



## سؤالات آزمون گروه فنی و مهندسی دکتری ۹۸

## استعداد تحصیلی

## بخش اول: درک مطلب

■ راهنمایی: در این بخش، دو متن به طور مجزا آمده است. هریک از متن‌ها را به دقت بخوانید و پاسخ سؤال‌هایی را که در زیر آن آمده است، با توجه به آنچه می‌توان از متن استنتاج یا استنباط کرد، پیدا کنید و در پاسخنامه علامت بزنید.

## متن (۱)

او در نظریه خود که بعدها با مشاهدات تجربی هم تأیید شد، نشان داد که زمان و فضا عناصر جدای از هم نیستند، بلکه ما در حال زندگی در جهانی به هم پیوسته و درهم تنیده هستیم که از چهار بُعد تشکیل شده است. چهار بُعدی که سه‌تای آن را ابعاد مکانی و یک مورد آن را بُعد زمان تشکیل می‌دهد، اما در کل، یک ساختار واحد به نام فضا - زمان می‌سازند. او همچنین ثابت کرد که همه این پارامترها، بسته به شرایط تغییر می‌کنند. برای مثال، اگر شما با سرعتی بسیار بالا (یعنی سرعتی قابل مقایسه با سرعت نور) حرکت کنید، ساعت شما آهسته‌تر گذر زمان را نشان می‌دهد؛ به این معنی که زمان برای شما کندتر از کسی می‌گذرد که با آن سرعت حرکت نمی‌کند. آزمایش معروف و ذهنی اینشتین این موضوع را به خوبی تأیید می‌کند. طبق این آزمایش، اگر سرعت شما به عدد ممنوعه سرعت نور برسد (از مشکلات فنی و نتایج آن بر بدن‌تان صرف نظر کنید)، زمان برای شما متوقف خواهد شد و هیچ زمانی برای شما نخواهد گذشت.

بسیار اغواکننده است که یک گام این موضوع را جلوتر ببریم و بگوییم که اگر با سرعت بیش از نور حرکت کنیم، بدین ترتیب می‌توانیم زمان را دور بزنیم. متأسفانه اینشتین و طبیعت مانع شما می‌شوند و آنها سرعت بیش از نور را برای جهان ما ممنوع کرده‌اند. اما تا همین جا هم امکان دستکاری در زمان به وجود آمده است. اما آیا علم می‌تواند راه‌هایی برای سفر زمان پیشنهاد کند؟

به نظر می‌رسد دانشمندان سعی می‌کنند راه‌هایی، حداقل به شکل نظری، برای این مشکل پیدا کنند. با استفاده از نظریه اینشتین و توجه به پیوستگی فضا - زمان، شاید هندسه جهان به کمک ما بیاید. اگر فضا - زمان، موجودی پیوسته باشد که امروزه می‌دانیم این‌گونه است و اگر بتوانیم به گونه‌ای بر هندسه فضا - زمان تأثیر بگذاریم، شاید بتوانیم منحنی‌هایی در فضا - زمان پیدا کنیم که ما را به گذشته یا آینده ببرد. به عنوان مثال، می‌دانیم که جرم بر شکل فضا - زمان تأثیر می‌گذارد و در واقع، این یکی از پیش‌بینی‌های نسبیت اینشتین بود که نخستین بار در حین یک خورشیدگرفتگی توسط فیزیکدان آمریکایی، ادینگتون، تأیید شد. ادینگتون برای تأیید این نظر، هنگام یک خورشیدگرفتگی کامل، تصویری از خورشید تیره‌شده و ستاره‌های اطراف خورشید تهیه کرد. اگر اینشتین درست می‌گفت وجود خورشید به عنوان یک جرم بزرگ باید موجب ایجاد خمیدگی اندکی در فضا - زمان می‌شد. برای اینکه این موضوع را درک کنید، یک لحظه تصور کنید فضا - زمان مانند یک ورقه پلاستیکی بزرگ است که آن را محکم در دست گرفته‌اید. حال اگر یک توپ فلزی سنگین روی این ورقه پلاستیکی بگذارید، درجایی که این توپ قرار گرفته است، این ورقه پلاستیکی شما اندکی خمیده می‌شود. خورشید در این آزمایش، نقش همان توپ فلزی را بازی می‌کند. اگر خورشید این انحنا را ایجاد می‌کرد، آن وقت نور ستاره‌هایی که از نزدیکی خورشید می‌گذشتند، اندکی منحرف می‌شد و در مکانی اندکی متفاوت با جایی که باید باشند، دیده می‌شدند. ادینگتون برای اینکه این مسئله را آزمایش کند، شش ماه پیش از کسوف که خورشید در نیمه دیگر آسمان بود، از همان منطقه که قرار بود خورشیدگرفتگی رخ دهد، تصویربرداری کرد و موقعیت دقیق ستاره‌ها نسبت به یکدیگر را ثبت کرد و این حالتی است که هنوز گلوله فلزی را روی صفحه نگذاشته‌اید، سپس این تصویر را با تصویر هنگام کسوف مقایسه کرد و متوجه شد ستاره‌هایی که در اطراف خورشید وجود داشتند، هنگام گرفت، در مختصات اندکی متفاوت با جای پیشین خود دیده می‌شدند: یعنی خورشید توانسته است انحنا کوچکی در فضا - زمان خود ایجاد کند. حال اگر این گلوله شما بسیار سنگین‌تر شود، چه اتفاقی خواهد افتاد؟ این انحنا بیشتر و بیشتر می‌شود و ممکن است در نهایت، بین دو ناحیه فضا - زمان پل بزند. چنین اجرامی در عالم وجود دارند.

کج ۱- مقصود اصلی متن، کدام است؟

(۲) بررسی تحول نظریه ساختار واحد فضا - زمان

(۱) ارزیابی نقش ادینگتون در بسط نظریه اینشتین

(۴) بررسی امکان سفر در زمان

(۳) نقد و بررسی نظریه اینشتین درباره زمان

کج ۲- کدام مورد، به درستی، نقش پاراگراف ۲ را در متن توصیف می‌کند؟

(۱) پیش‌زمینه برای بحث مطرح در پاراگراف بعدی خود را فراهم می‌آورد.

(۲) با نادیده انگاشتن محدودیت‌های مطرح در پاراگراف ۱، موضوع را به مطلبی کاملاً نظری تبدیل می‌کند.

(۳) با ذکر دو معضل مهم، دلیل آنکه پاراگراف ۱، عدد ممنوعه برای رسیدن به سرعت نور مطرح می‌سازد را کمی توضیح می‌دهد.

(۴) نشان می‌دهد که نظریه اینشتین که در پاراگراف ۱ آمده است، وقتی هیجان‌انگیز است که برخی پیش‌شرط‌های آن را حذف کنیم.

کجه ۳- طبق متن، کدام مورد درست به حساب می‌آید؟

- (۱) موجودیت پیوسته فضا - زمان  
(۲) تغییرناپذیری پارامترهای فضا - زمان  
(۳) مستقل بودن شکل فضا - زمان از جرم  
(۴) مشاهده دو ناحیه مختلف فضا - زمان به‌طور همزمان

کجه ۴- طبق پاراگراف ۳، عبارت زیر که در متن، زیر آن خط کشیده شده است، به کدام پدیده اشاره دارد؟  
«این حالتی است که هنوز گلوله فلزی را روی صفحه نگذاشته‌اید.»

- (۱) زمانی که ادینگتون، فرضیه خود را به بوته آزمایش واقعی گذاشت.  
(۲) زمانی که نور ستاره‌هایی که در اطراف خورشید بودند، شروع به انحراف کردند.  
(۳) زمانی که خورشید هنوز تأثیر خود را برجا نگذاشته بود.  
(۴) زمانی که موقعیت ستاره‌ها نسبت به خود و نسبت به خورشید تثبیت شده بود.

### متن (۲)

توربین‌های بادی قادر به تبدیل انرژی باد به انرژی الکتریکی بوده و عموماً در دو نوع عمودی و افقی ساخته می‌شوند. در مدل‌های توربین بادی محور افقی، ژنراتور و تبدیل‌کننده نیروی باد به انرژی الکتریکی در بالای محور مرتفعی قرار دارد که پروانه‌های توربین در بالای آن واقع شده‌اند. طول و تعداد پره‌های توربین‌های بادی، براساس شرایط محیطی، متنوع و مختلف است، اما در بیشتر مناطق دنیا، از توربین‌های سه‌پره استفاده شده و طول پره‌ها نیز بستگی مستقیم به نوع بادخیز بودن منطقه دارد. به طور میانگین، طول پره‌های توربین‌های بادی بین ۲۰ تا ۴۰ متر بوده و ارتفاع میله‌های محور اصلی آن نیز می‌تواند بین ۶۰ تا ۹۰ متر باشد. البته در این موارد، استاندارد مشخصی وجود نداشته و طراحان و مهندسان، با توجه به شرایط بومی هر منطقه، نسبت به طراحی و مشخص کردن ابعاد توربین‌ها اقدام می‌کنند.

در نوع دیگر توربین‌های بادی موجود در دنیا که به توربین‌های محور عمودی شهرت دارند، سیستم تبدیل‌کننده انرژی به‌صورت عمودی قرار گرفته و این موضوع سبب می‌شود که توربین نیازی به چرخش به سمت باد را نداشته باشد. البته استفاده از این مدل توربین‌ها، به نسبت توربین‌های محور افقی، چندان رایج نبوده و بیشتر مختص موارد ویژه‌ای است که در آن، امکان نصب توربین‌های افقی وجود نداشته یا جهت وزش باد، دائماً در حال تغییر است. در کل، باید در نظر داشت که توربین‌های گروه اول یا همان توربین‌های بادی محور افقی، دارای کاربری بیشتری بوده و از نظر اقتصادی نیز مقرون به‌صرفه‌تر هستند.

اتفاقاتی که در داخل یک توربین بادی محور افقی در هنگام وزش باد می‌افتد، از این قرار است: وزش باد سبب چرخش پره‌های توربین می‌شود که به قسمت گرداننده متصل است. [۱] محور توربین شروع به چرخیدن به حول خود کرده و انرژی جنبشی را از باد دریافت می‌کند. این نیرو توسط محور مرکزی پشتیبانی و تبدیل می‌شود. در بخش داخلی ناسل (nacelle) که اصلی‌ترین بخش توربین محسوب شده و در بالای محور میله و انتهای قاعده پره‌ها قرار دارد، یک جعبه‌دنده یا گیربکس ویژه‌ای وجود دارد که نیروی ایجادشده ناشی از چرخش آرام پره‌های توربین را که به‌طور متوسط در حدود شانزده دور در دقیقه است، به سرعت زیادی، برابر با هزاروششصد دور در دقیقه تبدیل می‌کند که این میزان سرعت، برای تأمین انرژی ژنراتور توربین کفایت می‌کند. [۲] ژنراتور دقیقاً در پشت جعبه‌دنده توربین‌ها قرار گرفته و انرژی چرخشی تقویت‌شده را به انرژی الکتریکی تبدیل می‌کند. بادسنج‌ها که نوع و چگونگی وزش باد را تحت کنترل دارند، در بخش تحتانی ناسل قرار گرفته و می‌توانند سرعت و جهت باد را تشخیص دهند. براساس اطلاعات دریافت‌شده از بادسنج‌ها، جهت و سرعت وزش باد شناسایی شده و موتورهای ویژه‌ای، پروانه‌های توربین را به سمت موافق باد تغییر می‌دهند تا حداکثر انرژی توسط توربین از وزش باد به‌دست آید. [۳] امروزه بیشتر این بادسنج‌ها به شبکه اینترنت متصل بوده و علاوه بر رصد شرایط محلی، از وضعیت آب‌وهوا و پیش‌بینی وزش باد مطلع هستند. در صورتی که سرعت باد، بسیار بیشتر از حدّ عادی باشد، در داخل توربین‌ها، سیستم ترمز اتوماتیکی قرار دارد که اجازه چرخش با سرعت بیشتر از حدّ استاندارد که می‌تواند سبب آسیب رساندن به توربین شود، را نداده و سرعت چرخش پره‌ها را کم می‌کند. سرعت بالای باد، سبب سریع‌تر چرخیدن پره‌ها شده و به تبع آن، جعبه‌دنده با سرعت بسیار سرسام‌آوری خواهد چرخید که این موضوع سبب آسیب دیدن سیستم توربین می‌شود. انرژی الکتریکی تهیه‌شده توسط ژنراتور، به کمک یک رشته کابل که از داخل محور عمودی توربین عبور می‌کند، به سطح زمین منتقل می‌شود. [۴] انرژی تولیدشده، جهت مصارف مختلف وارد شبکه برق شهری می‌شود.

کجه ۵- کدام مورد را می‌توان از اطلاعات مندرج در پاراگراف‌های ۱ و ۲ استنباط کرد؟

- (۱) در توربین‌های افقی و عمودی، مکانیزم تبدیل انرژی، با یکدیگر متفاوت است.  
(۲) برخی طراحان ممکن است توربین‌هایی طراحی کنند که طول پره‌های آنها در دامنه حدّ متوسط نباشد.  
(۳) بین ارتفاع میله‌های محور اصلی توربین‌های بادی و نوع بادخیز بودن منطقه، همبستگی مستقیم وجود دارد.  
(۴) عدم نیاز توربین‌های عمودی به تطبیق با جهت وزش باد، باعث مقرون به‌صرفه بودن آنها نسبت به نوع دیگر توربین‌ها می‌شود.



۶- طبق متن، کدام مورد در خصوص بادسنج‌ها، صحیح است؟

- (۱) نوع و جهت باد را تعیین و با توجه به این اطلاعات، مستقیماً عملکرد توربین را تغییر می‌دهند.
- (۲) زمانی فعال بوده و کار خود را انجام می‌دهند که ارتباطشان با شبکه اینترنت برقرار است.
- (۳) در زیر ناسل قرار داشته و برای حفظ تعادل و کارکرد دقیق توربین لازم هستند.
- (۴) آنها سمت چرخش پروانه‌های توربین را مشخص می‌کنند.

۷- در متن فوق، از کدام روش استدلالی استفاده نشده است؟

- (۱) قیاس (۲) توصیف فرایند (۳) توصیف عملکرد (۴) توصیف شباهت و اختلاف

۸- کدام قسمت در متن که با شماره‌های [۱]، [۲]، [۳] و [۴] مشخص شده‌اند، بهترین قسمت برای قرار گرفتن جمله زیر است؟  
 «یک دستگاه ترانسفورماتور، ولتاژ برق تولیدشده را هماهنگ کرده و آن را به نیروگاه مجاور توربین‌ها منتقل می‌کند.»

- (۱) [۱] (۲) [۲] (۳) [۳] (۴) [۴]

### بخش دوم: حل مسئله

■ **راهنمایی:** این بخش از آزمون استعداد، از انواع مختلف سؤال‌های کمی، شامل مقایسه‌های کمی، استعداد عددی و ریاضیاتی، حل مسئله و ... تشکیل شده است.

• توجه داشته باشید به خاطر متفاوت بودن نوع سؤال‌های این بخش از آزمون، هر سؤال را براساس دستورالعمل ویژه‌ای که در ابتدای هر دسته سؤال آمده است، پاسخ دهید.

**راهنمایی:** هر کدام از سؤال‌های ۹ تا ۱۳ را به دقت بخوانید و جواب هر سؤال را در پاسخنامه علامت بزنید.

۹- در شکل زیر، بین چهار عدد هر دسته، ارتباط خاص و یکسانی برقرار است. به جای علامت سؤال، کدام عدد باید قرار بگیرد؟

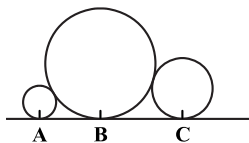
۳	?	۵	۲	۴
۱۰	۱۱	۹	۱۸	۲
۷	۶		۵	۳
۸	۴	۶	۲	۴
۲	۸	۱۰	۳	۵

- (۱) ۱۰
- (۲) ۹
- (۳) ۸
- (۴) ۷

۱۰- در یک ساعت شنی، وقتی که نسبت مقدار شن قسمت بالایی به قسمت پایینی، ۴ به ۱ است، ۸ دقیقه طول می‌کشد تا مقدار شن قسمت بالایی آن، ۴۰ درصد کاهش یابد. کدام یک از زمان‌های زیر را به‌طور دقیق می‌توان با این ساعت تعیین کرد؟

- (۱) یک ساعت و نیم (۲) یک ساعت و ربع (۳) ۵۵ دقیقه (۴) ۴۰ دقیقه

۱۱- در شکل زیر، شعاع دایره بزرگ ۹ برابر شعاع دایره کوچک و ۴ برابر شعاع دایره متوسط است. فاصله نقاط B و C، چند برابر فاصله نقاط A و B است؟

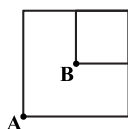


- (۱) ۱/۵
- (۲) ۲
- (۳) ۲/۲۵
- (۴) ۳

۱۲- سه ظرف x، y و z که z خالی و دوتای دیگر، دارای مقادیری آب هستند، در اختیار داریم. پس از آنکه از ظروف x و y، مقادیری آب درون z می‌ریزیم، هر سه ظرف به یک میزان آب خواهند داشت. اگر ۳۲ درصد از آبی که در ظرف z است، از ظرف x درون آن ریخته شده باشد، نسبت مقدار آب موجود در دو ظرف x و y، در ابتدا کدام بوده است؟

- (۱) ۹ به ۱۴ (۲) ۱۰ به ۱۶ (۳) ۱۱ به ۱۴ (۴) ۱۲ به ۱۶

۱۳- شکل زیر، دو مربع را نشان می‌دهد که نقطه B مرکز مربع بزرگ است و توسط ۳ هزار دومینو که روی اضلاع شکل قرار گرفته‌اند، ساخته شده است. قطعات این دومینو، که فاصله آن‌ها از یکدیگر کاملاً یکسان است، طوری چیده شده‌اند که هر کدام بیفتند، قطعات هر دو طرف خود را می‌اندازد. اگر سرعت خراب شدن دومینوها ۲۰ عدد در ثانیه باشد و از دو نقطه مشخص شده در شکل، آنها را به‌طور همزمان خراب کنیم، چند ثانیه طول می‌کشد تا کل الگو خراب شود؟



- (۱) ۳۰
- (۲) ۴۰
- (۳) ۴۵
- (۴) ۶۰

## پاسخنامه آزمون گروه فنی و مهندسی دکتری ۹۸

## استعداد تحصیلی

## بخش اول: درک مطلب

## پاسخ سؤالات متن (۱)

۱- گزینه «۴» نویسنده به دنبال بررسی امکان سفر در زمان در چهارچوب نظریات علمی است و این موضوع از جملات انتهایی هر سه پاراگراف و محتوای پاراگراف دوم نیز مشخص می‌گردد.

نادرستی سایر گزینه‌ها:

بررسی گزینه (۱): نویسنده از آزمایش ادینگتون به عنوان وسیله‌ای در جهت تقویت نظریه‌ی نسبیت اینشتین استفاده می‌کند که حامی مقصود اصلی‌اش می‌باشد که بررسی امکان سفر در زمان است.

بررسی گزینه (۲): سیر تحول نظریه فضا - زمان در متن بررسی نشده و فقط نظریه‌ی نهایی آن مطرح گردیده است.

بررسی گزینه (۳): نقدی بر نظریه‌ی اینشتین درباره‌ی زمان در متن صورت نگرفته است. آزمایش ادینگتون نظریه‌ی اینشتین درباره‌ی تأثیر جرم بر فضا - زمان را بررسی می‌کند.

۲- گزینه «۱» پاراگراف سوم دقیقاً جوابی است که برای سؤال انتهایی مطرح‌شده در انتهای پاراگراف دوم، آورده شده است. در نتیجه، پاراگراف دوم حکم پیش‌زمینه را برای پاراگراف بعدی خود دارد.

۳- گزینه «۱» در جملات ابتدایی پاراگراف اول آشکارا درهم تنیده و پیوسته بودن ابعاد فضا و زمان مطرح شد.

نادرستی سایر گزینه‌ها:

بررسی گزینه (۲): هدف متن بررسی امکان‌پذیری تغییر دادن پارامتر زمان بود و در انتها هم به نتیجه‌ای دال بر غیرممکن بودن آن نرسید.

بررسی گزینه (۳): در جملات ابتدایی پاراگراف اول آشکارا از مستقل نبودن مفاهیم فضا و زمان از یکدیگر صحبت شد.

بررسی گزینه (۴): در مورد این موضوع در متن چیزی نیامده است.

۴- گزینه «۳» در پاراگراف سوم از تمثیل «گلوله‌ی فلزی روی یک صفحه» برای نشان دادن تأثیر جرم (خورشید) بر فضا - زمان استفاده شد. پس منظور عبارت «هنوز گلوله‌ی فلزی را روی صفحه نگذاشته‌اید» این است که هنوز خورشید، فضا - زمان را خمیده نکرده و تأثیر خود را نگذاشته است.

## پاسخ سؤالات متن (۲)

۵- گزینه «۲» در جمله‌ی انتهایی پاراگراف اول آورده شده است که ابعاد توربین اندازه‌های استاندارد ندارد و مهندسان بر اساس شرایط هر منطقه آن‌ها را طراحی می‌کنند. پس گزینه (۲) صحیح است.

نادرستی سایر گزینه‌ها:

بررسی گزینه (۱): در مورد مکانیزم تبدیل انرژی در توربین‌ها در این دو پاراگراف مطلبی نیامده است.

بررسی گزینه (۳): در پاراگراف اول به ارتباط طول پره با بادخیز بودن منطقه اشاره شده است نه ارتفاع میله. همچنین به معکوس یا مستقیم بودن این وابستگی نیز اشاره‌ای نشده است.

بررسی گزینه (۴): در انتهای پاراگراف دوم به وضوح از مقرون به‌صرفه‌تر بودن توربین‌های افقی صحبت شده است.

۶- گزینه «۴» در پاراگراف سوم آمده است که بسته به اطلاعات دریافتی توسط بادسنج‌ها، پروانه‌ها به سمت موافق باد تغییر جهت می‌دهند.

نادرستی سایر گزینه‌ها:

بررسی گزینه (۱): عملکرد توربین‌ها تغییر نمی‌کند.

بررسی گزینه (۲): قابلیت اتصال به اینترنت یک قابلیت جانبی برای بادسنج است نه حیاتی.

بررسی گزینه (۳): در متن اشاره‌ای به نقش حفظ تعادل برای بادسنج‌ها نشده است.

۷- گزینه «۱»

بررسی گزینه (۲): فرآیند تبدیل انرژی در توربین‌ها در متن بیان شده است.

بررسی گزینه (۳): عملکرد بادسنج‌ها در پاراگراف سوم توصیف شده است.

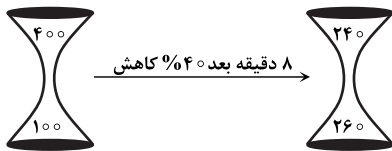
بررسی گزینه (۴): در پاراگراف دوم درباره‌ی شباهت‌ها و اختلافات توربین‌های بادی افقی و عمودی صحبت شده است.

۸- گزینه «۴» از آن جایی که جمله‌ی مطرح شده در سؤال مربوط به قسمت بعد از تبدیل انرژی جنبشی به الکتریکی در توربین است، پس جای درست آن [۴] می‌باشد. در قسمت‌های سایر گزینه‌ها هنوز صحبتی از تولید برق نشده است.

## بخش دوم: حل مسئله

۹- گزینه «۴» سؤال نسبتاً راحتی است! در هر دسته، ضرب دو عدد باید برابر با مجموع دو عدد دیگر شود. مثلاً در دسته سمت چپ از بالا  $۲ \times ۷ = ۱۰ + ۱۱$  و یا در دسته سمت راست از بالا  $۲ + ۱۸ = ۴ \times ۵$  است. بنابراین به جای علامت سؤال باید عدد ۷ قرار گیرد تا تساوی  $۲ \times ۲ = ۹ + ۵$  برقرار شود.

۱۰- گزینه «۲»



**روش اول:** با یک سؤال نسبت و تناسب ساده روبه‌رو هستیم. برای درک بهتر فرض می‌کنیم که داخل ساعت شنی ۵۰۰ عدد شن باشد! فراموش نکنیم که در ساعت شنی، به شرطی می‌توان به طور دقیق زمان را مشخص کرد که همه‌ی شن‌ها در یک قسمت آمده باشد. اگر فرض کنیم نسبت تعداد شن‌های بالا به پایین ۴ به ۱ است، مطابق شکل مقابل داریم:

پس از ۸ دقیقه، ۴۰٪ از شن‌های بالا به پایین می‌ریزد، یعنی ۱۶۰ شن. پس می‌توان گفت در هر ۸ دقیقه ۱۶۰ شن از بالا به پایین می‌ریزد.

دقیقه شن

$$\frac{۱۶۰}{۵۰۰} \times ۸ \Rightarrow t = \frac{۵۰۰ \times ۸}{۱۶۰} = ۲۵$$

پس کلاً ۲۵ دقیقه را می‌توان با این ساعت شنی مشخص کرد. از بین گزینه‌ها تنها می‌توان گزینه‌ای به طور قطع با این ساعت شنی مشخص کرد که مضرب ۲۵ باشد. گزینه (۱) یک ساعت و نیم = ۹۰ دقیقه

گزینه (۲) یک ساعت و ربع = ۷۵ دقیقه ✓

گزینه (۴) ۴۰ دقیقه

گزینه (۳) ۵۵ دقیقه

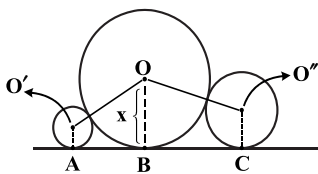
**روش دوم:** اگر کل شن‌های موجود در ساعت را  $w$  فرض کنیم، ۸ دقیقه طول می‌کشد تا ۴۰٪ از  $\frac{۴}{۵}w$  انجام شود (اگر کل کار را  $w$  در نظر بگیریم،

۴ واحد آن در قسمت بالا و یک واحد آن در قسمت پایین است. یعنی  $\frac{۴}{۵}w$  در قسمت بالاست و  $\frac{۱}{۵}w$  در قسمت پایین است). می‌توانیم تناسب زیر را در نظر بگیریم:

مدت زمان لازم (دقیقه) حجم کار

$$\frac{\frac{۴۰}{۱۰۰} \times \frac{۴}{۵}w}{w} \times ۸ \Rightarrow t = \frac{۸ \times w}{\frac{۴۰}{۱۰۰} \times \frac{۴}{۵}w} = \frac{۵۰۰ \times ۸}{۴ \times ۴۰} = ۲۵$$

یعنی کل کار در ۲۵ دقیقه انجام می‌شود. ما همه‌ی شن‌های ساعت را  $w$  فرض کردیم. پس ۲۵ دقیقه را می‌توان با این ساعت شنی دقیق تعیین کرد. پس گزینه‌ای صحیح است که مضرب ۲۵ دقیقه باشد و گزینه (۲) صحیح است.



۱۱- گزینه «۱» در این‌گونه سؤالات، معمولاً به‌طور خودکار باید نقاط مهم را به هم اتصال داد! نقاط مهم یعنی مراکز دایره‌ها به یکدیگر و همین‌طور مرکز هر دایره به خط مماس بر آن، بعد از آن باید دنبال راه‌حل باشیم. فرض کنیم شعاع دایره بزرگ  $x$  باشد، طبق صورت سؤال شعاع دایره کوچک  $\frac{x}{۹}$  و شعاع دایره متوسط هم برابر  $\frac{x}{۴}$  می‌شود.

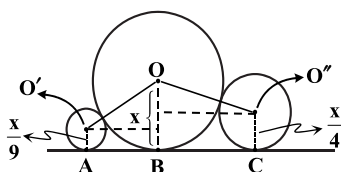
با رسم کردن مراکز متوجه می‌شویم که  $OO' = x + \frac{x}{۴} = \frac{۵}{۴}x$  و  $x + \frac{x}{۹} = \frac{۱۰}{۹}x$  برابر با  $OO'' = x + \frac{x}{۴} = \frac{۵}{۴}x$  است.

خُب دیگر چیزی از صورت سؤال نداریم و این یعنی باید با همین اطلاعات به مسئله جواب دهیم! اما خواسته‌ی سؤال چیست؟ طراح سؤال، نسبت  $BC$  به  $AB$  را خواسته است یعنی مقدار  $\frac{BC}{AB}$  مدنظر است. حالا خوب به شکل دقت کنید؛ آیا می‌توان  $BC$  و  $AB$  را هر کدام جداگانه حساب کرد و سپس

مقدار عددی  $\frac{BC}{AB}$  را معلوم کرد؟ به نظر نمی‌رسد بتوان چنین کاری کرد؛ اما اگر  $BC$  و  $AB$  را

بر حسب  $x$  به‌دست بیاوریم، آن‌گاه می‌توان نسبت خواسته شده را به راحتی معلوم کرد، اما چگونه؟! اگر در هر دو دوزنقه راست و چپ دو خط موازی  $BC$  و  $AB$  از محل مرکز دایره‌های راست و چپ رسم

کنیم، شکل مقابل را داریم:



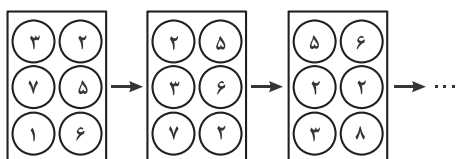
## بخش دوم: حل مسئله

■ راهنمایی: این بخش از آزمون استعداد، از انواع مختلف سؤال‌های کمی، شامل مقایسه‌های کمی، استعداد عددی و ریاضیاتی، حل مسئله و ... تشکیل شده است.

• توجه داشته باشید به‌خاطر متفاوت بودن نوع سؤال‌های این بخش از آزمون، هر سؤال را براساس دستورالعمل ویژه‌ای که در ابتدای هر دسته سؤال آمده است، پاسخ دهید.

راهنمایی: هر کدام از سؤال‌های ۹ تا ۱۳ را به‌دقت بخوانید و جواب هر سؤال را در پاسخنامه علامت‌بزنید.

کله ۹- در پنج شکل متوالی و پشت‌سرهم زیر، ارتباط خاص و یکسانی بین اعداد برقرار است. به‌جای علامت سؤال، کدام عدد زیر باید قرار بگیرد؟

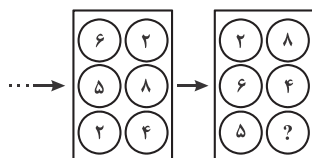


(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶



کله ۱۰- سعید مسافتی را که با برداشتن ۱۶ قدم به‌صورت دویدن طی می‌کند، همان مسافت را به‌صورت پیاده‌روی، با ۲۶ قدم می‌پیماید. اگر او مسیر خانه به پارک محله‌شان را به‌صورت دویدن طی کند، ۴۰ قدم برمی‌دارد. حال اگر سعید می‌خواست قسمتی از همین مسیر را به‌جای دویدن، پیاده طی کند، تعداد قدم‌هایش در مجموع،  $\frac{1}{5}$  برابر می‌شد. در این حالت، وی چند درصد از این مسیر را باید می‌دوید؟

(۴) ۲۵

(۳) ۲۰

(۲) ۱۵

(۱)  $\frac{13}{3}$ 

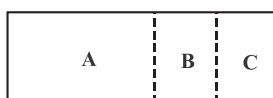
کله ۱۱- مقوایی مستطیل‌شکل که مربع نیست، در اختیار داریم. مطابق شکل زیر، با دو برش از روی نقطه‌چین‌ها، دو مستطیل یکسان جدا می‌کنیم، به‌طوری‌که از کنار هم قرار گرفتن سه قطعه A، B و C، یک مربع حاصل شود. مساحت مستطیل A، چند برابر مساحت مستطیل B است؟

(۱)  $\frac{1}{5}$ 

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴



کله ۱۲- تعدادی دانش‌آموز، روی محیط دایره‌ای بزرگ، وسط حیاط مدرسه‌شان ایستاده و دست‌های یکدیگر را گرفته‌اند. با خروج ۲ نفر غیرمجاور از آنها، دانش‌آموزان به دو دسته به نسبت ۲ به ۵ تقسیم می‌شوند. سپس، اگر یک دانش‌آموز دیگر از دسته بزرگ‌تر خارج شود، همین دسته نیز، به دو دسته به نسبت ۳ به ۵ تقسیم می‌شود. حداقل تعداد دانش‌آموزان در ابتدا، کدام می‌تواند باشد؟

(۴) ۹۳

(۳) ۵۱

(۲) ۳۷

(۱) ۲۳

کله ۱۳- هر کدام از حروف A، B، C، D، E و F، به‌طور متمایز، معادل یکی از اعداد ۱ تا ۶ (نه لزوماً به‌ترتیب) است، به‌طوری‌که روابط زیر برقرار باشند. میانگین A و E کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{5}$ 

(۲) ۴

(۳)  $\frac{4}{5}$ 

(۴) ۵

$$A + B = 7$$

$$B \times D = A + F$$

$$C - F = E + F$$



**راهنمایی:** هر کدام از سؤال‌های ۱۴ و ۱۵، شامل دو مقدار یا کمیت هستند، یکی در ستون «الف» و دیگری در ستون «ب». مقادیر دو ستون را با یکدیگر مقایسه کنید و با توجه به دستورالعمل، پاسخ صحیح را به شرح زیر تعیین کنید:

- اگر مقدار ستون «الف» بزرگ‌تر است، در پاسخنامه گزینه ۱ را علامت بزنید.
- اگر مقدار ستون «ب» بزرگ‌تر است، در پاسخنامه گزینه ۲ را علامت بزنید.
- اگر مقادیر دو ستون «الف» و «ب» با هم برابر هستند، در پاسخنامه گزینه ۳ را علامت بزنید.
- اگر براساس اطلاعات داده‌شده در سؤال، نتوان رابطه‌ای را بین مقادیر دو ستون «الف» و «ب» تعیین نمود، در پاسخنامه گزینه ۴ را علامت بزنید.

**ک** ۱۴- سه پروژه برای آسفالت کردن سه جاده A، B و C، همزمان با هم کلید می‌خورند. مجموع طول جاده‌های B و C به اندازه طول جاده A است و کار در هر سه پروژه به‌طور یکنواخت پیش می‌رود.

الف	ب
مدت‌زمانی که باید از شروع پروژه‌ها بگذرد تا مسافت آسفالت‌نشده جاده B، نصف مسافت آسفالت‌نشده جاده A باشد.	چهار برابر مدت‌زمانی که باید از شروع پروژه‌ها بگذرد تا کار آسفالت کردن جاده C تمام شود.

**ک** ۱۵- رضا از هر کدام از اسکناس‌های ۲، ۵ و ۱۰ هزار تومانی، ۳ عدد (مجموعاً ۹ اسکناس) دارد.

الف	ب
حداقل مبلغی که می‌توان از رضا طلب کرد که وی برای پرداخت آن مجبور باشد از هر نوع اسکناس، حداقل یک عدد بدهد.	حداقل مبلغی که رضا می‌تواند توسط ۶ اسکناس که حداقل یکی از آنها ۱۰ هزار تومانی باشد، بپردازد.

### بخش سوم: سؤالات تحلیلی

**راهنمایی:** در این بخش، توانایی تحلیلی شما مورد سنجش قرار می‌گیرد. سؤال‌ها را به‌دقت بخوانید و پاسخ صحیح را در پاسخنامه علامت بزنید.

**راهنمایی:** با توجه به اطلاعات زیر، به سؤال‌های ۱۶ تا ۱۹ پاسخ دهید.

چهار مریض به نام‌های A، B، C و D، به ترتیب، به‌صورت تلفنی، یکی از نوبت‌های ۱ تا ۴ را برای بعدازظهر یک روز مشخص در یک مطب دندانپزشکی رزرو کرده‌اند. در روز موردنظر، افراد با ترتیبی (که لزوماً ترتیب نوبت رزروشان نیست)، وارد مطب می‌شوند و تا زمانی که نوبتشان برسد، در سالن انتظار مطب می‌نشینند. اطلاعات زیر موجود است:

- دومین نوبت رزرو شده، مربوط به B نیست.
- کسی که دقیقاً بعد از A وارد مطب شده، نوبتش زودتر از A است.
- آخرین نفری که وارد مطب شده، B را می‌بیند که به تنهایی در مطب نشسته است.
- D، آخرین نفر وارد شده به مطب نیست.

**ک** ۱۶- A، بعد از چه کسی می‌تواند وارد مطب شده باشد؟

- (۱) D  
(۲) C  
(۳) B  
(۴) A، همواره اولین کسی است که وارد مطب شده است.

**ک** ۱۷- اگر سومین نفر وارد شده به مطب، آخرین نوبت را داشته باشد، کدام مورد زیر، صحیح است؟

- (۱) سومین نفر وارد شده به مطب، D بوده است.  
(۲) اولین نفر وارد شده به مطب، دومین نوبت را داشته است.  
(۳) دومین نفر وارد شده به مطب، سومین نوبت را داشته است.  
(۴) چهارمین نفر وارد شده به مطب، چهارمین نوبت را داشته است.

**ک** ۱۸- اگر اولین نفر وارد شده، آخرین نوبت را داشته باشد، دومین نفر وارد شده به مطب، چه کسی است؟

- (۱) D  
(۲) C  
(۳) B  
(۴) A

**ک** ۱۹- کدام فرد، به‌طور قطع، مشخص است که چندمین نفر وارد شده به مطب است؟

- (۱) C  
(۲) A  
(۳) B  
(۴) D

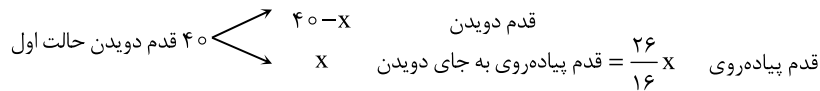
۱۰- گزینه «۳» مسلماً زمانی که سعید پیاده‌روی می‌کند نسبت به زمانی که می‌دود، طول قدم‌های او کوتاه‌تر و تعداد قدم‌ها بیشتر می‌شود. با توجه به

اطلاعات داده‌شده در سؤال داریم:

$$16 \text{ دویدن} \quad X \Rightarrow \frac{26}{16} X$$

$$26 \text{ پیاده‌روی} \quad ?$$

اگر قسمتی از مسیر را که به جای دویدن، پیاده طی می‌کند  $X$  بنامیم، خواهیم داشت:



در نهایت تعداد قدم‌های طی شده که  $1/5$  برابر حالت قبل می‌شود برابر است با:

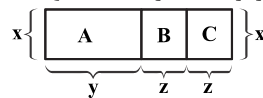
$$(40 - X) + \frac{26}{16} X = 1/5 \times 40 \Rightarrow X = 32$$

در نتیجه این مسیر را  $40 - X = 8$  قدم دویدن و  $\frac{26}{16} X = 52$  قدم پیاده‌روی طی می‌کند ( $8 + 52 = 60$ ).

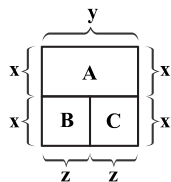
بنابراین مقدار درصد دویدن در حالت دوم برابر است با:

$$\frac{8}{60} \times 100 = 13.3\%$$

۱۱- گزینه «۲» با توجه به اطلاعات داده‌شده، مساحت  $B$  و  $C$  برابر است. در نتیجه با توجه به شکل می‌توان گفت:

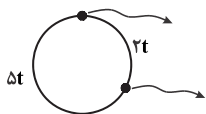


اکنون  $A$  و  $B$  و  $C$  یک مربع تشکیل می‌دهند که می‌توانند به شکل زیر قرار گیرند:



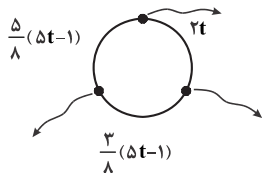
$$y = 2z \Rightarrow \frac{S_A}{S_B} = \frac{xy}{xz} = \frac{y}{z} = 2$$

۱۲- گزینه «۲» اگر دو دانش‌آموز غیرمجاور از صف خارج شوند، نسبت دانش‌آموزان باقی‌مانده  $2$  به  $5$  می‌شود. پس می‌توان گفت:



دایره به دو قسمت که یک طرف تعداد افراد  $2t$  است و در طرف دیگر  $5t$  تقسیم می‌شود.

و اگر از دسته بزرگ‌تر یک نفر خارج شود، نسبت دانش‌آموزان باقی‌مانده این دسته  $3$  به  $5$  می‌شود.



از  $5t$  ابتدا یک نفر خارج می‌شود پس  $5t-1$  نفر باقی می‌ماند و سپس  $(5t-1)$  به نسبت  $3$  و  $5$  تقسیم می‌شوند.

بر این اساس می‌توان گفت:

$$2t + 5t + 2 = 7t + 2 = \text{تعداد کل دانش‌آموزان}$$

$$8 \mid 5t - 1 = 8, 16, 24, 32, \dots$$

همچنین  $5t-1$  باید مضرب  $8$  باشد

برای به‌دست آوردن تعداد حداقل دانش‌آموزان باید از رابطه دوم، حداقل مقدار  $t$  را به‌دست آورد.

$$8 \mid 5t - 1 = 24 \Rightarrow t = 5$$

بر این اساس حداقل  $t$  به‌ازای  $24$  به‌دست می‌آید.

$$8 \mid 5t - 1 = 24 \Rightarrow t = 5$$

در نتیجه داریم:

۱۳- گزینه «۳» با توجه به اطلاعات داده‌شده می‌توان گفت:

$$A + B = 7 \Rightarrow \{A, B\} = \{1, 6\} \text{ یا } \{2, 5\} \text{ یا } \{3, 4\}$$

$$C - F = E + F \Rightarrow C = E + 2F \xrightarrow{\text{از } C \text{ نمی‌تواند بیشتر باشد}} F = 1 \text{ یا } 2$$

اکنون به‌ازای  $F = 1$  داریم:

$F = 1 \Rightarrow C = E + 2 \Rightarrow$	$\frac{F}{1}$	$\frac{E}{2}$	$\frac{C}{4}$	$\frac{A, B}{\text{غ ق}}$	$\frac{D}{-}$
	$1$	$2$	$4$	$\text{غ ق ق}$	$-$
	$1$	$3$	$5$	$\text{غ ق ق}$	$-$
	$1$	$4$	$6$	$\{2, 5\}$	$3 \xrightarrow{\text{از رابطه دوم}} B = 2, A = 5$

$$\frac{A + E}{2} = \frac{5 + 4}{2} = 4.5$$

در نتیجه داریم:





۱۴- گزینه «۴» طول جاده‌ها را با  $L$  و مدت زمان انجام پروژه‌ها را با  $t$  نمایش می‌دهیم، در نتیجه داریم:  
 $L_A = L_B + L_C$   
 $t_A = t_B + t_C$   
 چون پروژه‌ها یکنواخت انجام می‌شود، داریم:  
 الف) اگر این مدت زمان را برابر  $t$  در نظر بگیریم:

$$t_B = L_B$$

$$t = ? \Rightarrow ? = L_B \frac{t}{t_B} \Rightarrow \text{طول جاده آسفالت نشده B} = L_B \left(1 - \frac{t}{t_B}\right)$$

$$\text{به طور مشابه} \Rightarrow \text{طول جاده آسفالت نشده A} = L_A \left(1 - \frac{t}{t_A}\right)$$

$$L_B \left(1 - \frac{t}{t_B}\right) = \frac{1}{2} L_A \left(1 - \frac{t}{t_A}\right)$$

$$t = \frac{|(L_A - 2L_B) t_B t_A|}{|2L_B t_A - t_B L_A|} \xrightarrow{\text{تقسیم صورت و مخرج بر } t_B} t = \frac{|(L_A - 2L_B)|}{|2L_B \frac{t_A}{t_B} - L_A|} \times t_A \Rightarrow t = \frac{|(2L_B - L_A)|}{|2L_B \frac{t_A}{t_B} - L_A|} \times t_A$$

$$\frac{t_A > t_B}{\frac{t_A}{t_B} > 1} \rightarrow t = k \times t_A \quad k < 1 \Rightarrow t < t_A$$

$$\left(\frac{t_A}{t_B} > 1 \rightarrow |2L_B \frac{t_A}{t_B} - L_A| > |2L_B - L_A| \Rightarrow k < 1\right)$$

ب) این مدت زمان برابر  $4t_C$  است.

مقدار الف کمتر از  $t_A$  است و مقدار ب هم مشخص نیست که از  $t_A$ ، کمتر و یا بیشتر و یا حتی مساوی است. مبنایی برای مقایسه الف و ب نداریم.

#### ۱۵- گزینه «۱»

الف) با اسکناس‌های داده شده می‌توان مبلغی از ۶ تا حداکثر ۵۱ تومان را پر کرد. از مبالغ ۶ تا ۲۱ را می‌توان بدون استفاده از اسکناس ۱۰ تومانی پر کرد. به استثنای ۸ و ۱۳ و ۱۸ که با اسکناس‌های ذکر شده نمی‌توان پر کرد.

مبلغ		
۲۲	→	۲ تا ۱۰، یکی ۲ × غ ق ق
۲۳	→	با این اسکناس‌ها نمی‌توان پر کرد.
۲۴	→	۲ تا ۱۰ تومانی، ۲ تا ۲ تومانی غ ق ق
۲۵	→	{ یکی ۱۰ تومانی، ۳ تا ۵ تومانی ۲ تا ۱۰ تومانی، یکی ۵ تومانی غ ق ق
۲۶	→	{ ۲ تا ۱۰ تومانی، ۳ تا ۲ تومانی یکی ۱۰ تومانی، ۲ تا ۵ تومانی، ۳ تا ۲ تومانی غ ق ق
۲۷	→	{ ۲ تا ۱۰ تومانی، یکی ۵ و یکی ۲ تومانی یکی ۱۰ تومانی، ۳ تا ۵ تومانی، یکی ۲ تومانی ق ق

حداقل مبلغ = ۲۷ تومان

ب) برای حداقل کردن مبلغ، سعی می‌کنیم تا آنجا که ممکن است تعداد اسکناس‌های ۱۰ تومانی را با همان یک عدد نگه داریم، ۵ اسکناس باقی‌مانده را باید به اسکناس‌های ۲ تومانی و ۵ تومانی اختصاص دهیم، در ۳ اسکناس اول منطقی است با اسکناس ۲ تومانی پر شود. برای اسکناس چهارم ۵ تومانی را در نظر می‌گیریم، برای اسکناس پنجم هم منطقی است که اسکناس ۵ تومانی را در نظر بگیریم تا ۱۰ تومانی را!! همان‌طور که دیدیم مقدار ستون الف بیشتر از ب است. در نتیجه گزینه (۱) درست است.

#### بخش سوم: سؤالات تحلیلی

- اطلاعات مسئله: چهار مریض به نام‌های A، B، C و D، یکی از نوبت‌های ۱ تا ۴ مطبی را رزرو کرده و از اولین تا چهارمین نفر وارد مطب می‌شوند.  
 – قیدهای مسئله: (۱) دومین نوبت رزرو شده مربوط به B نیست.  
 (۲) کسی که بعد از A وارد مطب شده نوبتش زودتر از A است ← A آخرین نفر نیست.  
 (۳) آخرین فردی که وارد مطب شده B را می‌بیند که به تنهایی نشسته ← B آخرین نفر نیست.  
 (۴) D آخرین نفر وارد شده به مطب نیست.  
 نتیجه‌گیری: آخرین نفر وارد شده به مطب C است و جایگاه او به‌طور قطع مشخص است.



## بخش چهارم: تجسمی

■ راهنمایی: این بخش از آزمون استعداد، سؤال‌هایی از نوع تجسمی را شامل می‌شود. هریک از سؤال‌های ۲۴ تا ۳۰ را به‌دقت بررسی نموده و جواب صحیح را در پاسخنامه علامت بزنید.

راهنمایی: در سؤال ۲۴، ۱۸ عدد لیوان که برخی خالی (لیوان‌های سفید) و برخی پر (لیوان‌های تیره) هستند، مطابق شکل زیر، داده شده است. اگر خالی کردن تمام محتویات یک لیوان پر در هر کدام از لیوان‌های خالی، یک حرکت محسوب شود، با حداقل چند حرکت می‌توان کاری کرد که لیوان‌ها، یک‌درمیان، خالی و پر باشند؟

۲۴ ✍



۴ (۴)

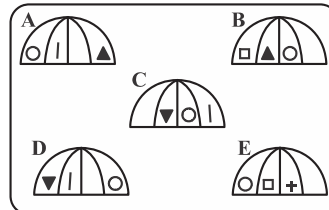
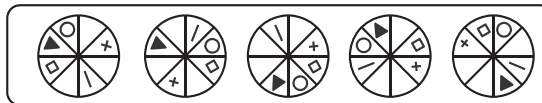
۳ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

در سؤال ۲۵، شکل بالایی، نمای از بالای ۵ چتر باز و شکل پایینی، نمای از کنار ۵ چتر باز را نشان می‌دهد. در شکل پایینی، تنها سه چتر می‌توانند نمای از کنار یکی از چترهای بالا باشند. کدام شکل، کدام‌اند؟

۲۵ ✍



E و D ، B (۴)

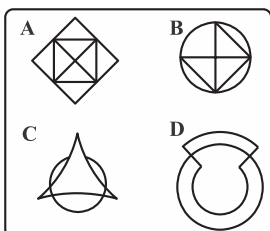
D و C ، A (۳)

E و B ، A (۲)

E و C ، A (۱)

راهنمایی: در سؤال ۲۶، ۴ الگو نمایش داده شده است. کدام یک از این ۴ الگو را نمی‌توان بدون برداشته شدن خودکار از روی کاغذ رسم کرد، طوری که از روی هر قسمت (مگر نقاط)، فقط یک بار عبور کند؟

۲۶ ✍



A (۱)

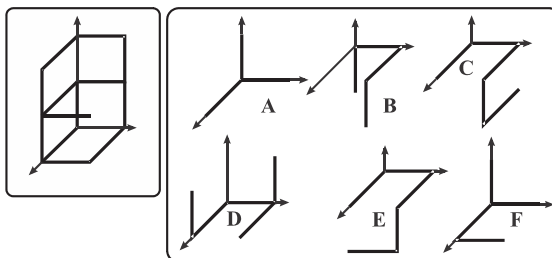
B (۲)

C (۳)

D (۴)

**راهنمایی:** در سؤال ۲۷، در سمت چپ، یک الگوی سه‌بعدی و در سمت راست، ۶ سازه که با میله‌های مشابه ساخته شده‌اند را مشاهده می‌کنید. شکل سه‌بعدی سمت چپ، از کنار هم قرار گرفتن کدام یک از سازه‌های سمت راست، قابل ساخت است؟

ک ۲۷ -



(۴) E و D، B

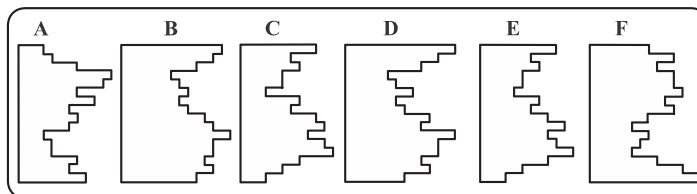
(۳) F و B، A

(۲) F و E، B

(۱) D و C، A

**راهنمایی:** در سؤال ۲۸، از کنار هم قرار گرفتن کدام دو قطعه زیر، یک مربع کامل تشکیل می‌شود؟

ک ۲۸ -



(۴) D و C

(۳) F و A

(۲) F و C

(۱) E و B

ک ۲۹ - در یک مکعب مستطیل به ابعاد ۶ در ۵ در ۴ سانتی‌متر، حداکثر چند مکعب مربع ۱ در ۱ در ۱ سانتی‌متر جا می‌شود، به شرطی که مکعب‌های کوچک، هیچ تماسی با هم نداشته باشند، مگر از رئوس؟

(۴) ۳۶

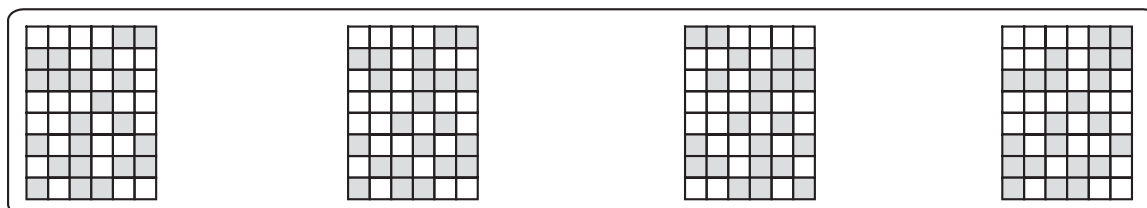
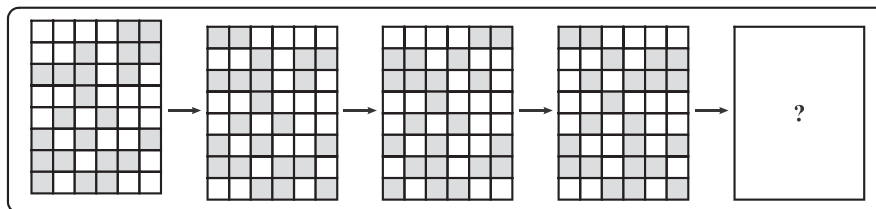
(۳) ۳۰

(۲) ۲۴

(۱) ۲۰

**راهنمایی:** در سؤال ۳۰، در ردیف بالا، از چپ به راست، الگوها با روندی خاص تغییر می‌کنند. کدام الگو (موارد ۱ تا ۴)، به جای علامت سؤال قرار گیرد تا این روند، همچنان ادامه یابد؟

ک ۳۰ -



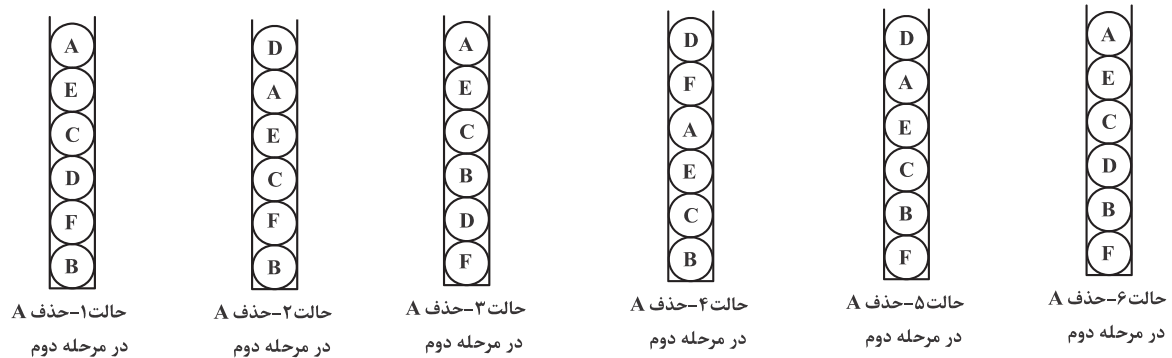
(۴)

(۳)

(۲)

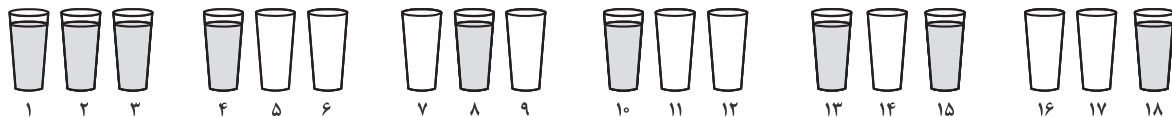
(۱)

توضیح حالت ۶: در این حالت نسبت به حالت ۳ و ۱ بین C و F و B جابه‌جایی صورت داده‌ایم که C در مرحله ۱ تکان نمی‌خورد و B در هر دو مرحله بدون تکان باقی می‌ماند و در آخر D و F جزو سه توپ آخر باقی می‌مانند.



### بخش چهارم: تجسمی

۲۴- گزینه «۴» اگر لیوان‌ها را از چپ به راست با اعداد ۱ تا ۱۸ شماره‌گذاری کنیم داریم:

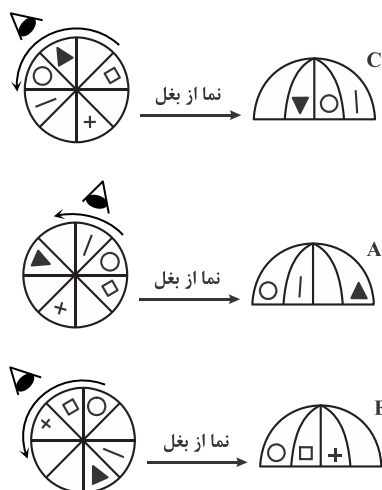


قرار است با انتقال آب بین لیوان‌ها، لیوان‌های پر و خالی یکی در میان کنار هم قرار گیرند. بنابراین یا لیوان‌های زوج پر هستند و لیوان‌های فرد خالی یا لیوان‌های زوج خالی‌اند و لیوان‌های فرد پر.

لیوان‌های با شماره زوج و پر: ۲، ۴، ۸، ۱۰، ۱۸

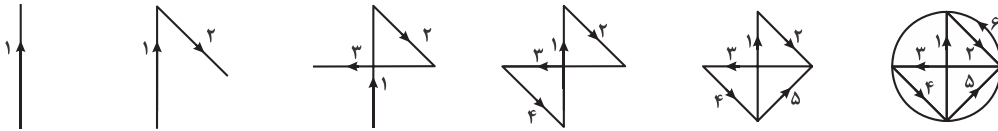
لیوان‌های با شماره فرد و پر: ۱، ۳، ۱۳، ۱۵

تعداد لیوان‌های پر و زوج از لیوان‌های فرد و پر بیشتر است، بنابراین به صرفه‌تر است لیوان‌های زوج پر و لیوان‌های فرد خالی باشند، پس با خالی کردن محتویات لیوان‌های ۱ و ۳ و ۱۳ و ۱۵ در لیوان‌های زوج و خالی ۶ و ۱۲ و ۱۴ و ۱۶ و جمعاً ۴ حرکت لیوان‌های زوج و فرد یکی در میان قرار می‌گیرند. در صورتی که می‌خواستیم لیوان‌های زوج خالی و فرد پر باشند، نیاز بود محتویات لیوان‌های ۲، ۴، ۸، ۱۰ و ۱۸ را در لیوان‌های ۵، ۷، ۹، ۱۱ و ۱۷ بریزیم که ۵ حرکت می‌شد.

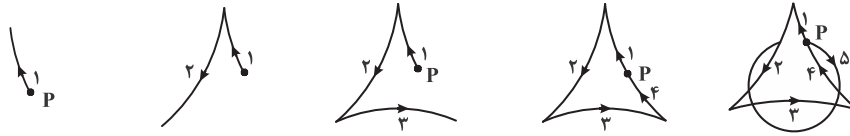


۲۵- گزینه «۱» با کمی دقت به سؤال می‌توان دریافت که در واقع اگر نمای از کنار (که در شکل مقابل نمونه‌هایی از آن آمده) را از چپ به راست ببینیم، معادل آن است که نمای از بالا را به صورت پادساعتگرد ببینیم. با توجه به این موضوع اشکال A، C و E قابل مشاهده هستند و پاسخ گزینه (۱) می‌باشد.

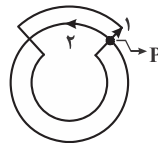
۲۶- گزینه «۱» شکل B را ۶ مرحله می‌توان کشید.



شکل C را با شروع از نقطه P می‌توان در ۵ مرحله کشید.



شکل D را می‌توان در ۲ مرحله کشید (با شروع از نقطه P) (مرحله ۱ شروع از شکل رویی و مرحله ۲ کشیدن دایره).



**روش دیگر:** در هر شکل هندسی محل تقاطع خطوط را گره می‌نامیم و تعداد خطوط متصل به هر گره را درجه. به عنوان مثال در شکل  $\times$  با گره‌ای با درجه ۵ روبرو هستیم. اگر درجه هر گره زوج باشد به ازای هر بار ورود می‌توانیم خروج هم داشته باشیم. پس در گره‌های با درجه زوج نیازی به برداشتن قلم از روی کاغذ نیست. می‌توان نشان داد که به ازای هر دو گره با درجه فرد باید یکبار قلم از کاغذ جدا شود. آخرین نقطه‌ای که قلم از کاغذ جدا می‌شود (پس از اتمام رسم شکل) نیز در محاسبات لحاظ نمی‌شود.

$$\text{تعداد کمترین دفعاتی که کاغذ باید از قلم جدا شود} = \left[ \frac{\text{تعداد گوی‌های درجه فرد} - 1}{2} \right]$$

$$\text{شکل A: تعداد رئوس درجه فرد} = 4 \Rightarrow \left[ \frac{4-1}{2} \right] = 1$$

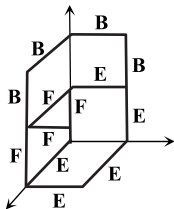
$$\text{شکل B: تعداد رئوس درجه فرد} = 2 \Rightarrow \left[ \frac{2-1}{2} \right] = 0$$

$$\text{شکل C: تعداد رئوس درجه فرد} = 0$$

$$\text{شکل D: تعداد رئوس درجه فرد} = 0$$

پس جواب گزینه (۱) است.

این تست مشابه تست ۳۲ سراسری ۹۵ رشته MBA است.

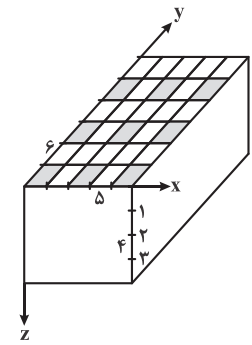


۲۷- گزینه «۲» شکل نهایی از ۱۳ میله ساخته شده است که با توجه به این مطلب گزینه (۳) با داشتن ۱۱ میله و گزینه (۴) با داشتن ۱۴ میله حذف می‌شود. تنها گزینه (۱) و (۲) دارای ۱۳ میله هستند. در گزینه (۱)، A و D بخشی از شکل را می‌سازند؛ اما C با شکل مطلوب مطابقت ندارد و حالت خواسته شده را نمی‌سازد. این شکل را با B، E و F می‌توان به صورت مقابل ساخت: (توجه شود که طول میله‌ها طبق گفته‌ی صورت سؤال برابر است).

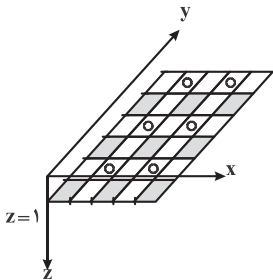
۲۸- گزینه «۴» اگر شکل D را  $90^\circ$  در جهت پادساعتگرد بچرخانیم برجستگی‌ها و فرورفتگی‌های شکل D و C در هم قرار می‌گیرند. اگر فرض کنیم تنها با چرخش قطعات باید یک مربع ساخته شود، پس در واقع کم یا زیاد شدن طول یک قطعه از بالا باید کاملاً در تناسب با زیاد یا کم شدن طول قطعه‌ی دیگر از پایین باشد تا یک مربع ساخته شود. بنابراین گزینه (۴) صحیح می‌باشد.



۲۹- گزینه «۳» وجه بالایی مکعب مستطیل را به مربع‌های  $1 \times 1$  تقسیم کردیم. مکعب مربع‌هایی را در نظر بگیرید که وجه بالایی آن‌ها روی وجه بالایی مکعب مستطیل قرار دارد و وجه پایینی آن‌ها در  $Z=1$ . این مکعب‌ها نباید با هم تماس داشته باشند، بنابراین برای حداکثر کردن تعداد مکعب‌ها باید وجوه بالایی آن‌ها به صورتی باشد که با هاشور نشان داده شده است. یعنی جمعاً ۹ مکعب.



حال مکعب‌هایی را در نظر بگیرید که وجه بالایی آن‌ها روی  $Z=1$  و وجه پایینی آن‌ها روی  $Z=2$  قرار دارد و با مکعب‌های بالایی تنها در رئوس مشترک است، بنابراین وجه بالایی آن‌ها در  $Z=1$  باید به صورت زیر باشد، یعنی جمعاً ۶ مکعب (وجه پایینی مکعب‌های مرحله پیش با هاشور و وجه بالایی مکعب‌های این مرحله با دایره مشخص شده‌اند).

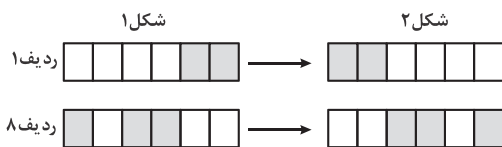


برای مکعب‌هایی که وجه بالایی آن‌ها روی  $Z=2$  و وجه پایینی آن‌ها روی  $Z=3$  قرار دارد، وضعیت مشابه مکعب‌هایی است که وجه بالای آن‌ها روی  $Z=0$  قرار دارد یعنی جمعاً ۹ مکعب و در نهایت برای مکعب‌هایی که وجه بالایی آن‌ها روی  $Z=3$  و وجه پایینی آن‌ها روی  $Z=4$  قرار دارد وضعیت مشابه مکعب‌هایی است بین  $Z=1$  و  $Z=2$  قرار دارند یعنی تعداد آن‌ها ۶ عدد است.

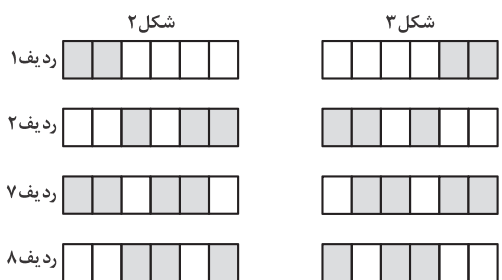
کل مکعب‌ها  $= 9 + 6 + 9 + 6 = 30$

۳۰- گزینه «۴» شکل‌ها را از چپ به راست با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ نشان می‌دهیم.

در روند تغییر شکل ۱ به ۲، همه ردیف‌ها ثابت و فقط ردیف ۱ و ردیف ۸ تصویر آینه‌ای شده است.



در روند تغییر شکل ۲ به شکل ۳، ردیف ۱ و ۲ و ۷ و ۸ تصویر آینه‌ای شده‌اند.



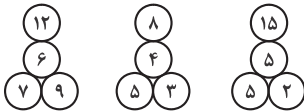
و در روند تغییر شکل ۳ به شکل ۴، ردیف‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۶ و ۷ و ۸ از شکل ۳ آینه‌ای شده‌اند، بنابراین انتظار می‌رود در شکل ۴ تمام ردیف‌ها تصویر آینه‌ای شوند که این تنها در گزینه (۴) آمده است.

## بخش دوم: حل مسئله

■ **راهنمایی:** این بخش از آزمون استعداد، از انواع مختلف سؤال‌های کمی، شامل مقایسه‌های کمی، استعداد عددی و ریاضیاتی، حل مسئله و... تشکیل شده است. توجه داشته باشید به خاطر متفاوت بودن نوع سؤال‌های این بخش از آزمون، هر سؤال را براساس دستورالعمل ویژه‌ای که در ابتدای هر دسته سؤال آمده است، پاسخ دهید.

■ **راهنمایی:** هر کدام از سؤال‌های ۹ تا ۱۳ را به دقت بخوانید و جواب هر سؤال را در پاسخنامه علامت بزنید.

کدام از اشکال زیر، بین اعداد ارتباط خاص و یکسانی برقرار است. به جای علامت سؤال، کدام عدد زیر باید قرار بگیرد؟

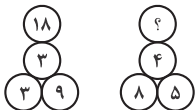


(۱) ۱۶

(۲) ۱۵

(۳) ۱۲

(۴) ۹



کدام دو مقوای مستطیل‌شکل با مساحت یکسان، یکی با نسبت اضلاع ۲ به ۳ و دیگری با نسبت اضلاع ۳ به ۵ در اختیار داریم. از هر کدام از مستطیل‌ها، بزرگ‌ترین مربع ممکن را جدا کرده و تکه‌های باقی‌مانده را نگاه می‌داریم. نسبت مساحت تکه‌های باقی‌مانده کدام است؟

(۱) ۵ به ۶

(۲) ۴ به ۵

(۳) ۳ به ۴

(۴) ۳ به ۴

کدام یک ساعت عقربه‌ای، کدام یک از چهار زمان زیر را باید نشان دهد، تا زاویه کوچک‌تر بین دو عقربه ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار این ساعت، بیشتر از ۸۰ درجه باشد؟

(۱) ۱۱:۱۰'

(۲) ۹:۳۵'

(۳) ۷:۲۵'

(۴) ۳:۳۰'

کدام در یک مغازه لوازم‌التحریر فروشی، به ازای هر ۷ خودکار آبی، ۲ خودکار قرمز و به ازای مجموعاً هر ۱۲ خودکار، ۵ مداد فروخته می‌شود. با فروش چند خودکار قرمز، تعداد مدادهای فروخته‌شده ۲۶ عدد از تعداد خودکارهای آبی فروخته‌شده، کمتر است؟

(۱) ۱۲

(۲) ۱۶

(۳) ۱۸

(۴) ۲۴

کدام پس از بررسی مشخص شده است که ۶۰ درصد دانش‌آموزان یک مدرسه، دارای پدر کارمند، ۸۰ درصد آنها دارای مادر کارمند و ۷۵ درصد آنها در خانواده خود، تک‌فرزند هستند. اگر این مدرسه، ۲۰۰ دانش‌آموز داشته باشد، حداقل چند دانش‌آموز به‌طور قطع، پدر و مادر کارمند دارند و تک‌فرزند هستند؟

(۱) ۸۰

(۲) ۴۰

(۳) ۳۰

(۴) صفر

■ **راهنمایی:** هر کدام از سؤال‌های ۱۴ و ۱۵، شامل دو مقدار یا کمیت هستند، یکی در ستون «الف» و دیگری در ستون «ب». مقادیر دو ستون را با یکدیگر مقایسه کنید و با توجه به دستورالعمل، پاسخ صحیح را به شرح زیر تعیین کنید:

اگر مقدار ستون «الف» بزرگ‌تر است، در پاسخنامه گزینه (۱) را علامت بزنید.

اگر مقدار ستون «ب» بزرگ‌تر است، در پاسخنامه گزینه (۲) را علامت بزنید.

اگر مقادیر دو ستون «الف» و «ب» با هم برابر هستند، در پاسخنامه گزینه (۳) را علامت بزنید.

اگر براساس اطلاعات داده شده در سؤال، نتوان رابطه‌ای را بین مقادیر دو ستون «الف» و «ب» تعیین نمود، در پاسخنامه گزینه (۴) را علامت بزنید.

کدام پدر و پسری روی یک خط راست، به فاصله نامعلوم از یکدیگر ایستاده‌اند. می‌دانیم که مسافت هر ۵ قدم پدر معادل مسافت ۸ قدم پسر است. با شروع حرکت این دو نفر، پدر ۳۲ قدم به سمت پسر برمی‌دارد و پسر ۵۰ قدم به سمت پدر برمی‌دارد و بالاخره، بدون اینکه هیچ‌کدام به نقطه وسط مسیری که در آن در حرکت بوده‌اند رسیده باشند، می‌ایستند.

(الف)

(ب)

فاصله پدر تا نقطه‌ای که پسرش در ابتدا ایستاده بوده است.

فاصله پسر تا نقطه‌ای که پدرش در ابتدا ایستاده بوده است.

کدام تعداد n نفر که به شماره‌های ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند، پشت‌سرهم در یک صف ایستاده‌اند. در مرحله اول، همه افراد می‌نشینند. در مرحله دوم، افراد دارای شماره‌ای با مضرب ۲ می‌ایستند. در مرحله سوم، همه افراد دارای شماره‌ای با مضرب ۳، در هر وضعیتی هستند، حالت خود را تغییر می‌دهند (یعنی، اگر ایستاده‌اند می‌نشینند و اگر نشسته‌اند، می‌ایستند)، در مرحله چهارم، افراد دارای شماره با مضرب ۴ حالت خود را تغییر می‌دهند و این منوال ادامه پیدا می‌کند تا در مرحله نهم، افراد دارای شماره با مضرب ۹، حالت خود را تغییر می‌دهند. n، عددی بین ۲۵ تا ۳۰ است.

(الف)

(ب)

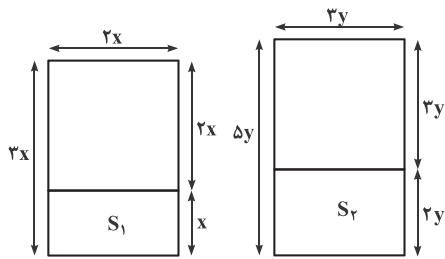
تعداد افرادی که نهایتاً نشسته‌اند.

تعداد افرادی که نهایتاً ایستاده‌اند.



۱۰- گزینه «۱» دو مستطیل را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

مربع‌ها به شکل مقابل جدا شده‌اند.



$$S_1 = x \times x = x^2, \quad S_2 = 3y \times 2y = 6y^2$$

سؤال نسبت  $S_1$  به  $S_2$  را خواسته است:

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{6} \left( \frac{x^2}{y^2} \right) = \frac{1}{6} \left( \frac{x^2}{y^2} \right)$$

اما برای تعیین نسبت  $\frac{x^2}{y^2}$  به جمله‌ی اول سؤال توجه می‌کنیم که گفته؛ مساحت هر دو مستطیل یکسان است، پس رابطه زیر را نیز می‌توانیم بنویسیم:

$$(x)(3x) = (3y)(\Delta y) \Rightarrow 3x^2 = 15y^2 \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{15}{3} = 5$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{6} (5) = \frac{5}{6}$$

بنابراین داریم:

۱۱- گزینه «۴» با توجه به فرمول زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار زاویه بین هر چهار گزینه را حساب می‌کنیم:

$$\alpha = |3 \circ h - \Delta / \Delta m|$$

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$   
 زاویه                      ساعت                      دقیقه

$$\alpha = |3 \circ \times 3 - \Delta / \Delta \times 3 \circ| = |9 \circ - 16 \Delta| = 7 \Delta$$

گزینه (۱):

$$\alpha = |3 \circ \times 7 - \Delta / \Delta \times 2 \Delta| = |21 \circ - 13 \Delta / \Delta| = 7 \Delta / \Delta$$

گزینه (۲):

$$\alpha = |3 \circ \times 9 - \Delta / \Delta \times 2 \Delta| = 7 \Delta / \Delta$$

گزینه (۳):

$$\alpha = |3 \circ \times 11 - \Delta / \Delta \times 1 \circ| = |33 \circ - 5 \Delta| = 27 \Delta$$

گزینه (۴):

گزینه‌های (۱) تا (۳) همگی از  $8^\circ$  درجه کوچک‌تر می‌باشند و گزینه‌ی (۴) زاویه‌اش از  $8^\circ$  بیشتر است، البته  $27 \Delta$  درجه زاویه بزرگ‌تر بین عقربه‌ها در ساعت  $11:10'$  می‌باشد ولی مشکلی نیست و زاویه کوچک‌تر هم با کم کردن این عدد از عدد  $360$ ، برابر با  $360 - 27 \Delta = 85$  به دست می‌آید که باز هم از  $8^\circ$  درجه بیشتر است.

۱۲- گزینه «۲» مرحله به مرحله اطلاعات صورت سؤال را خلاصه می‌کنیم:

$$2x = \text{تعداد خودکارهای قرمز}, \quad 7x = \text{تعداد خودکارهای آبی}$$

$$\frac{7x + 2x}{z} = \frac{12}{5} \Rightarrow \frac{9x}{z} = \frac{12}{5} \Rightarrow \frac{3x}{z} = \frac{4}{5} \Rightarrow 15x = 4z \Rightarrow z = \frac{15}{4}x \quad (1)$$

و بالاخره به شکل رابطه زیر هم می‌توان آن را نوشت:

$$7x - z = 26 \xrightarrow{(1)} 7x - \frac{15}{4}x = 26 \Rightarrow \frac{28x - 15x}{4} = 26 \Rightarrow \frac{13}{4}x = 26 \Rightarrow \frac{x}{4} = 2 \Rightarrow x = 8$$

پس تعداد خودکارهای قرمز برابر با  $2x = 2 \times 8 = 16$  خواهد بود.

۱۳- گزینه «۳» تعداد کسانی که دارای پدر کارمند هستند  $60\%$  درصد افراد است یعنی  $n(A) = 0/60 \times 200 = 120$  و تعداد افرادی که دارای مادر

کارمند هستند  $80\%$  درصد افراد است یعنی  $n(B) = 0/80 \times 200 = 160$ . از طرفی می‌دانیم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

همچنین می‌دانیم تعداد افرادی که حداقل یکی از پدر یا مادرهای آنها کارمند هستند، کمتر یا مساوی تعداد کل افراد است. بنابراین داریم:

$$n(A \cup B) \leq 200$$

با توجه به دو عبارت بالا داریم:

$$\Rightarrow (n(A) + n(B) - n(A \cap B)) \leq 200 \Rightarrow 120 + 160 - n(A \cap B) \leq 200 \Rightarrow 80 \leq n(A \cap B)$$

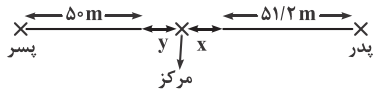
بنابراین معلوم می‌شود از بین همه دانش آموزان حداقل  $80$  نفر هستند که هم پدر آنها و هم مادر آنها کارمند هستند. حال با توجه به صورت سؤال  $75$

درصد افراد یعنی  $150$  نفر تک فرزند هستند یعنی  $50$  نفر تک فرزند نیستند. بنابراین در بدترین حالت اگر همه این  $50$  نفر بین افرادی باشند که هم پدر

کارمند و هم مادر کارمند دارند، حداقل  $30$  نفر از بین آنها می‌مانند که تک فرزند هستند. پس پاسخ سؤال حداقل  $30$  است.



۱۴- گزینه «۱» اگر طول هر قدم پسر  $x$  باشد، طول هر قدم پدر  $\frac{8}{5} = \frac{1}{6}x$  خواهد بود. حالا اگر پدر ۳۲ قدم بردارد، یعنی  $\frac{8}{5} = \frac{1}{6}x \times 32 = 5\frac{1}{2}x$  طی کرده است. و پسر  $5 \circ x = 5 \circ x$  را طی کرده است.



حالا سراغ محاسبه مقدار ستون‌ها می‌رویم: مقدار ستون الف بیشتر است  $\Rightarrow$  مقدار ستون الف =  $x + y + 5\frac{1}{2}x$  مقدار ستون ب =  $y + x + 5 \circ x$

۱۵- گزینه «۲» در مرحله اول از نفر ۱ تا  $n$  می‌نشینند.

- در مرحله دوم افراد با شماره مضرب ۲ تغییر وضعیت می‌دهند.
- در مرحله سوم افراد با شماره مضرب ۳ تغییر وضعیت می‌دهند.
- در مرحله چهارم افراد با شماره مضرب ۴ تغییر وضعیت می‌دهند.
- در مرحله پنجم افراد با شماره مضرب ۵ تغییر وضعیت می‌دهند.
- در مرحله ششم افراد با شماره مضرب ۶ تغییر وضعیت می‌دهند.
- در مرحله هفتم افراد با شماره مضرب ۷ تغییر وضعیت می‌دهند.
- در مرحله هشتم افراد با شماره مضرب ۸ تغییر وضعیت می‌دهند.
- در مرحله نهم افراد با شماره مضرب ۹ تغییر وضعیت می‌دهند.

چون به ازای هر بخش پذیری ۲ تا ۹ افراد یکبار تغییر وضعیت می‌دهند، پس تعداد مقسوم‌علیه‌های کمتر مساوی آن عدد را به دست می‌آوریم. اگر تعداد مقسوم علیه‌ها فرد باشد افراد ایستاده و اگر زوج باشد افراد نشسته خواهند بود. مقسوم علیه‌های مورد نظر از ۲ تا ۹ می‌توانند باشند (عدد یک مقسوم علیه همه اعداد هست و ما نمی‌نویسیم)

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
	۲	۳	۲	۵	۲	۷	۲	۳	۲		۲		۲	۳	۲		۲		۲	۳	۲		۲
			۴		۳		۴	۹	۵		۳		۷	۵	۴		۳		۴	۷			۳
					۶		۸				۴				۸		۶		۵				۴
											۶						۹						۶
																							۸
ن	ا	ا	ا	ن	ا	ا	ا	ا	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ا	ن	ن	ن	ا	ن	ا	ن	ا

نشسته: ۱۴	۲۴	ن: ۱۴	۱: ۱۰
ایستاده: ۱۰	۲۵	۱۴	۱۱
	۲۶	۱۴	۱۲
	۲۷	۱۵	۱۲
	۲۸	۱۵	۱۳
	۲۹	۱۶	۱۳
	۳۰	۱۷	۱۳

تا نفر ۲۴ ام تعداد افراد نشسته ۱۴ و تعداد افراد ایستاده ۱۰ نفر هستند. حال تعداد افراد نشسته و ایستاده برای ۲۵ تا ۳۰ را می‌نویسیم.

۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۵	۲	۳	۲		۲
		۹	۴		۳
			۷		۵
					۶

ن ا ا ن ا ن

چون تعداد افراد نشسته بین  $n = 25$  تا  $n = 30$  همیشه از افراد ایستاده بیشتر است پس گزینه (۲) صحیح است.

**PART A: Grammar**

**Directions:** Select the answer choice (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then mark the correct choice on your answer sheet.

31- **Nonverbal thinking, ..... in engineering design, involves perceptions, the stock-in-trade of the artist, not the scientist.**

- |                              |                         |
|------------------------------|-------------------------|
| 1) being central mechanism   | 2) a central mechanism  |
| 3) that is central mechanism | 4) is mechanism central |

32- **When the work was completed, many moved to other construction jobs or to factory work in cities and towns, ..... they became part of an expanding working class.**

- |          |            |         |          |
|----------|------------|---------|----------|
| 1) where | 2) thereby | 3) thus | 4) there |
|----------|------------|---------|----------|

33- **..... , why did people in the thirteenth century move into these closely packed quarters?**

- 1) By giving all the disadvantages of living in aggregated towns
- 2) All the disadvantages of living in aggregated towns given
- 3) Given all the disadvantages of living in aggregated towns
- 4) Living in aggregated towns given all the disadvantages

34- **Autism is considered a neurological and genetic life-long disorder that causes discrepancies in the way .....**

- |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1) is processed information | 2) of information processed |
| 3) processed information    | 4) information is processed |

35- **Not until the eighteenth century, however, ..... the Bank of Amsterdam and the Bank of England begin to provide capital for business investment.**

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| 1) such banks as did | 2) banks such as did |
| 3) did such banks as | 4) banks did such as |

36- **..... around 8000 B.C.E., the most extensive exploitation of agriculture occurred in river valleys, where there were both good soil and a dependable water supply regardless of the amount of rainfall.**

- |             |                  |            |               |
|-------------|------------------|------------|---------------|
| 1) Starting | 2) To be started | 3) Started | 4) To started |
|-------------|------------------|------------|---------------|

37- **A rotary engine attached to the steam engine enabled shafts to be turned and machines to be driven, ..... steam power to spin and weave cotton.**

- |                                    |                                |
|------------------------------------|--------------------------------|
| 1) and resulted in mills they used | 2) by mills resulting in using |
| 3) that resulted in mills to use   | 4) resulting in mills using    |

38- **This simple memorizing of individual items and procedures—known as rote learning—is relatively easy to implement on a computer. .... implementing what is called generalization.**

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| 1) The problem is more challenging than is | 2) More challenging is the problem of |
| 3) The problem more challenging than       | 4) The more challenging problem of    |

بخش اول: دستور زبان

در سوالات زیر، از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) پاسخی را انتخاب کنید که به بهترین نحو جای خالی را پر کند. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.

۳۱- گزینه «۲» تفکر غیر کلامی، که یک مکانیزم مرکزی در طراحی مهندسی است، شامل ادراک می‌شود، {یا به عبارتی} فوت و فن هنرمند، نه دانشمند. توضیح گرامری: گزینه (۳) کنار می‌رود چون کاربرد that بعد از کاما ممنوع است. گزینه (۱) رد می‌شود چون being اضافه و حشو است. گزینه (۴) کنار می‌رود چون فاقد ضمیر موصولی است. ضمناً آن دو تا کامای بعد و قبل از جای خالی به وضوح نشان می‌دهند که ما به یک جمله‌وارهٔ وصفی نیاز داریم. پس این شما و این هم گزینه (۲) که در ابتدا به این صورت بوده:

Nonverbal thinking, **which is** a central mechanism in engineering design, involves ....

می‌توانیم which is را حذف کنیم و یک بدل یا عبارت وصفی بسازیم:

Nonverbal thinking, a central mechanism in engineering design, involves ....

۳۲- گزینه «۱» وقتی کار کامل شد، بسیاری به شغل‌های عمرانی دیگر یا کار در کارخانه‌ها در شهرها و شهرستان‌ها نقل مکان کردند، که در آنجا (جایی که) آنها بخشی از قشر در حال گسترش کارگرها شدند.

توضیح گرامری: با توجه به مفهوم جمله و اینکه قبل از جای خالی مرجع مکانی cities and towns را داریم، به ضمیر موصولی where برای جای خالی نیاز داریم.

۳۳- گزینه «۳» با توجه به تمامی معایب زندگی در شهرهای پرجمعیت، چرا مردم در قرن سیزدهم به این محله‌های بسیار متراکم نقل مکان کردند؟ توضیح گرامری: given همیشه شکل سوم فعل give نیست. در اینجا یک حرف اضافه است به معنی «با توجه به»، با در نظر گرفتن و مترادف با considering است. چون حرف اضافه است، بعدش باید اسم یا عبارت اسمی بیاید. همچنین به مثال زیر دقت کنید:

**Given [= considering] the circumstances, you've done really well.**

ترجمه: با توجه به شرایط، عملکرد واقعاً خوبی داشته‌ای.

**Given all the disadvantages of living in aggregated towns, why did people in the thirteenth ....**

۳۴- گزینه «۴» اوتیسم، یک اختلال عصبی و ژنتیکی مادام‌العمر محسوب می‌شود که باعث تفاوت‌هایی می‌گردد در نحوه‌ای که اطلاعات پردازش می‌شود. توضیح گرامری: جمله در اصل به شکل زیر بوده:

...causes discrepancies in the way **that** information is processed.

می‌توانیم that موصولی را حذف کنیم که در این صورت به گزینه (۴) می‌رسیم. باقی گزینه‌ها به وضوح نادرست‌اند.

۳۵- گزینه «۳» با این وجود، تا {آغاز} قرن هجدهم، بانک‌هایی از قبیل بانک آمستردام و بانک انگلستان شروع به تأمین سرمایه برای سرمایه‌گذاری کسب‌وکار نکرده بودند.

توضیح گرامری: چون جمله با عبارت منفی‌ساز not until شروع شده، باید وارونگی صورت بگیرد که فقط در گزینه (۳) شاهد وارونگی هستیم:

**Not until** the eighteenth century, however, **did** such banks as ...

نکته: همانطور که می‌دانید از such as برای ارائه مثال استفاده می‌شود. مثال:

Painters **such as** Picasso are rare.

می‌توانیم such را ببریم قبل از painters که در این صورت داریم:

**Such** painters as Picasso are rare.

همین اتفاق در این سؤال هم افتاده:

**Not until** the eighteenth century, however, **did** such banks as the Bank of Amsterdam ...

۳۶- گزینه «۱» گسترده‌ترین بهره‌برداری از کشاورزی، که حدوداً در سال ۸۰۰۰ قبل از میلاد مسیح شروع شد، در دره‌های رودخانه‌ها رخ داد، که در آنجا صرف‌نظر از میزان بارندگی، هم خاک باکیفیت وجود داشت و هم منبع آب قابل‌اتکا.

توضیح گرامری: جمله در اصل به این صورت بوده:

The most extensive exploitation of agriculture, **which started around 8000 B.C.E.**, occurred in river valleys....



می‌توانیم با حذف **which** و تبدیل **started** به **starting** یک عبارت وصفی (بدل) غیرضروری بسازیم:

The most extensive exploitation of agriculture, **starting around 8000 B.C.E.**, occurred in river valleys,...

می‌توانیم بدل را ببریم به قبل از مرجع (در اینجا The most extensive exploitation of agriculture) که داریم:

**Starting around 8000 B.C.E.**, the most extensive exploitation of agriculture occurred in river valleys,...

پس این شما و این هم گزینه (۱) و حذف سایر گزینه‌ها.

۳۷- گزینه «۴» یک موتور دورانی که به موتور بخار متصل بود، باعث می‌شد شفت‌ها بچرخند و دستگاه‌ها به حرکت دربیایند، که {این امر} باعث می‌شد آسیاب‌ها از نیروی بخار برای چرخیدن و بافتن پنبه استفاده کنند.

توضیح گرامری: اگر خاطرتان باشد، گفتیم مرجع ضمیر موصولی **which** می‌تواند نه یک کلمه (یا عبارت) بلکه کل جمله قبل از کاما باشد. مثال:

My friend eventually decided to get divorced, which upset me a lot.

ترجمه: دوستم نهایتاً تصمیم گرفت که طلاق بگیرد، {که این موضوع} مرا زیاد ناراحت کرد.

در این سؤال هم همین موضوع صدق می‌کند؛ یعنی ابتدا داشتیم:

A rotary engine attached to the steam engine enabled shafts to be turned and machines to be driven, which resulted in mills ....

می‌توانیم **which** را حذف و **resulted** را به **resulting** تبدیل کنیم:

A rotary engine attached to the steam engine enabled shafts to be turned and machines to be driven, resulting in mills ....

همچنین این کاربرد **result in** را حتماً حفظ کنید:

**Result in + sb/ sth + doing sth:** Icy conditions resulted in two roads being closed.

در واقع در اینجا، **being** جراند است. پس این شما و این هم گزینه (۴):

A rotary engine attached to the steam engine enabled shafts to be turned and machines to be driven, resulting in mills using steam power ....

بررسی سایر گزینه‌ها: گزینه (۳) به خاطر کاربرد **that** بعد از کاما کنار می‌رود. گزینه (۲) به لحاظ معنایی ایراد دارد و در گزینه (۱) کاربرد **they used** نامناسب است.

۳۸- گزینه «۲» اجرای این نوع یادگیری و به حافظه سپردن اقلام و رویه‌ها - که {با لفظ} یادگیری طوطی‌وار شناخته می‌شود - روی کامپیوتر نسبتاً ساده است. چالش برانگیزتر {از آن} مشکل اجرای چیزی است که تعمیم نامیده می‌شود.

توضیح گرامری: گفتیم یکی از کاربردهای وارونگی زمانی است که یک جمله با صفت آغاز شود؛ این هم مثال خود کتاب:

Central to all legal systems is the belief that a person is innocent unless proved otherwise.

More challenging is the problem of implementing what is called generalization.

بررسی سایر گزینه‌ها: گزینه‌های (۳) و (۴) به وضوح کنار می‌روند. گزینه (۱) رد می‌شود چون معلوم نیست **the problem** دقیقاً به چه مشکلی اشاره دارد.

### بخش دوم: واژگان

دستورالعمل: در سؤالات زیر، از بین گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) پاسخی را انتخاب کنید که به بهترین نحو جای خالی را پر کند. آنگاه پاسخ‌تان را روی پاسخنامه علامت بزنید.

۳۹- گزینه «۱» گذشته برگشت‌ناپذیر است. {گذشته} طی شده (رفته) و دیگر هرگز باز نخواهد گشت، مهم نیست چه کاری انجام دهید و هر قدر هم که گریه کنید.

۱	irrevocable	غیرقابل برگشت، لغونشدنی	۲	unsurpassable	سبقت ناپذیر، چیره ناشدنی
۳	inevitable	اجتناب ناپذیر، حتمی	۴	unreliable	غیرقابل اعتماد

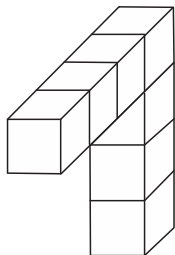
۴۰- گزینه «۲» کمپین بازاریابی آن پاتوق چنان گسترده بود که نه تنها افراد ثروتمند، بلکه افرادی با مال و منال محدود را هم جذب کرد.

۱	zeal	اشتیاق، شوق	۲	means	مال و منال، دارایی
۳	rudiments	علوم مقدماتی، چیز بدوی	۴	appeal	فرجام‌خواهی، جاذبه

## بخش چهارم: تجسمی

■ راهنمایی: این بخش از آزمون استعداد، سؤال‌هایی از نوع تجسمی را شامل می‌شود. هریک از سؤال‌های ۲۱ تا ۲۵ را به دقت بررسی نموده و جواب صحیح را در پاسخنامه علامت بزنید.

۲۱- در یک مکعب به ابعاد ۴ در ۴ در ۴، چند قطعه به شکل زیر را می‌توان جانمایی کرد؟



(۱) ۸

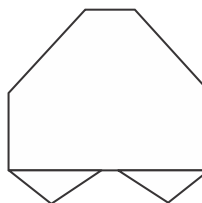
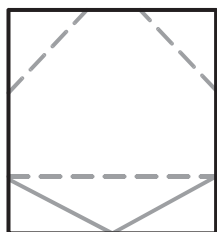
(۲) ۷

(۳) ۶

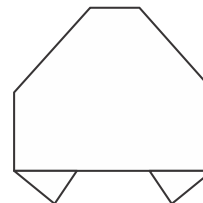
(۴) ۴

راهنمایی: در سؤال ۲۲ یک کاغذ مربع‌شکل در تصویر سمت چپ مشاهده می‌شود. اگر این کاغذ را از روی خط چین‌ها، رو به عقب و از روی خط‌ها، رو به جلو تا کنیم، کدام شکل حاصل می‌شود؟

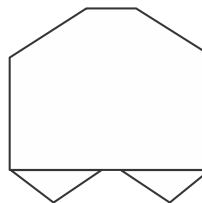
۲۲-



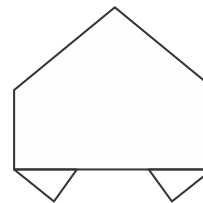
(۲)



(۱)

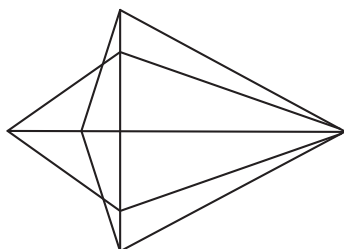


(۴)



(۳)

۲۳- در شکل زیر، مجموعاً چند مثلث دیده می‌شود؟



(۱) ۲۲

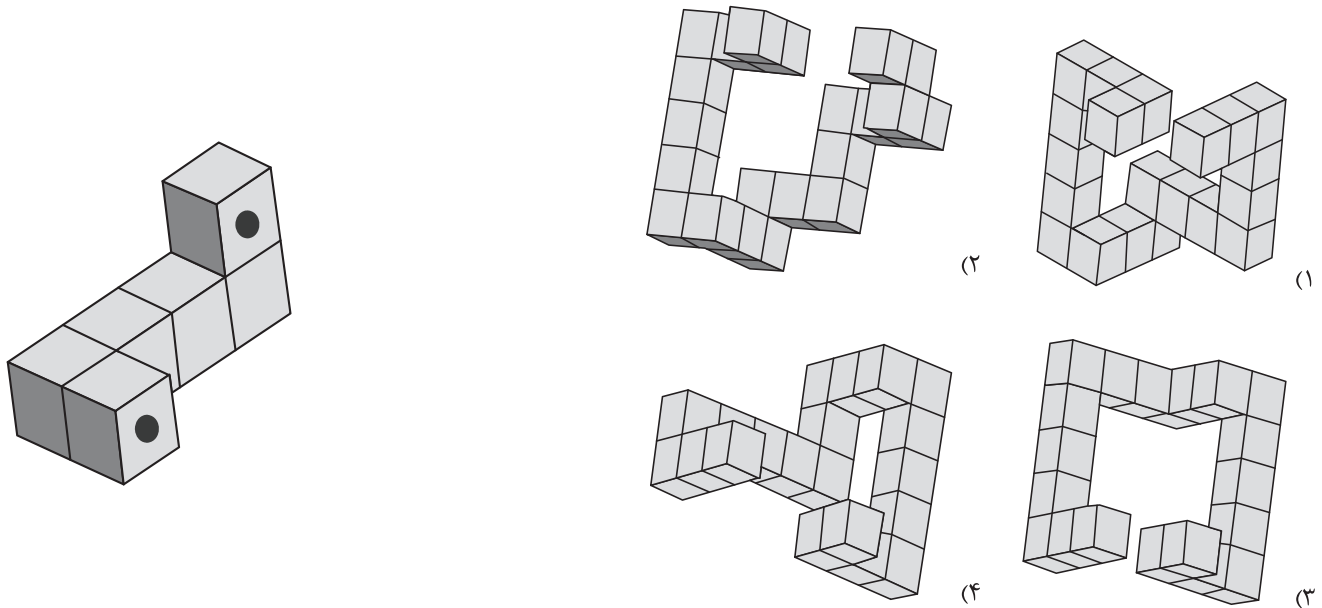
(۲) ۲۴

(۳) ۲۶

(۴) ۲۸

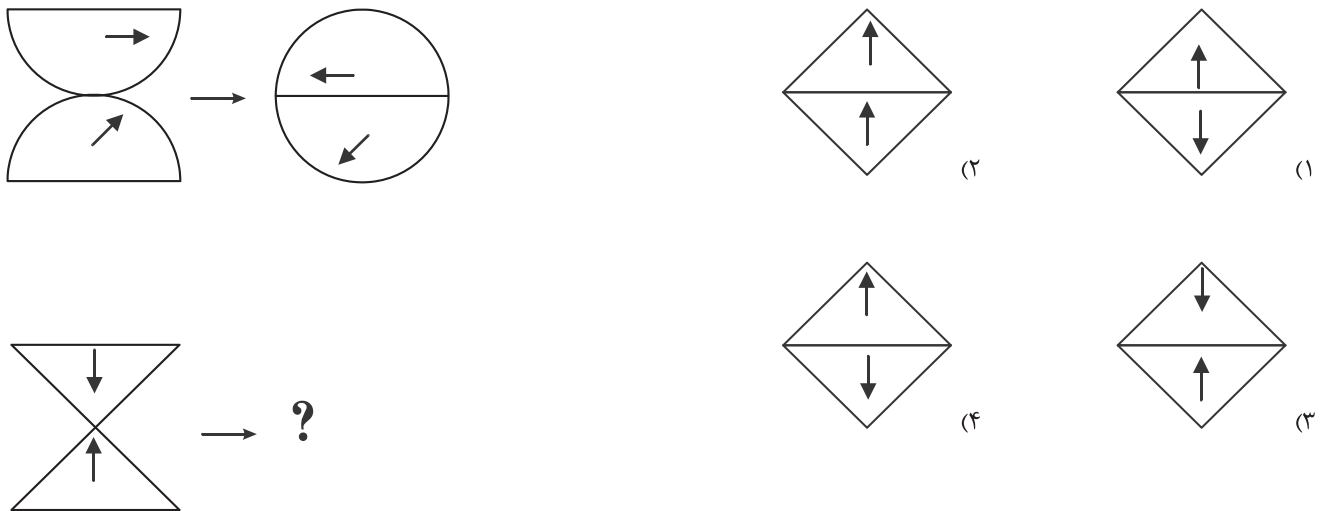
**راهنمایی:** در سؤال ۲۴، در سمت چپ، قطعه‌ای سه‌بعدی مشاهده می‌شود. کدام قطعه (موارد ۱ تا ۴) می‌تواند کنار قطعه سمت چپ قرار گیرد، به نحوی که نقاط سیاه دو قطعه، روی هم قرار گیرند؟

۲۴



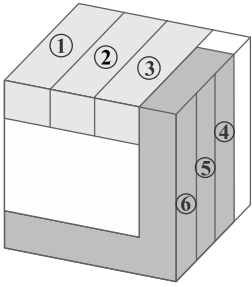
**راهنمایی:** در سؤال ۲۵، هر دو الگوی سمت چپ، قرار است با روالی مشابه و یکسان به الگوی سمت راست خود تبدیل شوند. به جای علامت سؤال، کدام الگو (موارد ۱ تا ۴) باید قرار بگیرد؟

۲۵

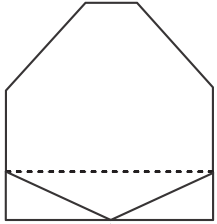


## بخش چهارم: تجسمی

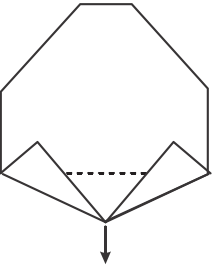
۲۱- گزینه «۳» با توجه به شکل ۶ شکل را می‌توان از مکعب استخراج کرد که ضلع دوم شکل‌های ۱ و ۲ و ۳ در پشت مکعب قرار دارند و در شکل مشخص نیستند.



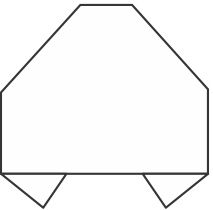
۲۲- گزینه «۱» ابتدا خط‌چین‌های بالای تصویر را اعمال می‌کنیم و به شکل روبه‌رو می‌رسیم:



حال از روی خط‌های پایین شکل، به تصویر بعدی می‌رسیم:

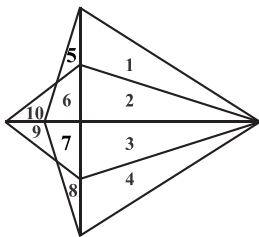


و در نهایت با تا کردن تصویر از روی خط‌چین‌ها به عقب، شکل نهایی را خواهیم داشت:



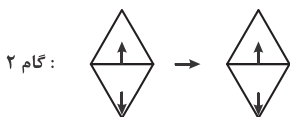
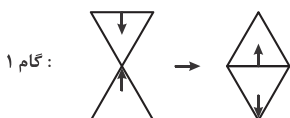
۲۳- گزینه «۲» ترکیب اشکال زیر، مثلث‌های شکل زیر را تشکیل می‌دهند.

۱ (۱)	۱ و ۲ (۹)	۱۷ (۷ و ۴ و ۳)
۲ (۲)	۱ و ۳ و ۴ (۱۰)	۱۸ (۹ و ۷ و ۳)
۳ (۳)	۱ و ۲ و ۳ و ۴ (۱۱)	۱۹ (۶ و ۵)
۴ (۴)	۱ و ۲ و ۵ و ۶ (۱۲)	۲۰ (۸ و ۷ و ۶ و ۵)
۵ (۵)	۲ و ۳ (۱۳)	۲۱ (۱۰ و ۶)
۸ (۶)	۲ و ۳ و ۴ (۱۴)	۲۲ (۸ و ۷)
۹ (۷)	۲ و ۶ و ۱۰ (۱۵)	۲۳ (۹ و ۷)
۱۰ (۸)	۳ و ۴ (۱۶)	۲۴ (۱۰ و ۹ و ۷ و ۶)



۲۴- گزینه «۴» دو نقطه‌ی سیاه موجود در شکل سمت چپ، از یک جهت به اندازه‌ی یک مکعب و از جهت دیگر به اندازه‌ی سه مکعب با یکدیگر فاصله دارند و باید به دنبال همین مشخصات در گزینه‌ها باشیم، که به گزینه (۴) می‌رسیم.

۲۵- گزینه «۱» طبق الگو، ابتدا یک دوران حول محور افقی خواهیم داشت بعد، یک دوران حول محور عمودی، در نتیجه خواهیم داشت:





## سؤالات مهندسی برق - کنترل

مجموعه دروس تخصصی (ریاضیات مهندسی، مدارهای الکتریکی او ۲، سیگنال‌ها و سیستم‌ها، سیستم‌های کنترل خطی)

۱- فرض کنید  $z = x + iy$  باشد. مقدار ماکزیمم  $|\sin z|$  در دامنه مربعی شکل  $D = \{(x, y), 0 \leq x, y \leq 2\pi\}$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲)  $e^{2\pi}$  (۳)  $\sinh 2\pi$  (۴)  $\cosh 2\pi$

۲- جواب مسئله پواسن زیر کدام است؟

$$\omega(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta \quad (۱)$$

$$\omega(r, \theta) = \frac{1}{2} r \sin \theta + \frac{1}{\lambda} r^2 \sin \theta \quad (۲)$$

$$\omega(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (r^n + r^{-n}) \sin n\theta \quad (۳)$$

$$\omega(r, \theta) = \left(\frac{1}{2} r - 1\right) \sin \theta + \frac{1}{\lambda} r^2 \sin 2\theta \quad (۴)$$

۳- انتگرال فوریه تابع  $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$  کدام است؟

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + \cos(\omega\pi)}{1 - \omega^2} \cos(\omega x) d\omega \quad (۱)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + \cos(\omega\pi)}{1 - \omega^2} \omega \cos(\omega x) d\omega \quad (۲)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + \cos(\omega\pi)}{1 - \omega^2} \cos(\omega x) d\omega \quad (۳)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + \cos(\omega\pi)}{1 - \omega^2} \omega \cos(\omega x) d\omega \quad (۴)$$

۴- معادله دیفرانسیل جزئی ناهمگن زیر با تغییر متغیر  $u(x, t) = v(x, t) + r(x)$  به یک معادله همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل می‌شود.  $v(x, 0)$  کدام است؟

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + x - 1, & 0 < x < 2, t > 0 \\ u(0, t) = 2, & u(2, t) = -1, t > 0 \\ u(x, 0) = 1 - x^2, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

$$-\frac{7}{6}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x - 2 \quad (۲)$$

$$-\frac{7}{6}x^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x - 2 \quad (۱)$$

$$-\frac{7}{6}x^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + 3 \quad (۴)$$

$$-\frac{7}{6}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + 3 \quad (۳)$$

۵- اگر  $v(x, y)$  مزدوج همساز تابع  $u(x, y) = (x^2 - y^2 + 1)^2 - 4x^2y^2$  باشد، مقدار  $v(1, 1)$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۴ (۴) -۴

۶- سری نیم‌دامنه سینوسی تابع  $f(x) = x(\pi - x)$  در فاصله  $0 < x < \pi$  کدام است؟

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda}{(\gamma m + 1)^2 \pi} \sin(\gamma m + 1)x \quad (۲)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda}{(\gamma m + 1)\pi} \sin(\gamma m + 1)x \quad (۱)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 \pi} \sin \gamma m x \quad (۴)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma}{m\pi} \sin \gamma m x \quad (۳)$$

۷- اگر  $F(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-i\omega x} dx$  تبدیل فوریه  $f(x)$  باشد، تبدیل فوریه جواب مسئله زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \tau) e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau \quad (۴) \quad \int_0^{\infty} F(\omega, \tau) e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau \quad (۳) \quad \int_0^t F(\omega, \tau) e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau \quad (۲) \quad \int_0^t F(\omega, \tau) e^{a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau \quad (۱)$$

۸- فرض کنید تابع تحلیلی  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  برای هر  $z \in \mathbb{C}$  در نامساوی  $|f(z) - 2z^2 - iz| \leq \sqrt{2}$  صدق کند. در این صورت مقدار  $\oint_{|z|=1} f\left(\frac{1}{z}\right) dz$  کدام است؟

(۱)  $2\pi i$  (۲)  $-2\pi i$  (۳)  $2\pi$  (۴)  $-2\pi$





چون مشتق صفر نمی‌شود، لذا در مرحله‌ی سوم انتگرال می‌گیریم:

$$I = -[\cos x \cos \omega x]_0^\pi - [\omega \sin x \sin \omega x]_0^\pi + \omega^2 I \Rightarrow (1 - \omega^2) I = 1 + \cos \pi \omega \Rightarrow I = F_c(\omega) = \frac{1 + \cos \pi \omega}{1 - \omega^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 + \cos \pi x}{1 - \omega^2} \cos \omega x d\omega$$

۴- گزینه «۲» ابتدا از طرفین رابطه‌ی  $u(x, t) = v(x, t) + r(x)$  دو بار نسبت به  $x$  و در یک مرحله‌ی دیگر یک‌بار نسبت به  $t$  مشتق می‌گیریم و داریم:

$$u_{xx} = v_{xx} + r_{xx}, \quad u_t(x, t) = v_t(x, t) + 0$$

$$v_{xx} + r_{xx} = v_t(x, t) + x - 1$$

حالا در معادله جایگزین می‌کنیم:

بر اساس دو شرط اولیه صورت سؤال داریم:

$$u(0, t) = v(0, t) + r(0) \Rightarrow 3 = v(0, t) + r(0), \quad u(2, t) = v(2, t) + r(2) \Rightarrow -1 = v(2, t) + r(2)$$

برای این که شرایط مرزی برحسب  $v$  همگن شود باید  $r(0) = 3$  و  $r(2) = -1$  شود، بنابراین با دستگاه معادلات زیر برای همگن شدن معادله و شرایط مرزی آن روبه‌رو هستیم:

$$\begin{cases} r_{xx} = x - 1 \Rightarrow r_x = \frac{x^2}{2} - x + c_1 \Rightarrow r(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \\ r(0) = 3, r(2) = -1 \end{cases}$$

حالا از شرط  $r(0) = 3$  به راحتی  $c_2$  برابر با ۳ به دست می‌آید و از شرط  $r(2) = -1$  داریم:

$$-1 = \frac{2^3}{6} - \frac{2^2}{2} + c_1(2) + 3 \Rightarrow -4 = \frac{4}{3} - 2 + 2c_1 \Rightarrow 2c_1 = -2 - \frac{4}{3} \Rightarrow c_1 = -\frac{5}{3}$$

$$r(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{3}x + 3$$

ما دنبال  $v(x, 0)$  هستیم. اگر دوباره به تغییر متغیر صورت سؤال برگردیم، رابطه‌ی مقابل را داریم:

$$\Rightarrow 1 - x^2 = v(x, 0) + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{3}x + 3 \Rightarrow v(x, 0) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x - 2$$

$$u(x, t) = v(x, t) + r(x) \quad (*)$$

روش تستی: خوب! از شرط صورت سؤال داریم:

با توجه به داده‌های دیگه دو شرط  $u(0, t) = 3$  و  $u(2, t) = -1$  داریم، پس فعلاً از این دو شرط کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} u(0, t) = v(0, t) + r(0) \Rightarrow 3 = v(0, t) + r(0) \\ u(2, t) = v(2, t) + r(2) \Rightarrow -1 = v(2, t) + r(2) \end{cases}$$

چون قراره معادله برحسب  $v$  یک معادله‌ی همگن با شرایط مرزی همگن باشه، پس باید  $v(0, t) = v(2, t) = 0$  باشه، بنابراین  $r(0) = 3$  و  $r(2) = -1$  نتیجه‌ای که تا اینجا داریم. دنبال  $v(x, 0)$  هستیم؛ در رابطه‌ی (\*) به جای  $t$  ها صفر قرار می‌دیم:

$$u(x, 0) = v(x, 0) + r(x) \Rightarrow v(x, 0) = u(x, 0) - r(x) \Rightarrow \boxed{v(x, 0) = 1 - x^2 - r(x)}$$

اگه در طرفین رابطه‌ی فوق به جای  $x$  ها عدد صفر رو قرار بدیم، داریم:

تو گزینه‌ها فقط گزینه‌های (۱) و (۲) هستن که اگه به جای  $x$  های اونا صفر قرار بدیم، مقدارشون برابر منفی (۲) میشه، پس تا اینجا گزینه‌های (۳) و (۴) میبرن!

حالا برای انتخاب از بین گزینه‌های (۱) و (۲) از شرط  $r(2) = -1$  کمک می‌گیریم:

کافیه از بین گزینه‌های (۱) و (۲) تو یکی به جای  $x$  عدد ۲ قرار بدیم، مثلاً تو گزینه (۲) داریم:

$$v(2, 0) = -\frac{1}{6}(2^3) + \frac{1}{2}(2)^2 + \frac{5}{3} \times 2 - 2 = -\frac{8}{6} + 2 + \frac{10}{3} - 2 = \frac{-28 + 6 + 10 - 6}{3} = -\frac{18}{3} = -6$$

پس همین گزینه جوابه. میتونین تو گزینه (۱) به جای  $x$ ، عدد ۲ رو قرار بدین و ببینین که برابر با ۶- نمیشه! (اگه این کارو هم میکردین باز هم می‌تونستین بدون محاسبه‌ی گزینه (۲)، به جواب برسین فرقی نداره!)



۵- گزینه «۳» از سؤالات تکراری که چند بار تاکنون عین آن طرح شده است! یک روش این است که به جای  $y$ ، صفر و به جای  $x$ ،  $z$  قرار دهیم و مستقیم به ضابطه‌ی  $Z$  برسیم و روش دیگر مبتنی بر فرمول زیر است:

$$v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int \frac{\partial u}{\partial y} dx \quad (\text{عبارتی که از حذف توابع شامل } y \text{ در ضابطه‌ی } \frac{\partial u}{\partial y} \text{ حاصل می‌شود})$$

$$v = \int [\tau(x^2 - y^2 + 1)(\tau x) - \lambda xy^2] dy - \int (\circ) dx = \tau x^3 y - \frac{y^3}{3} \times \tau x + \tau xy - \frac{\lambda xy^2}{3} + c = \tau x^3 y - \frac{1}{3} \tau xy^2 + \tau xy + c$$

$$\Rightarrow v(x, y) = \tau xy(x^2 - y^2 + 1) + c \xrightarrow{v(\circ, \circ) = \circ} c = \circ \Rightarrow v(x, y) = \tau xy(x^2 - y^2 + 1) \Rightarrow v(1, 1) = \tau$$

روش دیگر: وقتی  $u$  را داریم می‌توانیم از فرمول مقابل به  $Z$  و بعد از آن به  $v$  برسیم.

$$f(z) = u(z, \circ) + iv(z, \circ)$$

در ضابطه‌ی  $u(x, y)$  به جای تمام  $x$  ها  $z$  و به جای تمام  $y$  ها صفر قرار می‌دهیم:

$$f(z) = (z^2 + 1)^2 + iv(z, \circ)$$

با توجه به این که  $v(\circ, \circ) = \circ$ ، پس  $f(\circ) = 1$  و با توجه به ضابطه‌ی  $u$  قطعاً  $v(z, \circ) = \circ$  خواهد بود، لذا  $f(z) = (z^2 + 1)^2$ . از این جا داریم:

$$f(z) = (z^2 + 1)^2 = (x^2 - y^2 + 1 + i\tau xy)^2 = v(x, y) + i\tau xy(x^2 - y^2 + 1) \Rightarrow v(x, y) = \tau xy(x^2 - y^2 + 1) \Rightarrow v(1, 1) = \tau$$

۶- گزینه «۲» سؤال بسیار تکراری از سری فوریه است و اساساً جنبه‌ی محاسباتی دارد. سؤال را به دو روش حل می‌کنیم، روش اول، روش تشریحی و عادی حل سؤال است:

با توجه به اینکه سری فوریه سینوسی مدنظر است، لذا باید  $b_n$  را حساب کنیم:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi x) \sin(nx) \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi -x^2 \sin(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) \, dx - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x^2 \sin(nx) \, dx = I_1 - I_2$$

دو انتگرال جزء به جزء داریم که از روش جدول برای هر دوی آن‌ها کمک می‌گیریم:

$\oplus$	$x$	$\sin nx$	$\Rightarrow I_1 = \tau \left[ -\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n} \sin nx \right]_0^\pi = \tau \times \left[ -\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) \right] = -\frac{\tau \pi}{n} \cos n\pi$
$\ominus$	$1$	$-\frac{1}{n} \cos nx$	
$\oplus$	$0$	$-\frac{1}{n^2} \sin nx$	

برای محاسبه  $I_2$  داریم:

$\oplus$	$x^2$	$\sin nx$	$\Rightarrow I_2 = \frac{\tau}{\pi} \left[ -\frac{x^2}{n} \cos(nx) + \frac{2x}{n^2} \sin(nx) + \frac{2}{n^3} \cos(nx) \right]_0^\pi \Rightarrow I_2 = \frac{\tau}{\pi} \left[ \left( -\frac{\pi^2}{n} \cos(n\pi) + \frac{2}{n^3} \cos n\pi - \frac{2}{n^3} \cos(\circ) \right) \right]$
$\ominus$	$2x$	$-\frac{1}{n} \cos(nx)$	
$\oplus$	$2$	$-\frac{1}{n^2} \sin(nx)$	
$\oplus$	$0$	$+\frac{1}{n^3} \cos(nx)$	$\Rightarrow I_2 = -\frac{\tau \pi}{n} \cos n\pi + \frac{4}{\pi n^3} \cos(n\pi) - \frac{4}{\pi n^3}$

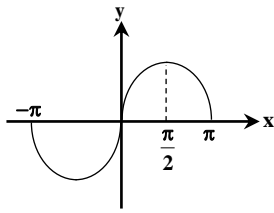
$$b_n = I_1 - I_2 = -\frac{\tau}{\pi n^2} \cos n\pi + \frac{4}{\pi n^3}$$

بنابراین  $b_n = I_1 - I_2$  برابر با مقدار مقابل است:

اگر  $n$  زوج باشد، آنگاه  $\cos n\pi = 1$  و لذا  $b_n = \circ$  می‌شود و اگر  $n$  فرد باشد (یعنی  $n = 2m + 1$ ) آنگاه داریم:

$$b_n = -\frac{\tau(-1)}{\pi(2m+1)^2} + \frac{4}{\pi(2m+1)^3} = \frac{4}{(2m+1)^3 \pi}$$

همان‌طور که می‌بینید  $b_n$  به‌دست آمده همان  $b_n$  داده شده در گزینه (۲) می‌باشد.



روش رد گزینه: دقت کنید، چون تابع پیوسته هستش، پس قطعاً سرعت رشد ضریب از درجه یک نیست و این یعنی گزینه‌های (۱) و (۳) غلطن. از بین گزینه‌های (۲) و (۴) باید یکی رو انتخاب کنیم. هم از بحث تقارن می‌تونیم برای حذف کمک بگیریم و هم از روش مقدارگذاری؛ چون روش مقدارگذاری اطلاعاتی در حد دبیرستان نیاز داره، پس از اون کمک می‌گیریم:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

برای مقدارگذاری می‌تونیم  $x = \frac{\pi}{2}$  در نظر بگیریم:

با فرض  $\pi^2 = 10$ ،  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2/5$  هستش، پس واضحه که گزینه (۴) غلطه، چون به ازای  $x = \frac{\pi}{2}$ ،  $\sin 2mx = \sin x\pi = 0$  میشه.

۷- گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که تبدیل فوریه  $u(x, t)$  را با  $u(\omega, t)$  و تبدیل فوریه  $u_{xx}$  برابر با  $(i\omega)^2 u(\omega, t)$  است. حالا از طرفین معادله تبدیل فوریه می‌گیریم،  $\frac{du(\omega, t)}{dt} - a^2 [-\omega^2 u(\omega, t)] = F(\omega, t)$  با یک معادله‌ی خطی مرتبه اول روبه‌رو هستیم:

$$u(\omega, t) = e^{-a^2 \omega^2 t} \left[ \int_0^t F(\omega, \tau) e^{+a^2 \omega^2 \tau} d\tau + C(\omega) \right]$$

$$u(\omega, 0) = 0 \Rightarrow C(\omega) = 0 \Rightarrow u(\omega, t) = \int_0^t F(\omega, \tau) e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau$$

۸- گزینه «۴» از سؤالاتی که در دو سال اخیر مورد توجه طراحان قرار گرفته است. سؤال مبتنی بر قضیه لیوویل طراحی شده است. چون سمت چپ نامساوی  $|f(z) - 2z^2 - iz| \leq \sqrt{2}$  همه جا تحلیلی است، لذا داریم:

$$f(z) - 2z^2 - iz = c \Rightarrow f(z) = c + 2z^2 + iz \Rightarrow f\left(\frac{1}{z}\right) = c + \frac{2}{z^2} + \frac{i}{z}$$

$$I = \oint_{|z|=1} f\left(\frac{1}{z}\right) dz = \oint_{|z|=1} c dz + \oint_{|z|=1} \frac{2}{z^2} dz + i \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz \Rightarrow I = 0 + 0 + i \times 2\pi i = -2\pi$$

حالا سراغ محاسبه‌ی انتگرال می‌رویم:

دقت کنید بر طبق انتگرال کوشی یعنی  $\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} = 2\pi i \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$  برای انتگرال‌های فوق، حاصل دو انتگرال صفر است و حاصل انتگرال دیگر برابر  $2\pi i f^{(0)}(0) = 2\pi i \times 1 = 2\pi i$  می‌شود که با ضرب در  $i$ ، مقدار آن برابر با  $-2\pi$  شده است.

۹- گزینه «۱» یک سؤال بسیار پرتکرار و نسبتاً ساده از نگاهت  $w = \frac{1}{z}$  طرح شده است. می‌دانیم تحت نگاشت  $w = \frac{1}{z}$ ، رابطه‌های  $x = \frac{u}{u^2 + v^2}$  و  $y = \frac{-v}{u^2 + v^2}$  را داریم و چون  $2x + 3y = 5$ ، لذا با جایگذاری داریم:

$$\frac{2u}{u^2 + v^2} - \frac{3v}{u^2 + v^2} = 5 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } u^2 + v^2} 2u - 3v = 5u^2 + 5v^2 \Rightarrow 5u^2 - 2u + 5v^2 + 3v = 0$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } 5} u^2 - \frac{2}{5}u + v^2 + \frac{3}{5}v = 0$$

حالا با اضافه و کم کردن اعداد مناسب سعی می‌کنیم متغیرهای  $u$  و  $v$  را به صورت مربع کامل بنویسیم:

$$\left[u^2 - \frac{2}{5}u + \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2\right] + \left[v^2 + \frac{3}{5}v + \left(\frac{3}{10}\right)^2 - \left(\frac{3}{10}\right)^2\right] = 0 \Rightarrow \left(u - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{25} + \left(v + \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{9}{100} = 0 \Rightarrow \left(u - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(v + \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{13}{100}$$

۱۰- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیستند. سؤال فوق‌العاده غیر استاندارد می‌باشد و نه تنها در کتاب‌های کنکوری چنین سؤالاتی وجود ندارد، بلکه در کتاب‌های دانشگاهی و سؤالات پایان ترم هم چنین سؤالاتی طرح نمی‌شود. ظاهراً بحث فقط برای این بوده که کسی سؤال را جواب ندهد و ضمناً گزینه‌ها هم غلط هستند و سؤال باید حذف شود.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 9 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \begin{cases} te^{-|x+y|} & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} = f(x, y, t)$$

تبدیل فوریه کلی روی  $y$ :

$$F(u(x, y, t)) = \hat{u}(x, \omega, t)$$

**سوالات مهندسی برق - کنترل**

ریاضیات مهندسی، مدارهای الکتریکی ۱ و ۲

۱- با استفاده از سری فوریه تابع  $f(x) = x(\pi^2 - x^2)$  در بازه  $[-\pi, \pi]$ ، مقدار  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^6}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{8}{315}$  (۲)  $\frac{8}{945}$  (۳)  $\frac{1}{315}$  (۴)  $\frac{1}{945}$

۲- فرض کنید  $F(\omega)$  تبدیل فوریه تابع  $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$  باشد. اگر مساحت سطح زیر منحنی تابع  $F^2(x)$  در  $\mathbb{R}$  برابر  $16\pi$  باشد، آنگاه مقدار  $a$  کدام است؟

$(F\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx)$

- (۱) ۱۶ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۲

۳- مقدار  $u(y, t)$  از جواب مسئله ارتعاش زیر، کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}; x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} 2x - 4 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases} \\ u_t(x, 0) = \begin{cases} -5x + 7 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & x \geq 1 \end{cases} \\ u(0, t) = 2t, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

(۱)  $\frac{15}{2}$  (۲)  $\frac{17}{2}$  (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۴- مسئله زیر دارای جواب کران‌دار است. مقدار  $A+B$  کدام است؟

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \begin{cases} x - 2y & 0 < x \leq 1 \\ 0 & 0 < y < \pi \\ Ax & x > 1 \end{cases} \\ u(x, 0) = \begin{cases} 2x - 4 & 0 < x < \pi \\ B & x > \pi \end{cases} \\ u(x, \pi) = 0 \\ u_x(0, y) = 6y(\pi - y) \end{cases}$$

(۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) صفر (۴) -۱۲

۵- سری لوران تابع  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 4}$  حول  $z = 2$  در ناحیه  $|z - 2| > 4$ ، کدام است؟

- (۱)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^{n-1}}{4^{n+1}}$  (۲)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(z-2)^{n+2}}$  (۳)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^{n-1}}{4^{n+1}}$  (۴)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(z-2)^{n+2}}$

۶- مقدار  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax) dx}{x(x^2 + 1)^2}$  با فرض  $a \neq 0$ ، کدام است؟

- (۱)  $2\pi \left(1 + \frac{a+2}{4} e^{-a}\right)$  (۲)  $\pi \left(1 + \frac{a+2}{2} e^{-a}\right)$  (۳)  $2\pi \left(1 - \frac{a+2}{4} e^{-a}\right)$  (۴)  $\pi \left(1 - \frac{a+2}{2} e^{-a}\right)$

۷- کدام ناحیه از صفحه مختلط  $z = x + iy$  تحت نگاشت  $w = \frac{1}{z}$  به درون نیم‌دایره فوقانی  $(u + \frac{1}{v})^2 + v^2 = 1$  در صفحه  $w = u + iv$  تبدیل می‌شود؟

- (۱)  $x < -1, y > 0$  (۲)  $x < -1, y < 0$  (۳)  $x > 1, y > 0$  (۴)  $x > 1, y < 0$

۸- فرض کنید  $w = w(z)$  یک نگاشت دوخطی (موبیوس) باشد که نقاط  $1 + i$  و  $1 - i$  و صفر را از صفحه  $z$  به ترتیب به نقاط  $i$  و  $-i$  و  $1$  در صفحه  $w$  می‌نگارد. مقدار  $w(1-i)$  کدام است؟

- (۱)  $2 + i$  (۲)  $2 - i$  (۳)  $1 + 2i$  (۴)  $1 - 2i$

۹- مقدار  $\oint_{|z|=2} \tanh(z) dz$  کدام است؟

- (۱)  $-2\pi i$  (۲) صفر (۳)  $2\pi i$  (۴)  $4\pi i$

۱۰- مانده تابع  $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{1-z}$  در شاخه  $3\pi < \arg z < 5\pi$ ، در نقطه  $z = 1$ ، کدام است؟

- (۱)  $-2\pi i$  (۲)  $-1$  (۳)  $1$  (۴)  $2\pi i$



## پاسخنامه مهندسی برق - کنترل

### ریاضیات مهندسی، مدارهای الکتریکی ۱ و ۲

۱- گزینه «۴»

$$f(x) = x(\pi^x - x^x), \quad x \in [-\pi, \pi] \Rightarrow \tau p = \pi - (-\pi) = 2\pi$$

$$f(-x) = -x(\pi^x - (-x)^x) = -(\pi^x - x^x) = x = -f(x)$$

پس تابع  $f(x)$  تابعی است فرد و در نتیجه داریم:

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x(\pi^x - x^x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi^x x - x^x) \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} [x(\pi^x - x^x) \left(-\frac{1}{n} \cos nx\right) - (\pi^x - x^x) \left(-\frac{1}{n^2} \sin nx\right) + (-x) \left(\frac{1}{n^2} \cos nx\right) - (-1) \left(\frac{1}{n^2} \sin nx\right)] \Big|_0^\pi = \frac{1}{\pi} \cos n\pi$$

چون در صورت سؤال توان ۶ سری عددی مورد سؤال است، پس توان دوم  $b_n$  ها را باید به دست آوریم. از رابطه معروف پارسوال استفاده می‌کنیم.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega + b_n \sin n\omega) = \frac{1}{P} \int_{-P}^P f^\tau(x) dx \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega = \frac{1}{P} \int_{-P}^P f^\tau(x) dx$$

$$(II) \text{ محاسبه: } \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^x (\pi^x - x^x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^x (\pi^x - \tau \pi^x x^x + x^x) dx = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{105} \pi^7 = \frac{16}{105} \pi^6$$

$$(I) \text{ محاسبه: } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^6} \cos^6 n\pi = 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

$$\xrightarrow{(I)=(II)} \frac{16}{105} \pi^6 = 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{16}{105 \times 16} = \frac{1}{945}$$

$$S = \frac{1}{\pi^6} + \frac{1}{945 \times \pi^6}$$

روش تستی: چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

با فرض  $\pi^2 = 10$  آن‌گاه  $(\pi^2)^3 = 1000$  پس طبق نکته تستی کتاب مقدار سری از  $\frac{1}{1000}$  بیشتر و از  $2 \times \frac{1}{1000}$  قطعاً کمتره، یعنی از  $\frac{3}{1000}$  کمتره

که به صورت حدودی از  $\frac{1}{333}$  مقدار باید کمتر باشه، تمام گزینه‌ها غیر از گزینه (۴) مقدار ستون از  $\frac{1}{333}$  بیشتره، پس گزینه (۴) جوابه!؟

۲- گزینه «۳» به ازای هر مقدار  $a$ ، تابع  $f(x)$ ، یک تابع زوج خواهد بود لذا داریم:

$$A(\omega) = \int_0^\infty f(x) \cos \omega x dx; \quad f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

$$\int_0^\infty f(x) \cos \omega x dx + \int_0^\infty f(\omega) \cos \omega x dx = \int_0^\infty \cos \omega x dx = \frac{1}{\omega} \sin \omega x \Big|_0^a = \frac{\sin a\omega}{\omega} \Rightarrow A(\omega) = F(\omega) = \frac{\sin a\omega}{\omega}$$

از طرفی طبق رابطه پارسوال داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^\tau(x) dx = \frac{1}{\tau\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^\tau(\omega) d\omega$$

$$\tau \int_0^\infty f^\tau(x) dx = \frac{1}{\tau\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^\tau a\omega}{\omega^\tau} d\omega$$

$$\tau \int_0^a f^\tau(x) dx + \tau \int_a^\infty f^\tau(x) dx = \tau \int_0^a dx = \tau a$$

از رابطه پارسوال داریم:

$$\int_a^b f(x) dx$$

همانطور که می‌دانیم، سطح زیر منحنی تابع  $f(x)$  در بازه  $(a, b)$  برابر است با:

$$\tau a = \frac{1}{\tau\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^\tau a\omega}{\omega^\tau} d\omega \quad (1)$$

پس مساحت ناحیه  $F^\tau(x)$  در  $\mathbb{R}$  برابر است با  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^\tau ax}{x^\tau} dx$  که این با  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^\tau a\omega}{\omega^\tau} d\omega$  فرقی ندارد، لذا داریم:

$$S_{F^\tau(\omega)} = 16\pi \quad (2)$$



از دو رابطه (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2} dx = 4\pi a \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2} dx = 16\pi \end{cases} \Rightarrow 16\pi = 4\pi a \Rightarrow a = 4$$

۳- گزینه «۲» چون مسئله یک معادله موج نیمه متناهی می‌باشد و مقدار ارتعاش را در نقطه  $x=7$  و  $t=4$  می‌خواهد لذا از جواب دالامبر موج نیمه متناهی استفاده می‌شود.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}; \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad u(0, t) = p(t)$$

$$\begin{cases} u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\theta) d\theta & ; \text{if } x > at \\ u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\theta) d\theta + p(t - \frac{x}{a}) & ; \text{if } x < at \end{cases}$$

$$x = 7, \quad t = 4, \quad a = 2$$

$$x - at = -1, \quad x + at = 15, \quad t - \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \quad x < at (\text{ok})$$

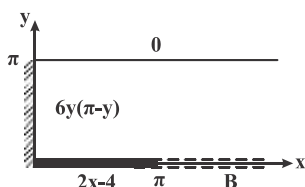
$$u(7, 4) = \frac{1}{2} [f(15) + f(-1)] + \frac{1}{4} \int_{-1}^{15} g(\theta) d\theta + p(\frac{1}{2})$$

چون شرایط هندسی در  $u$  داده شده (شرط هندسی دیریکله) لذا گسترش فرد توابع  $y$  و  $g$  مدنظر است.

$$f(15) = 0, \quad f(-1) = -f(1) = 1, \quad p(\frac{1}{2}) = 1$$

$$u(7, 4) = \frac{1}{2} [0 + 1] + \frac{1}{4} \int_{-1}^1 g(\theta) d\theta + \frac{1}{4} \int_{1}^{15} g(\theta) d\theta + 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (2\theta)^{15} + 1 = \frac{17}{2} \Rightarrow u(7, 4) = \frac{17}{2}$$

۴- گزینه «۴»



$$u(x, y) = v(x, y) + Q(y), \quad Q(y) = ay + b$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = v(x, 0) + Q(0) \Rightarrow u(x, 0) = Q(0) \\ \text{باید صفر شود} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x, \pi) = v(x, \pi) + Q(\pi) \Rightarrow u(x, \pi) = Q(\pi) \\ \text{باید صفر شود} \end{cases}$$

$$Q(0) = \begin{cases} 2x - 4 & 0 < x < \pi \\ B & x > \pi \end{cases} \Rightarrow a \times 0 + b = \begin{cases} 2x - 4 & 0 < x < \pi \\ B & x > \pi \end{cases} \Rightarrow b = \begin{cases} 2x - 4 & 0 < x < \pi \\ B & x > \pi \end{cases}$$

$$Q(\pi) = 0 \Rightarrow a \times \pi + b = 0 \Rightarrow a = -\frac{b}{\pi}$$

$$Q(y) = b(1 - \frac{y}{\pi}) = \begin{cases} (2x - 4)(1 - \frac{y}{\pi}) & 0 < x < \pi \\ B(1 - \frac{y}{\pi}) & x > \pi \end{cases}$$

اکنون مسئله مقابل را حل می‌کنیم:

$$V_{xx} + V_{yy} = \begin{cases} x - 2y & 0 < x < \pi \\ Ax & x > \pi \end{cases}$$

$$V(x, 0) = 0, \quad V(x, \pi) = 0$$

$$V_x(0, y) = u_x(0, y) = \epsilon y(\pi - y)$$

$$V(x, y) = F(x)G(y), \quad \begin{cases} G(0) = 0 \\ G(\pi) = 0 \end{cases}, \quad G(y) = A \sin \lambda y + B \cos \lambda y$$

$$G_k(y) = A \sin ky \quad \text{با اعمال } B \text{ شرط مرزی}$$



در معادله قرار می‌دهیم:

$$V(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x) \cdot \sin ky$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (F_k''(x) - k^{\gamma} F_k(x)) \sin ky = \begin{cases} x - \gamma y & 0 < x < 1 \\ Ax & x > 1 \end{cases}$$

$$F_k''(x) - k^{\gamma} F_k(x) = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{\pi} [(x - \gamma y) + Ax] \sin ky dy$$

سری فوریه سینوسی را می‌نویسیم:

$$F_k''(x) - k^{\gamma} F_k(x) = \gamma(A + 1)x \left[ \frac{(-1)^{k+1} + 1}{k\pi} + \frac{\gamma(-1)^{k+1}}{k} \right]$$

$$F_k(x) = C_k e^{kx} + d_k e^{-kx} + \gamma(A + 1)x \left[ \frac{(-1)^k - 1}{k^{\gamma} \pi} + \frac{\gamma(-1)^k}{k^{\gamma}} \right]$$

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (C_k e^{kx} + d_k e^{-kx} + \gamma(Ax)x \frac{(-1)^k - 1}{k^{\gamma} \pi} + \frac{\gamma(-1)^k}{k^{\gamma}}) \sin ky$$

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (d_k e^{-kx} + \gamma(A + 1)x \frac{(-1)^k - 1}{k^{\gamma} \pi} + \frac{\gamma(-1)^k}{k^{\gamma}}) \sin ky$$

برای جواب کراندار می‌بایست:  $C_k = 0$  لذا داریم:

$$v_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (-kd_k e^{-kx} + \gamma(A + 1) \frac{(-1)^k - 1}{k^{\gamma} \pi} + \gamma) \sin ky$$

$$v_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} [-kd_k + (\gamma A + \gamma) \frac{(-1)^k - 1}{k^{\gamma} \pi}] \sin ky = \epsilon y(\pi - y)$$

$$[-kd_k + \gamma(A + 1) \frac{(-1)^k - 1}{k^{\gamma} \pi}] = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{\pi} \epsilon y(\pi - y) \sin ky dy - k \cdot d_k = \gamma \frac{(-1)^k - 1}{k^{\gamma} \pi} (A + \gamma + 1)$$

$$u(x, y) = v(x, y) + Q(y)$$

برای همگرا بودن جواب معادله می‌بایست:

برای این که در بازه  $0 < x < \pi$  جواب داشته باشیم، پس ضریب  $e^{-u} o^x$  را صفر قرار داده و جواب معادله با ساده‌سازی برابر است با:

$$\lambda(A + \gamma + 1) + B = 0 \Rightarrow A + B = -1\gamma$$

$$z - \gamma = t \Rightarrow z = t + \gamma$$

۵- گزینه «۱»

$$f(z) = \frac{1}{(z - \gamma)(z + \gamma)} \Rightarrow f = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t + \gamma}$$

$$f = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{t}} = \frac{1}{t} \cdot (1 - \frac{\gamma}{t} + (\frac{\gamma}{t})^2 - (\frac{\gamma}{t})^3 + \dots) = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\frac{\gamma}{t})^n$$

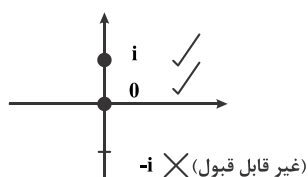
$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \gamma^n}{t^{n+\gamma}} \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\gamma)^n}{(z - \gamma)^{n+\gamma}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^{\gamma} + 1)^{\gamma}} dx = \text{Im} \left[ \gamma \pi i \times \sum \text{Res} f(z) \cdot e^{iaz} \right]_{z_0} + \pi i \sum \text{Res} f(z) \cdot e^{iaz} \left. \right]_{z'_0}$$

۶- گزینه «۴»

و تابع  $f(z) = \frac{1}{z(z^{\gamma} + 1)^{\gamma}}$  می‌باشد.

$$z(z^{\gamma} + 1)^{\gamma} = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = -i \\ z = i \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^{\gamma} + 1)^{\gamma}} dx = \text{Im} \left[ \underbrace{\gamma \pi i \times \text{Res} \frac{e^{iaz}}{x(x^{\gamma} + 1)^{\gamma}}}_{(I)} \right]_{z=i} + \pi i \times \text{Res} \frac{e^{iaz}}{z(z^{\gamma} + 1)^{\gamma}} \left. \right]_{z=0} \quad (*)$$



$$I: \operatorname{Res} \frac{e^{iz}}{z(z+i)^{\gamma}(z-i)^{\gamma}} \Big|_{z=i} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[ \frac{e^{iaz}}{z(z+i)^{\gamma}} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{iaze^{iaz}(z+i) - (\gamma z+i)e^{iaz}}{z^{\gamma}(z+i)^{\gamma}} = \frac{\gamma a e^{-a} + \gamma e^{-a}}{\lambda}$$

$$II: \operatorname{Res} \frac{e^{iz}}{z(z+i)^{\gamma}} \Big|_{z=0} = \frac{P(0)}{Q'(0)} = \frac{e^{iz}}{\Delta z^{\gamma} + \epsilon z^{\gamma} + 1} \Big|_{z=0} = 1 \Rightarrow \text{از رابطه (*)} : \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^{\gamma}+1)^{\gamma}} dx = \operatorname{Im} \left[ \gamma \pi i \left( -\frac{\gamma a e^{-a} + \gamma e^{-a}}{\lambda} \right) + \pi i(1) \right]$$

$$= \left( -\frac{\gamma a e^{-a} + \gamma e^{-a}}{\lambda} + 1 \right) \pi = \pi \left( 1 - \frac{\gamma a + \gamma}{\lambda} e^{-a} \right)$$

۷- گزینه «۲» توضیح: در صورت سؤال این تست یک ایراد کوچک (احتمالاً خطای تایپی) وجود دارد که ابتدا آن را درست می‌کنیم. دایره صورت تست به فرم مقابل بایستی باشد.

$$\left(u + \frac{1}{\gamma}\right)^{\gamma} + v^{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$$

$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow u + iv = \frac{1}{x+iy} \times \frac{x-iy}{x-iy} \Rightarrow u + iv = \frac{x}{x^{\gamma} + y^{\gamma}} + i \frac{-y}{x^{\gamma} + y^{\gamma}}$$

$$u = \frac{x}{x^{\gamma} + y^{\gamma}}, \quad v = \frac{-y}{x^{\gamma} + y^{\gamma}} \quad (*)$$

$$\begin{cases} u^{\gamma} + v^{\gamma} + u < 0 \\ v > 0 \end{cases}$$

نیم‌صفحه فوقانی دایره  $\left(u + \frac{1}{\gamma}\right)^{\gamma} + v^{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$  را به فرم مقابل نیز می‌توان نوشت:

$$\frac{x^{\gamma}}{(x^{\gamma} + y^{\gamma})^{\gamma}} + \frac{y^{\gamma}}{(x^{\gamma} + y^{\gamma})^{\gamma}} + \frac{x}{x^{\gamma} + y^{\gamma}} < 0 \Rightarrow \frac{1}{x^{\gamma} + y^{\gamma}} + \frac{x}{x^{\gamma} + y^{\gamma}} < 0 \Rightarrow x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$$

از رابطه (\*):

$$v > 0 \Rightarrow \frac{-y}{x^{\gamma} + y^{\gamma}} > 0 \Rightarrow -y > 0 \Rightarrow y < 0$$

۸- گزینه «۱»

صفحه Z

صفحه w

$$z_1: 1 \longrightarrow$$



$$w_1: i$$

$$z_2: 1+i \longrightarrow$$



$$w_2: -i$$

$$z_3: 0 \longrightarrow$$



$$w_3: 1$$

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

$$\frac{w-i}{w-1} \cdot \frac{-i-1}{-i-i} = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1+i-0}{1+i-1} \Rightarrow \frac{z-1}{z} = \frac{1}{2} \frac{w-i}{w-1}$$

$$\frac{w-i}{w-1} = \frac{\gamma z - \gamma}{z} \Rightarrow w(z) = \frac{(i-\gamma)z + \gamma}{-z + \gamma}$$

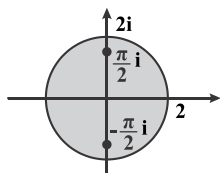
$$w(1-i) = \frac{(i-\gamma)(1-i) + \gamma}{-(1-i) + \gamma} = \frac{\gamma i + 1}{i+1} = \gamma + i$$

$$\oint_{|z|=\gamma} \operatorname{tgh} z dz = \oint_{|z|=\gamma} \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} dz$$

۹- گزینه «۴»

$$\operatorname{ch} z = 0 \xrightarrow{\operatorname{ch} z = \cos iz} \cos iz = 0 = \cos \frac{\pi}{\gamma} \Rightarrow iz = \gamma k \pi \pm \frac{\pi}{\gamma} \Rightarrow z = -(\gamma k \pi \pm \frac{\pi}{\gamma})i$$

نقاط تکین داخل دایره  $|z| = \gamma$ :



$$z_0 = \frac{\pi}{\gamma}i, \quad z_1 = -\frac{\pi}{\gamma}i$$

$$\oint_{|z|=\gamma} \operatorname{tgh} z dz = \gamma \pi i \left[ \operatorname{Res} \operatorname{tgh} z \Big|_{z=\frac{\pi}{\gamma}i} + \operatorname{Res} \operatorname{tgh} z \Big|_{z=-\frac{\pi}{\gamma}i} \right] = \gamma \pi i \left[ \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \Big|_{z=\frac{\pi}{\gamma}i} + \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \Big|_{z=-\frac{\pi}{\gamma}i} \right] = \gamma \pi i (1+1) = 2\pi i$$

$$\pi + \gamma \pi < \arg(z) < \gamma \pi + \gamma \pi \Rightarrow \pi < \arg(z) < \gamma \pi$$

۱۰- گزینه «۲»

$$\operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=1} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} = \frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{\sqrt{z}}{-1} \Big|_{z=1} = -1$$

$z=1$  قطب ساده برای تابع  $f(z)$  است، پس داریم: