریب نفوذپذیری الکتریکی ε چقدر است؟ خازن شامل قطعه‌ای از یک مخروط با زاویهٔ فضائی رأس Ω_0 استرادیان و محدود بین قسمتی از دو کره به شعاع‌های r_1 و r_2 با سطح مقطع به شکل روبرو است. (از اثر لبه‌ها صرفنظر شود.)



۱) $\dfrac{1}{\Omega_0\varepsilon}\dfrac{r_1 r_2}{r_1-r_2}$ ۲) $\varepsilon\Omega_0\dfrac{r_1 r_2}{r_1-r_2}$

۳) $\dfrac{1}{\Omega_0\varepsilon}\dfrac{r_1-r_2}{r_1 r_2}$ ۴) $\dfrac{\Omega_0}{\varepsilon}\dfrac{r_1-r_2}{r_1 r_2}$

پاسخ : گزینه «۲» **روش اول (رد گزینه):** با توجه به اینکه ظرفیت با ضریب دی‌الکتریک نسبت مستقیم دارد، فقط گزینه ۲ می‌تواند صحیح باشد.

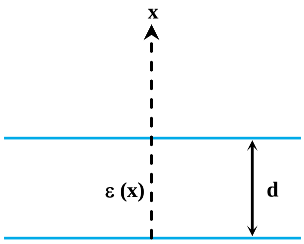
روش دوم: از رابطه محاسبه مستقیم خازن استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{C} = \int\frac{dr}{\iint \varepsilon r^2\sin\theta d\theta d\varphi} = \int_{r_2}^{r_1}\frac{dr}{\varepsilon r^2\iint\sin\theta d\theta d\varphi}$$

از طرفی $\iint\sin\theta d\theta d\phi$ همان زاویه فضائی است که در این جا برابر Ω_0 می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon\Omega_0}\int_{r_2}^{r_1}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{\varepsilon\Omega_0}\left[\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right] \Rightarrow C = \frac{\varepsilon\Omega_0 r_1 r_2}{r_1-r_2}$$

مثال۱۰: دو صفحه هادی موازی بی‌نهایت مطابق شکل بوسیله یک دی‌الکتریک که دارای تغییرات $\varepsilon(x) = \dfrac{\varepsilon_\circ}{1-\dfrac{x^2}{3d^2}}$ می‌باشد، از هم جدا شده‌اند. ظرفیت سیستم برای واحد سطح کدام است؟



۱) $C = \dfrac{9\varepsilon_\circ}{4d}\dfrac{F}{m^2}$

۲) $C = \dfrac{\varepsilon_\circ}{d}\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{x^2}{3d^2}}\right)\dfrac{F}{m^2}$

۳) $C = \dfrac{9}{8}\dfrac{\varepsilon_\circ}{d}\dfrac{F}{m^2}$

۴) $C = \dfrac{2\varepsilon_\circ}{d}\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{x^2}{3d^2}}\right)\dfrac{F}{m^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» همان‌طور که می‌دانید در فرمول ساختاری $\dfrac{1}{C} = \int \dfrac{dx}{\iint \varepsilon ds}$ با انتگرال معین سروکار داریم، بنابراین ظرفیت نهائی مستقل از متغیر انتگرال‌گیری x خواهد بود. پس گزینه‌های ۲ و ۴ نادرستاند.

$$\frac{1}{C} = \int_\circ^d \frac{dx}{\iint \varepsilon(x)dydz} \to \frac{1}{C} = \int_\circ^d \frac{dx}{\left(\dfrac{\varepsilon_\circ}{1-\dfrac{x^2}{3d^2}}\right)\iint ds}$$

از آنجایی که ظرفیت در واحد سطح از ما خواسته شده، بنابراین $\iint ds = 1$ می‌باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon_\circ}\left[x - \frac{x^3}{9d^2}\right]_\circ^d = \frac{8d}{9\varepsilon_\circ} \quad , \quad C = \frac{9\varepsilon_\circ}{8d}\frac{F}{m^2}$$

مثال۱۱: یک خازن مسطح را در نظر بگیرید که سطح هر جوشن آن S بوده و در ناحیه $\circ < z < d$ قرار دارد. عایق بین جوشن‌ها غیر یکنواخت بوده و ضریب نفوذپذیری الکتریکی آن توسط رابطه $\varepsilon = \varepsilon_\circ(1+\frac{z}{d})$ بیان می‌شود. جوشن‌های این خازن را به یک باطری با ولتاژ $V_\circ$ وصل می‌کنیم. قدر مطلق بار جمع شده روی صفحات خازن چقدر است؟

۱) $\dfrac{\varepsilon_\circ V_\circ S}{d}$ ۲) $\dfrac{2\varepsilon_\circ V_\circ S}{d}$ ۳) $\dfrac{\varepsilon_\circ V_\circ S}{2d\ln 2}$ ۴) $\dfrac{\varepsilon_\circ V_\circ S}{d\ln 2}$

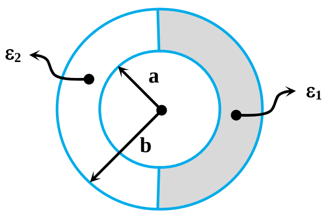
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای به دست آوردن بار روی صفحه‌های خازن ابتدا باید ظرفیت خازن را پیدا کنیم؛ سپس با استفاده از رابطه $Q = CV$ مقدار آن را به دست آوریم. چون تغییرات ضریب دی‌الکتریک در جهت عمود بر صفحه‌های خازن می‌باشد بنابراین برای به دست آوردن ظرفیت خازن از رابطه انتگرالی معرفی شده در قسمت خازن‌های سری استفاده می‌کنیم.

$$\frac{1}{C} = \int_\circ^d \frac{dz}{\varepsilon_\circ(1+\frac{z}{d})S} = \frac{d\ln 2}{\varepsilon_\circ S} \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_\circ S}{d\ln 2}$$

با توجه به این که ولتاژ دو سر خازن برابر $V_\circ$ می‌باشد مقدار بار روی صفحه‌ها برابر است با:

$$Q = CV_\circ \Rightarrow Q = \frac{\varepsilon_\circ S V_\circ}{d\ln 2}$$

مثال۱۲: فضای بین دو استوانه هم محور فلزی به شعاع‌های a و b و طول L به اندازه 180° از ماده با ضریب نفوذ الکتریکی ε_1 و بقیه با ε_2 پر شده است. ظرفیت برابر است با:



۱) $C=\dfrac{\pi L(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\ln(\frac{b}{a})}$	۲) $C=\pi L\dfrac{\ln\frac{b}{a}}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$

۳) $C=\dfrac{\pi L(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{b-a}$	۴) $C=\dfrac{\pi L(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{b^2-a^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» **روش اول (رد گزینه):** توجه داشته باشید که در خازن استوانه‌ای که ضریب دی‌الکتریک آن همگن باشد، ظرفیت به فرم لگاریتمی است. پس گزینه‌های ۳ و ۴ نادرست‌اند. همچنین می‌دانیم که ظرفیت با ضریب دی‌الکتریک نسبت مستقیم دارد که این نشان می‌دهد گزینه ۲ هم نادرست است.

روش دوم: با توجه به این که دو نیم استوانه همانند دو خازن موازی عمل می‌کنند بنابراین ظرفیت معادل برابر است با:

$$C_1=\frac{\pi L\varepsilon_1}{\ln\frac{b}{a}}\ ,\ C_2=\frac{\pi L\varepsilon_2}{\ln\frac{b}{a}}\Rightarrow C=C_1+C_2=\frac{\pi L(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\ln(\frac{b}{a})}$$

مثال۱۳: دو هادی رسانای استوانه‌ای بسیار بلند با چگالی بارهای $+\lambda$ و $-\lambda$ در فاصله بسیار دور از هم قرار دارند. اگر فاصله بین دو استوانه را دو برابر کنیم، فضای موجود را با چه دی‌الکتریکی پر کنیم تا ظرفیت خازنی تغییر نکند؟

۱) $\varepsilon_r=2$	۲) $\varepsilon_r=\sqrt{2}$	۳) $\varepsilon_r=\frac{1}{2}$	۴) اطلاعات مسأله کافی نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ظرفیت خازنی دو هادی استوانه‌ای بلند با شعاع‌های a و b و فاصله زیاد d از هم برابر است با:

$$C=\frac{\pi\varepsilon}{\ln(\frac{d}{\sqrt{ab}})}$$

برای به دست آوردن ε_r موردنظر، باید معادله زیر را حل کنیم:

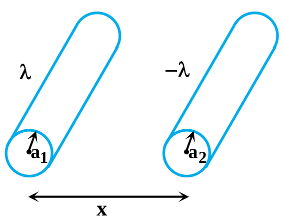
$$\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(\frac{d}{\sqrt{ab}})}=\frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln(\frac{2d}{\sqrt{ab}})}\Rightarrow\varepsilon_r\ln(\frac{d}{\sqrt{ab}})=\ln(\frac{d}{\sqrt{ab}})+\ln(2)\Rightarrow\varepsilon_r=\frac{\ln(\frac{d}{\sqrt{ab}})+\ln(2)}{\ln(\frac{d}{\sqrt{ab}})}$$

برای به دست آوردن ε_r باید مقادیر a، b و d را داشته باشیم که در مسأله به آن‌ها اشاره نشده است.

مثال۱۴: فاصله بین دو استوانه فلزی بلند که به موازات یکدیگر قرار گرفته‌اند، چند برابر شود تا نیروی الکتریکی که بر همدیگر وارد می‌کنند نصف شود؟ (چگالی بار روی استوانه‌ها λ و $-\lambda$ است.)

۱) ۴	۲) ۲	۳) $\sqrt{2}$	۴) $2\sqrt{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق شکل فرض می‌کنیم شعاع استوانه‌ها، a_1 و a_2 و فاصله بین آن‌ها x باشد. ظرفیت واحد طول این خازن از رابطه $C=\dfrac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{x}{\sqrt{a_1a_2}}}$ به دست می‌آید.



نیروی وارد بر واحد طول استوانه‌ها به کمک مشتق‌گیری از انرژی سیستم (خازن) به دست می‌آید:

$$W=\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{x}{\sqrt{a_1a_2}}\Rightarrow|\vec F|=|\frac{\partial W}{\partial x}|=\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{x})$$

بنابراین برای آن که نیروی الکتریکی بین دو استوانه نصف شود، باید فاصله آن‌ها دو برابر شود.

مثال۱۵: خازن متغیری با عایق هوا، به طور خطی از ۲۵ تا ۳۵۰ پیکوفاراد، به ازای چرخش با زاویهٔ θ از صفر تا ۱۸۰ درجه تغییر می‌کند. چنانچه اختلاف پتانسیل دو سر خازن $V = ۴۰۰(V)$ باشد، گشتاور نیروی اعمالی به هر یک از صفحات خازن در $\theta = ۹۰^\circ$ درجه چقدر است؟

۱) $T = ۸/۲۸\times۱۰^{-۶}\ (N.m)$ ۲) $T = ۹/۲۶\times۱۰^{-۶}\ (N.m)$ ۳) $T = ۱/۲۶\times۱۰^{-۶}\ (N.m)$ ۴) $T = ۲/۴۸\times۱۰^{-۶}\ (N.m)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا با توجه به مقادیر داده شده رابطه خطی بین C و θ را به دست می‌آوریم:

$$C = A\theta + B\begin{cases}\theta = ۰ \Rightarrow C = ۲۵^{pF}\\ \theta = \pi \Rightarrow C = ۳۵۰^{pF}\end{cases} \qquad C = \frac{۳۲۵}{\pi}\times۱۰^{-۱۲}\,\theta + ۲۵\times۱۰^{-۱۲}$$

ابتدا انرژی ذخیره شده در خازن را به دست می‌آوریم، سپس با استفاده از رابطه $\frac{\partial W}{\partial\theta}$ گشتاور را می‌یابیم:

$$W_e = \frac{۱}{۲}CV^۲ \qquad T = \frac{dW_e}{d\theta} = \frac{۲۶}{\pi}\times۱۰^{-۶} \cong ۸/۲۸\times۱۰^{-۶}\ (N.m)$$

مثال۱۶: یک خازن متغیر دارای ظرفیت ماکزیمم ۱۰۰pF و ظرفیت می‌نیمم ۱۰PF می‌باشد. در حالتی که ظرفیت خازن ماکزیمم است آن را تا پتانسیل ۳۰۰ ولت شارژ می‌کنیم، سپس ظرفیت خازن را به حداقل می‌رسانیم، کار مکانیکی لازم برای این تغییر چقدر است؟

۱) ۴۰/۵ میلی ژول ۲) ۴/۵ میلی‌ژول ۳) ۴۰/۵ میکروژول ۴) ۴/۵ میکروژول

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» برای به دست آوردن کار مکانیکی لازم باید انرژی ذخیره شده در خازن را برای هر دو حالت محاسبه کنیم و سپس تفاضل آن‌ها را به دست آوریم.

ابتدا بار خازن در حالت اولیه را محاسبه می‌کنیم.

$$Q_۱ = C_۱V_۱ = ۱۰۰\times۱۰^{-۱۲}\times۳۰۰ = ۳\times۱۰^{-۸}$$

انرژی خازن برابر است با:

$$W_۱ = \frac{Q_۱^۲}{۲C_۱} \Rightarrow W_۱ = ۴/۵\times۱۰^{-۶}$$

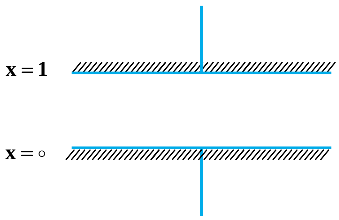
از آنجایی که بار روی صفحات خازن تغییر نکرده است می‌توان نوشت:

$$Q_۲ = Q_۱ = ۳\times۱۰^{-۸} \qquad W_۲ = \frac{Q_۲^۲}{۲C_۲} = ۴۵\times۱۰^{-۶}$$

$$\Delta W = W_۲ - W_۱ = ۴۰/۵\times۱۰^{-۶} = ۴۰/۵\mu J$$

آزمون فصل پنجم

۱ـ برای عایق بین دو جوشن خازن صفحه‌ای که مطابق شکل یکی از جوشن‌های آن در $x=0$ و دیگری در $x=1$ قرار دارد، ضریب نفوذپذیری به صورت $\varepsilon(x)=\dfrac{1}{k(1+3x^2)}$ تغییر می‌کند. مقدار ظرفیت خازن چقدر است؟ (از اثر لبه‌ها صرفنظر شود)



A = مساحت سطح جوشن خازن

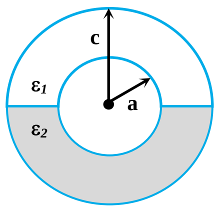
۱) $C=\dfrac{A}{K}$ ۲) $C=\dfrac{A}{2K}$

۳) $C=\dfrac{2K}{A}$ ۴) $C=\dfrac{4K}{A}$

۲ـ صفحات یک خازن مسطح در $Z=0$ و $Z=d$ قرار دارد. ضریب نفوذپذیری الکتریکی عایق بین صفحات تابع z و به صورت $\varepsilon=\dfrac{4\varepsilon_0}{1+\dfrac{z^2}{d^2}}$ می‌باشد. ظرفیت خازن بر واحد سطح کدام است؟

۱) $\dfrac{3\varepsilon_0}{d}$ ۲) $\dfrac{\varepsilon_0}{3d}$ ۳) $\dfrac{3\varepsilon_0}{4d}$ ۴) $\dfrac{4\varepsilon_0}{d}$

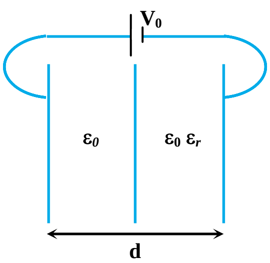
۳ـ فضای بین دو استوانه فلزی با شعاع‌های a و c و با طول ۱ متر به طور یکسان مطابق شکل از دو نوع عایق پر شده است. دو استوانه هم محور می‌باشند. از اثرات لبه صرفنظر کنید. ظرفیت خازن به‌دست آمده این مجموعه برابر است با:



۱) $\dfrac{\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\varepsilon_1\varepsilon_2\ln\dfrac{c}{a}}$ ۲) $\dfrac{\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\ln\dfrac{c}{a}}$

۳) $\dfrac{\pi\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\ln\dfrac{c}{a}}$ ۴) $\dfrac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1\ln\dfrac{c}{a}+\varepsilon_2\ln\dfrac{a}{c}}$

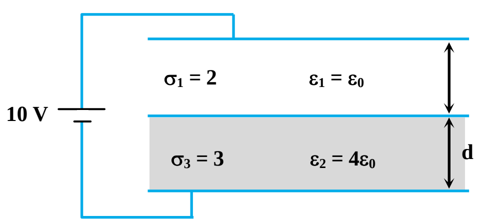
۴ـ دو صفحه رسانای موازی را که ابعاد آنها در مقایسه با فاصله آنها (d) خیلی بزرگ است در نظر می‌گیریم. یک تیغه دی‌الکتریک به ضخامت $\dfrac{d}{2}$ را بین آنها قرار می‌دهیم. گذردهی دی‌الکتریک $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$ و اختلاف پتانسیل بین صفحه‌ها V_0 است. شدت میدان الکتریکی درون دی‌الکتریک، (E_d) کدام گزینه است؟



۱) $\dfrac{V_0}{\varepsilon_r d}$ ۲) $\dfrac{V_0}{(\varepsilon_r-1)d}$

۳) $\dfrac{2V_0}{(1+\varepsilon_r)d}$ ۴) $\dfrac{2V_0}{(\varepsilon_r-1)d}$

۵ـ در یک خازن مسطح فضای بین دو صفحه از دو ماده با ضرایب نفوذپذیری الکتریکی $\varepsilon_1=\varepsilon_0$ و $\varepsilon_2=4\varepsilon_0$ و هدایت مخصوص $\sigma_1=2$ و $\sigma_2=3$ پر شده است. خازن به یک باتری ۱۰ ولت متصل می‌شود. بعد از مدت طولانی اندازه بردارهای $\vec{D}_1$ و $\vec{D}_2$ برابر است با:



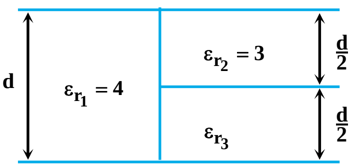
۱) $\dfrac{4\varepsilon_0}{d},\dfrac{\varepsilon_0}{d}$ ۲) $\dfrac{3\varepsilon_0}{d},\dfrac{2\varepsilon_0}{d}$

۳) $\dfrac{16\varepsilon_0}{d},\dfrac{16\varepsilon_0}{d}$ ۴) $\dfrac{12\varepsilon_0}{d},\dfrac{2\varepsilon_0}{d}$

۶ـ کره‌ای مسی به شعاع $r\,cm$ دارای ظرفیت C_1 می‌باشد. لایه دی‌الکتریک یکنواختی به ضخامت $15cm$ و $\varepsilon_r = 3$ بر روی کره قرار داده‌ایم به طوری که ظرفیت جدید به $2C_1$ افزایش یابد. شعاع کره مسی (r) چقدر است؟

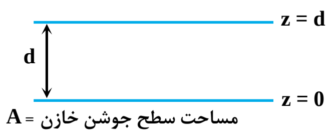
۱) $4cm$ ۲) $5cm$ ۳) $6cm$ ۴) $7cm$

۷ـ ظرفیت خازن مقابل کدام است؟



۱) $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ ۲) $C = \frac{8\varepsilon_0 A}{d}$ ۳) $C = \frac{3\varepsilon_0 A}{d}$ ۴) $C = \frac{4\varepsilon_0 A}{d}$

۸ـ ضریب گذردهی الکتریک دی‌الکتریک خازن صفحه‌ای مقابل به طور خطی از مقدار ε_0 در $z = 0$ تا مقدار $2\varepsilon_0$ در $z = d$ تغییر می‌کند. ظرفیت این خازن کدام است؟

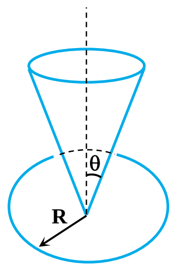


۱) $C = \frac{A\varepsilon_0}{d}$ ۲) $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\ln 2$ ۳) $C = \frac{A\varepsilon_0}{d\ln 2}$ ۴) $C = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}$

۹ـ دو پوسته استوانه‌ای هادی هم محور جوشن‌های یک خازن را تشکیل می‌دهند. طول پوسته‌ها L و شعاع استوانه داخلی a و شعاع استوانه خارجی b است. گذردهی نسبی عایق بین این دو استوانه $\varepsilon_r = 2 + \frac{4}{r}$ است. ظرفیت خازن حاصل کدام است؟

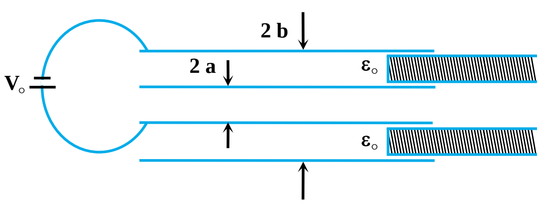
۱) $\frac{4\pi\varepsilon_0 L}{b - a + 2\ln\frac{b+2}{a+2}}$ ۲) $\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{b - a + 2\ln\frac{b+2}{a+2}}$ ۳) $\frac{4\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{b+2}{a+2}}$ ۴) $\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{b+2}{a+2}}$

۱۰ـ مطابق شکل، یک مخروط فلزی با زاویه رأس θ، در مرکز یک صفحه دایروی فلزی به شعاع R قرار دارد. زاویه θ چقدر باشد تا ظرفیت خازن ایجاد شده برابر $C = 2\pi\varepsilon_0 R$ شود؟



۱) $tg^{-1}(e)$ ۲) $2tg^{-1}(\frac{1}{e})$ ۳) $2\sin^{-1}(e)$ ۴) $\sin^{-1}(\frac{1}{e})$

۱۱ـ در انتهای باز یک کابل هم محور یک پیستون از جنس عایق با ضریب دی‌الکتریک نسبی ε_r مطابق شکل زیر قرار داده شده است. اگر اختلاف پتانسیل بین دو هادی V_0 باشد نیروی کلی وارد بر پیستون عایق چقدر است؟



۱) $F = \frac{\pi V_0^2(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\ln\frac{b}{a}}$ ۲) $F = \frac{\pi V_0^2 \ln\frac{b}{a}}{\varepsilon_r}$ ۳) $F = \frac{2\pi V_0^2 \varepsilon_r}{\ln\frac{b}{a}}$ ۴) $F = \frac{\pi V_0^2 \varepsilon_r}{\ln\frac{b}{a}}$

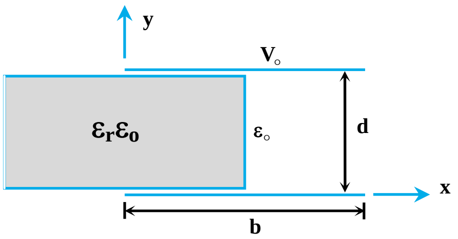
۱۲ـ کابل هم محوری منطبق بر محور x مفروض است. شعاع هادی داخلی a و شعاع هادی خارجی b می‌باشد. فضای بین دو رسانا از ماده عایق ناهمگنی با ضریب دی‌الکتریک $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-|x|}$ پر شده است. ظرفیت خازنی چنین کابلی با طول بی‌نهایت را محاسبه کنید.

۱) $\frac{4\pi\varepsilon_0}{\ln(\frac{b}{a})}$ ۲) $\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(\frac{b}{a})}$ ۳) $4\pi\varepsilon_0 \ln\frac{b}{a}$ ۴) $2\pi\varepsilon_0 \ln\frac{b}{a}$

۱۳ـ دو خازن یکسان با هم موازی شده و به یک باطری با ولتاژ $v_\circ$ وصل شده‌اند. سپس باطری جدا شده ولی خازن‌ها همچنان موازی باقی می‌مانند و یکی از خازن‌ها با ماده‌ای با ضریب دی‌الکتریک نسبی ε_r پر می‌شود. اختلاف پتانسیل نهایی بین خازن‌ها چقدر می‌شود؟

۱) $v = \dfrac{v_\circ}{\varepsilon_r + ۱}$ ۲) $v = \dfrac{v_\circ}{\varepsilon_r}$ ۳) $v = \dfrac{۲v_\circ}{\varepsilon_r + ۱}$ ۴) $v = \dfrac{v_\circ \varepsilon_r}{(\varepsilon_r + ۱)\varepsilon_\circ}$

۱۴ـ تیغه‌ای عایقی با ضریب دی‌الکتریک نسبی $\varepsilon_r = ۴$ در داخل خازن صفحه‌ای با ولتاژ ثابت $v_\circ$ مطابق شکل قرار گرفته است. مطلوب است محاسبه نیروی وارده بر این تیغه اگر: $b = ۱۰cm$، $l = ۱۰cm$، $d = ۱cm$ و $v_\circ = ۱۰ v$ به طوری که l طول تیغه و خازن در جهت z بوده و از تقریب‌های خازن با ابعاد بزرگ می‌توان استفاده نمود.



۱) $۷۵۰\varepsilon_\circ N$
۲) $۱۰۰۰\varepsilon_\circ N$
۳) $۱۵۰۰\varepsilon_\circ N$
۴) $۱۷۵۰\varepsilon_\circ N$

۱۵ـ اختلاف پتانسیل V را بین دو رسانای موازی که به فاصله x از یکدیگر قرار دارند اعمال می‌کنیم. نیرویی که هر صفحه بر صفحه دیگری وارد می‌کند برابر است با:

۱) $\varepsilon_\circ \dfrac{V^۲ A}{x}$ ۲) $۲\varepsilon_\circ \dfrac{V^۲ A}{x^۲}$ ۳) $\varepsilon_\circ \dfrac{V^۲ A}{۲x^۲}$ ۴) $\varepsilon_\circ \dfrac{V^۲ A}{۴x^۲}$

فصل ششم

«معادله پواسون و لاپلاس»

تست‌های تألیفی فصل ششم

مثال ۱: دو پاسخ از معادله لاپلاس در نظر می‌گیریم که در شرایط حدی معینی صادق باشند. در این صورت:

۱) پاسخ‌ها از هم متمایز نیستند.
۲) پاسخ عمومی از تفاضل این دو پاسخ حاصل می‌شود.
۳) تفاضل این دو پاسخ مقداری است ثابت.
۴) نمی‌توان چنین پاسخ‌هایی به دست آورد.

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به مطلب گفته شده بدون تردید گزینه (۱) درست است.

مثال ۲: در ناحیه بسته‌ای که سطح S آن را دربرگرفته است، معادله لاپلاس برقرار است. کدام گزینه درست است؟

۱) حداقل در یک نقطه داخل ناحیه بسته پتانسیل ماکزیمم است.
۲) پتانسیل می‌تواند داخل آن محیط بسته مینیمم شود.
۳) در هیچ‌یک از نقاط داخل ناحیه بسته پتانسیل نه ماکزیمم می‌شود، نه مینیمم.
۴) پتانسیل در تمام نقاط داخل ناحیه بسته ثابت است.

پاسخ: گزینه «۳» برای حل این سؤال باید یکی دیگر از خواص پاسخ‌های معادله‌ی لاپلاس را بلد باشیم. هر تابعی که در معادله‌ی لاپلاس صدق کند، تابع هارمونیکی نام دارد. به راحتی می‌توان نشان داد که توابع هارمونیکی خاصیت متوسط‌گیری دارند. این خاصیت به این معنی است که پتانسیل الکتریکی در هر نقطه از فضا برابر میانگین پتانسیل روی سطح کره‌ای به مرکز همان نقطه و به شعاع دلخواه است به شرطی که درون کره بار الکتریکی نداشته باشیم. بیان ریاضی این موضوع به صورت زیر است:

$$V_{\text{مرکز}} = \frac{1}{4\pi a^2}\oint_{\text{کره}} V ds \qquad (a: \text{شعاع کره})$$

حال می‌توان از این خاصیت، خاصیت دیگری از توابع هارمونیکی را که در حل این سؤال مطرح شده، نتیجه گرفت. اگر تابع اسکالر $\Phi(x,y,z)$ در ناحیه‌ای از فضا محدود به رویه‌ی S دارای خاصیت متوسط‌گیری باشد، هیچ نقطه‌ی بیشینه یا کمینه‌ای از این تابع نمی‌تواند داخل این ناحیه باشد و همه اکسترمم‌ها روی مرز S قرار دارند؛ چرا که اگر مثلاً یک بیشینه در داخل ناحیه باشد، یعنی کره‌ای به مرکز این نقطه می‌توان در نظر گرفت که مقادیر تابع Φ روی این کره از مقدارش در نقطه‌ی بیشینه، کمتر است (خاصیت نقطه‌ی بیشینه) و این با خاصیت متوسط‌گیری در تناقض است چرا که میانگین مقادیر Φ روی هر کره‌ای به مرکز آن نقطه با مقدار Φ در آن نقطه باید برابر باشد و اگر نقطه بیشینه باشد، میانگین مقادیر روی کره باید از مقدار Φ در آن نقطه کمتر باشد.

مثال ۳: ناحیه $3 < \rho < 5$ متر بین دو هادی استوانه‌ای شامل عایق غیرهمگن با $\varepsilon_r = \frac{1}{\rho^2}$ می‌باشد. a) آیا معادله لاپلاس در ناحیه بین دو استوانه صادق است؟ b) اگر پتانسیل هادی داخلی ۱۰۰ ولت و پتانسیل هادی خارجی ۲۰ ولت باشد معادله پتانسیل را به‌دست آورید.

۱) معادله لاپلاس صادق است $V = 145 - 5\rho^2$
۲) معادله لاپلاس صادق نیست $V = 272 - 156/6\ln\rho$
۳) معادله لاپلاس صادق نیست $V = 145 - 5\rho^2$
۴) معادله لاپلاس صادق است $V = 272 - 156/6\ln\rho$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به صورت مسأله می‌دانیم که محیط همگن نیست، پس نمی‌توانیم از معادله لاپلاس استفاده کنیم؛ بلکه باید از شکل دیفرانسیلی قانون گاوس استفاده کنیم. با توجه به شرایط مرزی می‌توان نتیجه گرفت که $\vec{D}$ فقط مؤلفه شعاعی دارد. بنابراین شکل دیفرانسیلی قانون گاوس به صورت زیر می‌شود:

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho D_\rho) = 0 \Rightarrow \rho D_\rho = k \Rightarrow D_\rho = \frac{k}{\rho} \Rightarrow \vec{D} = \frac{k}{\rho}\hat{a}_\rho$$

(با توجه به تقارن، میدان فقط در راستای ρ می‌باشد)

$$\vec{E}=\frac{k\rho}{\varepsilon_\circ}\hat{a}_\rho \rightarrow \frac{V(\rho)-V(۳)}{V(۵)-V(۳)}=\frac{-\int_۳^\rho \frac{k\rho}{\varepsilon_\circ}d\rho}{-\int_۳^۵ \frac{k\rho}{\varepsilon_\circ}d\rho}=\frac{\frac{۱}{۲}\rho^۲-۴/۵}{۱۲/۵-۴/۵}\Rightarrow V(\rho)=-۵\rho^۲+۱۴۵$$

به نظر شما اگر پتانسیل در راستای دو مؤلفه تغییر کند، تابع آن به چه صورت خواهد بود؟

در درس ریاضی مهندسی به بحث پیرامون آنها پرداخته شده است. در اینجا فقط نکات مفید و مهم را به شما می‌گوییم.

فرض کنید تابع پتانسیل شامل دو متغیر y, x باشد. از حل معادله لاپلاس به یک تابع بر حسب توابع مثلثاتی و یا نمائی و یا هیپربولیکی می‌رسیم.

$$\frac{\partial^۲V}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲V}{\partial y^۲}=\circ$$

مثال ۴: بین صفحات خازنی که در $z=۲d$ و $z=\frac{۲}{\sqrt{۳}}d$ قرار دارند، ماده عایقی با ضریب گذردهی الکتریکی $\varepsilon=\varepsilon_\circ z\sqrt{z^۲-d^۲}$ پر شده است. با فرض چگالی بار $\pm\sigma_s$ روی صفحات بالا و پایین اختلاف ولتاژ بین صفحات خازن کدام است؟

۱) $\frac{\sigma\pi}{\varepsilon_\circ d}$ ۲) $\frac{\sigma\pi}{۲\varepsilon_\circ d}$ ۳) $\frac{\sigma\pi}{۳\varepsilon_\circ d}$ ۴) $\frac{\sigma\pi}{۶\varepsilon_\circ d}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}.\vec{D}=\circ\\ \vec{D}=D_z\hat{a}_z\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\partial D_z}{\partial z}=\circ \Rightarrow D_z=D_\circ \Rightarrow \vec{D}=D_\circ\hat{a}_z$$

روی صفحه (مرز) پایین: $D_{۲n}=D_{۱n}=\sigma_s \Rightarrow D_\circ-\circ=\sigma_s \Rightarrow \vec{D}=\sigma_s\hat{a}_z \Rightarrow \vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon}=\frac{\sigma_s}{\varepsilon_\circ z\sqrt{z^۲-d^۲}}\hat{a}_z$

$$\Delta V=\int_{\frac{۲}{\sqrt{۳}}d}^{۲d}\frac{\sigma_s}{\varepsilon_\circ z\sqrt{z^۲-d^۲}}dz=\frac{\sigma_s}{\varepsilon_\circ}\left[\int\frac{dz}{z(z^۲-d^۲)}\right]\Bigg|_{\frac{۲}{\sqrt{۳}}d}^{۲d}$$

برای محاسبه این انتگرال از تغییر متغیر $z=d\sec u$ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\sec u=\frac{z}{d}\Rightarrow u=\cos^{-۱}(\frac{d}{z})$$

$$dz=d.\sec u.\tan u.du$$

$$\sqrt{z^۲-d^۲}=\sqrt{d^۲\sec^۲u-d^۲}=\sqrt{d^۲(\sec^۲u-۱)}=\sqrt{d^۲.\tan^۲u}=d.\tan u$$

$$\int\frac{dz}{z\sqrt{z^۲-d^۲}}=\int\frac{d.\sec u.\tan u.du}{d.\sec u.d.\tan u}=\frac{۱}{d}\int du=\frac{u}{d}=\frac{۱}{d}\cos^{-۱}(\frac{d}{z})$$

بنابراین:

$$V=\frac{\sigma_s}{\varepsilon_\circ d}.\cos^{-۱}(\frac{d}{z})\Bigg|_{\frac{۲}{\sqrt{۳}}d}^{۲d}=\frac{\sigma_s}{\varepsilon_\circ d}(\cos^{-۱}(\frac{۱}{۲})-\cos^{-۱}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}))=\frac{\sigma_s}{\varepsilon_\circ d}(\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶})=\frac{\sigma_s\pi}{۶\varepsilon_\circ d}$$

مثال ۵: کدامیک از توزیع پتانسیل‌های زیر در معادله لاپلاس دو بعدی صدق می‌کند؟

۱) $V(r,\theta)=r\cos\theta$ ۲) $V(r,\theta)=r(۱+\sin\theta)$ ۳) $V(r,\theta)=r(۱+\cos\theta)$ ۴) $V(r,\theta)=r(۱-\sin\theta)$

پاسخ: گزینه «۱» کافی است معادله لاپلاس را نوشته و گزینه‌ها را در معادله صدق دهید. پس از گزینه ۱ شروع می‌کنیم.

$$\nabla^۲V=\frac{۱}{r^۲}\frac{\partial}{\partial r}(r^۲\frac{\partial V}{\partial r})+\frac{۱}{r^۲\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta})=\circ$$

$$\nabla^۲(r\cos\theta)=\frac{۱}{r^۲}\frac{\partial}{\partial r}(r^۲\cos\theta)+\frac{۱}{r^۲\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta(-r\sin\theta))=\frac{۱}{r^۲}(۲r\cos\theta)+\frac{۱}{r^۲\sin\theta}(-۲r\sin\theta\cos\theta)=\frac{۲\cos\theta}{r}-\frac{۲\cos\theta}{r}=\circ$$

بررسی گزینه ۲:

$$\nabla^۲(r(۱+\sin\theta))=\frac{۱}{r^۲}\frac{\partial}{\partial r}(r^۲(۱+\sin\theta))+\frac{۱}{r^۲\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,.\,r\cos\theta)=\frac{۱}{r^۲}(۲r(۱+\sin\theta))+\frac{۱}{r^۲\sin\theta}(r(\cos^۲\theta-\sin^۲\theta))$$

$$=\frac{2(1+\sin\theta)}{r}+\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{r\sin\theta}=\frac{2\sin\theta+2\sin^2\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}{r\sin\theta}=\frac{1+2\sin\theta}{r\sin\theta}\neq 0$$

بررسی گزینه ۳:

$$\nabla^2(r(1+\cos\theta))=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2(1+\cos\theta))+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta.(-r\sin\theta))$$

$$=\frac{1}{r^2}(2r(1+\cos\theta))+\frac{1}{r^2\sin\theta}(-2r\sin\theta\cos\theta)=\frac{2(1+\cos\theta)}{r}-\frac{2\cos\theta}{r}=\frac{2}{r}\neq 0$$

بررسی گزینه ۴:

$$\nabla^2(r(1-\sin\theta))=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2.(1-\sin\theta))+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta(-r\cos\theta))=\frac{1}{r^2}(2r(1-\sin\theta))+\frac{1}{r^2\sin\theta}(-r(\cos^2\theta-\sin^2\theta))$$

$$=\frac{2(1-\sin\theta)}{r}-\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{r\sin\theta}=\frac{2\sin\theta-2\sin^2\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta}{r\sin\theta}=\frac{2\sin\theta-1}{r\sin\theta}\neq 0$$

مثال ۶: دو صفحه شعاعی هادی کامل در $\varphi=\varphi_1$ و $\varphi=\varphi_2$ دارای پتانسیل‌های V_1 و V_2 هستند. بین این دو صفحه توسط یک دی‌الکتریک با ثابت ε_r پر شده است. بردار قطبی شدگی به کدام صورت است؟

۱) $\vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{V_1-V_2}{\varphi_1-\varphi_2}\frac{1}{r^2}\hat{\varphi}$

۲) $\vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{V_1-V_2}{\varphi_1-\varphi_2}\frac{1}{r}\hat{\varphi}$

۳) $\vec{P}=-\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{V_1-V_2}{\varphi_1-\varphi_2}\frac{1}{r^2}\hat{\varphi}$

۴) $\vec{P}=-\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{V_1-V_2}{\varphi_1-\varphi_2}\frac{1}{r}\hat{\varphi}$

پاسخ: گزینه «۴» پاسخ معادله لاپلاس در حالتی که پتانسیل فقط تابعی از φ باشد، به صورت زیر است:

$$V=k_1\varphi+k_2\begin{cases}V(\varphi_1)=V_1\\V(\varphi_2)=V_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1\varphi_1+k_2=V_1\\k_1\varphi_2+k_2=V_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=\dfrac{V_1-V_2}{\varphi_1-\varphi_2}\\k_2=\dfrac{\varphi_1V_2-\varphi_2V_1}{\varphi_1-\varphi_2}\end{cases}$$

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V=-\frac{k_1}{r}\hat{\varphi}\Rightarrow\vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E}=-\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{V_1-V_2}{\varphi_1-\varphi_2}\frac{1}{r}\hat{\varphi}$$

مثال ۷: دو قاچ کروی در $\varphi=\frac{\pi}{6}$ و $\varphi=\frac{\pi}{3}$ قرار دارند و پتانسیل آن‌ها به ترتیب برابر $-V_0$ و V_0 می‌باشد. میدان الکتریکی بین دو قاچ به کدام صورت است؟

۱) $\vec{E}=-\frac{12}{\pi}\frac{1}{R\sin\theta}\hat{a}_\varphi$

۲) $\vec{E}=-\frac{6}{\pi}\frac{1}{R\sin\theta}\hat{a}_\varphi$

۳) $\vec{E}=\frac{12}{\pi}\frac{1}{R\sin\theta}\hat{a}_\varphi$

۴) $\vec{E}=\frac{6}{\pi}\frac{1}{R\sin\theta}\hat{a}_\varphi$

پاسخ: گزینه «۱» مطابق مطالب فوق، پتانسیل تابعی خطی از φ است:

$$V=A\varphi+B$$

با اعمال شرایط مرزی، تابع پتانسیل را به دست می‌آوریم:

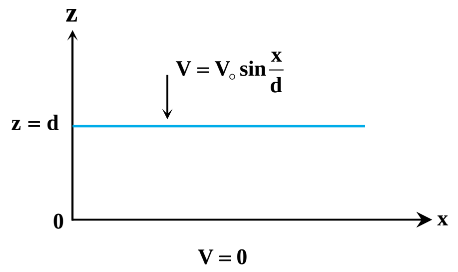
$$\begin{cases}V(\varphi=\frac{\pi}{6})=-V_0\\V(\varphi=\frac{\pi}{3})=V_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{12}{\pi}V_0\\B=-3V_0\end{cases}\Rightarrow V=\frac{12}{\pi}V_0\varphi+3V_0$$

میدان الکتریکی برابر است با:

$$\vec{E}=\frac{-A}{R\sin\theta}\hat{a}_\varphi=-\frac{12}{\pi}\frac{1}{R\sin\theta}\hat{a}_\varphi$$

توجه کنید که از همان اول می‌توانستیم گزینه‌های ۳ و ۴ را رد کنیم؛ چون که جهت خطوط میدان الکتریکی از پتانسیل بیشتر به پتانسیل کمتر است. اما در گزینه‌های ۳ و ۴ جهت میدان به این صورت نیست.

مثال۸: مطابق شکل در $z=0$ پتانسیل صفر و در $z=d$ پتانسیل $V=V_\circ \sin\frac{x}{d}$ قرار دارد. تابع پتانسیل در $0<z<d$ کدام است؟



۱) $V_\circ \dfrac{\sinh\frac{z}{d}}{\sinh 1}\sin\dfrac{x}{d}$

۲) $V_\circ \dfrac{\sinh\frac{z}{d}}{\sinh 1}\cos\dfrac{x}{d}$

۳) $V_\circ \dfrac{\sinh\frac{z}{d}}{\sinh 1}\cosh\dfrac{x}{d}$

۴) $V_\circ \dfrac{\cosh\frac{z}{d}}{\cosh 1}\sin\dfrac{x}{d}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» پتانسیل تابع y نیست، زیرا ساختار در راستای y نامحدود است. از آنجا که در راستای x پتانسیل به صورت متناوب تکرار می‌شود، برای راستای z تناوبی نخواهد بود، پس در حالت کلی:

$$V(x,z)=[A\sinh kz+B\cosh kz][C\sin kx+D\cos kx]$$

برای پیدا کردن ضرایب مجهول A، B، D و C از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم:

$$V(z=0)=0 \Rightarrow B[C\sin kx+D\cos kx]=0 \Rightarrow B=0$$

$$V(x,z)=(C\sin kx+D\cos kx)\sinh kz$$

$$V(z=d)=V_\circ \sin\frac{x}{d}=C\sin kx.\sinh kd+D\cos kx.\sinh kd$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C\sinh kd=V_\circ \Rightarrow C=\dfrac{V_\circ}{\sinh kd} \\ D\sinh kd=0 \Rightarrow D=0 \\ k=\dfrac{1}{d}\end{cases} \quad \Rightarrow V(x,z)=\frac{V_\circ}{\sinh kd}\sinh kz.\sin kx=\frac{V_\circ \sinh\frac{z}{d}}{\sinh 1}\sin\frac{x}{d}$$

مثال۹: صفحات شعاعی هادی کامل در $\varphi=30^\circ$, 45° که از $r=0/002\text{m}$ تا $r=0/5\text{m}$ ادامه دارند، در دست است. اگر E_φ در $r=0/2\text{m}$ و $\varphi=36^\circ$ برابر با $240\frac{V}{m}$ و در $\varphi=45^\circ$ پتانسیل برابر صفر در نظر گرفته شود، به فرض اینکه تابع پتانسیل فقط تابع φ باشد (با توجه به خیلی بزرگ فرض کردن صفحات فلزی)، اختلاف پتانسیل بین این دو صفحه را محاسبه کنید.

$$\nabla^2 V=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial V}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\vec{\nabla}V=\frac{\partial V}{\partial r}\hat{a}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{a}_\varphi+\frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z$$

۱) 2π

۲) 5π

۳) 4π

۴) 7π

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای حل این سؤال از معادله لاپلاس کمک می‌گیریم (چون باری در محیط وجود ندارد) و آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\nabla^2 V=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}=0$$

از آنجا که تابع پتانسیل V فقط تابعی از تغییرات φ می‌باشد، بنابراین:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}=0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \varphi}=k_1 \Rightarrow V=k_1\varphi+k_2$$

حال k_1 و k_2 را باید از شرایط مرزی داده شده به دست آورد.

$$V(\varphi=45^\circ)=0 \Rightarrow k_1\frac{\pi}{4}+k_2=0 \qquad (1)$$

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V=-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{a}_\varphi=-\frac{1}{r}(k_1)\hat{a}_\varphi \Rightarrow E_\varphi=\frac{-k_1}{r} \qquad (2)$$

$$E_\varphi(r=0/2m\,,\,\varphi=36^\circ)=240 \Rightarrow \frac{-k_1}{0/2}=240 \Rightarrow k_1=-48$$

و با جایگذاری k_1 در رابطه (۱)، k_2 را نیز به دست می‌آوریم.

$$k_2=-k_1\frac{\pi}{4}=48\frac{\pi}{4}=12\pi$$

پس تابع پتانسیل به صورت مقابل است:

$$V=-48\varphi+12\pi$$

حال اختلاف پتانسیل بین دو صفحه $\varphi=30^\circ\,,\,45^\circ$ را می‌یابیم.

$$\Delta V=V_2-V_1=-48(\varphi_2-\varphi_1)=-48(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})=4\pi$$

پس چرا 12π در رابطه فوق لحاظ نشد؟!!

خوب دقت کنید:

$$\begin{aligned}V_1&=-48\,(\frac{\pi}{6})+12\pi\\V_2&=-48(\frac{\pi}{4})+12\pi\end{aligned} \Rightarrow V_2-V_1=-48(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})+12\pi-12\pi=-48(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})=4\pi$$

مثال ۱۰: یک خازن استوانه‌ای طویل دارای عایقی ناهمگن با گذردهی نسبی متغیر (نسبت به شعاع r)، $\varepsilon_r=\dfrac{a}{b+r}$ می‌باشد (b,a اعداد ثابت اند).

اختلاف پتانسیل بین صفحات V_0 فرض می‌شود. تغییرات پتانسیل بین صفحات به کدامیک از شکل‌های زیر است؟ (A $B\,,C$ ثابت‌های غیرصفرند).

۱) $A+B\ln r$ ۲) $A+Br+C\ln r$ ۳) $A+Br+C\ln(r+b)$ ۴) $A+B\ln r+C\ln(r+b)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» خود سوال داد می‌زند که من ناهمگنم. یعنی نمی‌توان از معادلات لاپلاس و پواسون استفاده کرد. پس چه باید کرد؟ درسته از الگوریتم خودمان استفاده می‌کنیم.

۱) پیدا کردن $\vec{D}$:

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=0 \rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,D_r)=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(r\,D_r)=0 \Rightarrow rD_r=k_1 \Rightarrow D_r=\frac{k_1}{r} \Rightarrow \vec{D}=\frac{k_1}{r}\,\hat{a}_r$$

۲) پیدا کردن $\vec{E}$:

$$\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{\frac{k_1}{r}}{\varepsilon_0\frac{a}{b+r}}\hat{a}_r=\frac{k_1(b+r)}{\varepsilon_0\,ar}\hat{a}_r$$

۳) پیدا کردن V: ولی به خاطر اینکه در اینجا شرایط مرزی داده نشده از فرمول $\dfrac{V(x)-V(a)}{V(b)-V(a)}$ استفاده نمی‌کنیم و مستقیماً خود تابع V را به دست می‌آوریم.

$$V=-\int_r^{r_0}\vec{E}\,.\,d\vec{l}=-\frac{k_1}{\varepsilon_0\,a}\int_r^{r_0}(\frac{b}{R}+1)dR=\frac{-k_1}{\varepsilon_0\,a}\big[b\ln R+R\big]_r^{r_0} \Rightarrow V=\frac{-k_1}{\varepsilon_0\,a}\big[b\ln r_0+r_0-b\ln r-r\big]=A+Br+C\ln r$$

که به ترتیب ثابت‌های A، B و C عبارتند از:

$$A=\frac{-k_1}{\varepsilon_0\,a}(b\ln r_0+r_0) \qquad B=\frac{k_1}{\varepsilon_0\,a} \qquad C=\frac{bk_1}{\varepsilon_0\,a}$$

دقت کنید که در این مسئله r_0 ثابت و یک عدد است، در حالی‌که r یک متغیر است.

مثال ۱۱: چگالی بار $\sigma(\varphi)=a\sin5\varphi$ بر روی سطح یک استوانه نامتناهی به شعاع R قرار داده شده است. پتانسیل در داخل و خارج کره به چه صورت است؟

۱) $V(r,\varphi)=\dfrac{a\sin5\varphi}{10\varepsilon_0}\begin{cases}r^5/R^4 & ,\ r<R\\ R^6/r^5 & ,\ r>R\end{cases}$

۲) $V(r,\varphi)=\dfrac{a\sin5\varphi}{5\varepsilon_0}\begin{cases}r^4/R^3 & ,\ r<R\\ R^5/r^4 & ,\ r>R\end{cases}$

۳) $V(r,\varphi)=\dfrac{a\sin5\varphi}{5\varepsilon_0}\begin{cases}r^5/R^4 & ,\ r<R\\ R^6/r^5 & ,\ r>R\end{cases}$

۴) $V(r,\varphi)=\dfrac{a\sin5\varphi}{10\varepsilon_0}\begin{cases}r^4/R^3 & ,\ r<R\\ R^5/r^4 & ,\ r>R\end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» پتانسیل در داخل استوانه به صورت مقابل است:

$$V(r,\varphi)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)\ ,\ r<R$$

توجه کنید که در داخل استوانه در نقطه $r=0$، $\ln r$ و r^{-n} نامحدود می‌شوند، بنابراین در عبارت پتانسیل وجود ندارد.

پتانسیل در خارج استوانه به صورت مقابل است:
$$V(r,\varphi)=\bar{a}_\circ+\sum_{n=1}^{\infty}r^{-n}(c_n\cos n\varphi+d_n\sin n\varphi)\ ,\ r>R$$

اینجا هم توجه کنید که در خارج استوانه در $r=\infty$، $\ln r$ و r^n نامحدود می‌شوند، پس در عبارت پتانسیل وجود ندارند.

با توجه به شرط مرزی روی سطح جانبی استوانه می‌توان نوشت:
$$\sigma=-\varepsilon_\circ\left(\frac{\partial V_{out}}{\partial r}-\frac{\partial V_{in}}{\partial r}\right)\Big|_{r=R}$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:
$$a\sin 5\varphi=-\varepsilon_\circ\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{n}{R^{n+1}}(c_n\cos n\varphi+d_n\sin n\varphi)-nR^{n-1}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)\right\}$$

واضح است که به استثنای $n=5$، ضرایب a_n، b_n، c_n و d_n همه صفر هستند. همچنین باید $a=5\varepsilon_\circ(\frac{1}{R^6}d_5+R^4b_5)$. همچنین، V در $r=R$ پیوسته است، به عبارت دیگر $a_\circ+R^5b_5\sin 5\varphi=\bar{a}_\circ+\frac{1}{R^5}d_5\sin 5\varphi$ می‌باشد. بنابراین $a_\circ=a'_\circ$ (که می‌توان هر دوی آن‌ها را برابر صفر گرفت.

همچنین $R^5b_5=R^{-5}d_5$ یا $d_5=R^{10}b_5$ می‌باشد. با ترکیب این نتایج داریم:
$$a=5\varepsilon_\circ(R^4b_5+R^4b_5)=10\varepsilon_\circ R^4b_5\quad ,\quad b_5=\frac{a}{10\varepsilon_\circ R^4}\quad ,\quad d_5=\frac{aR^6}{10\varepsilon_\circ}$$

بنابراین توزیع پتانسیل در داخل و خارج استوانه به صورت زیر است:
$$V(r,\varphi)=\frac{a\sin 5\varphi}{10\varepsilon_\circ}\begin{cases}r^5/R^4 & ,\quad r<R\\ R^6/r^5 & ,\quad r>R\end{cases}$$

سؤال سختی بود. نه؟! باید حواستان باشد که از این سؤال‌ها هم در کنکور می‌آید.

مثال ۱۲: بار الکتریکی $\rho=\rho_\circ\frac{x}{(1+x^2)^2}$ در فضا توزیع شده است. پتانسیل ناشی از این توزیع بار در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\frac{\rho_\circ}{2\varepsilon_\circ}tg^{-1}x$ ۲) $\frac{\rho_\circ}{2\varepsilon_\circ}Lnx$ ۳) $\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}\frac{1}{1+x^2}$ ۴) بی‌نهایت

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» چون بار تابع x دارد، پس پتانسیل هم فقط تابعیت x را دارد و از معادله پواسون داریم:
$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow\frac{\partial^2V}{\partial x^2}=-\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}\frac{x}{(1+x^2)^2}\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}\int\frac{xdx}{(1+x^2)^2}+A\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\rho_\circ}{2\varepsilon_\circ(1+x^2)}+A$$
$$\Rightarrow V=\frac{\rho_\circ}{2\varepsilon_\circ}tg^{-1}x+Ax+B$$

به دلیل تقارن موجود در توزیع بار: در $x=\circ$ باید $V=\circ$ ⇐ $\boxed{B=\circ}$

از طرفی میدان در بی‌نهایت صفر است. بنابراین:
$$\vec{E}=-\frac{\partial V}{\partial x}=-\left[\frac{\rho_\circ}{2\varepsilon_\circ(1+x^2)}+A\right]\hat{x}\Rightarrow\vec{E}(\infty)=\circ\Rightarrow\boxed{A=\circ}\Rightarrow V=\frac{\rho_\circ}{2\varepsilon_\circ}tg^{-1}x$$

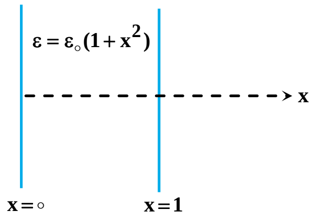
مثال ۱۳: در فضای خالی تابع پتانسیل الکتریکی در ناحیه داخل کره‌ای به شعاع ۳ متر به صورت $V(x,y,z)=6x^2-5y+4z^2$ داده شده است. کل بار موجود در داخل این کره کدام است؟ $(\varepsilon_\circ=\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\frac{F}{m})$

۱) $-80\,nc$ ۲) $-20\,nc$ ۳) $-10\,nc$ ۴) $-40\,nc$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»
$$\nabla^2V=\frac{-\rho_V}{\varepsilon_\circ}\rightarrow\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}=\frac{-\rho_V}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow12+8=\frac{-\rho_V}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow20=\frac{-\rho_V}{\varepsilon_\circ}$$
$$\rho_V=-20\varepsilon_\circ\Rightarrow Q=\rho_VV=\rho_V(\frac{4}{3}\pi a^3)=-20\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\times\frac{4}{3}\pi(3)^3=-20\,nc$$

حیف تست به این راحتی نیست که در کنکور زده نشود؟!!

مثال ۱۴: جوشن‌های خازن مسطحی که در نقاط $x=\circ$ و $x=۱$ واقع شده‌اند (طبق شکل) به ترتیب در پتانسیل‌های ۰ و ۱۰۰ ولت قرار دارند و $\varepsilon=\varepsilon_\circ(۱+x^۲)$ می‌باشد. تغییرات ولتاژ کدام است؟



۱) $V=۱\circ\circ\sin\dfrac{\pi x}{۲}$

۲) $V=۱\circ\circ x$

۳) $V=۱\circ\circ(۱+x^۲)-۱\circ\circ x$

۴) $V=\dfrac{۴\circ\circ}{\pi}\tan^{-۱}x$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به اینکه ضریب دی‌الکتریک محیط همگن نیست، بنابراین نمی‌توانیم از معادله لاپلاس استفاده کنیم. در فضای بین دو صفحه خازن بار الکتریکی وجود ندارد، بنابراین:

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=\circ \Rightarrow \vec{\nabla}.(\varepsilon\vec{E})=\circ \Rightarrow (\vec{\nabla}\varepsilon).\vec{E}+\varepsilon\vec{\nabla}.\vec{E}=\circ$$

$$۲\varepsilon_\circ xE_x+\varepsilon_\circ(۱+x^۲)\frac{dE_x}{dx}=\circ$$

از حل معادله فوق خواهیم داشت:

$$\frac{dE_x}{E_x}=-\frac{۲x}{۱+x^۲}dx \Rightarrow E_x=\frac{k}{۱+x^۲}$$

با استفاده از رابطه $V=-\int\vec{E}.d\vec{l}$ می‌توان نوشت:

$$V=-\int\frac{k}{۱+x^۲}dx=-k\tan^{-۱}x+k_۲$$

با توجه به شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$x=\circ \Rightarrow V=\circ \Rightarrow k_۲=\circ \quad , \quad x=۱ \Rightarrow V=۱\circ\circ \Rightarrow k=\frac{-۴\circ\circ}{\pi}$$

بنابراین تغییرات ولتاژ برابر است با:

$$V=\frac{۴\circ\circ}{\pi}\tan^{-۱}x$$

مثال ۱۵: در یک ماده غیرهمگن و بدون بار، تغییرات ε در جهات x و y یکسان است یعنی $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x}=\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial y}$ در این صورت:

۱) معادله لاپلاس صادق است یعنی $\nabla^۲V=\circ$

۲) معادله لاپلاس در جهات x و y صادق است یعنی $\begin{cases}\nabla^۲V_x=\circ\\ \nabla^۲V_y=\circ\end{cases}$

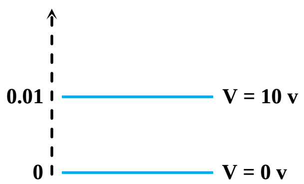
۳) معادله لاپلاس صادق نبوده و بجای آن $\varepsilon\nabla^۲V+\vec{\nabla}V.\vec{\nabla}\varepsilon=\circ$ صادق است.

۴) $\nabla^۲V_z=\circ$

پاسخ: گزینه «۳» چون محیط غیرهمگن است، پس معادله لاپلاس برقرار نیست. اگر از شکل دیفرانسیلی قانون گاوس استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}.D=\circ \Rightarrow \vec{\nabla}.(\varepsilon\vec{E})=\circ \Rightarrow \varepsilon\vec{\nabla}.\vec{E}+(\vec{\nabla}\varepsilon).\vec{E}=\circ \Rightarrow \varepsilon\vec{\nabla}.(-\vec{\nabla}V)+(\vec{\nabla}\varepsilon).(-\vec{\nabla}V)=\circ \Rightarrow \varepsilon\nabla^۲V+\vec{\nabla}\varepsilon.\vec{\nabla}V=\circ$$

مثال ۱۶: ضریب نفوذپذیری الکتریکی نسبی بین صفحات خازن طبق رابطه $\varepsilon=\varepsilon_\circ e^{-\alpha z}$ تغییر می‌کند. تابع پتانسیل V چگونه است؟



۱) $V=۱\circ\circ\circ z$

۲) $V=۱\circ\sin\dfrac{\pi z}{۲\times\circ/\circ۱}$

۳) $V=\dfrac{۱\circ[e^{\alpha z}-۱]}{e^{\circ/\circ۱\alpha}-۱}$

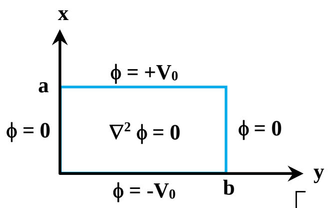
۴) $V=\dfrac{۱\circ[e^{-\alpha z}-۱]}{e^{-\circ/\circ۱\alpha}-۱}$

پاسخ : گزینه «۳» همان‌طور که می‌دانید ضریب دی‌الکتریک همگن نیست، بنابراین نمی‌توانیم از معادله لاپلاس استفاده کنیم. پس شکل دیفرانسیلی قانون گاوس را به کار می‌بریم.

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=\circ \Rightarrow \vec{D}=k\hat{a}_z$$

$$E=\frac{k}{\varepsilon_\circ e^{-\alpha z}}\hat{a}_z \Rightarrow \frac{V(z)-(\circ)}{V(\circ/\circ۱)-V(\circ)}=\frac{-\int_\circ^z\frac{k}{\varepsilon_\circ e^{-\alpha z}}dz}{-\int_\circ^{\circ/\circ۱}\frac{k}{\varepsilon_\circ e^{-\alpha z}}dz} \Rightarrow \frac{V(z)-\circ}{۱\circ-\circ}=\frac{e^{\alpha z}-۱}{e^{\circ/\circ۱\alpha}-۱} \Rightarrow V(z)=\frac{۱\circ\left[e^{\alpha z}-۱\right]}{e^{\circ/\circ۱\alpha}-۱}$$

مثال ۱۷: یک قطعه عایق کامل به ابعاد a و b و بطول بی‌نهایت بین چهار صفحه فلزی بی‌نهایت که مقطع آن نشان داده شده است، محصور می‌باشد. پتانسیل صفحات مطابق شکل داده شده‌اند. پتانسیل در فضای داخل عایق کدام است؟؟



۱) $\phi = \sum_{n=1,3,5,}^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \frac{\sinh\left[\frac{n\pi}{b}(x-\frac{a}{2})\right]\sin\frac{n\pi y}{b}}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right)}$

۲) $\phi = \sum_{n=1,3,5,}^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \frac{\cosh\left[n\pi(x-\frac{a}{2})/b\right]\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi a}{2b}\right)}$

۳) $\phi = \sum_{n=1,3,5,}^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \frac{\sinh(\frac{n\pi y}{a})\sin(\frac{n\pi x}{b})}{\sinh(\frac{n\pi a}{b})}$

۴) $\phi = \sum_{n=1,3,5,}^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \frac{\cosh\left[\frac{n\pi y}{b}\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به اینکه شرایط مرزی در راستای y تکراری (متناوب) است، بنابراین تابع پتانسیل برحسب y مثلثاتی می‌باشد. همچنین چون در $y=0$ پتانسیل صفر می‌باشد، نتیجه می‌گیریم جواب برحسب y باید به صورت $\sin(\lambda_n y)$ باشد و با استفاده از شرط $\phi(x,b)=0$ انتظار داریم که $\sin(\lambda_n y)$ صفر شود، بنابراین با توجه به ریشه‌های سینوس $(n\pi)$، مقدار λ_n به صورت $\lambda_n = \frac{n\pi}{b}$ به دست می‌آید. با توجه به جواب‌های معادله لاپلاس چون پتانسیل بر حسب y مثلثاتی شد بر حسب x باید هیپربولیکی یا نمایی بشود که به خاطر محدود بودن ناحیه در جهت x، جواب بر حسب x را به صورت هیپربولیکی در نظر می‌گیریم. از طرفی تابع cosh یک تابع زوج می‌باشد در صورتی که شرایط مرزی در راستای x دارای تقارن فرد می‌باشد؛ بنابراین جواب در راستای x باید به صورت سینوس هیپربولیک باشد. چون سینوس هیپربولیک نسبت به مبدأ مختصات یک تابع فرد می‌باشد. در این‌جا به این نکته توجه کنید که شرایط مرزی در راستای x نسبت به خط $x=\frac{a}{2}$ تقارن فرد دارند، بنابراین برای استفاده از سینوس هیپربولیک باید x را به اندازه $\frac{a}{2}$ به سمت بالا جابه‌جا کنیم که مبدأ مختصات در $x=\frac{a}{2}$ قرار بگیرد؛ پس جواب بر حسب x به صورت $\sinh(\lambda_n(x-\frac{a}{2}))$ خواهد بود که با ضرب هر دو جواب داریم:

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sinh(\lambda_n(x-\frac{a}{2}))\sin\lambda_n y \quad , \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{b}$$

تا این‌جا جواب تست را پیدا کردیم که گزینه (۱) است. ولی برای اینکه بهتر یاد بگیریم مقدار ضرایب A_n را به دست می‌آوریم. با اعمال یکی از شرایط مرزی $\phi(0,y)=-V_0$ یا $\phi(a,y)=V_0$ می‌توانیم A_n را به دست آوریم. با اعمال شرط $\phi(a,y)=V_0$ داریم:

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sinh(\frac{n\pi a}{2b})\sin\frac{n\pi}{b}y$$

با توجه به فرم تابع بالا نتیجه می‌گیریم که V_0 را به صورت سری فوریه سینوسی بسط دهیم. با استفاده از تعریف سری فوریه سینوسی مقدار ضرایب ثابت آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{b}y \quad , \quad B_n = A_n \sinh(\frac{n\pi a}{2b})$$

$$B_n = \frac{2}{b}\int_0^b V_0 \sin\frac{n\pi}{b}y\,dy = \frac{4V_0}{n\pi} \quad n = 1,3,5,\ldots$$

با توجه به مقدار B_n داریم: (مقدار $B_0 = 0$ می‌باشد.)

$$A_n = \frac{4V_0}{n\pi}\frac{1}{\sinh(\frac{n\pi a}{2b})} \quad , \quad \phi = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi}\frac{\sinh(\frac{n\pi}{b}(x-\frac{a}{2}))\sin\frac{n\pi}{b}y}{\sinh(\frac{n\pi a}{2b})}$$

مثال ۱۸: در ناحیه $-d < z < d$ باری با چگالی $\rho = \rho_\circ \sin\frac{\pi z}{d}$ قرار دارد، پتانسیل در ناحیه $|z| < d$ کدام است؟ (پتانسیل در $z = \circ$ برابر صفر است).

۱) $\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi})^2 \cos\frac{\pi z}{d}$ ۲) $-\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi})^2 \cos\frac{\pi z}{d}$ ۳) $\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi})^2 \sin\frac{\pi z}{d}$ ۴) $-\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi})^2 \sin\frac{\pi z}{d}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» توجه کنید که چون بار فقط تابعیت z را دارد، پس پتانسیل فقط تابع z است. در ناحیه $|z| > d$ که باری وجود ندارد، معادله لاپلاس برقرار است و در ناحیه $|z| < d$ معادله پواسون برقرار است.

$$|z| > d \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \circ \Rightarrow V = Az + B$$

$$|z| < d \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_\circ} = -\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}\sin\frac{\pi z}{d} \Rightarrow V(z) = \frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi})^2 \sin\frac{\pi z}{d} + A_3 z + A_4$$

پس معادله پتانسیل به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$V(z) = \begin{cases} z > d & A_1 z + B_1 \\ |z| < d & \frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi})^2 \sin\frac{\pi z}{d} + A_3 z + A_4 \\ z < -d & A_2 z + B_2 \end{cases}$$

حال با اعمال شرایط مرزی مجهولات را به‌دست خواهیم آورد. ۶ مجهول داریم. اولاً پتانسیل در $|z| \to \infty$ باید متناهی باشد، پس $\boxed{A_1 = A_2 = \circ}$.

پتانسیل الکتریکی در فصل مشترک $|z| = d$، پیوسته است، یعنی:

$$z = d \ : B_1 = A_3 d + A_4 \quad (1) \qquad , \qquad z = -d : B_2 = -A_3 d + A_4 \quad (2)$$

در فصل مشترک $|z| = d$ بار سطحی وجود ندارد، پس چگالی شار الکتریکی در $|z| = d$ پیوسته است: $D_{1z} = D_{2z}$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z}\Big|_{z=d^-} = \frac{\partial V}{\partial z}\Big|_{z=d^+} \Rightarrow \circ = -\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi}) + A_3 \Rightarrow \boxed{A_3 = \frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi})}$$

$$V(z) = \begin{cases} z > d & B_1 \\ |z| < d & \frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi})^2 \sin\frac{\pi z}{d} + \frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi})z + A_4 \\ z < -d & B_2 \end{cases}$$

از طرفی تقارن فرد داریم، پس در $z = \circ$ باید $V(\circ) = \circ$، بنابراین: $A_4 = \circ$

حال طبق روابط (۱) و (۲) داریم:

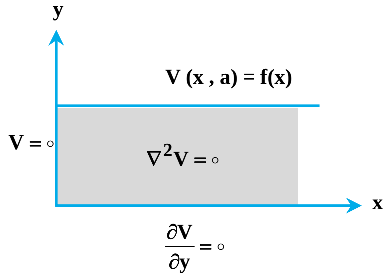
$$B_1 = \frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}\frac{d^2}{\pi} \qquad , \qquad B_2 = -\frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}\frac{d^2}{\pi}$$

در نهایت می‌توان نوشت:

$$|z| < d \Rightarrow V(z) = \frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi})^2 \sin\frac{\pi z}{d} + \frac{\rho_\circ}{\varepsilon_\circ}(\frac{d}{\pi})z$$

آزمون فصل ششم

۱ـ عبارت پتانسیل الکتریکی $u(x,y)$ در ناحیه نیم نوار داده شده و با شرایط مرزی نشان داده شده به چه شکل خواهد بود؟



۱) $V=\int_{۰}^{\infty} D(p)\cosh py\, e^{-px}dp$

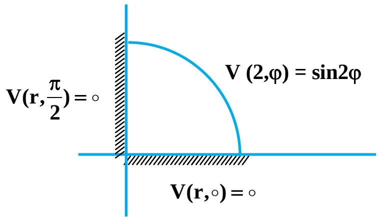
۲) $V=\int_{۰}^{\infty} D(p)\sinh px \cos py\, dp$

۳) $V=\int_{۰}^{\infty} D(p)\sin px \cosh py\, dp$

۴) $V=\int_{۰}^{\infty} D(p)\cos py\, e^{-px}dp$

۲ـ پتانسیل الکتریکی در داخل مربع دایره‌ای با شرایط مرزی نشان داده شده و معادله لاپلاس صدق می‌کند. عبارت پتانسیل $V(r,\varphi)$ کدام است؟

$$\nabla^{۲}V=\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial^{۲}V}{\partial\varphi^{۲}}=۰$$



۱) $۲r\sin ۲\varphi$

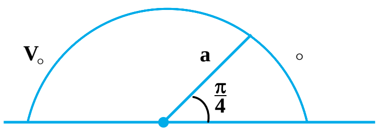
۲) $\frac{r^{۲}}{۲}\sin ۲\varphi$

۳) $\frac{r}{۲}\sin\varphi$

۴) $\frac{r^{۲}}{۴}\sin ۲\varphi$

۳ـ در شکل زیر پتانسیل در مرکز نیم‌دایره کدام است؟

$$\begin{cases} V(a,\theta)=۰ & ۰<\theta<\frac{\pi}{۴} \\ V(a,\theta)=V_{۰} & \frac{\pi}{۴}<\theta<\pi \end{cases}$$



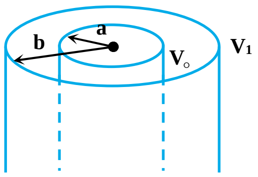
۱) ۰

۲) $V_{۰}$

۳) $\frac{V_{۰}}{۲}$

۴) $\frac{۳V_{۰}}{۴}$

۴ـ در یک خازن استوانه‌ای بلند، استوانه داخلی به پتانسیل $V_{۰}$ و استوانه خارجی به پتانسیل $V_{۱}$ متصل است. پتانسیل الکتریکی در فضای بین دو استوانه کدام است؟ (شعاع استوانه داخلی a و شعاع استوانه خارجی b می‌باشد)



۱) $\frac{ab(V_{۰}-V_{۱})}{b-a}\frac{۱}{r}+\frac{bV_{۱}-aV_{۰}}{b-a}$

۲) $\frac{V_{۰}-V_{۱}}{a-b}r+\frac{V_{۱}a-V_{۰}b}{a-b}$

۳) $\frac{V_{۰}-V_{۱}}{\ln a-\ln b}\ln r+\frac{V_{۱}\ln a-V_{۰}\ln b}{\ln a-\ln b}$

۴) $\begin{cases} V_{۰}+(r-a)\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}\cos(n\theta) \\ V_{۱}+(b-r)\sum\frac{۱}{n}\cos(n\theta) \end{cases}$

۵ـ هرگاه اختلاف پتانسیل‌های موجود بین استوانه‌های قائم به شعاع‌های ۵ و ۱۰ به ترتیب ۱۱۰ و ۲۲۰ باشد، پتانسیل بین دو استوانه کدام است؟

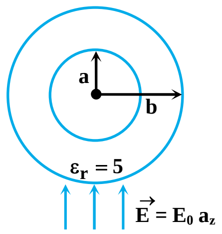
۱) $V=۱۱۰\ln r+۱۱۰$

۲) $V=۲۲۰\ln r+۱۱۰$

۳) $V=۲۲۰\ln r+۲۲۰(۱-\frac{\ln ۲}{\ln ۵})$

۴) $V=\frac{۱۱۰}{\ln ۲}\ln r+۱۱۰(۱-\frac{\ln ۵}{\ln ۲})$

۶ـ در داخل یک کره دی‌الکتریک با ضریب نفوذپذیری الکتریکی $\varepsilon_r=۵$ و شعاع b، حفره‌ای کروی و هم‌مرکز با آن به شعاع a وجود دارد. کره دی‌الکتریک را در یک میدان الکتریکی یکنواخت به شدت $E_{۰}$ قرار می‌دهیم. شدت میدان الکتریکی در داخل حفره کدام است؟



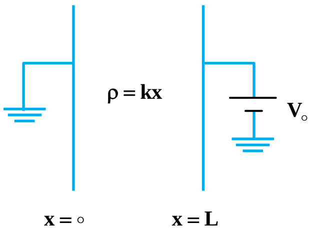
۱) $\frac{۱۵}{۱۱}E_{۰}$

۲) $\frac{۷۷}{۴۵}E_{۰}$

۳) $\frac{۴۵}{۷۷}E_{۰}$

۴) $\frac{۱۱}{۱۵}E_{۰}$

۷ـ در شکل مقابل در فضای بین دو صفحه موازی نامتناهی با پتانسیل‌های صفر و V_0 چگالی بار الکتریکی $\rho = kx$ توزیع شده است. پتانسیل در فضای بین دو صفحه کدام است؟



۱) $V = \frac{V_0}{L}x + \frac{k}{3\varepsilon_0}(x^2 - Lx)$

۲) $V = \frac{V_0}{L}x - \frac{k}{6\varepsilon_0}(x^3 - L^2x)$

۳) $V = \frac{V_0}{L}x - \frac{k}{6\varepsilon_0}(x^2 - Lx)$

۴) $V = \frac{V_0}{L}x + \frac{k}{3\varepsilon_0}(x^3 - L^2x)$

۸ـ کره هادی به شعاع $r = 2cm$ دارای پتانسیل $V = -25\,v$ و پوسته کروی هادی، هم‌مرکز با کره اول بــه شــعاع $r = 35\,cm$ بــا $V = 150\,v$ در دست است. اگر فضای بین این دو کره با دی‌الکتریک $\varepsilon_r = 5/1$ پر شده باشد، چگالی بار سطحی را در کره کوچکتر به‌دست آورید.

۱) $421\frac{nc}{m^2}$ ۲) $524\frac{nc}{m^2}$ ۳) $322\frac{nc}{m^2}$ ۴) $623\frac{nc}{m^2}$

۹ـ کره رسانایی به شعاع a در پتانسیل V_0 قرار دارد و توسط یک پوسته کروی به شعاع b با بار سطحی $\sigma = k\cos\theta$ احاطه شده است. پتانسیل را در ناحیه بین دو کره به دست آورید.

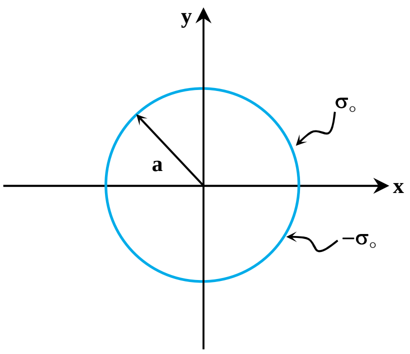
۱) $V(r,\theta) = \frac{aV_0}{r} + \frac{(b^3 - a^3)k\cos\theta}{3r^2\varepsilon_0}$

۲) $V(r,\theta) = \frac{aV_0}{r} - \frac{(b^3 - a^3)k\cos\theta}{3r^2\varepsilon_0}$

۳) $V(r,\theta) = \frac{aV_0}{r} + \frac{(r^3 - a^3)k\cos\theta}{3r^2\varepsilon_0}$

۴) $V(r,\theta) = \frac{aV_0}{r} + \frac{(r^3 - a^3)k\cos\theta}{2r^2\varepsilon_0}$

۱۰ـ یک پوسته استوانه‌ای به شعاع a مطابق شکل حامل بار سطحی یکنواخت σ_0 بر روی نیمه بالایی و بار $-\sigma_0$ بر روی نیمه پایینی است. تابع پتانسیل درون استوانه به چه صورت است؟



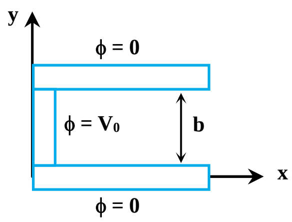
۱) $V(R,\varphi) = \frac{2\sigma_0 a}{\pi\varepsilon_0}\sum_{k=2,4,6,\dots}\frac{1}{k^2}\sin k\varphi(\frac{a}{R})^k$

۲) $V(R,\varphi) = \frac{2\sigma_0 a}{\pi\varepsilon_0}\sum_{k=2,4,6,\dots}\frac{1}{k^2}\sin k\varphi(\frac{R}{a})^k$

۳) $V(R,\varphi) = \frac{2\sigma_0 a}{\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1,3,5,\dots}\frac{1}{k^2}\sin k\varphi(\frac{a}{R})^k$

۴) $V(R,\varphi) = \frac{2\sigma_0 a}{\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1,3,5,\dots}\frac{1}{k^2}\sin k\varphi(\frac{R}{a})^k$

۱۱ـ دو الکترود به شکل نیم صفحه به زمین متصل شده و به فاصلهٔ b از یکدیگر قرار گرفته‌اند. الکترود سوم عمود بر این دو و بــه طــور مجــزا بــه پتانسیل V_0 مطابق شکل وصل گردیده است. شکل مناسب پتانسیل ϕ در ناحیهٔ بین الکترودها که در این شرایط مرزی مناسب صدق کند برابر است با:



۱) $\phi = C\exp(\frac{-n\pi x}{b})\sin\frac{n\pi}{b}y$

۲) $\phi = C\exp(\frac{n\pi x}{b})\sin\frac{n\pi}{b}y$

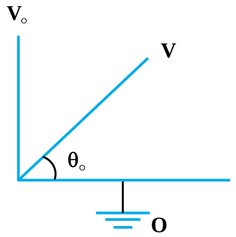
۳) $\phi_n = C_n\exp(\frac{n\pi x}{b})\cos\frac{n\pi}{b}y$

۴) $\phi_n = C_n\exp(\frac{-n\pi x}{b})\cos\frac{n\pi}{b}y$

۱۲ـ پتانسیل استتار شده کولنی $\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r}$ است. چگالی بار الکتریکی متناظر با این پتانسیل کدام است؟

۱) $qe^{\frac{-r}{\lambda}}[\delta(r) - \frac{1}{4\pi\lambda^2 r}]$ ۲) $-\frac{qr}{4\pi\lambda^2}e^{-\frac{r}{\lambda}}$ ۳) $q[\delta(\vec{r}) + \frac{r}{4\pi\lambda^2}]e^{-\frac{r}{\lambda}}$ ۴) $q[\delta(\vec{r}) - \frac{r}{4\pi\lambda^2}]e^{\frac{r}{\lambda}}$

۱۳ـ دو سطح رسانا با ابعاد بسیار بزرگ عمود بر هم که در گوشهٔ قائم از هم به فاصله خیلی کم جدا شده‌اند یکی در پتانسیل صفر (زمین) و دیگری در پتانسیل $V_\circ$ نگه داشته شده‌اند. پتانسیل سطحی که زاویه $\theta_\circ$ با سطح زمین می‌سازد کدام است؟



۱) $\frac{2V_\circ}{\pi}\theta$

۲) $V_\circ \cos\theta$

۳) $V_\circ \sin\theta$

۴) $\frac{V_\circ \theta}{\pi}$

۱۴ـ چگالی حجمی یک توزیع بار الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا که شامل مبدأ نیست از رابطه: $\rho(x,y,z) = -2a\frac{x^3y^3+x^3z^3+y^3z^3}{x^3y^3z^3}$ به‌دست می‌آید که در آن a مقدار ثابتی است. اگر پتانسیل ناشی از این توزیع بار در بی نهایت صفر باشد، پتانسیل در هر نقطه از فضا چقدر است؟

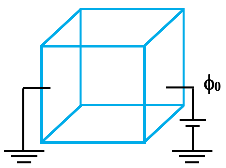
۱) $\phi(x,y,z) = \frac{2a}{\varepsilon_\circ}\frac{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2}{x^2y^2z^2}$

۲) $\phi(x,y,z) = -\frac{2a}{\varepsilon_\circ}\frac{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2}{x^2y^2z^2}$

۳) $\phi(x,y,z) = -\frac{a}{\varepsilon_\circ}\frac{xy+xz+yz}{xyz}$

۴) $\phi(x,y,z) = \frac{a}{\varepsilon_\circ}\frac{xy+xz+yz}{xyz}$

۱۵ـ در شکل زیر ۵ وجه رسانایی مکعب شکل به زمین و وجه ششم به طور مجزا به پتانسیل $\phi_\circ$ متصل است. پتانسیل الکتریکی در مرکز مکعب کدام است؟



۱) $\frac{1}{6}\phi_\circ$

۲) $\frac{1}{5}\phi_\circ$

۳) $\frac{5}{6}\phi_\circ$

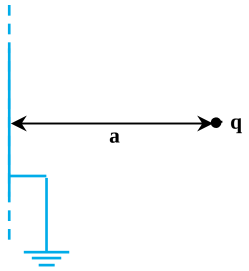
۴) $\phi_\circ$

فصل هفتم

«روش تصاویر»

تست‌های تألیفی فصل هفتم

مثال۱: بار q به فاصله a از صفحه رسانای نامحدودی که به زمین وصل شده است قرار دارد. کدام گزینه صحیح است؟



۱) انرژی الکترواستاتیکی این سیستم دو برابر انرژی الکترواستاتیکی سیستم بار $+q$ و بار تصویری $-q$ است.

۲) انرژی الکترواستاتیکی این سیستم برابر انرژی الکترواستاتیکی سیستم بار $+q$ و بار تصویری $-q$ است هنگامی که خود انرژی بار $-q$ از آن کم می‌شود.

۳) انرژی الکترواستاتیکی این سیستم برابر انرژی الکترواستاتیکی سیستم بار $+q$ و بار تصویری $-q$ است.

۴) چون میدان الکتریکی در سمت چپ صفحه رسانا صفر است، انرژی الکترواستاتیکی این سیستم نصف انرژی الکترواستاتیکی سیستم بار $+q$ و بار تصویری $-q$ است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» میدان الکتریکی در سمت چپ صفحه رسانا صفر است و لذا گزینه ۴ صحیح می‌باشد. باید توجه داشت که میدان در درون رسانا صفر است، بنابراین خطوط میدان به هیچوجه به درون رسانا نفوذ نخواهند کرد.

مثال۲: بار نقطه‌ای q به جرم m به فاصله d از یک صفحه متصل به زمین از حالت سکون رها می‌شود. چقدر طول می‌کشد تا بار به صفحه برخورد کند؟

۱) $(\frac{2\pi d}{q})\sqrt{2\pi\varepsilon_0 md}$　　۲) $(\frac{\pi d}{2q})\sqrt{2\pi\varepsilon_0 md}$　　۳) $(\frac{4\pi d}{q})\sqrt{2\pi\varepsilon_0 md}$　　۴) $(\frac{\pi d}{q})\sqrt{2\pi\varepsilon_0 md}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در ارتفاع x بالای صفحه، نیروی وارد بر q برابر است با:

$$F=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4x^2}=m\frac{d^2x}{dt^2}\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{A}{x^2}\ ,\ A=\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 m}$$

با ضرب کردن رابطه فوق در $V=\frac{dx}{dt}$ می‌توان نوشت:

$$V\frac{dV}{dt}=-\frac{A}{x^2}\frac{dx}{dt}\Rightarrow\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}V^2)=\frac{d}{dt}(\frac{A}{x})\Rightarrow\frac{1}{2}V^2=\frac{A}{x}+C$$

از آنجایی که در $x=d$، $V=0$ می‌باشد، داریم:

$$C=\frac{-A}{d}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$V^2=2A(\frac{1}{x}-\frac{1}{d})\ \Rightarrow\ -\frac{dx}{dt}=\sqrt{2A}\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{d}}=\sqrt{\frac{2A}{d}}\sqrt{\frac{d-x}{x}}$$

$$\int_d^0\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{d-x}}dx=-\sqrt{\frac{2A}{d}}\int_0^t dt=-\sqrt{\frac{2A}{d}}t$$

برای محاسبه انتگرال سمت چپ از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

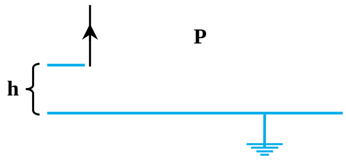
$$x=u^2\Rightarrow dx=2udu$$

$$\int_d^0\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{d-x}}dx=2\int_{\sqrt{d}}^0\frac{u^2}{\sqrt{d-u^2}}du=2\left\{-\frac{u}{2}\sqrt{d-u^2}+\frac{d}{2}\sin^{-1}(\frac{u}{\sqrt{d}})\right\}\Big|_{\sqrt{d}}^0=-d\sin^{-1}(1)=-d\frac{\pi}{2}$$

در نتیجه مدت زمانی که طول می‌کشد تا بار به صفحه برخورد کند برابر است با:

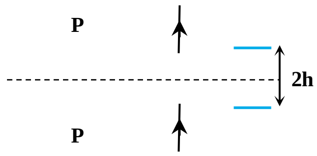
$$t=\sqrt{\frac{d}{2A}}\frac{\pi d}{2}=\sqrt{\frac{\pi^2d^2}{4}\frac{d}{2q^2}16\pi\varepsilon_0 m}=\frac{\pi d}{q}\sqrt{2\pi\varepsilon_0 md}$$

مثال ۳: دوقطبی **P** در فاصله **h** از یک صفحه زمین شده قرار دارد. اندازه گشتاور وارد بر دوقطبی کدام است؟



۱) صفر
۲) $\frac{P^2}{16\pi\varepsilon_0 h^3}$
۳) $\frac{P^2}{32\pi\varepsilon_0 h^3}$
۴) $\frac{P^2}{64\pi\varepsilon_0 h^3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تصویر دوقطبی P را به دست می‌آوریم.



میدان دوقطبی پایین در محل دوقطبی بالا:

$$\vec{E}=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[2\cos\theta\hat{a}_R+\sin\theta\hat{a}_\theta]\big|_{\theta=0}\Rightarrow\vec{E}=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0(2h)^3}[2\hat{a}_z]=\frac{2P}{32\pi\varepsilon_0 h^3}\hat{a}_z=\frac{P}{16\pi\varepsilon_0 h^3}\hat{a}_z$$

از طرفی گشتاور $\vec{T}=\vec{P}\times\vec{E}$ است. پس داریم:

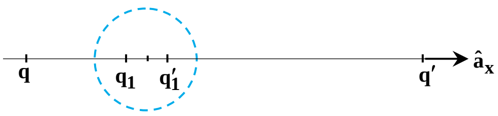
$$\vec{T}=P\hat{a}_z\times\frac{P}{16\pi\varepsilon_0 h^3}\hat{a}_z=0$$

مثال ۴: یک کره هادی به شعاع **a** زمین شده است. (پتانسیل صفر) و دو بار مثبت **q** و **q′** به ترتیب در طرف چپ و راست کره و به فاصله **2a** و **4a** از مرکز کره و روی یک قطر قرار دارند. نیروی وارد بر بار **q′** کدام است؟

۱) جاذبه است اگر $q'<\frac{25q}{144}$
۲) دافعه است اگر $q'<\frac{25q}{144}$
۳) دافعه است اگر $q'<\frac{144}{25}q$
۴) جاذبه است اگر $q'<4q$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر بارهای تصویری q و q' را به ترتیب با q_1 و q'_1 نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases}d_1=\frac{a^2}{2a}=\frac{a}{2}\\ d'_1=\frac{a^2}{4a}=\frac{a}{4}\end{cases}\qquad\begin{cases}q_1=-\frac{a}{2a}q=-\frac{q}{2}\\ q'_1=-q'\frac{a}{4a}=-\frac{q'}{4}\end{cases}$$



نیروی وارد بر بار q' از رابطه مقابل به دست می‌آید:

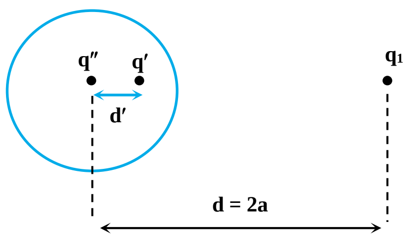
$$\vec{F}_{q'}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q'_1q'}{(4a-\frac{a}{4})^2}+\frac{q_1q'}{(4a+\frac{a}{2})^2}+\frac{qq'}{(6a)^2}\right]\hat{a}_x$$

برای آنکه نیروی وارد بر q' از نوع دافعه باشد، لازم است که عبارت داخل کروشه مثبت باشد، بنابراین داریم: $q'<\frac{25q}{144}$

مثال ۵: بار نقطه‌ای q_1 در فاصلهٔ **2a** از مرکز کرهٔ رسانای کامل بدون بار و به شعاع **a** قرار دارد. انرژی کل سیستم صرفنظر از انرژی ساخت بار نقطه‌ای q_1 را به دست آورید.

۱) $W_e=\frac{q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$
۲) $W_e=\frac{16q_1^2}{\pi\varepsilon_0 a}$
۳) $W_e=\frac{-q_1^2}{96\pi\varepsilon_0 a}$
۴) $W_e=\frac{q_1^2}{16\pi\varepsilon_0 a}$

☑ **پاسخ: گزینه «۳»** چون بار روی کره صفر می‌باشد، بار q'' باید طوری انتخاب شود که مجموع بارهای تصویر صفر شود. طبق روش تصاویر خواهیم داشت:



$$q'=-\frac{q}{d}q=\frac{-q_1}{2}$$

$$d'=\frac{a^2}{d}=\frac{a}{2}$$

$$q''=\frac{q_1}{2}$$

پتانسیل در محل بار q_1 چنین است:

$$V_1 = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0(\frac{3a}{2})} + \frac{q''}{4\pi\varepsilon_0(2a)} = \frac{-q_1}{48\pi\varepsilon_0 a}$$

با فرض آنکه V_2 پتانسیل کره فلزی باشد خواهیم داشت:

$$W_e = \frac{1}{2}q_1V_1 + \frac{1}{2}\oint \rho_s dV V_2 = \frac{1}{2}q_1V_1 \Rightarrow W_e = \frac{-q_1^2}{96\pi\varepsilon_0 a}$$

مثال ۶: بار نقطه‌ای q در فاصله r از مرکز یک کره رسانای بدون بار به شعاع a قرار گرفته است. نیروی وارد بر بار q کدام است؟

۱) صفر

۲) مجموع نیروی ناشی از بار تصویری $q' = \frac{-qa}{r}$ که در فاصله $\frac{a^2}{r}$ از مرکز و نیروی ناشی از بار تصویری $q'' = -q'$ که در مرکز کره قرار دارد.

۳) نیروی بین بار q و بار تصویری $q' = \frac{-qa}{r}$ که در فاصله $\frac{a^2}{r}$ از مرکز قرار دارد.

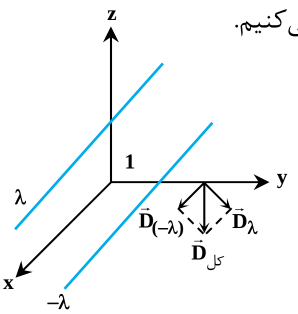
۴) نیروی بین بار q و بار تصویری $q' = \frac{-qa}{r}$ که در مرکز کره قرار دارد.

☑ **پاسخ: گزینه «۲»** طبق روش تصاویر، اثر تصویری بار نقطه‌ای q را می‌توان توسط بار تصویری $q' = -\frac{qa}{r}$ که در فاصله $\frac{a^2}{r}$ از مرکز قرار دارد مدل‌سازی نمود. از طرفی چون کره رسانا بدون بار می‌باشد، ناچاریم بار تصویری $q'' = -q'$ را در مرکز کره در نظر بگیریم. لذا می‌توان نیروی وارد بر یک بار خارج از کره را ناشی از نیروی وارد بر آن بار که از طرف دو بار تصویر وارد می‌شود پنداشت.

مثال ۷: یک بار خطی یکنواخت ρ_L موازی با صفحه **XOY** و به فاصله یک متری از آن و در صفحه **XOZ** واقع است. مقدار بار القاشده روی صفحه در فاصله نواری شکل $|y| \le 1$ و بر واحد طول آن چقدر است؟

۱) $\frac{\rho_L}{4}$ ۲) $\frac{\rho_L}{2}$ ۳) $\frac{\rho_L}{8}$ ۴) ρ_L

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به توپولوژی شکل، بار تصویری را رسم می‌کنیم و صفحه فلزی را حذف می‌کنیم.



برای محاسبه بار القاء شده روی صفحه $z = 0$ ابتدا باید $\vec{D}$ (چگالی شار الکتریکی) ناشی از دو بار خطی را محاسبه و سپس ρ_S را پیدا کرده و Q را به دست آوریم.

به شکل خوب نگاه کنید. آیا تقارن‌های گفته شده در فصل ۲ را به یاد دارید ...؟؟

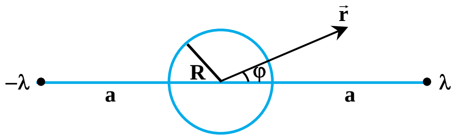
می‌بینید که فقط یک مؤلفه در جهت $-\hat{a}_z$ دارد. با توجه به مساوی بودن چگالی بار، چگالی الکتریکی یکی از بارها را محاسبه و سپس در ۲ ضرب می‌کنیم.

طبق قانون گاوس داریم: ($\hat{a}_R$ برداری که عمود بر جریان خطی و در جهت نقطه مشاهده است.)

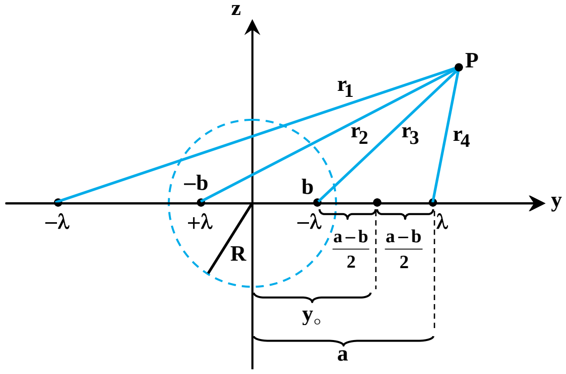
$$D_\lambda = \frac{\rho_L}{2\pi R}\hat{a}_R = \frac{\rho_L}{2\pi\sqrt{1+y^2}}\cos\alpha(-\hat{z}) = \frac{\rho_L}{2\pi(1+y^2)}(-\hat{z}) \Rightarrow \vec{D}_{کل} = D_\lambda + D_{-\lambda} = \frac{\rho_L}{\pi(1+y^2)}(-\hat{z}) \Rightarrow |\rho_S| = \frac{+\rho_L}{\pi(1+y^2)}$$

$$\Rightarrow Q = \iint \rho_S dS = \int_{y=-1}^{1}\int_{x=0}^{1} \frac{\rho_L}{\pi(1+y^2)}dydx = \frac{\rho_L}{\pi}\tan^{-1}y\Big|_{-1}^{1} = \frac{\rho_L}{\pi}(\frac{\pi}{2}) = \frac{\rho_L}{2}$$

مثال ۸: دو سیم راست و طویل نامتناهی حامل بارهای خطی و یکنواخت و مخالف $\pm\lambda$ مطابق شکل در دو طرف یک استوانه رسانا قرار داده شده‌اند. استوانه بدون بار دارای شعاع R است و سیم‌ها به فاصله a از محور آن قرار دارند. پتانسیل را در نقطه $\vec{r}$ بیابید.



☑ **پاسخ:** مطابق شکل مقابل، خط جریان $-\lambda$ را در $y=b$ و خط جریان $+\lambda$ را در $y=-b$ قرار می‌دهیم:



$$b=\frac{R^۲}{a}$$

پتانسیل در نقطه P برابر است با:

$$V=\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ}[\ln(\frac{r_۳}{r_۴})+\ln(\frac{r_۱}{r_۲})]=\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_\circ}[\ln(\frac{r_۳^۲}{r_۴^۲})+\ln(\frac{r_۱^۲}{r_۲^۲})]\Rightarrow V=\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_\circ}\ln(\frac{r_۱^۲r_۳^۲}{r_۴^۲r_۲^۲})\Rightarrow V=\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_\circ}\ln\left\{\frac{[(y+a)^۲+z^۲][(y-b)^۲+z^۲]}{[(y-a)^۲+z^۲][(y+b)^۲+z^۲]}\right\}$$

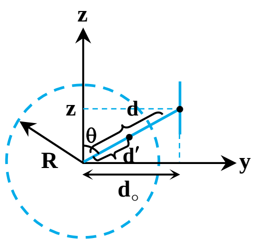
با استفاده از روابط $y=r\cos\varphi$ و $z=r\sin\varphi$ می‌توان نوشت:

$$V=\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_\circ}\ln\left\{\frac{(r^۲+a^۲+۲ar\cos\varphi)[(\frac{ar}{R})^۲+R^۲-۲ar\cos\varphi]}{(r^۲+a^۲-۲ar\cos\varphi)[(\frac{ar}{R})^۲+R^۲+۲ar\cos\varphi]}\right\}$$

مثال ۹: یک توزیع بار خطی در کنار یک کره فلزی زمین شده قرار دارد. تصویر این توزیع بار روی کره فلزی، قسمتی از کدام‌یک از شکل‌های زیر است؟

۱) بیضی ۲) سهمی ۳) دایره ۴) هذلولی

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» مطابق شکل، یک جزء بار از توزیع بارخطی را با فاصله d از مرکز کره در نظر می‌گیریم و فاصله تصویر آن را از مرکز کره (d') به دست می‌آوریم:



$$d'=\frac{R^۲}{d}=\frac{R^۲}{(\frac{d_\circ}{\sin\theta})}=\frac{R^۲}{d_\circ}\sin\theta$$

سپس مختصات بار تصویر را برحسب y و z به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}y=d'\sin\theta\\ z=d'\cos\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=(\frac{R^۲}{d_\circ}\sin\theta)\sin\theta\\ z=(\frac{R^۲}{d_\circ}\sin\theta)\cos\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{R^۲}{d_\circ}\frac{۱-\cos۲\theta}{۲}\\ z=\frac{R^۲}{d_\circ}\frac{\sin۲\theta}{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos۲\theta=۱-\frac{۲d_\circ}{R^۲}y\\ \sin۲\theta=\frac{۲d_\circ}{R^۲}z\end{cases}$$

$$\Rightarrow(۱-\frac{۲d_\circ}{R^۲}y)^۲+(\frac{۲d_\circ}{R^۲}z)^۲=۱\Rightarrow(y-\frac{R^۲}{۲d_\circ})^۲+z^۲=\frac{R^۴}{۴d_\circ}$$

بنابراین مکان بار تصویر، قسمتی از یک دایره به مرکز $(y,z)=(\frac{R^۲}{۲d_\circ},\circ)$ و شعاع $\frac{R^۲}{۲d_\circ}$ است.

مثال۱۰: **یک هادی استوانه‌ای فلزی با شعاع a و پتانسیل V در ارتفاع h $(h \gg a)$ از سطح یک زمین رسانا قرار دارد. انرژی الکتریکی ذخیره شده در فضا به ازای واحد طول هادی چقدر است؟**

۱) $\dfrac{\pi\varepsilon_0}{\ln(\frac{2h}{a})}V^2$ ۲) $\dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(\frac{2h}{a})}V^2$ ۳) $\dfrac{\pi\varepsilon_0}{2\ln(\frac{2h}{a})}V^2$ ۴) $\dfrac{\pi\varepsilon_0}{4\ln(\frac{2h}{a})}V^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ظرفیت خازنی سیستم مورد اشاره در مسأله برابر است با:

$$C \approx \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(\frac{2h}{a})}$$

انرژی ذخیره شده در فضا طبق تئوری تصاویر برابر است با:

$$W = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}CV^2) = \frac{1}{4}CV^2 = \frac{\pi\varepsilon_0}{2\ln(\frac{2h}{a})}V^2$$

آزمون فصل هفتم

۱ـ بار نقطه‌ای q در فاصله بسیار کوچک d از صفحه رسانای نامحدود xoy در نقطه $(\circ,\circ,d)$ قرار دارد. اندازه مؤلفه عمودی میدان الکتریکی در فاصله بسیار زیاد x از مبدأ $(x >> d)$ روی صفحه رسانا (در صفحه افق) برابر است با:

۱) صفر
۲) $\dfrac{qd}{\pi\varepsilon_\circ x^۳}$
۳) $\dfrac{qd}{۲\pi\varepsilon_\circ x^۳}$
۴) $\dfrac{qd}{۴\pi\varepsilon_\circ x^۳}$

۲ـ الکترونی در فاصله a از یک سطح فلزی بی‌نهایت بزرگ قرار گرفته است. بار القائی سطحی بر حسب r کدام است؟

۱) $\dfrac{ea^۲}{۲\pi(r^۲+a^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$
۲) $\dfrac{ea}{۲\pi(r^۲+a^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$
۳) $\dfrac{e^۲a}{۲\pi(r^۲+a^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$
۴) $\dfrac{e^۲a^۲}{۲\pi(r^۲+a^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$

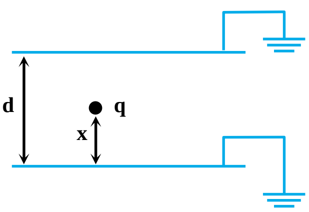
۳ـ بار نقطه‌ای q در فاصله بسیار کوچک d از صفحه رسانای نامحدود xoy و در نقطه $(\circ,\circ,d)$ قرار دارد. اندازه میدان الکتریکی در بالای q در نقطه $(\circ,\circ,z)$ و برای z بسیار زیاد $(z >> d)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\dfrac{qd}{\pi\varepsilon_\circ z^۳}$
۳) $\dfrac{qd}{۴\pi\varepsilon_\circ z^۲}$
۴) $\dfrac{qd}{۲\pi\varepsilon_\circ z^۳}$

۴ـ بار q در فاصله $d = ۲a$ از کره فلزی به شعاع a و پتانسیل $V_\circ$ قرار دارد. پتانسیل $V_\circ$ چقدر باشد تا بار q بی‌حرکت بماند؟

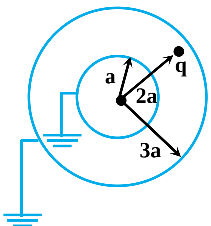
۱) $\dfrac{۲q}{۹\pi\varepsilon_\circ a}$
۲) $\dfrac{q}{۹\pi\varepsilon_\circ a}$
۳) $\dfrac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ a}$
۴) $\dfrac{q}{۸\pi\varepsilon_\circ a}$

۵ـ دو صفحه هادی پهناور به موازات یکدیگر و به فاصله d از هم قرار دارند. بار نقطه‌ای q را به فاصله x از صفحه پایینی قرار می‌دهیم. بار القاء شده روی صفحات پایینی و بالایی به ترتیب کدامند؟



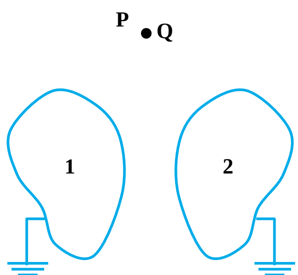
۱) $-\dfrac{x}{d}q, -\dfrac{(d-x)}{d}q$
۲) $-\dfrac{d-x}{d}q, -\dfrac{x}{d}q$
۳) $-\dfrac{q}{۲}, -\dfrac{q}{۲}$
۴) $-\dfrac{(d^۲-x^۲)}{d^۲}q, -\dfrac{-x^۲}{d^۲}q$

۶ـ دو پوسته کروی هادی هم مرکز به شعاع $R = a$ و $R = ۳a$ به پتانسیل صفر وصل شده‌اند. بار نقطه‌ای q را در $R = ۲a$ قرار می‌دهیم. بار القاء شده روی کره داخلی و خارجی به ترتیب کدام است؟



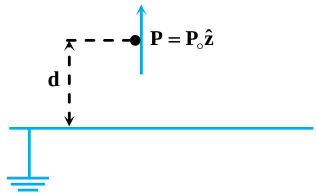
۱) $\dfrac{-q}{۴}, \dfrac{-۳q}{۴}$
۲) $\dfrac{-q}{۲}, \dfrac{-q}{۲}$
۳) $\dfrac{-۳q}{۴}, \dfrac{-q}{۴}$
۴) $\dfrac{-۴q}{۵}, \dfrac{-q}{۵}$

۷ـ دو هادی ۱ و ۲ به ترتیب در پتانسیل‌های $V_۱$ و $V_۲$ قرار دارند. پتانسیل نقطه P در این حالت برابر V_P می‌باشد. اگر دو هادی را به زمین وصل کنیم و در نقطه P بار Q قرار دهیم، چه باری روی هادی ۲ القاء می‌گردد؟



۱) $\dfrac{V_۲-V_P}{V_۱-V_۲}$
۲) $\dfrac{V_۱-V_P}{V_۲-V_۱}$
۳) $\dfrac{V_۲}{V_۱}Q$
۴) $\dfrac{V_P}{V_۱+V_۲}Q$

۸ـ یک دو قطبی الکتریکی دیفرانسیلی با گشتاور $|\vec{P}| = P_\circ$ کولن متر از نقطه‌ای در بی‌نهایت مطابق شکل به فاصله d از یک صفحه فلزی زمین شده، منتقل می‌گردد. کار انجام شده توسط عامل خارجی کدام است؟



۱) $\dfrac{P_\circ^2}{2\pi\varepsilon_\circ(2d)^3}$ ۲) $\dfrac{P_\circ^2}{4\pi\varepsilon_\circ(2d)^3}$

۳) $\dfrac{3P_\circ^2}{4\pi\varepsilon_\circ(2d)^3}$ ۴) $\dfrac{3P_\circ^2}{2\pi\varepsilon_\circ(2d)^3}$

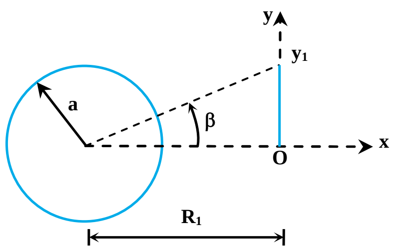
۹ـ بار سطحی یکنواخت ρ_s را روی سطح کره‌ای به شعاع R_1 هم مرکز با کره فلزی زمین شده به شعاع a پخش شده است $(R_1 > a)$. چگالی سطحی کره تصویر کدام است؟

۱) $-\rho_s[\frac{a}{R_1}]^2$ ۲) $-\rho_s[\frac{R_1}{a}]^3$ ۳) $-\rho_s[\frac{a}{R_1}]$ ۴) $-\rho_s[\frac{a}{R_1}]^3$

۱۰ـ کره فلزی به شعاع a مفروض است. بار سطحی یکنواخت ρ_s روی سطح کره‌ای به شعاع $b(b > a)$ هم مرکز با کره فلزی در فضای آزاد حضور دارد. اگر کره فلزی بدون بار باشد چه پتانسیلی روی آن القاء می‌شود؟

۱) صفر ۲) $\rho_s\dfrac{b^2}{a}$ ۳) $\rho_s\dfrac{b}{\varepsilon_\circ}$ ۴) $\dfrac{\rho_s a^2}{b\varepsilon_\circ}$

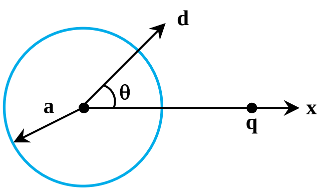
۱۱ـ بار خطی یکنواخت $\rho_\ell(\frac{c}{m})$ روی محور yها از $y = 0$ تا $y = y_1$ مفروض است. کرهٔ فلزی به شعاع a با پتانسیل صفر در فاصلهٔ R_1 از بار خطی مطابق شکل مفروض است به طوری که طول بار خطی با زاویه β از مرکز دیده می‌شود. بار القایی در کره برابر کدام است؟



۱) $-a\rho_\ell \ln\dfrac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$ ۲) $-a\rho_\ell\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}$

۳) $-\dfrac{\rho_\ell}{a}\dfrac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$ ۴) $-\rho_\ell \ln a\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}$

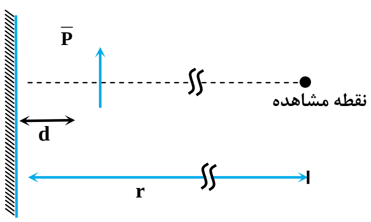
۱۲ـ بار q در مقابل کرهٔ هادی به شعاع a مطابق شکل قرار دارد. اگر در این حالت چگالی بار کره σ باشد، نیروی وارد بر عنصر سطح da در نقطه‌ای با مختصات (a,θ,ϕ) کدام گزینه است؟



۱) در راستای محور z و اندازه $\dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_\circ}da$ ۲) در راستای عمود بر سطح و اندازه $\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon_\circ}da$

۳) در راستای عمود بر سطح و اندازه $\dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_\circ}da$ ۴) به سمت q و اندازه $\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon_\circ}da$

۱۳ـ یک دو قطبی الکتریکی با بردار گشتاور $\bar{P}$ مانند شکل در فاصله d به موازات یک صفحه رسانای نامتناهی قرار دارد. پتانسیل نامتناهی الکتریکی در نقطه مشاهده دور $(d << r)$ چه تابعیتی از r (فاصله این نقطه تا صفحه) نشان می‌دهد؟

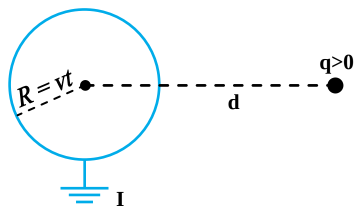


۱) $\dfrac{1}{r^2}$ ۲) $\dfrac{1}{r^{3/2}}$

۳) $\dfrac{1}{r^{5/2}}$ ۴) $\dfrac{1}{r^3}$

۱۴ـ بار الکتریکی مثبت q در فاصله d از مرکز یک کره رسانایی که متصل به زمین است، قرار دارد. اگر شعاع کره به طور خطی با سرعت V افزایش یابد $(r = Vt)$، شدت جریان بین زمین و کره رسانا چقدر و جهت جریان کدام است؟

(توجه: در این مسأله همواره $d > r$ فرض شده است.)



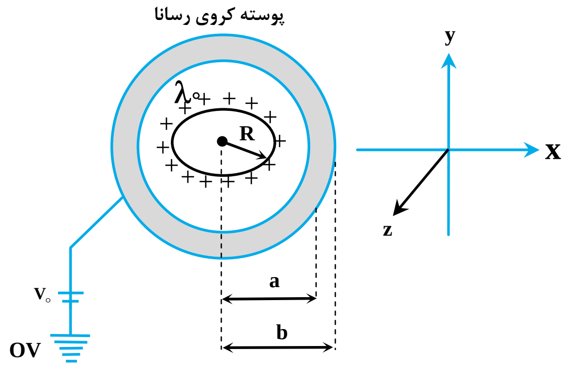
۱) $\frac{qV}{r}$ و به سمت کره است.

۲) $\frac{qV}{d}$ و به سمت زمین است.

۳) $\frac{qV}{d}$ و به سمت کره است.

۴) $\frac{qV}{r}$ و به سمت زمین است.

۱۵ـ در شکل زیر، حلقه‌ای از بارهای الکتریکی به شعاع R و چگالی خطی ثابت $\lambda_\circ$ در مرکز یک پوستهٔ کروی رسانا قرار گرفته است. مرکز پوسته نقطهٔ $(-c,\circ,\circ)$ بوده و پوسته به پتانسیل $V_\circ$ نسبت به نقطه‌ای در بی‌نهایت متصل است. شار $\int \vec{E}.d\vec{s}$ عبوری از صفحهٔ $x = \circ$ از چپ به راست کدام است؟



۱) $۲\pi bV_\circ$

۲) $۲\pi bV_\circ + \frac{\lambda_\circ \pi R}{\varepsilon_\circ}$

۳) $\pi bV_\circ + \frac{\lambda_\circ \pi R}{۲\varepsilon_\circ}$

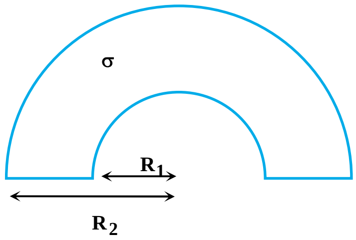
۴) $۴\pi bV_\circ$

فصل هشتم

«جریان‌های الکتریکی دائم»

تست‌های تألیفی فصل هشتم

مثال ۱: مقاومتی به صورت کروی شکل نیمی از یک کره را با شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 تشکیل می‌دهد. اگر رسانایی این کره به صورت $\sigma = \sigma_0 \frac{R_1}{r^2}$ باشد، مقاومت این دو سطح نیم‌کره‌ای را حساب کنید.



۱) $\frac{1}{4\pi\sigma_0}\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1}$

۲) $\frac{Ln\frac{R_2}{R_1}}{2\pi\sigma_0}$

۳) $\frac{1}{4\pi\sigma_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1}$

۴) $\frac{1}{2\pi\sigma_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1}$

پاسخ: گزینه «۳» طبق رابطه کلی مقاومت داریم:

$$R = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sigma r^2 \sin\theta d\varphi d\theta} \Rightarrow R = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sigma_0 R_1}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\sigma_0 R_1 (2\pi) \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta}$$

$$\Rightarrow R = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{2\pi\sigma_0 R_1 (2)} = \frac{1}{4\pi R_1 \sigma_0}(R_2 - R_1)$$

مثال ۲: مقدار مقاومت الکتریکی بین دو کره هم مرکز به شعاع R_1, R_2 $(R_1 < R_2)$ به شرطی که ماده‌ای با ضریب رسانش $\sigma = \sigma_0(1+\frac{k}{r})$ فضای بین آن دو را پر کرده باشد، چقدر است؟ (k مقدار ثابتی است)

۱) $R = \frac{1}{4\pi k\sigma_0}\ln[2\frac{R_1(R_1+k)}{R_2(R_2+k)}]$

۲) $R = \frac{1}{4\pi k\sigma_0}\ln[\frac{R_2(R_1+k)}{R_1(R_2+k)}]$

۳) $R = \frac{k}{4\pi\sigma_0}\ln[\frac{R_1+k}{R_2+k}]$

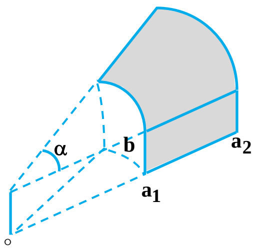
۴) $R = \frac{1}{4\pi k\sigma_0}\ln[\frac{R_2 R_1}{R_2+k}]$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به اینکه مقاومت بین دو کره هم مرکز خواسته شده، بنابراین از فرمول ساختاری زیر استفاده می‌کنیم:

$$R = \int \frac{du_1}{\iint \sigma \frac{h_2 h_3}{h_1} du_2 du_3} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sigma_0 (1+\frac{k}{r}) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{4\pi\sigma_0 r(r+k)}$$

$$= \frac{1}{4\pi\sigma_0}(\frac{1}{k})\ln(\frac{r}{r+k})\Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{1}{4\pi k\sigma_0}\ln\frac{R_2(R_1+k)}{R_1(R_2+k)}$$

مثال ۳: در شکل مقابل جریانی در جهت $\hat{\varphi}$ در گوه با رسانایی σ جاری می‌شود. این جریان چه مقاومتی را می‌بینند؟



۱) $R = \frac{\alpha}{\sigma b \ln(a_2 - a_1)}$

۲) $R = \frac{2\alpha}{\sigma b \ln(a_2 - a_1)}$

۳) $R = \frac{\alpha}{\pi\sigma b \ln(\frac{a_2}{a_1})}$

۴) $R = \frac{\alpha}{\sigma b \ln(\frac{a_2}{a_1})}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به فرمول ساختاری مقاومت الکتریکی می‌توان نوشت:

$$R = \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\int_0^{b}\int_{a_1}^{a_2} \sigma \frac{1}{r} dr dz} = \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sigma b \ln(\frac{a_2}{a_1})} \Rightarrow R = \frac{\alpha}{\sigma b \ln(\frac{a_2}{a_1})}$$

مثال۴: در نقطه $P(1,0,-1)$ در فضا چگالی جریان $\vec{J}=x^2y\hat{x}-2y^3z\hat{y}+3zx^2\hat{z}$ برقرار است. آهنگ تغییر چگالی بارهای الکتریکی درنقطه P کدام است؟

۱) ۳−　۲) ۳　۳) صفر　۴) ۶

پاسخ: گزینه «۱» طبق قانون بقای بار الکتریکی $\vec{\nabla}.\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$. پس باید $\vec{\nabla}.\vec{J}$ را حساب کنیم.

$$\vec{\nabla}.J=2xy-6y^2z+3x^2 \xrightarrow{\text{در نقطه P}} \vec{\nabla}.J=2(1)(0)-6(0)(-1)+3(1)=3 \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t}\Big|_P=-3$$

مثال۵: مرکز مکعب به اضلاع ۲ متر نقطه $P(0,0,0)$ است. در داخل حجم این مکعب، چگالی جریان $\vec{J}=6xyz\hat{x}-6y^2\hat{y}+2zy\hat{z}$ برقرار است. جریان خارج شده از این مکعب چقدر است؟

۱) صفر　۲) ۸　۳) ۸−　۴) ۱۶

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم: $\oiint_{s=\partial V}\vec{J}.d\vec{s}=\iiint_V(\vec{\nabla}.\vec{J})dv$. پس به جای آنکه جریان I را روی ۶ سطح جانبی مکعب به دست آوریم، $\vec{\nabla}.\vec{J}$ را پیدا می‌کنیم و روی حجم مکعب از آن انتگرال می‌گیریم.

$$\vec{\nabla}.\vec{J}=6yz-12y+2y \Rightarrow I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(6yz-10y)\,dx\,dydz=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}6yz(2)\,dydz-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(2)10\,ydydz=0$$

مثال۶: در لحظه $t=0$ در مرکز یک کره به شعاع R و با رسانایی ویژه σ و نفوذپذیری ε بارالکتریکی با چگالی حجمی غیریکنواخت پخش می‌شود. در چه زمانی بار درون کره به $\frac{1}{e}$ مقدار اولیه می‌رسد؟

۱) $\frac{1}{e}\frac{\varepsilon}{\sigma}$　۲) $\frac{\sigma}{\varepsilon}$

۳) $\frac{\varepsilon}{\sigma}$　۴) $\frac{1}{e}\frac{\sigma}{\varepsilon}$

پاسخ: گزینه «۳» مقدار کل بار داخل کره (در زمان t) از رابطه مقابل به‌دست می‌آید: $Q=Q_0e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$

در این رابطه Q_0 بار اولیه کره می‌باشد و در زمان $t=\infty$ کل باره Q_0 به سطح کره منتقل می‌شود. برای محاسبه زمان موردنظر داریم:

$$Q=\frac{1}{e}Q_0 \Rightarrow e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}=\frac{1}{e} \Rightarrow e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}=e^{-1} \Rightarrow t=\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

مثال۷: محیط دی‌الکتریکی با ضریب گذردهی ε و ضریب هدایت g مفروض است. بار Q را در مرکز این محیط قرار می‌دهیم. مدت زمانی که طول می‌کشد تا مقدار بار در مرکز این محیط به نصف کاهش یابد، کدام است؟

۱) $\frac{\varepsilon}{g}\ln 2$　۲) $\frac{2\varepsilon}{g}$　۳) $\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{g}$　۴) $\frac{\varepsilon}{g}e^{-2}$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از رابطه‌ی کاهش بار در یک محیط با رسانندگی g و گذردهی ε (رابطه‌ی واهلش) داریم:

$$Q'=Qe^{-\frac{g}{\varepsilon}t} \quad ; \quad \frac{1}{2}Q=Qe^{-\frac{g}{\varepsilon}t} \Rightarrow t=\frac{\varepsilon}{g}\ln 2$$

مثال۸: چگالی بار سطحی در مرز بین دو محیط با ضریب رسانایی σ_1 و σ_2 و ضریب گذردهی ε_1 و ε_2 کدام است؟

۱) $(\varepsilon_2+\varepsilon_1\frac{\sigma_2}{\sigma_1})E_{2n}$　۲) $\varepsilon_2E_{2n}+\varepsilon_1E_{1n}$　۳) $(\varepsilon_2-\varepsilon_1\frac{\sigma_2}{\sigma_1})E_{1n}$　۴) $(\varepsilon_2-\varepsilon_1\frac{\sigma_2}{\sigma_1})E_{2n}$

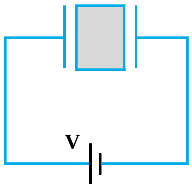
پاسخ: گزینه «۴» با توجه به شرایط مرزی داریم:

$$D_{2n}-D_{1n}=\rho_s \Rightarrow \varepsilon_2E_{2n}-\varepsilon_1E_{1n}=\rho_s$$

از طرفی چگالی جریان نیز در عبور از مرز می‌بایست پیوسته باشد:

$$J_{1n}=J_{2n} \Rightarrow \sigma_1E_{1n}=\sigma_2E_{2n} \quad ; \quad \rho_s=(\varepsilon_2-\varepsilon_1\frac{\sigma_2}{\sigma_1})E_{2n}$$

مثال ۹: در شکل مقابل یک تیغه دی‌الکتریک تلف‌دار بین الکترودهای مثبت و منفی قرار دارد. اگر ضخامت تیغه دو برابر شود، در این صورت بار الکتریکی ذخیره شده و جریان عبوری (در حالت پایدار) چند برابر خواهد شد؟



۱) ۲ و $\frac{1}{2}$

۲) ۲ و ۲

۳) ۴ و $\frac{1}{4}$

۴) $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» بار ذخیره شده روی صفحات الکترود از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$Q = CV = CRI = \frac{\varepsilon}{\sigma} I$$

با دو برابر کردن ضخامت تیغه، مقاومت آن دو برابر می‌شود بنابراین $I = \frac{V}{R}$ نصف می‌شود، در نتیجه بار Q نیز نصف می‌شود.

مثال ۱۰: دی‌الکتریک‌های بین دو صفحه موازی یک خازن از دو تیغه دی‌الکتریک به ترتیب با ضخامت d_1 و d_2 و پرمیتیویته (ضریب دی‌الکتریک) ε_1 و ε_2 و ضرایب هدایت کم σ_1 و σ_2 تشکیل شده است. اگر اختلاف پتانسیل بین دو صفحه هادی موازی V باشد دانسیته بار آزاد در حالت پایدار در سطح تماس دو محیط برابر است با:

۱) $\rho_s = 0$

۲) $\rho_s = \frac{-\varepsilon_2\sigma_1 + \varepsilon_1\sigma_2}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1} V$

۳) $\rho_s = \frac{V}{d_2}\varepsilon_2$

۴) $\rho_s = \frac{V}{d_1}\varepsilon_1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» **روش اول (تستی):** می‌دانیم هرگاه ثابت زمانی دو دی‌الکتریک برابر باشد $(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} = \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2})$، در این صورت چگالی بار آزاد در سطح تماس دو محیط صفر می‌شود. بنابراین فقط گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد.

روش دوم: می‌توانیم این گونه بنویسیم:

$$\rho_s = D_{1n} - D_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n}$$

$$\begin{aligned} &J_{1n} = J_{2n} \Rightarrow \sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n} \\ &E_{1n} d_1 + E_{2n} d_2 = V \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} E_{1n} = \dfrac{\sigma_2 V}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} \\ E_{2n} = \dfrac{\sigma_1 V}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} \end{cases}$$

$$\rho_s = \frac{\varepsilon_1\sigma_2 - \varepsilon_2\sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} V$$

مثال ۱۱: ناحیه $a \le R \le b$ در مختصات کروی در فضای آزاد از ماده‌ای با ضریب دی‌الکتریک ε و ضریب رسانش σ پر شده است. بار Q_0 را در لحظه $t = 0$ به طور یکنواخت روی سطح $R = a$ قرار می‌دهیم. چگالی بار سطحی روی سطح $R = b$ را به دست آورید.

۱) $\rho_s = \frac{Q_0}{4\pi b^2} e^{-\sigma\frac{t}{\varepsilon}}$

۲) $\rho_s = \frac{Q_0}{4\pi b^2}(1 - e^{-\varepsilon\frac{t}{\sigma}})$

۳) $\rho_s = \frac{Q_0}{4\pi b^2}(1 - e^{-2\sigma\frac{t}{\varepsilon}})$

۴) $\rho_s = \frac{Q_0}{4\pi b^2}(1 - e^{-\sigma\frac{t}{\varepsilon}})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در لحظه $t = 0$ چگالی بار سطحی روی سطح $R = b$ صفر است؛ اما در بی‌نهایت $(t \to \infty)$ کل بار Q_0 به سطح $R = b$ منتقل شده و چگالی بار سطحی روی آن $\frac{Q_0}{4\pi b^2}$ می‌شود. بنابراین با توجه به رابطه معرفی شده در بالا، داریم:

$$\rho_s = \frac{Q_0}{4\pi b^2} + (0 - \frac{Q_0}{4\pi b^2})e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} = \frac{Q_0}{4\pi b^2}(1 - e^{-\sigma\frac{t}{\varepsilon}})$$

مثال ۱۲: در یک دی‌الکتریک تلفدار، ضریب هدایت $\sigma = R^2$ و ضریب عایقی $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin\theta$ می‌باشد. اگر چگالی جریان در محیط به صورت $\vec{J} = \cos\varphi \hat{a}_\varphi$ باشد، کل بار آزاد درون یک کره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع a چقدر است؟

۱) $\frac{4}{3}\varepsilon_0$　۲) $\frac{2}{3}\pi\varepsilon_0$　۳) صفر　۴) $\frac{4}{3}\pi\varepsilon_0$

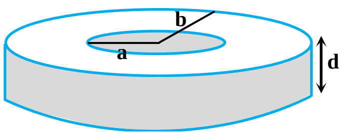
پاسخ: گزینه «۳» ابتدا باید با استفاده از رابطه $\vec{J} = \sigma\vec{E}$، میدان الکتریکی و سپس چگالی شار الکتریکی $(\vec{D})$ را به دست آوریم و سپس با رابطه $\rho = \vec{\nabla}.\vec{D}$، چگالی بار حجمی و نهایتاً بار کره را به دست بیاوریم:

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{\cos\varphi}{R^2}\hat{a}_\varphi \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0 \sin\theta \frac{\cos\varphi}{R^2}\hat{a}_\varphi$$

$$\rho = \vec{\nabla}.\vec{D} = \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\varepsilon_0 \sin\theta\frac{\cos\varphi}{R^2}) = \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\varepsilon_0 \sin\theta}{R^2}(-\sin\varphi) \Rightarrow \rho = -\frac{\varepsilon_0 \sin\varphi}{R^3}$$

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}(-\frac{\varepsilon_0}{R^3}\sin\varphi)R^2\sin\theta dRd\theta d\varphi = 0$$

مثال ۱۳: یک استوانه هادی سوراخ‌دار (مطابق شکل) با هدایت الکتریکی σ مفروض است و جریانی به چگالی $\vec{J} = \frac{k}{r}\hat{a}_r$ در امتداد شعاعی، از مقطع آن می‌گذرد. مقاومت الکتریکی بین سطوح $r = a$ و $r = b$ چقدر است؟



۱) $\frac{\ln(\frac{b}{a})}{2\pi\sigma d}$　۲) $\frac{\ln(\frac{a}{b})}{\pi\sigma d}$

۳) $\frac{\ln(\frac{b}{a})}{\pi\sigma d}$　۴) $\frac{k\ln(\frac{b}{a})}{\pi\sigma d}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به فرمول ساختاری مقاومت داریم:

$$R = \int_a^b \frac{dr}{\underbrace{\int_0^d\int_0^{2\pi}\sigma r d\varphi dz}_{1}} = \int_a^b \frac{dr}{2\pi\sigma r d} = \frac{1}{2\pi\sigma d}\ln\frac{b}{a}$$

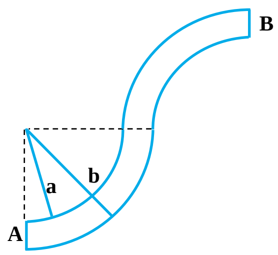
شایان ذکر است، با توجه به اینکه مقاومت الکتریکی یک جسم از مشخصات فیزیکی آن محسوب می‌شود و به کمیت‌های الکتریکی وابستگی ندارد، بنابراین در این مثال نیز انتظار داریم که مقاومت الکتریکی جسم موردنظر مستقل از توزیع چگالی جریان باشد، پس به ضریب k بستگی نخواهد داشت (گزینه ۴ نادرست است).

همچنین از آنجایی که جریان در راستای شعاعی انتشار می‌یابد لذا با افزایش فاصله شعاعی انتظار می‌رود که مقدار مقاومت جسم نیز افزایش یابد:

$$\frac{b}{a} \to \infty \Rightarrow R \to \infty$$

پس گزینه ۲ نیز نادرست می‌باشد.

مثال ۱۴: مطابق شکل دو میله ربع دایروی با شعاع‌های داخلی و خارجی a و b، و ضخامت d به هم متصل شده‌اند. این میله‌ها از ماده‌ای با رسانایی σ تشکیل شده‌اند. مقاومت الکتریکی بین دو نقطه A و B چقدر است؟



۱) $\frac{\pi}{\sigma d\ln(\frac{b}{a})}$　۲) $\frac{\pi}{2\sigma d\ln(\frac{b}{a})}$

۳) $\frac{2\pi}{\sigma d\ln(\frac{b}{a})}$　۴) $\frac{3\pi}{2\sigma d\ln(\frac{b}{a})}$

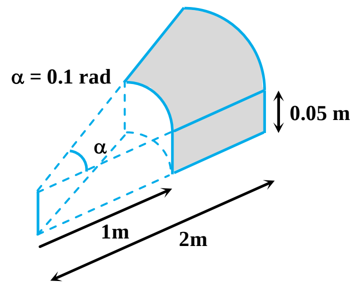
پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از فرمول ساختاری، مقاومت الکتریکی یک میله ربع دایروی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$R=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\int_a^b\int_0^d\frac{\sigma}{r}dzdr}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sigma d\ln(\frac{b}{a})}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sigma d\ln(\frac{b}{a})}=\frac{\pi}{2\sigma d\ln(\frac{b}{a})}$$

اگر از دهنه AB به این ساختار نگاه کنیم، دو میله ربع دایروی با هم سری شده‌اند پس مقاومت کل، برابر مجموع مقاومت آن‌هاست:

$$R_{\text{کل}}=2\frac{\pi}{2\sigma d\ln(\frac{b}{a})}=\frac{\pi}{\sigma d\ln(\frac{b}{a})}$$

مثال ۱۵: مقاومت الکتریکی یک گوه به شکل زیر که از ماده‌ای با مشخصه $\sigma=10^7\ \frac{\text{mho}}{\text{m}}$ ساخته شده، در جهت شعاعی برابر است با:



۱) $\frac{\ln 2}{5\times10^4}\Omega$

۲) $\frac{\ln 2}{5\times10^{-4}}\Omega$

۳) $2\times10^4\ \Omega$

۴) $2\times10^{-4}\ \Omega$

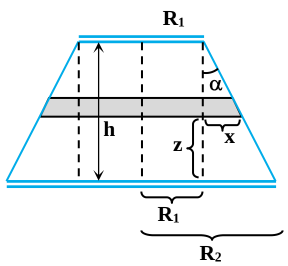
پاسخ: گزینه «۱» اگر در جهت شعاعی، جریانی در گوه جاری شود، مقاومت زیر را در سر راه خود می‌بینند:

$$R=\int\frac{dr}{\iint\sigma ds}=\int\frac{dr}{\iint\sigma rd\varphi dz}=\int_1^2\frac{dr}{\sigma\int_0^{0.05}\int_0^{0.1}rd\varphi dz}=\int_1^2\frac{dr}{5\times10^4\,r}=\frac{\ln 2}{5\times10^4}\Omega$$

مثال ۱۶: یک مخروط ناقص با ضریب هدایت $2/55\times10^6$ mho دارای ارتفاع ۱۶ سانتیمتر و شعاع دوایر بالایی و پایینی آن به ترتیب با ۰/۱mm و ۰/۲mm می‌باشد. مقاومت تقریبی مابین صفحه بالایی و پایینی این مخروط ناقص برابر است با:

۱) $0/1\Omega$ ۲) $0/2\Omega$ ۳) $0/3\Omega$ ۴) $0/4\Omega$

پاسخ: گزینه «۱» برای محاسبه مقاومت الکتریکی بین صفحه بالایی و پایینی از رابطه انتگرالی که برای مقاومت در متن درس معرفی کردیم استفاده می‌کنیم. اگر فرض کنیم که مخروط در راستای محور z قرار گرفته باشد با حرکت از صفحه بالایی به سمت صفحه پایینی، z تغییر می‌کند. در حالی که سطح مقطع مخروط هم با جابه‌جا شدن در راستای محور مخروط تغییر می‌کند ولی تغییرات سطح مقطع وابسته به شعاع (r) می‌باشد. بنابراین ابتدا باید با استفاده از مشخصات مخروط، z و r را بر حسب یکدیگر به دست آوریم. سپس از رابطه انتگرالی استفاده می‌کنیم.



$$tg\alpha=\frac{x}{h-z}$$

$$x=(h-z)tg\alpha=(h-z)\frac{R_2-R_1}{h}$$

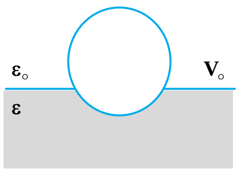
$$r=R_1+x=R_1+(h-z)\frac{R_2-R_1}{h}$$

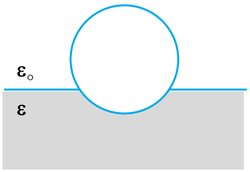
$$dr=-\frac{(R_2-R_1)}{h}dz$$

$$R=\int\frac{dz}{\iint\sigma rdrd\varphi}=\int\frac{dz}{2\pi\sigma.\frac{1}{2}r^2}=\int\frac{-hdr}{(R_2-R_1)\pi\sigma r^2}=\frac{h}{\pi\sigma(R_2-R_1)}\times\left[\frac{1}{r}\right]_{R_2}^{R_1}=\frac{h}{\pi\sigma(R_2-R_1)}\times\left[\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right]=0/1\Omega$$

آزمون فصل هشتم

۱ـ کره‌ای هادی به وزن W در مایع دی‌الکتریکی با گذردهی ε قرار گرفته و یک چهارم آن در مایع فرو رفته است. کره باید به چه پتانسیلی رسانده شود تا نیمی از آن در مایع فرو رود؟





۱) $V_0=\sqrt{\dfrac{2W}{\pi(\varepsilon-\varepsilon_0)}}$

۲) $V_0=\sqrt{\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\pi W}}$

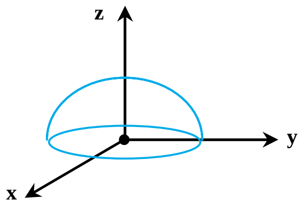
۳) $V_0=\sqrt{\dfrac{W}{2(\varepsilon-\varepsilon_0)}}$

۴) $V_0=\dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{2W}{(\varepsilon-\varepsilon_0)}}$

۲ـ اگر چگالی جریان در مختصات کروی $\vec{J}=0/1e^{-r}\hat{a}_z$ باشد کل جریانی که صفحه $z=0$ را در جهت $\hat{a}_z$ قطع می‌کند به‌دست آورید؟

۱) $0/125\,A$ ۲) $0/218\,A$ ۳) $0/414\,A$ ۴) $0/628\,A$

۳ـ چگالی جریان $\dfrac{A}{m^2}$ $\vec{J}=\sin\theta\,\hat{a}_r$ در مختصات کروی داده شده است. مطلوب است جریانی که از سطح نیم‌کره‌ای به شعاع $r=10cm$ عبور می‌کند. نیم‌کره در $z\geq 0$ واقع بوده و مرکز آن بر مبدأ مختصات واقع است؟



۱) ۱۹/۷ mA

۲) ۳۹/۴ mA

۳) ۴۹/۳ mA

۴) ۵۹/۱ mA

۴ـ سیم هادی به طول L و ضریب هدایت الکتریکی σ در دست است. اگر سطح مقطع این سیم در یک طرف A و در یک طرف kA بوده و این سطح مقطع به طور خطی در طول L افزایش یابد، مطلوب است محاسبه مقاومت این سیم؟

۱) $\dfrac{L}{\sigma A}\cdot\dfrac{\ln k}{k-1}$ ۲) $\dfrac{L}{\sigma A}\cdot\dfrac{k-2}{\ln k}$ ۳) $\dfrac{L}{\sigma A}\cdot\dfrac{\ln k}{k-2}$ ۴) $\dfrac{L}{\sigma A}\cdot\dfrac{k-1}{\ln k}$

۵ـ بین دو کره فلزی هم مرکز به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b اختلاف پتانسیل V_0 برقرار می‌شود به طوریکه کره بزرگتر زمین است اگر ماده بین دو کره دارای ضریب هدایت الکتریکی σ باشد تلف حرارت کدام است؟

۱) $\dfrac{2\pi\sigma V_0^2 ab}{b-a}$ ۲) $\dfrac{\pi\sigma V_0^2 ab}{4(b-a)}$ ۳) $\dfrac{4\pi\sigma V_0^2 ab}{b-a}$ ۴) $\dfrac{4\pi\sigma V_0^2(b-a)}{ab}$

۶ـ ناحیه $x>0$ دارای ضریب هدایت $\sigma=\sigma_0(2+\dfrac{1}{x})$ و ضریب عایقی $\varepsilon=\varepsilon_0(2+\dfrac{1}{x})$ می‌باشد. اگر جریان DC در این محیط دارای چگالی $\vec{J}=\dfrac{e^{-z}}{x}\hat{a}_z$ باشد، چگالی بار الکتریکی ساکن در این محیط برابر است با:

۱) $-\dfrac{\varepsilon_0}{\sigma_0}\dfrac{e^{-z}}{x}$ ۲) $-\dfrac{\varepsilon_0}{\sigma_0}\dfrac{e^{-z}}{x^2}$ ۳) $-\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\dfrac{e^{-z}}{x}$ ۴) $-\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\dfrac{e^{-z}}{x^2}$

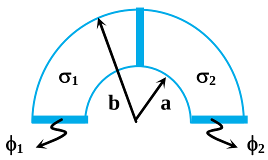
۷ـ بین دو کره رسانای هم مرکز به شعاع‌های a و 2a ماده‌ای عایق با گذردهی الکتریکی ε و رسانایی ویژه σ وجود دارد. مقاومت بین این دو کره کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{\pi\sigma a}$ ۲) $\dfrac{1}{2\pi\sigma a}$ ۳) $\dfrac{1}{4\pi\sigma a}$ ۴) $\dfrac{1}{8\pi\sigma a}$

۸ـ چگالی جریان در ناحیه‌ای از فضا برابر $\vec{J}=cy\hat{a}_x[\dfrac{A}{m^2}]$ است. c عددی ثابت است. یک رأس مربعی به ضلع a در مبدأ مختصات و دو ضلع آن موازی محور z بوده و با صفحه xz زاویه ϕ می‌سازد. اندازه جریان گذرنده از سطح مربع را تعیین کنید.

۱) $\dfrac{1}{2}ca^3\sin^2\varphi$ ۲) $2ca^3\sin^2\varphi$ ۳) $4ca^3\sin^2\varphi$ ۴) $\dfrac{1}{4}ca^3\sin^2\varphi$

۹ــ دو رسانا با رسانش σ_1 و σ_2 تشکیل یک مقاومت به شکل نیم استوانه دایره‌ای مطابق شکل به ضخامت d را داده‌اند. مقاومت الکتریکی بین این صفحات را به‌دست آورید؟



۱) $\dfrac{2(\sigma_1+\sigma_2)\ln\frac{b}{a}}{d(b-a)}$
۲) $\dfrac{2\ln\frac{b}{a}}{d}\left(\dfrac{1}{\sigma_1}+\dfrac{1}{\sigma_2}\right)$
۳) $\dfrac{(b-a)d}{(\sigma_1+\sigma_2)(b+a)}$
۴) $\dfrac{\pi}{2(\ln\frac{b}{a})d}\left(\dfrac{1}{\sigma_1+\sigma_2}\right)$

۱۰ــ ناحیه بین خازن مسطحی به سطح واحد از عایق غیرکاملی با رسانش $\sigma=\sigma_0 e^{-\frac{z}{d}}$ مطابق شکل پر شده است. با صرف‌نظر کردن از میدان‌های پراکندگی رسانایی بین صفحه‌ها کدام است؟ $(G=\frac{1}{R})$

۱) $G=\dfrac{\sigma_0}{(e-1)d}$
۲) $G=\dfrac{\pi\sigma_0}{ed}$
۳) $G=\dfrac{\sigma_0^2}{(e-1)d}$
۴) $G=\dfrac{\pi^2\sigma_0^2}{\sqrt{e-1}d}$

۱۱ــ در مختصات کروی فضاهای $a<r<b, r<a$ به ترتیب از محیط‌هایی با ضرایب رسانش و دی‌الکتریک σ_1,ε_1 ، σ_2,ε_2 پر شده است. بار سطحی یکنواخت $\rho_s(\frac{C}{m^2})$ را در لحظه $t=0$ در مرز دو محیط قرار داده‌ایم. چگالی جریان دو محیط عبارتند از: (τ_1 و τ_2 به ترتیب زمان آسودگی در هر یک از دو محیط می‌باشد)

۱) $\vec{J}_1=0$ ، $\vec{J}_2=\dfrac{a^2\rho_s e^{-t/\tau_2}}{\tau_2 r^2}\hat{a}_r$

۲) $\vec{J}_1=\dfrac{4\pi a^2\tau_1\rho_s e^{-t/\tau_1}}{r^2}\hat{a}_r$ ، $\vec{J}_2=\dfrac{4\pi a^2\tau_2\rho_s e^{-t/\tau_2}}{r^2}\hat{a}_r$

۳) $\vec{J}_1=0$ ، $\vec{J}_2=\dfrac{4\pi a^2\tau_2\rho_s(1-e^{-t/\tau_2})}{r^2}\hat{a}_r$

۴) $\vec{J}_1=\dfrac{a^2\rho_s e^{-t/\tau_1}}{4\pi r^2}\hat{a}_r$ ، $\vec{J}_2=\dfrac{a^2\rho_s(1-e^{-t/\tau_2})}{4\pi r^2}\hat{a}_r$

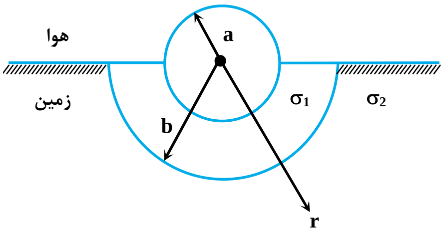
۱۲ــ یک کابل هم محور به شعاع‌های داخلی a و خارجی b مفروض است. چنانچه طول کابل L و رسانندگی الکتریکی σ باشد، مقاومت الکتریکی آن برابر کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{\pi\sigma L}\ln\dfrac{b}{a}$
۲) $\dfrac{1}{2\pi\sigma L}\ln\dfrac{b}{a}$
۳) $\dfrac{1}{2\pi\sigma L}$
۴) $\dfrac{1}{4\pi\sigma L}\ln\dfrac{a}{b}$

۱۳ــ در مختصات استوانه‌ای ناحیه‌ی $0/5m\le r\le 3m$ و $0\le z\le 10m$ و $0\le\varphi\le 2\pi$ از مایعی با ضریب رسانش $\sigma=2\dfrac{mho}{m}$ پر شده است. سطوح $r=0/5m$ و $r=3m$ این ناحیه از رسانای کامل با ولتاژ V بین آنها فرض می‌شود. اگر توان $10kw$ بخواهد در مایع به صورت حرارت تلف شود، مقدار V چقدر باید باشد؟

۱) ۱۱/۸۵
۲) ۱۱/۹۴
۳) ۱۲/۰۶
۴) ۱۲/۱۳

۱۴ـ کره‌ای از رسانای کامل به شعاع a به طور نیمه داخل زمین قرار دارد. رسانش زمین در ناحیه $a \le r < b$ برابر σ_1 و در ناحیه $b \le r < \infty$ برابر σ_2 فرض شده است. مقاومت زمین را وقتی توزیع جریان یکنواخت در نظر گرفته می‌شود به دست آورید.



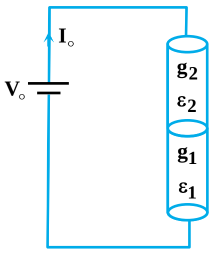
۱) $R = \frac{1}{2\pi\sigma_2}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) + \frac{1}{2\pi\sigma_1}(\frac{1}{b})$

۲) $R = \frac{1}{4\pi\sigma_1}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) + \frac{1}{4\pi\sigma_2}(\frac{1}{b})$

۳) $R = \frac{1}{2\pi\sigma_1}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) + \frac{1}{2\pi\sigma_2}(\frac{1}{b})$

۴) $R = \frac{1}{4\pi\sigma_2}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) + \frac{1}{4\pi\sigma_1}(\frac{1}{b})$

۱۵ـ یک مقاومت استوانه‌ای مطابق شکل از دو ماده مختلف با ضریب‌های رسانایی g_1 و g_2 و ضرایب گذردهی‌های ε_1 و ε_2 و سطح مقطع A ساخته شده است. این مقاومت به یک باطری با نیروی محرکه $V_\circ$ متصل است. چگالی بار سطحی σ (بر حسب $\frac{C}{m^2}$) در سطح مشترک دو ماده کدام است؟



۱) $\sigma = \circ$

۲) $\sigma = \frac{I_\circ}{A}(g_1\varepsilon_1 - g_2\varepsilon_2)$

۳) $\sigma = \frac{I_\circ}{A}(-\frac{\varepsilon_1}{g_1} + \frac{\varepsilon_2}{g_2})$

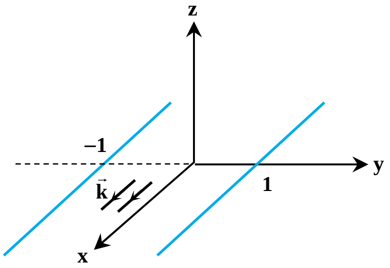
۴) $\sigma = \frac{I_\circ}{A}(\frac{g_1}{e_1} - \frac{g_2}{e_2})$

فصل نهم

«میدان مغناطیسی ساکن»

تست‌های تألیفی فصل نهم

مثال ۱: یک صفحه با ابعاد $-\infty < x < +\infty$ و $|y|<1$ داریم که از آن جریان سطحی $\vec{k}=|y|\hat{x}$ می‌گذرد. اندازه میدان $\vec{B}$ در نقطه $(0,0,1)$ چقدر است؟



۱) $\frac{\mu_0}{2\pi}\text{Ln}2$ ۲) $\frac{\mu_0}{2\pi}\text{Ln}\frac{1}{2}$

۳) $\frac{\mu_0}{4\pi}\text{Ln}2$ ۴) $\frac{\mu_0}{4\pi}\text{Ln}\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از قانون بیوساوار داریم:

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{k}\times\vec{R}}{|\vec{R}|^3}ds$$

$$\Rightarrow \vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'=1\hat{z}-x'\hat{x}-y'\hat{y}\ \Rightarrow |\vec{R}|=\sqrt{1+x'^2+y'^2}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|y'|\hat{x}\times[\hat{z}-x'\hat{x}-y'\hat{y}]}{[1+x'^2+y'^2]^{\frac{3}{2}}}dx'dy'\ =\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|y'|\times[-\hat{y}-y'\hat{z}]}{[1+x'^2+y'^2]^{\frac{3}{2}}}dx'dy'$$

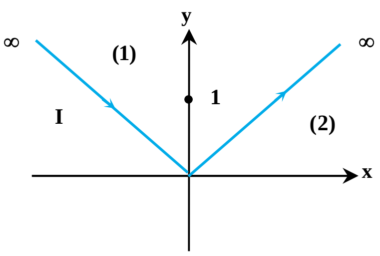
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-1}^{1}\frac{-|y'|\hat{y}dy'}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}+\underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{-|y'|y'\hat{z}dy'}{(1+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}}_{0}\right)dx'\right]$$

$$\vec{B}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\hat{y}\int_{-1}^{1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|y'|dx'dy'}{[1+x'^2+y'^2]^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\hat{y}\int_{-1}^{1}|y'|dy'\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx'}{[1+x'^2+y'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \vec{B}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\hat{y}\int_{-1}^{1}|y'|dy'\left[\frac{x'}{(1+y'^2)\sqrt{1+x'^2+y'^2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right]\Rightarrow B_y=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-1}^{1}\frac{|y'|}{1+y'^2}(2)dy'=-\frac{\mu_0}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{|y'|dy'}{1+y'^2}$$

$$=-\frac{\mu_0}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{y'}{1+y'^2}dy'=-\frac{\mu_0}{2\pi}(\text{Ln}(1+y'^2)\big|_0^1)=-\frac{\mu_0}{2\pi}\text{Ln}2=\frac{\mu_0}{2\pi}\text{Ln}\frac{1}{2}$$

مثال ۲: روی خط $y=|x|$ جریان I به شکل زیر قرار دارد. میدان $\vec{B}$ در نقطه $(x,y)=(0,1)$ کدام است؟



۱) $\frac{\mu_0 I}{4\pi}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\hat{z}$ ۲) $\frac{\mu_0 I}{4\pi}(1+\sqrt{2})\hat{z}$

۳) $\frac{\mu_0 I}{2\pi}(1+\sqrt{2})\hat{z}$ ۴) $\frac{\mu_0 I}{2\pi}\text{Ln}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\hat{z}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» میدان ناشی از سیم (۱) برابر است با:

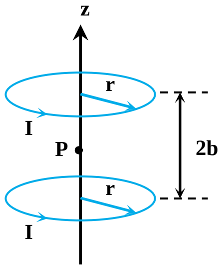
$$r=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ \beta=\frac{\pi}{۴}\ ,\ \alpha=۰\quad\Rightarrow\vec{B}_۱=\frac{\mu_\circ I}{۲\sqrt{۲}\pi}[۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}]\hat{z}$$

میدان ناشی از سیم (۲) برابر است با:

$$r=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ \beta=۰\ ,\ \alpha=\frac{\pi}{۴}\quad\Rightarrow\vec{B}_۲=\frac{\mu_\circ I}{۲\sqrt{۲}\pi}[۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}]\hat{z}$$

میدان کل : $\vec{B}=\vec{B}_۱+\vec{B}_۲=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}(۱+\sqrt{۲})\hat{z}$

مثال ۳: **دو پیچه مشابه به شعاع r را مطابق شکل در مجاورت هم و به فاصله $۲b$ از یکدیگر قرار می‌دهیم. صفحه این دو پیچه موازی هم است. اگر مقدار جریان در دو پیچه برابر و هم جهت باشد، برای نقطه P که در وسط محور دو پیچه قرار گرفته، کدام گزینه صحیح است؟**



۱) همواره $\frac{d^۲B}{dz^۲}=۰$ و $\frac{dB}{dz}=۰$ می‌باشد.

۲) همواره $\frac{d^۲B}{dz^۲}=۰$ ولی مقدار $\frac{dB}{dz}$ ممکن است صفر یا غیرصفر باشد.

۳) همواره $\frac{dB}{dz}=۰$ ولی مقدار $\frac{d^۲B}{dz^۲}$ ممکن است صفر یا غیرصفر باشد.

۴) مقدار $\frac{dB}{dz}$ و $\frac{d^۲B}{dz^۲}$ بستگی به فاصله دو پیچه دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در وسط محور دو پیچه مقدار B حداکثر می‌شود پس: $\frac{dB}{dz}=۰$. اما $\frac{d^۲B}{dz^۲}$ فقط در صورتی در وسط محور دو پیچه صفر می‌گردد که $۲b=r$ باشد. یعنی به مثال کلاسیک پیچه‌ی هلم‌هولتز باز گردیم که در آن $۲b=r$ است و در نقطه‌ی میانی مشتق اول و دوم صفر است، بنابراین میدان یکنواخت است.

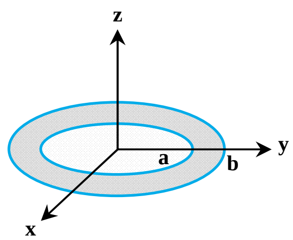
مثال ۴: **دو حلقهٔ سیمی به شکل دایره به شعاع‌های a و $۲a$ با جریان‌های هم‌جهت، به ترتیب $I_۱$ و $I_۲$ در صفحهٔ $z=۰$ و متحدالمرکز مفروض می‌باشند. اگر هر دو حلقه در مرکز خود، میدان مغناطیسی یکسان تولید نمایند، رابطهٔ بین $I_۱$ و $I_۲$ کدام است؟**

۱) $I_۱=\frac{۱}{۲}I_۲$ ۲) $I_۱=\frac{۱}{\sqrt{۲}}I_۲$ ۳) $I_۱=\frac{۱}{\sqrt{۳}}I_۲$ ۴) $I_۱=\frac{۱}{۴}I_۲$

☑ **پاسخ: گزینه** «۱» میدان مغناطیسی در مرکز یک حلقه دایره‌ای به شعاع R که حامل جریان I می‌باشد، از این رابطه به دست می‌آید: $B=\frac{\mu_\circ I}{۲R}$

بنابراین طبق فرض مسأله خواهیم داشت: $\frac{I_۱}{۲a}=\frac{I_۲}{۲(۲a)}\Rightarrow I_۱=\frac{I_۲}{۲}$

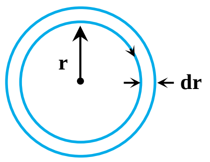
مثال ۵: **بر روی یک حلقه دایروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b، توزیع جریان $\vec{J}=J_\circ r\hat{a}_\varphi$ وجود دارد. میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در مبدأ چقدر است؟**



۱) $\vec{B}=\mu_\circ J_\circ(b-a)\hat{a}_z$ ۲) $\vec{B}=\mu_\circ J_\circ\frac{b}{a}\hat{a}_z$

۳) $\vec{B}=\frac{\mu_\circ J_\circ}{۲}(b-a)\hat{a}_z$ ۴) $\vec{B}=\frac{\mu_\circ J_\circ}{۲}\frac{b}{a}\hat{a}_z$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا یک جزء دیفرانسیل حلقه به ضخامت dr' را مانند شکل زیر درنظر می‌گیریم که میدان $\vec{B}$ در مرکز آن برابر است با:

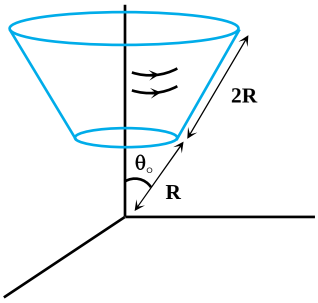


$$d\vec{B}=\frac{\mu_\circ I}{۲r'}\hat{a}_z\Rightarrow d\vec{B}=\frac{\mu_\circ Jdr'}{۲r'}\hat{a}_z\Rightarrow d\vec{B}=\frac{\mu_\circ J_\circ r'dr'}{۲r'}\hat{a}_z\Rightarrow d\vec{B}=\frac{\mu_\circ J_\circ}{۲}dr'\hat{a}_z$$

با انتگرال‌گیری روی بازه $a<r'<b$ از رابطه $d\vec{B}$ داریم:

$$\vec{B}=\int_a^b d\vec{H}=\int_a^b\frac{\mu_\circ J_\circ}{۲}dr'\hat{a}_z=\frac{\mu_\circ J_\circ}{۲}(b-a)\hat{a}_z$$

مثال ۶: روی یک مخروط ناقص با مشخصات $R < r < 3R$ و $\theta_\circ = \frac{\pi}{6}$ ، جریان سطحی $\vec{k} = k_\circ r\hat{\varphi}$ می‌گذرد. میدان $\vec{B}$ در مبدأ مختصات کدام است؟

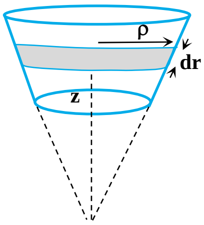


۱) $\frac{\mu_\circ k_\circ R}{2}\hat{z}$

۲) $\frac{\mu_\circ k_\circ R}{4}\hat{z}$

۳) $\frac{\mu_\circ k_\circ}{2}\mathrm{Ln}3\hat{z}$

۴) $\frac{\mu_\circ k_\circ R}{4}\mathrm{Ln}3\hat{z}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا یک حلقه کوچک به ضخامت dr روی مخروط در نظر می‌گیریم که میدان ناشی از آن در مبدأ مختصات برابر $d\vec{B} = \frac{\mu_\circ I\rho^2}{2(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$ است.

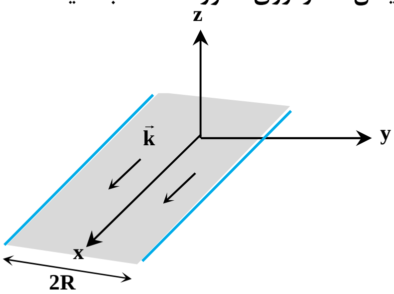
حال میدان کل برابر است با:

$$\vec{B} = \int_{r=R}^{3R} d\vec{B} = \int_R^{3R} \frac{\mu_\circ k_\circ r\rho^2}{2(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} dr\,\hat{z}$$

$$\rho = r\sin\theta_\circ = \frac{r}{2} \qquad , \qquad I = |\vec{k}|\,dr = k_\circ r dr$$

$$\vec{B} = \int_R^{3R} \frac{\mu_\circ k_\circ \frac{r^3}{4}dr}{r^3} = \frac{\mu_\circ k_\circ}{8}\int_R^{3R} dr = \frac{\mu_\circ k_\circ}{8}(3R-R) = \frac{\mu_\circ k_\circ}{8}.2R = \frac{\mu_\circ k_\circ}{4}R$$

مثال ۷: جریان سطحی $\vec{k} = |y|\,\hat{x}$ روی نواری به عرض 2R که در صفحه $z = 0$ واقع است، می‌گذرد. میدان $\vec{B}$ را روی محور z حساب کنید.



۱) $-\frac{\mu_\circ z}{2\pi}\mathrm{Ln}\frac{z^2}{z^2+R^2}\hat{y}$

۲) $\frac{\mu_\circ z}{4\pi}\mathrm{Ln}\frac{z^2}{z^2+R^2}\hat{y}$

۳) $-\frac{\mu_\circ z}{4\pi}\mathrm{Ln}\frac{z^2}{z^2+R^2}\hat{y}$

۴) $\frac{\mu_\circ z}{2\pi}\mathrm{Ln}\frac{z^2}{z^2+R^2}\hat{y}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از قانون بیاساوار داریم:

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\iint \frac{\vec{k}\times\vec{R}}{|R|^3}$$

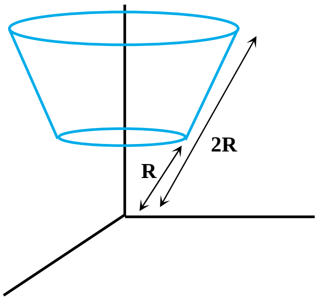
$$r - r' = z\hat{z} - x'\hat{x} - y'\hat{y} \qquad , \qquad r = z\hat{z} \qquad , \qquad r' = x'\hat{x} + y'\hat{y}$$

$$B = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-R}^{R} \frac{|y'|(\hat{x}\times(z\hat{z}-x'\hat{x}-y'\hat{y})}{[z^2+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} dx'dy'$$

B_z صفر است، زیرانتگرال تابعی فرد است و روی بازه متقارن انتگرال می‌گیریم.

$$B_y = \frac{-\mu_\circ z}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-R}^{R} \frac{|y'|}{[z^2+x'^2+y'^2]^{\frac{3}{2}}} dx'dy' = -\frac{\mu_\circ z}{2\pi}\int_\circ^R \frac{2y'}{z^2+y'^2}dy' = \frac{\mu_\circ z}{2\pi}\mathrm{Ln}\frac{z^2}{z^2+R^2}$$

مثال ۸: روی پوسته‌ی مخروطی $\theta = 30$ ، $R \le r \le 2R$ بار سطحی $\delta = r$ توزیع شده است. میدان مغناطیسی B را در مبدأ مختصات حساب کنید. با شرط آنکه پوسته با سرعت زاویه ω حول محور z بچرخد.



۱) صفر

۲) $\frac{3}{4}\mu_0\omega R^3\hat{z}$

۳) $\frac{3}{64}\mu_0\omega R^2\hat{z}$

۴) $\frac{3}{16}\mu_0\omega R^2\hat{z}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چگالی با جریان سطحی را حساب می‌کنیم.

$$\vec{k} = \sigma\vec{u} = \sigma r\sin 30\,\omega\hat{\varphi} = \frac{\sigma r^2\omega}{2}\hat{\varphi} \qquad r = 0 \Rightarrow |r - r'| = |r'|$$

از قانون بیوساوار داریم:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint \frac{\vec{k}\times(r - r')}{|r - r'|^3} r'\sin 30\, dr' d\varphi' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_R^{2R}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{r'^2 w}{2}\hat{\varphi}\times(-r'\hat{r})}{r'^3} r'(\frac{1}{2})dr'd\varphi'$$

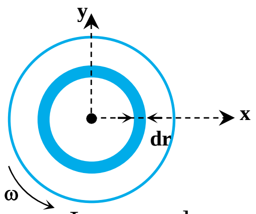
$$= -\frac{\mu_0\omega}{8\pi}\int_R^{2R}\int_0^{2\pi}\frac{\hat{\varphi}\times\hat{r}}{2} r'dr'd\varphi' = -\frac{\mu_0\omega}{16\pi}\int_R^{2R}\int_0^{2\pi} r'\hat{\theta}dr'd\varphi'$$

$$= -\frac{\mu_0\omega}{16\pi}\int_R^{2R}\int_0^{2\pi} r'[\cos 30\sin\varphi'\hat{y} + \cos 30\cos\varphi'\hat{x} - \sin 30\hat{z}]dr'd\varphi' = -\frac{\mu_0\omega}{16\pi}[\frac{r'^2}{2}\Big|_R^{2R}][-\frac{1}{2}\hat{z}] = \frac{\mu_0\omega}{64}[4R^2 - R^2]\hat{z} = \frac{3}{64}\mu_0\omega R^2\hat{z}$$

مثال ۹: یک دیسک بسیار نازک با شعاع a دارای چگالی بار سطحی یکنواخت ρ_s (کولن بر مترمربع) می‌باشد. این دیسک حول محور خود با سرعت زاویه‌ای ثابت ω (رادیان بر ثانیه) می‌چرخد. اندازه چگالی شار مغناطیسی $(\vec{B})$ در مرکز دیسک چقدر است؟

۱) $\mu_0\rho_s\omega a^2$ ۲) $\frac{\mu_0\rho_s\omega a^2}{2}$ ۳) $\frac{\mu_0\rho_s\omega a}{2}$ ۴) $\mu_0\rho_s\omega a$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» چگالی جریان سطحی ناشی از حرکت بارها برابر است با $\vec{J}_s = \rho_s\vec{v} = \rho_s r\omega\hat{a}_\phi$. بنابراین اگر حلقه‌ای به ضخامت dr را در این دیسک در نظر بگیریم، جریان عبوری از آن برابر است با:



$$I = |\vec{J}_s|\,dr$$

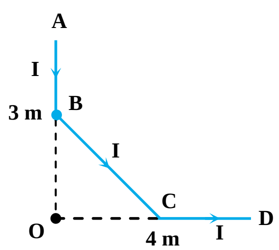
چگالی شار مغناطیسی ناشی از حلقه به ضخامت dr برابر است با:

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0\rho_s r dr\omega}{2r} = \frac{\mu_0\rho_s\omega dr}{2}$$

بنابراین، چگالی شار مغناطیسی ناشی از کل حلقه برابر است با:

$$|\vec{B}| = \int_0^a \frac{\mu_0\rho_s\omega dr}{2} = \frac{\mu_0\rho_s\omega a}{2}$$

مثال ۱۰: از سیمی مطابق شکل مقابل، جریان ثابت I عبور می‌کند. چگالی شار مغناطیسی $(\vec{B})$ در مرکز مختصات چقدر است؟



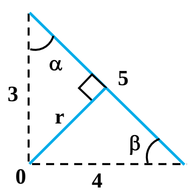
۱) $\vec{B} = -\frac{7\mu_0 I}{48\pi}\hat{a}_z$

۲) $\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{48\pi}\hat{a}_z$

۳) $\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{36\pi}\hat{a}_z$

۴) $\vec{B} = -\frac{5\mu_0 I}{24\pi}\hat{a}_z$

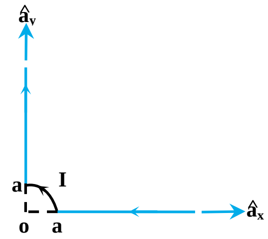
☑ **پاسخ :** گزینه «۱» میدان مغناطیسی در امتداد سیم حامل جریان صفر است. $\vec{B}_{CD} = \vec{B}_{AB} = 0$



در نتیجه چگالی شار مغناطیسی برابر است با:

$$\vec{B} = \vec{B}_{BC} = -\hat{a}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\alpha + \cos\beta) = -\hat{a}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi\times\frac{12}{5}}(\frac{7}{5}) \Rightarrow \vec{B} = -\frac{7\mu_0 I}{48\pi}\hat{a}_z$$

مثال۱۱: جریان دائم الکتریکی I مطابق شکل از سیم نازکی منطبق بر ربع دایره‌ای به شعاع a هم مرکز با مبدأ مختصات می‌گذرد. میدان مغناطیسی در مبدأ کدام است؟



۱) $\frac{2\mu_0 I}{a}\hat{a}_z$

۲) $\frac{\mu_0 I}{8a}\hat{a}_z$

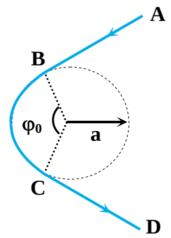
۳) $\frac{\mu_0 I}{a}\hat{a}_z$

۴) $2\mu_0 a I\hat{a}_z$

☑ پاسخ: **گزینه «۲» نقطه مبدأ در امتداد سیم‌های بلند افقی و عمودی قرار دارد و لذا میدان مغناطیسی ناشی از این دو قسمت در مبدأ صفر بوده و فقط لازم است میدان مغناطیسی ناشی از ربع حلقه به شعاع a را در مرکز آن به‌دست آوریم که برابر است با:**

$$\vec{B} = \frac{1}{4}\left(\frac{\mu_0 I}{2a}\right)\hat{a}_z = \frac{\mu_0 I}{8a}\hat{a}_z$$

مثال۱۲: سیم بلندی حامل جریان I در صفحه $z = 0$ مطابق شکل مقابل قرار دارد. چگالی شار(فلوی) مغناطیسی در مبدأ مختصات کدام است؟



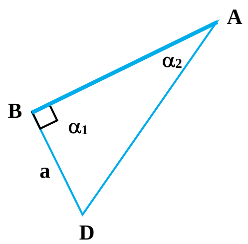
۱) $\frac{\mu_0 I}{2\pi a}(\varphi_0 \cos\varphi\,\hat{a}_x + \varphi_0 \sin\varphi_0 \sin\varphi\,\hat{a}_y + \frac{\hat{a}_z}{4})$

۲) $\mu_0 I(\frac{1}{2\pi a} + \frac{\varphi_0}{4\pi a})\hat{a}_z$

۳) $\mu_0 I(\frac{1}{\pi a^2} + \frac{1}{\varphi_0 a})\hat{a}_z$

۴) $\mu_0 \frac{I\varphi_0}{2\pi a}\hat{a}_z$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» اگر سیم بلند را به قسمت‌های AB و BC و CD تقسیم کنیم، داریم:



$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\hat{a}_z$$: چگالی شار مغناطیسی ناشی از AB

زیرا $\alpha_2 = 0$ و $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

به همین ترتیب در مورد سیم CD داریم:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\hat{a}_z$$: چگالی شار مغناطیسی ناشی از CD

برای سیم BC نیز می‌توان نوشت:

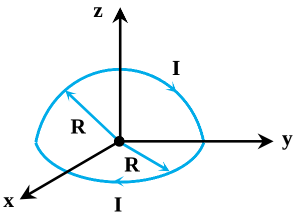
$$\vec{B}_3 = \frac{\varphi_0}{2\pi}\left(\frac{\mu_0 I}{2a}\right)\hat{a}_z$$: چگالی شار مغناطیسی ناشی از BC

بنابراین:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a} + \frac{\mu_0 I\varphi_0}{4\pi a}\right)\hat{a}_z = \mu_0 I\left(\frac{1}{2\pi a} + \frac{\varphi_0}{4\pi a}\right)\hat{a}_z$$

آزمون فصل نهم

۱ـ یک سیم حامل جریان از دو حلقه نیم‌دایره‌ای عمود بر هم به شعاع R که در صفحات $z=0$ و $x=0$ قرار دارند مطابق شکل تشکیل شده است. میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در مرکز نیم حلقه‌ها کدام است؟



۱) $\frac{\mu_0 I}{2R}\hat{k}$

۲) $\frac{-\mu_0 I}{4R}\hat{i}+\frac{\mu_0 I}{4R}\hat{k}$

۳) $\frac{\mu_0 I}{2R}\hat{i}+\frac{\mu_0 I}{2R}\hat{k}$

۴) $\frac{-\mu_0 I}{4R}\hat{i}-\frac{\mu_0 I}{4R}\hat{k}$

۲ـ حلقه‌ای دایره‌ای به شعاع b دارای بار خطی یکنواخت $\rho_L\,(\frac{c}{m})$ است. اگر حلقه در صفحه $z=0$ و به مرکز مبدأ مختصات در جهت $\hat{\varphi}$ با سرعت زاویه‌ای ω دوران کند، چگالی شار مغناطیسی $\vec{B}$ روی محور حلقه به ارتفاع z چقدر است؟

۱) $\frac{\mu_0\rho_L b^3\omega}{2(z^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$

۲) $\frac{\mu_0\rho_L b^2\omega}{2(z^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$

۳) $\frac{\mu_0\rho_L b^3\omega}{4\pi(z^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$

۴) $\frac{\mu_0\rho_L b^2\omega}{4\pi(z^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$

۳ـ روی سطح نیم‌کره‌ای به شعاع R چگالی جریان سطحی $\vec{J}=J_0\sin\theta\,\hat{a}_\varphi$ برقرار است. چگالی شار مغناطیسی در مرکز نیم‌کره کدام است؟ (مرکز نیم‌کره منطبق بر مبدأ مختصات می‌باشد)

۱) $\frac{\mu_0 J_0}{3}\hat{z}$

۲) $\frac{2\mu_0 J_0}{3}\hat{z}$

۳) $\frac{\mu_0 J_0}{2}\hat{z}$

۴) $\frac{3\mu_0 J_0}{2}\hat{z}$

۴ـ جریان صفحه‌ای $\vec{J}_{s_1}=10\hat{a}_x\,\frac{A}{m}$ در صفحه $z=0$ و جریان‌های صفحه‌ای دیگری با $\vec{J}_{s_2}=\vec{J}_{s_3}=-5\hat{a}_x\,\frac{A}{m}$ در صفحات $z=5m$ و $z=-5m$ قرار گرفته‌اند. اندازه چگالی شار مغناطیسی که صفحه $y=0$ را در جهت $\hat{a}_y$ قطع کرده و بین صفحات $x=0$ و $x=2m$ و $z=0$ و $z=5m$ واقع شده است کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $20\mu_0 wb$

۲) $-20\mu_0 wb$

۳) $-50\mu_0 wb$

۴) $50\mu_0 wb$

۵ـ عنصر جریانی $Id\vec{L}=4\pi\times10^{-4}\,\hat{a}_\theta$ در $(x=0/8, y=0/6, z=\sqrt{3})$ مفروض است. مطلوب است محاسبه شدت میدان مغناطیسی که توسط عنصر جریان فوق در مبدأ مختصات تولید می‌شود؟ $(\mu_0=4\pi\times10^{-7}\,\frac{H}{m})$

۱) $-15\hat{a}_x+20\hat{a}_y\,\frac{\mu A}{m}$

۲) $15\hat{a}_x+20\hat{a}_y\,\frac{\mu A}{m}$

۳) $-15\hat{a}_x-20\hat{a}_y\,\frac{\mu A}{m}$

۴) $15\hat{a}_x-20\hat{a}_y\,\frac{\mu A}{m}$

۶ـ کره‌ای به شعاع a و چگالی بار حجمی ρ با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z می‌چرخد. شدت میدان مغناطیسی در مرکز کره را به‌دست آورید.

۱) $\frac{\rho\omega\pi a^2}{8}\hat{a}_z$

۲) $\frac{\rho\omega a^2}{2}\hat{a}_z$

۳) $\frac{\rho\omega a^2}{3}\hat{a}_z$

۴) صفر

۷ـ یک میله شیشه‌ای نازک به شعاع R و طول L دارای بار یکنواخت سطحی به چگالی σ است. این میله را حول محورش با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخانند. میدان مغناطیسی در فاصله $d>>R$ از مرکز میله کدام است؟

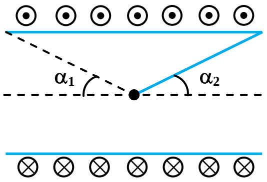
۱) $\frac{\mu_0\omega\sigma LR^3}{2d[d^2+(\frac{L}{2})^2]^{\frac{3}{2}}}$

۲) $\frac{\mu_0\omega\sigma R^3}{2d[d^2+(\frac{L}{2})^2]^{\frac{3}{2}}}$

۳) $\frac{\mu_0\omega\sigma LR^2}{2d[d^2+(\frac{L}{2})^2]^{\frac{1}{2}}}$

۴) $\frac{\mu_0\omega\sigma R^2}{2d[d^2+(\frac{L}{2})^2]^{\frac{1}{2}}}$

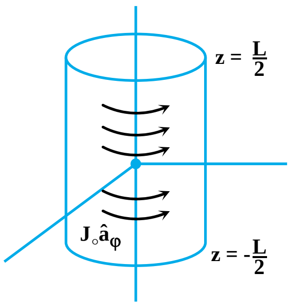
۸ـ از یک سیملوله به طول L، شامل N دور سیم، جریان I می‌گذرد. اندازه چگالی شار مغناطیسی در نقطه P داخل سیملوله (روی محور آن) که از دو انتهای سیملوله با زوایای α_1 و α_2 دیده می‌شود، کدام است؟



۱) $\frac{\mu_0 NI}{4L}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)$　　۲) $\frac{\mu_0 NI}{2L}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)$

۳) $\frac{\mu_0 NI}{2L}(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)$　　۴) $\frac{\mu_0 NI}{4L}(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)$

۹ـ استوانه‌ای به طول L حامل جریان سطحی با چگالی $\vec{J}=J_0\hat{a}_\varphi$ می‌باشد. محور استوانه بر محور z واقع است. هرگاه طول استوانه را بسیار بلند فرض نماییم، چگالی شار مغناطیسی در مرکز استوانه کدام است؟



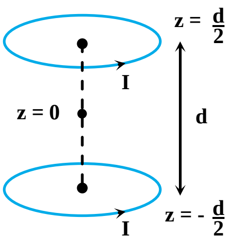
۱) $B=\frac{\mu_0 J_0}{2}$

۲) $B=\mu_0 J_0$

۳) $B=\frac{\mu_0 J_0}{4}$

۴) $B=2\mu_0 J_0$

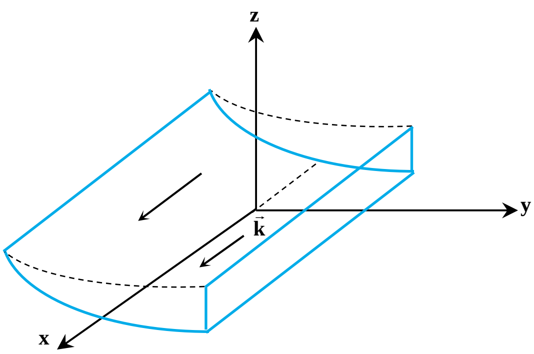
۱۰ـ دو حلقه دایره‌ای به شعاع R حامل جریان I در جهت‌های نشان داده شده در شکل به فاصله d از یکدیگر قرار دارند. d را چنان انتخاب می‌کنیم که در وسط حلقه‌ها $\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}$ صفر باشد. در این حالت میدان مغناطیسی در وسط حلقه‌ها کدام است؟



۱) $\frac{8\mu_0 I}{5\sqrt{5}R}$　　۲) $\frac{8\mu_0 I}{3\sqrt{3}R}$

۳) $\frac{4\mu_0 I}{5\sqrt{5}R}$　　۴) $\frac{4\mu_0 I}{3\sqrt{3}R}$

۱۱ـ جریان سطحی $\vec{k}=|y|\hat{x}$ از روی نواری به عرض $2R$ که در صفحه $z=0$ واقع است، می‌گذرد. چگالی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را روی محورها حساب کنید.



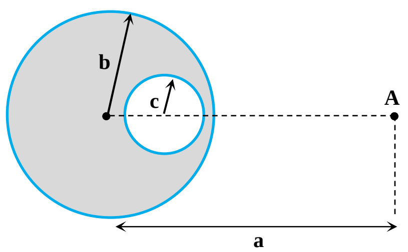
۱) $\frac{\mu_0 z}{2\pi}\mathrm{Ln}\frac{z^2}{z^2+R^2}\hat{y}$

۲) $-\frac{\mu_0 z}{2\pi}\mathrm{Ln}\frac{z^2}{z^2+R^2}\hat{y}$

۳) $\frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{Ln}\frac{z^2}{z^2+R^2}\hat{y}$

۴) $-\frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{Ln}\frac{z^2}{z^2+R^2}\hat{y}$

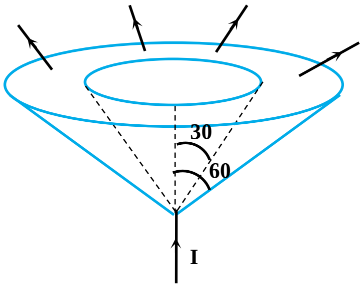
۱۲ـ در یک استوانه طویل به شعاع b یک حفره به شعاع c ایجاد کرده‌ایم. فاصله مرکز حفره با مرکز استوانه d است. چگالی جریان استوانه به غیر از ناحیه حفره برابر J است. میدان $\vec{B}$ را در نقطه A حساب کنید.



۱) $\frac{J}{2}\left(\frac{b^2}{a}-\frac{c^2}{a-d}\right)\hat{\phi}$　　۲) $\frac{J}{2}\frac{b^2}{a}\hat{\phi}$

۳) $\frac{J}{2}\left(-\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{a-d}\right)\hat{\phi}$　　۴) $\frac{J}{2}\left(\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{a}\right)\hat{\phi}$

۱۳ـ جریان I از یک سیم نازک در $z<0$ عبور کرده و در یک لایه مخروطی که فضای $30<\theta<60$ را ایجاد نموده، توزیع می‌شود. میدان مغناطیسی B را در $30<\theta<60$ به‌دست آورید.



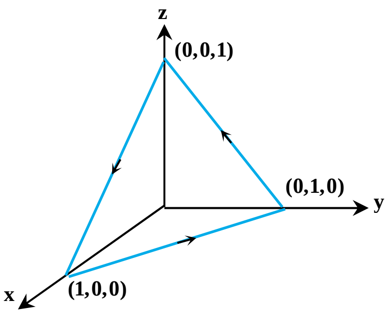
۱) $\frac{I}{2\pi(\sqrt{3}-1)}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\theta)\hat{\theta}\hat{\phi}$

۲) $\frac{I}{\pi(\sqrt{3}-1)}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\theta)\hat{\phi}$

۳) $-\frac{I}{2\pi(\sqrt{3}-1)}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\theta)\hat{\phi}$

۴) $\frac{I}{\pi(\sqrt{3}-1)}(\frac{1}{2}-\cos\theta)\hat{\phi}$

۱۴ـ یک حلقه مثلثی حامل جریان I را در نظر بگیرید، میدان مغناطیسی ناشی از این حلقه را در مبدأ مختصات حساب کنید.



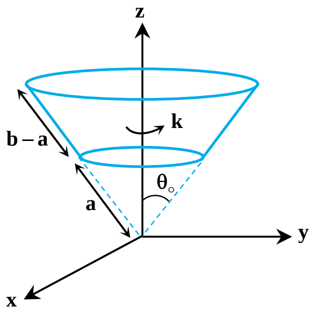
۱) $\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$

۲) $\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$

۳) $\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{\pi}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$

۴) $\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$

۱۵ـ روی مخروط ناقص شکل زیر جریان سطحی $\vec{k}=k_0 r\hat{\phi}$ می‌گذرد، میدان مغناطیسی را در مبدأ مختصات حساب کنید.



۱) $\mu_0 k_0 \sin^2\theta_0 (b-a)$

۲) $\frac{\mu_0 k_0}{2}\sin^2\theta_0 (b-a)$

۳) $\frac{\mu_0 k_0}{2}\sin^2\theta_0 (b^2-a^2)$

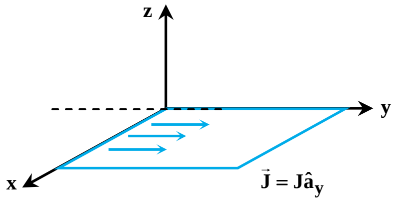
۴) $\frac{\mu_0 k_0}{2}\sin^2\theta_0 (b^3-a^3)$

فصل دهم

«قانون آمپر»

تست‌های تألیفی فصل دهم

مثال۱: صفحهٔ نامتناهی xy را در نظر بگیرید که دارای چگالی $J = J\hat{a}_y$ (J ثابت و واحد آن آمپر بر متر) است. شدت میدان مغناطیسی $\vec{H}$ در بالای صفحهٔ xy ، کدام است؟



۱) $J\hat{a}_z$

۲) $J\hat{a}_x$

۳) $\frac{1}{2}J\hat{a}_z$

۴) $\frac{1}{2}J\hat{a}_x$

پاسخ: گزینه «۴» از قانون بیاساوار داریم $\vec{B} = \mu_0 \int \frac{\vec{k}\times\vec{R}}{4\pi|\vec{R}|^3}dB'$ که $R = r - r'$ چون صفحه نامتناهی است، در هر نقطه بالای صفحه بخواهیم میدان را حساب کنیم، میدان یکسانی به دست خواهد آمد، برای سادگی نقطه موردنظر را روی محور z ها در نظر می‌گیریم:

$$r = z\hat{z} \quad , \quad r' = x'\hat{x} + y'\hat{y} \quad \Rightarrow \vec{R} = z\hat{z} - x'\hat{x} - y'\hat{y}$$

$$\vec{B} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_0 J\hat{y}\times[z\hat{z} - x'\hat{x} - y'\hat{y}]}{4\pi[z^2 + x'^2 + y'^2]^{\frac{3}{2}}}dx'dy' = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_0 J[z\hat{x} + x'\hat{z}]}{4\pi[z^2 + x'^2 + y'^2]^{\frac{3}{2}}}dx'dy'$$

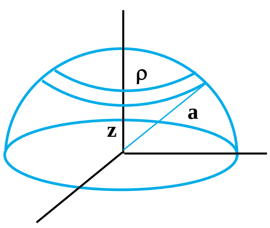
$$B_x = \frac{\mu_0 J}{4\pi}\hat{x}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z}{[z^2 + x'^2 + y'^2]^{\frac{3}{2}}}dx'dy' = \frac{\mu_0 J}{4\pi}z\int_{-\infty}^{+\infty}dx'\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy'}{[z^2 + x'^2 + y'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_0 J}{4\pi}z\int_{-\infty}^{+\infty}dx'\frac{y'}{(z^2 + x'^2)^2\sqrt{z^2 + x'^2 + y'^2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mu_0 J}{4\pi}z\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx'(1+1)}{x'^2 + z^2}$$

$$= \frac{\mu_0 J}{2\pi}z[\frac{1}{z}\tan^{-1}\frac{x'}{z}\Big|_{-\infty}^{+\infty}] = \frac{\mu_0 J}{2\pi}\frac{z}{z}[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}] = \frac{\mu_0 J}{2}\hat{x} \Rightarrow H_x = \frac{J}{2}\hat{x}$$

و از طرفی $B_z = 0$ زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x'dx'}{(z^2 + x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ صفر است.

مثال۲: روی سطح نیم‌کره‌ای چگالی جریان سطحی $\vec{k} = k_0 \sin\theta\hat{\varphi}$ توزیع شده است. میدان مغناطیسی در مبدأ کدام است؟

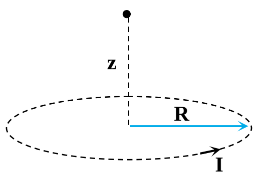


۱) $\frac{k_0}{6}\hat{z}$

۲) $\frac{k_0}{2}\hat{z}$

۳) $\frac{k_0}{3}\hat{z}$

۴) $\frac{2}{3}k_0\hat{z}$



پاسخ: گزینه «۳» ابتدا چگالی جریان را به حلقه‌های به شعاع ρ و ضخامت $ad\theta$ تقسیم‌بندی می‌کنیم که هر حلقه جریان $(k_0 \sin\theta)ad\theta$ را حمل می‌کند. از قبل می‌دانستیم که میدان ناشی از حلقه جریان به شعاع R و جریان I عبارت است از:

$$\vec{H} = \frac{IR^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$$

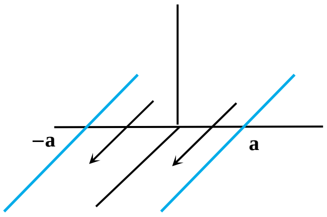
حال $d\vec{H}$ ناشی از هر حلقه جریان برابر است با:

$$d\vec{H} = \frac{(k_\circ \sin\theta)ad\theta\rho^۲}{۲[\rho^۲ + z^۲]^{\frac{۳}{۲}}}\hat{z}$$

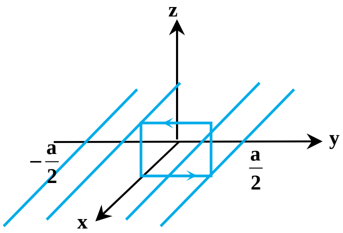
که $\rho^۲ + z^۲ = a^۲$ و $\rho = a\sin\theta$:

$$d\vec{H} = \frac{(k_\circ \sin\theta)ad\theta(a\sin\theta)^۲}{۲a^۳} \Rightarrow d\vec{H} = \frac{k_\circ \sin^۳\theta d\theta}{۲}\hat{z} \Rightarrow H = \int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} \frac{k_\circ \sin^۳\theta}{۲} d\theta\,\hat{z} = \frac{k_\circ}{۲}\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} \sin^۳\theta d\theta = \frac{k_\circ}{۲}(\frac{۲}{۳}) = \frac{k_\circ}{۳}\hat{z}$$

مثال ۳: روی صفحه xy توزیع جریان روبه‌رو را داریم: $|y| \le ۲a$ $\;J = J_\circ \cos(\frac{\pi}{a}y)\hat{x}$ میدان H را در فضای ناشی از این جریان پیدا کنید. به شرط آنکه $|y| < ۲a$.



پاسخ: طبق قانون آمپر میدان مغناطیسی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



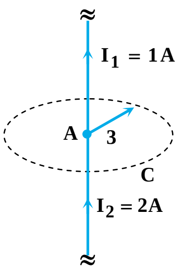
$$\int H.dl = \int J d\vec{s}$$

$$y - ۲H_y l = l\int_{-\frac{a}{۲}}^{\frac{a}{۲}} J_\circ \varepsilon(\frac{\pi}{a}y)dy = L\frac{a}{\pi}J_\circ \sin\frac{\pi}{a}y\,\Big|_{-\frac{a}{۲}}^{\frac{a}{۲}} = J_\circ^۲ \frac{a}{\pi}L$$

میدان روی محور z: $-H_y = J_\circ \frac{a}{\pi}$

$$-۲H_y L = L\int_{-y}^{y} J_\circ^۲(\frac{\pi}{a}y)dy = ۲LJ_\circ^۲ \frac{a}{\pi}\sin(\frac{\pi}{a}y)\Big|_\circ^y \Rightarrow H_y = -\hat{a}_y J_\circ \frac{\pi}{a}\sin(\frac{\pi}{a}y)$$

مثال ۴: روی یک سیم بی‌نهایت بلند، نقطه A با قابلیت ذخیره بار الکتریکی مفروض است به طوری که جریان ۲A بـه آن وارد و جریـان ۱A از آن خارج می‌شود. مقدار $\oint \vec{H}.d\vec{l}$ روی مسیر بسته دایره‌ای شکل به مرکز A و شعاع ۳m واقع در صفحه عمود بر سیم کدام است؟



۱) ۱/۵A

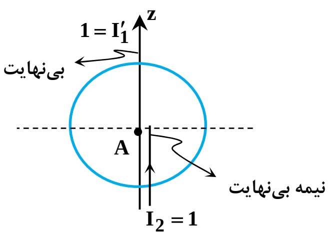
۲) ۳A

۳) ۴/۵A

۴) ۴A

پاسخ: گزینه «۱» **روش اول:** از نتیجه نکته اخیر استفاده می‌کنیم.

$$\oint \vec{H}.d\vec{l} = \frac{I_۱ + I_۲}{۲} = \frac{۱+۲}{۲} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$



روش دوم: جریان موجود را به‌صورت یک سیم بی‌نهایت بلند با جریان ۱A و یک سیم نیمه بر نهایت با جریان ۱A (مطابق شکل) در نظر بگیریم:

$$\vec{H} = \vec{H}_۱' + \vec{H}_۲' = \frac{I\hat{a}_\phi}{۲\pi r} + \frac{I\hat{a}_\phi}{۴\pi r} \Rightarrow \oint \vec{H}.d\vec{l} = ۲\pi \times \frac{I}{۲\pi}(۱ + \frac{۱}{۲}) = ۱ + \frac{۱}{۲} = ۱/۵$$

مثال ۵: درون استوانه‌ای به شعاع a یک جریان یکنواخت مارپیچی با چگالی جریان $\vec{J} = J_\varphi \hat{a}_\varphi + J_z \hat{a}_z$ وجود دارد. میدان مغناطیسی بیرون از این استوانه به کدام صورت است؟

۱) $\vec{H} = \frac{a^۲}{۲r} J_z \hat{a}_\varphi + \pi a^۲ J_\varphi \hat{a}_z$

۲) $\vec{H} = \frac{a^۲}{۲r}(J_z + J_\varphi)\hat{a}_z$

۳) $\vec{H} = \frac{a^۲}{۲r} J_z \hat{a}_\varphi + a J_\varphi \hat{a}_z$

۴) $\vec{H} = \frac{a^۲}{۲r} J_z \hat{a}_\varphi$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» طبق قانون آمپر، مؤلفه $\hat{a}_\varphi$ جریان، میدانی در بیرون استوانه ایجاد نمی‌کند. میدان ایجاد شده توسط مؤلفه $\hat{a}_z$ جریان به صورت زیر است:

$$\vec{H} = \frac{I_z}{۲\pi r}\hat{a}_\varphi = \frac{(\pi a^۲)J_z}{۲\pi r}\hat{a}_\varphi = \frac{a^۲}{۲r} J_z \hat{a}_\varphi$$

مثال ۶: برای افزایش میدان مغناطیسی درون یک چنبره چه راه‌هایی وجود دارد؟

☑ **پاسخ:** با توجه به رابطه $B = \frac{\mu NI}{۲\pi r}$، می‌توان با قرار دادن هسته مغناطیسی درون چنبره $(\mu \uparrow)$، افزایش تعداد دورهای چنبره $(N \uparrow)$ و یا افزایش جریان عبوری از سیم‌های چنبره $(I \uparrow)$ میدان B را افزایش داد.

مثال ۷: اگر در محیطی با ضریب نفوذپذیری $\mu_۰$، چگالی فلوی مغناطیسی برابر $A_۰ x \hat{a}_z$ ($A_۰$ مقدار ثابت) باشد، چگالی جریان الکتریکی در آن محیط عبارت است از:

۱) $\frac{+۲A_۰}{\mu_۰}\hat{a}_y$

۲) $\frac{-۲A_۰ \hat{a}_y}{\mu_۰}$

۳) $\frac{-A_۰}{\mu_۰}\hat{a}_y$

۴) $\frac{-۲A_۰}{\mu_۰}\hat{a}_y$

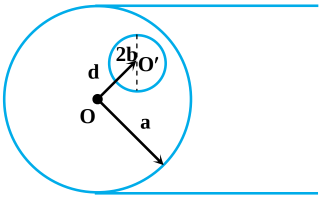
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از چگالی فلوی مغناطیسی، میدان مغناطیسی را به دست می‌آوریم:

$$\vec{B} = A_۰ x \hat{a}_z \qquad \vec{H} = \frac{B}{\mu_۰} = \frac{A_۰ x}{\mu_۰}\hat{a}_z$$

حال که $\vec{H}$ را داریم، با استفاده از رابطه $\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$ می‌توانیم بردار $\vec{J}$ را به دست آوریم:

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ۰ & ۰ & \frac{A_۰ x}{\mu_۰} \end{vmatrix} = \frac{-A_۰}{\mu_۰}\hat{a}_y$$

مثال ۸: در یک سیم استوانه‌ای به شعاع a حفره استوانه‌ای به شعاع b موازی با سیم وجود دارد (شکل زیر). فاصله محور حفره از محور سیم d است $(b < d < a - b)$. اگر چگالی جریان در مقطع سیم یکنواخت و برابر J باشد، مقدار میدان مغناطیسی B در درون حفره چقدر است؟



۱) $B = \frac{\mu J b}{۲}$

۲) $B = \mu_۰ J b$

۳) $B = \mu_۰ J d$

۴) $B = \frac{\mu_۰ J d}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به رابطه معرفی شده در متن درس میدان مغناطیسی ایجاد شده در حفره استوانه‌ای برابر است با:

$$\vec{B} = \frac{\mu_۰ \vec{J} \times \overrightarrow{OO'}}{۲} \Rightarrow |\vec{B}| = \frac{\mu_۰ J d}{۲}$$

مثال۹: در داخل یک استوانه هادی توپر به شعاع $1/0\,cm$، شدت میدان مغناطیسی به صورت زیر داده شده است، کل جریان هادی کدام است؟

$$\vec{H} = (4/77\times 10^{4})(\frac{r}{2} - \frac{r^{2}}{3\times 10^{-2}})\hat{a}_{\phi}\ \frac{A}{m}$$

۱) $5/0\,A$ ۲) $6/0\,A$ ۳) $4/0\,A$ ۴) $8/0\,A$

پاسخ: گزینه «۱» از قانون مداری آمپر داریم:

$$\oint \vec{H}.d\vec{l} = I$$

مقدار انتگرال خطی H را روی مسیر دایره‌ای که تمام سطح مقطع استوانه‌ای را بپوشاند محاسبه می‌کنیم.

$$I = \oint \left[4/77\times 10^{4}\,(\frac{\rho}{2} - \frac{\rho^{2}}{3\times 10^{-2}}) \right] \hat{a}_{\phi}.(\rho\, d\phi\, \hat{a}_{\phi})$$

$$I = 4/77\times 10^{4}\,(\frac{\rho^{2}}{2} - \frac{\rho^{3}}{3\times 10^{-2}}) \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \Rightarrow 2\pi\times 4/77\times 10^{4}\,(\frac{\rho^{2}}{2} - \frac{\rho^{3}}{3\times 10^{-2}})\Big|_{\rho=10^{-2}} \Rightarrow I = 5A$$

مثال۱۰: کره‌ای به شعاع $a = 5m$ به مرکز $(0,0,3)$ در دست است. فرض کنید S_1 قطعه‌ای از سطح کره باشد که در $z > 0$ قرار گرفته است. اگر در مختصات کروی $\vec{H} = 2r\hat{a}_{\varphi}(\frac{A}{m})$ باشد، حاصل $\int_{S_1} (\vec{\nabla}\times\vec{H}).d\vec{s}$ چقدر است؟

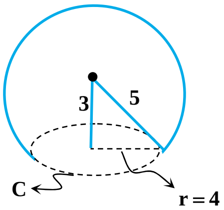
۱) 16π ۲) 32π ۳) 48π ۴) 64π

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از قضیه استوکس داریم:

$$\int_{S_1} (\vec{\nabla}\times\vec{H}).d\vec{s} = \oint_{C} \vec{H}.d\vec{l}$$

در این رابطه، C دایره‌ای به شعاع $r = 4$ می‌باشد.

$$\oint_{C} \vec{H}.d\vec{l} = \oint (2r\hat{a}_{\varphi}).rd\varphi\hat{a}_{\varphi} = \int_{0}^{2\pi} 32 d\varphi = 64\pi$$



آزمون فصل دهم

۱ـ کره‌ای به شعاع $r = ۴m$ به مرکز $(۰,۰,۳)$ قرار گرفته است. اگر $S_۱$ سطحی از کره باشد که در ناحیه $z > ۰$ قرار داشته باشد، حاصل $\int_{S_۱}(\nabla\times\vec{H}).ds$ را در صورتی که $\vec{H} = ۳r\hat{a}_\varphi$ باشد کدام است؟

۱) ۱۱۳^A ۲) ۱۳۲^A ۳) ۱۵۰^A ۴) ۱۶۹^A

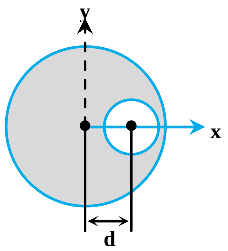
۲ـ رسانایی ویژه استوانه‌ای به ارتفاع L و شعاع a تابعی از فاصله شعاعی تا محور استوانه است. بین دو قاعده اختلاف پتانسیل V ایجاد شده و میدان مغناطیسی ناشی از جریان گذرنده استوانه $\vec{B} = kr^۲\hat{a}_\varphi$ است. مقاومت استوانه کدام است؟

۱) $R = \frac{\mu_۰ V}{\pi k a^۲}$ ۲) $R = \frac{\mu_۰ V}{۲\pi k a^۳}$ ۳) $R = \frac{\mu_۰ V}{۲\pi k a^۲}$ ۴) $R = \frac{\mu_۰ V}{\pi k a^۳}$

۳ـ در فضای آزاد میدان مغناطیسی به صورت $\vec{B} = r\sin\theta\hat{a}_\varphi$ داده شده است. جریانی که از عرقچین کروی $r = ۱$، $۰ < \varphi < ۲\pi$ و $۰ < \theta < \frac{\pi}{۶}$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲\mu_۰}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۲\mu_۰}$ ۳) $\frac{\pi}{\mu_۰}$ ۴) $\frac{۳\pi}{\mu_۰}$

۴ـ در داخل کابل استوانه‌ای شکل بلندی به شعاع b حفره‌ای استوانه‌ای به شعاع a وجود دارد. محور حفره به موازات محور کابل و به فاصله d از آن قرار دارد. جریان کل I از مقطع کابل عبور می‌کند. اندازه چگالی شار مغناطیسی در داخل حفره کدام است؟

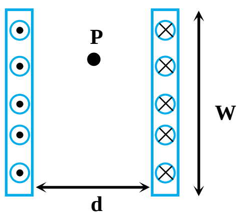


۱) $\frac{\mu_۰ Id}{۲}$ ۲) $\frac{\mu_۰ Id}{۲\pi(b^۲ - a^۲)}$ ۳) $\frac{\mu_۰ Id}{۲\pi(b - a)}$ ۴) $\frac{\mu_۰ Id}{۲\pi}$

۵ـ از یک سیم استوانه‌ای غیرمغناطیسی به شعاع سطح مقطع $۱۰cm$ و طول $۱۰۰m$ جریان کل $۱۰\pi^A$ می‌گذرد. اگر برای $\rho < ۱۰^{cm}$، $\vec{J} = k\rho^۲\hat{a}_\varphi$ باشد که k یک ثابت و ρ فاصله از محور استوانه است، مقدار k چند $\frac{A}{m^۳}$ است؟ (راستای محور استوانه را محور z در نظر بگیرید)

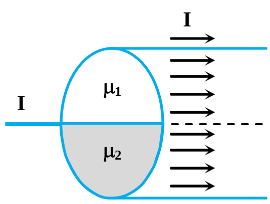
۱) $۱/۵\times۱۰^۴$ ۲) ۵×۱۰^{-۲} ۳) ۲×۱۰^۵ ۴) ۵×۱۰^۳

۶ـ دو صفحه موازی طویل به عرض W که هر کدام جریان کل I را به طور یکنواخت و در جهت‌های مخالف هم، عبور می‌دهند، مطابق شکل به فاصله d از هم قرار دارند اندازه چگالی شار مغناطیسی در فاصله بین دو صفحه کدام است؟



۱) $B = \frac{\mu_۰ I}{dW}$ ۲) $B = \frac{\mu_۰ Id}{W}$ ۳) $B = \frac{\mu_۰ I}{W}$ ۴) $B = \frac{\mu_۰ IW}{d}$

۷ـ یک سیم بلند که جریان I را عبور می‌دهد در مرکز و روی محور یک استوانه دیگر قرار گرفته که جریان کل I را در جهت مخالف عبور می‌دهد. نصف استوانه از ماده‌ای با پرمابلیته $\mu_۱$ و نصف دیگر با ماده‌ای با پرمابلیته $\mu_۲$ پر شده است. شدت میدان مغناطیسی در ناحیه‌ای که پرمابلیته آن $\mu_۱$ است کدام گزینه می‌باشد؟

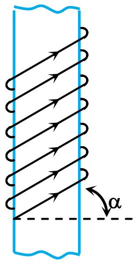


۱) $H = \frac{\mu_۱\mu_۲ I}{\pi r(\mu_۱ + \mu_۲)}$ ۲) $H = \frac{\mu_۱ I}{\pi r(\mu_۱ + \mu_۲)}$ ۳) $H = \frac{\mu_۲ I}{\pi r(\mu_۱ + \mu_۲)}$ ۴) $H = \frac{I}{\pi r(\mu_۱ + \mu_۲)}$

۸ـ استوانه داخلی به شعاع a جریان کل I را از خود عبور می‌دهد و استوانه خارجی که شعاع داخلی آن b و شعاع خارجی‌اش c می‌باشد، جریان کل I را در خلاف جهت اولی عبور می‌دهد. اندازه شدت میدان مغناطیسی در فاصله r $(b < r < c)$ از مرکز استوانه کدام است؟

۱) $|H| = \frac{I}{2\pi r}$　　۲) $|H| = \frac{Ir}{2\pi a^2}$　　۳) $|H| = \frac{I}{2\pi r}\left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}\right)$　　۴) $|H| = \frac{Ir}{2\pi(c^2 - b^2)}$

۹ـ یک سلونوئید بی‌نهایت طویل با هسته هوایی شامل n دور سیم‌پیچ به هم فشرده در واحد طول است. سیم‌پیچ‌ها به صورت مایل با زاویه α بوده و جریان عبور کننده از آن I می‌باشد. چگالی شار مغناطیسی در بیرون سلونوئید و به فاصله r از مرکز آن کدام است؟



۱) $\vec{B} = \frac{\mu_0 I \cos\alpha}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$

۲) $\vec{B} = \frac{\mu_0 I \cos\alpha}{2\pi r}\hat{a}_z$

۳) $\vec{B} = \frac{\mu_0 I \sin\alpha}{2\pi r}\hat{a}_z$

۴) $\vec{B} = \frac{\mu_0 I \sin\alpha}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$

۱۰ـ یک پوسته استوانه‌ای به شعاع داخلی a و شعاع خارجی $2a$ دارای جریان با چگالی $\vec{J} = J_0 \frac{R}{a}\hat{a}_z$ می‌باشد، سیمی حامل جریان I در محور این پوسته قرار داده می‌شود، جریان I چقدر باشد تا میدان در $R > 2a$ صفر باشد؟

۱) $\frac{-8J_0\pi a^2}{3}$　　۲) $\frac{-7J_0\pi a^2}{3}$　　۳) $\frac{-13J_0\pi a^2}{4}$　　۴) $\frac{-14J_0\pi a^2}{3}$

فصل یازدهم

«پتانسیل مغناطیسی برداری و پتانسیل مغناطیسی اسکالر»

تست‌های تألیفی فصل یازدهم

مثال۱: کدام‌یک از توابع زیر یک تابع پتانسیل مغناطیسی اسکالر برای میدان $\vec{H}=\frac{r}{r^2+d^2}\hat{a}_r$ محسوب می‌شود؟ (مختصات استوانه‌ای هستند.)

۱) $V_m=\ln(r^2+d^2)$ ۲) $V_m=\ln\sqrt{r^2+d^2}$ ۳) $V_m=\ln\frac{1}{r^2+d^2}$ ۴) $V_m=\ln\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» رابطه میدان مغناطیسی و پتانسیل اسکالر به صورت زیر است:

$$\vec{H}=-\vec{\nabla}V_m \Rightarrow \vec{\nabla}V_m=-\frac{r}{r^2+d^2}\hat{a}_r \Rightarrow \frac{\partial V_m}{\partial r}=-\frac{r}{r^2+d^2} \Rightarrow V_m=-\frac{1}{2}\ln(r^2+d^2)=\ln\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2}}$$

مثال۲: اگر $\vec{A}=k_\circ\hat{r}$ باشد، آنگاه توزیع جریانی که این $\vec{A}$ را به دست داده، کدام است؟

۱) هیچ جریانی قادر به ایجاد این $\vec{A}$ نیست. ۲) هر جریان دلخواهی می‌تواند این $\vec{A}$ را به دست دهد.

۳) $\vec{J}=\frac{k_\circ}{r}\hat{\varphi}$ ۴) $\vec{J}=k_\circ Lnr\hat{r}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از رابطه $\nabla^2A=-\mu\vec{J}$ داریم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A})-\nabla^2\vec{A} \Rightarrow \nabla^2A=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A})-\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{A}=0} \Rightarrow \vec{\nabla}\times A=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ k_\circ & 0 & 0\end{vmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}(0)=0 \Rightarrow \nabla^2A=0 \Rightarrow \mu J=0 \Rightarrow \boxed{J=0}$$

مثال۳: روی صفحه xy چگالی جریان $\vec{J}=J_\circ\hat{y}$ برقرار است، اندازه پتانسیل برداری $\vec{A}$ در بالای صفحه کدام است؟ (k عددی ثابت است.)

۱) صفر ۲) $-\frac{1}{2}\mu_\circ J_\circ z+k$ ۳) $\frac{1}{2}\mu_\circ J_\circ z+k$ ۴) $\mu_\circ J_\circ z+k$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از قبل به دست آوردیم که برای این توزیع جریان، میدان در بالای صفحه برابر است با:

$$\vec{B}=\frac{1}{2}J_\circ\mu_\circ\hat{x}$$

حال:

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \Rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=\frac{1}{2}J_\circ\mu_\circ$$

از طرفی نسبت به x و y تقارن داریم، پس:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}=0$$

$$-\frac{\partial A_y}{\partial z}=\frac{1}{2}J_\circ\mu_\circ \Rightarrow A_y=-\frac{1}{2}J_\circ\mu_\circ z+k$$

مثال: میدان مغناطیسی $\vec{B}$ حاصل از پتانسیل برداری $\vec{A}=-\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\ln(x^2+y^2)\hat{a}_z$ کدام است؟

۱) $\frac{\mu_\circ I(y\hat{a}_x+x\hat{a}_y)}{2\pi(x^2+y^2)}$ ۲) $\frac{\mu_\circ I(-y\hat{a}_x+x\hat{a}_y)}{2\pi(x^2+y^2)}$ ۳) $\frac{\mu_\circ I(x\hat{a}_x+y\hat{a}_y)}{2\pi(x^2+y^2)}$ ۴) $\frac{\mu_\circ I(x\hat{a}_x-y\hat{a}_y)}{2\pi(x^2+y^2)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از رابطه $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ داریم:

$$\vec{A}=-\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\ln(x^2+y^2)\hat{a}_z$$

$$\Rightarrow \vec{B}=\begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{-\mu_0 I}{4\pi}\ln(x^2+y^2) \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow \vec{B}=\hat{a}_x(-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2y}{x^2+y^2})-\hat{a}_y(\frac{-\mu_0 I}{4\pi}\frac{2x}{x^2+y^2})=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{(-y\hat{a}_x+x\hat{a}_y)}{x^2+y^2}$$

تذکر: می‌توان این مسئله را در دستگاه استوانه‌ای نیز حل کرد. توصیه می‌کنیم این کار را انجام دهید.

مثال ۵: اگر مؤلفه‌های x و y پتانسیل برداری مغناطیسی به صورت $A_x = yz$ و $A_y = xz$ باشند و در مورد A_z اطلاعاتی نداشته باشیم، مؤلفه x چگالی شار مغناطیسی به کدام صورت زیر می‌تواند باشد؟

۱) $z-x$ ۲) $z+x$ ۳) $y-x$ ۴) $y+x$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» همان‌طور که می‌دانیم دیورژانس پتانسیل بردار $\vec{A}$ برابر صفر است:

$$\vec{\nabla}.\vec{A}=0 \Rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=0 \Rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial z}=0 \Rightarrow A_z=f(x,y)$$

پس A_z فقط تابعی از x و y است. چگالی شارمغناطیسی برابر است با:

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \Rightarrow B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-x$$

در بین گزینه‌ها، فقط گزینه ۳ دارای فرم بالا است.

مثال ۶: از یک استوانه به شعاع R_1، جریان I در جهت محور zها می‌گذرد، پتانسیل $\vec{A}$ در $r>b$ به کدام صورت است؟

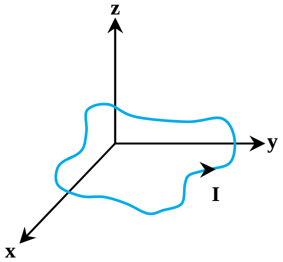
(توجه کنید که پتانسیل برداری $\vec{A}$ روی $r=R_1$ صفر است.)

۱) $\vec{A}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{Ln}\frac{R_1}{r}\hat{z}$ ۲) $\vec{A}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{Ln}\frac{r}{R_1}\hat{z}$ ۳) $\vec{A}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{Ln}(r-R_1)\hat{z}$ ۴) $\vec{A}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}(r-R_1)\hat{z}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» میدان خارج استوانه برابر است با $\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi}$. حال طبق $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ داریم:

$$-\frac{\partial A_z}{\partial r}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow A_z=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{Ln}r+c \Rightarrow A_z|_{r=R_1}=0 \Rightarrow \frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{Ln}R_1+c=0 \Rightarrow c=\frac{-\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{Ln}R_1 \Rightarrow \vec{A}_z=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{Ln}\frac{r}{R_1}\hat{z}$$

مثال ۷: مطابق شکل از یک حلقه سیم به مساحت A، جریان I عبور می‌کند. پتانسیل برداری مغناطیسی در فواصل دور به کدام صورت است؟



۱) $\vec{A}=\frac{\mu_0 IA}{4\pi r^2}(\sin\theta\hat{a}_\varphi+\cos\theta\hat{a}_R)$ ۲) $\vec{A}=\frac{\mu_0 IA}{4\pi r^2}\sin\theta\hat{a}_\varphi$

۳) $\vec{A}=\frac{\mu_0 IA}{2\pi r^2}\sin\theta\hat{a}_\varphi$ ۴) $\vec{A}=\frac{\mu_0 IA}{4\pi r^2}\cos\theta\hat{a}_\varphi$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از آنجا که پتانسیل برداری در فواصل دور از حلقه خواسته شده است، آن را با یک دوقطبی مغناطیسی مدل‌سازی می‌کنیم. (پتانسیل ناشی از دوقطبی مغناطیسی را که به یاد دارید؟)

$$\vec{A}=\frac{\mu_0\vec{m}\times\hat{a}_r}{4\pi r^2}=\frac{\mu_0(IA)\hat{a}_z\times\hat{a}_r}{4\pi r^2}=\frac{\mu_0 IA}{4\pi r^2}\hat{a}_z\times(\sin\theta\hat{a}_R+\cos\theta\hat{a}_z) \Rightarrow \vec{A}=\frac{\mu_0 IA}{4\pi r^2}\sin\theta\hat{a}_\varphi$$

می‌بینید که پتانسیل $\vec{A}$ و همچنین میدان‌های $\vec{B}$ و $\vec{H}$ در فواصل دور ارتباطی به شکل حلقه ندارند و فقط به مساحت آن وابسته‌اند.

آزمون فصل یازدهم

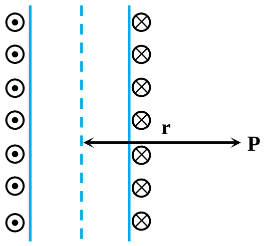
۱ـ بردار پتانسیل مغناطیسی در ناحیه‌ای به صورت $\vec{A} = A_0 e^{-\alpha y}\sin\alpha x\hat{a}_z$ فرض می‌شود، که در آن A_0 و α اعداد ثابتی هستند. در این صورت بردار چگالی شار مغناطیسی برابر است با:

۱) $-A_0\alpha e^{-\alpha y}(\hat{a}_x\sin x + \hat{a}_y\cos\alpha x)$
۲) $-A_0\alpha e^{-\alpha y}(\hat{a}_x\sin\alpha x + \hat{a}_y\cos\alpha x)$
۳) $A_0\alpha e^{-\alpha y}(\hat{a}_x\sin x + \hat{a}_y\cos\alpha x)$
۴) $-A_0\alpha e^{-\alpha y}(\hat{a}_x\sin\alpha x - \hat{a}_y\cos\alpha x)$

۲ـ بردار پتانسیل مغناطیسی در یک استوانه هادی به شعاع a را در نظر بگیرید. اگر کل جریان را در استوانه هادی برابر $I = 4\pi A$ و در جهت $\hat{a}_z$ با $\vec{A} = 0$ در $r = a$ فرض کنید. مطلوب است محاسبه $\vec{A}$ در $r = \frac{a}{3}$:

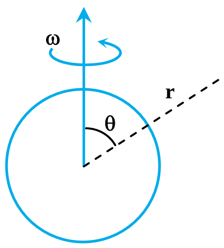
۱) $0/62\mu_0\hat{a}_z$
۲) $0/78\mu_0\hat{a}_z$
۳) $1/43\mu_0\hat{a}_z$
۴) $1/85\mu_0\hat{a}_z$

۳ـ سیملوله‌ای طویل به شعاع R که محور آن منطبق بر محور z می‌باشد دارای n دور در واحد طول بوده و جریان I در راستای $\hat{a}_\varphi$ از آن می‌گذرد. بردار پتانسیل مغناطیسی در خارج از سیملوله و در فاصله r از محور آن کدام است؟



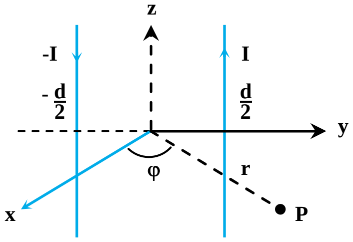
۱) $\vec{A} = \frac{\mu_0 nIR}{2r}\hat{a}_\varphi$
۲) $\vec{A} = \frac{\mu_0 nIR^2}{4r}\hat{a}_\varphi$
۳) $\vec{A} = \frac{\mu_0 nIR^2}{2r}\hat{a}_\varphi$
۴) $\vec{A} = \frac{\mu_0 nIR}{4r}\hat{a}_\varphi$

۴ـ پوسته کروی به شعاع R دارای بار سطحی با چگالی ثابت σ را با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخانند. پتانسیل مغناطیسی برداری حاصل در نقطه‌ای خارج از پوسته و به فاصله r از مرکز آن کدام است؟



۱) $\frac{\mu_0 R\omega\sigma}{3} r\sin\theta\hat{a}_\varphi$
۲) $\frac{\mu_0 R^4\omega\sigma}{3}\frac{\sin\theta}{r^2}\hat{a}_\varphi$
۳) $\frac{\mu_0 R\omega\sigma}{3} r\sin\theta\hat{a}_z$
۴) $\frac{\mu_0 R^4\omega\sigma}{3}\frac{\sin\theta}{r^2}\hat{a}_z$

۵ـ دو سیم بلند حامل جریان‌های مخالف I و $-I$ به ترتیب در $y = \frac{d}{2}$ و $y = -\frac{d}{2}$ واقع‌اند. بردار پتانسیل مغناطیسی ناشی از دو سیم در نقطه $P(r,\varphi)$ کدام است؟ $(r \gg d)$



۱) $\vec{A} = \frac{\mu_0 I\sin\varphi}{2\pi r}\hat{a}_z$
۲) $\vec{A} = \frac{\mu_0 Id\sin\varphi}{2\pi r}\hat{a}_z$
۳) $\vec{A} = \frac{\mu_0 Id\sin\varphi}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$
۴) $\vec{A} = \frac{\mu_0 I\sin\varphi}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$

۶ـ میدان مغناطیسی $\vec{B}(t) = B_0 z\hat{a}_z$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده است. (B_0 مقدار ثابتی است) با فرض تقارن نسبت به محور z بردار پتانسیل مغناطیسی کدام است؟

۱) $\vec{A} = \frac{B_0 rz}{2}\hat{a}_\varphi$
۲) $\vec{A} = \frac{B_0 rz}{4}\hat{a}_z$
۳) $\vec{A} = \frac{B_0 rz^2}{2}\hat{a}_\varphi$
۴) $\vec{A} = \frac{B_0 rz^2}{2}\hat{a}_z$

۷ـ جریان سطحی با چگالی $\vec{J} = J_\circ \hat{a}_y$ در صفحه $z = \circ$ برقرار است. بردار پتانسیل مغناطیسی در ناحیه $z > \circ$ کدام است؟ (با فرض اینکه بردار پتانسیل مغناطیسی در $z = z_\circ$ صفر باشد)

۱) $\vec{A} = \frac{-\mu_\circ J_\circ}{۲}(z - z_\circ)^۲ \hat{a}_y$　　۲) $\vec{A} = \frac{-\mu_\circ J_\circ}{۲}(z - z_\circ) \hat{a}_y$

۳) $\vec{A} = \frac{\mu_\circ J_\circ}{۲}(z - z_\circ)^۲ \hat{a}_y$　　۴) $\vec{A} = \frac{\mu_\circ J_\circ}{۲}(z - z_\circ) \hat{a}_y$

۸ـ نیم‌دایره‌ای به شعاع a حامل جریان I و در صفحه xy بوده به طوری که مرکز آن مبدأ مختصات است. پتانسیل مغناطیسی برداری روی محور z به فاصله h از مرکز نیم‌دایره کدام است؟

۱) $\frac{-\mu_\circ I_a}{۲\pi\sqrt{a^۲ + h^۲}} \hat{a}_x$　　۲) $\frac{-\mu_\circ I_a}{۲\pi\sqrt{a^۲ + h^۲}} \hat{a}_y$　　۳) $\frac{-\mu_\circ I_a}{۲\pi\sqrt{a^۲ + h^۲}} \hat{a}_\varphi$　　۴) $\frac{\mu_\circ I_a}{۲\pi\sqrt{a^۲ + h^۲}} \hat{a}_z$

۹ـ در ناحیه‌ای از فضا در دستگاه مختصات استوانه‌ای بردار پتانسیل مغناطیسی به صورت $\vec{A} = A_\circ \hat{a}_\varphi$ ($A_\circ$ عدد ثابتی است) می‌باشد. چگالی توزیع جریان مربوط به آن کدام است؟ (راهنمایی $\nabla^۲\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}$)

۱) $\vec{J} = \frac{A_\circ}{\mu_\circ r} \hat{a}_\varphi$　　۲) $\vec{J} = \frac{A_\circ}{\mu_\circ r^۲} \hat{a}_\varphi$　　۳) $\vec{J} = \frac{A_\circ r}{\mu_\circ} \hat{a}_\varphi$　　۴) $\vec{J} = \frac{A_\circ r^۲}{\mu_\circ} \hat{a}_\varphi$

۱۰ـ اگر $\vec{U}$ یک بردار باشد، به طوری $\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{U}$ ، آنگاه $\vec{U}$ به کدام‌یک از صورت‌های زیر می‌تواند باشد؟ $(\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}')$

۱) $\vec{U} = \vec{B}\times\vec{\nabla}V_m$　　۲) $\vec{U} = \frac{۱}{۴\pi}\int \frac{\vec{H}}{R} dv'$　　۳) $\vec{U} = \vec{\nabla}V_m(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})$　　۴) $\vec{U} = \frac{۱}{۴\pi}\int \frac{\vec{B}}{R} dv'$

فصل دوازدهم

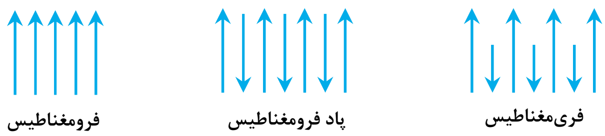
«مواد مغناطیسی ـ مغناطیس‌شدگی»

تست‌های تألیفی فصل دوازدهم

مثال۱: کدام‌یک از طرح‌واره اسپین‌های اتمی زیر مربوط به مواد پادفرومغناطیس می‌باشد؟

(۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ: گزینه «۴» نمایش شماتیکی اسپین‌های اتمی در ساختارهای اسپینی منظم به شکل زیر است.



مثال۲: ضریب نفوذپذیری مغناطیسی (permeability) مواد دیامغناطیس، پارامغناطیس، فرومغناطیس (ferromagnetic) و فریت‌ها (Ferrites) را به ترتیب با: μ_d و μ_p و μ و μ_f نشان می‌دهیم. برای این ضرایب کدام عبارت درست است؟

۱) $\mu_p < \mu_d < \mu_f < \mu$

۲) $\mu_d < \mu_p < \mu < \mu_f$

۳) $\mu_d < \mu_p < \mu_f < \mu$

۴) $\mu_p < \mu_d < \mu < \mu_f$

پاسخ: گزینه «۳» همان‌طور که گفتیم نفوذپذیری نسبی در مواد ذکر شده، به قرار زیر است:

دیامغناطیس $\mu_r \le 1$ ، پارامغناطیس $\mu_r > 1$ ، فرومغناطیس $\mu_r >> 1$

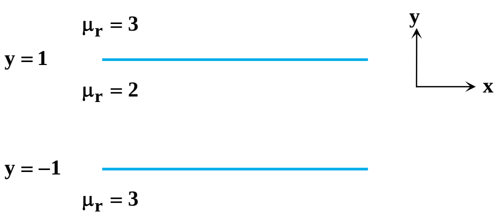
بنابراین $\mu_d < \mu_p < \mu$ است. پس تا اینجا یا گزینه ۲ صحیح است و یا ۳. فریت‌ها موادی هستند که گشتاورهای اتمی آنها موازی و مختلف‌الجهت ولی با اندازه‌های متفاوت می‌باشند؛ یعنی خاصیت مغناطیسی آنها بین مواد پارامغناطیس و فرومغناطیس می‌باشد. به عبارتی:

$\mu_p < \mu_f < \mu$

$\mu_d < \mu_p < \mu_f < \mu$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

مثال۳: ناحیه $-1 < y < 1$ با نفوذپذیری نسبی $\mu_r = 2$ و بقیه فضا، با نفوذپذیری نسبی $\mu_r = 3$ پر شده است. در ناحیه $|y| < 1$، چگالی جریانی $\vec{J} = 6\hat{z}(\frac{A}{m^2})$ برقرار است، $\vec{M}$ در ناحیه $y > 1$ برابر است با:



۱) $6\hat{x}$

۲) $-6\hat{x}$

۳) $12\hat{x}$

۴) $-12\hat{x}$

پاسخ: گزینه «۴» ناحیه $|y| < 1$ را به نوارهای باریکی تقسیم می‌کنیم و میدان ناشی از هر نوار در $y > 1$ برابر است با $\frac{1}{2}\vec{k} \times \hat{n}$ که $\vec{k}$ معادل $\vec{J}dy$ است. (طبق قانون دست راست، میدان مغناطیسی بر مرز مشترک نواحی مماس است. پس با توجه به شرایط مرزی، $\vec{H}$ در سه ناحیه یکسان است.)

$$d\vec{H} = \frac{1}{2} 6dy\hat{z} \times \hat{y} = -3\hat{x}dy$$

حال میدان کل برابر با است:
$$\vec{H}=\int_{-1}^{1} d\vec{H}dy=\int_{-1}^{1}-3\,dy\hat{x}=-3y\Big|_{-1}^{1}\ \hat{x}=-3(2)\hat{x}=-6\hat{x}$$

حال $\vec{M}=(\mu_r-1)\vec{H}$ که در $y>1$:
$$\mu_r=3\ \Rightarrow \vec{M}=(2)(-6)\hat{x}=-12\hat{x}$$

مثال ۴: در کره‌ای به شعاع a، مغناطیس‌شوندگی $\vec{M}=[z+5]\hat{x}$ وجود دارد. چگالی بارهای مغناطیسی سطحی مقید برابر است با:

۱) $[a\cos\theta+5]\cos\theta\cos\varphi$ ۲) $-[a\cos\theta+5]\sin\varphi$

۳) $[a\cos\theta+5]\sin\theta\sin\varphi$ ۴) $[a\cos\theta+5]\sin\theta\cos\varphi$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا $\vec{M}$ را در دستگاه کروی می‌نویسیم:
$$\vec{M}=[R\cos\theta+5][\sin\theta\cos\varphi\hat{R}+\cos\theta\cos\varphi\hat{\theta}-\sin\varphi\hat{\varphi}]$$

حال داریم:
$$\sigma_m=\vec{M}.\hat{R}\,|_{R=a}=[a\cos\theta+5]\sin\theta\cos\varphi$$

مثال ۵: در استوانه‌ای به شعاع a مغناطیس‌شوندگی $\vec{M}=k_\circ r\hat{\varphi}$ داریم، میدان مغناطیسی $\vec{B}$ داخل استوانه کدام است؟

۱) $k_\circ r^2\hat{\varphi}$ ۲) $k_\circ r\hat{\varphi}$ ۳) $k_\circ r^2\hat{z}$ ۴) $k_\circ r\hat{z}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا جریان‌های مقید را حساب می‌کنیم.
$$J_b=\vec{\nabla}\times\vec{M}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\varphi} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & k_\circ r^2 & 0\end{vmatrix}\Rightarrow J_b=\frac{1}{r}\hat{z}\frac{\partial}{\partial r}(k_\circ r^2)=\frac{2k_\circ r}{r}\hat{z}=2k_\circ\hat{z}$$
$$\vec{k}_b=\vec{M}\times\hat{n}=k_\circ a^2\hat{\varphi}\times\hat{r}=-k_\circ a^2\hat{z}$$

حال از قانون دست راست درمی‌یابیم که فقط در راستای φ میدان داریم. از قاعده آمپر، برای داخل استوانه:
$$\oint B.dl=\int J_b.ds\ \Rightarrow 2\pi rB\varphi=\int_\circ^r\int_\circ^{2\pi}2k_\circ rd\varphi dr\ \Rightarrow 2\pi rB\varphi=2k_\circ\frac{(2\pi r^2)}{2}\ \Rightarrow \boxed{B\varphi=k_\circ r\hat{\varphi}}$$

مثال ۶: بردارهای مغناطیس‌شدگی زیر مربوط به چهار ماده مغناطیسی مختلف می‌باشد. در کدام‌یک از این مواد چگالی جریان آزاد وجود دارد؟

۱) $\vec{M}=\sin\theta\hat{a}_\varphi$ ۲) $\vec{M}=\frac{1}{r}\hat{a}_\theta$ ۳) $\vec{M}=\frac{1}{r\sin\theta}\hat{a}_\varphi$ ۴) $\vec{M}=r\hat{a}_r$

پاسخ: گزینه «۱» چگالی جریان آزاد در صورتی وجود دارد که بردار قطبش چرخشی باشد.
$$\vec{\nabla}\times\vec{M}=\chi_m\vec{J}_f\ \Rightarrow \vec{J}_f=\frac{1}{\chi_m}\vec{\nabla}\times\vec{M}$$

عبارت $\vec{\nabla}\times\vec{M}$ برای گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ برابر صفر است. برای گزینه ۱ داریم:
$$\vec{\nabla}\times\vec{M}=\vec{\nabla}\times(\sin\theta\hat{a}_\varphi)=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^2\theta)\hat{a}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta)\hat{a}_\theta$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{M}=\frac{2\cos\theta}{r}\hat{a}_r-\frac{\sin\theta}{r}\hat{a}_\theta\ \Rightarrow \vec{J}_f=\frac{1}{\chi_m}\frac{1}{r}(2\cos\theta\hat{a}_r-\sin\theta\hat{a}_\theta)$$

مثال ۷: در فضای $|y|<1$، ماده‌ای با $\chi_m=\frac{y}{2}$ پر شده است، اگر میدان مغناطیسی $\vec{B}=2\hat{x}$ در $|y|<1$ باشد، چگالی جریان سطحی مقید در $y=-1$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{\mu_\circ}\hat{y}$ ۲) $\frac{2}{\mu_\circ}\hat{z}$ ۳) $\frac{1}{\mu_\circ}\hat{z}$ ۴) 0

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» داریم:

$$\vec{B} = \mu_\circ(1+\chi_m)H \Rightarrow \vec{H} = \frac{2}{\mu_\circ(1+\frac{y}{2})}\hat{x}$$

از طرفی مغناطش از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

$$\vec{M} = \chi_m\vec{H} = \frac{y}{2}\left(\frac{2}{\mu_\circ(\frac{y+2}{2})}\right)\hat{x} = \frac{2y}{\mu_\circ(y+2)}\hat{x}$$

و چگالی جریان سطحی مقید به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$\vec{k}_m = \vec{M}\times(-\hat{y})|_{y=-1} = \frac{2}{\mu_\circ}\hat{z}$$

مثال ۸: **کدام گزینه در مورد خواص مغناطیسی مواد صحیح است؟**

۱) در همه محیط‌ها $\vec{M} = \chi_M\vec{H}$، که در آن χ_M کمیت نرده‌ای ثابت ولی بدون بعد است.

۲) در همه محیط‌ها $\vec{B} = \mu\vec{H}$، که در آن μ مقدار ثابتی است که از مشخصه‌های محیط است.

۳) در همه محیط‌ها $\vec{B} = \mu_\circ\vec{H} - \vec{M}$، که در آن $\mu_\circ$ ضریب تراوایی مغناطیسی خلأ است.

۴) هیچ‌کدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اگر محیط همسانگرد و خطی باشد رابطه روبه‌رو برقرار است.

$\vec{M} = \chi_m\vec{H}$

$\vec{B} = \mu\vec{H}$ (محیط‌های خطی و همسانگرد)

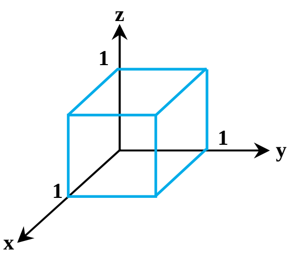
$\vec{B} = \mu_\circ(\vec{H}+\vec{M})$ در همه محیط‌ها برقرار است.

مثال ۹: **یک پیچک استوانه‌ای بلند با سیم‌پیچی نازک و منظم به شعاع b، جریان I و n دور در واحد طول را که محور آن در راستای محور z است، در نظر بگیرید. یک میله استوانه‌ای به شعاع $a(a<b)$ و پرمابلیته μ به طور هم‌محور داخل سیم‌پیچ قرار می‌گیرد. اندازه بردار چگالی گشتاور دو قطبی مغناطیسی به ترتیب در نواحی $r<a$ و $a<r<b$ کدام است؟**

۱) در هر دو ناحیه $(\frac{\mu}{\mu_\circ}-1)nI$ ۲) $(\frac{\mu}{\mu_\circ}+1)nI$ و $(\frac{\mu}{\mu_\circ}-1)nI$ ۳) $(\frac{\mu}{\mu_\circ}-1)nI$ و صفر ۴) صفر و صفر

☑ **پاسخ:** **گزینه «۳»** در ناحیه $a<r<b$ ماده مغناطیس‌شونده وجود ندارد و بنابراین بردار چگالی گشتاور دوقطبی مغناطیسی در این ناحیه صفر است (گزینه ۱ و ۲ نادرست است). همچنین شدت میدان مغناطیسی ناشی از پیچک باعث مغناطیس شدن میله استوانه‌ای می‌گردد که گشتاور دوقطبی مغناطیسی در این ناحیه $(r<a)$ به μ وابسته است و تنها در صورتی صفر می‌شود که $\mu = \mu_\circ$ باشد. بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۱۰: **درون مکعب شکل مقابل به اضلاع واحد، بردار مغناطیس‌شدگی $\vec{M} = 3\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + \hat{a}_z$ وجود دارد. کل جریان مقید سطحی روی سطح مکعب چقدر است؟**



۱) صفر

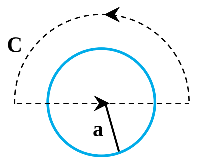
۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از آنجا که $\vec{J}_m = \vec{\nabla}\times\vec{M} = 0$، بنابراین جریان مقید حجمی درون مکعب صفر است. از طرفی، مجموع کل جریان‌های مقید سطحی و حجمی باید برابر صفر باقی باشد. بنابراین کل جریان مقید سطحی هم برابر صفر است. این را می‌توان با محاسبه مستقیم $\vec{J}_{sm}$ و جمع زدن جریان‌های سطحی ایجاد شده روی وجه‌های مکعب مشاهده کرد.

مثال۱۱: در استوانه مغناطیسی مقابل به شعاع a، چگالی جریان مغناطیسی مقید حجمی ثابت $J_\circ$ (به داخل صفحه کاغذ) وجود دارد. حاصل $\oint \vec{H}.d\vec{l}$ روی مسیر نشان داده شده در شکل چقدر است؟



۱) $J_\circ \pi a^۲$ ۲) $J_\circ \frac{\pi a^۲}{۲}$ ۳) $J_\circ \frac{\pi a^۲}{۳}$ ۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از قانون آمپر به سادگی می‌توان نوشت:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}_f \Rightarrow \oint_C \vec{H}.d\vec{l}=I_f$$

که در آن $\vec{J}_f$ چگالی جریان آزاد و I_f کل جریان آزاد عبوری از سطح محصور توسط مسیر C می‌باشند. در این مسأله هیچ جریان آزادی وجود ندارد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\oint \vec{H}.d\vec{l}=\circ$$

توجه کنید که جریان مقید داده شده در صورت سؤال برای رد گم کنی است و تأثیری در حاصل انتگرال فوق ندارد.

آزمون فصل دوازدهم

۱ـ کره‌ای به شعاع R دارای مغناطیس‌شدگی یکنواخت $M=M_\circ \hat{a}_z$ است. میدان مغناطیسی در خارج کره کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}M_\circ \hat{a}_z$ ۲) $-\frac{۱}{۳}M_\circ \hat{a}_z$

۳) $\frac{۱}{۳}M_\circ(\frac{R^۳}{r^۳})(۲\cos\theta \hat{a}_r+\sin\theta \hat{a}_\theta)$ ۴) $\frac{۲}{۳}M_\circ(\frac{R^۳}{r^۳})(۲\cos\theta \hat{a}_r+\sin\theta \hat{a}_\theta)$

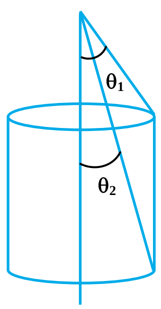
۲ـ بار سطحی با چگالی یکنواخت σ روی کره‌ای به شعاع R قرار داشته و کره با سرعت زاویه‌ای ω حول محور zها می‌چرخد. گشتاور دو قطبی مغناطیسی حاصل کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}\pi R^۳\omega\sigma \hat{a}_z$ ۲) $\frac{۴}{۳}\pi R^۴\omega\sigma \hat{a}_z$ ۳) $\frac{۴}{۳}\pi R^۳\omega\sigma \hat{a}_\varphi$ ۴) $\frac{۴}{۳}\pi R^۴\omega\sigma \hat{a}_\varphi$

۳ـ بار سطحی با چگالی یکنواخت σ روی قرصی به شعاع R قرار دارد و قرص با سرعت زاویه‌ای ω حول محورش می‌چرخد. گشتاور دو قطبی مغناطیسی کدام است؟

۱) $\frac{\sigma\pi R^۲\omega}{۴}$ ۲) $\frac{\sigma\pi R^۳\omega}{۴}$ ۳) $\frac{\sigma\pi R^۴\omega}{۴}$ ۴) $\frac{\sigma\pi R\omega}{۴}$

۴ـ استوانه‌ای به شعاع a و طول L که محور آن منطبق با محور z هاست دارای مغناطیس شدگی یکنواخت $\vec{M}=M_\circ \hat{a}_z$ می‌باشد. اندازه چگالی شار میدان مغناطیسی روی محور استوانه کدام است؟



۱) $B=\frac{\mu_\circ M_\circ}{۲}(\cos\theta_۲+\cos\theta_۱)$

۲) $B=\frac{\mu_\circ M_\circ}{۲}(\cos\theta_۲-\cos\theta_۱)$

۳) $B=\frac{\mu_\circ M_\circ}{۲}(\sin\theta_۲+\sin\theta_۱)$

۴) $B=\frac{\mu_\circ M_\circ}{۲}(\sin\theta_۱-\sin\theta_۲)$

۵ـ استوانه مدور طویلی به شعاع R که محور آن منطبق بر محور z هاست دارای مغناطیس شدگی $\vec{M}=kr^۲\hat{a}_\varphi$ می‌باشد که در آن k یک عدد ثابت و r فاصله از محور استوانه می‌باشد. چگالی شار میدان در داخل استوانه کدام است؟

۱) $\vec{B}=\mu_\circ kr\hat{a}_\varphi$ ۲) $\vec{B}=\mu_\circ kr^۲\hat{a}_\varphi$ ۳) $\vec{B}=\mu_\circ kr^۳\hat{a}_\varphi$ ۴) $\vec{B}=\mu_\circ k\hat{a}_\varphi$

۶ـ استوانه طویلی به شعاع R که محور آن در راستای z می‌باشد در جهت عمود بر محورش مغناطیس شده است و بردار مغناطیس شدگی آن به صورت $\vec{M} = M_\circ \hat{a}_x$ می‌باشد. ضریب نفوذپذیری مغناطیس استوانه μ_1 و ضریب نفوذپذیری مغناطیس محیط اطراف آن μ_2 می‌باشد. چگالی شار میدان مغناطیسی در داخل استوانه کدام است؟

۱) $\vec{B} = \dfrac{2\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} M_\circ \hat{a}_x$
۲) $\vec{B} = \dfrac{-\mu_\circ \mu_1 M_\circ}{\mu_2 + \mu_1} \hat{a}_x$
۳) $\vec{B} = \dfrac{3\mu_1}{2\mu_1 + \mu_2} M_\circ \hat{a}_x$
۴) $\vec{B} = \dfrac{-\mu_\circ \mu_2}{\mu_\circ + \mu_2} \hat{a}_x$

۷ـ در یک محیط مغناطیس همگن و خطی با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی $\mu = \mu_\circ \mu_r$ رابطه بین چگالی جریان‌های حجمی مقید و چگالی جریان آزاد کدام است؟

۱) $\mu_r = 1 + \dfrac{J_m}{J_f}$
۲) $\mu_r = 1 - \dfrac{J_m}{J_f}$
۳) $\mu_r = 1 - \dfrac{J_f}{J_m}$
۴) $\mu_r = 1 + \dfrac{J_f}{J_m}$

۸ـ بار Q به طور یکنواخت روی کره‌ای به شعاع R قرار دارد. کره با سرعت زاویه‌ای ω حول محوری که از مرکزش می‌گذرد می‌چرخد. گشتاور دو قطبی مغناطیسی حاصل کدام است؟

۱) $\dfrac{QR\omega}{3} \hat{a}_z$
۲) $\dfrac{QR^2\omega}{3} \hat{a}_z$
۳) $\dfrac{QR^2\omega^2}{3} \hat{a}_z$
۴) $\dfrac{QR\omega^2}{3} \hat{a}_z$

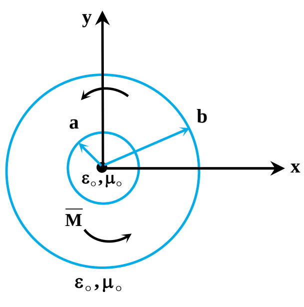
۹ـ هم خط شدن دو قطبی‌های الکتریکی در یک ماده دی‌الکتریک در حضور یک میدان الکتریکی خارجی و هم خط شدن دوقطبی مغناطیسی در یک ماده پارامغناطیس در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی را با هم مقایسه کنید.

۱) در هر دو حالت هم خط شدن دو قطبی‌ها سبب افزایش میدان اولیه می‌شود.
۲) در هر دو حالت هم خط شدن دو قطبی‌ها سبب کاهش میدان اولیه می‌شود.
۳) هم خط شدن دو قطبی‌های مغناطیسی، میدان مغناطیسی اولیه را کاهش می‌دهد. اما هم خط شدن دو قطبی‌های الکتریکی اولیه را افزایش می‌دهد.
۴) هم خط شدن دو قطبی‌های مغناطیسی، میدان مغناطیسی اولیه را افزایش می‌دهد. اما هم خط شدن دو قطبی‌های الکتریکی، میدان الکتریکی اولیه را کاهش می‌دهد.

۱۰ـ ضریب نفوذپذیری بین دو صفحه $z = 0$ و $z = 2$ به طور خطی از $\mu_\circ$ در $z = 0$ به $3\mu_\circ$ در $z = 2$ تغییر می‌کند. اگر میدان $\vec{H} = H_\circ \hat{a}_z$ در بیرون دو صفحه برقرار باشد، چگالی سطحی جریان مغناطیسی در صفحه $z = 2$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{3} H_\circ \hat{a}_y$
۲) $\dfrac{2}{3} H_\circ \hat{a}_y$
۳) $-2H_\circ \hat{a}_y$
۴) $\dfrac{3}{4} H_\circ \hat{a}_y$

۱۱ـ یک ماده فرو مغناطیسی به شکل یک لوله بی‌نهایت طویل با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b به قسمی مغناطیس شده است که بردار دو قطبی مغناطیسی برای $a < r < b$ برابر $\vec{M} = \dfrac{A}{r} \hat{a}_\varphi$ است. (شکل را ببینید) مطلوب است میدان‌های $\vec{B}$ و $\vec{H}$ در ناحیه $a < r < b$.

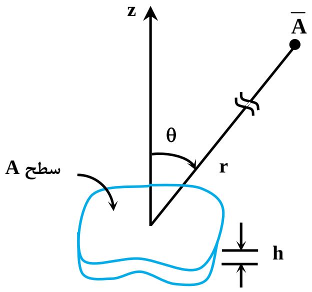


۱) $\vec{B} = \dfrac{\mu_\circ A}{a} \hat{a}_\varphi \;,\; \vec{H} = 0$
۲) $\vec{B} = \dfrac{\mu_\circ A}{b} \hat{a}_\varphi \;,\; \vec{H} = (\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{r}) A \hat{a}_\varphi$
۳) $\vec{B} = \dfrac{\mu_\circ A}{r} \hat{a}_\varphi \;,\; \vec{H} = 0$
۴) $\vec{B} = \dfrac{\mu_\circ A}{a} \hat{a}_\varphi \;,\; \vec{H} = (\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{r}) A \hat{a}_\varphi$

۱۲ـ میدان مغناطیسی را در داخل کره‌ای به شعاع R و با چگالی دو قطبی یکنواخت $\vec{B}$ برابر $M_\circ \hat{a}_z$ فرض می‌کنیم. چگالی بار سطحی یک پوسته کروی به شعاع R که با سرعت زاویه یکنواخت ω حول محور z می‌چرخد و همان میدان $\vec{B}$ را در داخل ایجاد می‌کند چقدر است؟

۱) $\omega R M_\circ$
۲) $\dfrac{M_\circ}{\omega R}$
۳) $\omega R M_\circ \sin\theta$
۴) $\dfrac{M_\circ}{\omega R} \sin\theta$

۱۳ـ در شکل زیر، قطعه ماده مغناطیسی بسیار نازک ($h \to 0$) نشان داده شده در امتداد محور z به صورت یکنواخت مغناطیس شده است، یعنی $\vec{M} = M_0 \hat{a}_z$ (M_0 عدد ثابتی است.) مطلوب است بردار پتانسیل مغناطیسی $\vec{A}$ در نقطه‌ای بسیار دور از این قطعه.



۱) $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} M_0 \sin\theta \hat{a}_\varphi$

۲) $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} M_0 \sin\theta \hat{a}_\varphi$

۳) $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} M_0 A h \sin\theta \hat{a}_\varphi$

۴) $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} M_0 A h \cos\theta \hat{a}_\varphi$

۱۴ـ در یک محیط مغناطیسی با مغناطش M و در شرایط مگنتواستاتیک و در نبود جریان‌های انتقالی، پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی ϕ^* در کدامیک از معادلات زیر صدق می‌کند؟ (در گزینه‌های زیر $\hat{a}_n$ بردار عمود بر سطح در هر نقطه از مرز محیط مذکور است.)

۱) $\nabla^2\phi^* = \vec{\nabla}.M + \hat{a}_n.M$ ۲) $\nabla^2\phi^* = \hat{a}_n.M$ ۳) $\nabla^2\phi^* = 0$ ۴) $\nabla^2\phi^* = \vec{\nabla}.M$

۱۵ـ مطلوب است محاسبه قدر مطلق $\bar{M}$ (Magnetization) در ماده‌ای با ضریب نفوذ مغناطیسی نسبی $\mu_r = 1/00038$ و شدت میدان مغناطیسی $H = 0/31 \frac{A}{m}$.

۱) $98 \frac{\mu A}{m}$ ۲) $104 \frac{\mu A}{m}$ ۳) $111 \frac{\mu A}{m}$ ۴) $118 \frac{\mu A}{m}$

فصل سیزدهم

«شرایط مرزی در مغناطیس ساکن»

تست‌های تألیفی فصل سیزدهم

مثال۱: در مرز بین هوا و یک ماده فرومغناطیسی با $\mu_r = 6000$ میدان $\vec{B}$ با خط عمود بر مرز، زاویه $\theta = 30^\circ$ می‌سازد. زاویه‌ای که بردار $\vec{B}$ در هوا با خط عمود می‌سازد، چقدر است؟

۱) $\cot^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{18000})$ ۲) $\tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{18000})$ ۳) $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{18000})$ ۴) $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{18000})$

پاسخ: گزینه «۲» طبق رابطه مقابل داریم:

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \Rightarrow \tan\alpha_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1}\tan\alpha_1$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}(\frac{1}{6000}\tan 30) = \tan^{-1}(\frac{1}{6000}\times\frac{\sqrt{3}}{3}) \Rightarrow \alpha_2 = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{18000})$$

مثال۲: ناحیه I $(z < 0)$ از ماده‌ای با ضریب تراوایی نسبی $\mu_{r_1} = 1/5$ و ناحیه II $(z > 0)$ از ماده‌ای با ضریب تراوایی نسبی $\mu_{r_2} = 5$ تشکیل شده است. در نزدیکی مبدأ مختصات روابط زیر برقرار است:

(I) $\vec{B}_1 = 2/4\hat{a}_x + 10\hat{a}_z$ و (II) $\vec{B}_2 = 25/75\hat{a}_x - 17/75\hat{a}_y + 10\hat{a}_z$، چگالی جریان سطحی موجود در مبدأ مختصات کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{5}{\mu_0}(\frac{\hat{a}_x + \hat{a}_y}{\sqrt{2}})$ ۳) $5\mu_0(\hat{a}_x - \hat{a}_y)$ ۴) $25\mu_0(\hat{a}_y + \hat{a}_z)$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به شرایط مرزی می‌توان چنین نوشت:

$$\hat{a}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s$$

$$\vec{H}_1 = \frac{\vec{B}_1}{\mu_1} = \frac{2/4\hat{a}_x + 10\hat{a}_z}{1/5\mu_0} \quad \text{و} \quad \vec{H}_2 = \frac{\vec{B}_2}{\mu_2} = \frac{25/75\hat{a}_x - 17/75\hat{a}_y + 10\hat{a}_z}{5\mu_0}$$

با جایگذاری $\vec{H}_1$ و $\vec{H}_2$ در رابطه بالا خواهیم داشت: $(\hat{a}_n = \hat{a}_z)$

$$\vec{J}_s = \hat{a}_z \times [\vec{H}_2 - \vec{H}_1] = \frac{1}{\mu_0}[3/55\hat{a}_y + 3/55\hat{a}_x] = \frac{3/55}{\mu_0}(\hat{a}_x + \hat{a}_y) \simeq \frac{5}{\mu_0}(\frac{\hat{a}_x + \hat{a}_y}{\sqrt{2}})$$

مثال۳: در ناحیه $|x| < d$ ، ماده‌ای با نفوذپذیری $\mu = \mu_0(1 + \frac{x}{d})^2$ قرار دارد، در فضای آزاد، $\vec{B} = B_0\hat{z}$ اعمال می‌شود. چگالی جریان مقید در $|x| < d$ چقدر است؟

۱) $2(1 + \frac{x}{d})\frac{B_0}{\mu_0 d}\hat{y}$ ۲) $-(1 + \frac{x}{d})\frac{B_0}{\mu_0 d}\hat{y}$ ۳) $(1 + \frac{x}{d})\frac{B_0}{\mu_0 d}\hat{y}$ ۴) $-2(1 + \frac{x}{d})\frac{B_0}{\mu_0 d}\hat{y}$

پاسخ: گزینه «۴» چون میدان اعمالی در جهت $\hat{a}_x$ است، با توجه به شرایط مرزی، میدان در کل فضا در راستای $\hat{a}_z$ است و بر مرز مشترک نواحی، مماس است. بنابراین $\vec{H}$ در تمام فضا ثابت است و برابر $\vec{H} = \frac{B_0}{\mu_0}\hat{z}$ است. پس در ناحیه $|x| < d$ میدان $\vec{B}$ برابر $\vec{B} = \mu\vec{H} = (1 + \frac{x}{d})^2 B_0\hat{z}$ و بردار مغناطش برابر $\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$ است:

$$\vec{M} = \frac{B_0}{\mu_0}[\frac{2x}{d} + \frac{x^2}{d^2}]\hat{z} = M\hat{z}$$

حال:

$$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M} \Rightarrow \vec{J}_m = \frac{\partial M}{\partial y}\hat{x} - \frac{\partial M}{\partial x}\hat{y} \Rightarrow \vec{J}_m = -2(1 + \frac{x}{d})\frac{B_0}{\mu_0 d}\hat{y}$$

مثال ۴: ناحیه (۱) در $x<0$ از ماده مغناطیسی با $\mu_{r_1}=2/5$ و ناحیه (۲) در $x>0$ از ماده مغناطیسی با $\mu_{r_2}=5$ پرشده‌اند. اگر $\vec{B}_1=\mu_0(\hat{a}_x+2\hat{a}_y-3\hat{a}_z)$ باشد، اندازه $\vec{B}_2$ کدام است؟

۱) $\mu_0\sqrt{53}$　　۲) $7\mu_0$　　۳) $8\mu_0$　　۴) $\mu_0\sqrt{63}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به اینکه روی فصل مشترک دو محیط جریان آزاد وجود ندارد، پس می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases}\vec{B}_{n1}=\vec{B}_{n2}\\ \vec{H}_{t1}=\vec{H}_{t2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{B}_{n2}=\mu_0\hat{a}_x\\ \vec{H}_{t2}=\vec{H}_{t1}=\dfrac{\vec{B}_{t1}}{\mu_1}=\dfrac{\mu_0(2\hat{a}_y-3\hat{a}_z)}{2/5\mu_0}\end{cases}$$

$$\vec{H}_{t2}=0/8\hat{a}_y-1/2\hat{a}_z=\frac{\vec{B}_{t2}}{\mu_0\mu_{r2}}\Rightarrow\vec{B}_{t2}=\mu_0(4\hat{a}_y-6\hat{a}_z)$$

بنابراین داریم:

$$\vec{B}_2=\mu_0(\hat{a}_x+4\hat{a}_y-6\hat{a}_z)\Rightarrow|\vec{B}_2|=\mu_0\sqrt{53}$$

مثال ۵: در میدان مغناطیسی دائم $\vec{H}=\begin{cases}k\hat{a}_y & z>0\\ -k\hat{a}_y & z<0\end{cases}$ مفروض است، جریانی که این میدان را به وجود می‌آورد کدام است؟

۱) $-2k\hat{a}_x(\frac{A}{m^2})$ جریان حجمی　　۲) $k\hat{a}_x(\frac{A}{m^2})$ جریان حجمی

۳) $k\hat{a}_x(\frac{A}{m})$ جریان سطحی　　۴) $-2k\hat{a}_x(\frac{A}{m})$ جریان سطحی

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در مرز مشترک دو محیط داریم:

$$\vec{J}_s=\hat{a}_z\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\hat{a}_z\times(2k\hat{a}_y)=-2k\hat{a}_x\ (\frac{A}{m})$$

آزمون فصل سیزدهم

۱ـ صفحه $x=0$ دو ماده مغناطیسی همگن را از یکدیگر جدا می‌سازد در $x>0$، $\mu_r = 5$ و در $x<0$، $\mu_r = 2$ می‌باشد. اگر $\frac{\vec{B}}{\mu_0} = -2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y - \hat{a}_z$ در $x<0$ باشد، قدرمطلق $|\vec{H}|$ در $x>0$ را محاسبه کنید $(\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\frac{H}{m})$.

۱) ۱/۶۳ $\frac{A}{m}$ ۲) ۱/۸۲ $\frac{A}{m}$ ۳) ۱/۹۵ $\frac{A}{m}$ ۴) ۲/۲۳ $\frac{A}{m}$

۲ـ ناحیه $x<0$ از ماده مغناطیسی با $\mu_{r1} = 2/5$ و $\vec{B}_1 = (\hat{a}_x - 2\hat{a}_y - 3\hat{a}_z)\mu_0$ و ناحیه $x>0$ از ماده مغناطیسی با $\mu_{r2} = 5$ پر شده است. زاویه بین بردارهای $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ کدام است؟

۱) $۷/۷^\circ$ ۲) $۸/۶^\circ$ ۳) $۹/۵^\circ$ ۴) $۱۰/۲^\circ$

۳ـ صفحه $x=0$ دو ماده مغناطیسی همگن را از یکدیگر جدا می‌سازد. در $x>0$، $\mu_r = 5$ و برای $x<0$، $\mu_r = 2$ می‌باشد. اگر $\frac{\vec{B}}{\mu_0} = -2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y - \hat{a}_z$ در $x<0$ باشد، زاویه بین بردارهای شدت میدان مغناطیسی در $x>0$ کدام است؟

۱) $۱۸/۱۱^\circ\,\frac{A}{m}$ ۲) $۱۲/۲۵^\circ\,\frac{A}{m}$ ۳) $۷/۳۵^\circ\,\frac{A}{m}$ ۴) $۵/۴۳^\circ\,\frac{A}{m}$

۴ـ نواحی $z>0$ و $z<0$ به ترتیب از موادی با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی $\mu_1 = 4\mu_0$ و $\mu_2 = 2\mu_0$ پر شده‌اند. روی صفحه $z=0$ جریان سطحی $\vec{J}_s = 2\hat{a}_x - 3\hat{a}_y$ برقرار است و در محیط $z>0$، $\vec{H}_1 = 5\hat{a}_x - 6\hat{a}_y + \hat{a}_z$ چگالی شار مغناطیسی در محیط دوم، کدام است؟

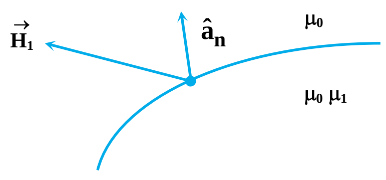
۱) $\vec{B}_2 = \mu_0(8\hat{a}_x + 16\hat{a}_y - 4\hat{a}_z)$ ۲) $\vec{B}_2 = \mu_0(16\hat{a}_x - 8\hat{a}_y + 2\hat{a}_z)$

۳) $\vec{B}_2 = \mu_0(4\hat{a}_x + 8\hat{a}_y - 2\hat{a}_z)$ ۴) $\vec{B}_2 = \mu_0(8\hat{a}_x - 16\hat{a}_y + 4\hat{a}_z)$

۵ـ یک قطعه بسیار بزرگ به ضخامت d، از ماده‌ای با بردار مغناطیس شدگی دائم $\vec{M} = 3\hat{a}_z$ تشکیل شده است. میدان مغناطیسی $\vec{H} = k\hat{a}_z$ (k عدد ثابت) به طور عمود بر قطعه به آن اعمال می‌شود. مقدار k چقدر باشد تا شدت میدان مغناطیسی درون قطعه صفر گردد؟

۱) -3 ۲) 3 ۳) -1 ۴) 1

۶ـ شکل مقابل مرز مشترک بین خلأ و ماده مغناطیسی با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی $\mu = \mu_0\mu_r$ را نشان می‌دهد. روی مرز مشترک جریان آزاد وجود ندارد. بردار مغناطیس‌شدگی در داخل ماده مغناطیسی کدام است؟



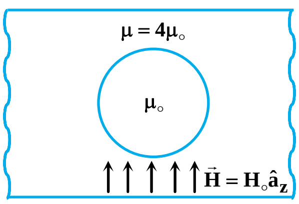
۱) $\vec{M}_2 = (\mu_r - 1)\vec{H}_1$

۲) $\vec{M}_2 = (\mu_r - 1)\vec{H}_1 + \frac{(\mu_r-1)^2}{\mu_r}(\vec{H}_1.\hat{a}_n)\hat{a}_n$

۳) $\vec{M}_2 = (\mu_r - 1)\vec{H}_1 - \frac{(\mu_r-1)^2}{\mu_r}(\vec{H}_1.\hat{a}_n)\hat{a}_n$

۴) $\vec{M}_2 = (\mu_r - 1)\vec{H}_1 + (\mu_r-1)^2(\vec{H}_1\cdot\hat{a}_n)\hat{a}_n$

۷ـ در یک قطعه بسیار بزرگ از ماده مغناطیسی با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی $\mu_r = 4$ حفره‌ای کروی کوچکی ایجاد شده است. اگر شدت میدان مغناطیسی در داخل قطعه یکنواخت و به صورت $\vec{H} = H_0\hat{a}_z$ باشد، اندازه شدت میدان مغناطیسی در داخل حفره کدام است؟



۱) $\frac{4}{3}\mu_0$ ۲) $\frac{1}{2}\mu_0$

۳) $2\mu_0$ ۴) $\frac{1}{3}\mu_0$

۸ـ محور z ها حامل جریان I می‌باشد. ناحیه $x>0$ از ماده‌ای با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ_1 و ناحیه $x<0$ از ماده‌ای با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ_2 پر شده است. شدت میدان مغناطیسی در ناحیه $x>0$ کدام است؟

۱) $\vec{H}=\dfrac{\mu_2 I}{(\mu_1+\mu_2)\pi R}\hat{a}_\varphi$

۲) $\vec{H}=\dfrac{\mu_1 I}{(\mu_1+\mu_2)\pi R}\hat{a}_\varphi$

۳) $\vec{H}=\dfrac{\mu_2\mu_1 I}{(\mu_1+\mu_2)\pi R}\hat{a}_\varphi$

۴) $\vec{H}=\dfrac{(\mu_1+\mu_2)I}{(\pi R)\ \mu_1+\mu_2}\hat{a}_\varphi$

۹ـ جریان سطحی با چگالی $\vec{J}=-9\hat{a}_y$ در صفحه $z=0$ برقرار است. ناحیه $z<0$ از ماده‌ای با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی $\mu_1=4\mu_0$ و ناحیه $z>0$ از ماده‌ای با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی $\mu_2=3\mu_0$ پر شده است. هرگاه در ناحیه $z<0$ چگالی شار مغناطیسی برابر $\vec{B}_1=\mu_0(22\hat{a}_x+24\hat{a}_z)$ باشد، شدت میدان مغناطیسی در ناحیه $z>0$ کدام است؟

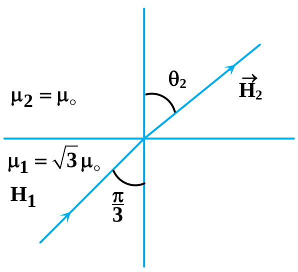
۱) $\vec{H}_2=14/5\hat{a}_x+24\hat{a}_z$

۲) $\vec{H}_2=5/5\hat{a}_x+8\hat{a}_z$

۳) $\vec{H}_2=14/5\hat{a}_x+8\hat{a}_z$

۴) $\vec{H}_2=43/5\hat{a}_x+24\hat{a}_z$

۱۰ـ مطابق شکل، شدت میدان مغناطیسی $\vec{H}_1$ از محیطی با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی $\mu_1=\sqrt{3}\mu_0$ وارد محیطی با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی $\mu_2=\mu_0$ می‌گردد. هرگاه اندازه $\vec{H}_1$ برابر $\sqrt{2}$ باشد، اندازه $\vec{H}_2$ و زاویه‌ای که با راستای عمود بر سطح می‌سازد به ترتیب کدام است؟



۱) $\sqrt{3}$ و $\frac{\pi}{6}$

۲) $\sqrt{3}$ و $\frac{\pi}{4}$

۳) $\sqrt{6}$ و $\frac{\pi}{6}$

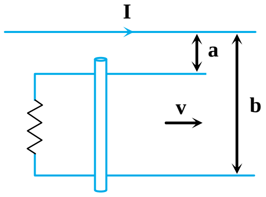
۴) $\sqrt{6}$ و $\frac{\pi}{4}$

فصل چهاردهم

«القای الکترومغناطیسی»

تست‌های تألیفی فصل چهاردهم

مثال۱: یک میلهٔ مسی با سرعت v روی ریل‌های یک رسانا که موازی می‌باشند حرکت می‌کند. از سیمی به موازات این ریل‌ها مطابق شکل جریان I عبور می‌کند. نیروی محرکهٔ القایی ε در میله برابر است با:



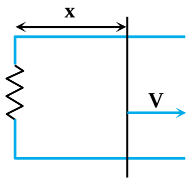
۱) $\frac{\mu_\circ Iv}{۴\pi}\ln\frac{a}{b}$ ۲) $\frac{\mu_\circ Iv}{۴\pi}\ln\frac{b}{a}$

۳) $\frac{\mu_\circ Iv}{۲\pi}\ln\frac{b}{a}$ ۴) $\frac{\mu_\circ Iv}{\pi}\ln\frac{a}{b}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای به دست آوردن emf ابتدا باید شار گذرنده از سطح محدود بین رسانا و میله را به دست آوریم. چون میله با سرعت v حرکت می‌کند، شار گذرنده از سطح مدار متغیر با زمان خواهد بود. برای به دست آوردن شار، ابتدا با استفاده از قانون آمپر میدان مغناطیسی حاصل از سیم جریان را به دست می‌آوریم:

$$\oint \vec{B}.d\vec{l}=\mu_\circ I \Rightarrow B(۲\pi r)=\mu_\circ I \Rightarrow B=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi r}$$

حال شار گذرنده از سطح محدود بین رسانا و میله را محاسبه می‌کنیم:



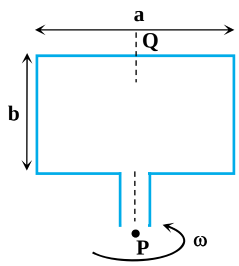
$$x=vt \Rightarrow \circ<x<vt$$

$$\phi=\iint_S \vec{B}.d\vec{s}=\int_a^b\int_\circ^{Vt}\frac{\mu_\circ I}{۲\pi r}dx\,dr=\int_a^b\frac{\mu_\circ I}{۲\pi r}vtdr \Rightarrow \phi=\frac{\mu_\circ Ivt}{۲\pi}\ln\frac{b}{a}$$

که در نتیجه برای emf مقدار مقابل به دست می‌آید:

$$|\varepsilon|=|\frac{d\phi}{dt}|=\frac{\mu_\circ Iv}{۲\pi}\ln\frac{b}{a}$$

مثال۲: یک قاب چهارگوش با اضلاع a و b داریم. این قاب با سرعت زاویه‌ای ω حول محور PQ در میدان مغناطیسی متغیر با زمان $\vec{B}=B_\circ\sin\omega t$ می‌چرخد. در لحظه $t=\circ$ صفحه قاب سیمی عمود بر میدان است. مقدار نیروی محرکه القایی در قاب برابر است با:



۱) $B_\circ ab\omega\cos\omega t$

۲) $B_\circ ab\omega\cos ۲\omega t$

۳) $B_\circ ab\omega\sin\omega t$

۴) $B_\circ ab\omega\sin ۲\omega t$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر زاویه بین بردار عمود بر صفحه و میدان مغناطیسی را θ فرض کنیم، $\theta=\omega t$ خواهد بود. بنابراین شار گذرنده از سطح قاب برابر است با:

$$\phi=\iint\vec{B}.d\vec{S}=\vec{B}.\vec{S}=|\vec{B}||\vec{S}|\cos\theta=B_\circ ab\sin\omega t.\cos\omega t=\frac{۱}{۲}B_\circ ab\sin ۲\omega t \Rightarrow |emf|=|-\frac{d\phi}{dt}|=B_\circ ab\omega\cos(۲\omega t)$$

مثال۳: اگر در مثال ۷، $\vec{B}=B_\circ\cos\omega_\circ t\hat{a}_z$ باشد، نیروی محرکه القایی (emf) را مجدداً محاسبه نمایید.

راه‌حل اول: مانند مثال قبل می‌توانیم ابتدا ϕ و سپس emf را تعیین کنیم:

$$emf=-\frac{d\phi}{dt}$$

$$\phi=\int\vec{B}\cdot d\vec{s}=\int_\circ^L\int_\circ^x(B_\circ\cos\omega_\circ t\hat{a}_z)\cdot(dxdy\hat{a}_z)=B_\circ Lx\cos\omega_\circ t$$

$$emf=-\frac{d\phi}{dt}=-B_\circ L(\frac{dx}{dt})\cos\omega_\circ t+B_\circ L\omega_\circ x\sin\omega_\circ t=-B_\circ V_\circ L\cos\omega_\circ t+B_\circ L\omega_\circ x\sin\omega_\circ t$$

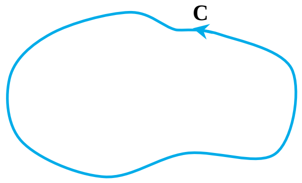
راه‌حل دوم: می‌توان مستقیماً emf را یافت:

$$\text{emf} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} + \oint_c (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$-\int (-B_0 \omega_0 \sin \omega_0 t \hat{a}_z) \cdot (dxdy \hat{a}_z) + \oint_C (V_0 \hat{a}_x \times B_0 \cos \omega_0 t \hat{a}_z) \cdot (dy \hat{a}_y) = B_0 \omega_0 L x \sin \omega_0 t - B_0 V_0 L \cos \omega_0 t$$

می‌توان فرض کرد که $x = x_0 + V_0 t$ که x_0 موقعیت در $t = 0$ است.

مثال ۴: فرض کنید در محیطی، پتانسیل مغناطیسی برداری $\vec{A}$ برقرار است. اگر حلقه‌ای دلخواه به شکل زیر در این محیط قرار گیرد، **emf** در حلقه برابر است با:



۱) صفر

۲) $-\frac{d}{dt}\oint_C (\nabla \times \vec{A}).d\vec{l}$

۳) $-\frac{d}{dt}\oint_C \vec{A}.d\vec{l}$

۴) با معلومات مسئله قابل تعیین نیست.

پاسخ: گزینه «۳» طبق تعریف emf داریم:

$$\text{emf} = -\frac{d}{dt}\iint \vec{B}.d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\iint (\nabla \times \vec{A}).d\vec{s}$$

با توجه به قضیه استوکس می‌توان نوشت:

$$\text{emf} = -\frac{d}{dt}\oint_C \vec{A}.d\vec{l}$$

مثال ۵: اگر $\vec{A}$ پتانسیل برداری مغناطیسی باشد، $\oint_C \vec{A}.d\vec{l}$ برابر است با:

۱) صفر

۲) $\mu_0 I$

۳) I جریان گذرنده از سطح محدود مسیر بستهٔ C

۴) شار مغناطیسی گذرنده از سطح محدود به مسیر بستهٔ C

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از رابطه استوکس و $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ داریم:

$$\oint_C \vec{A}.d\vec{l} = \iint (\vec{\nabla} \times \vec{A}).d\vec{s} = \iint \vec{B}.d\vec{s} = \phi$$

مثال ۶: در یک سیملوله با تعداد دورهای واحد طول n، جریان متناوب $I = I_0 \sin(\omega t)$ برقرار است. اندازه میدان الکتریکی القایی درون سیملوله چقدر است؟

۱) $rI_0\omega|\sin(\omega t)|$

۲) $\frac{rI_0\omega}{2}|\sin(\omega t)|$

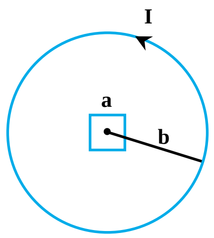
۳) $rI_0\omega|\cos(\omega t)|$

۴) $\frac{rI_0\omega}{2}|\cos(\omega t)|$

پاسخ: گزینه «۴» اندازه میدان مغناطیسی درون سیملوله به صورت $|\vec{B}| = \mu_0 nI$ می‌باشد. از آنجا که $\vec{B}$ نسبت به مکان یکنواخت است و مسئله تقارن استوانه‌ای دارد، اندازه میدان الکتریکی از رابطه مقابل حاصل می‌شود: $(\int_C \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}.d\vec{s})$

$$E_\varphi(2\pi r) = (\frac{-\partial B}{\partial t})(\pi r^2) \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{r}{2}|\frac{\partial B}{\partial t}| = \frac{r}{2}I_0\omega|\cos(\omega t)|$$

مثال ۷: یک حلقه مربعی کوچک به ضلع a در مرکز یک دایره با شعاع b و جریان I قرار دارد. اندوکتانس متقابل بین دو حلقه کدام است؟



۱) $\frac{\mu_0 a^2}{3b}$

۲) $\frac{\mu_0 a^2}{2b}$

۳) $\frac{\mu_0 a^2}{4b}$

۴) $\frac{\mu_0 a^2}{b}$

پاسخ: گزینه «۲» چگالی شار مغناطیسی حلقه دایروی در مرکز آن از رابطه مقابل به دست می‌آید:

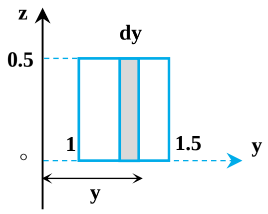
$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2b}$$

با توجه به اینکه حلقه مربعی خیلی کوچک فرض شده است، می‌توان میدان مغناطیسی در تمام نقاط آن را ثابت و برابر میدان مغناطیسی در مرکز دایره در نظر گرفت. بنابراین:

$$\phi_{21} = \iint\limits_{\text{سطح مربع}} \vec{B}_1 . d\vec{s}_2 = B_1 a^2 = \frac{\mu_0 I a^2}{2b} \Rightarrow M_{21} = \frac{\phi_{21}}{I} = \frac{\mu_0 a^2}{2b}$$

مثال ۸: **اندوکتانس متقابل مابین حلقه فیلامان مربعی شکل در صفحه $x = 0$ با رأس‌های $(0,1,0), (0,1/5,0), (0,1/5,0/5), (0,1,0/5)$ و یک فیلامان بی‌نهایت در امتداد محور z ها کدام است؟**

۱) $0/02 \mu H$ ۲) $0/04 \mu H$ ۳) $0/08 \mu H$ ۴) $0/12 \mu H$



پاسخ: گزینه «۲» چون دو فیلامان در محیط خطی هستند، بنابراین اندوکتانس متقابل آن‌ها با هم مساوی می‌باشد $M_{12} = M_{21}$. برای به دست آوردن اندوکتانس متقابل آن‌ها مانند شکل فرض می‌کنیم که جریان I از فیلامان بی‌نهایت عبور می‌کند. سپس با استفاده از قانون آمپر میدان مغناطیسی آن را به‌دست می‌آوریم. با دانستن مقدار میدان مغناطیسی می‌توانیم شار گذرنده از فیلامان مربعی را به دست آوریم. در نهایت با استفاده از رابطه $M = \frac{\phi}{I}$ مقدار اندوکتانس متقابل را به دست می‌آوریم.

اندازه میدان مغناطیسی فیلامان بی‌نهایت با استفاده از قانون آمپر برابر می‌باشد با:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$$

با استفاده از رابطه $\phi = \iint_S \vec{B} . d\vec{s}$ شار گذرنده از فیلامان مربعی را به دست می‌آوریم. توجه شود که میدان مغناطیسی در امتداد ضلعی از مربع که روی محور y قرار گرفته است، تغییر می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\phi = \iint_S \vec{B} . d\vec{s} = \int_0^{0/5} \int_1^{1/5} \frac{\mu_0 I}{2\pi y} dy dz = \frac{\mu_0 I}{4\pi} Ln(1/5)$$

حال که مقدار شارگذرنده از فیلامان مربعی را به دست آوردیم، می‌توانیم با استفاده از رابطه $M = \frac{\phi}{I}$ اندوکتانس متقابل بین آن‌ها را به دست آوریم:

$$M = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0}{4\pi} Ln(1/5) = 0/04 \mu H$$

مثال ۹: **از یک سیملوله با شعاع a و n دور در واحد طول، جریان I می‌گذرد. ضریب القای خودی در واحد طول سیملوله چقدر است؟**

۱) $\frac{\mu_0}{2} n \pi a^2$ ۲) $\frac{\mu_0}{2} n^2 \pi a^2$ ۳) $\mu_0 n^2 \pi a^2$ ۴) $\mu_0 n \pi a^2$

پاسخ: گزینه «۳» با فرض آنکه محور سیملوله در راستای محور z است، میدان مغناطیسی درون سیملوله از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\vec{H} = nI\hat{a}_z$$

انرژی مغناطیسی ذخیره شده را می‌توان به صورت مقابل تعیین کرد:

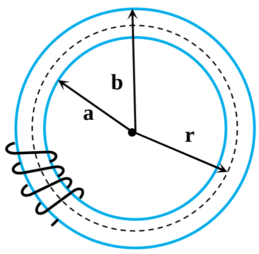
$$W_m = \frac{\mu_0}{2} \int_V |\vec{H}|^2 dv = \frac{\mu_0}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^a n^2 I^2 r dr d\varphi dz$$

$$W_m = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} (2\pi) \int_0^a r dr = \frac{\mu_0 n^2 I^2 a^2 \pi}{2}$$

در نتیجه ضریب خودالقایی برابر است با:

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \mu_0 n^2 \pi a^2$$

مثال ۱۰: **یک چنبره آهنی با سطح مقطع مستطیلی داریم که N دور سیم حول آن پیچیده شده است. چنبره شعاع داخلی a، شعاع خارجی b و ارتفاع d دارد. ضریب خودالقایی سیم‌پیچ کدام است؟ (نفوذپذیری مغناطیسی آهن μ است.)**



۱) $\frac{\mu N^2 d}{\pi} Ln \frac{b}{a}$ ۲) $\frac{\mu N^2 d}{2\pi} Ln \frac{b}{a}$

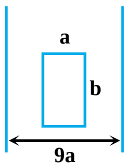
۳) $\frac{\mu N^2 d}{4\pi} Ln \frac{b}{a}$ ۴) $\frac{\mu N^2 d}{8\pi} Ln \frac{b}{a}$

پاسخ: گزینه «۲» طبق قانون آمپر، شدت میدان مغناطیسی داخل چنبره برابر است با:
$$H_\varphi = \frac{NI}{2\pi r}$$

بنابراین انرژی مغناطیسی ذخیره شده در چنبره برابر است با::

$$W_m = \frac{\mu}{2}\int_0^d \int_0^{2\pi} \int_a^b |\vec{H}|^2 r dr d\varphi dz = \frac{\mu N^2 I^2}{4\pi} d \text{Ln}\frac{b}{a} \xrightarrow{L=\frac{2W_m}{I^2}} L = \frac{\mu N^2 d}{2\pi}\text{Ln}\frac{b}{a}$$

مثال ۱۱: دو سیم بلند به فاصلهٔ 9a از یکدیگر و یک سیم مستطیل شکل در وسط این دو سیم و به ابعاد a و b در یک صفحه افقی قرار دارد. القای متقابل آن‌ها برابر است با:



۱) $\frac{a\mu_0}{\pi}\ln\frac{10}{9}$

۲) $\frac{b\mu_0}{2\pi}\ln\frac{10}{9}$

۳) $\frac{b\mu_0}{\pi}\ln\frac{5}{4}$

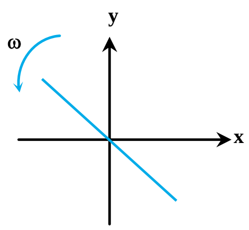
۴) $\frac{a\mu_0}{\pi}\ln\frac{5}{4}$

پاسخ: گزینه «۳» اگر فرض کنیم که در سیم‌ها جریان I و در جهت خلاف هم وجود داشته باشد شار گذرنده از سطح مستطیل شکل دو برابر شار ناشی از هر سیم می‌باشد. بنابراین شار گذرنده از حلقه برابر است با:

$$\phi = 2\int_{4a}^{5a} \frac{\mu_0 I b dr}{2\pi r} = \frac{\mu_0 b I}{\pi}\ln\frac{5}{4}$$

بدین ترتیب القای متقابل به‌صورت مقابل به‌دست می‌آید:
$$M = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0 b}{\pi}\ln\frac{5}{4}$$

مثال ۱۲: حلقه سیم نازکی به شکل مربع به ابعاد a و هم مرکز با مبدأ مختصات در صفحه $x = 0$ مفروض است، بطوریکه اضلاع آن به موازات محورهای y و z می‌باشند. چگالی شار مغناطیسی $\vec{B} = B_0 |y| \hat{a}_x$ در فضا حضور دارد. حلقه با سرعت زاویه‌ای یکنواخت ω حول محور z دوران می‌کند. emf در حلقه کدام است؟ (حلقه در لحظه $t = 0$ عمود بر جهت میدان مغناطیسی بوده است.)



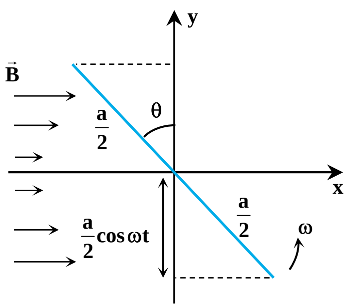
۱) $\frac{B_0 a^3 \omega}{2}\sin\omega t$

۲) $\frac{B_0 a^3 \omega}{4}\sin\omega t$

۳) $\frac{B_0 a^3 \omega}{4}\sin 2\omega t$

۴) $B_0 a^3 \omega(1-\omega)\sin\omega t$

پاسخ: گزینه «۳» طبق تعریف کلی که برای emf بیان کردیم، باید ابتدا شار گذرنده از حلقه را به‌دست آوریم و سپس تغییرات شار نسبت به زمان را محاسبه کنیم که برابر با emf خواهد بود.



ابتدا شار گذرنده از حلقه را حساب می‌کنیم. با توجه به شکل، شار عبوری از حلقه برابر با شاری است که از مستطیلی با مشخصات زیر عبور می‌کند:

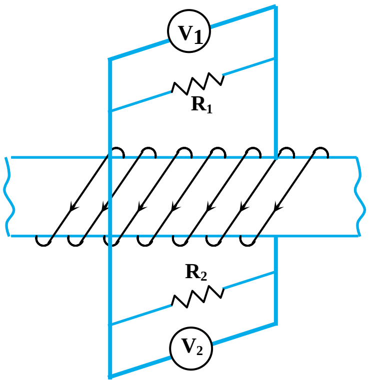
$$-\frac{a}{2}\cos\omega t < y < \frac{a}{2}\cos\omega t \quad , \quad -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}$$

$$\phi = \iint \vec{B}.d\vec{s} = \int_{y=\frac{-a}{2}\cos\omega t}^{y=\frac{a}{2}\cos\omega t} \int_{z=-\frac{a}{2}}^{z=\frac{a}{2}} B_0 |y| dz dy \Rightarrow \psi = 2\int_0^{\frac{a}{2}\cos\omega t} \int_{z=-\frac{a}{2}}^{z=\frac{a}{2}} B_0 y dz dy = 2B_0 a \int_0^{\frac{a}{2}\cos\omega t} y dy = B_0 \frac{a^3}{4}\cos^2\omega t$$

بنابراین خواهیم داشت:
$$\text{emf} = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{B_0 a^3 \omega}{4}\sin 2\omega t$$

آزمون فصل چهاردهم

۱ـ جریان یک سیملوله طویل به طور خطی با زمان زیاد می‌شود به طوری که شار متناسب با زمان و به صورت $\phi = \alpha t$ می‌باشد. سیملوله از داخل مداری شامل مقاومت‌های R_1 و R_2 و ولت‌مترهای V_1 و V_2 مطابق شکل می‌گذرد. اندازه ولتاژ القا شده روی مقاومت R_1 کدام است؟



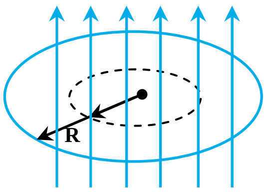
۱) $\dfrac{\alpha R_1}{R_1+R_2}$

۲) $\dfrac{\alpha R_2}{R_1+R_2}$

۳) $\dfrac{\alpha R_1 R_2}{R_1+R_2}$

۴) $\dfrac{\alpha (R_1+R_2)}{R_1 R_2}$

۲ـ یک میدان مغناطیسی یکنواخت $B(t)$ که مستقیماً به سمت بالاست، ناحیه دایره‌ای به شعاع R مطابق شکل را پر می‌کند. اگر B با زمان تغییر کند، میدان القائی حاصل کدام است؟



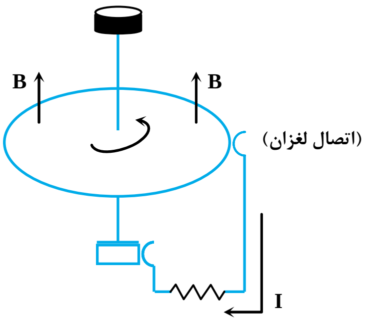
۱) $\vec{E} = -\dfrac{R}{2}\dfrac{dB}{dt}\hat{a}_\varphi$

۲) $\vec{E} = -\dfrac{R}{2}\dfrac{dB}{dt}\hat{a}_z$

۳) $\vec{E} = -\pi R^2 \dfrac{dB}{dt}\hat{a}_\varphi$

۴) $E = -\pi R^2 \dfrac{dB}{dt}\hat{a}_z$

۳ـ یک قرص فلزی به شعاع a با سرعت زاویه‌ای ω حول محور قائمی مطابق شکل در یک میدان مغناطیسی یکنواخت B می‌چرخد. مداری را با اتصال یک انتهای مقاومت R به محور دوران و انتهای دیگرش به لغزنده واقع بر گوشه بیرونی تشکیل داده‌ایم. جریان حاصل در مقاومت کدام است؟



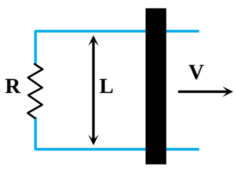
۱) $I = \dfrac{\omega B a}{R}$

۲) $I = \dfrac{\omega B a^2}{R}$

۳) $I = \dfrac{\omega B a^2}{2R}$

۴) $I = \dfrac{\omega B a}{2R}$

۴ـ یک میله فلزی به جرم m بدون اصطکاک بر روی دو ریل موازی و رسانا که به فاصله L از یکدیگر واقع‌اند، می‌لغزد. مقاومت R بر روی ریل‌ها متصل و یک میدان مغناطیسی B به طرف داخل صفحه کاغذ در کل ناحیه وجود دارد. اگر میله در لحظه صفر با سرعت $V_\circ$ شروع به حرکت کند، سرعت آن در لحظه t چقدر است؟



۱) $V = V_\circ e^{-\frac{mL}{B^2 R}t}$

۲) $V = V_\circ e^{-\frac{B^2 R^2}{mL}t}$

۳) $V = V_\circ e^{-\frac{B^2 L^2}{mR}t}$

۴) $V = V_\circ e^{-\frac{mR}{B^2 L^2}t}$

۵ـ حلقه سیم مربعی شکل به ضلع a در ربع اول صفحه xy به گونه‌ای قرار دارد که یک گوشه آن در مبدأ است. در این ناحیه یک میدان مغناطیسی غیر یکنواخت وابسته به زمان $B(y,t) = ky^3t^2\hat{a}_z$ (که در آن k یک ثابت است) قرار دارد. emf القائی در حلقه کدام است؟

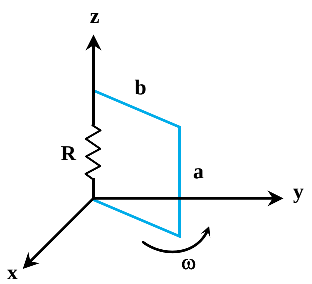
۱) $-\dfrac{kta^4}{4}$

۲) $-\dfrac{kta^5}{4}$

۳) $\dfrac{-kta^4}{5}$

۴) $\dfrac{-kta^5}{2}$

۶ـ در دستگاه مختصات استوانه‌ای و در میدان مغناطیسی $\vec{B}=\frac{B_\circ}{r}\hat{a}_r$ یک قاب مستطیلی هادی با ابعاد a و b مطابق شکل با سرعت زاویه ω در جهت $\hat{a}_\varphi$ دوران می‌کند. چه جریانی در مقاومت R جاری می‌شود؟



۱) ∘

۲) $\frac{\omega B_\circ a}{R}$

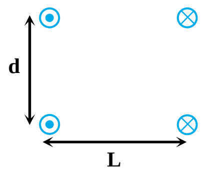
۳) $\frac{\omega B_\circ}{abR}$

۴) $\frac{ab\omega B_\circ}{R}$

۷ـ چنبره‌ای با $\mu_r=1$ دارای N دور سیم می‌باشد. سطح مقطع چنبره یک مربع $a\times a$ بوده و شعاع متوسط چنبره برابر با R می‌باشد. با فرض $R>>a$ اندوکتانس خودی چنبره تقریباً برابر است با:

۱) $\frac{\mu_\circ N^2a^2}{\pi R}$ ۲) $\frac{\mu_\circ N^2a^2}{2\pi R}$ ۳) $\frac{\mu_\circ N^2a^2}{4\pi R}$ ۴) $\frac{\mu_\circ N^2a^2}{8\pi R}$

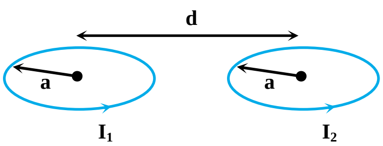
۸ـ دو زوج خط دو سیمه به موازات هم قرار گرفته‌اند به طوری که صفحاتی که از هر زوج می‌گذرد با هم موازی‌اند. خطوط به فاصله d از هم قرار دارند. اندوکتانس متقابل بین این دو زوج سیم کدام است؟



۱) $\frac{\mu_\circ}{\pi}\ln(1+\frac{L}{d})$ ۲) $\frac{2\mu_\circ}{\pi}\ln(1+\frac{L}{d})$

۳) $\frac{\mu_\circ}{2\pi}\ln(1+\frac{L^2}{d^2})$ ۴) $\frac{\mu_\circ}{\pi}\ln(1+\frac{L^2}{d^2})$

۹ـ دو حلقه بسیار کوچک حامل جریان I و به شعاع a در یک صفحه به فاصله d از هم قرار دارند. ضریب القای متقابل بین دو حلقه کدام است؟



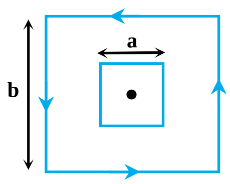
۱) $\frac{\mu_\circ\pi a^4}{2d^3}$ ۲) $\frac{\mu_\circ\pi a^4}{3d^3}$

۳) $\frac{\mu_\circ\pi a^2}{3d^2}$ ۴) $\frac{\mu_\circ\pi a^4}{4d^3}$

۱۰ـ از یک هادی استوانه‌ای طویل توپر به شعاع a با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی برابر یک $(\mu_1=1)$ که محور آن منطبق بر محور z هاست، جریان الکتریکی با چگالی $\vec{J}=J_\circ r\hat{a}_z$ (در مختصات استوانه‌ای و $J_\circ$ مقدار ثابتی است) می‌گذرد. اندوکتانس داخلی این هادی در واحد طول کدام است؟

۱) $\frac{\mu_\circ}{8\pi}$ ۲) $\frac{\mu_\circ}{12\pi}$ ۳) $\frac{\mu_\circ}{4\pi}$ ۴) $\frac{\mu_\circ}{16\pi}$

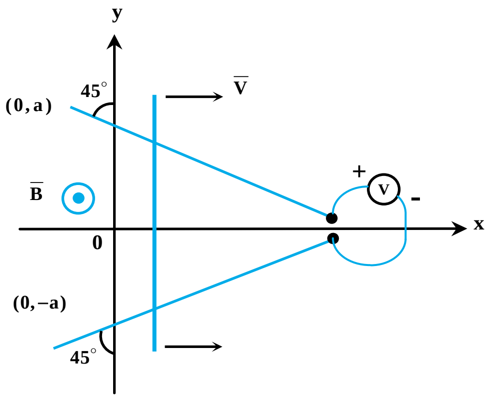
۱۱ـ دو قاب مربعی به اضلاع a و b مانند شکل در یک صفحه قرار دارند. مربع کوچک در مرکز مربع بزرگ است و a خیلی کوچکتر از b می‌باشد. اندازه ضریب القاء متقابل L_{12} بین دو قاب چقدر است؟



۱) $\frac{\mu_\circ a^2}{\pi\sqrt{2}b}$ ۲) $\frac{\mu_\circ\sqrt{2}a^2}{4\pi b}$

۳) $\frac{\mu_\circ\sqrt{2}a^2}{\pi b}$ ۴) $\frac{\mu_\circ 2\sqrt{2}a^2}{\pi b}$

۱۲ـ در میدان مغناطیسی ثابت $\bar{B} = B_\circ \hat{a}_z$ مانند شکل میله‌ای با سرعت ثابت $\bar{V} = V_\circ \hat{a}_x$ در لحظه $t = \circ$ از محل $x = \circ$ روی ریل هادی نمایش داده شده شروع به حرکت می‌کند. در فاصله $\circ < t < \dfrac{a}{V_\circ}$ ولتمتر V چه ولتاژی را نشان می‌دهد؟



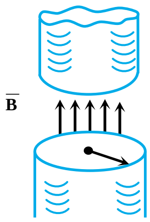
۱) $۲B_\circ V_\circ (V_\circ t - a)$

۲) $-۲B_\circ V_\circ (V_\circ t - a)$

۳) $+۲B_\circ V_\circ (V_\circ t - a\sqrt{۲})$

۴) $-۲B_\circ V_\circ (V_\circ t - a\sqrt{۲})$

۱۳ـ بین دو قطب یک آهنربای الکتریکی که به شکل دوایری به شعاع a هستند، میدان $\vec{B}$ بـه صـورت $|\vec{B}| = \dfrac{B_\circ}{\tau} t$ بـرای $\circ \le t \le \tau$ و $\circ \le r \le a$ تغییر می‌کند. $B_\circ$ ثابت بوده و جهت $\vec{B}$ در شکل دیده می‌شود. حداقل τ چقدر باشد تا در هوا شکست عایقی رخ ندهد؟ (فرض کنید حداکثر میدان الکتریکـی قابل تحمل «dielectric strength» برای هوا $E_\circ$ باشد.)



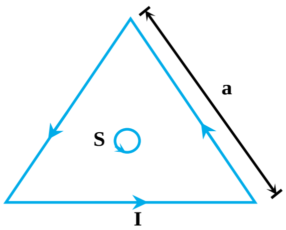
۱) $\dfrac{B_\circ \pi a}{E_\circ}$

۲) $\dfrac{B_\circ \pi a}{۲E_\circ}$

۳) $\dfrac{B_\circ a}{E_\circ}$

۴) $\dfrac{B_\circ a}{۲E_\circ}$

۱۴ـ از حلقه‌ای به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a جریان I می‌گذرد. مطابق شکل زیر یک حلقهٔ دایره‌ای شکل خیلی کوچک بـه مسـاحت S در مرکز آن قرار دارد. (فرض کنید $\sqrt{S} << a$) اندوکتانس متقابل $M_{۱۲}$ بین دو حلقه کدام است؟



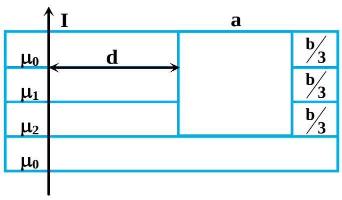
۱) $\dfrac{\mu_\circ S}{\pi a}$

۲) $\dfrac{۹\mu_\circ S}{\pi a}$

۳) $\dfrac{\mu_\circ S}{۴\pi a}$

۴) $\dfrac{۹\mu_\circ S}{۲\pi a}$

۱۵ـ سیم مستطیل شکلی به ابعاد a و b و سیم بسیار طویل حامل جریان I مطابق شکل در یک صفحه و در سه محیط با ضریب تراوایی $\mu_\circ$، $\mu_۱$ و $\mu_۲$ قرار دارند. القای متقابل حلقه و سیم کدام است، (از اثرات لبه‌ها صرف‌نظر کنید.)



۱) $\dfrac{b}{۶\pi}(\mu_\circ + \mu_۱ + \mu_۲)\ln(\dfrac{a}{d})$

۲) $\dfrac{b}{۳\pi}(\mu_\circ + \mu_۱ + \mu_۲)\ln(\dfrac{a}{d})$

۳) $\dfrac{b}{۶\pi}(\mu_\circ + \mu_۱ + \mu_۲)\ln(\dfrac{d+a}{d})$

۴) $\dfrac{b}{۳\pi}(\mu_\circ + \mu_۱ + \mu_۲)\ln(\dfrac{d+a}{d})$

فصل پانزدهم

«انرژی و نیروی مغناطیسی»

تست‌های تألیفی فصل پانزدهم

مثال ۱: در مختصات کروی، میدان مغناطیسی به صورت $\vec{B} = R\cos\theta\hat{a}_\theta$ در فضا وجود دارد. انرژی مغناطیسی ذخیره شده در یک کابل هم‌محور که سطح مقطع پایینی آن در $z=0$ و سطح مقطع بالایی آن در $z=1$ قرار گرفته و شعاع داخلی a و شعاع خارجی b دارد، چقدر است؟

۱) $\frac{\pi(b^2-a^2)}{6\mu_0}$ ۲) $\frac{\pi(b^2-a^2)}{\mu_0}$ ۳) $\frac{\pi(b-a)^2}{6\mu_0}$ ۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۱» اگر مختصات دستگاه استوانه‌ای را با (r,φ,z) نشان دهیم، خواهیم داشت: $|\vec{B}| = |R\cos\theta| = |z|$

انرژی مغناطیسی ذخیره شده برابر است با:

$$W_m = \frac{1}{2}\int\frac{|\vec{B}|^2}{\mu_0}dv = \frac{1}{2\mu_0}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_a^b z^2 r dr d\varphi dz \Rightarrow W_m = \frac{1}{2\mu_0}(\frac{1}{3})(2\pi)\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{\pi(b^2-a^2)}{6\mu_0}$$

مثال ۲: در محیط خلأ وقتی میدان‌های مغناطیسی یکنواخت $\vec{H}_1$ و $\vec{H}_2$ هر یک به تنهایی وجود داشته باشند فرض می‌کنیم در حجم V انرژی‌های ذخیره شده به ترتیب W_{m1} و W_{m2} هستند. وقتی دو میدان $\vec{H}_1$ و $\vec{H}_2$ با هم وجود داشته باشند انرژی ذخیره شده در حجم V چقدر است؟

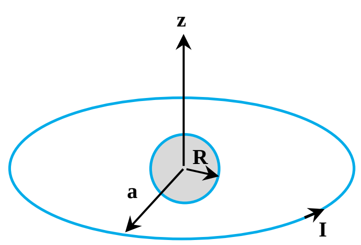
$\vec{H}_1 = H_1\hat{a}_z \quad , \quad \vec{H}_2 = -H_2\hat{a}_z$

۱) $W_{m1}+W_{m2}-\mu_0H_1H_2V$ ۲) $W_{m1}+W_{m2}+\mu_0H_1H_2V$ ۳) $W_{m1}+W_{m2}+\frac{1}{2}\mu_0H_1H_2V$ ۴) $W_{m1}+W_{m2}-\frac{1}{2}\mu_0H_1H_2V$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از تعریف انرژی مغناطیسی داریم:

$$W_m = \frac{1}{2}\mu_0\int_V|\vec{H}_1+\vec{H}_2|^2dv = W_{m_1}+W_{m_2}+\mu_0\int_V\vec{H}_1.\vec{H}_2dV = W_{m_1}+W_{m_2}-\mu_0H_1H_2V$$

مثال ۳: یک حلقه سیم به شعاع a داریم که حامل جریان I است. یک کره به شعاع R که $(R \ll a)$ با نفوذپذیری مغناطیسی μ در مرکز دایره قرار دارد. نیروی وارد بر واحد سطح کره چقدر است؟



۱) $\frac{3\mu_0(\mu-\mu_0)I^2}{2(\mu+2\mu_0)a}\sin\theta[\cos\theta\hat{\theta}+\sin\theta\hat{r}]$

۲) $\frac{3\mu_0(\mu-\mu_0)I^2}{4(\mu+2\mu_0)a}\sin\theta[\cos\theta\hat{\theta}+\sin\theta\hat{r}]$

۳) $\frac{3\mu_0(\mu-\mu_0)I^2}{2(\mu+2\mu_0)a}\sin\theta[\cos\theta\hat{\theta}-\sin\theta\hat{r}]$

۴) $\frac{3\mu_0(\mu-\mu_0)I^2}{4(\mu+2\mu_0)a}\sin\theta[\cos\theta\hat{\theta}-\sin\theta\hat{r}]$

پاسخ: گزینه «۲» میدان مغناطیسی ناشی از حلقه در مرکز آن برابر است با: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2a}\hat{z}$

چون کره خیلی کوچک است، می‌توان میدان اعمالی به آن را همان میدان مرکز حلقه در نظر گرفت. پس میدان داخل کره برابر است با: $\vec{B}_{in} = \frac{3\mu}{\mu+2\mu_0}\vec{B}$

حال بردار مغناطیس‌شوندگی کره $(\vec{M})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{B}_{in} = \mu_0(\vec{H}_{in}+\vec{M}) \Rightarrow \vec{M} = (\frac{\vec{B}_{in}}{\mu_0}-\vec{H}_{in}) = (\frac{\vec{B}_{in}}{\mu_0}-\frac{\vec{B}_{in}}{\mu}) \Rightarrow \vec{M} = \frac{3(\mu-\mu_0)}{\mu_0(\mu+2\mu_0)}\vec{B}$$

چگالی جریان مقید سطحی برابر است با: (چگالی جریان مقید حجمی برابر صفر است.)

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{r}\,|_{r=a} = \frac{3(\mu-\mu_0)I}{2(\mu+2\mu_0)a}\sin\theta\hat{\varphi}$$

نیروی وارد بر واحد سطح کره معادل نیروی وارد بر واحد سطح جریان مقید سطحی است که از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\vec{F} = \vec{J}_{ms} \times \vec{B} = \frac{3(\mu-\mu_0)I}{2(\mu+2\mu_0)a}\sin\theta.\frac{\mu_0 I}{2a}(\hat{\varphi}\times\hat{z}) = \frac{3\mu_0(\mu-\mu_0)I^2}{4(\mu+2\mu_0)a}\sin\theta(\cos\theta\hat{\theta}+\sin\theta\hat{r})$$

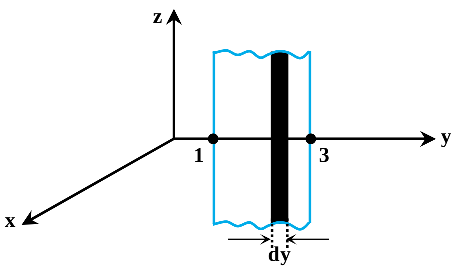
مثال ۴: **سیمی به طول 4a را به چهار صورت زیر درآورده‌ایم. اگر جریان I در جهت نشان داده شده از آنها بگذرد و یک میدان مغناطیسی عمود بر صفحه کاغذ بر آن‌ها اعمال شود، نیروی وارد بر سیم در کدام حالت ماکزیمم است؟**

پاسخ: گزینه «۴» نیروی وارد بر سیمی بزرگتر است که بردار برآیند یا انتگرال عنصر دیفرانسیلی طول آن سیم $(\vec{L}=\int_L d\vec{l})$ بزرگتر باشد. این بردار برای سیم‌های ۱ و ۳ برابر صفر است. از بین سیمهای ۲ و ۴ نیز بدیهی است که بردار $\int_L d\vec{l}$ سیم ۴ بزرگتر می‌باشد.

مثال ۵: **یک سیم طویل روی محور zها میدان $\vec{H}=\frac{-2}{y}\hat{a}_x(\frac{A}{m})$ را در نقطه $P(0,y,z)$ در فضای آزاد ایجاد می‌نماید. نیروی وارد بر واحد طول یک نوار حامل جریان سطحی $\vec{K}=-2\pi\hat{a}_z(\frac{A}{m})$ که بین $y=1$ و $y=3$ متر در صفحه $x=0$ قرار گرفته است، کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌باشد؟**

۱) $4\pi\mu_0\ln3\,\hat{a}_y$ ۲) $-4\pi\ln3\,\hat{a}_y$ ۳) $-4\pi\mu_0\ln3\,\hat{a}_x$ ۴) $-4\mu_0\ln3\,\hat{a}_x$

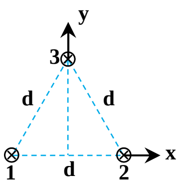
پاسخ: گزینه «۱» اگر نوار حامل جریان سطحی را به جریان‌های دیفرانسیلی $dI\vec{L}=-2\pi dyL\hat{a}_z$ با طول $L=1$ متر (واحد طول) تقسیم کنیم، خواهیم داشت:



$$d\vec{F}=(dI\vec{L}\times\vec{B})=(-2\pi dy\hat{a}_z)\times(\frac{-2\mu_0}{y}\hat{a}_x)=4\pi\mu_0\frac{dy}{y}\hat{a}_y$$

$$\Rightarrow \vec{F}=\int d\vec{F}=\int_{y=1}^{y=3}4\pi\mu_0\frac{dy}{y}\hat{a}_y=4\pi\mu_0\ln3\,\hat{a}_y$$

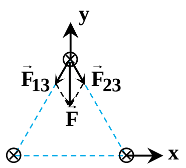
مثال ۶: **سه سیم نامتناهی موازی مطابق شکل در رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته‌اند. اگر از هر کدام از سیم‌ها جریان درون سوی یکنواخت I عبور کند و سیم‌های ۱و۲ ثابت باشند، با فرض اینکه جرم واحد طول هر سیم m باشد، سیم ۳ با چه شتابی شروع به حرکت خواهد کرد؟ (از نیروی الکتریکی بین سیم‌ها صرف‌نظر کنید)**



۱) $a=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I^2}{\pi md}$ ۲) $a=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I^2}{2\pi md}$

۳) $a=\frac{\sqrt{3}\mu_0 I^2}{2\pi md}$ ۴) $a=\frac{\sqrt{3}\mu_0 I^2}{\pi md}$

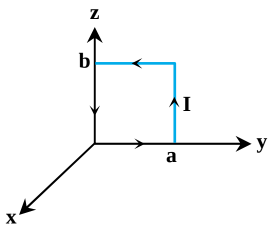
پاسخ: گزینه «۳» نیروی وارد بر سیم سوم مطابق شکل زیر می‌باشد:



$$\vec{F}=2|\vec{F}_{13}|\cos30^\circ(-\hat{a}_y)\ \Rightarrow\vec{F}=2\mu_0\frac{I^2}{2\pi d}\frac{\sqrt{3}}{2}(-\hat{a}_y)\Rightarrow\vec{F}=-\frac{\sqrt{3}\mu_0 I^2}{2\pi d}\hat{a}_y$$

$$\vec{F}=m\vec{a}\Rightarrow\vec{a}=-\frac{\sqrt{3}\mu_0 I^2}{2\pi md}\hat{a}_y$$

مثال۷: مطابق شکل یک حلقه مستطیلی در صفحه yz قرار دارد و جریان ثابت I از آن می‌گذرد. در حضور میدان مغناطیسی $\vec{B} = B_\circ \hat{a}_\varphi$ چه نیرو و گشتاور نیروی مغناطیسی بر حلقه وارد می‌شود؟



۱) $\vec{F} = IbB_\circ \hat{a}_\varphi \ , \ \vec{\tau} = IabB_\circ \hat{a}_z$

۲) $\vec{F} = \circ \ , \ \vec{\tau} = \circ$

۳) $\vec{F} = IbB_\circ \hat{a}_\varphi \ , \ \vec{\tau} = \circ$

۴) $\vec{F} = \circ \ , \ \vec{\tau} = IabB_\circ \hat{a}_z$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» گشتاور مغناطیسی حلقه $(\vec{m})$ از رابطه مقابل به دست می‌آید: $\vec{m} = IS\hat{a}_n = I(ab)\hat{a}_x$

بنابراین گشتاور نیروی مغناطیسی وارد بر حلقه چنین خواهد بود:

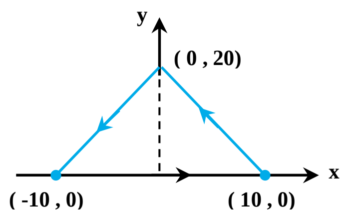
$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} = Iab\hat{a}_x \times B_\circ \hat{a}_\varphi \Rightarrow \vec{\tau} = IabB_\circ \hat{a}_x \times (-\sin\varphi \hat{a}_x + \cos\varphi \hat{a}_y) \Rightarrow \vec{\tau} = IabB_\circ \cos\varphi \hat{a}_z$$

در محل حلقه، $\varphi = \frac{\pi}{۲}$ و در نتیجه $\cos\varphi = \circ$ است. بنابراین داریم: $\vec{\tau} = \circ$

با توجه به ثابت بودن میدان $\vec{B}$ در سطح حلقه، نیروی مغناطیسی وارد بر اضلاع روبروی هم، یکدیگر را خنثی می‌کنند و نیروی کل وارد بر حلقه صفر است.

$$\vec{F} = \oint I d\vec{l} \times \vec{B} = \circ$$

مثال۸: جریان مستقیم $I = ۱\circ \ A$ از یک حلقه مثلثی شکل که در صفحه $x - y$ واقع است، عبور می‌کند. با فرض اینکه چگالی فلـوی مغناطیسـی $\vec{B} = \circ/۵\hat{a}_y (T)$ در محیط موجود باشد، گشتاور وارد بر حلقه چقدر است؟ مقادیر داده شده در شکل برحسب سانتی‌متر می‌باشند.



۱) $+\circ/۱\hat{a}_z N.m$

۲) $-\circ/۱\hat{a}_z N.m$

۳) $+\circ/۱\hat{a}_x N.m$

۴) $-\circ/۱\hat{a}_x N.m$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با استفاده از رابطه گشتاور نیرو داریم:

$\hat{a}_n$: بردار یکه عمود بر سطح حلقه

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \quad , \quad \vec{m} = IS\hat{a}_n$$

$$\vec{\tau} = (۱\circ \times ۲ \times ۱\circ^{-۲})\hat{a}_z \times (\circ/۵\hat{a}_y) = \circ/۱(-\hat{a}_x)$$

مثال۹: جریان I در یک حلقه مربعی شکل به ضلع a در جهت مثلثاتی جاری است. حلقه در صفحه xy قرار دارد و محور آن بـر محـور z منطبـق است و اضلاع آن موازی محورهای x و y است. در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = B_\circ(\hat{a}_x + \hat{a}_z)\frac{Wb}{m^۲}$ چه گشتاور نیرویی بر حلقه وارد می‌شود؟

۱) $\vec{T} = B_\circ Ia^۲\hat{a}_x \ N.m$

۲) $\vec{T} = \frac{۱}{۲}B_\circ Ia^۲\hat{a}_x \ N.m$

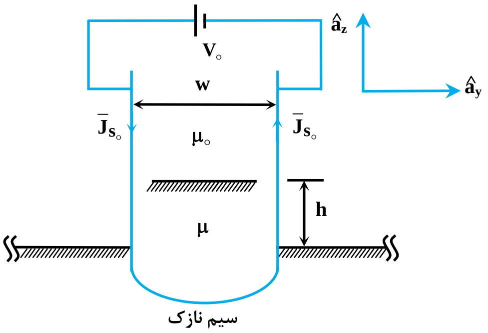
۳) $\vec{T} = \frac{۱}{۲}B_\circ Ia^۲\hat{a}_y \ N.m$

۴) $\vec{T} = B_\circ Ia^۲\hat{a}_y \ N.m$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا با استفاده از رابطه $\vec{m} = IS\hat{a}_n$ گشتاور حلقه را به دست می‌آوریم: $\vec{m} = a^۲ I \hat{a}_z$

گشتاور نیروی وارد بر حلقه برابر است با: $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} = a^۲ IB_\circ \hat{a}_y$

مثال۱۰: دو صفحه فلزی نازک خیلی بزرگ به موازات یکدیگر و به فاصلهٔ **w** از هم قرار دارند. این دو صفحه در یک طرف به منبع V_0 و در طرف دیگر به وسیله سیم نازکی به هم وصل گردیده‌اند به طوری که می‌توان با تقریب چگالی جریان سطحی روی صفحات فلزی را یکنواخت و برابر $\vec{J}_s = J_{s_0}\hat{a}_z\left(\frac{A}{m}\right)$ فرض کرد. این دو صفحه را به طور عمود داخل مایع عایقی با پرمابلیته μ کرده‌ایم. دیده می‌شود که مایع به ارتفاع **h** بین صفحات بالا می‌آید. اگر چگالی جرمی مایع برابر $d\left(\frac{kg}{m^3}\right)$ و شتاب ثقل برابر $g\left(\frac{m}{s^2}\right)$ باشد ارتفاع **h** را به دست آورید.



۱) $h = \frac{gd}{2}(\mu - \mu_0)J_{s_0}^2$

۲) $h = \frac{1}{2gd}(\mu - \mu_0)J_{s_0}^2$

۳) $h = \frac{gd}{2(\mu - \mu_0)}J_{s_0}^2$

۴) $h = \frac{2(\mu - \mu_0)gd}{J_{s_0}^2}$

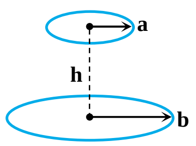
☑ **پاسخ :** گزینه «۲» میدان مغناطیسی ناشی از چگالی سطحی جریان‌های سمت راست و چپ به ترتیب برابر $\vec{H}_1 = \frac{\vec{J}_{s_0}}{2}\hat{a}_x$ و $\vec{H}_2 = \frac{\vec{J}_{s_0}}{2}\hat{a}_x$ می‌باشد. بنابراین در بین دو صفحه، میدان $\vec{H} = \vec{J}_{s_0}\hat{a}_x$ برقرار است. اگر V حجمی باشد که مایع آن را اشغال می‌کند، انرژی مغناطیسی ذخیره شده در آن حجم قبل (W_{m_1}) و بعد (W_{m_2}) از پر شدن از مایع، برابر است با:

$$W_{m_1} = \frac{1}{2}\mu_0\int_V |\vec{H}|^2\, dv = \frac{1}{2}\mu_0 J_{s_0}^2 V \qquad W_{m_2} = \frac{1}{2}\mu\int_V |\vec{H}|^2\, dv = \frac{1}{2}\mu J_{s_0}^2 V$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$mgh = W_{m_2} - W_{m_1} = \frac{1}{2}(\mu - \mu_0)J_{s_0}^2 V \Rightarrow (dV)gh = \frac{1}{2}(\mu - \mu_0)J_{s_0}^2 V \Rightarrow h = \frac{1}{2gd}(\mu - \mu_0)J_{s_0}^2$$

مثال۱۱: مطابق شکل، دو حلقه به شعاع‌های **a** و **b** $(a \ll b)$ در فاصله **h** از یکدیگر قرار دارند و حامل جریان **I** در خلاف جهت یکدیگر هستند. اگر حلقه پایینی روی زمین بوده و اندازه ضریب القای متقابل دو حلقه برابر $\frac{\mu_0\pi a^2 b^2}{2(b^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$ باشد، کدام رابطه میان **I** و جرم حلقه بالایی **m** وجود داشته باشد تا حلقه بالایی معلق بماند؟



۱) $I = \frac{h^2}{ab}\sqrt{\frac{mg(b^2+h^2)}{3\mu_0\pi h}}$

۲) $I = \frac{h^2}{ab}\sqrt{\frac{2mg(b^2+h^2)}{3\mu_0\pi h}}$

۳) $I = \frac{b^2+h^2}{ab}\sqrt{\frac{2mg(b^2+h^2)}{3\mu_0\pi h}}$

۴) $I = \frac{b^2+h^2}{ab}\sqrt{\frac{2mg(b^2+h^2)}{3\mu_0\pi h}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از روابط ارائه شده خواهیم داشت:

$$|\vec{F}_m| = |\vec{\nabla}W_m| = |I_1 I_2 \vec{\nabla}L_{12}| = I_1 I_2 \left|\frac{d}{dz}\left[\frac{\mu_0\pi a^2 b^2}{2(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\right|$$

$$|\vec{F}_m| = \frac{3}{2}I_1 I_2 \mu_0\pi a^2 b^2 \frac{h}{(b^2+h^2)^{\frac{5}{2}}} \xrightarrow{I_1=I_2=I} |\vec{F}_m| = \frac{3}{2}I^2\mu_0\pi a^2 b^2 \frac{h}{(b^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}$$

برای اینکه حلقه بالایی معلق بماند، باید داشته باشیم:

$$|\vec{F}_m| = |\vec{F}_g| \Rightarrow \frac{3}{2}I^2\mu_0\pi a^2 b^2 \frac{h}{(b^2+h^2)^{\frac{5}{2}}} = mg \Rightarrow I = \frac{b^2+h^2}{ab}\sqrt{\frac{2mg\sqrt{b^2+h^2}}{3\mu_0\pi h}}$$

مثال ۱۲: میلهٔ آهنربایی به طول $L = 100\,mm$ و قطر $2a = 15\,mm$ هم‌محور با محور zها مفروض است. گشتاور دوقطبی مغناطیسی کل این میله $\vec{m} = 800\hat{a}_z (A-m^2)$ است. انرژی کل مغناطیسی ذخیره شده داخل میله را به‌دست آورید. میله به اندازهٔ کافی بلند فرض می‌شود و به طور یکنواخت مغناطیس می‌باشد، به طوری که شدت میدان مغناطیسی داخل آن را ثابت فرض می‌نماییم. $(\mu_\circ = 4\pi\times10^{-7}\,\frac{H}{m})$

۱) $5/7\ (kJ)$ ۲) $11/4\ (kJ)$ ۳) $22/8\ (kJ)$ ۴) $34/2\ (kJ)$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا باید بردار مغناطیس‌شدگی را به دست آوریم:

$$\vec{m} = \vec{M}V \Rightarrow \vec{M} = \frac{\vec{m}}{V} = \frac{800\hat{a}_z}{(\pi a^2)L} = \frac{8\times10^9}{\pi\times(7/5)^2}\hat{a}_z$$

با استفاده از بردار مغناطیس‌شدگی، چگالی جریان مقید سطحی برابر است با:

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M}\times\hat{a}_r = \frac{8\times10^9}{\pi\times(7/5)^2}\hat{a}_\varphi$$

بنابراین میدان مغناطیسی درون میله همانند میدان مغناطیسی ناشی از یک سیملوله بلند بوده و لذا خواهیم داشت:

$$|\vec{B}| = \mu_\circ|\vec{J}_{ms}| \Rightarrow W_m = \frac{1}{2}\mu_\circ|\vec{J}_{ms}|^2(\pi a^2 L) = 22/8\ kj$$

مثال ۱۳: گشتاور مغناطیسی ذره‌ای با بار q که تحت تاثیر میدان مغناطیسی ثابت $\vec{B}$ با سرعت v و عمود بر جهت میدان حرکت می‌کند، برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}mv^2\frac{\vec{B}}{B^2}$ ۲) $mv^2\frac{\vec{B}}{B^2}$ ۳) $-mv^2\frac{\vec{B}}{B^2}$ ۴) $-\frac{1}{2}mv^2\frac{\vec{B}}{B^2}$

پاسخ: گزینه «۱» طبق قانون نیروی لورنتس داریم:

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = qvB$$

همان‌طور که اشاره شد، وقتی ذره باردار عمود بر جهت میدان مغناطیسی حرکت کند، حول خطوط میدان می‌چرخد و در واقع حلقه‌ای از جریان درست می‌کند. طبق قانون دوم نیوتن برای حرکت دایره‌ای می‌توان نوشت:

$$|\vec{F}| = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = qvB \Rightarrow r = (\frac{mv}{qB}) \xrightarrow{v=r\omega} \omega = \frac{qB}{m}$$

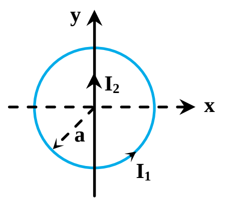
برای شدت جریان هم رابطه‌ی مقابل را داریم:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{q}{T} \Rightarrow I = q\frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow I = \frac{q^2B}{2\pi m}$$

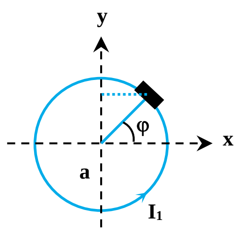
با توجه به شدت جریان به دست آمده، گشتاور دو قطبی مغناطیسی برابر است با:

$$|\vec{m}| = |I\vec{S}| = \frac{q}{2\pi}\omega(\pi r^2) = \frac{q\omega}{2\pi}\pi\frac{m^2v^2}{q^2B^2} \Rightarrow |\vec{m}| = \frac{q^2B}{2\pi m}\pi\frac{m^2v^2}{q^2B^2} \Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{2}\frac{mv^2}{B}\hat{B} = \frac{1}{2}\frac{mv^2}{B^2}\vec{B}$$

مثال ۱۴: در صفحه xy حلقه‌ای به شعاع a و مرکز مبدأ مختصات که حامل جریان I_1 در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد، وجود دارد و محور y حامل جریان I_2 در جهت $\hat{a}_y$ است و دو جریان از هم مستقل‌اند. نیرویی که جریان I_2 به حلقه وارد می‌کند کدام است؟



۱) $\mu_\circ I_1 I_2\,\hat{a}_x$
۲) $-\mu_\circ I_1 I_2\,\hat{a}_z$
۳) $\mu_\circ I_1 I_2\,\hat{a}_y$
۴) $-\mu_\circ I_1 I_2\,\hat{a}_x$



پاسخ : گزینه «۴» با توجه به اینکه میدان مغناطیسی ناشی از جریان I_2 ثابت نیست، نیروی وارد بر حلقه نمی‌تواند برابر با صفر شود (جهت میدان مغناطیسی ناشی از جریان I_2 در نیمه راست و چپ حلقه متفاوت است)، از طرفی برای نیمه راست حلقه داریم:

$$d\vec{F} = I_1 d\vec{l}\times\vec{B}_2 = I_1(ad\varphi\,\hat{a}_\varphi)\times\left[\frac{\mu_\circ I_2}{2\pi a\cos\varphi}(-\hat{a}_z)\right]$$

برای نیمه چپ حلقه هم عبارتی مشابه $d\vec{F}$ به دست آمده خواهیم داشت، زیرا اگرچه میدان ناشی از I_2 در جهت $+\hat{a}_z$ است اما $\cos\varphi$ منفی است.

حال با انتگرال گرفتن از رابطه بالا روی حلقه داریم:

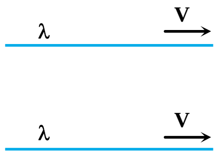
$$\vec{F} = \int d\vec{F} = -\frac{\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi}\int_\circ^{2\pi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}\hat{a}_r \Rightarrow \vec{F} = \frac{-\mu_\circ I_1 I_2}{2\pi}\left[\int_\circ^{2\pi}d\varphi\,\hat{a}_x + \int_\circ^{2\pi}tg\varphi\,d\varphi\,\hat{a}_y\right] = -\mu_\circ I_1 I_2\,\hat{a}_x$$

آزمون فصل پانزدهم

۱ـ نیروی جاذبه مغناطیسی بین دو نیمکره شمالی و جنوبی یک پوسته کروی باردار به شعاع R که حامل چگالی بار سطحی یکنواخت σ بوده و با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z ها می‌چرخد کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}\mu_\circ\sigma^۲\omega R^۴$ ۲) $\frac{\pi}{۸}\mu_\circ\sigma^۲\omega R^۴$ ۳) $\frac{\pi}{۴}\mu_\circ\sigma^۲\omega^۲ R^۴$ ۴) $I_۱$

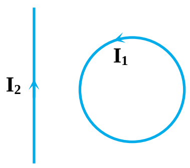
۲ـ بارهای خطی با چگالی λ با سرعت V از دو سیم نامتناهی موازی که به فاصله d از یکدیگر واقع‌اند، می‌گذرد. سرعت V چقدر باشد تا فاصله دو سیم همچنان d باقی بماند.



۱) $V=\frac{۱}{\sqrt{\mu_\circ\varepsilon_\circ}}$ ۲) $V=\sqrt{\mu_\circ\varepsilon_\circ}$

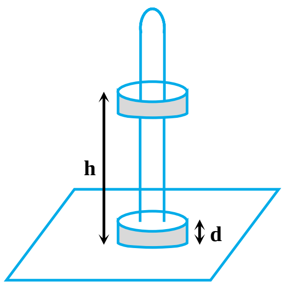
۳) $V=\frac{۱}{\mu_\circ\varepsilon_\circ}$ ۴) $V=\mu_\circ\varepsilon_\circ$

۳ـ حلقه بسته‌ای به شکل دلخواه نزدیک یک سیم بسیار بلند و مستقیم قرار دارد. جریان‌های الکتریکی $I_۱$ و $I_۲$ به ترتیب از حلقه و سیم می‌گذرند. کدام گزینه در مورد نیروی وارد از طرف سیم مستقیم به حلقه، درست است؟ (سیم و حلقه در صفحه yz قرار دارند)



۱) این نیرو برابر صفر است.
۲) راستای این نیرو در راستای محور x است.
۳) راستای این نیرو در راستای محور y ها است.
۴) این نیرو در صفحه yz قرار دارد. اما راستای آن بستگی به شکل حلقه دارد.

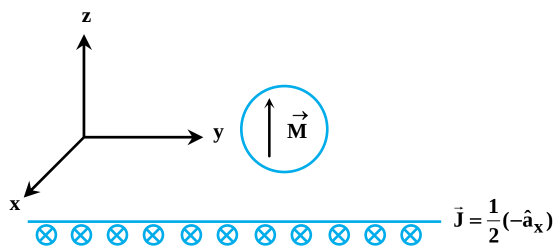
۴ـ دو قرص دایره‌ای مشابه به شعاع R و ضخامت d از ماده مغناطیسی دائم با بردار مغناطیس شدگی $M=M_\circ\hat{z}$ تشکیل شده‌اند. (محور هر دو قرص در امتداد محور z می‌باشد.) این دو قرص مطابق شکل روی یک میله قائم بدون اصطکاک می‌توانند حرکت کنند. جرم هر کدام برابر m می‌باشد. در حال تعادل قرص بالائی در چه ارتفاعی قرار می‌گیرد؟



۱) $h=\sqrt[۴]{\frac{۳\mu_\circ M_\circ^۲ d^۲R^۲}{۲mg}}$ ۲) $h=\sqrt[۴]{\frac{۳\mu_\circ M_\circ^۲ d^۲\pi}{۲mg}}$

۳) $h=\sqrt[۴]{\frac{۳\mu_\circ M_\circ^۲}{۲\pi mg}}$ ۴) $h=\sqrt[۴]{\frac{۳\mu_\circ M_\circ^۲ d^۲R^۲}{۲\pi mg}}$

۵ـ صفحه $z=\circ$ حامل جریان سطحی با چگالی $\vec{J}=\frac{۱}{۲}(-\hat{a}_x)$ می‌باشد. کره مغناطیس شده دائم با بردار $\vec{M}=۳\hat{a}_z$ بالای صفحه $z=\circ$ و در فاصله d از آن قرار دارد. گشتاور مغناطیسی وارد بر کره کدام است؟ (شعاع کره ۱ متر می‌باشد)

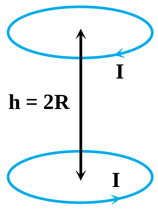


۱) $-\pi\hat{a}_x$
۲) $\pi\hat{a}_x$
۳) $۲\pi\hat{a}_x$
۴) $-۲\pi\hat{a}_x$

۶ـ بار الکتریکی q در صفحه xy حول محور z با سرعت V روی مسیر دایره‌ای به شعاع r در جهت خلاف عقربه‌های ساعت در میدان مغناطیسی $\vec{B}=\frac{۱}{۲\pi r}\hat{a}_\varphi$ دوران می‌کند. چه گشتاوری بر دو قطبی مغناطیسی حاصل وارد می‌شود؟

۱) $\circ$ ۲) $\frac{-qV}{۴\pi}\hat{a}_r$ ۳) $\frac{-qV}{۴\pi}r\hat{a}_r$ ۴) $\frac{-qV}{۴\pi r^۲}\hat{a}_\varphi$

۷ـ دو حلقه به شعاع R، هر یک حامل جریان I در جهت‌های مخالف یکدیگر می‌باشند. صفحات دو حلقه به موازات هم واقع‌اند. در ابتدا فاصله مراکز دو حلقه از هم برابر $2R$ می‌باشد. کار لازم برای آنکه فاصله مراکز دو حلقه را به نصف مقدار اولیه کاهش دهیم تقریباً کدام است؟



۱) $۰/۱۲\mu\pi RI^۲$
۲) $۰/۰۸\mu\pi RI^۲$
۳) $۰/۳۲\mu\pi RI^۲$
۴) $۰/۱۸\mu\pi RI^۲$

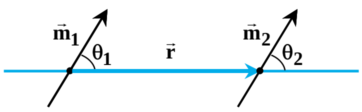
۸ـ یک الکترون با جرم m و بار e با فرکانس زاویه‌ای $\omega_\circ$ حول مسیر دایره‌ای به شعاع r در صفحه دوران می‌کند. سپس میدان مغناطیسی خارجی یکنواخت $\vec{B}$ در امتداد محور دوران، عمود بر صفحه و در جهت خلاف گشتاور مغناطیسی الکترون اعمال می‌شود و در نتیجه فرکانس زاویه‌ای به ω تغییر می‌کند. ω با $\omega_\circ$ چه رابطه‌ای دارد؟

۱) $\omega = \frac{m}{eB}(\omega_\circ^۲ - \omega^۲)$
۲) $\omega_\circ = \frac{m}{eB}(\omega^۲ - \omega_\circ^۲)$
۳) $\omega = \frac{m}{eB}(\omega^۲ - \omega_\circ^۲)$
۴) $\omega_\circ = \frac{m}{eB}(\omega_\circ^۲ + \omega^۲)$

۹ـ فرض کنید یک بار متحرک با جرم m و بار الکتریکی q_e در میدان دوقطبی فرضی مغناطیسی ساکن q_m قرار دارد، به طوری که $\vec{B} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\frac{q_m}{r^۲}\hat{a}_r$ باشد. در این صورت اگر $\vec{V}$ سرعت بار q_e باشد، آنگاه $\frac{d|\vec{V}|}{dt}$ برابر است با:

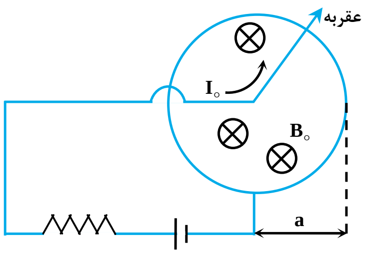
۱) صفر
۲) $\frac{\mu_\circ}{۴\pi}\frac{q_e q_m}{mr^۳}|\vec{V}\times\vec{r}|$
۳) $\frac{\mu_\circ}{۴\pi}\frac{q_e q_m}{mr^۳}$
۴) $\frac{\mu_\circ}{۴\pi}\frac{q_e q_m}{mr^۲}|\vec{V}\times\vec{r}|$

۱۰ـ دو دوقطبی مغناطیسی به صورت مقابل قرار گرفته‌اند. انرژی متقابل بین آن‌ها برابر است با:



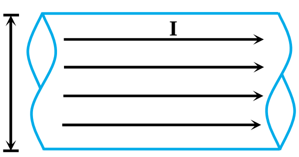
۱) $W = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\frac{۱}{r^۳}[\vec{m}_۱.\vec{m}_۲ - ۲(\vec{m}_۱.\hat{r})(\vec{m}_۲.\hat{r})]$
۲) $W = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\frac{۱}{r^۳}[\vec{m}_۱.\vec{m}_۲ - ۳(\vec{m}_۱.\hat{r})(\vec{m}_۲.\hat{r})]$
۳) $W = \frac{\mu_\circ}{۲\pi}\frac{۱}{r^۳}[\vec{m}_۱.\vec{m}_۲ - ۲(\vec{m}_۱.\hat{r})(\vec{m}_۲.\hat{r})]$
۴) $W = \frac{\mu_\circ}{۲\pi}\frac{۱}{r^۳}[\vec{m}_۱.\vec{m}_۲ - ۳(\vec{m}_۱.\hat{r})(\vec{m}_۲.\hat{r})]$

۱۱ـ در شکل زیر عقربه با حلقه تماس الکتریکی دارد و هر دو از جنس رسانای کامل هستند. جریان $I_\circ$ در جهت نشان داده شده از عقربه می‌گذرد و در این فضا میدان مغناطیسی خارجی $B_\circ$ به طرف داخل صفحه کاغذ برقرار شده است. مقدار و جهت بردار گشتاور نیرو $(\vec{T})$ مؤثر بر عقربه به مرجع مرکز دایره عبارت است از:



۱) $\frac{۱}{۲}I_\circ B_\circ a^۲$ در جهت عقربه‌های ساعت
۲) $I_\circ B_\circ a$ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت
۳) $\frac{۱}{۲}I_\circ B_\circ a^۲$ به طرف خارج صفحه کاغذ
۴) $I_\circ B_\circ a$ به طرف خارج صفحه کاغذ

۱۲ـ از یک لوله فلزی با شعاع a و طول بی‌نهایت جریان I با توزیع یکنواخت می‌گذرد. ضخامت دیواره لوله ناچیز است. مقدار و جهت فشار مؤثر بر دیواره لوله برابر است با:



۱) $\frac{\mu_\circ I^۲}{۴\pi^۲ a^۲}$ به طرف خارج
۲) $\frac{\mu_\circ I}{۲\pi a^۴}$ به طرف خارج
۳) $\frac{\mu_\circ I}{۲\pi a^۴}$ به طرف خارج
۴) $\frac{\mu_\circ I^۲}{۴\pi^۲ a^۲}$ به طرف داخل

۱۳ـ الکترونی در یک میدان مغناطیسی یکنواخت بر روی محیط دایره‌ای در صفحه $z=0$ حرکت می‌کند. با فرض آنکه $\vec{B}=10^{-3}\,\hat{a}_z\,wb/m^2$ و سرعت اولیه الکترون در $t=0$ برابر با $\vec{v}_0=2000\,\hat{a}_x\,m/s$ باشد، مطلوب است محاسبه نیروی $|\vec{F}|$ که در زمان $t=6ns$ بر الکترون وارد می‌شود.

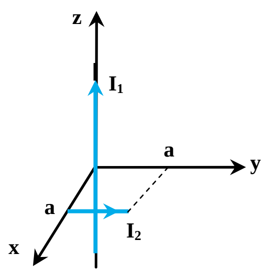
(الکترون $e=-1/6\times10^{-19}\,c$) (الکترون $m=9/1\times10^{-31}\,kg$)

۱) $2/4\times10^{-19}\,N$
۲) $3/2\times10^{-19}\,N$
۳) $3/8\times10^{-19}\,N$
۴) $1/2\times10^{-19}\,N$

۱۴ـ یک سیم نازک نامحدود با جریان ثابت I به طور موازی و هم‌جهت با یک جریان سطحی یکنواخت نامحدود $K(\frac{A}{m})$ و به فاصله d از آن در خلأ قرار گرفته است. نیروی وارد بر واحد طول سیم کدام عبارت است؟

۱) $K\mu_0 I$ و دافعه
۲) $K\mu_0 I$ و جاذبه
۳) $\frac{1}{2}K\mu_0 I$ و دافعه
۴) $\frac{1}{2}K\mu_0 I$ و جاذبه

۱۵ـ یک سیم نامتناهی حامل جریان I_1 روی محور z و یک قطعه سیم حامل جریان I_2 در $z=0$، $x=a$ و $0<y<a$ با جهت‌های نشان داده شده مفروض هستند. نیرویی که سیم نامتناهی به قطعه سیم وارد می‌کند، چقدر است؟



۱) $F_{21}=\mu_0\frac{I_1I_2}{4\pi}\ln 2\,\hat{a}_z$
۲) $F_{21}=-\mu_0\frac{I_1I_2}{4\pi}\ln 2\,\hat{a}_z$
۳) $F_{21}=\mu_0\frac{I_1I_2}{2\pi}\ln 2\,\hat{a}_z$
۴) $F_{21}=-\mu_0\frac{I_1I_2}{2\pi}\ln 2\,\hat{a}_z$

پاسخنامه آزمون‌ها

فصل اول: آنالیز برداری

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۱»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۱»
۱۶ـ گزینه «۳»	۱۷ـ گزینه «۱»	۱۸ـ گزینه «۴»	۱۹ـ گزینه «۳»	۲۰ـ گزینه «۱»
۲۱ـ گزینه «۱»	۲۲ـ گزینه «۳»	۲۳ـ گزینه «۲»	۲۴ـ گزینه «۲»	۲۵ـ گزینه «۲»
۲۶ـ گزینه «۱»	۲۷ـ گزینه «۴»	۲۸ـ گزینه «۱»	۲۹ـ گزینه «۳»	۳۰ـ گزینه «۴»

فصل دوم: میدان الکتریکی ساکن در فضای آزاد یا خلأ

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۴»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۱»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۴»	۱۸ـ گزینه «۱»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۱»
۲۱ـ گزینه «۳»	۲۲ـ گزینه «۳»	۲۳ـ گزینه «۱»	۲۴ـ گزینه «۱»	۲۵ـ گزینه «۱»
۲۶ـ گزینه «۱»	۲۷ـ گزینه «۳»	۲۸ـ گزینه «۱»	۲۹ـ گزینه «۴»	۳۰ـ گزینه «۴»
۳۱ـ گزینه «۲»	۳۲ـ گزینه «۲»	۳۳ـ گزینه «۱»	۳۴ـ گزینه «۴»	۳۵ـ گزینه «۲»
۳۶ـ گزینه «۳»	۳۷ـ گزینه «۳»	۳۸ـ گزینه «۲»	۳۹ـ گزینه «۱»	۴۰ـ گزینه «۲»

فصل سوم: پتانسیل الکتریکی

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۱»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۴»	۱۸ـ گزینه «۳»	۱۹ـ گزینه «۳»	۲۰ـ گزینه «۱»

فصل چهارم: الکترواستاتیک عایق‌ها و هادی‌ها

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۳»

فصل پنجم: خازن‌ها

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۳»

فصل ششم: معادلهٔ پواسون و لاپلاس

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۱»

فصل هفتم: روش تصاویر

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۳»	۱۳ـ گزینه «۴»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۱»

فصل هشتم: جریان‌های الکتریکی دائم

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۱»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۲»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۳»

فصل نهم: میدان مغناطیسی ساکن

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۱»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزنه «۱»	۱۳ـ گزینه «۴»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۲»

فصل دهم: قانون آمپر

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۴»

فصل یازدهم: پتانسیل مغناطیسی برداری و پتانسیل مغناطیسی اسکالر

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۴»

فصل دوازدهم: مواد مغناطیسی ـ مغناطیس‌شدگی

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۲»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۴»

فصل سیزدهم: شرایط مرزی در مغناطیس ساکن

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۲»

فصل چهاردهم: القای الکترومغناطیسی

۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۴»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۴»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۳»

فصل پانزدهم: انرژی و نیروی مغناطیسی

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۲»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۱»