فصل اول

« مقدمه و یادآوری »

مقدمه

مکانیک شاخه‌ای از علم فیزیک است که از لحاظ قدمت، قدیمی‌ترین علم فیزیکی است که در آن اثرات اجسام و نیروهای متقابل بر روی یکدیگر از نظر حرکت و سکون مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مکانیک جدید بر اساس قانون نیوتن(۱۷۲۷-۱۶۴۲) بناشده است، اگر چه تئوری نسبیّت انشتین محدودیتهائی برای قانون نیوتن ایجاد کرده ولی این محدودیتها برای اجسام و فواصل معمولی و مورد مطالعه مهندسی و برای حرکاتیکه نسبت به سرعت نور آهسته‌تر می‌باشند (سرعت نور ۳۰۰/۰۰۰ کیلومتر در ثانیه) ناچیز و قابل صرفنظر کردن می‌باشد.

ابعاد و واحدهای اصلی مکانیک (طول، زمان و جرم)

برای اندازه‌گیری پدیده‌های مختلف در طبیعت واحدهای اندازه‌گیری مورد استفاده قرار می‌گیرند. طول، سطح، حجم، زمان، نیرو، سرعت، شتاب، درجه حرارت و ... که هر کدام بایستی با واحد مربوطهٔ خود اندازه‌گیری شوند. برای اندازه‌گیری کمیت مربوط به هر یک از این اشیاء و پدیده‌ها یک واحد معین انتخاب شده است. مثلاً برای طول از واحدهایی نظیر میلیمتر، سانتیمتر، متر، فوت، اینچ و... استفاده می‌گردد.

نکته ۱: بدیهی است در صورتیکه واحد طول معین شود واحدهای سطح و حجم نیز خود به خود تعیین می‌شوند.

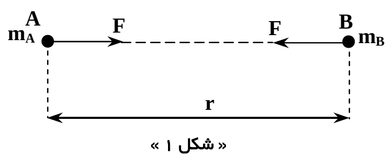
واحدی مثل طول را ***واحد اصلی*** یا اولیه و واحدهایی مانند سطح و حجم که بر مبنای واحد اصلی تعیین می‌شوند را ***واحدهای ثانوی*** یا فرعی می‌نامند (واحدهای اصلی مستقل از یکدیگر هستند). بعد از انتخاب واحد طول "L" ملاحظه می‌گردد که زمان رابطه‌ای با آن ندارد، لذا زمان نمی‌تواند واحد فرعی طول باشد، پس می‌توان آنرا یک واحد اصلی نامید، زمان را با "T" نمایش می‌دهیم، واحد اصلی زمان "ثانیه" می‌باشد.

اکنون که واحدهای طول و زمان معین شده‌اند می‌توان سرعت و شتاب را تعریف و واحد آنها را معین کرد. سرعت یک جسم مقدار طول پیموده شده توسط جسم در واحد زمان و شتاب، تغییر سرعت آن جسم در واحد زمان است.

جرم خاصیتی است که هر ماده دارد و می‌توان گفت زمانی دو ماده دارای یک جرم هستند که در یک نقطه معین از زمین وزن مساوی داشته باشند. جرم یک واحد اصلی است که آن را با "M" نشان می‌دهند. واحد اصلی جرم کیلوگرم است. برای تعریف جامع‌تر جرم دو قانون نیوتن را بیان می‌کنیم:

الف) قانون جاذبه عمومی نیوتن

فرض کنید دو ذره مادی A و B مطابق شکل قرار گرفته باشند، قانون جاذبه عمومی نیوتن بیان می‌کند که بین این دو نقطهٔ مادی نیروی جاذبه‌ای وجود دارد به نحوی که اثر هر یک از نقاط مادی روی دیگری مساوی و مختلف الجهت می‌باشد. یعنی جرم A نیروی F به جرم B و جرم B نیروی جاذبه F به جرم A وارد می‌کنند (یعنی بین نقاط مادی A و B نیروی جاذبه وجود دارد) و داریم:



« شکل ۱ »

$$F = G\frac{m_A m_B}{r^2}$$

مثال۱: اگر فاصله دو ذره نصف شود، نیروی جاذبه بین آنها چند برابر می‌گردد؟

۱) ۲ برابر ۲) $\frac{1}{2}$ برابر ۳) ۴ برابر ۴) تغییری نمی‌کند

پاسخ: گزینه «۳» نیروی جاذبه بین دو ذره با توان دوم معکوس فاصله متناسب است، لذا:

$$F \alpha \frac{1}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} r \to \frac{1}{2}r \\ F \to 4F \end{cases}$$

ب) قانون دوم نیوتن

شتاب حرکت یک جسم تحت اثر نیروی F تناسب مستقیم با نیرو دارد، عدد ثابت تناسب، جرم جسم می‌باشد. یعنی: $F = Ma$

سیستم واحدهای اندازه‌گیری مطلق

الف) سیستم متریک

الف) MKS : در این سیستم جرم یک کیلوگرم در سطح دریا واحد جرم است که کیلوگرم جرم نامیده می‌شود. واحد نیرو در این سیستم نیوتن است، یک نیوتن نیروئی است که به یک کیلوگرم جرم شتابی معادل یک متر بر مربع ثانیه بدهد. چون در سطح دریا شتاب جاذبه زمین برابر $g = ۹/۸۰۶۶۵\ m/S^۲$ می‌باشد، بنابراین وزن یک کیلوگرم معادل ۹/۸۰۶۶۵ نیوتن است. $F = mg = ۱\times ۹/۸۰۶۶۵$ نیوتن

ب) CGS : در این دستگاه جرم یک گرم در سطح دریا واحد جرم است که گرم جرم نامیده می‌شود. واحد نیرو در این دستگاه "دین" است و چون $g = ۹۸۰/۶۶۵\ cm/S^۲$ است پس هر گرم وزن تقریباً ۹۸۱ دین می‌باشد.

ب) سیستم انگلیسی

در این سیستم جرم یک ماده که دارای وزنی معادل یک پوند در سطح دریا می‌باشد واحد جرم است و «پوند جرم» نامیده می‌شود. بنابراین واحد نیرو در این سیستم، نیروئی است که به جرم یک «پوند جرم» شتاب یک فوت بر مربع ثانیه بدهد که «پوندال» نامیده می‌شود. توجه نمائید که وزن یک پوند جرم مساوی $F = Mg$ پوندال است که در آن g شتاب ثقل زمین در محل آزمایش است. اگر محل آزمایش سطح دریا باشد، وزن این جرم مساوی یک پوند است (بنا به تعریف پوند جرم) و چون در سطح دریا $g = ۳۲/۱۷۴۰۵\ Ft/Sec^۲$ است، بنابراین وزن یک پوند معادل پوندال ۳۲/۵۰۱۷۴ می‌باشد، به عبارتی:

پوند ۱ = (یک پوند جرم) $(۳۲/۱۷۴۰۵\,Ft/Sec^۲)$ = ۳۲/۵۰۱۷۴ × (یک پوند جرم)$\times(۱\ Ft/Sec^۲) = ۳۲/۱۷۴۰۵$ پوندال

سیستم واحدهای اندازه‌گیری مهندسی

الف) سیستم متریک (MKS)

در این دستگاه یک «کیلوگرم وزن» واحد نیرو است، واحد جرم در این دستگاه جرمی است که اگر واحد نیرو (کیلوگرم وزن) به آن وارد شود شتاب واحد پیدا کند. ملاحظه می‌شود که این واحد ۹/۸۱ برابر کیلوگرم جرم خواهد بود.

ب) سیستم انگلیسی

در این سیستم «پوند وزن» (وزن یک پوند جرم در کنار دریا) واحد نیرو است، واحد جرم ***«اسلاگ»*** می‌باشد، یک اسلاگ جرمی است که تحت اثر یک پوند وزن شتاب واحد $(۱\ Ft/Sec^۲)$ پیدا کند. بنابراین وزن واحد جرم (اسلاگ) در کنار دریا مساوی پوند $F = Mg = (۱)\times(۳۲/۲)$ و جرم این وزنه پوند جرم و معادل ۳۲/۲ می‌باشد. بنابراین هر اسلاگ معادل ۳۲/۲ پوند است.

نکته ۲: به طور خلاصه وقتی وزن در کنار دریا داده شده باشد مقدار عددی جرم آن به پوند جرم همان وزن است و مقدار عددی جرم آن به اسلاگ وزن آن تقسیم بر ۳۲/۲ می‌باشد.

مثال۲: وزن یک جسم در کنار دریا ۶۴۴ پوند است. وزن این جسم در محلی که شتاب ثقل زمین ۳۰/۵ فوت بر مربع ثانیه است، بر حسب پوند کدام است؟

۱) $۲۵۷^{\#}$ ۲) $۶۱۰^{\#}$ ۳) $۹۱۰^{\#}$ ۴) $۳۵۷^{\#}$

پاسخ : گزینهٔ «۲» اگر از فرمول $F = Ma$ استفاده کنیم، که M بر حسب اسلاگ و a بر حسب فوت بر مجذور ثانیه است خواهیم داشت: (در کنار دریا) $W_۰ = M(۳۲/۲)$ و در محلی با شتاب ثقل g : $W = Mg$ اگر M را در این دو رابطه حذف کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{W}{W_۰} = \frac{g}{۳۲/۲} \Rightarrow W = W_۰\frac{g}{۳۲/۲}$$

با توجه به معلومات مسأله : $W = ۶۴۴\frac{۳۰/۵}{۳۲/۲} = ۶۱۰\ \#$

مثال۳: وزن جسمی در شرایط متعارف ۷۰۰ پوند است. جرم آن بر حسب اسلاگ چقدر می‌باشد؟

۱) ۲۱/۷ ۲) ۶۵/۶ ۳) ۷۰ ۴) ۷۱/۳

پاسخ : گزینهٔ «۱» جرم جسم بر حسب اسلاگ $\frac{۷۰۰}{۳۲/۲} = ۲۱/۷$ می‌باشد.

دستگاه واحدهای معمول:

کمیت	واحد M.K.S	واحد C.G.S	واحد انگلیسی	واحد مهندسی آمریکائی
جرم	کیلوگرم جرم	گرم	پوند جرم	اسلاگ
طول	متر	سانتی‌متر	فوت	فوت
زمان	ثانیه	ثانیه	ثانیه	ثانیه
نیرو	نیوتن	دین	پوندال	پوند نیرو

تبدیل واحدها:

۱ اینچ $\equiv$ ۲/۵۴ سانتیمتر

۱ فوت $\equiv$ ۱۲ اینچ $\equiv$ ۳۰/۵ سانتیمتر $\equiv$ ۰/۳۰۵متر $\equiv$ $\frac{۱}{۵۲۸۰}$ مایل

۱ اسلاگ $\equiv$ ۳۲/۲ پوند جرم

۱ گرم $\equiv$ $۲/۲۰۵\times۱۰^{-۳}$ پوند جرم $\equiv$ $۰/۶۸۵\times۱۰^{-۴}$ اسلاگ

۱ پوند نیرو $\equiv$ ۴۴۵ دین $\equiv$ ۳۲/۲ پوندال $\equiv$ ۱۶ اونس

۱ نیوتن $\equiv$ $۱۰^{-۵}$ دین

ایده‌آل نمودن مسائل مکانیک

یکی از مسائل مهمی که در مهندسی باید به آن توجه کرد فرضیات در حل مسائل و به عبارت دیگر ایـده‌آل کـردن آن مـسائل اسـت. اکثـر مـسائل مهندسـی، پیچیـده می‌باشند و وقتی مدل ریاضی از روی آن ساخته می‌شود مسئله پیچیدهٔ ریاضی به وجود می‌آورد که حل آن اگر با معلومات حاضر غیرممکن نباشد بسیار مشکل است. در چنین شرایطی یا با فرضیاتی مسئلهٔ مکانیک را ساده می‌کنند به نحوی که قابل حل شود و یا مسئله ریاضی بدست آمده را تقریبی حل می‌کنند. در این جـا هـدف روش اول است با این شرط که فرضیات ساده کننده بگونه‌ای باشند که جواب و ماهیت مسئله را عوض نکند. در زیر چند نمونه از این ایده‌آل سازی‌ها ذکر شده‌اند:

ماده متصل

همانطور که می‌دانیم مواد در طبیعت هر چقدر هم که بهم فشرده شده باشند متصل نبوده و فضائی بین الکترونها و هسته هر اتم وجود دارد. از آنجـایی کـه در مهندسی با موادی به مراتب بزرگتر از اتم سروکار داریم و فقط مقدار و میانگین خواص در حجم معین مورد استفاده دارند، لذا از این فضاها (که بعلت بـه هم فشرده نبودن جسم به وجود می‌آیند) صرفنظر کرده و فرض می‌کنیم که جسم یک ماده، بهم پیوسته و متصل است.

جسم صلب (سخت)

منظور از جسم صلب جسمی است که در اثر نیروهای وارده تغییر شکل ندهد. در مقاومت مصالح خواهید دید که هر جسمی هر چند کـه سـخت باشـد تحت اثر هر نیروئی هر چند کوچک تغییر شکل می‌دهد. (از لحاظ علمی جسم صلب به صورت تئوری وجود ندارد) ولی در فرضیه جسم صلب این گونه استدلال می‌شود که تغییر شکلها آنقدر کوچک می‌باشند که اثر قابل توجهی نداشته و در نتیجهٔ مـسئله اثـری ندارنـد. از ایـن فرضـیه در حـل مـسائل استاتیک استفاده می‌گردد.

ذره جرم‌دار

قوانین نیوتن برای ذره هندسی جرم‌دار وضع شده‌اند، یعنی قوانین نیوتن که اصول مکانیک بر آن بنا شده‌اند در مورد ذره هندسی بـدون بعـد و دارای جـرم می‌باشند. واضح است چنین ذره بدون بُعد و جرم داری در طبیعت وجود ندارد، ولی با فرض وجود آن بسیاری مسائل مکانیک حل می‌شـود و در بـسیاری از موارد جرم تمام ماده را در مرکز آن متمرکز کرده (به طور فرضی) و آنرا به صورت ذره‌ای جرم‌دار فرض می‌کنیم.

نیروهای متمرکز

در مواردی که محل اثر نیرو یک سطح کوچک از جسم است و انتشار نیرو را در روی سطح نمی‌دانیم، می‌توان تمام نیروها را با یک نیـرو جـایگزین کـرده و نقطهٔ اثر آن نیرو را در جسم (که یک نقطه است) نقطه اثر تمام نیروها فرض کرد، بدیهی است که در طبیعت نیروئی وجود ندارد کـه بـر یـک ذره هندسـی وارد شود ولی این فرض و ایده‌آل کردن نیرو در سهولت محاسبات بسیار موثر است و همانطور که بعداً در تعادل نیروهـا خـواهیم دیـد اسـتفاده از نیروهـای متمرکز در جسم در مباحث استاتیک توصیه می‌گردد.

بردارها و کمیت‌های غیرجبری

کمیت‌های فیزیکی به دو دسته اسکالر و برداری تقسیم می‌شوند.

کمیت اسکالر (عددی، نرده‌ای) کمیتی است که فقط دارای یک مقدار است. نمونه‌های چنین کمیت‌هایی: جرم، طول، زمان و درجه حرارت می‌باشند.

در مقابل کمیت‌های اسکالر، کمیت‌های برداری قرار دارند که برای توصیف آنها بیش از یک مقدار جبری لازم است.مثلاً برای بیـان سـرعت یـک ذره مـادی باید اطلاعات زیر داده شوند:

۱ـ مقدار آن کمیت بر حسب واحد اندازه‌گیری (مثلاً فوت بر ثانیه یا متر بر ثانیه و ...)

۲ـ جهت حرکت ذره مادی (برای این منظور می‌توان از یک دستگاه مختصات ثابت استفاده کرد)، به این ترتیب که از یک قطعه خط استفاده می‌کنیم که طول آن با واحد معین اندازه‌گیری طول، مساوی مقدار داده شده در قسمت "۱" باشد (مقدار سرعت) و آن را بوسیلهٔ یک پیکان ($\longrightarrow$) جهت‌دار می‌کنیم به طوریکه سر پیکان جهت حرکت را نشان بدهد. این قطعه خط را بردار و امتداد این بردار را راستا یا محمل آن بردار می‌نامیم. کمیت‌هائی مثل سرعت، شتاب، نیرو و گشتاور را که علاوه بر مقدار، ***راستا و جهت*** نیز دارند ***کمیت برداری*** می‌نامند.

بردارها بر حسب کاربرد سه نوعند:

۱. بردار آزاد

بردار آزاد، برداری است که می‌توان آنرا بدون تغییر اثر به هر نقطهٔ فضا انتقال داد به شرطی که راستای آن موازی راستای اولیه، در همان جهت و با همان مقدار اولیه باشد. دو بردار آزاد را در صورتیکه موازی، هم جهت و از نظر مقدار مساوی باشند، ***همسنگ*** می‌نامند. مانند : بردار گشتاور، برآیند نیرو و کوپل (جفت نیرو).

۲. بردار لغزان

بردار لغزان، برداری است که می‌توان آنرا با حفظ جهت اولیه به هر نقطه از راستای آن بردار منتقل کرد، اگر دو بردار لغزان بر روی یک راستا، دارای یک جهت و یک مقدار باشند مساوی‌اند، چنین دو برداری را ***هم‌ارز*** می‌نامند. مانند : بردار نیرویی که به یک جسم صلب اثر می‌کند.

۳. بردار بسته

بردار بسته، برداری است که متعلق به یک موقعیت واحد است و به هیچ وجه قابلیت جابجایی ندارد. نمونه بردار بسته، بردار مکان یک ذره مادی در دستگاه مختصات دکارتی می‌باشد.

مثال۴: کدامیک از کمیات زیر برداری نمی‌باشند؟

۱) نیرو　　۲) ممان اینرسی　　۳) شتاب　　۴) گشتاور نیرو

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ممان اینرسی به عنوان یکی از خواص سطوح یک کمیت اسکالر با واحد m^4 می‌باشد.

جبر بردارها

بردار، قدر مطلق (مقدار یا اساس) و حاصلضرب بردار در یک عدد جبری

همانطور که قبلاً گفته شد یک بردار را توسط قطعه خط مستقیم و محدود نشان می‌دهیم. سهم یا نشان هر قطعه خط، جهت بردار را نشان خواهد داد. طول قطعه خط که نماینده مقدار جبری آن کمیت است مقدار، اساس و یا مقدار مطلق آن بردار نامیده می‌شود. توجه نمائید که منظور از مقدار یک بردار، عدد مثبت طول آن می‌باشد. لذا مقدار یک بردار مانند $\vec{A}$ همیشه مثبت است و با $|\vec{A}|$ نمایش داده می‌شود.

برای به دست آوردن مقدار برداری مانند: $\vec{A} = A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j} + A_z\,\vec{k}$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

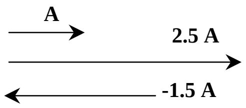
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^۲ + A_y^۲ + A_z^۲}$$

« شکل ۲ »

بردارها را با حروف بزرگ یا کوچک لاتین و خط سهمی داری در بالای آن " $\vec{A}$ "، و یا خطی ساده در زیر آن "$\underline{A}$" و گاهی با نامبردن حروف اول و آخر قطعه خط نماینده بردار نشان می‌دهیم، به نحوی که جهت بردار از طرف حرف سمت چپ به طرف حرف سمت راست باشد (مثل بردار $\overrightarrow{AB}$ یا بردار $\underline{AB}$).

توضیح: در متن درس بردار دلخواه A با نماد $\underline{A}$ نمایش داده شده است. ولی در اکثر تست‌های انتهای فصل و پاسخ‌های تشریحی از نماد $\vec{A}$ استفاده شده است. به هر حال دو نماد $\underline{A}$ و $\vec{A}$ با هم تفاوتی ندارند.

بنا به تعریف، حاصل ضرب یک عدد جبری α در یک بردار آزاد $\underline{A}$، برداری است که راستای آن موازی راستای بردار $\underline{A}$ و مقدار آن برابر حاصل‌ضرب مقدار بردار $|\underline{A}|$ و عدد α است و جهت آن در جهت $\underline{A}$ می‌باشد اگر α مثبت باشد و در جهت عکس $\underline{A}$ می‌باشد اگر α منفی باشد. توجه کنید که اندازه بردار $-\underline{A}$ مساوی اندازه بردار $\underline{A}$ و در جهت عکس آن $\underline{A}$ است. مانند :



« شکل ۳ »

$$\begin{cases}\underline{A}\\ \alpha = -۱/۵\\ \alpha = ۲/۵\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A\\ A' = A\times(-۱/۵)\\ A'' = A\times(۲/۵)\end{cases}$$

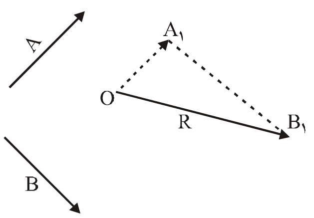
جمع و تفریق بردارها

جمع بردارها

جمع بردارهای آزاد طبق قانون مثلث به این ترتیب صورت می‌گیرد که فرض می‌کنیم دو بردار آزاد $\underline{A}$ و $\underline{B}$ داشته باشیم. از نقطه اختیاری O بردار $\underline{OA_۱}$ همسنگ بردار A و از نقطهٔ $A_۱$ بردار $\underline{A_۱B_۱}$ را همسنگ بردار $\underline{B}$ رسم می‌کنیم. بنا به تعریف، مجموع دو بردار $\underline{A}$ و $\underline{B}$ بردار $\underline{OB_۱} = \underline{R}$ می‌باشد لذا : $\underline{A} + \underline{B} = \underline{R}$.

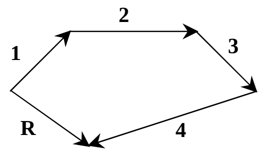
ملاحظه می‌شود که:

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A} = \underline{R}$$



« شکل ۴ »

نکته ۳: برای تعمیم تعریف فوق در حل مسائل می‌توان به اختصار گفت برای جمع n بردار باید بردارهـا را متوالیاً دنبال یکدیگر ترسیم کرده، در این حالت برداری که ابتدای بردار اولی را به انتهای بردار آخری وصل کنـد بردار مجموع یا بردار برآیند نام دارد، مانند بردار برآیند در شکل«۵».



« شکل ۵ »

جمع بردارها از قانون جابه‌جایی‌پذیری پیروی می‌کند. این جمع کردن را می‌توان به بیش از دو بردار نیز تعمیم داد، به این صورت که جمع سه بـردار $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ بدین ترتیب قابل انجام است:

$$(\underline{A}+\underline{B})+\underline{C}=\underline{R}+\underline{C} \quad ; \quad \underline{A}+\underline{B}=\underline{R}$$

و به سادگی ملاحظه می‌شود که:

$$(\underline{A}+\underline{B})+\underline{C}=(\underline{A})+(\underline{B}+\underline{C})=(\underline{A}+\underline{C})+\underline{B}$$

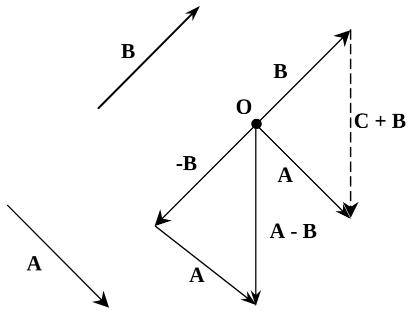
تفریق بردارها

عبارت است از: $\underline{A}-\underline{B}=\underline{A}+\underline{(-B)}$، یعنـی بـرای تفریـق بـردار $\underline{B}$ از بـردار $\underline{A}$ در واقـع بـردار $(-۱)\underline{B}=-\underline{B}$ را با بردار $\underline{A}$ جمع می‌کنیم. به بیان دیگر: $\underline{C}=\underline{A}-\underline{B}$ به این معنی است که:

$$\underline{C}+\underline{B}=\underline{A}$$

بنابراین:

$$\underline{OA}-\underline{OB}=\underline{BA}$$

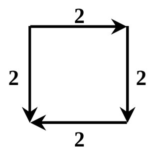


« شکل ۶ »

توجه کنید که مجموع و تفاضل دو بردار در صفحهٔ آن دو بردار است. همچنین :

$$\alpha\underline{A}+\beta\underline{A}=(\alpha+\beta)\underline{A}$$

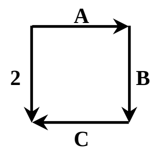
مثال۵: برآیند نیروهای شکل کدامست؟



۱) ۲ ۲) صفر

۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به جهت نیروها، برآیند سه بردار نیروی A، B و C مقدار ۲ می‌باشد.



نکته ۴: برای جمع دو بردار و پیدا کردن برآیند آنها از قانون کسینوس‌ها در مثلث استفاده می‌شود :

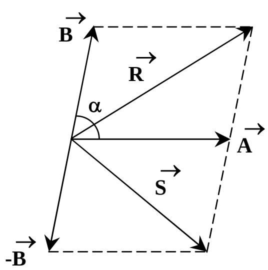
$$|\underline{R}|^۲=|\underline{A}|^۲+|\underline{B}|^۲+۲|\underline{A}||\underline{B}|\text{Cos}(A,B)$$

نکته ۵: چنانچه دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ با یکدیگر زاویه α بسازند، اندازه بردار حاصل جمع از رابطهٔ زیـر حاصل خواهد شد.

$$|\underline{R}|=|\underline{A}+\underline{B}|=\sqrt{|\underline{A}|^۲+|\underline{B}|^۲+۲|\underline{A}||\underline{B}|\text{Cos}\alpha}$$

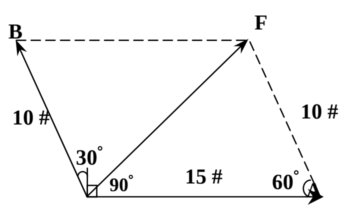
در این حالت اندازهٔ بردار $\vec{A}-\vec{B}$ برابر است با :

$$|\underline{S}|=|\underline{A}-\underline{B}|=\sqrt{|\underline{A}|^۲+|\underline{B}|^۲-۲|\underline{A}||\underline{B}|\text{Cos}\alpha}$$



« شکل ۷ »

مثال۶: جمع دو بردار داده شده در شکل مقابل را پیدا کنید؟



پاسخ : از قانون کسینوسها در مثلث داریم:

$$|\underline{F}|^۲=(۱۵)^۲+(۱۰)^۲-۲(۱۵)(۱۰)\text{Cos}۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow|\underline{F}|=۱۳/۲^{\#}$$

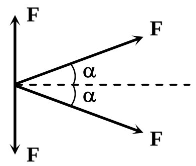
مثال۷: سه بردار $\vec{V}_1 = 3\vec{i} - \vec{k}$ ، $\vec{V}_2 = -2\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{V}_3 = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ در نظر است. حاصل $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2 - \vec{V}_3)$ کدامست؟

۱) 0 ۲) $\vec{k}$ ۳) $6\vec{i} - 4\vec{j}$ ۴) $6\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$

پاسخ: گزینه «۳» جمع و تفریق بردارهای V_1 ، V_2 و V_3 به صورت زیر انجام می‌گردد:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 - \vec{V}_3 = (3\vec{i} - \vec{k}) + (-2\vec{j} + \vec{k}) - (3\vec{i} + 2\vec{j}) = 6\vec{i} - 4\vec{j}$$

مثال۸: شرط آنکه اندازه برآیند چهار نیروی نشان داده شده در شکل برابر یکی از آنها باشد آن است که:

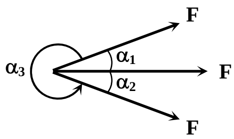


۱) $\alpha = 45^\circ$ ۲) $\alpha = 60^\circ$

۳) $\alpha = 90^\circ$ ۴) $\alpha = 120^\circ$

پاسخ: گزینه «۲» برآیند دو نیروی در یک راستا صفر است. شرط آنکه برآیند دو نیروی مایل برابر یکی از آن دو گردد، آن است که زاویه بین دو نیرو 120° یعنی $\alpha = 60^\circ$ باشد.

مثال۹: شرط آنکه برآیند سه نیروی نشان داده شده در شکل صفر باشد، آن است که:



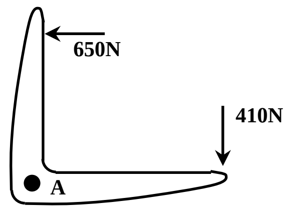
۱) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ۲) $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$

۳) $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$ ۴) $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$

پاسخ: گزینه «۳» چون سه نیرو هم اندازه‌اند، لذا در صورتی برآیند آنها صفر خواهد شد که شکل برداری آنها تقارن کامل داشته باشد، یعنی:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 120^\circ$$

مثال۱۰: در اهرم 90° شکل زیر، مقدار نیروی وارد بر محور A کدامست؟



۱) $645N$

۲) $768/5N$

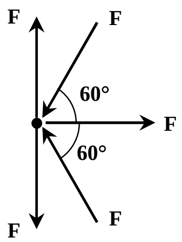
۳) $957/1N$

۴) $1380\,N$

پاسخ: گزینه «۲» نیروی وارد بر محور A برابر است با برآیند دو نیروی وارده، لذا:

$$R = \sqrt{650^2 + 410^2} = 768/5N$$

مثال۱۱: برآیند بردارهای زیر کدامست؟



۱) F

۲) $F\sqrt{2}$

۳) $F\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴) 0

پاسخ: گزینه «۴» برآیند دو برداری عمودی صفر است. برآیند دو بردار مایل بدلیل زاویه 120° بین آنها، برابر F و در خلاف جهت بردار F افقی موجود خواهد شد، لذا:

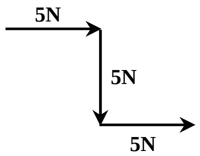
$$R = F - F = 0$$

مثال۱۲: دو نیروی ۵ و ۱۰ نیوتنی در راستای افقی (به طرف راست) به نقطه A وارد می‌شوند. برای اینکه نقطه مورد نظر جابجایی نداشته باشد، چه نیرویی (از لحاظ مقدار و جهت) به سیستم فوق اضافه گردد؟

۱) نیروی $10\,N$ عمود بر راستای افق ۲) نیروی $15N$ عمود بر راستای افق

۳) نیروی $15N$ در راستای افق به طرف چپ ۴) نیروی $5\sqrt{5}N$ در راستای افق به طرف چپ

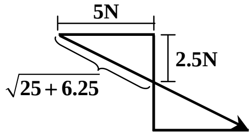
پاسخ: گزینه «۳» شرط تعادل نقطه مورد نظر این است که برآیند نیروها صفر گردد. با توجه به وجود نیروی $10+5\,N$ در راستای افق به طرف راست، وجود نیروی $15N$ به طرف چپ باعث ایجاد تعادل می‌گردد.



مثال۱۳: برآیند نیروهای ۵ نیوتنی شکل کدامست؟

۱) $\sqrt{۳۱/۲۵}$ ۲) $۲\sqrt{۳۱/۲۵}$

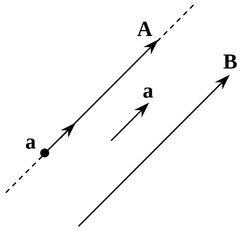
۳) $\sqrt{۶/۷۵}$ ۴) $۲\sqrt{۶/۷۵}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به روش مثلثی برآیند سه نیروی ۵ نیوتنی به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$R = ۲\times\sqrt{۲۵+۶/۲۵} = ۲\sqrt{۳۱/۲۵}$$

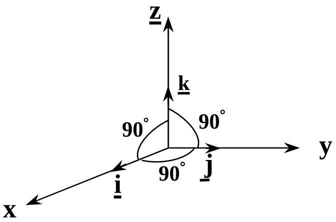
بردار یکه (واحد)



« شکل ۸ »

بردار آزاد $\underline{A}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم بردار $\underline{a}$ بر راستای بـردار $\underline{A}$ قـرار گرفتـه و طـول واحـد داشته باشد. بردار $\underline{a}$ به بردار یکه یا بردار واحد در جهت بردار $\underline{A}$ معـروف است. ملاحظـه مـی‌شـود کـه : $\underline{a} = \dfrac{\underline{A}}{|\underline{A}|} = \dfrac{۱}{|\underline{A}|}\times\underline{A}$ یا به طور معادل داریم : $\underline{A} = |\underline{A}|\underline{a}$. بنابراین هـر بـرداری را مـی‌تـوان بـه صـورت حاصل ضرب مقدار آن بردار در بردار واحد در جهت آن نوشت. در این صورت بردار $\underline{a}$ یک بردار آزاد است و می‌توان نوشت:

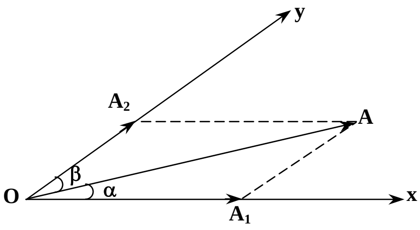
$$\underline{B} = |\underline{B}|\underline{a}$$



« شکل ۹ »

اگر دستگاه مختصات سه بعدی Oxyz را در نظر بگیریم، گویند محورهای ox، oy و oz، دستگاه مـستقیم درست کرده‌اند اگر نحوه استقرار محورها به گونه‌ای باشد که وقتی شخصی روی محور Oz ایستاده و پای او به طرف O و سرش به طرف جهت مثبت محور Z باشد حرکت محور x بـه طـرف محـور y از طـرف زاویـه کوچکتر از ۱۸۰° در جهت مثلثاتی (خلاف عقربه‌های ساعت) باشد. در غیر این صورت دستگاه معکوس است. در محاسبات معمولاً از سیستم محورهای مختصات مستقیم استفاده خواهد شد. بردار یکه در جهت x به $\underline{i}$، در جهت y به $\underline{j}$ و در جهت z به $\underline{k}$، نمایش داده خواهند شد.

تجزیهٔ یک بردار به مؤلفه‌ها



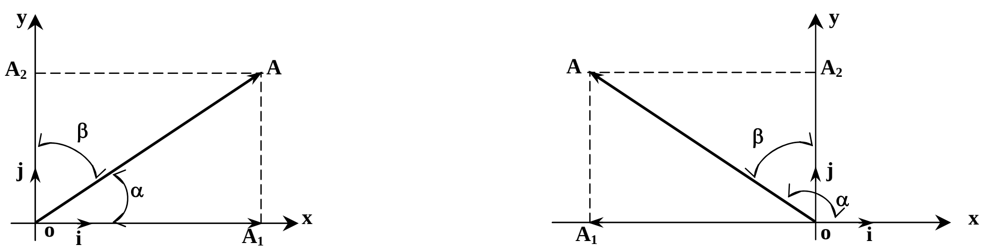
« شکل ۱۰ »

عمل عکس جمع کردن بردارها را تجزیه می‌نامیم.

تجزیه یک بردار به دو مؤلفه

فرض کنیم بردار $\underline{A}$ و دو خط مشخص و متقاطع ox و oy داده شده باشد، به گونه‌ای که بـردار $\underline{A}$ در صفحه oxy قرار داشته باشـد، از محـل تقـاطع دو خـط ox و oy (نقطـه O در شـکل مقابـل) برداری همسنگ بردار $\underline{A}$ رسم می‌کنیم.

توجه کنید که چون بردار $\underline{A}$ و خطوط ox و oy داده شده‌اند، زاویه بین بـردار و محـور OX (زاویـه) مـشخص است. از نقطـهٔ A (انتهـای بـردار $\underline{A}$) خطوطی به موازات ox و oy رسم می‌کنیم تا به ترتیب oy و ox را در نقاط $A_۲$ و $A_۱$ قطع کننـد. ملاحظـه مـی‌شـود کـه: $\underline{A} = \underline{OA_۱} + \underline{OA_۲}$، بنابراین بردار $\underline{A}$ در دو جهت داده شدهٔ ox و oy تجزیه شده است. در صورتیکه خطوط x و y موازی و با امتداد $\underline{A}$ متقاطع باشند ایـن تجزیـه امکـان ندارد و در صورتیکه هر سه خط موازی باشند مسئله بینهایت جواب دارد. اکنون از راه مثلثات می‌توان مقدار و یا طول هر یک از بردارهای $\underline{OA_۱}$ و $\underline{OA_۲}$ را پیدا کرد. اگر دو محور ox و oy برهم عمود باشند، $\underline{OA_۱}$ و $\underline{OA_۲}$ را مؤلفه یا ***تصویرهای برداری قائم*** مـی‌نامنـد، اگـر بردارهـای یکـه محورهـای مذکور به ترتیب $\underline{i}$ و $\underline{j}$ باشند، داریم: $\underline{OA_۱} = |\underline{A}|\cos\alpha\,\underline{i}$ و $\underline{OA_۲} = |\underline{A}|\sin\alpha\,\underline{j}$ یا $\underline{OA_۲} = |\underline{A}|\cos\beta\,\underline{j}$

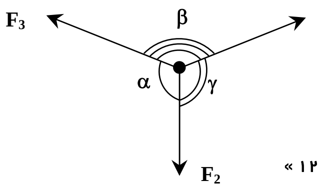


« شکل ۱۱ »

به علاوه: $\cos(\underline{A},x)=\cos\alpha=\ell$ و $\cos(\underline{A},y)=\cos\beta=m$ به ***کسینوس‌های هادی*** بردار $\underline{A}$ موسومند. ملاحظه می‌شود که: $\underline{A}=y\vec{j}$.
همچنین اگر مختصات نقطه $A(x,y)$ باشد: $\underline{OA_۱}=x\underline{i}\ ,\ \underline{OA_۲}=y\underline{j}$ لذا: $\underline{A}=x\underline{i}+y\underline{j}$. در صورتیکه $\underline{A}$ موازی محور oy باشد $A=yj$ و در صورتیکه $\underline{A}$ موازی محور ox باشد $\underline{A}=x\underline{i}$ می‌باشد.

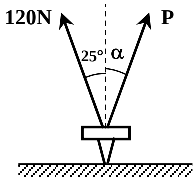
نکته ۶: برای حل مسائل سه بعدی که در آن ۱ یا ۲ مؤلفه اصلی مجهول است می‌توان از رابطه روبرو استفاده کرد: $\mathrm{Cos}^۲\alpha+\mathrm{Cos}^۲\beta+\mathrm{Cos}^۲\gamma=۱$
یعنی مجموع مربع کامل تمامی کسینوس‌های هادی، مساوی با ۱ است.

نکته ۷: زمانی که سه نیرو در یک نقطه متقاطع باشند، قانون سینوس‌ها به صورت مقابل استفاده می‌شود: $\dfrac{F_۱}{\mathrm{Sin}\alpha}=\dfrac{F_۲}{\mathrm{Sin}\beta}=\dfrac{F_۳}{\mathrm{Sin}\gamma}$



« شکل ۱۲ »

مثال۱۴: اگر برآیند وارده بر میخ نشان داده شده در امتداد عمود باشد، مطلوبست مقدار زاویه α که به ازاء آن، نیروی P حداقل باشد؟



۱) ۳۰°
۲) ۶۰°
۳) ۹۰°
۴) هیچکدام

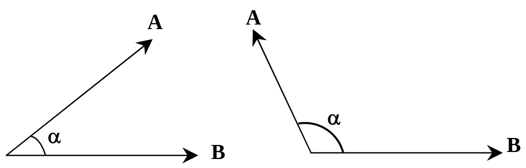
پاسخ: گزینه «۳» در صورتی که برآیند دو نیروی P و ۱۲۰ نیوتنی در امتداد عمود باشد، پس مولفه افقی برآیند صفر است. لذا:

$P\sin\alpha=۱۲۰\sin ۲۵^\circ \Rightarrow P\times\sin\alpha=$ عدد ثابت

برای اینکه P حداقل مقدار ممکن باشد، باید $\sin\alpha$ حداکثر مقدار را داشته باشد که در ازاء $\alpha=۹۰^\circ$ اتفاق می‌افتد.

حاصلضرب داخلی (جبری یا عددی) دو بردار

تاکنون عمل جمع دو بردار را تعریف کرده‌ایم. حال یک نوع ترکیب به نام ضرب داخلی (عددی یا جبری) را برای دو بردار تعریف می‌کنیم. بنا به تعریف، ضرب داخلی دو بردار $\underline{A}$ و $\underline{B}$ به صورت $\underline{A}.\underline{B}$ نمایش داده شده و نتیجه آن عددی جبری است که مقدار آن برابر حاصلضرب مقدار دو بردار در کسینوس زاویۀ کوچک بین دو بردار است، یعنی:



«شکل ۱۳»

$$\underline{A}.\underline{B}=|\underline{A}||\underline{B}|\cos\alpha$$

ملاحظه می‌شود که این عدد جبری ممکن است مثبت، منفی و یا صفر باشد، بسته به این که زاویه α کمتر، بیشتر و یا مساوی ۹۰° باشد، بنابراین:
$\underline{i}.\underline{i}=\underline{j}.\underline{j}=\underline{k}.\underline{k}=۱\quad,\quad \underline{i}.\underline{k}=\underline{i}.\underline{j}=\underline{k}.\underline{j}=۰$

به علاوه، ضرب داخلی دو بردار جابجایی‌پذیر است: $\underline{A}.\underline{B}=\underline{B}.\underline{A}$

رابطه روبرو در ضرب داخلی بردارها صادق است: $\underline{A}.(\underline{B}+\underline{C})=\underline{A}.\underline{B}+\underline{A}.\underline{C}$

فرض کنید بردارهای $\underline{A}$ و $\underline{B}$ به صورتهای: $\underline{A}=A_x\underline{i}+A_y\underline{j}+A_z\underline{k}\ ,\ \underline{B}=B_x\underline{i}+B_y\underline{j}+B_z\underline{k}$ داده شده باشند، در اینصورت ضرب داخلی دو بردار $\underline{A}$ و $\underline{B}$ بر حسب مولفه‌ها به صورت: $\underline{A}.\underline{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$ تعریف می‌گردد. بنابراین:

$\underline{A}.\underline{A}=|\underline{A}||\underline{A}|\ \mathrm{Cos}(۰)=|\underline{A}|^۲=A_x^۲+A_y^۲+A_z^۲$.

اگر دو بردار غیر صفر $\underline{A}$ و $\underline{B}$ بر هم عمود باشند: $\underline{A}.\underline{B}=۰$ و بالعکس یعنی: $\mathbf{\underline{A}.\underline{B}=۰\Leftrightarrow \underline{A}\perp\underline{B}}$

مثال۱۵: در صورتیکه دو بردار $A(۱,۲,۱)$ و $B(-۱,۰,Z)$ بر یکدیگر عمود باشند، مقدار Z کدامست؟

۱) ۲ ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴» شرط تعامد آن است که ضرب داخلی ۲ بردار صفر باشد، لذا:

$$\vec{A}.\vec{B}=۰\Rightarrow\vec{A}\perp\vec{B}\Rightarrow\vec{A}.\vec{B}=(۱\times-۱)+(۲\times۰)+(۱\times Z)=۰\Rightarrow -۱+Z=۰\Rightarrow Z=۱$$

تذکر ۱: برای تصویر کردن بردار A به روی بردار L باید بردار یکه L را به دست آورد، سپس ضرب داخلی انجام گردد، یعنی خواهیم داشت :

$A.nB=$ تصویر بردار A در B و $B.nA=$ تصویر بردار B در A

(در روابط بالا، nA بردار یکه A و nB بردار یکه B می‌باشد.)

حاصلضرب خارجی (برداری) دو بردار

بنا به تعریف، حاصلضرب خارجی دو بردار $\underline{A}$ و $\underline{B}$ بردار سومی است که به صورت $\underline{C}=\underline{A}\times\underline{B}$ نشان داده می‌شود. اندازه بردار $\underline{C}$، $|\underline{A}||\underline{B}|\sin\alpha$ می‌باشد با این شرط که α کوچکترین زاویه بین $\underline{A}$ و $\underline{B}$ باشد. (همواره $\sin\alpha\geq ۰$). راستای بردار $\underline{C}$ به گونه‌ای است که همواره بر صفحه‌ای که دو بردار $\underline{A}$ و $\underline{B}$ تشکیل می‌دهند، عمود است.

روابط زیر برای ضرب خارجی بردارها قابل استفاده می‌باشند:

$$\underline{A}\times\underline{B}=-\underline{B}\times\underline{A}$$

$$A\times(\underline{B}+\underline{C})=\underline{A}\times\underline{B}+\underline{A}\times\underline{C}$$

$$m\underline{A}\times n\underline{B}=mn(\underline{A}\times\underline{B})$$

با توجه به تعریف ضرب خارجی دو بردار ملاحظه می‌شود که دو بردار موازی و غیر صفر $(\alpha=۰)$ دارای حاصلضرب خارجی صفر هستند، پس می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\underline{\mathbf{A}}\times\underline{\mathbf{B}}=۰\Leftrightarrow\underline{\mathbf{A}}\parallel\underline{\mathbf{B}}$$

حاصلضرب خارجی یک بردار در خود آن بردار صفر است. همینطور ملاحظه می‌گردد که:

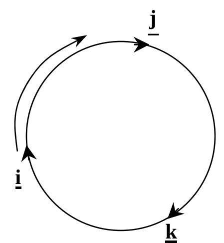
$$\underline{i}\times\underline{j}=\underline{k}\qquad \underline{j}\times\underline{k}=\underline{i}\qquad \underline{k}\times\underline{i}=\underline{j}$$

$$\underline{j}\times\underline{i}=-\underline{k}\qquad \underline{k}\times\underline{j}=-\underline{i}\qquad \underline{i}\times\underline{k}=-\underline{j}$$

$$\underline{i}\times\underline{i}=\underline{j}\times\underline{j}=\underline{k}\times\underline{k}=۰$$

یک روش ساده برای به خاطر سپردن این حاصلضرب‌ها این است که یک دایره انتخاب و به ترتیب در جهت منفی مثلثاتی حروف i، j و k را قرار می‌دهیم. حال برای تعیین حاصلضرب هر دو بردار دلخواه اگر همینطور که از چپ به راست بردارها را ضرب می‌کنیم در جهت مثلثاتی دایره حرکت کنیم حاصلضرب بردار سوم باعلامت منفی و اگر در جهت خلاف مثلثاتی حرکت کنیم همان بردار(بردار سوم) با علامت مثبت به دست می‌آید.

بعنوان مثال: $\underline{i}\times\underline{j}\xrightarrow[\text{جهت منفی}]{}=\underline{k}$ (خلاف جهت مثلثاتی)　　$\underline{k}\times\underline{j}\xrightarrow[\text{جهت منفی}]{}=-\underline{i}$ (در جهت مثلثاتی)



« شکل ۱۴ »

مؤلفه‌های بردار حاصلضرب خارجی بر حسب مولفه‌ها به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشند:

$$\underline{A}=A_x\underline{i}+A_y\underline{j}+A_z\underline{k}\qquad \underline{B}=B_x\underline{i}+B_y\underline{j}+B_z\underline{k}$$

$$\underline{A}\times\underline{B}=(A_x\underline{i}+A_y\underline{j}+A_z\underline{k})\times(B_x\underline{i}+B_y\underline{j}+B_z\underline{k})$$

$$=(A_x\underline{i}+A_y\underline{j}+A_z\underline{k})\times B_x\underline{i}+(A_x\underline{i}+A_y\underline{j}+A_z\underline{k})\times B_y\underline{j}+(A_x\underline{i}+A_y\underline{j}+A_z\underline{k})\times B_z\underline{k}$$

برای به خاطر سپردن این حاصلضرب می‌توان از این دترمینان استفاده کرد:

$$\underline{A}\times\underline{B}=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ B_y & B_z\end{vmatrix}\underline{i}-\begin{vmatrix}A_x & A_z\\ B_x & B_z\end{vmatrix}\underline{j}+\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ B_x & B_y\end{vmatrix}\underline{k}$$

مثال۱۶: مولفه عرضی (j) حاصلضرب خارجی دو بردار $\vec{A}(۱,۳,۲)$ و $\vec{B}(-۱,۶,۰)$ کدامست؟ (حاصلضرب $\vec{A}\times\vec{B}$ مورد نظر است)

۱) ۲-　　۲) ۲　　۳) ۱۲　　۴) ۱۲-

پاسخ: گزینه «۱» حاصلضرب خارجی $\vec{A}\times\vec{B}$ نتیجه دترمینان زیر می‌باشد:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۱ & ۳ & ۲\\ -۱ & ۶ & ۰\end{vmatrix}\Rightarrow[(۱\times۰)-(-۱\times۲)]\times\vec{j}=-۲j$$

مثال۱۷: بردارهای $\underline{A}=(۲,۳,۵)$ و $\underline{B}=(۱,۰,-۱)$ مفروضند. مؤلفه طولی بردار حاصلضرب خارجی $\underline{A}$ و $\underline{B}$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۳-　　۳) ۸-　　۴) ۴

پاسخ : گزینهٔ «۲» حل : طبق تعریف مؤلفه‌های ضرب خارجی دو بردار، مؤلفه طولی $\underline{A}\times\underline{B}$ عبارت است از :

$$A_yB_z-A_zB_y=(۳\times-۱)-(۵\times۰)=-۳$$

مثال۱۸: اندازه حاصلضرب خارجی و داخلی بردار یکه $\vec{V}$ در قرینه‌اش به ترتیب (از راست به چپ) کدامست؟

۱) ۰ و ۱-　　۲) ۰ و ۱　　۳) ۱- و ۰　　۴) ۱ و ۰

پاسخ: گزینه «۱» قرینه بردار V برابر V- می‌باشد، لذا: $\vec{V}.(-\vec{V})=-۱$　$\vec{V}\times(-\vec{V})=۰$

مثال۱۹: کدام گزینه برابر عبارت $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$ است؟

۱) $(\vec{A}\times\vec{C}).\vec{B}$　۲) $\vec{B}.(\vec{A}\times\vec{C})$　۳) $(\vec{B}\times\vec{A}).\vec{C}$　۴) $(-\vec{B}\times\vec{A}).\vec{C}$

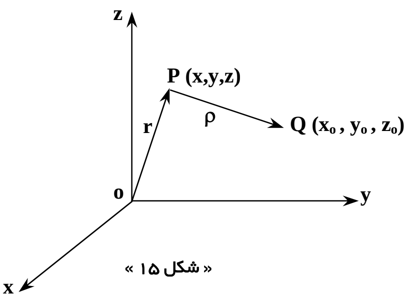
پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از ویژگی حاصلضرب مختلط بردارها داریم: $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C}=(-\vec{B}\times\vec{A}).\vec{C}$

چند بردار خاص

الف) بردار مکان

نقطهٔ P با مختصات (x,y,z) را در دستگاه مستقیم xyz در نظر می‌گیریم. برداری که از نقطهٔ O (مرکز مختصات) به نقطهٔ P وصل شود و جهت آن از O به P باشد، بردار مکان نقطهٔ P نامیده می‌شود :

$$\underline{OP}=\underline{r}=x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}$$



« شکل ۱۵ »

اگر $Q(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ نقطهٔ دیگری از فضای نامبرده شده باشد، بردار $\underline{PQ}$ به بردار تغییر مکان از نقطهٔ P به Q موسوم است.

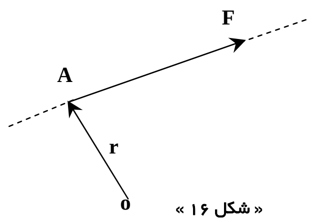
$$\underline{PQ}=\underline{\rho}=\underline{OQ}-\underline{OP}=\underline{r}_q-\underline{r}_P=x_\circ\underline{i}+y_\circ\underline{j}+z_\circ\underline{k}-x\underline{i}-y\underline{j}-z\underline{k}$$

$$\underline{\rho}=(x_\circ-x)\underline{i}+(y_\circ-y)\underline{j}+(z_\circ-z)\underline{k}$$

ب) لنگر یک بردار نسبت به یک نقطه

بردار لغزان $\underline{F}$ و نقطه‌ی O را در نظر می‌گیریم. بنا به تعریف لنگر بردار $\underline{F}$ نسبت به نقطه O به صورت $\underline{M_O}=\underline{r}\times\underline{F}$ تعریف می‌گردد، که در آن $\underline{r}$ برداری است که از O به A (واقع بر راستای نیروی F) وصل می‌گردد. رابطه فوق طبق تعریف ضرب خارجی چنین است: $M_\circ=rFSin\,\alpha$ که اگر $\alpha=۹۰^\circ$ و داریم:

$$|M_O|=r\times F$$



« شکل ۱۶ »

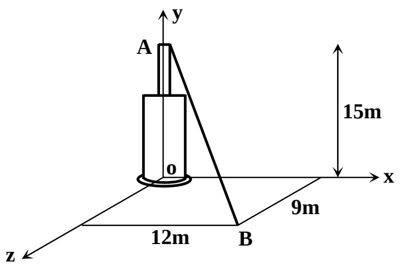
مثال۲۰: نیروی کششی T با اندازه ۱۰KN به کابلی که متصل به (A) یک میله پرچم صُلب است، وارد می‌شود. گشتاور نیروی T حول محور Z ها کدامست:

۱) ۴۲/۴

۲) ۵۶/۶

۳) ۷۰/۷

۴) ۸۴/۹



پاسخ: گزینه «۴» ابتدا اندازه بردار فاصله را محاسبه می‌کنیم:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{۹^۲+۱۵^۲+۱۲^۲}=\sqrt{۴۵۰}=۲۱/۲^m$$

$$T=۱۰(\frac{۱۲}{۲۱/۲}\vec{i}-\frac{۱۵}{۲۱/۲}\vec{j}+\frac{۹}{۲۱/۲}\vec{k})=۱۰(۰/۵۶۶\vec{i}-۰/۷۰۷\vec{j}+۰/۴۲۴\vec{k})$$

$$\vec{M}_O=\vec{R}\times\vec{T}=۱۵\vec{j}\times۱۰(۰/۵۶۶\vec{i}-۰/۷۰۷\vec{j}+۰/۴۲۴\vec{k})=۱۵۰(۰/۵۶۶\vec{k}+۰/۴۲۴\vec{i})\Rightarrow M_z=۱۵۰\times۰/۵۶۶=۸۴/۹$$

(مولفه گشتاور در امتداد محور zها)