مدرسان شریف

فصل اول

«مقدمات منطق ریاضی»

مقدمه

به مجموعه‌ای از قواعد و روش‌هایی که به کمک آن‌ها می‌توانیم درستی یا نادرستی یک استدلال یا بحث را تعیین کرده و آن‌ها را از یکدیگر جدا کنیم، **منطق** می‌گوییم. منطق ریاضی، شاخه‌ای از ریاضیات است که به ارتباط بین ریاضی و منطق می‌پردازد. نظریه منطق در فرهنگ‌های بسیاری در طول تاریخ، از جمله چین، هند، یونان و جهان اسلام توسعه یافت. در قرن هجده در اروپا، تلاش بسیاری برای ارائه عملیات منطق ریاضی از طریق نمادین یا جبری توسط ریاضیدانان فلسفی از جمله لایب نیتز و لامبرت انجام شد. بنابراین ریشه‌های پیدایش منطق ریاضی، به کارهای آن‌ها می‌رسد. بعد از آن‌ها ریاضیدان بسیاری ازجمله، جوزپه پئانو، آگوستوس دمورگان، جرج بول، گوتلوب فرگه، برتراند راسل، داوید هیلبرت و دیگران در جهت پیشبرد این علم گام برداشتند. پژوهش و بررسی علمی درباره منطق ریاضی در پی پرسش‌های جدیدی بود که در ریاضیات مطرح شد. به عنوان نمونه، فرگه می‌کوشید تا ریاضیات را بر پایه‌ی اصول برآمده از منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها قرار دهد. از روش‌ها و نتایج به دست آمده در منطق برای اثبات قضایا استفاده می‌شود. این روش‌ها در بسیاری از شاخه‌های ریاضی مانند جبر، هندسه و توپولوژی نیز کاربرد دارد. در این فصل، ابتدا به تعریف گزاره و انواع آن‌ها، رابطهای گزاره‌ای بین گزاره‌ها، بیان قضایای گزاره‌ای و سورهای منطقی می‌پردازیم و سپس روش‌های مختلف اثبات یک گزاره را بیان می‌کنیم.

گزاره

یکی از اساسی‌ترین مفاهیم و ابزار شروع کار در منطق ریاضی، **گزاره** است. گزاره جمله‌ای خبری است که باید دقیقاً درست یا نادرست باشد. به عبارتی نمی‌تواند هر دو حالت را داشته باشد و حتی ممکن است درستی یا نادرستی گزاره، برای ما واضح و مشخص نباشد. بنابراین لازم نیست درستی یا نادرستی گزاره را بدانیم، بلکه تنها دانستن این که گزاره فقط یکی از این دو حالت را دارد، کافی است. اما منظور از درستی یا نادرستی گزاره چیست؟ منظور از درستی گزاره، مطابقت گزاره با واقعیت و منظور از نادرستی گزاره، عدم مطابقت آن با واقعیت است. به درستی یا نادرستی یک گزاره، **ارزش** آن گزاره می‌گوییم. هر گزاره‌ی درست را با «T» (حرف اول کلمه True، به معنی درست است) و هر گزاره غلط را با «F» (حرف اول کلمه False، به معنی نادرست است) نشان می‌دهیم. لازم به ذکر است که جملات عاطفی، امری و پرسشی، نمی‌توانند یک گزاره باشند، چرا که نمی‌توان بر روی آن‌ها ارزش درستی یا نادرستی قرار داد و بررسی ارزش آن‌ها نیز بی‌معنا است.

مثال ۱: جمله‌ی «انتخابات ریاست جمهوری ایران در سال ۱۳۹۲ برگزار شد.» گزاره‌ای درست و جمله‌ی «کلمه‌ی انگلیسی dog از چهار حرف تشکیل شده است.» گزاره‌ای نادرست است. حال دو جمله‌ی «اولین روز سال ۱۳۹۲ هجری شمسی، شنبه بود.» و «بیست و ششمین رقم اعشاری $\sqrt{7}$، صفر است.» در نظر بگیرید. تعیین درستی یا نادرستی این جمله‌ها، نیاز به محاسباتی دارد، اما این گزاره‌ها یا درست هستند یا نادرست، پس از یکی، از این دو حالت خارج نیستند.

در جمله‌ی «عدد $2^9 + 2$ یک عدد اول است.» نمی‌دانیم که این عدد اول است یا نه، اما می‌دانیم که هر عدد کامل بزرگتر از ۱ یا اول است یا نه، پس این جمله، یک گزاره است که دارای ارزش درستی یا نادرستی است (نه هر دو) که با انجام محاسبات ارزش آن تعیین می‌شود. اما در برخی از گزاره‌ها تعیین ارزش آن‌ها امکان‌پذیر نمی‌باشد. جمله‌ی «زکریای رازی، الکل را در ۱۲۸امین روز از سال ۲۷۵ هجری قمری کشف کرد.» گزاره‌ای درست یا نادرست است اما ارزش آن، برای ما معلوم نیست و مشخص کردن ارزش آن، غیرممکن است.

فصل دوم

«مجموعه‌ها»

مقدمه

مجموعه‌ها نقش بسیار مهمی را در همه‌ی شاخه‌های ریاضی بازی می‌کنند و می‌توان گفت هیچ شاخه‌ای از ریاضیات نیست که بدون استفاده از مجموعه‌ها ارائه شده باشد. مفاهیم ریاضی اعم از اعداد، توابع و غیره بر اساس مجموعه‌ها قابل تعریف هستند. مطالعه‌ی نظریه مجموعه‌ها توسط جرج کانتور و ریچارد ددکیند در قرن ۱۹ آغاز شد. این نظریه در ابتدا به صورت شهودی گسترش یافت اما با گسترش هر چه بیشتر آن این سوال اساسی پیش آمد که مجموعه چیست؟ و چه چیز را می‌توان به عنوان مجموعه در نظر گرفت؟

مفهوم مجموعه از مفاهیم تعریف نشدنی در ریاضیات است ولی درک و فهم آن بسیار ساده است. بنابراین سعی ما بر این نیست که تعریف دقیقی از مجموعه ارائه دهیم بلکه توصیفی که در این کتاب ارائه می‌دهیم توافقی است که ریاضیدانان برای تعریف مجموعه‌ها با هم داشته‌اند. در این فصل، ابتدا به توصیف مجموعه‌ها، روش‌های مختلف نمایش مجموعه‌ها، انواع مجموعه‌ها، تعریف تساوی مجموعه‌ها، زیرمجموعه‌ها، مجموعه‌های معادل یا هم ارز و مجموعه‌ی توانی می‌پردازیم و سپس عملیات روی مجموعه‌ها را شرح می‌دهیم.

مجموعه

مجموعه، هر گروه یا دسته‌ی مشخص از اشیای دو به دو متمایز می‌باشد. اشیای تشکیل‌دهنده‌ی یک مجموعه باید کاملاً مشخص باشند و وقتی می‌گوییم «شیء به مجموعه‌ای تعلق دارد یا نه»، هیچ ابهامی نداشته باشیم و به طور قاطع بگوییم این شی به مجموعه تعلق دارد یا این شی به مجموعه تعلق ندارد. این تعریف از یک مجموعه، برای اولین بار توسط یک ریاضیدان آلمانی به نام جرج کانتور در سال ۱۸۹۵ ارائه شد و نظریه‌ی مجموعه‌های متکی بر دیدگاه او را «**نظریه طبیعی مجموعه‌ها**» می‌نامند.

به این سوال توجه کنید، آیا دسته‌ی افراد کوتاه قد یا دسته‌ی اعداد خیلی بزرگ را می‌توانیم مجموعه در نظر بگیریم؟ پاسخ به این سوال منفی است، زیرا در مورد دسته‌ی افراد کوتاه قد، بلندی و کوتاهی قد نسبی است و به طور مطلق نمی‌توانیم درباره‌ی بلندی و کوتاهی قد افراد صحبت کنیم و بگوییم علی کوتاه است زیرا ممکن است علی به نظر فردی قد بلند و به نظر فرد دیگر کوتاه قد باشد. بنابراین، افرادی که به این مجموعه تعلق دارند، به طور واضح مشخص نیستند.

همچنین در مورد دسته‌ی اعداد خیلی بزرگ نیز همین مشکل وجود دارد. برای مثال ممکن است عدد ۱۰۰۰۰۰۰ از نظر برخی، عدد خیلی بزرگ و از نظر برخی دیگر، عدد بزرگی نباشد. بنابراین، اعداد تشکیل‌دهنده‌ی این دسته کاملاً مشخص نیستند و این دسته نیز تشکیل مجموعه نمی‌دهد. اما دسته‌ی اعداد زوج یک رقمی، تشکیل یک مجموعه می‌دهند که اعضای این مجموعه یعنی ۲، ۴، ۶ و ۸ بدون هیچ ابهامی، کاملاً مشخص است و وقتی عدد ۱۰ را در نظر می‌گیریم به طور قطع می‌توانیم بگوییم، این عدد عضو این مجموعه نیست.

اگر شیئی در یک مجموعه قرار داشت، آن شی را **عضو** مجموعه می‌گوییم. به عبارتی اشیای تشکیل‌دهنده‌ی یک مجموعه اعضای آن مجموعه می‌باشند. معمولاً مجموعه‌ها را با حروف بزرگ لاتین مانند A، B، C، ... و اعضای مجموعه را با حروف کوچک لاتین مانند a، b، c، ... نمایش می‌دهیم. برای این‌که نشان دهیم عضوی مانند a به مجموعه‌ای مانند A تعلق دارد، می‌نویسیم $a \in A$ و این‌طور می‌خوانیم «a به A تعلق دارد.» یا «a عضو A است.» و در غیر این صورت، اگر a در مجموعه‌ی A نباشد، می‌نویسیم $a \notin A$ و این‌طور می‌خوانیم «a به A تعلق ندارد.» یا «a عضو A نیست.». لازم به ذکر است که معمولاً اعضای یک مجموعه را بین دو آکولاد قرار می‌دهند.

مدرسان شریف

فصل سوم

«رابطه»

مقدمه

از مفهوم رابطه، بارها و بارها در زندگی روزمره استفاده کرده‌ایم، به عنوان مثال، رابطه‌ی بین دو انسان، رابطه‌ی بین دو شی و ... . وقتی می‌گوییم «احمد پسر علی است.» احمد و علی با هم در ارتباط هستند اما شرط یا رابطه‌ای که باعث این ارتباط می‌شود چیست؟ پسر بودن یک رابطه است که بین احمد و علی ارتباط برقرار می‌کند. رابطه یکی از مهمترین مفاهیم در ریاضیات است و کاربردهای فراوانی در آن دارد. برای مثال «A زیرمجموعه‌ای از B است.» یا «a بزرگتر از b است.». در مثال‌هایی که دیدیم، همواره از دو شی، «احمد و علی»، «A و B» و «a و b»، که با هم در ارتباط هستند صحبت می‌شود که این دو شی ممکن است تحت شرط یا رابطه‌ای مانند «پسر بودن»، «زیرمجموعه بودن» و «بزرگتر بودن» با هم ارتباط داشته باشند. ترتیب ذکر کردن این دو شی حائز اهمیت است. برای رعایت کردن این ترتیب از زوج مرتب استفاده می‌کنیم. تعویض مولفه‌های زوج مرتب، معنا را تغییر می‌دهد. برای مثال، تعویض مولفه‌های زوج مرتب (علی، احمد)، باعث می‌شود که رابطه، دیگر برقرار نباشد، زیرا با این تعویض مولفه‌ها، مفهوم به صورت « علی پسر احمد است.» در می‌آید. پس یک رابطه، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتبی است که بین مولفه‌های هر زوج مرتب، رابطهٔ معینی وجود داشته باشد که رابطه‌ی بین مولفه‌ها را «**ضابطه**» می‌گوییم. در این فصل، پس از تعریف دقیق رابطه، دامنه و برد یک رابطه، وارون یک رابطه، تحدید یک رابطه، ترکیب رابطه، ویژگی‌های رابطه (انعکاسی، غیرانعکاسی، متقارن، پادمتقارن، نامتقارن، متعدی، نامتعدی، هم ارزی، ترتیب جزئی و ترتیب کلی) را به طور مفصل بحث و بررسی می‌کنیم.

تعریف رابطه

اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشند، به هر زیرمجموعه از حاصلضرب دکارتی $A \times B$، یک **رابطه** از مجموعه‌ی A در مجموعه‌ی B می‌گوییم. رابطه‌ها را نیز مانند مجموعه‌ها با حروف بزرگ انگلیسی نام‌گذاری می‌کنیم. یک رابطه را معمولاً با حرف اول کلمه «Relation» R نمایش می‌دهیم. در صورتی‌که مجموعه‌های A و B برابر باشند، گوییم: «R یک رابطه روی A است.».

مثال ۱: اگر $A=\{a,b\}$ و $B=\{c\}$، آنگاه تمام رابطه‌های موجود از A در B را به دست آورید.

☑ **پاسخ:** ابتدا $A\times B$ را تشکیل می‌دهیم $A\times B=\{(a,c),(b,c)\}$. حال برای به دست آوردن تمام رابطه‌ها، تمام زیرمجموعه‌های $A\times B$ را تشکیل می‌دهیم که این زیرمجموعه‌ها (رابطه‌ها) به صورت زیر هستند:

$$R_1=\{\ \},\ R_2=\{(a,c)\},\ R_3=\{(b,c)\},\ R_4=\{(a,c),(b,c)\}$$

اگر R رابطه‌ای بین A و B باشد، می‌گوییم $a\in A$ و $b\in B$ توسط R در رابطه هستند، هرگاه $(a,b)\in R$. در این صورت می‌گوییم « a با b رابطه‌ی R دارد.» یا «a با رابطه‌ی R به b مربوط می‌شود.» و آن را به صورت aRb نمایش می‌دهیم. همچنین اگر $(a,b)\notin R$، می‌گوییم « a با b رابطه‌ی R ندارد.» یا «a با رابطه‌ی R به b مربوط نیست.» و آن را به صورت $a\not R b$ نمایش می‌دهیم.

مدرسان شریف

فصل چهارم

«تابع»

مقدمه

یکی از موضوعات مهم و اساسی، نه تنها در ریاضیات و علوم کامپیوتر، بلکه در بسیاری از علوم مختلف، **تابع** می‌باشد. به عنوان مثالی از مفهوم تابع، اگر یک اتومبیل را در نظر بگیرید، هر چه مسافت بیشتری را با آن اتومبیل طی کنید، سوخت بیشتری مصرف خواهید کرد. پس مسافت طی شده تابعی از میزان سوخت مصرفی است. ایده‌ی به کارگیری تابع در قرن هفدهم ایجاد شد. در طول این زمان، رنه دکارت در کتاب هندسه اش (۱۶۳۷)، از این مفهوم برای توصیف بسیاری از روابط ریاضی استفاده کرد. اصطلاح تابع توسط گوتفرید لایب نیتز در سال ۱۶۹۴ معرفی شد که امروزه به توابعی که توسط لایب‌نیتز تعریف شدند، توابع مشتق‌پذیر گفته می‌شود. سپس ایده تابع توسط لئونارد اویلر در قرن هجدهم رسمیت یافت که او نماد $Y=f(X)$ را برای یک تابع معرفی کرد.

در انتهای قرن نوزدهم بود که دیریکله و لوباچوسکی به طور مستقل و همزمان تعاریفی برای تابع بیان کردند. بر طبق این تعاریف، تابع حالت خاصی از یک رابطه است که در این نوع رابطه، برای هر ورودی، یک خروجی منحصر به فرد تولید می‌شود. بنابراین، تابع را می‌توان به عنوان دستگاهی در نظر بگیریم که ورودی‌های مجازش را با تغییراتی که وظیفه آن است به خروجی منحصر به فرد، که وابسته به ورودی‌اش است، تبدیل می‌کند. به عنوان مثال، اگر شعاع یک دایره را به عنوان ورودی و محیط آن، به عنوان خروجی باشد، وظیفه تابعی که این ورودی را به خروجی تبدیل کند، این است که هر ورودی (شعاع دایره) را در $۲\times۳/۱۴$ ضرب کرده و خروجی (محیط دایره) را به دست آورد.

شعاع دایره (r) ⟵ $۲\times ۳.۱۴\times r$ ⟵ **محیط دایره**

برای نمایش این رابطه از زوج‌های مرتبی استفاده می‌کنیم که مولفه‌ی اول آن شعاع دایره و مولفه‌ی دوم آن، محیط دایره است، یا با استفاده از فرمول $f(r)=۲\times۳/۱۴\times r$ این رابطه را نشان می‌دهیم که به ازای مقادیری که r می‌تواند بگیرد محیط دایره متناسب با آن شعاع تعیین می‌شود.

تابع در علوم مختلف نیز کاربرد فراوانی دارد. به عنوان مثال، در فیزیک برای بیان رابطه‌ی بین چند متغیر از تابع استفاده می‌کنیم. یک مثالی که همه‌ی ما با آن آشنا هستیم، رابطه بین سرعت (v)، جابه‌جایی (Δx) و زمان (t) است که برای برقراری این رابطه از تابع $\Delta x = vt$ استفاده می‌کنیم. در این فصل، سعی بر آن است که پس از تعریف تابع از دیدگاه‌های مختلف، به معرفی چند تابع، تساوی دو تابع، تحدید تابع، دنباله، نگاره‌ی مستقیم و وارون، تابع یک به یک، پوششی و دوسویی، ترکیب توابع، وارون تابع و وارون چپ و راست پرداخته شود.

تعریف تابع

تابع را می‌توان از دیدگاه‌های مختلفی تعریف کرد:

الف) تعریف تابع به کمک مفهوم رابطه و زوج مرتب

همان طور که گفته شد تابع حالت خاصی از رابطه است. تابع رابطه‌ای است که از زوج‌های مرتبی تشکیل شده است که مولفه‌ی اول به عنوان ورودی و مولفه‌ی دوم به عنوان خروجی تابع است، با این شرط که هرگاه دو زوج مرتب با مولفه‌های اول یکسان در این رابطه موجود باشند، آنگاه مولفه‌های دوم آنها نیز یکسان باشند.

ورودی ⟵ **تابع** ⟵ **خروجی منحصربه فرد**

فصل پنجم

«جبر بول»

مقدمه

جبر شاخه‌ای از ریاضیات است که در آن به جای اعداد، از حروف، تابع، ماتریس، عملگر یا هر شی دیگری استفاده می‌کنیم. هر شی می‌تواند در جایی نشان‌دهنده‌ی عددی خاص باشد و در جایی دیگر عددی متفاوت را نشان دهد. در جبر برای بیان ارتباط بین اشیاء از نشانه‌ها و علامت‌ها یا عملگرهایی مانند +، −، × و ... استفاده می‌کنیم. متغیرها و ثابت‌های مختلفی در روابط جبری وارد می‌شود و طبق اصول خاصی مقادیر متغیرها به دست می‌آید.

جبر بول، که به خاطر جرج بول ریاضیدان انگلیسی (۱۸۵۴) تحت این نام شناخته شده است، یک ساختار جبری است که به وسیله‌ی مجموعه‌ای از عناصر مانند a، b و c، تعدادی عملگر منطقی مانند «و»، «یا»، «نه یا نفی» و تعدادی اصول بدیهی تعریف می‌شود و به‌جای روابط عددی، با روابط منطقی سرو کار دارد. بسیاری از خاصیت‌ها و قضیه‌های جبر بولی شبیه خاصیت‌ها و قضیه‌های جبر هستند. جرج بول روش اصولی را برای منطق معرفی کرد و سعی در برخورد جبری با منطق گزاره‌ها داشت. امروزه جبر بول کاربردهای فراوانی از جمله، طراحی مدارهای الکترونیک، کنترل، طراحی سیستم‌ها و غیره دارد.

کلود شانون (۱۹۳۸) نخستین بار از این جبر در طراحی رایانه استفاده کرد و جبر بول دو ارزشی را برای نمایش مدارهای کلیدی دو حالته به کار برد و به این شکل بود که بخشی از ریاضیات مجرد قرن شانزدهم شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی در قرن بیستم شد.

در این فصل، پس از تعریف عمل دوتایی، جبر بول، عبارت بولی، جبر بول دو ارزشی، خاصیت دوگانی جبر بول، رابطه‌ی ترتیب جزئی در جبر بول، تابع بولی، جدول ارزش عبارت بولی، کاربرد جبر بول، انواع گیت‌های منطقی را معرفی و نحوه پیاده‌سازی مدارهای منطقی را بیان می‌کنیم.

عمل دوتایی روی مجموعه‌ی A

فرض کنید A مجموعه‌ای ناتهی باشد. عمل یا عملگر «*» را **عمل دوتایی** روی مجموعه‌ی A گوییم هرگاه «*» تابعی از $A\times A$ به A باشد به طوری که برای هر $x,y\in A$ عضو منحصر به فرد $z\in A$ را نظیر کند. یعنی:

$$*: A\times A\to A$$
$$*(x,y)=z$$

معمولاً به جای $*(x,y)=z$ می‌نویسیم $x*y=z$. عمل دوتایی «*» روی مجموعه‌ی A را به صورت $(A,*)$ نمایش می‌دهیم.

اگر «*» عمل دوتایی روی مجموعه‌ی A باشد، گوییم A تحت عمل «*» بسته است. یعنی اگر عمل «*» روی هر دو عضو از A اثر کند، حاصل آن نیز عضوی از A می‌شود.

مثال ۱: جمع و ضرب اعداد حقیقی، یک عمل دوتایی است که برای هر دو عدد حقیقی، حاصل جمع و حاصل‌ضرب آن دو عدد را که عضوی از اعداد حقیقی است، نتیجه می‌دهد.

مثال ۲: مجموعه‌ی اعداد طبیعی نسبت به عمل دوتایی + بسته است زیرا اگر a و b دو عضو دلخواه از $\mathbb{N}$ باشد، حاصل‌جمع این دو عدد یعنی a+b عضو منحصربه‌فردی در $\mathbb{N}$ است. اما مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ نسبت به عمل − بسته نیست، به عنوان مثال $۲-۴=-۲\notin\mathbb{N}$.

فصل ششم

«مجموعه‌های شمارا و ناشمارا»

مقدمه

یکی از کاربردهای توابع دوسویی یا تناظر یک به یک که در فصل قبل به تعریف و بررسی ویژگی‌های آن پرداختیم، بیان مفهومی به نام «هم‌توانی بین مجموعه‌ها» است. در این فصل ابتدا به تعریف مجموعه‌های هم‌توان می‌پردازیم و مثال‌های مختلف و قضیه‌هایی از هم‌توانی مجموعه‌ها را بیان می‌کنیم. سپس، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی را که به طور شهودی با تعاریف آن آشنا هستیم به طور دقیق تعریف می‌کنیم، همچنین تعاریفی برای این مجموعه به صورت قضیه ارائه می‌دهیم و مثال‌ها و قضایای بسیاری را در مورد این مجموعه‌ها بیان می‌کنیم. سرانجام، در بخش پایانی این فصل، مجموعه‌ها را به دو دسته‌ی دیگر یعنی شمارش‌پذیر و شمارش‌ناپذیر تقسیم می‌کنیم و به تعریف این مجموعه‌ها و قضیه‌های مرتبط با آن می‌پردازیم. مشاهده خواهید کرد که در تعریف مجموعه‌های متناهی، نامتناهی، شمارش‌پذیر و شمارش‌ناپذیر از مفهوم و خواص هم‌توانی استفاده می‌شود.

هم‌توانی مجموعه‌ها

دو مجموعه‌ی A و B را هم‌توان، هم‌ارز یا هم عدد گوییم هرگاه تابع دوسویی (تناظر یک به یک) مانند f از A به B وجود داشته باشد. دو مجموعه‌ی هم‌توان A و B را به صورت $A \cong B$ نمایش می‌دهیم و می‌خوانیم «A با B هم‌توان است.».

به عنوان مثال، مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e\}$ با مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ هم‌توان است، زیرا ما می‌توانیم نشان دهیم که اعضای این دو مجموعه در تناظر یک به یک با یکدیگر هستند. یک روش برای ایجاد این تناظر یک به یک در شکل زیر نشان داده شده است.

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{array}$$

همان‌طور که می‌بینید هر عضو مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e\}$ به دقیقاً یک عضو از $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ تصویر و هر عضو از $\{a,b,c,d,e\}$ به دقیقاً یک عضو از $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ تصویر شده است. لازم به توضیح است که بین این دو مجموعه تنها یک تناظر یک به یک وجود ندارد و شکل زیر یک تناظر یک به یک دیگر بین این دو مجموعه را نشان می‌دهد.

$$\begin{array}{ccccc} b & c & d & e & a \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{array}$$

لازم به ذکر است که اگر A و B مجموعه‌های متناهی و هم‌توان باشند، باید تعداد اعضای A با تعداد اعضای B برابر باشد.

مثال ۱: نشان دهید هر دو مجموعه‌ی بیان شده هم‌توان هستند.

الف) مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد زوج.

ب) مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد فرد.

پ) مجموعه‌ی اعداد زوج و مجموعه‌ی اعداد فرد.

ت) مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد مضرب a.

فصل هفتم

«اعداد اصلی»

مقدمه

در ریاضیات **عدد اصلی** یا **کاردینالیتی** مفهوم و معیاری است که برای سنجش تعداد اعضای مجموعه‌ها و مقایسه آنها با یکدیگر به کار می‌رود. مفهوم کاردینالیتی توسط جرج کانتور، مبتکر نظریه مجموعه در سال ۱۸۷۴-۱۸۸۴ مطرح شد. عدد اصلی مجموعه‌ی A را با نماد $|A|$ یا $cardA$ (Card چهار حرف اول Cardinal number به معنای عدد اصلی است) نمایش می‌دهیم. توجه کنید که نماد «| |» همان نماد قدر مطلق است، اما مفهوم کاردینالیتی متفاوت از قدر مطلق است. به طور خاص، عمل قدر مطلق روی اعداد درنظر گرفته می‌شود در حالی که عدد اصلی روی مجموعه‌ها تعریف می‌شود، (به عنوان مثال، $|\{-۳\}|=۱$ و $|-۳|=۳$).

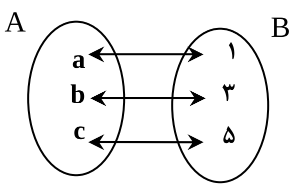
با توجه به این که همه‌ی ما از دوران کودکی بدون این که تعریف دقیقی از عدد و شمارش داشته باشیم، با این مفاهیم آشنا بودیم. بنابراین در ابتدا مفهوم عدد اصلی، مفهومی بسیار ساده به نظر می‌رسد به طوری که برای به دست آوردن عدد اصلی یک مجموعه‌ی متناهی، اعضای آن را می‌شماریم. به عنوان مثال اگر $A=\{a,b,c\}$، آنگاه $|A|=۳$ و اگر $B=\{n\in\mathbb{Z} \mid -۵\le n\le ۵\}$، آنگاه $|B|=۱۱$. در این صورت با داشتن عدد اصلی این دو مجموعه می‌توانیم آن‌ها را از نظر تعداد اعضا مقایسه کنیم و این مقایسه را به شکل $cardA < cardB$ یا $|A|<|B|$ نشان می‌دهیم. حال این سؤالات مطرح می‌شوند که « آیا به جز شمارش اعضای مجموعه‌ها، روشی برای این که مجموعه‌ها را با هم مقایسه کنیم وجود دارد؟»، « آیا عدد اصلی هر مجموعه عدد طبیعی است؟»، «آیا می‌توانیم عدد اصلی مجموعه‌های نامتناهی را نیز به دست آوریم و آن‌ها را با هم مقایسه کنیم ؟» و «چگونه عدد اصلی دو مجموعه را با هم جمع، در هم ضرب یا به توان برسانیم؟». در این فصل به این سوالات پاسخ داده خواهد شد. همچنین در این فصل، اصل انتخاب و برخی از اصولی که با این اصل معادل هستند، بیان و معادل بودن آن‌ها اثبات می‌شود.

قواعد عدد اصلی

ابزار شروع کار برای بیان مفهوم عدد اصلی قواعدی هستند که به بیان آن می‌پردازیم.

قاعده ۱) به هر مجموعه‌ی A یک عدد اصلی مانند a نسبت داده می‌شود که $cardA = a$ و برای هر عدد اصلی a یک مجموعه مانند A نسبت داده می‌شود به طوری که $cardA = a$.

قاعده ۲) $cardA = ۰$ اگر و فقط اگر $A=\varnothing$.



قاعده‌ی بعدی پاسخ به این پرسش است که چگونه به جز شمارش می‌توانیم تعیین کنیم عدد اصلی دو مجموعه یکسان هستند؟ پاسخ به این سوال در خاطرات مدرسه نهفته شده است که با جفت کردن اعضای دو مجموعه‌ی متناهی نشان می‌دادیم که این دو مجموعه اعضای یکسان دارند. به عنوان مثال، دو مجموعه‌ی $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{۱,۳,۵\}$ را در نظر بگیرید. با جفت کردن اعضای دو مجموعه به صورت مقابل مشخص است که تعداد اعضای این دو مجموعه با هم برابر است. حال این مطلب را به طور رسمی‌تر بیان می‌کنیم. اگر بتوانیم یک تناظر یک به یک بین دو مجموعه برقرار کنیم، عدد اصلی آن دو مجموعه یکسان خواهد بود. اما آیا این مطلب برای مجموعه‌های نامتناهی نیز برقرار است؟

قاعده ۳) برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه A و B، متناهی یا نامتناهی، داریم:

$$cardA = cardB \quad \Leftrightarrow \quad A \cong B$$

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اثبات	proof
اثبات مستقیم	direct proof
اجتماع	union
ارزش- درستی	truth
استقرا	induction
استقرای تعمیم یافته	generalized induction
استقرای ریاضی	mathematical induction
استقرای ضعیف	weak induction
استقرای قوی	strong induction
اشتراک	intersection
اصل استقرا	induction axiom
اصل خوش‌ترتیبی	axiom of well ordering
اصل ماکسیمال هاسدورف	axiom of hasdorff
اصل موضوع انتخاب	axiom of choice
اصول موضوع	axioms
اعداد اصلی	cardinal numbers
اعشاری	decimal
افراز	partition
اگر و فقط اگر	if and only if
الف- صفر	aleph unll
اندیس	index
بازه	interval
برد، تصویر یا خروجی	range
برهان به انتفاء مقدم	vacuous reasoning
برهان خلف	reductio ad absurdum
بزرگترین عضو	greatest element
بزرگترین کران پایین	greatest lower bound
بسط اعشاری	decimal expansion
پوشا	surjection
تابع	function
تابع انتخاب	choice function
تابع پوشا	onto function (surjection)
تابع ثابت	constant function
تابع مشخصه	characteristic function
تابع چند متغیره	function of several variables
تابع دو سویی	bijection function
تابع شمول	inclusion function
تابع همانی	identity function
تابع وارون	inverse function
تابع یک به یک	one to one function (surjection)
تالی	successor
تحدید تابع	restriction of a function
ترتیب جزئی	partial order
ترتیب کلی	total order
ترکیب عطفی	conjuction
ترکیب فصلی	disjunction
ترکیب یای مانع جمع	exclu
تساوی توابع	equal functions
تعویض‌پذیری	distributive
تفاضل	difference
تفاضل متقارن	symmetrice difference
تناظر یک به یک	correspondence one to one
تناقض	contradiction
توان مجموعه	power set
جابه‌جایی	commutative
جبر بولی	boolean algebra
جدول ارزش	truth table
حاصل‌ضرب	product
حاصلضرب (دکارتی)	cartesian product
حساب اعداد اصلی	cardinal arithmetic
خانواده	family
خانواده اندیس‌دار	indexed family
خانواده مجموعه‌ها	family of sets
خوش تعریف	well defined
دامنه	domain
دنباله	sequence
دنباله‌ی متناهی	finite sequence
دنباله‌ی نامتناهی	infinite sequence
دو شرطی	biconditional
دوتایی	binary
دوگانی	duality
رابط	connective
رابطه	relation
رابطه انعکاسی	reflexive relation

آزمون (۱)

تعداد سؤالات : ۶		**سطح آزمون : (A)** (ساده)

۱ـ فرض کنیم p و q دو گزاره باشند. در اینصورت گزاره‌ی $\neg(p \vee q)$ با کدامیک از گزینه‌های زیر هم‌ارز است؟

۱) $p \wedge (\neg q)$		۲) $p \vee (\neg q)$		۳) $(\neg p) \vee (\neg q)$		۴) $(\neg p) \wedge (\neg q)$

۲ـ اگر مجموعه‌ی A از n عنصر تشکیل‌شده باشد آن‌گاه مجموعه‌ی توانی p(A) دقیقاً چند عضو دارد؟

۱) $n^۲$		۲) ۲^n		۳) ۲n		۴) د

۳ـ کدام‌یک از رابطه‌های زیر هم‌ارزی نیست؟

۱) رابطه‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی m در مجموعه اعداد صحیح

۲) رابطه‌ی عاد کردن در مجموعه اعداد طبیعی

۳) رابطه‌ی $(a,b)R(c,d)$ اگر و تنها اگر $ad = bc$ روی مجوعه‌ی $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{۰\})$

۴) رابطه‌ی تساوی در مجموعه‌ی اعداد حقیقی

۴ـ اگر $f, g : X \to y$ دو تابع با یک دامنه و یک برد باشند آن‌گاه:

۱) اگر $f \subseteq g$ آن‌گاه $f = g$		۲) اگر $f \subseteq g$ آن‌گاه $f \neq g$		۳) اگر $f \not\subseteq g$ آن‌گاه $f < g$.		۴) اگر $f \not\subseteq g$ آن‌گاه $f > g$.

۵ـ در جبر بول کدام گزینه درست نیست؟

۱) $۱' = ۰$		۲) $a + (a.b) = a$		۳) $a.(a + a) = a$		۴) $(a + b).(a.b) = ۱$

۶ـ اگر عدد اصلی مجموعه اعداد طبیعی برابر با $\aleph_۰$ باشد، کدام عبارت درست نیست؟

۱) $\aleph_۰ + \aleph_۰ = \aleph_۰$		۲) $\aleph_۰^{\aleph_۰} = \aleph_۰$		۳) $\aleph_۰\aleph_۰ = \aleph_۰$		۴) $\aleph_۰^{۳} = \aleph_۰$

سؤالات آزمون سراسری ۹۳ ـ مجموعه ریاضیات و کاربردها، آمار و کاربردها

۱ـ کدام‌یک از گزاره‌های ذیل خاصیت مشخصه زیرینه (اینفیمم) را برای $\beta = \inf A$ مشخص می‌کند؟

۱) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \quad x < \beta + \varepsilon$

۲) $\forall x \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \quad x < \beta + \varepsilon$

۳) $\exists \varepsilon > 0 \ \forall x (x \in A \Rightarrow x < \beta + \varepsilon)$

۴) $\forall x (x \in A \Rightarrow \beta \le x) \ \& \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \quad x < \beta + \varepsilon$

۲ـ فرض کنید $f : X \to X$ تابعی باشد به طوری که $f^2 = I_X$ که در آن I_X بیانگر تابع همانی روی X است. در این صورت:

۱) انعکاسی و متقارن است.

۲) f متقارن است.

۳) f انعکاسی و متعدی (تراگذری) است.

۴) f متعدی (تراگذری) است.

۳ـ فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$. کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$

۲) $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$

۳) $B \subseteq f(f^{-1}(B))$

۴) $f(A^c) = (f(A))^c$

۴ـ کدام‌یک از نگاشت‌های زیر یک تناظر یک به یک (دوسویی) بین بازه باز $(-1,1)$ و $\mathbb{R}$ برقرار می‌کند؟

۱) $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$

۲) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

۳) $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$

۴) $f(x) = \dfrac{1+|x|}{1-|x|}$

۵ـ هرگاه X یک مجموعه نامتناهی و Q مجموعه اعداد گویا باشد، آن‌گاه:

۱) تابعی یک به یک مانند $f : Q \to X$ وجود دارد.

۲) تابعی یک به یک مانند $f : X \to Q$ وجود دارد.

۳) اگر $f : X \to X$ یک به یک باشد، آن‌گاه f پوشا است.

۴) اگر $f : X \to X$ پوشا باشد، آن‌گاه f یک به یک است.

۶ـ اگر تابع $f : A \to B$ پوشا باشد، آن‌گاه:

۱) $\forall X (X \subseteq A \Rightarrow f^{-1}(f(X)) = X)$

۲) $\forall Y (Y \subseteq B \Rightarrow f(f^{-1}(Y)) = Y)$

۳) $\forall X \ \forall Z (X, Z \subseteq A \Rightarrow f(X \cap Z) = f(X) \cap f(Z))$

۴) $\exists X \ \exists Z (X, Z \subseteq A \ \& \ f(X \cup Z) \neq f(X) \cup f(Z))$

سؤالات آزمون سراسری ۹۴ ـ مجموعه ریاضی، آمار

۱ـ نقیض گزاره روبرو کدام است؟ «هر دانشجوی این کلاس حداقل دو برادر دارد»

۱) هر دانشجوی این کلاس حداکثر دو برادر دارد.

۲) دانشجویی در این کلاس هست که حداکثر یک برادر دارد.

۳) دانشجویی در این کلاس هست که یک یا دو خواهر دارد.

۴) دانشجویی در این کلاس هست که یک یا دو برادر دارد.

۲ـ فرض کنیم f تابعی بر X به توی Y باشد و $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X و $\{B_\alpha\}_{\alpha\in J}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های Y باشد، در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) $f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in J} f^{-1}(B_\alpha)$

۲) $f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in J} B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in J} f^{-1}(B_\alpha)$

۳) $f(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$

۴) $f(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$

۳ـ فرض کنیم $A\cong B$ به مفهوم هم‌عدد (هم‌ارز) بودن A و B باشد، کدام گزینه نادرست است؟ $\mathbb{N}$ نمایش اعداد طبیعی، $\mathbb{Z}$ نمایش اعداد صحیح، $\mathbb{Q}$ نمایش اعداد گویا و $\mathbb{R}$ نمایش اعداد حقیقی است.

۱) $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\cong\mathbb{N}$

۲) اگر $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$، آنگاه $S\cong\mathbb{R}$.

۳) یک تابع یک به یک و پوشا بین $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ وجود دارد.

۴) مجموعه اعداد اصمی که جبری نیستند، با مجموعه $A=\{\sqrt[n]{r} : n\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Q}\}$ هم‌عدد است.

۴ـ فرض کنیم رابطه $\cong$ در مجموعه‌ها به مفهوم هم‌عدد (هم‌ارز) بودن و نماد $A\le B$ به این مفهوم باشد که A با زیرمجموعه‌ای از B هم‌عدد (هم‌ارز) است. اگر $A\cong B$ و $C\cong D$ آنگاه:

۱) $A\le C$ اگر و تنها اگر $B\le D$

۲) $A\bigcup C\cong B\bigcup D$

۳) $A\bigcap C\cong B\bigcap D$

۴) $A\times B\cong C\times D$

۵ـ فرض کنیم Y زیرمجموعه‌ای از X باشد و $X-Y=\{x\in X : x\notin Y\}$. کدام گزینه نادرست است؟

۱) مجموعه X نامتناهی است اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعه متناهی Y از X، $\mathrm{Card}X=\mathrm{Card}(X-Y)$.

۲) اگر X مجموعه متناهی و $f:X\to Z$ تابعی یک به یک باشد، آنگاه Z نامتناهی است.

۳) اگر X و Y هر دو نامتناهی باشند و $\mathrm{Card}X=\mathrm{Card}Y$، آنگاه $X-Y$ متناهی است.

۴) اگر X نامتناهی و $X-Y$ متناهی باشد، آنگاه $\mathrm{Card}X=\mathrm{Card}Y$.

۶ـ کدام یک از گزاره‌های زیر اصل موضوع انتخاب است؟

۱) از هر مجموعه‌ای ناتهی می‌توان یک عضو انتخاب کرد.

۲) به ازای هر دو عدد اصلی α و β که $\alpha<\beta$، می‌توان یک عدد اصلی مانند γ انتخاب کرد که $\alpha<\gamma<\beta$.

۳) حاصل ضرب دکارتی خانواده‌ای ناتهی از مجموعه‌های ناتهی، ناتهی است.

۴) اگر $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از مجموعه‌های ناتهی باشد، نمی‌توان مجموعه‌ای ساخت که از هر A_α فقط یک عضو داشته باشد.

سؤالات آزمون سراسری ۹۵ ـ مجموعه ریاضی، آمار

۱ـ نقیض گزاره مقابل کدام است؟ «اگر حاصل‌ضرب دو عدد صفر باشد حداقل یکی از آن دو عدد صفر است»

۱) $\exists a \exists b\ a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $ab = 0$

۲) $\exists a \exists b\ a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $ab \neq 0$

۳) $\exists a \exists b\ a = 0$ یا $b = 0$ یا $ab = 0$

۴) $\exists a \exists b\ a \neq 0$ یا $b \neq 0$ یا $ab \neq 0$

۲ـ کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $A \notin P(B)$ و $B \in P(C)$ آنگاه $A \notin P(C)$

۲) اگر $A \subseteq B$ و $B \in C$ آنگاه $A \in C$

۳) $P(A-B)-\{\varnothing\} \subseteq P(A)-P(B)$

۴) اگر $x \in A$ و $A \not\subseteq B$ آنگاه $x \notin B$

۳ـ فرض کنید $A \subseteq X$. تابع $\chi_A : X \to \{0,1\}$ با ضابطه‌ی تعریف $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$، تابع مشخصه‌ی A نامیده می‌شود، اگر تحدید تابع χ_A به زیر مجموعه‌ای از X مانند B تابعی ثابت باشد، آن‌گاه:

۱) $B = A$

۲) $B \cap A' = \varnothing$

۳) $B \cap A = \varnothing$

۴) $B \subseteq A$ یا $B \subseteq A'$ (A' متمم A است)

۴ـ تابع $f : X \to Y$ مفروض است. افراز $P = \left\{ f^{-1}(\{y\}) \mid f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing, y \in Y \right\}$ از مجموعه X را در نظر بگیرید. اگر رابطه هم‌ارزی ناشی از P را با X/P نمایش دهیم، در این صورت X/P کدام است؟

۱) $\{(a,b) \in X \times X \mid a = b\}$

۲) $\{(a,b) \in X \times X \mid f(a) = f(b)\}$

۳) $\left\{(a,b) \in X \times X \mid f^{-1}(\{f(a)\}) = b\right\}$

۴) $\left\{(a,b) \in X \times X \mid a = f^{-1}(\{f(b)\})\right\}$

۵ـ اگر $f : X \to Y$ یک تابع باشد و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$، آنگاه کدام گزینه ممکن است، برقرار نباشد؟

۱) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

۲) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

۳) $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$

۴) $f^{-1}(Y-B) = X - f^{-1}(B)$

۶ـ فرض کنید A بازه‌ی $(0,1)$ است. عدد اصلی A^A با عدد اصلی کدام‌یک از مجموعه‌های زیر برابر نیست؟

۱) $(0,1)^{\mathbb{R}}$

۲) $P(\mathbb{R})$

۳) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

۴) $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$

سؤالات آزمون سراسری ۹۶ ـ مجموعه ریاضی، آمار

۱ـ نقیض گزاره زیر کدام است؟

A با زیر مجموعه‌ای از B هم‌عدد (هم‌توان) است ولی B با هیچ زیر مجموعه‌ای از A هم‌عدد نیست.

۱) A با هیچ زیرمجموعه‌ای از B هم‌عدد نیست یا B با زیر مجموعه‌ای از A هم‌عدد است.

۲) A با هیچ زیرمجموعه‌ای از B هم‌عدد نیست یا B با هر زیر مجموعه A هم‌عدد است.

۳) مجموعه‌ای وجود دارد که اگر زیرمجموعه B باشد آنگاه با A هم‌عدد است یا B با هر زیرمجموعه A هم‌عدد است.

۴) زیرمجموعه‌ای از B وجود دارد که با A هم‌عدد نیست یا اینکه B با زیرمجموعه‌ای از A هم‌عدد است.

۲ـ فرض کنید f رابطه دوتایی و F و G دو خاصیت باشند. کدام گزینه درست است؟

۱) $\forall x(F(x)\vee G(x))\Rightarrow(\forall xF(x)\vee\forall xG(x))$

۲) $(\forall xF(x)\Rightarrow\forall xG(x))\Rightarrow\forall x(F(x)\Rightarrow G(x))$

۳) $\forall x\exists y(x\,f\,y)\Rightarrow\exists y\forall x(x\,f\,y)$

۴) $\exists y\forall x(x\,f\,y)\Rightarrow\forall x\exists y(x\,f\,y)$

۳ـ ترتیب جدیدی به‌صورت زیر برای اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم. کدام گزینه درست است؟

$$\dots,۲k+۱,۲k-۱,\dots,۵,۳,۱,۲,۴,۶,\dots,۲m,۲m+۲,\dots$$

۱) مجموعه اعداد زوج اینفیمم ندارد.

۲) مجموعه مضارب ۵ مینیمم دارد.

۳) مجموعه اعداد فرد سوپرمم دارد ولی اینفیمم ندارد.

۴) هر زیرمجموعه $\mathbb{N}$ با ترتیب فوق ماکسیمال و مینیمال دارد.

۴ـ فرض کنید $f_۱:A_۱\to B_۱$ و $f_۲:A_۲\to B_۲$ دو تابع باشند. تابع $f:A_۱\cup A_۲\to B_۱\cup B_۲$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم. گزینه صحیح کدام است؟

$$f(a)=\begin{cases}f_۱(a), & a\in A_۱\\ f_۲(a), & a\notin A_۱\end{cases}$$

۱) ممکن است $f_۱$ و $f_۲$ هردو یک‌به‌یک باشند ولی f یک به یک نباشد.

۲) اگر $f_۱$ و $f_۲$ هردو یک‌به‌یک باشند آن‌گاه f نیز یک‌به‌یک است.

۳) اگر $f_۱$ و $f_۲$ هردو پوشا باشند آن‌گاه f نیز پوشا است.

۴) f خوش تعریف نیست.

۵ـ فرض کنید $f:X\to Y$ یک تابع باشد. کدام‌یک از گزاره‌های زیر معادل یک‌به‌یک بودن تابع f <u>نیست</u>؟

۱) برای هر $A,B\subseteq X$؛ $f(A\setminus B)=f(A)\setminus f(B)$.

۲) برای هر $A\subseteq X$؛ $(f(A))^c\subseteq f(A^c)$.

۳) برای هر $A\subseteq X$؛ $f^{-۱}(f(A))\subseteq A$.

۴) برای هر $A,B\subseteq X$؛ اگر $f(A)=f(B)$ آن‌گاه $A=B$.

۶ـ اگر تابع $f:X\to Y$ یک‌به‌یک باشد آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) اگر X شمارای نامتناهی باشد Y هم شمارای نامتناهی است.

۲) اگر Y شمارای نامتناهی باشد X متناهی یا شماراست.

۳) اگر Y شمارای نامتناهی باشد X هم شمارای نامتناهی است.

۴) Y با هیچ زیرمجموعه‌ای از X هم‌عدد (هم‌توان) نیست.

پاسخنامه آزمون سراسری ۹۶ ـ مجموعه ریاضی، آمار

۱ـ گزینه «۱» فرض کنیم «A با زیرمجموعه‌ای از B هم‌عدد است» گزاره p و «B با هیچ زیرمجموعه‌ای از A هم‌عدد نیست» گزاره q باشد. همان طور که می‌دانیم:

$$\neg(p\wedge q)\equiv\neg p\vee\neg q$$

از طرفی نقیض گزاره p برابر است با: A با هیچ زیرمجموعه‌ای از B هم‌عدد نیست.

نقیض گزاره q برابر است با: B با زیرمجموعه‌ای از A هم‌عدد است.

پس با توجه به توضیحات داده شده در مورد دو گزاره گزینه (۱) پاسخ مورد نظر خواهد بود.

۲ـ گزینه «۴»

گزینه (۱) صحیح نیست. فرض کنیم F خاصیت فرد بودن و G خاصیت زوج بودن اعداد طبیعی باشد.

$\forall x$ (x زوج است $\vee$ x فرد است) $\not\Rightarrow$ هر x زوج است $\vee$ هر x فرد است

گزینه ۲ صحیح نیست.

فرض کنیم F این خاصیت باشد: $x>۵۰۰$ است و فرض کنیم G این خاصیت باشد: $x<۰$ است.

$$\forall x(x>۵۰۰)\Rightarrow\forall x(x<۰)$$

سؤالات آزمون سراسری ۹۷ ـ مجموعه ریاضی، آمار

۱ـ فرض کنید $f: X \to Y$ تابع باشد و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$، کدام گزینه درست است؟

۱) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

۲) $f(A \cup f^{-1}(B)) = f(A) \cup B$

۳) $f^{-1}(f(A) \cap B) = A \cap f^{-1}(B)$

۴) $f^{-1}(f(A) \cup B) = A \cup f^{-1}(B)$

۲ـ فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع با خاصیت زیر باشد:

$$\forall A, B \subseteq X (A \cap B = \phi \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \phi)$$

کدام گزینه درست است؟

۱) تابع f پوشا است ولی لزوماً یک به یک نیست.

۲) تابع f یک به یک است ولی لزوماً پوشا نیست.

۳) تابع f یک به یک و پوشا است.

۴) تابع f لزوماً یک به یک و پوشا نیست.

۳ـ فرض کنید R، S و T رابطه‌های دوتایی در مجموعه ناتهی A هستند. کدام گزینه درست است؟

۱) $TO(R \cap S) = (TOR) \cap (TOS)$

۲) $TO(R - S) = (TOR) - (TOS)$

۳) $(R \cup S)OT = (ROT) \cup (SOT)$

۴) $(R - S)OT = ROT - SOT$

۴ـ فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد، $A \subseteq \mathbb{R}$ و $f: A \to \mathbb{R}$ تابع باشد. فرمول منطقی گزاره زیر کدام گزینه است؟

در گزینه‌های زیر ε و δ مقید به اعداد مثبت، L مقید به اعداد حقیقی و a مقید به اعضای A است. تابع f در هیچ نقطه‌ای از A حد ندارد.

۱) $\forall a \forall L \exists \varepsilon \exists \delta \exists x (x \in A \wedge |x-a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon)$

۲) $\forall a \forall L \exists \varepsilon \forall \delta \forall x (x \in A \wedge |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| \geq \varepsilon)$

۳) $\forall a \forall L \forall \varepsilon \exists \delta \exists x (x \in A \wedge |x-a| < \varepsilon \wedge |f(x) - L| \geq \delta)$

۴) $\forall a \forall L \exists \delta \forall \varepsilon \exists x (x \in A \wedge |x-a| < \varepsilon \wedge |f(x) - L| \geq \delta)$

۵ـ فرض کنید $A \prec B$ به این مفهوم است که A با زیرمجموعه‌ای از B هم‌عدد (هم‌ارز) است ولی B با هیچ زیرمجموعه‌ای از A هم‌عدد (هم‌ارز) نیست. اگر $A \prec B$، کدام گزینه درست است؟

۱) هیچ تابع پوشایی از B به A وجود ندارد.

۲) هیچ تابع پوشایی از A به B وجود ندارد.

۳) یک تابع یک به یک از B به A وجود دارد.

۴) بین A و B یک تابع یک به یک و پوشا وجود دارد.

سؤالات آزمون سراسری ۹۸ ـ مجموعه ریاضی، آمار

۱ـ فرض کنید $P \subseteq N$، کدام گزاره معادل گزاره مقابل است؟ $n \notin P \Rightarrow \exists p(p \in P \wedge p \leq \sqrt{n} \wedge p \mid n)$

۱) $\forall p(p \in P \wedge \sqrt{n} \leq p \wedge p \nmid n) \Rightarrow n \in P$

۲) $\forall p(p \in P \wedge p \leq \sqrt{n} \Rightarrow p \nmid n) \Rightarrow n \in P$

۳) $\forall p(p \in P \vee \sqrt{n} \leq p \vee p \nmid n) \Rightarrow n \in P$

۴) $\forall p(p \in P \wedge p \leq \sqrt{n} \vee p \nmid n) \Rightarrow n \in P$

۲ـ فرض کنید A و B دو مجموعه دلخواه باشند. ضرب دکارتی به $\times$ و تفاضل متقارن به Δ نمایش داده می‌شود. ضمناً $X \setminus Y$ به منزله مکمل Y نسبت به X است. کدام گزینه درست است؟

۱) $(A \times B) \setminus (B \times A) = (A \setminus B) \times (B \setminus A)$

۲) $(A \Delta B) \times (A \Delta B) = (A \times A) \Delta (B \times B)$

۳) $(A \setminus B) \times (A \setminus B) = (A \times A) \setminus (B \times B)$

۴) $(A \bigcap B) \times (A \bigcap B) = (A \times A) \bigcap (B \times B)$

۳ـ فرض کنید $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا و X مجموعه‌ای نامتناهی باشد، کدام گزاره درست است؟

۱) اگر $f : X \to X$ پوشا باشد، آنگاه f یک‌به‌یک است.

۲) اگر $f : X \to X$ یک‌به‌یک باشد، آنگاه f پوشا است.

۳) تابعی پوشا مانند $f : X \to \mathbb{Q}$ وجود دارد.

۴) تابعی یک‌به‌یک مانند $f : X \to \mathbb{Q}$ وجود دارد.

۴ـ فرض کنید $A \cong B$ به مفهوم هم‌عدد بودن A و B و $A \prec B$ به مفهوم هم‌عدد بودن A با زیرمجموعه‌ای از B باشد ولی B با هیچ زیرمجموعه‌ای از A هم‌عدد نباشد. اگر $A \cong B$ و $C \cong D$، کدام گزاره درست است؟

۱) $A \prec C$ اگر و فقط اگر $B \prec D$

۲) $A \bigcup C \cong B \bigcup D$

۳) $A \bigcap C \cong B \bigcap D$

۴) $A \times B \cong C \times D$

۵ـ فرض کنید α، β و γ اعداد اصلی نامتناهی (ترامتناهی) باشند. کدام گزینه درست است؟

۱) $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta^{\gamma}}$

۲) اگر $\alpha < \beta$ آنگاه $\alpha^{\gamma} < \beta^{\gamma}$.

۳) اگر $\alpha < \beta$ آنگاه $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

۴) اگر $\alpha < \beta < \gamma$ آنگاه $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

پاسخنامه آزمون سراسری ۹۸ ـ مجموعه ریاضی، آمار

۱ـ گزینه «۲» به ازای هر دو گزاره‌ی p و q داریم:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
& n \notin P \Rightarrow \exists p(p \in P \wedge p \leq \sqrt{n} \wedge p \mid n) \\
& \equiv \neg(\exists p(p \in P \wedge p \leq \sqrt{n} \wedge p \mid n) \Rightarrow \neg(n \notin P) \\
& \equiv \forall p(p \notin P \vee p > \sqrt{n} \vee p \nmid n) \Rightarrow n \in P \\
& \equiv \forall p(\neg(p \in P \wedge p \leq \sqrt{n}) \vee p \nmid n) \Rightarrow n \in P \\
& \equiv \forall p((p \in P \wedge p \leq \sqrt{n}) \Rightarrow p \nmid n) \Rightarrow n \in P
\end{aligned}$$

۲ـ گزینه «۴» فرض کنید:

$$\begin{cases} A = \{۱,۲\} \\ B = \{۲,۳,۴\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \setminus B = \{۱\} \\ B \setminus A = \{۳,۴\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ & A \times B = \{(۱,۲), (۱,۳), (۱,۴), (۲,۲), (۲,۳), (۲,۴)\} \\
& B \times A = \{(۲,۱), (۲,۲), (۳,۱), (۳,۲), (۴,۱), (۴,۲)\} \\
& A \times A = \{(۱,۱), (۱,۲), (۲,۱), (۲,۲)\} \\
& B \times B = \{(۲,۲), (۲,۳), (۲,۴), (۳,۲), (۳,۳), (۳,۴), (۴,۲), (۴,۳), (۴,۴)\}
\end{aligned}$$

$$A \Delta B = \{۱,۳,۴\} = B \Delta A$$

سؤالات آزمون کارشناسی ارشد ۱۳۹۹ ـ مجموعه ریاضی

۱ـ فرض کنید $\mathbb{Z}$ نمایش اعداد صحیح باشد و $A=\{\frac{۱}{n^۲}-\frac{۱}{m}: \quad n,m\in\mathbb{Z}\setminus\{۰\}\}$. کدام گزینه درست است؟

۱) A کمینه (مینیمم) دارد.

۲) $\inf A=-۱$

۳) $\sup A=\max A=۱$

۴) A نه بیشینه (ماکسیمم) دارد و نه کمینه (مینیمم) دارد.

۲ـ برای دو زیرمجموعه ناتهی X و Y از اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم: $X+Y=\{x+y: x\in X, y\in Y\}$. کدام گزینه نادرست است؟

افرازی مانند $\{A,B\}$ از $\mathbb{N}$ وجود دارد، به‌طوری که:

۱) $A+A\subseteq A$ و $B+B\subseteq B$

۲) $A+A\subseteq A$

۳) $A+A\subseteq B$

۴) $A+A\subseteq A$ و $A+B\subseteq B$

۳ـ فرض کنید $m_۲$ توان ۲ در تجزیه عدد طبیعی m به اعداد اول باشد. روی اعداد طبیعی، رابطه هم‌ارزی R را به‌صورت $mRn \Leftrightarrow m_۲=n_۲$ تعریف می‌کنیم. اگر $[m]_R$ نشان‌دهنده کلاس هم‌ارزی m باشد، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) مجموعه $\{[m]_R \mid m\in\mathbb{N}\}$ نامتناهی است.

۲) همه اعداد طبیعی فرد در یک کلاس هم‌ارزی قرار دارند.

۳) برای هر عدد طبیعی m، مجموعه $[m]_R$ نامتناهی است.

۴) اعداد طبیعی m و n موجودند، به‌طوری که $\{a+b \mid a\in[m]_R\ ,\ b\in[n]_R\}$ نیز یک کلاس هم‌ارزی است.

۴ـ فرض کنید X مجموعه‌ای نامتناهی و $P_\infty(X)$ گردایه همه زیرمجموعه‌های نامتناهی X باشد. همچنین فرض کنید رابطه R روی $P_\infty(X)$ به‌صورت روبه‌رو تعریف شده باشد؛ ARB اگر و تنها اگر عدد اصلی مجموعه $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ نامتناهی باشد. کدام گزینه برای رابطه‌ی R درست است؟

۱) رابطه هم‌ارزی است.

۲) انعکاسی نیست ولی متقارن و متعدی است.

۳) متقارن است ولی انعکاسی و متعدی نیست.

۴) انعکاسی و پادمتقارن است ولی متعدی نیست.

۵ـ فرض کنید α، β و γ اعداد اصلی باشند. کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $\alpha<\beta$، آنگاه $\gamma^\alpha<\gamma^\beta$.

۲) اگر α، β و γ ترامتناهی باشند، آنگاه $\alpha+\beta<\alpha\beta$.

۳) اگر α، β و γ ترامتناهی باشند و $\alpha<\beta$، آنگاه $\alpha\gamma<\beta\gamma$.

۴) اگر $\alpha\leq\beta$، آنگاه $\alpha^\gamma\leq\beta^\gamma$، ولی لزومی ندارد که عکس آن برقرار باشد.

پاسخنامه آزمون کارشناسی ارشد ۱۳۹۹ ـ مجموعه ریاضی

۱ـ گزینه «۲» مجموعه A دارای اینفیمم و ماکزیمم است.

$\inf A$ زمانی به‌دست می‌آید که $\frac{۱}{n^۲}$ کمترین مقدار و $\frac{۱}{m}$ بیشترین مقدار را داشته باشد. $\inf\{\frac{۱}{n^۲}:n\in\mathbb{Z}\}=۰$ و $\max\{\frac{۱}{m}:m\in\mathbb{Z}\}=۱$ پس:

$$\inf A=۰-۱=-۱$$

ماکزیمم A زمانی به‌دست می‌آید که $\frac{۱}{n^۲}$ بیشترین مقدار و $\frac{۱}{m}$ کمترین مقدار را داشته باشد.

$$\max\{\frac{۱}{n^۲}:n\in\mathbb{Z}\}=۱$$

$$\min\{\frac{۱}{m}:m\in\mathbb{Z}\}=-۱$$

$$\Rightarrow \max A=۱-(-۱)=۲$$

سؤالات آزمون کارشناسی ارشد ۱۴۰۰ ـ مجموعه ریاضی

۱ـ نقیض گزارهٔ زیر کدام است؟

«اگر عددی نامنفی باشد و از هر عدد مثبت کوچک‌تر باشد، آنگاه آن عدد صفر است.»

۱) اگر عددی از همهٔ اعداد مثبت کوچک‌تر باشد مساوی صفر است.
۲) عددی مثبت وجود دارد که از برخی اعداد مثبت کوچک‌تر است.
۳) عددی مثبت وجود دارد که از تمام اعداد مثبت بزرگ‌تر است.
۴) عددی مثبت وجود دارد که از تمام اعداد مثبت کوچک‌تر است.

۲ـ فرض کنیم $A=\{r\in\mathbb{Q}: r<0 \vee r^2\le 3\}$ و $B=\{r\in\mathbb{Q}: 0<r \wedge 3<r^2\}$. کدام گزینه درست است؟

۱) مجموعهٔ A بیشینه دارد ولی کمینه ندارد.
۲) مجموعهٔ B کمینه دارد ولی بیشینه ندارد.
۳) مجموعهٔ A کراندار است ولی B کراندار نیست.
۴) مجموعهٔ B زیرینه (اینفیمم) دارد و $A\cap B=\varnothing$ و $A\cup B=\mathbb{Q}$.

۳ـ فرض کنید A شمارای نامتناهی باشد و B توان پیوستار (قوت متصله) داشته باشد. کدام گزینه درست است؟ (هرگاه مجموعه‌ای با $\mathbb{R}$ هم‌عدد باشد گوییم توان پیوستار دارد.)

۱) B^A شمارا است.
۲) $A\times B$ توان پیوستار دارد.
۳) $A^{A\cup B}$ توان پیوستار دارد.
۴) اگر $A\cap B\neq\varnothing$، آنگاه $A\cap B$ توان پیوستار دارد.

۴ـ فرض کنید A، B، C و D مجموعه‌های دلخواه باشند. کدام گزینه نادرست است؟ ($\cong$ نماد هم‌عدد بودن در مجموعه‌ها است.)

۱) $(A^B)^D \cong A^{B\times D}$
۲) $(A\times B)^C \cong A^C\times B^C$
۳) $A^B\times A^C\cong A^{B\cup C}$
۴) اگر $A\cong B$ و $C\cong D$، آنگاه $A^C\cong B^D$.

۵ـ فرض کنید A یک مجموعهٔ نامتناهی و B یک مجموعهٔ نامتناهی شمارا باشد. کدام گزینه درست است؟ (البته فرض بر آن است که اصل انتخاب را پذیرفته‌ایم.)

۱) تابعی یک‌به‌یک از B به A وجود دارد.
۲) تابعی یک‌به‌یک از A به B وجود دارد.
۳) اگر تابع $f:A\to A$ یک‌به‌یک باشد، پوشا هم هست.
۴) اگر تابع $f:A\to A$ پوشا باشد، یک‌به‌یک هم هست.

پاسخنامه آزمون کارشناسی ارشد ۱۴۰۰ ـ مجموعه ریاضی

۱ـ گزینه «۴» ابتدا جمله داده‌شده را با نمادهای ریاضی نوشته و سپس نقیض آن را می‌نویسیم:

$$\neg(\exists x(x\ge 0\wedge(\forall y(y>0\Rightarrow x<y))\Rightarrow x=0)$$
$$\equiv \exists x(x\ge 0\wedge(\forall y(y>0\Rightarrow x<y)))\wedge x\neq 0)$$
$$\equiv \exists x(x>0\wedge(\forall y(y>0\Rightarrow x<y)))$$

توجه داریم که به‌ازای گزاره‌های P و Q داریم:

$$P\Rightarrow Q\equiv\neg P\vee Q$$
$$\neg(P\Rightarrow Q)\equiv\neg(\neg P\vee Q)\equiv P\wedge\neg Q$$

۲ـ گزینه «۳» با توجه به مجموعه‌های داده شده می‌بینیم که مجموعه A بیشینه و کمینه ندارد. مجموعه B هم بیشینه و کمینه ندارد.

مجموعه B اینفیمم دارد و اینفیمم آن $\sqrt{3}$ است و $A\cap B=\varnothing$ اما $A\cup B\neq Q$، مثلاً $0\in Q$ اما $0\notin A\cup B$.

مجموعه A یک مجموعه کراندار است. یک کران بالای آن صفر و یک کران پایین آن $-\sqrt{3}$ است.

مجموعه B از پایین کراندار است، اما از بالا بی‌کران است.

سازمان سنجش گزینه (۴) را به عنوان پاسخ صحیح اعلام کرده است. با توجه به اینکه $0\in Q$ اما $0\notin A\cup B$ می‌باشد، گزینه (۳) صحیح است.

سؤالات آزمون کارشناسی ارشد ۱۴۰۱ ـ مجموعه ریاضی

۱ـ برای دنبالهٔ $\{a_n\}$ از اعداد حقیقی، کدام‌یک از گزاره‌های زیر با هم معادل (هم ارز) هستند؟
(اندیس‌ها مقید به اعداد طبیعی و ε مقید به اعداد حقیقی مثبت است.)

الف) $\forall\varepsilon\exists N\forall n(n > N \wedge |a_n - a_N| < \varepsilon)$

ب) $\forall\varepsilon\exists N\forall k\forall n(n > N \Rightarrow |a_{N+k} - a_n| < \varepsilon)$

ج) $\exists N\forall\varepsilon\forall k\forall n(n > N \Rightarrow |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon)$

د) $\forall\varepsilon\exists N\forall n\forall m(n,m > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon)$

هـ) $\exists N\forall\varepsilon\exists m\exists n(m,n > N \wedge |a_m - a_n| < \varepsilon)$

۱) (ب) و (د) ۲) (الف) و (د) ۳) (ج) و (د) ۴) (ج) و (هـ)

۲ـ فرض کنید $f : X \to Y$ تابعی مفروض باشد. رابطهٔ هم ارزی R را در X به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: xRx' یعنی $f(x) = f(x')$. مجموعهٔ دسته‌های هم‌ارزی در X با کدام مجموعه هم‌عدد است؟

۱) Y ۲) X ۳) $f(X)$ ۴) $Y \mid f(X)$ (مکمل $f(X)$ در Y)

۳ـ فرض کنید $A_k = \{x \in \mathbb{R} : -1 \le [kx] \le k\}$، $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ و $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. $[.]$ نماد جزء صحیح است و $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی. کدام گزینه درست است؟

۱) $A = (0,1)$ و $B = (-1,2)$ ۲) $A = (0,1)$ و $B = [0,2)$ ۳) $A = [0,1)$ و $B = (-1,2)$ ۴) $A = [0,1]$ و $B = [-1,2)$

۴ـ اگر $A = \{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد، تعریف می‌کنیم $\bigcup A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟ (P نماد مجموعهٔ توانی است.)

الف) به ازای هر A، $P(\bigcup A) = A$

ب) اگر هر عضو A عضو مجموعهٔ B باشد، آنگاه $\bigcup A \subseteq B$.

۱) فقط (الف) ۲) فقط (ب) ۳) هر دو ۴) هیچ‌کدام

۵ـ تابع انتخاب برای مجموعهٔ X تابعی مانند $F : (p(X) - \{\phi\}) \to X$ است به‌طوری که برای هر $\phi \ne A \subseteq X$، $F(A) \in A$. گزاره‌های زیر را درنظر می‌گیریم:

الف) یک تابع انتخاب برای $\mathbb{N}$ (مجموعهٔ اعداد طبیعی) وجود دارد.

ب) یک تابع انتخاب برای $\mathbb{R}$ (مجموعهٔ اعداد حقیقی) وجود دارد.

اثبات کدام‌یک از گزاره‌های فوق الزاماً نیازمند استفاده از اصل انتخاب است؟

۱) فقط (الف) ۲) فقط (ب) ۳) هر دو ۴) هیچ‌کدام