به دست آوردن حاصل سری‌های عددی مثبت

بخش قابل توجهی از سؤالات فصل دنباله و سری، به محاسبه‌ی حاصل یه سری عددی اختصاص داره. معمولاً حاصل این سری‌ها، یه عدد حقیقی میشه و ما در اینجا سعی می‌کنیم **حدود** اون عدد حقیقی رو تعیین کنیم. در این روش، چند جمله‌ی اول سری رو تا جایی که مقدار جمله از $\frac{1}{2}$ کمتر باشه، می‌نویسیم. خُب حالا تموم جملات نوشته شده رو تا جمله‌ای که از $\frac{1}{2}$ کوچکتر شده، با هم جمع می‌زنیم؛ تا اینجا قطعاً می‌تونیم بگیم حاصل سری از این عدد بزرگتره (پس مینیمم مقدار سری رو فهمیدیم). اما این نتیجه در اکثر سؤالات کافی نیست؛ یعنی باید این رو هم بدونیم که سری از چه عددی کوچکتره؟ در واقع باید حداکثر سری رو هم تخمین بزنیم؛ برای این کار، همون مقدار مینیمم سری رو که حساب کرده بودیم، با **دو برابرِ همون جمله‌ای که از $\frac{1}{2}$ کوچکتر بود،** جمع می‌کنیم و می‌گیم مقدار سری از این حاصل جمع، قطعاً کمتره! به مثال زیر توجه کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\cdots=1+\frac{1}{4}+\cdots$$

همون‌طور که می‌بینین؛ چون به $\frac{1}{4}$ (که از $\frac{1}{2}$ کمتره) رسیدیم؛ دیگه لازم نیست بقیه جملات رو بنویسیم. تا اینجا می‌تونیم بگیم حاصل سری از $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ بیشتره؛ اما حداکثر سری چقدره؟ همون‌طور که گفتیم حداکثر اون برابر با «$1+\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}$» میشه، یعنی سری قطعاً از $\frac{7}{4}$ کمتره! همون‌طور که می‌دونیم حاصل این سری برابر با $\frac{\pi^2}{6}$ هستش؛ که می‌بینید تو بازه مینیمم و ماکزیمم ما قرار داره؛ یعنی عددی از $\frac{5}{4}$ بزرگتر و از $\frac{7}{4}$ کمتر! می‌بینید که این روش بسیار خوب حاصل سری‌ها رو تعیین میکنه فقط به سه موضوع زیر توجه کنید:

۱ـ ابتدا به گزینه‌ها نگاهی سریع کنین؛ چرا که اگه اختلاف گزینه‌ها در حد ۰/۱ یا ۰/۲ بود؛ خیلی نمی‌تونین به این روش اتکا کنین! البته تعداد این‌جور تست‌ها خیلی هم تا حالا زیاد نبوده و بیش از ۹۰ درصد سری‌های عددی رو که تا حالا در آزمون‌ها داده شده؛ راحت با این روش می‌تونستیم جواب بدیم! تازه گاهی اوقات اختلاف سه گزینه خیلی کمِ، اما گزینه‌ی جواب با اونا اختلاف بیشتری داره. تو این‌جور حالت‌ها هم میشه به راحتی از روش فوق استفاده کرد، مثل اولین سؤالی که براتون انتخاب کردم و گزینه صحیح فقط به اندازه ۰/۵ با نزدیک‌ترین گزینه به خودش، فاصله داره!

۲ـ مطالب گفته شده در مورد مقدار **حداکثر**، برای سری‌های عددی که رشد مخرج به صورت فاکتوریل یا نمایی باشه، حتماً برقراره. همچنین برای سری‌هایی به صورت $\sum\frac{1}{n^P}$ با شرط $P\geq 2$ همواره برقراره، اما اگه $P<2$ باشه نمی‌تونیم به طور قطع در مورد مقدار ماکزیمم سری اظهارنظر کنیم.

واضحه مطالب گفته شده در مورد مقدار **حداقل** سری‌ها برای هر نوع سری عددی مثبت برقراره.

۳ـ این نکته در مورد سری‌های مثبت هستش؛ یعنی سری‌هایی که تموم جملات اونا مثبت هستن (البته برای سری‌هایی متناوب و یا سری‌هایی که جملات اونا مرتب مثبت و منفی میشه هم در ادامه روشی مشابه بیان می‌کنیم، زیاد غصه نخورید)

مثال ۱: مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ برابر با چیست؟ (عمران ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴» اگه جمله‌ی اول سری رو بنویسیم به عدد $\frac{3}{4}$ می‌رسیم، یعنی حاصل سری قطعاً از $\frac{3}{4}$ بزرگتره. در گزینه‌ها، فقط گزینه (۴) این شرایط رو داره

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{2\times1+1}{1^2(1+1)^2}+\cdots=\frac{3}{4}+\cdots$$

شاید لازم به توضیح نباشه، اما با توجه به این که بقیه‌ی جملات مثبت هستن، ما می‌تونیم استدلال کنیم؛ حاصل سری قطعاً از $\frac{3}{4}$ بیشتر میشه.

مثال ۲: اگر $S_n=\sum_{i=1}^{n}(3)^{2-i}$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty}S_n$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۹۱)

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$\sum_{i=1}^{n}(3)^{2-i}=3^{2-1}+3^{2-2}+3^{2-3}+\cdots=3+1+\frac{1}{3}+\cdots$$

پس حاصل سری از عدد ۴ بیشتره، به نظر شما تنها گزینه‌ای که حاصلش از ۴ بیشتره کدومه؟!

مثال ۳: مجموع جملات سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n(n!)}$ کدام است؟ (هواشناسی کشاورزی ـ دکتری ۹۳)

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) $\frac{1}{2}e$ ۳) $\frac{4}{e}$ ۴) $\sqrt{e}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}=\frac{1}{2^0\times0!}+\frac{1}{2^1\times1!}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\cdots$$

پس حاصل سری از $\frac{3}{2}$ بیشتره، فقط گزینه (۴) حاصلش از $\frac{3}{2}$ بیشتره!

توجه: قبل از ادامه‌ی حل تست‌ها، بهتره حدود تقریبی یه سری عدد رو یادآوری کنیم که شما لازمه اونا رو بلد باشین:

$\sqrt{2}\simeq1/4$, $\sqrt{3}\simeq1/7$, $Lne=1$, $Ln2\simeq0/7$, $Ln3\simeq1/1$, $e\simeq2/7$, $e^2\simeq7/4$, $\pi\simeq3/14$, $\pi^2\simeq9/9$, $\pi^3\simeq31$, $\pi^4\simeq97$

مثال ۴: با فرض $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$، مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n(n+1))^2}$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{\pi^2}{3}-3$ ۲) $\frac{\pi^2}{3}+1$ ۳) $\frac{\pi^2}{3}-2$ ۴) $\frac{\pi^2}{3}-1$

پاسخ: گزینه «۱» اولاً توجه کنین که چون قرار نیست ما سؤال رو تشریحی حل کنیم؛ بنابراین به فرض سؤال کاری نداریم و مستقیم سراغ سری عددی خواسته شده می‌ریم! جمله‌ی اول سری به ازای $n=1$ برابر با $\frac{1}{4}=\frac{1}{1^2(1+1)^2}$ به‌دست میاد، چون از $\frac{1}{2}$ کمتره، پس دیگه لازم نیست بقیه جملات رو بنویسیم.

پس حاصل سری از $\frac{1}{4}$ بیشتره؛ اما با توجه به گزینه‌ها این نتیجه به درد ما نمی‌خوره پس باید بریم سراغ تعیین ماکزیمم سری؛ همون‌طور که گفتیم، حاصل سری از $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}$ کمتره، خُب حالا بگین ببینیم کدوم گزینه می‌تونه صحیح باشه؟! راهنمایی می‌کنم $\frac{\pi^2}{3}\simeq3/28$ میشه! معلومه فقط گزینه (۱) چنین شرایطی داره

دقت کنین حتی اگه مقدار حدودی $\frac{\pi^2}{3}$ را ندونین (که البته خیلی بعیده!) باز هم اشکالی پیش نمیاد، اگه $\frac{\pi^2}{3}$ رو همان سه و خورده‌ای هم تصور کنین، حداقل غلط بودن سه گزینه‌ی دیگه رو می‌فهمیم! گزینه (۲) بزرگتر از عدد ۴، گزینه (۳) بزرگتر از عدد ۱ و گزینه (۴) بزرگتر از عدد ۲ هستش!

مثال ۵: مجموع جملات سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$، کدام است؟ (ایمنی صنعتی ـ سراسری ۹۴ و MBA ـ سراسری ۹۱)

۱) صفر ۲) $e-1$ ۳) ۱ ۴) e

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}=\frac{1-1}{0!}+\frac{2-1}{2!}+\frac{3-1}{3!}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

چون به عدد $\frac{1}{3}$ رسیدیم (که کوچکتر از $\frac{1}{2}$ هستش)، پس دیگه بقیه‌ی جملات رو نمی‌نویسیم. در این سؤال تعیین مقدار مینیمم سری زیاد به درد ما نمی‌خوره؛ چون گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) هر سه‌تاشون از $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ بزرگترن (دقت کنین که گزینه (۱) در حد یه شوخی می‌تونه تلقی بشه! چون صفر شدن یه سری مثبت واقعاً خنده‌داره!) اما مقدار ماکزیمم سری چقدره؟ باید مقدارش رو حساب کنیم، پس داریم: $1/5=\frac{3}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\times 2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=$ماکزیمم سری
بنابراین فقط گزینه (۳) می‌تونه جواب باشه (دقت کنین با فرض $e=2/7$، گزینه‌های (۲) و (۴) نمی‌تونن جواب باشن!)

مثال ۶: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7^{n-1}}$ .... . (ریاضی و آمار ـ سراسری ۹۴)

۱) واگراست.
۲) همگراست و مجموع آن $1+\frac{49}{36}$ است.
۳) همگراست و مجموع آن $\frac{7}{6}$ است.
۴) همگراست و مجموع آن $\frac{49}{36}$ است.

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7^{n-1}}=\frac{1}{7^{1-1}}+\frac{2}{7^{2-1}}+\cdots=1+\frac{2}{7}+\cdots$$

حالا تو گزینه‌ها دنبال عددی باشید که از $\frac{9}{7}$ بیشتر و از $\frac{13}{7}=\frac{2}{7}\times 2+\frac{9}{7}$ کمتر باشه، فقط گزینه‌ی (۴) چنین شرایطی داره گزینه‌ی (۳) که از $\frac{9}{7}$ کمتره و گزینه‌ی (۲) به این دلیل نمی‌تونه جواب باشه که مقدار اون از ۲ بیشتره. گزینه‌ی (۱) به وضوح غلطه؛ چون مقدار سری یک عدد حقیقیه و سری واگرا نیست، پس گزینه (۴) جوابه

مثال ۷: مقدار سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$ برابر با چیست؟ (عمران ـ سراسری ۸۷ و سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) $2e+1$ ۳) $e+1$ ۴) $2e-3$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا جملات سری رو تا جایی که به جمله‌ای کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{2}$ برسیم، می‌نویسیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\frac{2+1}{2!}+\frac{3+1}{3!}+\frac{4+1}{4!}+\cdots=\frac{3}{2}+\frac{4}{6}+\frac{5}{24}+\cdots$$

پس حاصل سری قطعاً از عدد $2\simeq\frac{57}{24}=\frac{5}{24}+\frac{4}{6}+\frac{3}{2}$ بیشتر و از عدد $\frac{5}{24}\times 2+\frac{5}{24}+\frac{4}{6}+\frac{3}{2}$ کمتره، یعنی از عدد $3\simeq\frac{67}{24}$ باید کمتر باشه، فقط گزینه (۴) چنین شرایطی داره
دقت کنین لازم نیست حاصل کسرها رو دقیق حساب کنین همون که بدونین نزدیک به هم میشه و از ۳ بیشتر نمیشه کافیه؛ $\frac{3}{2}$ که معلومه برابر با ۱/۵ میشه و $\frac{2}{3}$ از ۱ کمتر و $\frac{15}{24}$ هم از $\frac{1}{2}$ بیشتره و حاصل این دو عدد هم حداکثر ۱/۵ میشه و بنابراین حاصل حدود ۳ میشه و نه بیشتر!

مثال ۸: با استفاده از سری توانی $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$، مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» چون قرار نیست سؤال رو تشریحی حل کنیم، به قسمت اول سؤال بی‌توجهی می‌کنیم و مثه بقیه سؤالات، فقط حاصل سری رو حساب می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{(1+1)!}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{2}{6}\cdots$$

پس حاصل سری از $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ بیشتر و از $\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\times 2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ کمتره، فقط گزینه‌ی (۱) چنین شرایطی داره

مثال ۹: حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}$ کدام است؟ (پژوهش علوم اجتماعی ـ سراسری ۹۴)

۱) $e-\frac{5}{2}$ ۲) $e-\frac{3}{2}$ ۳) $e-1$ ۴) $e-2$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم که برابر با $\frac{1}{6}=\frac{1}{(1+2)!}$ میشه، این یعنی حاصل سری از $\frac{1}{6}$ بیشتره؛ اما این کشف کمکی به ما نمی‌کنه چون تموم گزینه‌ها از $\frac{1}{6}$ بیشترن اما بریم سراغ مقدار ماکزیمم سری؛ حاصل سری از $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}$ کمتره؛ با توجه به گزینه‌ها فقط گزینه (۱) می‌تونه صحیح باشه دقت کنین اگه فرض کنین $e=2/7$، گزینه (۱) برابر با $2/7-2/5=0/2$ میشه.

مثال ۱۰: مقدار $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۴)

۱) $\text{Ln}\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}\text{Ln}3$ ۳) $\text{Ln}3$ ۴) $\text{Ln}\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا دو جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$S=\frac{1}{(2\times0+1)2^{2\times0+1}}+\frac{1}{(2\times1+1)2^{2\times1+1}}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{24}+\cdots$$

پس حاصل سری از $\frac{1}{2}$ بیشتر و از $\frac{3}{24}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{24}+\frac{1}{24}+\frac{1}{2}$ کمتره و این یعنی گزینه (۲) جوابه

توجه: دقت کنین که گزینه (۱) مقدارش منفیه؛ مقدار گزینه (۳) کمی از ۱ بیشتر و مقدار گزینه (۴) حدود $0/4$ میشه؛ چون داریم:

$$\text{Ln}\frac{3}{2}=\text{Ln}3-\text{Ln}2\simeq1/1-0/7=0/4$$

یعنی لازم نیست حتماً مقدار دقیق $\text{Ln}\frac{3}{2}$ رو بلد باشین!

مثال ۱۱: مجموع سری $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)3^n}$، کدام است؟ (هوافضا ـ آزاد ۸۵)

۱) 0 ۲) ∞ ۳) $1+2\text{Ln}\frac{2}{3}$ ۴) $1+\text{Ln}3$

پاسخ: گزینه «۳» اولاً سری همگراست بنابراین جواب ∞ نیست، از طرفی تمام جملات سری مثبت هستن، پس جواب قطعاً از صفر بزرگتره و این یعنی گزینه (۱) هم غلطه! پس گزینه‌های (۳) و (۴) به عنوان کاندیدهای جواب باقی می‌مونن. گزینه (۴) می‌گه: حاصل سری از عدد ۲ بزرگتره (چون $\text{Ln}3>1$)، اما گزینه (۳) می‌گه این مقدار از یک کمتره، حالا اگه جمله‌ی اول سری رو بنویسیم، داریم:

$$S=\frac{1}{1(1+1)3^1}+\cdots=\frac{1}{6}+\cdots$$

با توجه به توضیحات داده شده، حاصل سری از عدد یک کمتره؛ زیرا $\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}<1$، بنابراین گزینه (۳) جوابه

مثال ۱۲: مجموع سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ برابر با کدام عدد است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $-\frac{5}{8}-\text{Ln}\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{5}{8}+\text{Ln}\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{5}{4}-\text{Ln}\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{5}{4}+\text{Ln}\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» واضحه حاصل سری باید عددی مثبت باشه، با توجه به این که $\text{Ln}\frac{1}{2}=\text{Ln}1-\text{Ln}2\simeq0-0/7=-0/7$ به راحتی می‌فهمیم گزینه‌های (۲) و (۴) غلط هستن! (چون یک عدد منفی بعلاوه‌ی $-0/7$ شده که حاصل قطعاً منفی میشه) خُب حالا ببینیم از بین گزینه‌های (۱) و (۳) کدوم جوابن!؟

$$\text{مقدار گزینه (۱)}=-\frac{5}{8}-(-\frac{7}{10})=-\frac{5}{8}+\frac{7}{10}=\frac{-50+56}{80}=\frac{6}{80}$$

$$\text{مقدار گزینه (۳)}=-\frac{5}{4}+\frac{7}{10}\Rightarrow$$ حاصل عددی منفی میشه $\Rightarrow$ پس گزینه (۱) جوابه

مثال ۱۳: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n!}$، به کدام مقدار همگراست؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{1}{2}e$ ۲) e ۳) $\frac{3}{2}e$ ۴) $\frac{3}{2}e-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» در واقع سری به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2n!}$ هستش، ابتدا چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2n!}=\frac{1(1+1)}{2\times1!}+\frac{2(2+1)}{2\times2!}+\frac{3(3+1)}{2\times3!}+\frac{4(4+1)}{2\times4!}+\frac{5(5+1)}{2\times5!}+\cdots=1+\frac{3}{2}+1+\frac{5}{12}+\frac{1}{8}+\cdots$$

پس میشه گفت حاصل سری قطعاً از عدد ۴ بیشتره، فقط گزینه (۳) چنین شرایطی داره

مثال ۱۴: مقدار $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n e^{-2}}{(n-2)!}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم: (e^2 را حدود ۷/۵ در نظر بگیرید)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{e^2(n-2)!}=\frac{2^2}{e^2(2-2)!}+\frac{2^3}{e^2(3-2)!}+\frac{2^4}{e^2(4-2)!}+\frac{2^5}{e^2(5-2)!}+\frac{2^6}{e^2(6-2)!}\simeq\frac{4}{7/5}+\frac{8}{7/5}+\frac{16}{15}+\frac{32}{45}+\frac{64}{7/5\times24}+\cdots$$

حاصل جمع بالا قطعاً از ۳ بزرگتره، بنابراین فقط گزینه (۴) می‌تونه صحیح باشه یادتون باشه لازم نیست مخرج مشترک بگیرین یا حتماً دقیق حاصل مجموع رو حساب کنین؛ باید عادت کنین تخمینی فکر کنین! چه جوری!؟ اینجوری: $\frac{16}{15}$ و $\frac{8}{7/5}$ که هر دو از یک بزرگترن، پس تا اینجا جمع ۲ میشه (تازه کمی هم از ۲ بیشتره) $\frac{4}{7/5}$ و $\frac{32}{45}$ هر دو از $\frac{1}{2}$ بزرگترن، پس این دو تا با هم دست به دست هم بِدن، می‌تونن حداقل ۱ واحد دیگه به مجموع اضافه کنن، پس چهار جمله‌ی اول مجموع بیشتر از ۳ رو ایجاد کردن، که داره با مقادیر مثبت دیگه هم جمع می‌شه و این اطلاعات برای پاسخ دادن به تست کافیه!

مثال ۱۵: مقدار سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3)}{2^n}$ چقدر است؟ (مهندسی فناوری نانو ـ دکتری ۹۳)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{2^n}=\frac{0+3}{2^0}+\frac{1+3}{2^1}+\frac{2+3}{2^2}+\frac{3+3}{2^3}+\frac{4+3}{2^4}+\cdots=3+2+\frac{5}{4}+\frac{6}{8}+\frac{7}{16}+\cdots$$

حالا خوب دقت کنین $\frac{6}{8}$ یا به عبارت دیگه $\frac{3}{4}$ وقتی با $\frac{5}{4}$ جمع میشه، حاصل ۲ میشه، ۵ تا هم که از جمع دو جمله‌ی اول داریم $(5=2+3)$، پس تا جمله‌ی چهارم حاصل ۷ میشه که داره با $\frac{7}{16}$ جمع میشه، پس حاصل سری از ۷ بیشتره و این یعنی گزینه‌های (۱) و (۲) غلطن!

اما برای تعیین جواب درست باید ماکزیمم سری رو هم معلوم کنیم، طبق توضیحات قبلی ماکزیمم سری برابر با مقدار زیر میشه:

$$7+\frac{7}{16}+2\times\frac{7}{16}=7+\frac{21}{16}$$

چون $\frac{21}{16}<2$، بنابراین حاصل سری قطعاً از عدد ۹ کمتره، حالا معلوم شد که گزینه (۳) جوابه

مثال ۱۶: حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n!}$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱)

۱) e ۲) $2e$ ۳) $e-1$ ۴) $e+1$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n!}=\frac{2\times1-1}{1!}+\frac{2\times2-1}{2!}+\frac{2\times3-1}{3!}+\frac{2\times4-1}{4!}+\cdots=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{6}+\frac{7}{24}+\cdots$$

خُب تا این‌جا میشه گفت حاصل سری از ۳/۵ بیشتره (دقت کنین، لازم نیست حتماً مخرج مشترک بگیرین و بیخود برای خودتون داستان درست کنین! شما باید این محاسبات رو تو ذهن خودتون سریع با تخمین زدن انجام بدین، چه جوری!؟ اینجوری: اول توجه کنین که مجموع دو جمله‌ی اول ۲/۵ میشه، از طرفی دو جمله‌ی دوم هم اگه حتی تصور کنیم $\frac{۷}{۲۴}$، برابر با $\frac{۱}{۶}=\frac{۶}{۲۴}$ باشه، معلوم میشه از $۱=\frac{۱}{۶}+\frac{۵}{۶}$ کمی هم بیشتره. تا اینجا فهمیدیم حاصل سری از عدد ۳/۵ بیشتره، پس گزینه‌های (۱) و (۳) غلطن! اما حداکثر سری چقدره!؟ خُب معلومه، می‌تونیم بگیم حاصل سری از $۳/۵+۲\times\frac{۷}{۲۴}$ کمتره، پس گزینه (۲) که حدود ۵/۴ میشه نمی‌تونه جواب باشه، لذا گزینه (۴) جوابه

مثال ۱۷: فرض کنیم $A=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۳}$ باشد. در آن صورت مقدار سری $\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۳}$ که در آن k عددی فرد می‌باشد، عبارت است از:

(ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{A}{۸}$ ۲) $\frac{۳A}{۸}$ ۳) $\frac{۵A}{۸}$ ۴) $\frac{۷A}{۸}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۳}=\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲^۳}+\frac{۱}{۳^۳}+\cdots=۱+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۲۷}+\cdots$$

در صورت سؤال گفته حاصل سری فوق برابر با A است، از طرفی A چیزی نزدیک به ۱/۲ هستش، ولی از ما سؤال شده اگه فقط جملاتی که به ازای n های فرد ایجاد میشه رو با هم جمع بزنیم، حاصل چقدر میشه؟ واضحه بسیار نزدیک به ۱/۲ یا همان تقریب A باید باشه؛ چون عدد یک تو جملاتی که به ازای n های فرد حاصل میشه، وجود داره، پس گزینه‌ای جوابه که بسیار نزدیک به A باشه، از بین گزینه‌ها، فقط گزینه‌ی (۴) چنین شرایطی داره

مثال ۱۸: حاصل جمع سری $\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{n۲^n}$ برابر است با:

(MBA ـ سراسری ۹۳)

۱) $Ln۲-\frac{۵}{۸}$ ۲) $Ln۳$ ۳) $Ln۲$ ۴) $Ln۳-\frac{۵}{۸}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$\sum_{n=۳}^{\infty}\frac{۱}{n۲^n}=\frac{۱}{۳\times۲^۳}+\frac{۱}{۴\times۲^۴}+\cdots=\frac{۱}{۲۴}+\cdots$$

چون $\frac{۱}{۲۴}$ از $\frac{۱}{۲}$ کمتره، پس می‌تونیم بگیم حاصل سری از $\frac{۱}{۲۴}$ بیشتر و از $\frac{۱}{۸}=\frac{۳}{۲۴}=\frac{۱}{۲۴}+۲\times\frac{۱}{۲۴}$ کمتره، حالا تو گزینه‌ها با اونایی که از $\frac{۱}{۸}$ بیشتر هستن، خداحافظی می‌کنیم! خیلی معلومه گزینه‌های (۲) و (۳) که به ترتیب مقدار اونا برابر با $Ln۲\simeq ۰/۷$ و $Ln۳\simeq ۱/۱$ هستش، باید مرخص بشن!

خُب حالا از بین گزینه‌های (۱) و (۴) چه جوری از شَرِّ یکی خلاص شیم!؟ واضحه گزینه (۴) نمی‌تونه جواب باشه، چون مقدار اون حدود ۰/۴۸ میشه؛ پس گزینه (۱) جوابه که مقدار اون حدود $\frac{۱}{۱۲}$ هستش

مثال ۱۹: مقدار سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۱}{n۲^n})$ برابر کدام گزینه است؟

(عمران ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $Ln۳$ ۳) $Ln۲$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا دو جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n۲^n}=\frac{۱}{۱\times۲^۱}+\frac{۱}{۲\times۲^۲}+\cdots=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۸}+\cdots$$

پس حاصل سری از $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۸}$ بیشتر و از $\frac{۷}{۸}=\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۸}+۲\times\frac{۱}{۸}$ کمتره؛ پس گزینه‌های (۱) و (۴) غلط هستن! حالا توجه کنین که از بین گزینه‌های (۲) و (۳) فقط گزینه‌ی (۳) می‌تونه جواب باشه؛ چون Ln۳ حدوداً برابر با ۱/۱ میشه که واضحه از $\frac{۷}{۸}$ بیشتره!

به دست آوردن حاصل سری‌های عددی غیرمثبت

تا اینجا با روش‌های به دست آوردن سری‌های عددی مثبت آشنا شدیم؛ حالا می‌ریم سراغ روش تعیین حاصل سری‌های عددی **غیرمثبت**. تو این جور سری‌ها، باید چندجمله‌ی سری را بنویسیم، بعد حدود سری رو با توجه به مقادیر جملات مثبت یا منفی معلوم کنیم. مثال‌های زیر مطلب رو به خوبی روشن می‌کنه:

مثال ۲۰: مقدار عددی سری $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(n+۱)(n+۲)}$ ، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۴)

۱) $۲Ln۲-۱$ ۲) $۲Ln۲+۱$ ۳) $۲Ln۲-۲$ ۴) $۲Ln۲+۲$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(n+۱)(n+۲)}=\frac{(-۱)^۰}{(۰+۱)(۰+۲)}+\frac{(-۱)^۱}{(۱+۱)(۱+۲)}+\cdots=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}+\cdots$$

حالا خوب دقت کنین؛ حاصل سری قطعاً از $\frac{۱}{۲}$ کمتره، چون یه عددی $(\frac{۱}{۶})$ داره از $\frac{۱}{۲}$ کم میشه (حواستون باشه یه وقت نگید جمله‌ی بعد از $-\frac{۱}{۶}$ مثبته و شاید باعث بشه حاصل از $\frac{۱}{۲}$ بزنه بالا!؟ این تصور غلطه! چون از جمله‌ی بعدی عدد مثبتیه که زورش به $-\frac{۱}{۶}$ نمی‌رسه و کماکان می‌تونیم مطمئن باشیم از $\frac{۱}{۲}$ یه چیزی کم میشه!) پس گزینه‌ای جوابه که از $\frac{۱}{۲}$ کمتره و البته مقدارش مثبته، حالا گزینه‌ها رو بررسی می‌کنیم، فقط باید بدونیم $Ln۲\simeq ۰/۷$ هستش. بنابراین گزینه‌ی (۱) جوابه؛ چون $۲\times ۰/۷-۱=۱/۴-۱=۰/۴$. گزینه‌های (۲) و (۴) که خیلی بزرگتر از $\frac{۱}{۲}$ هستن و گزینه (۳) هم مقدارش منفیه!

مثال ۲۱: مقدار همگرایی $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{n(-۱)^n}{(n+۱)!}$ ، کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{۲}{e}-۱$ ۲) $\frac{۱}{e}$ ۳) $۳-\frac{۲}{e}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا دو جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n(-۱)^n}{(n+۱)!}=\frac{۱(-۱)^۱}{(۱+۱)!}+\frac{۲(-۱)^۲}{(۲+۱)!}-\cdots=-\frac{۱}{۲}+(\frac{۱}{۳}\text{ عددی بسیار کوچک، مثبت و کمتر از })$$

بنابراین حاصل سری باید عددی منفی باشه ($-\frac{۱}{۲}$ حتی اگه با $+\frac{۱}{۳}$ هم جمع بشه بازم حاصل منفی میشه)، فقط گزینه‌ی (۱) مقدارش منفیه

مثال ۲۲: حاصل سری $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۳n+۱}$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{Ln۲}{۳}-\frac{\pi\sqrt{۳}}{۹}$ ۲) $\frac{Ln۲}{۳}+\frac{\pi\sqrt{۳}}{۹}$ ۳) $\frac{Ln۲}{۳}+\frac{\pi}{۶\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{Ln۲}{۳}-\frac{\pi}{۶\sqrt{۳}}$

پاسخ: گزینه «۲» اول چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۳n+۱}=\frac{(-۱)^۰}{۳\times۰+۱}+\frac{(-۱)^۱}{۳\times۱+۱}+\frac{(-۱)^۲}{۳\times۲+۱}+\cdots=۱-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۷}-\cdots$$

همون دو جمله‌ی اول، برابر با $\frac{۳}{۴}$ میشه که با یک مقدار مثبت دیگه هم جمع شده، فقط گزینه (۲) حاصلش نزدیک به $\frac{۳}{۴}$ است (حدود ۰/۸). (از دو تقریب $Ln۲\simeq ۰/۷$ و $\sqrt{۳}\simeq ۱/۷$ استفاده کنین)

مثال ۲۳: مقدار $\sum\limits_{n=۰}^{+\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)(۳^n)}$ ، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $۳\sqrt{۳}\pi$ ۳) ۳π ۴) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۶}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)۳^n}=\frac{(-۱)^۰}{(۲\times۰+۱)۳^۰}+\frac{(-۱)^۱}{(۲\times۱+۱)۳^۱}+\frac{(-۱)^۲}{(۲\times۲+۱)۳^۲}-\cdots=۱-\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۴۵}-\cdots$$

خیلی معلومه که مجموع این سری باید عددی کمتر از ۱ باشه، گزینه‌هایی که مقدارشون از ۱ کمتره، گزینه (۴) و (۱) هستن. ولی حاصل سری عددی نزدیک به $\frac{۸}{۹}$ می‌شه که نزدیک به ۱ هستش، در حالی که گزینه (۱) نزدیک به $\frac{۱}{۲}$ و از ۱ خیلی کمتره پس گزینه (۴) جوابه

مثال ۲۴: مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{4}+1$ ۳) $\frac{\pi}{4}-1$ ۴) $1-\frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا دو جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{(-1)^1}{3}+\frac{(-1)^2}{2\times2+1}+\cdots=-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots$$

همون‌طورکه می‌بینین حاصل دو جمله‌ی اول منفیه که قراره با یه عبارت منفی دیگه هم جمع بشه؛ پس گزینه‌ای جوابه که مقدارش منفی باشه؛ فقط گزینه (۳) می‌تونه جواب باشه

مثال ۲۵: مقدار همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$ کدام است؟ (مهندسی پزشکی ـ دکتری ۹۴)

۱) $\frac{\pi+1}{4}$ ۲) $\frac{\pi-1}{4}$ ۳) $\frac{\pi-2}{4}$ ۴) $\frac{\pi+2}{4}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا دو جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{(-1)^0}{(2\times0+1)(2\times0+3)}+\frac{(-1)^1}{(2\times1+1)(2\times1+3)}+-\cdots=\frac{1}{3}-\frac{1}{15}+\cdots$$

خُب حالا توجه کنین که حاصل سری از $\frac{1}{3}$ کمتره، چون درسته که $-\frac{1}{15}$ با عدد مثبت بعدی جمع میشه، اما زور عدد مثبت بعدی به $-\frac{1}{15}$ نمی‌رسه! بنابراین گزینه‌ای جوابه که از $\frac{1}{3}$ کمتر باشه، گزینه‌های (۱) و (۴) که از عدد ۱ هم بزرگتر هستن، گزینه (۲) هم مقدارش از $\frac{1}{2}$ بیشتره، پس گزینه‌ی (۳) جوابه

مثال ۲۶: مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+2+\cdots+n}$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) -2 ۲) $2-4\mathrm{Ln}2$ ۳) 2 ۴) 4

پاسخ: گزینه «۲» می‌دونیم $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$؛ پس سری در واقع به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n(n+1)}$ هستش، حالا چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n(n+1)}=\frac{2(-1)^1}{1(1+1)}+\frac{2(-1)^2}{2(2+1)}+\frac{2(-1)^3}{3(3+1)}+\cdots=\frac{-2}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\cdots$$

خُب حالا لازمه خوب دقت کنین؛ از $-1=-\frac{2}{2}$ به بعد، حاصل جملات یه عددِ مثبته که از $\frac{1}{3}$ کمتره، پس وقتی با -1 جمع میشه، حاصل سری یه عدد منفی باقی می‌مونه که حدود -1 میشه، یعنی مثبت که اصلاً نیست و هیچ وقت برابر با -2 هم نمیشه، فقط گزینه (۲) چنین شرایطی داره

مثال ۲۷: با توجه به $\mathrm{Ln}2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\cdots$، سری $S=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$، به کدام عدد همگراست؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{1}{2}\mathrm{Ln}2$ ۲) $\frac{3}{2}\mathrm{Ln}2$ ۳) $\frac{2}{3}\mathrm{Ln}2$ ۴) $2\mathrm{Ln}2$

پاسخ: گزینه «۲» وقتی سری‌های S و Ln۲ رو جمله به جمله حساب می‌کنیم؛ هیچ‌وقت S از Ln۲ کمتر نمیشه. مثلاً با در نظر گرفتن ۲ جمله‌ی اول؛ $\mathrm{Ln}2=1-\frac{1}{2}$ و $S=1+\frac{1}{3}$، پس $S>\mathrm{Ln}2$. با در نظر گرفتن ۳ جمله‌ی اول داریم: $S=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\mathrm{Ln}2$ (S و Ln۲ با هم مساوی شده)، با در نظر گرفتن ۴ جمله‌ی اول داریم $S>\mathrm{Ln}2$,... پس مطمئن می‌شیم که در نهایت S از Ln۲ کوچکتر نمیشه؛ تا اینجا با گزینه‌های (۱) و (۳) که مقدارشون از Ln۲ کمتره، خداحافظی می‌کنیم! بنابراین کافیه از بین گزینه‌های (۲) و (۴) یکی را حذف کنیم. با توجه به بسط Ln۲ داریم:

$$2\mathrm{Ln}2=2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-+\cdots)=2-1+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+\frac{2}{5}-+\cdots=1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-+\cdots$$

همون‌طور که می‌بینین؛ جمله‌ی سوم سری فوق و سری S برابر با $-\frac{1}{2}$ است و از طرفی دو جمله‌ی اول سری فوق $1+\frac{2}{3}$ است، و دو جمله‌ی اول سری S، برابر با $1+\frac{1}{3}$ است. پس حاصل سری از $2\mathrm{Ln}2$ کمتر است. در نتیجه گزینه (۴) هم حذف و گزینه (۲) جوابه

مثال ۲۸: حاصل $\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{2k\pi}{m}$، کدام است؟ $(m>1)$ (MBA ـ سراسری ۸۸)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $(\frac{1}{2})^m$ ۴) $\frac{m-2}{m}$

پاسخ: گزینه «۱» اگه فرض کنیم $m=3$ اونوقت داریم:

$$\sum_{k=1}^{3}\cos\frac{2k\pi}{3}=\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{6\pi}{3}=(-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})+1=0$$

حالا در گزینه‌ها به جای m، عدد ۳ رو قرار میدیم، هر کدوم مقدارش برابر با صفر شد، جوابه. واضحه گزینه‌های (۳) و (۴) مقدارشان صفر نمیشه، از طرفی رابطه‌ی مسأله باید برای تمام m ها برقرار باشه، پس گزینه (۲) هم نمی‌تونه جواب باشه

مثال ۲۹: به ازای $n\geq 2$، حاصل عبارت $T_n=(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$ با کدام عدد برابر است؟ (معدن ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{n-1}{2n}$ ۲) $\frac{n+1}{2n}$ ۳) $\frac{2n}{n+1}$ ۴) $\frac{2n}{n-1}$

پاسخ: گزینه «۲» اینم یه سؤال که خیلی به سری‌های عددی (سری مجموع) ربطی نداره. ولی به راحتی می‌شه به اون کلک زد! به ازای $n=2$، $T_2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ میشه، فقط گزینه‌ی (۲) چنین شرایطی رو داره!

نکته۱: تا حالا با سری‌های عددی سروکار داشتیم. اما نوع دیگه‌ای از سؤالات فصل دنباله و سری که میشه بِهش کلک زد، سری‌هایی که تو اونا سروکله‌ی x پیدا شده و گزینه‌ها هم برحسب x داده شدن. تو این‌جور تست‌ها که مجموع یک سری برحسب x از ما سؤال شده، می‌تونیم به جای x، هر مقدار دلخواهی قرار بدیم (البته با توجه به محدودیتی که سؤال برای x در نظر گرفته) و حاصل سری رو حساب کنیم. البته باید در گزینه‌ها هم همون مقدار رو به جای x قرار بدیم؛ واضحه گزینه‌ای جوابه که حاصلش با مقدار سری برابر بشه. مثال‌های بعدی مطلب رو به خوبی تفهیم می‌کنه.

مثال ۳۰: اگر $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n, |x|<1$ آنگاه $f(x)$ برابر است با: (عمران ـ سراسری ۸۷ و ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{x^2+1}{(1-x)^3}$ ۲) $\frac{x+1}{(1-x)^3}$ ۳) $\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$ ۴) $\frac{1}{(1-x)^2}$

پاسخ: گزینه «۳» واقعاً طراح به این خوش اخلاقی و مهربونی دیده بودید؟! که با نگاهی گذرا و تو **۳** ثانیه میشه به تست آزمون کارشناسی ارشد جواب داد! حاصل سری به ازای $x=0$، برابر با صفر میشه، بنابراین گزینه‌ای جوابه که اگه به جای x های اون، عدد صفر رو قرار بدیم، حاصلش صفر بِشه؛ فقط گزینه (۳) این شرایط رو داره

مثال ۳۱: مجموع سری $|x|<1$ $S(x)=1-3x^2+5x^4-7x^6+\cdots$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۷ و ۸۴)

۱) $\frac{2x}{1+x^2}$ ۲) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ۳) $\frac{1+x}{1+x^2}$ ۴) $\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$

پاسخ: گزینه «۲» اگه در صورت سؤال به جای x، صفر قرار بدیم، حاصل سری برابر با یک میشه؛ بنابراین در گزینه‌ها هم اگه به جای x صفر قرار بدیم، باید حاصل برابر با **۱** بشه. پس تا اینجا با گزینه‌های ۱ و ۴ خداحافظی می‌کنیم! (چون به ازای $x=0$، حاصل اونا صفر میشه) حالا باید از بین گزینه‌های ۲ و ۳ یکی رو انتخاب کنیم. به نظر شما چه کَلَک دیگری می‌توان به تست زد؟! گزینه‌های (۲) و (۳) چه فرقی با هم دارن؟ یکی از اونا تابعی زوج و اون یکی نه زوجه نه فرد. اگه نگاهی به سری داده شده در متن سؤال بندازیم، می‌بینیم سری داده شده در متن سؤال هم یک تابع زوجه؛ بنابراین گزینه (۳) هم غلطه؛ چون تابعی زوج نیست

توضیح: حتی اگه هر دو تابع گزینه (۲) و (۳) هم زوج بودند، باز هم با عددگذاری می‌تونستیم گزینه‌ی صحیح رو پیدا کنیم، دقت کنید؛ می‌تونیم به جای x، عدد $\frac{1}{4}$ رو در سری، قرار دهیم:

$$S(\frac{1}{4})=1-3(\frac{1}{4})^2+5(\frac{1}{4})^4-+\cdots=1-\frac{3}{16}+\frac{5}{256}-+\cdots=\frac{256-48+5}{256}-+\cdots=\frac{213}{256}-+\cdots$$

واضحه حاصل سری به ازای $x=\frac{1}{4}$ از عدد **۱** کمتره؛ حالا در یکی از گزینه‌های (۲) یا (۳)، به جای x، عدد $\frac{1}{4}$ رو قرار می‌دیم، هر کدوم حاصل‌شون از **۱** کمتر بود، جوابه!

$$\text{حاصل گزینه (۳)}=\frac{1+\frac{1}{4}}{1+(\frac{1}{4})^2}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{17}{16}}=\frac{5\times16}{4\times17}=\frac{5\times4}{17}=\frac{20}{17}>1$$

کَلَکْ زدن به تست‌های انتگرال در کنکور!

تو این قسمت می‌خوایم به تست‌های انتگرال کَلَکْ بزنیم! فعلاً راجع به انتگرال‌های معین صحبت می‌کنیم و در ادامه چند تست انتگرال نامعین رو هم با هم بررسی می‌کنیم. تأکید می‌کنم که این روش فقط واسه برخی سؤالات (که یکی از شروط اصلی اونا اینه که گزینه‌ها خیلی به هم نزدیک **نباشن**) جواب می‌ده و شما نباید از روش‌های اصلی و حل تشریحی غافل بشین. به همین دلیل، روش تشریحی تمام اونا تو درسنامه‌ی مربوطه در قسمت تست‌های طبقه‌بندی شده کتاب اصلی ریاضی عمومی (۱) ارائه شده. قبل از اینکه بخوایم تست‌ها رو با این روش حل کنیم، ابتدا لازمه نکته‌ی زیر رو یادآوری کنم:

اگه دو تابع f و g تو بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشن و به ازای هر x متعلق به این بازه، همواره نامساوی $g(x)\le f(x)$ برقرار باشه، اونوقت همواره رابطه‌ی زیر رو داریم:

$$\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)dx$$

یه نتیجه بدیهی از نتایج نکته‌ی بالا اینه که اگه $f(x)>\circ$ باشه، اونوقت حاصل انتگرال $\int_a^b f(x)dx$، همواره مثبت میشه.

اکثر تست‌هایی که تو این قسمت میاریم، با استفاده از همین نکته حل می‌شن. در واقع تو این روش ما سعی می‌کنیم؛ **«حداکثر»** و **«حداقل»** تابع زیر انتگرال یا بخشی از عبارت زیر انتگرال رو در بازه‌ی داده شده معلوم کنیم و به یه انتگرال ساده‌تر برسیم و حاصل انتگرال رو سریع حساب کنیم. بعدش تو گزینه‌ها، اون اعدادی که بیشتر از حداکثر و یا کمتر از حداقل هستن رو از توی جوابا خارج کنیم. مثال‌هایی که در ادامه میان خیلی کامل و قشنگ این مطلب رو توضیح می‌دن.

توجه: همون‌طور که قبلاً هم گفتم دونستن حدود **تقریبی** اعداد زیر می‌تونه به شما تو حل سریع تست‌ها کمک زیادی کنه:

$\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$, $\sqrt{۳}\simeq ۱/۷$, $\text{Ln}e=۱$, $\text{Ln}۲\simeq ۰/۷$, $\text{Ln}۳\simeq ۱/۱$, $e\simeq ۲/۷$, $e^{۲}\simeq ۷/۴$

$\pi\simeq ۳/۱۴$, $\pi^{۲}\simeq ۹/۹$, $\pi^{۳}\simeq ۳۱$, $\pi^{۴}\simeq ۹۷$

مثال ۱: مقدار انتگرال $\int_{\circ}^{۱}\frac{\text{Ln}(۱+x)}{x}dx$ برابر است با: (مکانیک ـ سراسری ۹۱)

(در صورت نیاز از تساوی‌های: $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲}}=\frac{\pi^{۲}}{۶}$ و $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^{۲}}=\frac{\pi^{۲}}{۸}$ می‌توانید استفاده کنید.)

۱) $\frac{\pi^{۲}}{۱۲}$ ۲) $\frac{\pi^{۲}}{۸}$

۳) $\frac{\pi^{۲}}{۶}$ ۴) انتگرال وجود دارد ولیکن قابل محاسبه نمی‌باشد.

پاسخ: گزینه «۱» یه راه‌حل بسیار زیبا و منحصر به فرد (بدون دخالت دست و خودکار!) به شکل زیر هستش:

می‌دونیم تو بازه صفر تا یک، $\text{Ln}(۱+x)<x$، پس حاصل انتگرال $\int_{\circ}^{۱}\frac{\text{Ln}(۱+x)}{x}dx$ از حاصل انتگرال $\int_{\circ}^{۱}\frac{x}{x}dx$ و یا به عبارت دیگه از حاصل انتگرال $\int_{\circ}^{۱}dx$ کمتره، چون حاصل انتگرال دوم برابر با ۱ می‌شه، پس باید حاصل انتگرال اصلی هم از عدد ۱ کمتر باشه! تو گزینه‌ها، فقط مقدار داده شده تو گزینه (۱) هست که مقدارش از ۱ کمتره!! این تست، از اون دسته سؤالاتیه که در حین خوردن کیک سازمان سنجش هم می‌تونستین بهش جواب بدین وای اگه طراح این سؤال بفهمه من این سؤال رو اینجوری حل کردم، چه آتیشی به پا کُنه!؟ (اگه خانوم باشه که خودشُ می‌زنه! اگه آقا باشه دنبال من می‌گرده، منو بزنه!)

مثال ۲: مقدار انتگرال $\int_{۱}^{\sqrt{۳}}(۱-x^{۲})\text{Ln}x\,dx$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{۱۰}{۹}-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۹}-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}+\frac{۱۹}{۹}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}+\frac{۱۰}{۹}$

پاسخ: گزینه «۲» خُب، تو این تست می‌تونیم حداقل و حداکثر قسمتی از تابع زیر انتگرال رو در نظر بگیریم؛ با توجه به وجود $(۱-x^{۲})$ تو انتگرال، واضحه که در بازه‌ی $[۱,\sqrt{۳}]$ همیشه حاصل انتگرال منفیه، بنابراین در حالی که نیازی به خودکار هم ندارین، می‌تونین سریع بگین که گزینه (۲) جوابه (آخه مقدار بقیه گزینه‌ها مثبته).

توضیح: دقت کنین که تو بازه $[۱,\sqrt{۳}]$ مقدار $\text{Ln}x$ صفر و یا بزرگتر از صفره و چون $۱-x^{۲}$ همواره تو این بازه منفی میشه، بنابراین عبارت زیر انتگرال منفی باقی می‌مونه؛ حواستون باشه تو تست‌هایی که حداقل و حداکثر بخش‌هایی از تابع زیر انتگرال رو تعیین می‌کنین؛ به قسمت دیگه هم توجه داشته باشین.

مثال ۳: اگر $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{۰}^{b}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{۰}^{b}\frac{\sin x\cos x}{x}dx$ برابر کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۴) π

پاسخ: گزینه «۱» می‌دونیم حداکثر مقدار $\cos x$، برابر با یک هستش، بنابراین حاصل انتگرال خواسته شده قطعاً از حاصل انتگرال $\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin x}{x}(۱)dx$ کوچکتره، از طرفی خودِ صورت سؤال حاصل $\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ رو مساوی با $\frac{\pi}{۲}$ داده، پس می‌تونیم بگیم حاصل انتگرال خواسته شده از $\frac{\pi}{۲}$ کوچکتره، واسه این که شما هم کمی به من کمک کنین، بگید ببینم کدوم گزینه هست که مقدارش از $\frac{\pi}{۲}$ کمتره!؟

توجه: دقت کنین که به جز نقاط $۰,۲\pi,۴\pi,\ldots$ در سایر نقاط $\cos x<۱$ به همین دلیل حاصل انتگرال اکیداً از $\frac{\pi}{۲}$ کمتره و نمی‌تونه مساوی با $\frac{\pi}{۲}$ باشد.

مثال ۴: حاصل $I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}x^{۲}\sin x\,dx$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۵)

۱) $\pi-۱$ ۲) $\pi-۲$ ۳) $۲\pi-۱$ ۴) $۲\pi-۲$

پاسخ: گزینه «۲» واضحه حداکثر $\sin x$ تو بازه‌ی داده شده برای انتگرال $\underline{۱}$ هستش، بنابراین می‌تونیم بگیم حاصل انتگرال از $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}x^{۲}dx=[\frac{x^{۳}}{۳}]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$ و به عبارت دیگه از $\frac{۱}{۳}[\frac{\pi^{۳}}{۸}]$ کمتره، تنها گزینه‌ای که از این عدد کمتره، همون عدد داده شده تو گزینه (۲) هست

مثال ۵: مقدار انتگرال $I=\int_{۰}^{۳}\frac{dx}{x+\sqrt{۹-x^{۲}}}$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۹\pi}{۴}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این که $۰\le x\le ۳$، پس حاصل انتگرال از انتگرال $I_{۱}=\int_{۰}^{۳}\frac{dx}{\sqrt{۹-x^{۲}}}$ کمتره؛ (چون x بالاخره مقداری مثبته و بنابراین مخرج انتگرال I از مخرج انتگرال $I_{۱}$ بزرگتره، پس حاصل کسر بزرگتره) می‌دونیم حاصل انتگرال $I_{۱}$ طبق فرمول برابر با $[\text{Arcsin}(\frac{x}{۳})]_{۰}^{۳}=\text{Arcsin}\,۱=\frac{\pi}{۲}$ میشه و چون I از $I_{۱}$ کمتره؛ پس گزینه‌ای جوابه که از $\frac{\pi}{۲}$ کمتر باشه؛ فقط گزینه (۱) هستش که چنین شرایطی رو داره

مثال ۶: مقدار انتگرال $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin^{۳}x}{\sin x+\cos x}dx$ کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}+\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه «۱» حل تشریحی سؤال نسبتاً سخت و خیلی زمان‌بره! اما من می‌خوام به این تست هم کَلَکْ بزنم! بیایید با هم این کار رو بکنیم؛ تابع زیر انتگرال قطعاً از $\frac{\sin^{۳}x}{\sin x}$ کوچکتره (چون که $\cos x$ تو بازه‌ی $[۰,\frac{\pi}{۲}]$، مقداری نامنفی داره و کمترین مقدار اون به ازای $x=\frac{\pi}{۲}$ به دست میاد و چون مخرج کم می‌شه، کسر خواه ناخواه، بزرگ می‌شه)، بنابراین داریم:

$$I<\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin^{۳}x}{\sin x}dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin^{۲}x\,dx$$

همه‌ی اونایی که کتاب اصلی ریاضی عمومی (۱) رو خوندن، می‌دونن انتگرال $\sin^{2} x$ و $\cos^{2} x$ تو بازه‌ی $\int_{0}^{\frac{k\pi}{2}}$ (k عددی طبیعی هست) همـواره برابـر بـا نصفِ حدِ بالای انتگرال میشه! پس I از $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})$ کوچکتره؛ از اینجا به بعد رو می‌خوام شما زحمت بکشین و بگین کدوم گزینه هست که مقدارش از $\frac{\pi}{4}$ کمتره؟!

توضیح: البته اگه نکته رو هم ندونین، می‌تونین انتگرال $\sin^{2} x$ رو با توجه به فرمول توان‌شـکن حسـاب کـنین و جـواب صـحیح رو علامـت بـزنین؛ چون به هر حال محاسبه‌ی اون خیلی راحت‌تر از انتگرال اصلی هستش!

مثال ۷: حاصل $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^{3}+5}}$: (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۹)

۱) واگرا می‌باشد. ۲) کمتر از ۲ می‌باشد. ۳) برابر ۲ می‌باشد. ۴) بیشتر از ۲ می‌باشد.

پاسخ: گزینه «۲» صرف‌نظر از گزینه (۱) که می‌دونیم غلطه؛ (دیگه کمی واگرایی یا همگرایی انتگرال‌هـایی بـه ایـن سـادگی رو بایـد بلـد باشـین!) می‌تونیم بگیم حاصل این انتگرال قطعاً از $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^{3}}}dx$ کمتره (چون مخرج انتگرال صورت سؤال عدد ثابت ۵ رو داره و این یعنی حاصل کسر زیر انتگرالش کمتر از $\frac{1}{\sqrt{x^{3}}}$ هستش)، حالا باید حاصل این انتگرال ساده رو حساب کنیم:

$$\int_{1}^{\infty}x^{-\frac{3}{2}}dx=[-2x^{-\frac{1}{2}}]_{1}^{\infty}=[-\frac{2}{\sqrt{x}}]_{1}^{\infty}=2$$

پس حاصل انتگرال قطعاً از ۲ کمتره و این یعنی گزینه (۲) جوابه

نکته ۱: قبل از پایان این بخش به دو تست انتگرال نامعین که با مفاهیم گفته شده در این بخش بی‌ارتباط هم نیست و میشه به اونـا کلـک هـم زد، توجه کنید!

مثال ۸: حاصل $\int\frac{dx}{1+e^{x}}$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۶)

۱) $c\mathrm{Ln}(1-e^{x})+x^{2}$ ۲) $c\mathrm{Ln}(1-e^{x})+x-x^{2}$ ۳) $x-\mathrm{Ln}(1+e^{x})+c$ ۴) $x+\mathrm{Ln}(1+e^{x})+c$

پاسخ: گزینه «۳» تو صورت سؤال هیچ محدودیتی واسه تابع زیر انتگرال نیستش، بنابراین تو گزینه‌ها هم باید هیچ محدودیتی واسه x وجود نداشته باشه، پس گزینه‌های (۱) و (۲) غلطن! (چون دامنه‌ی اونا برای x محدودیت داره؛ مثلاً x نمی‌تونه برابر با ۲ باشه چون جلـوی Ln منفـی میشـه). امـا بـین گزینه‌های (۳) و (۴) چه جوری جواب صحیح رو انتخاب کنیم!؟ می‌تونیم به ازای تموم x های مثبت بگیم؛ $\frac{1}{1+e^{x}}<1$ (چون e^{x} همواره عددی مثبته، پس «$\frac{1}{1+\text{عددی مثبت}}$» کوچکتر از $\underline{1}$ می‌شه)، بنابراین انتگرال از $\int 1\times dx$ کوچکتره پس انتگرال از x کوچکتر می‌شه و این یعنی گزینه (۳) جوابه

توضیح: البته ما واسه رَد گزینه‌های (۱) و (۲)، یه استدلال دیگه هم داریم! و اون اینه که تو انتگرال‌های نامعین می‌تونیم به جای c هر عـدد دلخـواه رو قرار بدیم! مثلاً تو این تست $c=0$ قرار می‌دیم. با قرار دادن $c=0$، جمله‌های دارای Ln به اتفاق هم می‌پَرن! یعنی فقط $x-x^{2}$ واسـه گزینـه (۲) و x^{2} واسه گزینه (۱) باقی می‌مونه، به نظر شما اگه از «x^{2}» یا «$x-x^{2}$» مشتق بگیریم به تابع زیر انتگرال، یعنی $(\frac{1}{1+e^{x}})$ می‌رسیم!؟

مثال ۹: مقدار انتگرال $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^{2}+2x-1}}$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۳)

۱) $\mathrm{Arcsin}(\frac{x\sqrt{2}}{1-x})+c$ ۲) $\mathrm{Arcsin}(\frac{x-1}{x\sqrt{2}})+c$ ۳) $\mathrm{Arcsin}(\frac{1-x}{x\sqrt{2}})+c$ ۴) $\mathrm{Arcsin}(\frac{x\sqrt{2}}{x-1})+c$

پاسخ: گزینه «۲» اولاً دقت کنین که $x=1$ هیچ مشکلی زیر انتگرال ایجاد نمی‌کنه پس گزینـه‌هـای (۱) و (۴) غلطـن؛ چـون بـه ازای $x=1$ دچـار داستان می‌شن! از طرفی به ازای x های بزرگتر از ۱ عبارت زیر انتگرال همیشه مثبته؛ پس گزینه‌ای جوابه کـه بـه ازای $x>1$ همیشـه مثبـت باشـه!؟ پـس گزینه (۳) نمی‌تونه جواب باشه

نکته تکمیلی: به غیر از مطالب فوق، نکته‌ی زیر هم در برخی سؤالات استفاده میشه:

اگه M بزرگترین مقدار تابع زیر انتگرال و m کوچکترین مقدار تابع زیر انتگرال باشه، اونوقت می‌تونیم بگیم حاصل انتگرال $I=\int_a^b f(x)dx$ همواره در نامساوی زیر صدق می‌کنه:

$$\mathbf{m(b-a)\le I\le M(b-a)}$$

حواستون باشه که همیشه قرار نیست M به ازای حد بالا و m به ازای حد پایین به دست بیاد؛ ولی گاهی اوقات ممکنه M و m به ازای حدود انتگرال به دست بیان.

مثال ۱۰: مقدار $\int_{۰}^{۱} e^{\sqrt{۱-x}}dx$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۲)

۱) ۱ ۲) $۲(\frac{۱}{e}-۱)$ ۳) $۲e-۱$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۴» حداکثر مقدار تابع زیر انتگرال به ازای $x=۰$ حاصل می‌شه که مقدارش برابر با e هست و حداقل اون هم به ازای $x=۱$ حاصل می‌شه که مقدارش برابر با ۱ هست. بنابراین انتگرال کوچکتر از $\int_{۰}^{۱} edx=e$ و بزرگتر از $\int_{۰}^{۱} ۱dx=۱$ هست. به نظر شما کدوم عدد تو گزینه‌ها می‌تونه تو چنین شرایطی صدق کنه!؟ واضحه فقط عدد ۲ که تو گزینه (۴) اومده می‌تونه تو این محدوده قرار بگیره این سؤال هم از اون سؤالاتی بود که می‌تونستین سر جلسه‌ی کنکور حین خوردن کیک و ساندیس سازمان‌سنجش بدون دخالت دست و خودکار بهش جواب بدین!

مثال ۱۱: مقدار انتگرال $\int_{۰}^{۱} Ln(x+\sqrt{x^{۲}+۱})dx$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۹۰)

۱) $Ln(\sqrt{۲}+۱)+۱$ ۲) $Ln(\sqrt{۲}+۱)-\sqrt{۲}$ ۳) $-(\sqrt{۲}-۱+Ln(\sqrt{۲}-۱))$ ۴) $Ln(\sqrt{۲}+۱)+\sqrt{۲}-۱$

پاسخ: گزینه «۳» بیشترین مقدار تابع زیر انتگرال به ازای $x=۱$ و کمترین مقدار اون به ازای $x=۰$، به دست میاد، یعنی می‌تونیم بگیم **تابع زیر انتگرال از $Ln۱=۰$، بزرگتره و از $Ln(۱+\sqrt{۲})$ کوچکتره.** بنابراین داریم:

$$۰\le I\le \int_{۰}^{۱} Ln(۱+\sqrt{۲})dx \Rightarrow ۰<I<Ln(۱+\sqrt{۲})$$

خُب، گزینه‌های (۱) و (۴) که مقدارشون از $Ln(۱+\sqrt{۲})$ بیشتره، نمی‌تونن جواب باشن! حالا می‌ریم سراغ گزینه‌های (۲) و (۳)، از اونجایی که می‌دونیم $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$، واضحه که مقدار گزینه (۲) منفیه، چون عدد «$Ln(۲/۴)-۱/۴$» مقدارش منفیه (اصلاً حتی اگه «$Lne-۱/۴$» هم بود، بازم به مقدار منفی می‌شد، چه برسه به این که ۲/۴ هست). $(Lne=۱\,,\,e\simeq ۲/۷۱)$

توضیح مفصل‌تر: با این که علامت منفی، پشت پرانتز گزینه (۳) قرار داره، ولی مقدار اون مثبته، چون «$\sqrt{۲}-۱\sim ۰/۴$» و «$Ln\,۰/۴\sim -۰/۹$» می‌شه، پس داخل پرانتز حدوداً برابر با «$-۰/۵$» می‌شه و در نتیجه مقدار این گزینه حدوداً «$۰/۵$» می‌شه. البته بعد از این که گزینه (۲) از دور مسابقات خارج شد، دیگه نیازی به این محاسبات نیست، چون همه‌ی شما می‌دونین وقتی سه گزینه غلطه، به ناچار گزینه‌ای که می‌مونه، جوابه

مثال ۱۲: حاصل $I=\int_{۰}^{\pi}\sqrt{۱+\sin x}dx$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: گزینه «۳» بیشترین مقدار تابع زیر انتگرال تو بازه‌ی داده شده، برابر با $\sqrt{۲}$ (وقتی $\sin x=۱$ باشه) و کمترین مقدار اون ۱ (وقتی $\sin x=۰$ باشه) هستش، بنابراین داریم:

$$\int_{۰}^{\pi} ۱dx\le I\le \int_{۰}^{\pi}\sqrt{۲}dx \Rightarrow \pi\le I\le \sqrt{۲}\pi$$

پس انتگرال از π (یعنی ۳/۱۴) بزرگتره، پس یکی از گزینه‌های (۳) و (۴) جوابه! اما حاصل انتگرال از $\sqrt{۲}\pi$ کمتره، پس گزینه (۳) جوابه

مثال ۱۳: حاصل $\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{(۱+x^{۲})\sqrt{۱-x^{۲}}}$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{\pi\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

پاسخ: گزینه «۲» خُب تو بازه‌ی ۰ تا ۱، معلومه «$۱+x^{۲}$» صعودی هستش، بنابراین می‌تونیم بگیم تابع زیر انتگرال قطعاً از $\frac{۱}{(۱+۰)\sqrt{۱-x^{۲}}}$ **کوچکتره**، یعنی انتگرال از $\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$ و به عبارت دیگه از $[Arc\sin x]_{۰}^{۱}=\frac{\pi}{۲}$، **کوچکتره**. تا این‌جا می‌تونیم با گزینه‌های (۱) و (۴) خداحافظی کنیم!

اما تابع زیر انتگرال قطعاً از $\frac{۱}{(۱+۱)\sqrt{۱-x^{۲}}}$ **بزرگتره**، یعنی انتگرال از $\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{۲\sqrt{۱-x^{۲}}}$ و به عبارت دیگه از $\frac{۱}{۲}[Arc\sin]_{۰}^{۱}=\frac{\pi}{۴}$، **بزرگتره**. پس گزینه (۳) هم مرخص می‌شه و گزینه (۲) رو به عنوان جواب معرفی می‌کنیم

مثال ۱۴: مقدار $\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۵\sin x + ۷\cos x}{۲\sin x + ۳\cos x} dx$ ، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{۱۳\pi}{۶۲} + \frac{۱}{۳۱} Ln \frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۳۱\pi}{۱۳} + \frac{۱}{۱۳} Ln \frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۳۱\pi}{۲۶} + \frac{۱}{۱۳} Ln \frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۱۳\pi}{۳۱} + \frac{۱}{۳۱} Ln \frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه «۳» واضحه کسر داده شده در مقابل انتگرال، **همواره بزرگتر از ۲ و کوچکتر از ۳** هستش، بنابراین داریم:

$$\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} ۲dx = \pi \le \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۵\sin x + ۷\cos x}{۲\sin x + ۳\cos x} dx \le \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} ۳dx = \frac{۳\pi}{۲}$$

توی گزینه‌ها، فقط گزینه (۳) بزرگتر از π و کوچکتر از $\frac{۳\pi}{۲}$ هستش

توضیح: احتمالاً اکثر شما عزیزان می‌دونین که چرا حاصل کسر بزرگتر از ۲ و کوچکتر از ۳ هستش، اما اون دسته از دوستانی که احتمالاً نمی‌دونـن، توجه کنن که $۴\sin x + ۶\cos x$، دو برابر مخرج کسر هستش و این در حالیه که صورت کسر برابر $۵\sin x + ۷\cos x$ هست و با توجه به این‌که هم $\sin x$ و هم $\cos x$ در بازه $[\circ, \frac{\pi}{۲}]$ مثبت هستند؛ پس صورت کسر از $۴\sin x + ۶\cos x$ و به عبارت دیگه از ۲ بزرگتره بـا اسـتدلالی شـبیه، معلومـه صـورت کسـر از «سه برابرِ مخرج کسر» کمتره.

مثال ۱۵: حاصل $I = \int_{\circ}^{۱} Ln(۱+x)dx$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۲)

۱) -۱
۲) $۲Ln۲$
۳) $۲Ln۲ - ۱$
۴) $۲Ln۲ + ۱$

پاسخ: گزینه «۳» حداکثر مقدار تابع زیر انتگرال به ازای $x = ۱$، حاصل می‌شه و برابر با $Ln۲$ هست، این یعنـی **حاصل انتگرال از Ln۲ کوچکتره**. بنابراین سریع گزینه‌های (۲) و (۴) را مرخص می‌کنیم! جواب یا گزینه (۱) میشه یا گزینه (۳)، آیا قبول دارین تو بازه‌ی داده شـده **حاصل انتگرال بزرگتر یا مساوی صفر است؟** (چون کمترین مقدار تابع به ازای $x = \circ$، به دست میاد که برابر با $\circ$ هست $Ln۱ = \circ$) اگه قبول دارین، چرا گزینه (۱) رو از بین جوابا حذف نمی‌کنین!؟

مثال ۱۶: مقدار انتگرال $I = \int_{\circ}^{۱} \frac{۲}{۱+x^{۵}} dx$ ، کدام است؟ (فیزیک دریا ـ سراسری ۹۰)

۱) برابر با ۲ است.
۲) بیش از ۲ است.
۳) بین یک و دو است.
۴) کمتر از یک است.

پاسخ: گزینه «۳» توجه کنین که حداکثر تابع زیر انتگرال به ازای $x = \circ$ ایجاد میشه که برابر با ۲ هستش و حداقل اون به ازای $x = ۱$ ایجاد میشه که برابر با ۱ هستش؛ بنابراین گزینه (۳) جوابه

نکته ۲: تو برخی سؤالات با یکسان کردن حدود انتگرال (با قرار دادن عدد مناسب به جای متغیر موجود در حدود انتگرال) می‌تونیم به تست کَلَـک بزنیم! دو مثال زیر موضوع را بهتر روشن می‌کنه:

مثال ۱۷: اگر $x > \circ$ و $F(x) = \int_{۱}^{x} \frac{e^{t}}{t} dt$ باشد، مقدار انتگرال $G(x) = \int_{۱}^{x} \frac{e^{at}}{t} dt$، بر حسب F برابر کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۹)

۱) $F(ax)$
۲) $F(ax) + F(a)$
۳) $F(ax) - F(a)$
۴) $-F(ax)$

پاسخ: گزینه «۳» به x مقدار ۱ می‌دیم، اونوقت داریم:

$$G(۱) = \int_{۱}^{۱} \frac{e^{at}}{t} dt \xrightarrow{\text{چون حد بالا و پایین مساوی هستن}} G(۱) = \circ$$

حالا تو گزینه‌ها به جای x، عدد $\underline{۱}$ قرار می‌دیم، هر کدوم صفر شد، جواب سؤاله. فقط گزینه (۳) چنین شرایطی رو داره (چون $F(a) - F(a) = \circ$)

مثال ۱۸: در مورد تابع $g(x) = \int_{\circ}^{x} \frac{dt}{\cosh t}$، کدام گزینه درست است؟ $(x \ge \circ)$ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۷)

۱) $g(x) = tg^{-۱}(\sinh x)$
۲) $g(x) = tg^{-۱}(e^{x})$
۳) $g(x) = Ln(tgx)$
۴) $g(x) = tgh^{-۱}(e^{x})$

پاسخ: گزینه «۱» به جای x صفر قرار می‌دیم، اونوقت چون حد بالا و پایین انتگرال یکسان هست، $g(\circ) = \circ$ می‌شه. حالا تو گزینه‌هـا بـه جـای x، عدد صفر رو قرار می‌دیم هر کدوم صفر شد، جوابه! فقط گزینه (۱) چنین شرایطی رو داره