



سؤالات آزمون سراسری ۸۰

ریاضی

۱- دامنه تابع $f(x) = -\frac{2x}{\sqrt{|x|-x}}$ کدام است؟
 (۱) $IR = \emptyset$ (۲) $IR < 0$ (۳) $IR > 0$ (۴) $IR - \{0\}$

۲- دامنه تابع $f(x) = \ln(1-x)$ کدام است؟
 (۱) $(-\infty, -1)$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(-1, +\infty)$ (۴) $(1, +\infty)$

۳- در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
 (۱) در همه جا مشتق پذیر است.
 (۲) در همه جا پیوسته است ولی در صفر مشتق پذیر نیست.

(۲) در صفر پیوسته نیست.
 (۴) در صفر مشتق پذیر و $f'(0) = 1$ است.

۴- معکوس تابع $y = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ کدام است؟

(۱) $y = \frac{e^x + 2}{e^x - 2}$ (۲) $y = \frac{2e^x - 1}{2e^x + 1}$ (۳) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ (۴) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

۵- شیب خط مماس بر منحنی $x^2 + y^2 + 2x = C$ در نقطه $(0, 1)$ کدام است؟
 (۱) -2 (۲) -1 (۳) $+1$ (۴) $+2$

۶- تابع $f(x) = x^2 - 2x^2 + x + 1$ در $x = 1$ کدام حالت را دارد؟
 (۱) ماکزیمم نسبی (۲) مشتق (۳) می نیمم نسبی (۴) نقطه عطف

۷- حد تابع $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 2}$ وقتی $x \rightarrow \infty$ کدام است؟
 (۱) -4 (۲) صفر (۳) 2 (۴) $+\infty$

۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{\sin(x^2 + x - 2)}{\tan(x^2 + 5x + 6)}$ کدام است؟

(۱) -3 (۲) صفر (۳) 1 (۴) $\frac{1}{5}$

۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+5}\right)^{2x-3}$ کدام است؟

(۱) e^{-6} (۲) e^{p-3} (۳) e^2 (۴) e^6

۱۰- مشتق $e^{\sin x}$ در $x = 0$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) 1 (۳) $\frac{1}{e}$ (۴) e

۱۱- اگر $f(2x) = 6x + \sin(f(x))$ و $f(0) = 0$ باشد، آنگاه $f'(0)$ کدام است؟
 (۱) -6 (۲) -3 (۳) 3 (۴) 6

۱۲- مشتق چهارم تابع $y = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 5x - 1$ کدام است؟

(۱) -1 (۲) صفر (۳) 6 (۴) $4x^2 + 12x$

۱۳- حاصل $I = \int \sin^2 2x dx$ کدام است؟

(۱) $2x - 12 \sin 6x + c$ (۲) $-\frac{1}{6} \sin 6x + c$ (۳) $-\frac{1}{6} \cos 3x \sin 3x + c$ (۴) $\frac{1}{2} x - \frac{1}{12} \sin 6x + c$



۱۴- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{\pi}{8}$ (۴) $\frac{\pi}{3}$

۱۵- مقدار انتگرال $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۲

۱۶- حاصل انتگرال $\int_{-1}^1 \int_0^1 xe^y dy dx$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) e (۳) e - ۱ (۴) ۲(e-۱)

۱۷- حاصل انتگرال $\int_0^2 \int_{\frac{xy}{2}}^2 (x^2 + 2y^2) dx dy$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{20}{7}$ (۳) $\frac{29}{7}$ (۴) $\frac{25}{2}$

۱۸- حاصل انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{16}$ (۲) $\frac{\pi}{8}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۹- حاصل $\sin^{-1}(\cos \frac{\pi}{3})$ در برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{3}$ (۴) $\frac{\pi}{6}$

۲۰- دیفرانسیل تابع $y = \tan^{-1} x$ به ازای $x = \sqrt{3}$ و $dx = 0/1$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{40}$ (۲) $-\frac{1}{30}$ (۳) $\frac{1}{30}$ (۴) $\frac{1}{40}$

۲۱- به ازای کدام مقدار m، دو بردار $\vec{A} = 2\vec{i} + m\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{B} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ بر هم عمودند؟

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) ۵

۲۲- وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

۲۳- برد تابع $g(x) = x^2 + 4x + 5$ کدام است؟

- (۱) R (۲) $(0, \infty)$ (۳) $[1, \infty)$ (۴) هیچکدام

۲۴- جواب نامعادله $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 2x + 5} < 0$ کدام است؟

- (۱) $x < 6$ (۲) $x > -2$ (۳) $4 < x < 5$ (۴) $-1 < x < 4$

۲۵- بسط $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ مربوط به کدام تابع است؟

- (۱) $\sin x$ (۲) $\cos x$ (۳) $\tan x$ (۴) e^{-x}

۲۶- در قضیه لاگرانژ عدد C برای تابع $f(x) = 3x^2 - 5$ روی بازه $[-2, 0]$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) +۱ (۴) درقضیه لاگرانژ صدق نمی‌کند.



۲۷- تبدیل لاپلاس $f(x) = e^{bx}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{b}$ (۲) $\frac{1}{s-b}$ (۳) $\frac{1}{s+b}$ (۴) $\frac{a}{s^2+b^2}$

۲۸- حاصل انتگرال $\int \int_D y \, dx \, dy$ که در آن D ناحیه محدود به محور x ها و نیم‌دایره $y = \sqrt{4-x^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{3}$ (۲) $\frac{16}{3}$ (۳) $\frac{20}{3}$ (۴) $\frac{22}{3}$

۲۹- مساحت ناحیه محصور بین نمودارهای $y = |x| + |x-1|$ و $y = x+1$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۰- حجم محدود به رویه $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ و صفحات مختصات کدام است؟ $a > 0, b > 0, c > 0$

- (۱) $\frac{abc}{2}$ (۲) $\frac{abc}{4}$ (۳) $\frac{abc}{6}$ (۴) $\frac{abc}{6b}$

استاتیک و مقاومت مصالح

$$\vec{A} = \vec{i} + x\vec{j} + 4\vec{k} \quad \text{و} \quad \vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

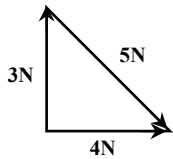
- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۳۱- مقدار x چقدر باشد تا بردار \vec{A} بر بردار \vec{B} عمود شود؟

۳۲- نیروی $\sqrt{300}$ نیوتن با افق زاویه 60° می‌سازد، مؤلفه‌های افقی و عمودی آن به ترتیب چند نیوتن است؟

- (۱) ۱۰ و ۰ (۲) $5\sqrt{3}$ و ۱۵ (۳) ۱۰ و $5\sqrt{3}$ (۴) $5\sqrt{3}$ و ۱۰

۳۳- در شکل زیر برآیند نیروها چند نیوتن است؟

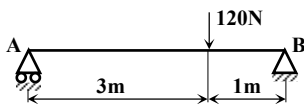


- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۷

۳۴- برآیند سه نیروی ۱۰ نیوتنی و ۵ نیوتنی و F که بر یک نقطه مادی اثر می‌کند، صفر می‌باشد. اگر زاویه بین دو نیروی ۱۰ و ۵ نیوتنی صفر باشد نیروی F چند نیوتن است؟

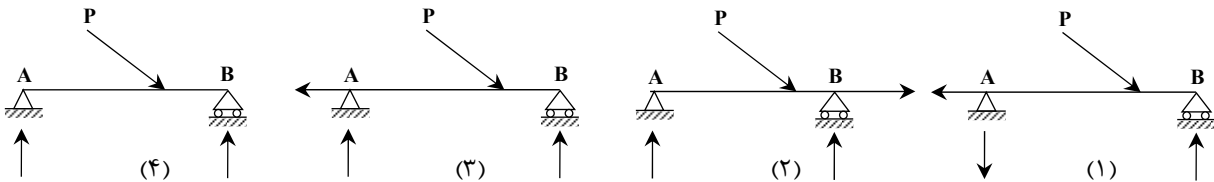
- (۱) -۱۵ (۲) ۵ (۳) $5\sqrt{5}$ (۴) ۱۵

۳۵- در شکل روبرو عکس العمل تکیه‌گاههای A و B چند نیوتن است؟

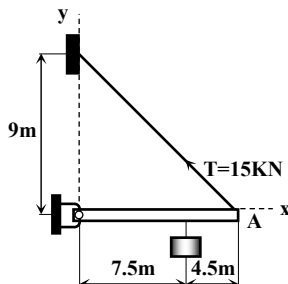


- (۱) ۲۰ و ۱۰۰ (۲) ۳۰ و ۹۰ (۳) ۵۰ و ۷۰ (۴) ۶۰ و ۶۰

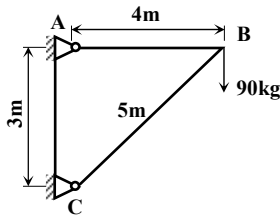
۳۶- عکس‌العمل تکیه‌گاههای A و B در کدامیک از اشکال ذیل صحیح می‌باشد؟



۳۷- در شکل زیر مؤلفه‌های افقی و عمودی نیروی کشش کابل $T = 15\text{KN}$ چند کیلونیوتن است؟

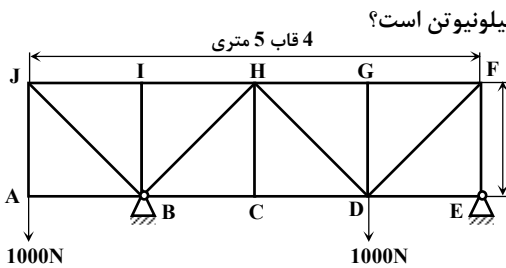


- (۱) $T_x = 12$ و $T_y = 4/5$
(۲) $T_x = 9$ و $T_y = 12$
(۳) $T_x = -12$ و $T_y = 9$
(۴) $T_x = 6$ و $T_y = 3$



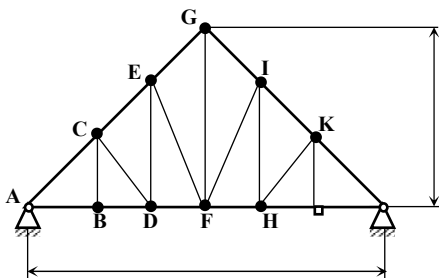
۳۸- در شکل روبرو اندازه نیروی وارد بر میله BC چند کیلوگرم نیرو است؟

- ۵۰ (۱)
- ۸۰ (۲)
- ۱۲۰ (۳)
- ۱۵۰ (۴)



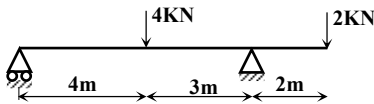
۳۹- در خریای نشان داده شده شکل روبرو اندازه نیروی داخلی عضو GD چند کیلونیوتن است؟

- صفر (۱)
- ۶/۷ (۲)
- ۱۲ (۳)
- ۴۷/۱ (۴)

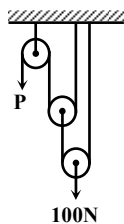
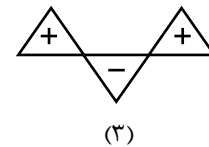
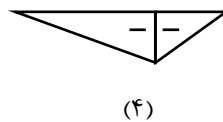
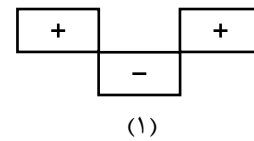
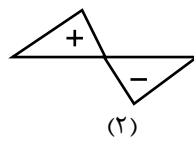


۴۰- در شکل روبرو نیروی داخلی در عضو FH چند کیلونیوتن و از کدام نوع است؟

- ۴ و کششی (۱)
- ۴ و فشاری (۲)
- ۵ و فشاری (۳)
- ۵ و کششی (۴)



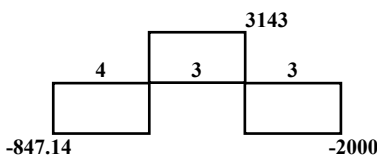
۴۱- دیاگرام صحیح گشتاور خمشی تیر بار گذاری شده شکل روبرو کدام است؟



۴۲- در شکل زیر اندازه نیروی P چند نیوتن است؟ از اصطکاک قرقره صرف‌نظر شود.

- ۲۵ (۱)
- ۵۰ (۲)
- ۱۰۰ (۳)
- ۲۰۰ (۴)

۴۳- دیاگرام نیروی برشی یک تیر مطابق شکل زیر است، مقدار لنگر خمشی ماکزیمم آن چند نیوتن متر است؟



- ۱۲۰۰۰ (۱)
- ۹۴۲۹ (۲)
- ۶۰۰۰ (۳)
- ۳۴۲۸/۵ (۴)

۴۴- گشتاور استاتیکی سطح نسبت به محور x ها کدام است؟

(۴) $\int y^2 dA$

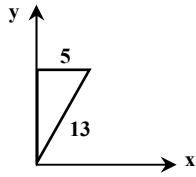
(۳) $\int x^2 dA$

(۲) $\bar{y}A$

(۱) $\bar{x}A$



۴۵- مقدار \bar{x} مرکز طول میله خمیده شکل روبرو کدام است؟



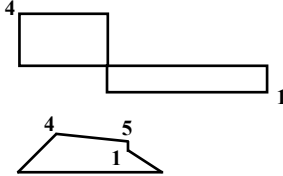
(۱) $\bar{x} = 1/5$

(۲) $\bar{x} = 2/33$

(۳) $\bar{x} = 2/5$

(۴) $\bar{x} = 2/66$

۴۶- نمودار نیروی برشی و ممان خمشی تیری مطابق شکل زیر است. مقدار بار متمرکز و ممان متمرکز در این تیر به ترتیب کدام است؟



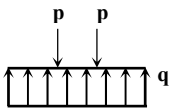
(۱) ۱ و ۱

(۲) ۱ و ۴

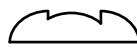
(۳) ۳ و ۴

(۴) ۲ و ۵

۴۷- شمای کلی نمودار ممان خمشی تیری با بارگذاری مطابق شکل، کدام است؟



(۴)



(۳)

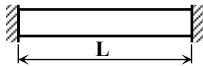


(۲)



(۱)

۴۸- میله‌ای منشوری با سطح مقطع A و طول L و مدول الاستیسیته (ارتجاعی) E و ضریب انبساط حرارتی α مطابق شکل زیر مفروض است. اگر میله را به اندازه Δt حرارت دهیم، تنش برشی ماکزیمم در میله چقدر خواهد بود؟



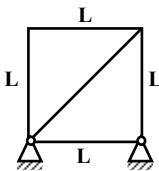
(۲) $\frac{1}{2} E\alpha\Delta t A$

(۱) $E\alpha\Delta t$

(۴) صفر

(۳) $\frac{1}{2} E\alpha\Delta t$

۴۹- در صورتیکه فقط چهار عضو بیرونی خریای شکل زیر را به اندازه Δt حرارت بدهیم، تنش حاصله در عضو قطری چقدر خواهد بود؟ (A و α و E برای کلیه اعضا مساوی می‌باشد)



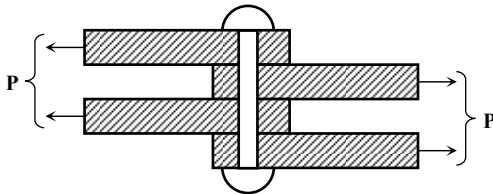
(۲) $\sqrt{2}EA\alpha\Delta t$

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{-2} E\alpha\Delta t$

(۴) صفر

(۳) $\sqrt{2}E\alpha\Delta t$

۵۰- تعداد پرچ لازم به قطر ۲۰ میلی‌متر در اتصال شکل زیر برای حالتی که فقط مقاومت برشی مدنظر باشد کدام است؟ ضخامت ورقها ۱۰ میلی‌متر و نیروی کششی $P = 20000 \text{ kg}$ و تنش مجاز برشی $1400 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ می‌باشد.



(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۵۱- در شکل سؤال ۵۰، اگر اتصال مورد نظر فقط طراحی براساس مقاومت لهدگی ورقها و پرچها مدنظر باشد، تعداد پرچهای لازم چقدر خواهد بود؟ (تنش مجاز فشاری ۳۰۰۰ کیلوگرم بر سانتیمتر مربع می‌باشد).

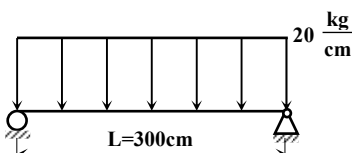
(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۵۲- اگر ممان ماکزیمم در تیر شکل زیر $\frac{1^2}{8} q$ و تنش نهائی مصالح تیر ۵۰۰۰ کیلوگرم بر سانتیمتر مربع و ضریب اطمینان ۳/۳ باشد. مدول



(اساس) مقطع تیر کدام است؟

(۱) ۱۴۸/۵

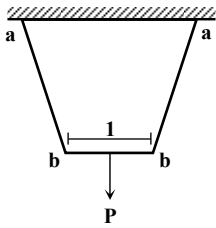
(۲) ۵۱۵/۵

(۳) ۱۱۸۸/۱

(۴) ۱۵۱۵



۵۳- مخروط ناقص بی‌وزن مطابق شکل زیر تحت اثر نیروی p قرار دارد. مقدار تنش نرمال مینیمم در این مخروط کدام است؟



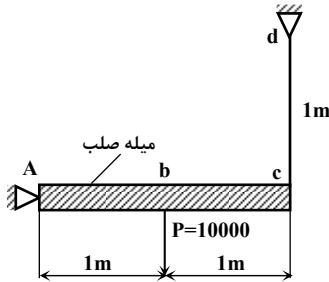
(۲) $\frac{p}{2\pi}$

(۱) $\frac{p}{4\pi}$

(۴) $\frac{4p}{\pi}$

(۳) $\frac{p}{\pi}$

۵۴- در سیستم شکل زیر اگر سطح مقطع میله cd برابر ۱ سانتیمتر مربع و $E = 2/0 \times 10^6$ کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع باشد، مقدار تغییر مکان در نقطه b چند سانتی‌متر است؟



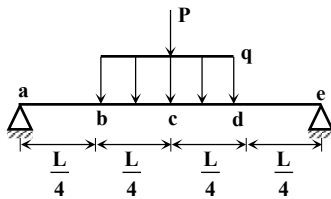
(۱) ۰/۱۰۰

(۲) ۰/۱۲۵

(۳) ۰/۲۵

(۴) ۰/۵۰۰

۵۵- مقدار شیب و خیز ماکزیمم و مینیمم در تیر مقابل به ترتیب در کدام نقطه اتفاق می‌افتد؟



(۱) b, c, c, e

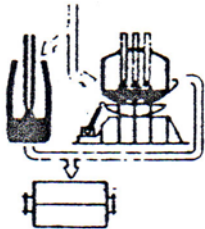
(۲) a, e, c, a

(۳) e, a, c, a

(۴) a, c, c, a

علم مواد

۵۶- در شکل روبرو آهن خام به کدام فرآورده تبدیل می‌شود؟



(۱) چدن سخت

(۲) چدن قیچی

(۳) فولاد خوش‌تراش

(۴) فولاد ریخته‌گی

۵۷- ازدیاد کربن در آلیاژ آهن و کربن باعث کدام تغییر در آلیاژ می‌شود؟

- (۲) افزایش قابلیت چکش‌خواری، افزایش قابلیت آبکاری
- (۴) کاهش نقطه ذوب، افزایش استحکام

- (۱) کاهش قابلیت چکش‌خواری
- (۳) کاهش قابلیت ریخته‌گری، کاهش قابلیت آبکاری

۵۸- کدام عنصر باعث می‌شود که کربن در آهن خام به صورت گرافیت لایه‌ای درآید؟

- (۱) سیلیسیم
- (۲) فسفر
- (۳) گوگرد
- (۴) منگنز

۵۹- درصد کربن موجود در فولاد X15Cr Ni 25 20 کدام است؟

- (۱) ۰/۱۵
- (۲) ۰/۲۵
- (۳) ۱/۵
- (۴) ۲

۶۰- قابلیت هدایت حرارتی کدام چدن بیشتر است؟

- (۱) خاکستری
- (۲) داکتیل
- (۳) سفید
- (۴) مالیبل

۶۱- کدام عنصر در مس خاصیت هدایت الکتریکی را به شدت کاهش می‌دهد؟

- (۱) آهن
- (۲) کادمیم
- (۳) روی
- (۴) نقره

۶۲- آزمایش مافوق صوت برای تشخیص کدام مورد انجام می‌شود؟

- (۱) تعیین عمق سختی
- (۲) درصد عناصر تشکیل‌دهنده آلیاژ
- (۳) محل حفره، مک یا ترک
- (۴) نظم دادن به اتم‌های فلز



پاسخنامه آزمون سراسری ۸۰

ریاضی

۱- گزینه «۲» ملاحظه می‌گردد که به ازای اعداد منفی نامساوی برقرار است: $|x| - x > 0 \Rightarrow |x| > x$

۲- گزینه «۲» $f(x) = \ln(1-x) \Rightarrow 1-x > 0 \rightarrow x < 1$

۳- گزینه «۱» تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^n \sin^m \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ به ازای تمام مقادیر m در صورتی که $n \geq 2$ باشد، در تمام نقاط مشتق پذیر است.

۴- گزینه «۳» $y = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = e^y \Rightarrow x+1 = xe^y - e^y \Rightarrow x(e^y - e^{-y}) = 1 + e^y$

$$x = \frac{1+e^y}{e^y-1} \xrightarrow{\text{نقش } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم}} y = \frac{1+e^x}{e^x-1}$$

۵- گزینه «۲» $y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x+2}{2y} \Rightarrow m = y'(0,1) = -1$

۶- گزینه «۳» $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$ مجموع ضرایب صفر است $\rightarrow x = \frac{1}{3}, x = 1$

$$f''(x) = 6x - 4 \Rightarrow f''(1) = 6 \times 1 - 4 = 2$$

چون $f''(1) > 0$ می‌باشد، لذا بنابر قضیه آزمون دوم مشتق نقطه $x = 1$ طول نقطه می‌نیمم نسبی تابع است.

۷- گزینه «۴» $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$

۸- گزینه «۱» $A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x^2 + x - 2)}{\operatorname{tg}(x^2 + 5x + 6)} = \frac{\sin(0)}{\operatorname{tg}(0)} = \frac{0}{0}$ استفاده از هم‌ارزی \rightarrow

$$A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} \xrightarrow{\text{Hop}} A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+1}{2x+5} = \frac{2 \times -2 + 1}{2 \times -2 + 5} = \frac{-3}{1} = -3$$

۹- گزینه «۱» $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+5}\right)^{2x-3} = (1)^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)(2x-3)}{x+5}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2-x-5)(2x-3)}{x+5}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x+9}{x+5}} = e^{-6}$

۱۰- گزینه «۲» $y = e^u \Rightarrow y' = u'e^u$, $y = e^{\sin x} \Rightarrow y' = \cos x e^{\sin x} \Rightarrow y'(0) = e^0 = 1$

۱۱- گزینه «۴» $f(2x) = 6x + \sin(f(x))$ از طرفین مشتق می‌گیریم $\rightarrow 2f'(2x) = 6 + f'(x) \cos(f(x))$

$$\Rightarrow 2f'(0) = 6 + f'(0) \cos(f(0)) \xrightarrow{f(0)=0} f'(0) = 6$$

۱۲- گزینه «۳» $y = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 5x - 1$



بعد از چهار بار مشتق گرفتن جمله‌های دوم و بعد از آن همگی صفر خواهند شد، پس کفایت مشتق جمله اول را محاسبه کنیم:

$$y' = \frac{4x^3}{4} = x^3 \Rightarrow y'' = 3x^2 \Rightarrow y^{(3)} = 6x \Rightarrow y^{(4)} = 6$$

$$\int \sin^2 3x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 6x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int 1 dx - \frac{1}{2} \int \cos 6x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \sin 6x \right) + c = \frac{x}{2} - \frac{1}{12} \sin 6x + c \quad \text{«۱۳- گزینه «۴»}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1 + \sin^2 x} \Rightarrow \sin x = u \Rightarrow \begin{cases} \cos x dx = du \\ x=0 \rightarrow u=0, x=\frac{\pi}{2} \rightarrow u=1 \end{cases} \quad \text{«۱۴- گزینه «۱»}$$

$$\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = [\text{Arc tgu}]_0^1 = \text{Arc tg}(1) - \text{Arc tg}(0) = \frac{\pi}{4}$$

«۱۵- گزینه «۲» مشتق زیر رادیکال $(1-x^2)$ خارج رادیکال موجود می‌باشد لذا داریم:

$$1-x^2 = u \Rightarrow -2x dx = du \Rightarrow x dx = -\frac{du}{2}, \begin{cases} x=0 \rightarrow u=1 \\ x=1 \rightarrow u=0 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx = \frac{-1}{2} \int_1^0 \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$I = \int_{-1}^1 \int_0^1 x e^y dy dx = \int_{-1}^1 [x e^y]_0^1 dx = \int_{-1}^1 (e-1)x dx = \left[(e-1) \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0 \quad \text{«۱۶- گزینه «۱»}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{\frac{ry}{2}}^{\frac{r}{2}} [(x^2 + 2y^2) dx] dy &= \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} + 2xy^2 \right]_{\frac{ry}{2}}^{\frac{r}{2}} dy = \int_0^2 \left[(9+6y^2) - \left(\frac{9y^3}{8} + 2 \times \frac{ry}{2} \times y^2 \right) \right] dy \\ &= \int_0^2 \left[9+6y^2 - \frac{9}{8}y^3 - 2y^3 \right] dy = \left[9y + 2y^3 - \frac{9}{32}y^4 - \frac{2y^4}{4} \right]_0^2 = 9 \times 2 + 2 \times 2^3 - \frac{9}{32} \times 2^4 - \frac{2 \times 2^4}{4} \\ &= 34 - \frac{9}{2} - 12 = \frac{68-9-24}{2} = \frac{35}{2} \end{aligned} \quad \text{«۱۷- گزینه «۴»}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2 + 2^2} = \left[\frac{1}{2} \text{Arctg} \left(\frac{x+1}{2} \right) \right]_1^{+\infty} \\ &= \left[\frac{1}{2} \text{Lim}_{b \rightarrow \infty} \text{Arctg} \frac{x+1}{2} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2} \text{Arctg} \infty - \frac{1}{2} \text{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8} \end{aligned} \quad \text{«۱۸- گزینه «۲»}$$

$$\text{Arcsin} \left(\cos \frac{\pi}{3} \right) = \text{Arcsin} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{6} \quad \text{«۱۹- گزینه «۴»}$$

$$y = \text{Arc tg } x \Rightarrow dy = \frac{1}{1+x^2} dx \Rightarrow dy = \frac{1}{1+(\sqrt{3})^2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{40} \quad \text{«۲۰- گزینه «۴»}$$

$$(2 \times 4) + (m)(-2) + 1(-2) = 0 \Rightarrow \boxed{m = 3} \quad \text{«۲۱- گزینه «۲»}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5 \times 1 - 2 \times 3} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{«۲۲- گزینه «۱»}$$



۲۳- گزینه «۳» در این مثال $\begin{cases} \Delta = -4 \\ a = 1 \end{cases}$ و با توجه به فرمول برد تابع $\left[-\frac{4}{4}, \infty\right)$ یا $[1, \infty)$ می باشد.

۲۴- گزینه «۴» توجه شود عبارت درجه دوم مخرج کسر به دلیل اینکه ضریب x^2 مثبت و $\Delta < 0$ است همواره عبارتی مثبت است، پس علامت کسر را صورت کسر تعیین می کند.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

۲۵- گزینه «۴»

$$\begin{cases} f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{-5 - 7}{2} = -6 & (1) \\ f(x) = 3x^2 - 5 \Rightarrow f'(x) = 6x \Rightarrow f'(c) = 6c & (2) \end{cases}$$

۲۶- گزینه «۱»

۲۷- گزینه «۲»

$$I = \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y \, dy \, dx = \int_{-2}^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_{-2}^2 \frac{4-x^2}{2} dx = \left[\frac{1}{2} \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \right]_{-2}^2 = \frac{16}{3}$$

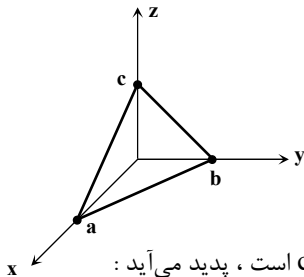
۲۸- گزینه «۲»

۲۹- گزینه «۱» ابتدا باید علامت قدرمطلق را برداریم تا محاسبات به راحتی صورت گیرد.

$$\begin{cases} 0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 1 \\ 1 \leq x < 2 \Rightarrow y = 2x - 1, y = x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 = \int_0^1 [(x+1) - 1] dx = \frac{1}{2} \\ S_2 = \int_1^2 [(x+1) - (2x-1)] dx = \int_1^2 (2-x) dx = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow S = S_1 + S_2 = 1$$

۳۰- گزینه «۳» بهتر است شکل را ترسیم کنیم:



$$x = 0, y = 0 \Rightarrow z = c$$

$$x = 0, z = 0 \Rightarrow y = b$$

$$y = 0, z = 0 \Rightarrow x = a$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad \text{و} \quad y = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1 \quad \text{و} \quad z = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

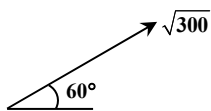
با رسم معادله خطوط ملاحظه می گردد که شکل یک منشور که قاعده آن مثلثی به مساحت $\frac{ab}{2}$ و ارتفاع آن c است، پدید می آید:

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{مساحت قاعده منشور}) \times \text{ارتفاع منشور} = \frac{1}{3} \times \frac{ab}{2} \times c = \frac{abc}{6}$$

استاتیک و مقاومت مصالح

۳۱- گزینه «۴» شرط تعادل دو بردار A و B این است که: $A \cdot B = 0$. $x = 2$. $2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.

۳۲- گزینه «۲»



$$\begin{cases} f_x = F \cos 60^\circ = \sqrt{300} \times 0.5 = 5\sqrt{3} \\ f_y = \sqrt{300} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15 \end{cases}$$



سؤالات آزمون آزاد ۸۴

ریاضی

۱- برد تابع $y = \sqrt{x - [x]}$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $[0, 1)$ (۲) Z (۳) R (۴) $[0, \infty)$

۲- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۲

۳- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)[x] & (x < 4) \\ a(x-1) + 9 & (x \geq 4) \end{cases}$ در نقطه $x = 4$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۷ (۴) ۱۲

۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه درایه واقع در سطر دوم و ستون اول معکوس ماتریس A کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) -۱

۵- در معادله مختلط $|z| - z = 1 + 2i$ ، عدد z کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2} - 2i$ (۲) $2 + \frac{3}{2}i$ (۳) $-2 + \frac{3}{2}i$ (۴) $\frac{3}{2} + 2i$

۶- ریشه معادله $|\sin x| = \sin x + 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $-\frac{\pi}{3}$ (۴) $\frac{7\pi}{6}$

۷- مشتق تابع $y = \ln(\ln x)$ در نقطه $x = e$ کدام است؟

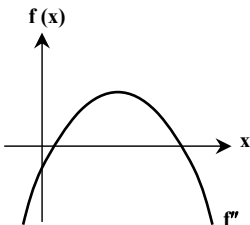
- (۱) e (۲) e^2 (۳) $\frac{1}{e}$ (۴) ۱

۸- در تابع $y = \sqrt{x}$ در نقطه $x = 4$ نمودی به اندازه $\Delta x = 0.4$ به متغیر می‌دهیم. مقدار $dy - \Delta y$ کدام است؟

- (۱) 0.025 (۲) 0.025 (۳) 0.25 (۴) 2.5

۹- اگر شکل زیر نمودار تابع $f''(x)$ باشد آنگاه تعداد نقاط عطف تابع $f(x)$ چندتا است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴



- (۱) $\rho = 2 \sin \theta$ (۲) $\rho = \cos \theta$ (۳) $\rho = 2 \cos \theta$ (۴) $\rho = \sin \theta$

۱۰- معادله دایره $x^2 + y^2 - 2x = 0$ در مختصات قطبی کدام است؟

۱۱- زاویه بین دو بردار $\vec{V}_1(2, 2, 0)$ و $\vec{V}_2(-1, 0, 1)$ برابر است با:

- (۱) 90° (۲) -45° (۳) 75° (۴) 135°

۱۲- اگر $f(x) = (2x-1)\sqrt{x+3}$ ، آنگاه حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

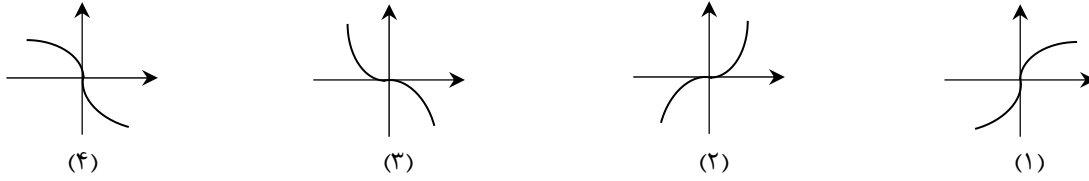
- (۱) $\frac{15}{4}$ (۲) $\frac{17}{4}$ (۳) $\frac{13}{4}$ (۴) $\frac{11}{4}$



۱۳- ماکزیمم مقدار تابع $y = -x^6 + 3x^2 - 2$ روی بازه $[0, \sqrt{3}]$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۱۴- اگر $f(x) = x^2 + x$ باشد، نمودار تابع $f^{-1}(x)$ به کدام صورت است؟



۱۵- اگر $f(x) = x^2 - 3x - 4$ و $g(x) = x^2 + 2$ ، آنگاه معادله $\text{fog}(x) = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۳

۱۶- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ کدام است؟

- (۱) e (۲) e^2 (۳) ∞ (۴) ۱

۱۷- جمله چهارم بسط تیلور تابع $y = x^5$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $10(x-1)^3$ (۲) $10(x+1)^3$ (۳) $20(x-1)^3$ (۴) $20(x+1)^3$

۱۸- اگر $U = x^4 - 2x^3 + 5x^2$ و $V = x^2 - 3x + 5$ و U' و V' مشتقات U و V نسبت به x باشند آنگاه حاصل $\frac{U'V - V'U}{V^2}$

کدام است؟

- (۱) $2x + 3$ (۲) $x^2 + 3$ (۳) $2x$ (۴) $2x + 3$

۱۹- مقدار $\int -\frac{1}{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx$ به ازای $x = 2$ و $c = 0$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ (۴) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

۲۰- حاصل $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\text{Ln}x)^5}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\text{Ln}^4 2}{4}$ (۲) $\frac{1}{4 \text{Ln}^4 2}$ (۳) $4 \text{Ln}^4 2$ (۴) $\frac{4}{\text{Ln}^4 2}$

۲۱- کدامیک از دنباله‌های زیر همگراست، اما یکنوا نیست؟

- (۱) $\left\{ -2 - \frac{1}{n} \right\}$ (۲) $\left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\}$ (۳) $\left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\}$ (۴) $\{ n + (-1)^n \}$

۲۲- کدامیک از سریهای زیر همگراست؟

- (۱) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[k]{k+9}}{\sqrt[k]{k}}$ (۲) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{3k}$ (۳) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1^k}{3^{2k+3}}$ (۴) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k} \right)$

۲۳- اگر خط مجانب مایل تابع $y = \frac{x^2 + ax + 1}{x}$ از نقطه $A(1, -1)$ بگذرد، a کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۲

۲۴- حاصل سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3}{(k+1)^2(k+2)^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱



۲۵- حجم حادث از دوران سطح محصور بین نمودار تابع $y = \frac{1}{\cos x}$ و خطوط $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = -\frac{\pi}{4}$ حول محور x ها کدام است؟

- (۱) 2π (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) π

۲۶- به ازای کدام مقدار c تابع $f(x) = x^2 + 2x - 3$ بر بازه $[-3, 1]$ در شرط قضیه رول صدق می‌کند؟

- (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) صفر

۲۷- مشتق تابع $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{tdt}{1+t^3}$ به ازای $x = \sqrt[3]{2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{5}$

$(a - 4)xydx + (x^2 + \cos y)dy = 0$

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۲ (۴) ۴

۲۸- به ازای چه مقدار a معادله دیفرانسیل روبرو کامل می‌شود؟

۲۹- جواب معادله دیفرانسیل $(x^2 + 1)y' + y^2 + 1 = 0$ کدام است؟

- (۱) $Arctgy + Arctgx = c$ (۲) $y = Arctg(x + c)$ (۳) $tgx + tgy = c$ (۴) $y = tg(x + c)$

۳۰- مقدار $\int_0^1 \int_{-1}^x xydydx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{16}$ (۳) $-\frac{1}{8}$ (۴) $-\frac{1}{16}$

استاتیک و مقاومت مصالح

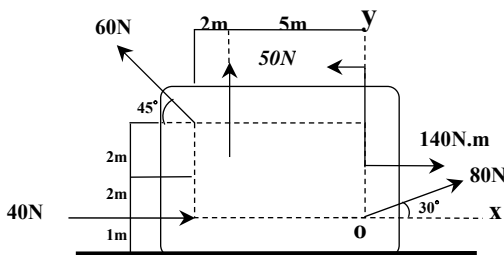
۳۱- عبارت «هرگاه نیرویی به یک ذره وارد نشود و یا برآیند نیروهای وارد بر آن صفر شود، ذره در حالت سکون باقی و یا به حرکت خود در خط مستقیم و با سرعت ثابت ادامه می‌دهد»، تعریف کدام یک از گزینه‌های ذیل است؟

- (۱) قانون اول نیوتن (۲) قانون دوم نیوتن (۳) قانون سوم نیوتن (۴) قانون جاذبه

۳۲- سه بردار $\vec{V}_1 = 3\hat{i} - \hat{k}$ ، $\vec{V}_2 = -2\hat{j} + \hat{k}$ و $\vec{V}_3 = -3\hat{i} + 2\hat{j}$ را در نظر می‌گیریم، حاصل $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2 - \vec{V}_3)$ کدامیک از گزینه‌های ذیل می‌باشد؟

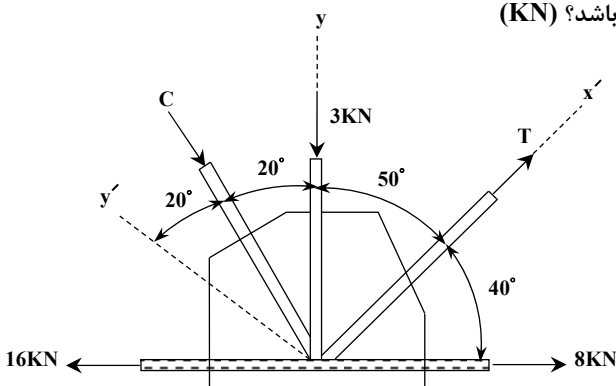
- (۱) صفر (۲) $6\hat{i} - 4\hat{j}$ (۳) \hat{k} (۴) $6\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$

۳۳- اندازه نیروی \vec{R} برآیند چهار نیرو و کوپل شکل زیر کدامیک از گزینه‌های ذیل می‌باشد؟ (N)



- (۱) $122/2$ (۲) $115/5$ (۳) $148/3$ (۴) $131/5$

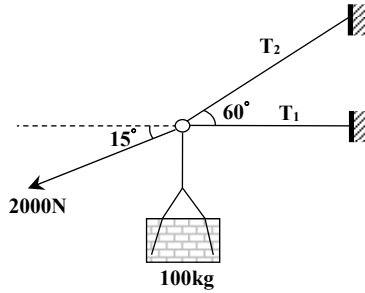
۳۴- در شکل زیر مقدار نیروهای \vec{T} و \vec{C} کدامیک از گزینه‌های ذیل می‌باشد؟ (KN)



- (۱) $T=8/5$ و $C=4/25$ (۲) $T=8/2$ و $C=4/75$ (۳) $T=7/9$ و $C=5/25$ (۴) $T=9/09$ و $C=3/03$



۳۵- در شکل زیر T_1 و T_2 کدامیک از گزینه‌های ذیل می‌باشند؟ (N)



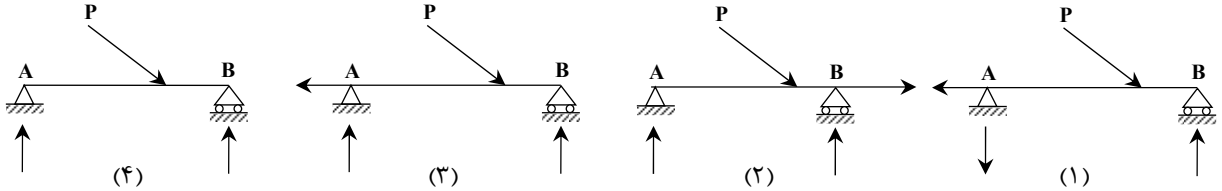
$$T_1 = 950 \text{ و } T_2 = 1530 \text{ (۱)}$$

$$T_1 = 1067 \text{ و } T_2 = 1730 \text{ (۲)}$$

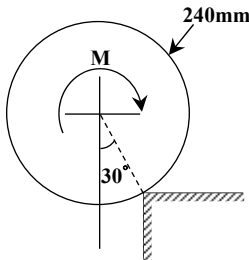
$$T_1 = 900 \text{ و } T_2 = 1330 \text{ (۳)}$$

$$T_1 = 980 \text{ و } T_2 = 1550 \text{ (۴)}$$

۳۶- عکس‌العمل تکیه‌گاه‌های A و B در کدامیک از اشکال ذیل صحیح می‌باشد؟



۳۷- در شکل زیر مقدار گشتاور لازم (M) برای بالابردن غلتکی به جرم m از پله کدامیک از گزینه‌های ذیل می‌باشد. (mg).



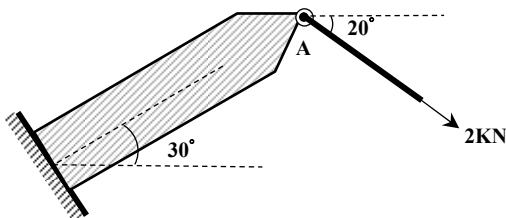
$$120 \text{ (۱)}$$

$$240 \text{ (۲)}$$

$$180 \text{ (۳)}$$

$$160 \text{ (۴)}$$

۳۸- در شکل زیر لازمست اثر کشش ۲KN در کابل بر برش، کشش و خمش تیر I ثابت تعیین شود. اگر این نیرو را با معادل آن که دو نیرو در نقطه A است، (F_t موازی تیر، F_n عمود بر تیر) جایگزین شود، کدامیک از گزینه‌های ذیل صحیح است؟ (KN)



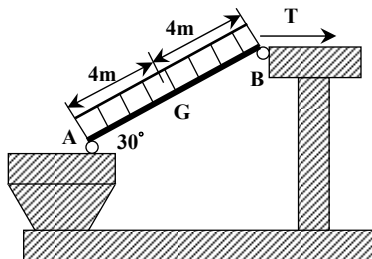
$$F_t = 1/782 \text{ و } F_n = 2/7 \text{ (۱)}$$

$$F_t = 1/65 \text{ و } F_n = 2/3 \text{ (۲)}$$

$$F_t = 1/95 \text{ و } F_n = 2/1 \text{ (۳)}$$

$$F_t = 1/286 \text{ و } F_n = 1/532 \text{ (۴)}$$

۳۹- گذرگاهی از موج شکن تا پل شناور که توسط دو غلتک مطابق شکل نگاه‌داری می‌شود را برای تحمل بالا و پائین رفتن‌های موج ساخته‌اند، اگر مرکز جرم گذرگاه ۳۰۰ کیلوگرمی در G باشد، نیروی زیر غلتک A کدامیک از گزینه‌های ذیل است؟ (N)



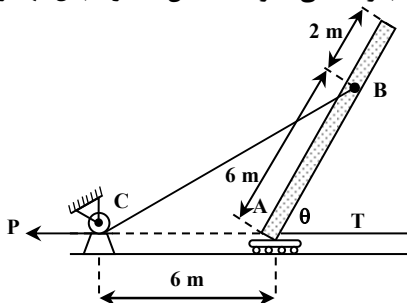
$$1357 \text{ (۱)}$$

$$1358 \text{ (۲)}$$

$$1472 \text{ (۳)}$$

$$1402 \text{ (۴)}$$

۴۰- دال بتنی به جرم ۲۵ mg و آرام با کشش P در کابل بالابر تا وضعیت عمودی بالا برده می‌شود. کشش T در کابل مهار افقی بر حسب (KN) کدامیک از گزینه‌های ذیل می‌باشد؟



$$135/6 \text{ (۱)}$$

$$141/6 \text{ (۲)}$$

$$138/5 \text{ (۳)}$$

$$129/7 \text{ (۴)}$$



پاسخنامه آزمون آزاد ۸۴

ریاضی

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x - [x]} < 1$$

۱- گزینه «۱»

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})}$$

۲- گزینه «۳»

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})} \approx \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2(1 + \sqrt{\cos x})} = \frac{1}{4}$$

۳- گزینه «۴»

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} [a(x-1) + 9] = 3a + 9 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} (x^2 - 1)[x] = 15 \times 3 = 45 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3a + 9 = 45 \Rightarrow a = 12$$

۴- گزینه «۲» توجه شود درایه سطر دوم و ستون اول در ماتریس معکوس در واقع درایه سطر اول و ستون دوم ماتریس اصلی است.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times 1 + (-1) \times 1 \times 4 = -2$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow a_{21} = \frac{\Delta_{12}}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\begin{cases} z = x + iy \\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - (x + iy) = 1 + 2i \Rightarrow (\sqrt{x^2 + y^2} - x) + (-y)i = 1 + 2i$$

۵- گزینه «۱»

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - x = 1 \\ -y = 2 \rightarrow \boxed{y = -2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\xrightarrow{(1)} \sqrt{x^2 + 4} - x = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 4} = 1 + x \Rightarrow x^2 + 4 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 2x = 3 \rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}} \quad (2) \xrightarrow{(2)} z = \frac{3}{2} - 2i$$

۶- گزینه «۴» با امتحان گزینه‌ها مشخص است.

$$y = \ln(\ln x) \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x} \Rightarrow y'(e) = \frac{1}{e}$$

۷- گزینه «۳»

$$\begin{cases} \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{4/41} - \sqrt{4} = 2/1 - 2 = 0/1 \\ dy = f'(x_0) \cdot \Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \times \Delta x = \frac{1}{4} \times 0/41 = 0/1025 \end{cases} \Rightarrow |dy - \Delta y| = (0/1025 - 0/1) = 0/025$$

۸- گزینه «۲»



۹- گزینه «۱» نقاطی که f'' محور x ها را قطع می کند $(f''(x) = 0)$ ، نقاط عطف تابع می باشند.

۱۰- گزینه «۳» $x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow p^2 - 2p \cos \theta = 0 \Rightarrow p = 2 \cos \theta$

۱۱- هیچکدام از گزینه ها صحیح نیست. $\cos \theta = \frac{2 \times (-1) + 2 \times 0 + 0 \times 1}{\sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (0)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (1)^2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$

۱۲- گزینه «۲» حد فوق برابر مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ می باشد: $f'(x) = 2 \times \sqrt{x+3} + \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \times (2x-1) \Rightarrow f'(1) = \frac{17}{4}$

۱۳- گزینه «۱» $y = -x^4 + 3x^2 - 2 \Rightarrow y' = -4x^3 + 6x = 0 \Rightarrow -2x(2x^2 - 3) = -9 + 18 = 8 \Rightarrow x = 0, x = (\sqrt{\frac{3}{2}})$

$$\left. \begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow y(0) = -2 \\ x = \sqrt{\frac{3}{2}} &\Rightarrow y(\sqrt{\frac{3}{2}}) = -(\sqrt{\frac{3}{2}})^4 + 3(\sqrt{\frac{3}{2}})^2 - 2 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 2 = \frac{1}{4} \\ x = \sqrt{3} &\Rightarrow y(\sqrt{3}) = -(\sqrt{3})^4 + 3(\sqrt{3})^2 - 2 = -9 + 9 - 2 = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Max}(y) = \frac{1}{4}$$

۱۴- گزینه «۱» $f(2) = 10 \Rightarrow f^{-1}(10) = 2$

۱۵- گزینه «۲» $\text{fog}(x) = f[g(x)] = (x^2 + 2)^2 - 3(x^2 + 2) - 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 3x^2 - 6 - 4 = 0$

$\Rightarrow x^4 + x^2 - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -3 & \text{غقق} \\ x^2 = 2 & \text{قق} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

۱۶- گزینه «۴»

۱۷- گزینه «۱»

$$f(x) = f(1) + f'(1) \frac{(x-1)}{1!} + f''(1) \frac{(x-1)^2}{2!} + \underbrace{f'''(1) \frac{(x-1)^3}{3!}}_{\text{جمله چهارم}} + \dots$$

$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 \Rightarrow f''(x) = 20x^3 \Rightarrow f'''(x) = 60x^2 \Rightarrow f'''(1) = 60$

$\Rightarrow \text{جمله چهارم} = 60 \times \frac{(x-1)^3}{3!} = 60 \times \frac{(x-1)^3}{6} = 10(x-1)^3$

۱۸- گزینه «۳» عبارت خواسته شده در واقع مشتق تابع $y = \frac{u}{v}$ می باشد: $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$\frac{u}{v} = \frac{x^4 - 3x^2 + 5x^2}{x^2 - 3x + 5} = \frac{x^2(x^2 - 3x + 5)}{x^2 - 3x + 5} = x^2 \Rightarrow (\frac{u}{v})' = (x^2)' = 2x$

۱۹- گزینه «۴» $1 + \frac{1}{x} = u \Rightarrow -\frac{1}{x^2} dx = du$

$I = \int \sqrt{u} \cdot du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{(1 + \frac{1}{x})^3} + c \xrightarrow[x=2]{c=0} I = \frac{2}{3} \sqrt{(1 + \frac{1}{2})^3} = \frac{2}{3} \sqrt{(\frac{3}{2})^3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$



$$\text{Ln}x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du, \begin{cases} x \rightarrow \infty \rightarrow u \rightarrow \infty \\ x = 2 \rightarrow u = \text{Ln}2 \end{cases} \quad \text{۲۰- گزینه «۲»}$$

$$\int_{\text{Ln}2}^{\infty} \frac{dx}{x(\text{Ln}x)^{\Delta}} = \int_{\text{Ln}2}^{\infty} \frac{du}{u^{\Delta}} = \left[-\frac{1}{\Delta u^{\Delta-1}} \right]_{\text{Ln}2}^{\infty} = \frac{1}{\Delta \text{Ln}^{\Delta-1} 2}$$

۲۱- گزینه «۳» چند جمله اول دنباله $\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\}$ برابر $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \dots$ می باشد. بنابراین دنباله صعودی یا نزولی نمی باشد.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\} = 1 + 0 = 1 \text{ همگرا به یک است}$$

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma^{k+9}}{\gamma^{\Delta k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma^9 \times \gamma^k}{(\gamma^{\Delta})^k} = \gamma^9 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\Delta}\right)^k, \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\gamma}{\Delta}\right)^k = 0 \quad \text{۲۲- گزینه های ۱ و ۳ صحیح است.}$$

$$\text{اما با فرض } a = \frac{\gamma}{\Delta} \text{ و } q = \frac{\gamma}{\Delta} \text{ ملاحظه می شود } S = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{\gamma}{\Delta}}{1-\frac{\gamma}{\Delta}} = \gamma \text{ و سری هندسی به عدد } \gamma^9 \times \gamma \text{ همگراست.}$$

گزینه های دیگر را نیز بررسی می کنیم :

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma k - 1}{\gamma k}, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma k - 1}{\gamma k} = \frac{\gamma}{\gamma} \quad \text{سری واگراست (شرط اول برقرار نیست)}$$

$$3) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta^k}{\gamma^{\Delta k + \gamma}} = \frac{1}{\gamma^{\Delta \gamma}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{\gamma}\right)^k, \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\Delta}{\gamma}\right)^k = 0$$

$$\text{اما با فرض } a = \frac{\Delta}{\gamma} \text{ و } q = \frac{\Delta}{\gamma} \text{ ملاحظه می شود } S = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{\Delta}{\gamma}}{1-\frac{\Delta}{\gamma}} = \Delta \text{ و سری هندسی به عدد } \frac{\Delta}{\gamma} \text{ همگراست.}$$

$$4) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = e^{\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+1}{k} - 1\right) \times k} = e$$

حد جمله عمومی دنباله مخالف صفر شد، لذا سری همگرا نیست.

$$\text{۲۳- گزینه «۳» مجانب مایل تابع داده شده خط } y = x + a \text{ می باشد و چون طبق فرض این خط از نقطه } (1, -1) \text{ عبور می کند پس } a = -2$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma k + \gamma}{(k+1)^{\gamma} (k+\gamma)^{\gamma}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k+1)^{\gamma}} - \frac{1}{(k+\gamma)^{\gamma}} \right) = \frac{1}{(1+1)^{\gamma}} = \frac{1}{\Delta} \quad \text{۲۴- گزینه «۲»}$$

$$V = \pi \int_a^b f^{\gamma}(x) dx \Rightarrow V = \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{\gamma} x} dx = \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \text{tg}^{\gamma} x) dx = \pi [\text{tg}x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \pi \left[\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] = 2\pi \quad \text{۲۵- گزینه «۱»}$$

$$f'(c) = \gamma c + \gamma \Rightarrow f'(c) = 0 \Rightarrow c = -1 \quad \text{۲۶- گزینه «۳»}$$

$$F(x) = \int_1^{x^{\gamma}} \frac{tdt}{1+t^{\gamma}} \Rightarrow F'(x) = \gamma x \left(\frac{x^{\gamma}}{1+x^{\gamma}} \right) \Rightarrow F'(\sqrt{\gamma}) = \frac{\gamma (\sqrt{\gamma})^{\gamma}}{1+(\sqrt{\gamma})^{\gamma}} = \frac{\Delta}{\Delta} \quad \text{۲۷- گزینه «۴»}$$

۲۸- گزینه «۲»
 $P(x, y) = (a - 4)xy \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = (a - 4)x$
 $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow (a - 4) = 2 \Rightarrow a = 6$

$Q(x, y) = x^2 + \cos y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$

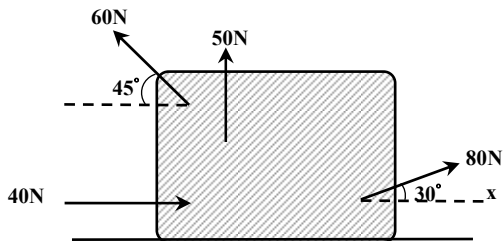
۲۹- گزینه «۱»
 $(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = -(y^2 + 1) \Rightarrow \frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{-dx}{x^2 + 1} \Rightarrow \text{Arctgy} = -\text{Arctgx} + c$

۳۰- گزینه «۳»
 $\int_0^1 \int_{-1}^x xydydx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1}^x dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$

استاتیک و مقاومت مصالح

۳۱- گزینه «۱» صورت مسأله قانون اول نیوتن می باشد.

۳۲- گزینه «۲»
 $V_1 + V_2 - V_3 = (3\vec{i} - \vec{k}) + (-2\vec{j} + \vec{k}) - (-3\vec{i} + 2\vec{j}) = 6\vec{i} - 4\vec{j}$



۳۳- گزینه «۳»

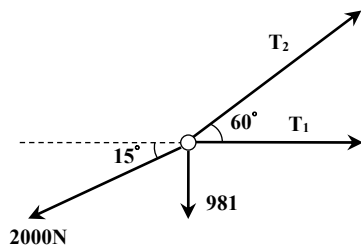
$$\begin{cases} \sum F_x = 40 + 80 \cos 30^\circ - 60 \cos 45^\circ = 66/9 \\ \sum F_y = 60 \sin 45^\circ + 50 + 80 \sin 30^\circ = 132/4 \end{cases}$$

$$R = \sqrt{\sum F_x^2 + \sum F_y^2} = 148/3$$

۳۴- گزینه «۴»

$$\begin{cases} \sum F_x = 8 + T \cos 40^\circ + C \cos 70^\circ - 16 = 0 \\ \sum F_y = T \sin 40^\circ - 3 - C \sin 70^\circ = 0 \end{cases} \Rightarrow C = 3/0.3, T = 9/0.9$$

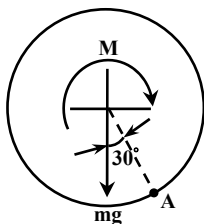
۳۵- گزینه «۲»



$$\begin{cases} \sum F_x = T_1 + T_2 \cos 60^\circ - 2000 \cos 15^\circ = 0 \\ \sum F_y = T_2 \sin 60^\circ - 981 - 2000 \sin 15^\circ = 0 \end{cases} \Rightarrow T_2 = 1730, T_1 = 1067$$

۳۶- گزینه «۳» تکیه گاه A لولایی و دارای ۲ نیروی عکس العمل و تکیه گاه B غلتکی و دارای یک نیروی عکس العمل می باشد.

۳۷- گزینه «۱»



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow mg \sin 30^\circ \times 240 = M$$

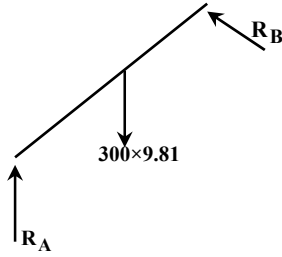
 اگر $mg = 1 \Rightarrow M = 120$

۳۸- گزینه «۴»
 $F_t = F_x = F \cos(20^\circ + 30^\circ) = 2 \cos 50^\circ = 1/286$

$F_n = F_y = F \sin(20^\circ + 30^\circ) = 2 \sin 50^\circ = 1/532$



۳۹- گزینه «۳»

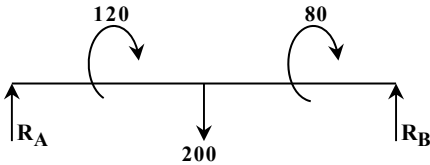


$$\sum M_B = 0$$

$$\Rightarrow 300 \times 9.81 \times \frac{9}{11} \times 4 \cos 3^\circ = R_A \times 8 \times \cos 3^\circ \Rightarrow R_A = 1472$$

۴۰- گزینه «۴» شرایط هندسی مسأله ناقص است.

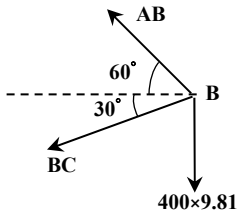
۴۱- گزینه «۴»



$$\sum M_A = 0$$

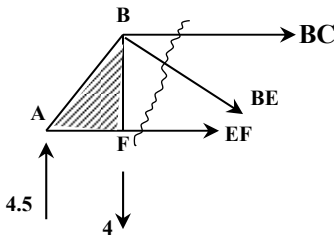
$$\Rightarrow (R_B \times 0.35) = 200 + (200 \times 0.2) \Rightarrow R_B = 686$$

۴۲- گزینه «۱»



$$\begin{cases} BC \cos 3^\circ + AB \cos 6^\circ = 0 \\ (400 \times 9.81) + BC \sin 3^\circ - AB \sin 6^\circ = 0 \end{cases} \Rightarrow AB = 3412$$

۴۳- گزینه «۳»



$$R_A = 4/5, \quad R_D = 5/5$$

$$\sum M_E = 0$$

$$\Rightarrow (4/5 \times 9) - (4 \times 6) + (BC \times 4) = 0 \Rightarrow BC = 4/13$$

۴۴- گزینه «۴» نیرو در عضو CG همان 1 می‌باشد که در گزینه‌ها دیده نمی‌شود.

۴۵- گزینه «۴»

$$P = P(\text{بتن}) + P(\text{فولاد})$$

۴۶- گزینه «۱»

$$\Delta L(\text{فولاد}) = \Delta L(\text{بتن}) \Rightarrow \frac{P(\text{فولاد}) \times L}{12 \times 2 \times 10^6} = \frac{P(\text{بتن}) \times L}{48 \times 2 \times 10^5}$$

$$\frac{P(\text{فولاد})}{5} = \frac{P(\text{بتن})}{2} \Rightarrow \frac{P(\text{فولاد})}{P(\text{بتن})} = \frac{5}{2} = 2/5$$

$$\varepsilon_x = \frac{\nu}{E} (\sigma_x - \nu)(\sigma_y + \sigma_z)$$

۴۷- گزینه «۳» طبق رابطه هوک در یک فضای سه بعدی داریم:

$$\sigma = \frac{mg}{A} = \frac{\rho \cdot v \cdot g}{A} = \frac{\rho \cdot (A \cdot x) \cdot g}{A} = \rho \cdot g \cdot x = \gamma \cdot x$$

۴۸- گزینه «۲»

۴۹- گزینه «۳» با توجه به فرم براکت، در میله BC نیروی فشاری خواهیم داشت.



سؤالات آزمون آزاد ۸۹

ریاضی

۱- در یک تصاعد هندسی مجموع لگاریتم‌های سه جمله اول آن برابر ۳ می‌باشد. لگاریتم جمله دوم کدام است؟
 (۱) $\log 3$ (۲) ۱ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) صفر

۲- دامنه معکوس تابع $y=1-\sqrt{1-x}$ کدام است؟
 (۱) $(-\infty, 1]$ (۲) $(-\infty, 2]$ (۳) $(-\infty, -1]$ (۴) $(-\infty, -2]$

۳- دو تابع $f(x)=-3x+2$ و $g(x)=1-x^2$ مفروض است. مشتق تابع $y=g \circ f(x)$ به ازای $x=1$ کدام است؟
 (۱) -۶ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) -۳

۴- از معادله $\log_2 [x]=2$ مقدار x کدام است؟
 (۱) $5 \leq x < 4$ (۲) $4 \leq x < 5$ (۳) $7 \leq x < 8$ (۴) $x=8$ یا $x=9$

۵- ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ مفروضند. ماتریس $A^2 + AB$ کدام است؟
 (۱) A (۲) B (۳) ۲B (۴) ۲A

۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{x+5}$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) e (۳) ∞ (۴) ۱

۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+x} \right)$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) e

۸- اگر تابع زیر در نقطه $x=2$ پیوسته باشد، آنگاه مقدار $a+b$ کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} |x-2|+a & (x < 2) \\ |x-2|+[x-2] & (x=2) \\ [x+2]+b & (x > 2) \end{cases}$$

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) -۶ (۴) -۴

۹- به ازای کدام مقدار a نمودار تابع $y = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x + a$ در فاصله $(0, \frac{\pi}{4})$ دارای ماکزیمم یا مینیمم به عرض $y = \frac{3}{4}$ است؟
 (۱) ۱ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) ۲

۱۰- کدام یک از سریهای زیر همگراست؟

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{3k} \quad (۴) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{2k+3}}{8^k} \quad (۳) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{K}\right)^K \quad (۲) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{7^{k+9}}{2^{3k}} \quad (۱)$$

۱۱- شعاع دایره‌ای برابر ۵۶۷ متر است. اگر به شعاع دایره یک متر اضافه شود، آنگاه محیط آن تقریباً چند متر افزایش می‌یابد؟
 (۱) ۱۲/۵۶ (۲) ۶/۲۸ (۳) ۲۰/۱۷ (۴) ۲۵/۳۲

۱۲- مشتق تابع $y = \arcsin x^2$ نسبت به متغیر \sqrt{x} کدام است؟

$$2x\sqrt{x} \quad (۴) \quad \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} \quad (۳) \quad \frac{4x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} \quad (۲) \quad \frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} \quad (۱)$$

۱۳- آب با سرعت $\frac{\pi}{12}$ واحد مکعب در هر ثانیه وارد مخزن مخروطی شکل به بلندی ۱۲ واحد و شعاع قاعده ۴ واحد می‌شود. سرعت افزایش ارتفاع آب در مخزن وقتی ارتفاع آب ۶ واحد باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{16} \quad (۴) \quad \frac{1}{10} \quad (۳) \quad \frac{1}{8} \quad (۲) \quad \frac{1}{12} \quad (۱)$$



۱۴- جواب معادله $(e^x + 3)^2 - 25 = 0$ کدام است؟

- (۱) e (۲) $\ln 2$ (۳) ۱ (۴) $\pm \ln 2$

۱۵- تابع $f(x) = x^2 e^x$ چند نقطه عطف دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) فاقد نقطه عطف است.

۱۶- اگر c مقدار مناسب برای تابع $f(x) = x^3 + x^2 - x$ در بازه $[-2, 1]$ باشد، به طوری که فرض قضیه مقدار میانگین را برآورد کند، آنگاه مقدار c کدام است؟

- (۱) $\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$ (۲) $\frac{-1 \pm \sqrt{6}}{3}$ (۳) $\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{4}$ (۴) $\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{5}$

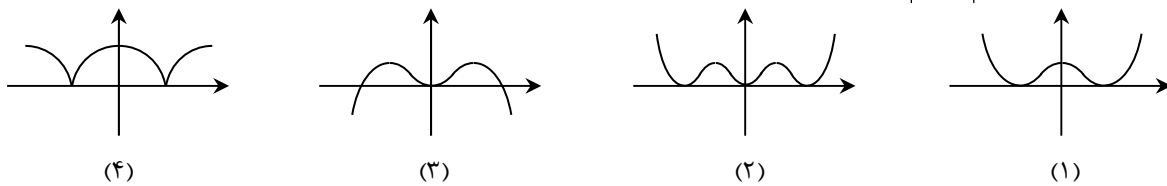
۱۷- شیب خط مماس بر منحنی $x^3 y + xy^3 = 2$ در نقطه $x=1$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) صفر (۴) -۱

۱۸- دنباله $\left\{ \frac{\cos n + 3n^2}{n^2 + 1} \right\}$ چگونه است؟

- (۱) همگرا به صفر است. (۲) همگرا به ۳ است (۳) همگرا به $\frac{1}{2}$ است (۴) واگرا است.

۱۹- نمایش هندسی تابع $y = |x^6 - 1|$ کدام است؟



۲۰- معادله دایره $x^2 + y^2 = R^2$ در مختصات قطبی کدام است؟

- (۱) $\rho = R \sin \theta$ (۲) $\rho = R \cos \theta$ (۳) $\rho = R$ (۴) $\rho = R^2$

۲۱- حاصل $\int_0^1 \left(\frac{|x|}{x} + x \right) dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{4}{3}$

۲۲- حجم حاصل از دوران سهمی $y = x^2$ حول محور x در فاصله $x = -1$ تا $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{5}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{3}$

۲۳- اگر $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 5y$ آنگاه $\frac{\partial f}{\partial y}$ در نقطه $A(2, -3)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۳

۲۴- فاصله نقطه $A(2, 3, 4)$ از محور x ها کدام است؟

- (۱) $\sqrt{29}$ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) $\frac{3}{5}$

۲۵- اگر $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$ باشد، مقدار $F'(1) - F(1)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) $-\frac{1}{2}$

۲۶- جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 4y' - 5y = 0$ است؟

- (۱) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-5x}$ (۲) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x}$ (۳) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$ (۴) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$



۲۷- معادله صفحه‌ای که شامل خط $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2}$ بوده و موازی بردار $\vec{V}(3, 1, -1)$ باشد، کدام است؟

- (۱) $-x + 7y - 4z = 18$ (۲) $-x - 7y - 4z = 18$ (۳) $-x + 7y + 4z = 18$ (۴) $-x - 7y + 4z = 18$

۲۸- طول قوس منحنی $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ در فاصله $[0, 3]$ کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۲۹- گرادیان تابع $\phi(x, y, z) = 10y^2z + 2xy^2 - 3z^2 - 4$ در نقطه $M(1, -1, 3)$ کدام است؟

- (۱) $2i - 64j - 17k$ (۲) $2i - 58j - 7k$ (۳) $2i + 10j + 20k$ (۴) $2i - 60j - 9k$

۳۰- مقدار $(1+i)^{11}$ کدام است؟

- (۱) $2^{10}(1-i)$ (۲) $2^{10}(1+i)$ (۳) $2^{11}(1+i)$ (۴) $2^9(1+i)$

استاتیک و مقاومت مصالح

۳۱- کدام یک از ویژگی‌های کمیت برداری نمی‌باشند؟

- (۱) داشتن مقدار (۲) فقط داشتن سو (۳) داشتن راستا (۴) داشتن سو و راستا

۳۲- اندازه حاصلضرب خارجی یک بردار (\vec{V}) در قرینه‌اش کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $|\vec{V}|$ (۴) $|\vec{V}|^2$

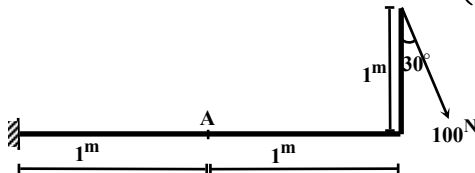
۳۳- اگر بردار $3\vec{i} + 4\vec{j}$ به اندازه 90° پاد ساعتگرد دوران کند، به کدام بردار زیر تبدیل می‌شود؟

- (۱) $4\vec{i} - 3\vec{j}$ (۲) $3\vec{i} - 4\vec{j}$ (۳) $-4\vec{i} + 3\vec{j}$ (۴) $-3\vec{i} + 4\vec{j}$

۳۴- نیروی 500 kg با کدام مقدار زیر معادل است؟ ($g = 10$)

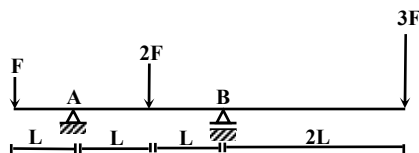
- (۱) 50 KN (۲) 500 N (۳) 50 N (۴) 5 KN

۳۵- گشتاور نیروی 100 نیوتنی نسبت به نقطه A چه مقدار است؟
 $\left(\begin{matrix} \cos 60^\circ = 0.5 \\ \sin 60^\circ = 0.8 \end{matrix} \right)$



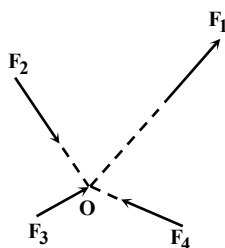
- (۱) $30 \text{ N}\cdot\text{M}$ (۲) $80 \text{ N}\cdot\text{M}$ (۳) $210 \text{ N}\cdot\text{M}$ (۴) $130 \text{ N}\cdot\text{M}$

۳۶- در آستانه حرکت، کدام گزینه در خصوص وضعیت سیستم صحیح است؟



- (۱) گشتاور نیروهای $2F, F$ و $3F$ نسبت به نقطه A صفر خواهند بود.
 (۲) گشتاور نیروهای $2F, F$ و $3F$ نسبت به نقطه B صفر خواهند بود.
 (۳) جمع جبری نیروهای $2F, F$ و $3F$ و R_{yB} صفر خواهند بود.
 (۴) مجموع عکس‌العملهای تکیه‌گاهی صفر خواهند بود.

۳۷- کاملترین شرط تعادل سیستم نشان داده شده در شکل، کدام است؟



- (۱) $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_o = 0 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_o = 0 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum M_o = 0 \end{cases}$



پاسخنامه آزمون سراسری ۹۰

ریاضی

۱- گزینه «۱» از رابطه $u^v \sim e^{v(u-1)}$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x \ln x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \cdot (-x \ln x)} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

۲- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

تابع به ازای $x \leq 2$ وارون‌پذیر است. با این شرط $f(x)$ به صورت زیر در می‌آید:

$$y = f(x) = 2x - (4 - 2x) = 4x - 4 \Rightarrow y + 4 = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{4}(y + 4) \Rightarrow y = \frac{1}{4}(x + 4), \quad x \leq 2$$

۳- گزینه «۴»

$$x^2 y^2 - y^2 = x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}}$$

خطوط $x = \pm 1$ مجانب قائم و $y = \pm 1$ مجانب افقی هستند.

$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \pm \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}} = \pm 1$$

۴- گزینه «۴» چون $x = \frac{1}{2}$ ، ریشه مرتبه سوم عبارت $(2x - 1)^3$ می‌باشد، فقط از این عامل سه مرتبه مشتق می‌گیریم.

$$y''' = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \sqrt[3]{6x + 5} \xrightarrow{x = \frac{1}{2}} 96$$

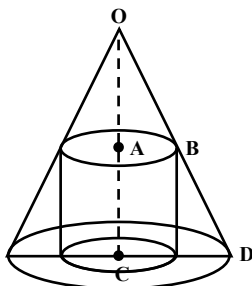
۵- گزینه «۲» برای یافتن نقاط اکسترمم مشتق تابع را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$y' = 4x^3 - 16x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -25 \\ x = 2 \Rightarrow y = -25 \\ x = 0 \Rightarrow y = -9 \end{cases}$$

پس نقطه $(0, -9)$ ، نقطه ماکسیمم نسبی تابع است.

$$x^4 - 8x^2 - 9 = -9 \Rightarrow x^4 - 8x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow AB = 4\sqrt{2}$$

۶- گزینه «۳» طبق قضیه تالس، با توجه به شکل مقابل می‌توان نوشت:



$$\text{مخروط: } \begin{cases} H = \text{ارتفاع} \\ R = \text{شعاع} \end{cases}$$

$$\text{استوانه: } \begin{cases} h = \text{ارتفاع} \\ r = \text{شعاع} \end{cases}$$

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD} \Rightarrow \frac{H-h}{r} = \frac{H}{R} \Rightarrow \boxed{h = \frac{H(R-r)}{R}}$$



$$\text{استوانه } V = \pi r^2 h = \pi r^2 \times \frac{H(R-r)}{R} = \frac{\pi H}{R} (Rr^2 - r^3)$$

$$\frac{dv}{dr} = 0 \Rightarrow 2rR - 3r^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{2}{3}R, \quad h = \frac{1}{3}H$$

$$\Rightarrow \text{استوانه } V = \pi r^2 h = \frac{4}{27} \pi R^2 H$$

$$\Rightarrow \frac{\text{حجم استوانه}}{\text{حجم مخروط}} = \frac{\frac{4}{27} \pi R^2 H}{\frac{1}{3} \pi R^2 H} = \frac{4}{9}$$

از طرفی حجم مخروط اصلی برابر $\frac{1}{3} \pi R^2 H$ می‌باشد.

۷- گزینه «۱» چون تابع $\frac{x}{1+|x|}$ در Ln قرار دارد بنابراین همیشه باید مثبت باشد پس $x > 0$ می‌باشد همچنین به طور واضح مخرج از صورت بزرگتر می‌باشد بنابراین داریم: $0 < \frac{x}{1+|x|} < 1$ حال اگر از این نامساوی Ln بگیریم، داریم:

$$\text{Ln}(0) < \text{Ln} \frac{x}{1+|x|} < \text{Ln}(1) \Rightarrow -\infty < \text{Ln} \frac{x}{1+|x|} < 0$$

۸- گزینه «۳» قرار می‌دهیم $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$ و $\Delta x = 0/25$ در این صورت با استفاده از فرمول $f(x_0 + \Delta x) \sim f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ داریم:

$$\sqrt[5]{32/25} \sim \sqrt[5]{(32)^2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{\sqrt[5]{(32)^3}} (0/25) = 4 + \frac{1}{80} = 4 + 0/0125$$

$$v = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 10 \xrightarrow{r=10} \frac{dr}{dt} = \frac{10}{4\pi \times 10^2}$$

۹- گزینه «۲»

$$s = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{ds}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt} = 8\pi \times 10 \times \frac{10}{4\pi \times 10^2} = 2$$

۱۰- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \left(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t} \right) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} (\text{Ln}(t + \sqrt{t^2-1}) - \text{Ln}t) \Big|_1^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (\text{Ln}(x + \sqrt{x^2-1}) - \text{Ln}x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \text{Ln} \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x} = \text{Ln}2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

۱۱- گزینه «۱» طبق فرمول حد مجموع در فصل انتگرال:

$$y' = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{2}}$$

۱۲- گزینه «۲»

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^4 \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\right) \Big|_0^4 = \frac{19}{3}$$



۱۳- گزینه «۳» با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ مسأله را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ \frac{2x}{1} = \frac{16y}{2\sqrt{y}} \Rightarrow x\sqrt{x} = 8y\sqrt{y} \Rightarrow x = 4y \Rightarrow \sqrt{4y} + \sqrt{y} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{y} + \sqrt{y} = 1 \Rightarrow 3\sqrt{y} = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{9} \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق $y = \frac{1}{9}$ و $x = \frac{4}{9}$ و در نتیجه $Z = \frac{1}{27}$ حاصل می‌شود.

۱۴- گزینه «۴»

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{-1}{2} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} + t^{-\frac{1}{2}} \times \frac{x^2}{4t^2} e^{-\frac{x^2}{4t}} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= t^{-\frac{1}{2}} \frac{-2x}{4t} e^{-\frac{x^2}{4t}} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-1}{2} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} + t^{-\frac{1}{2}} \times \frac{x^2}{4t^2} e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

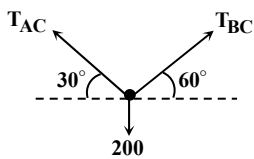
۱۵- گزینه «۳» از مختصات کروی استفاده می‌کنیم. در این صورت $x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \phi$ به دست می‌آید و در نتیجه:

$$\begin{aligned} \iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a \rho^2 \sin^2 \phi \cdot \rho^2 \sin \phi \rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin^3 \phi \int_0^a \rho^4 d\rho = 2\pi \times \int_0^{\pi} \sin \phi (1 - \cos^2 \phi) d\phi \times \frac{a^5}{5} = 2\pi \times \left(-\cos \phi + \frac{\cos^3 \phi}{3} \right) \Big|_0^{\pi} \times \frac{a^5}{5} = \frac{8\pi a^5}{15} \end{aligned}$$

استاتیک و مقاومت مصالح

۱۶- گزینه «۱» برآیند بردارهای نشان داده شده در شکل بدلیل آنکه تمام بردارها به دنبال یکدیگر رسم شده‌اند، صفر است.

۱۷- گزینه «۱» برای محاسبه میزان کشش در کابل AC لازم است، دیاگرام جسم آزاد نقطه C به صورت زیر ترسیم گردد:

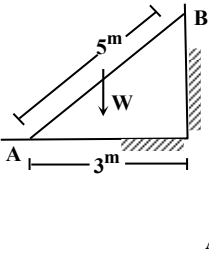


$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow T_{BC} \cos 60^\circ = T_{AC} \cos 30^\circ & (1) \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{BC} \sin 60^\circ + T_{AC} \sin 30^\circ = 200 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow T_{BC} = T_{CA} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} T_{AC}$$

$$(2) \Rightarrow \left(\sqrt{3} T_{AC} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} T_{AC} \right) = 200$$

$$\frac{3}{2} T_{AC} + \frac{1}{2} T_{AC} = 200, \quad 2T_{AC} = 200 \Rightarrow T_{AC} = 100 \text{ N}$$



۱۸- گزینه «۲» برای محاسبه مقدار عکس العمل در محل تماس B لازم است با ترسیم دیاگرام جسم آزاد نردبان و استفاده از رابطه مناسب تعادل به صورت زیر عمل نماییم:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (400 \times 1/5) - (N_B \times 4) = 0 \Rightarrow N_B = \frac{400 \times 1/5}{4} = 150 \text{ N}$$

۱۹- گزینه «۴» نیرویی می تواند جایگزین چهار نیروی شکل باشد که مقدار آن برابر با برآیند چهار نیرو باشد، لذا:

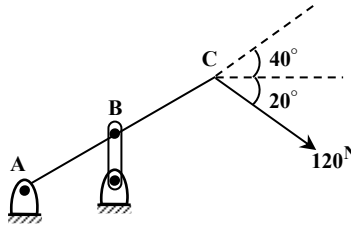
$$P = -6 - 3/5 + 3 + 5 = -1/5 \text{ N}$$

محل این نیرو باید در موقعیتی از تیر باشد که گشتاور این تک نیروی نسبت به تکیه گاه برابر با گشتاور چهار نیروی اولیه نسبت به تکیه گاه باشد، لذا:

$$(1/5 \times R) = (3/5 \times 3) - (3 \times 7) - (5 \times 9) + (6 \times 12) \Rightarrow R = 11 \text{ m}$$

۲۰- هیچکدام از گزینه ها صحیح نیست.

مولفه عمود بر محور تیر AC باعث ایجاد گشتاور در تیر می شود، لذا:



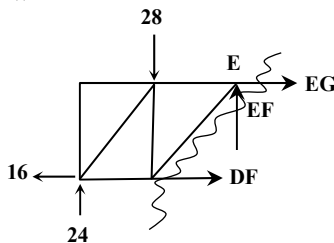
$$M = 120 \sin 60^\circ \times 4$$

$$M = 120 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 360 \times 1/7 = 612 \text{ N.M}$$

۲۱- گزینه «۱» ابتدا لازمست عکس العمل تکیه گاه B از دیاگرام جسم آزاد کل خرپا به صورت زیر محاسبه گردد:

$$\sum M_j = 0 \Rightarrow (R_{yB} \times 22) - (28 \times 24) - (28 \times 8) + (16 \times 8) = 0 \Rightarrow R_{yB} = 24$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{xB} = 16$$



حال با اعمال یک خط برش بر خرپا داریم:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 28 + EF - 24 = 0$$

$$EF = 4 \text{ KN}$$

۲۲- گزینه «۲» اعضاء BN, NB, DO, OC, LE, HJ, JG, صفر نیرویی اند، دلیل صفر شدن نیرو در این اعضاء عبور سه عضو عمود بر هم از یک گره خرپا می باشد.

۲۳- گزینه «۲» ابتدا لازمست عکس العمل تکیه گاه B محاسبه گردد:

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow (20 \times 7/5) + (40 \times 2) = (R_{yB} \times 5) \Rightarrow R_{yB} = 46$$

برای محاسبه گشتاور خمشی در هر محل، باید تیر از محل مورد نظر برش زده شود و از دیاگرام جسم آزاد یک سمت آن استفاده گردد:

$$B \text{ محل تکیه گاه } = 20 \times 2/5 = 50$$

$$\Rightarrow M_{\max} = 50$$

$$C \text{ محل نقطه } = (20 \times 5/5) - (50 \times 3) = 40$$

۲۴- گزینه «۴» محور مورد نظر برای شکل یک محور فرعی است، لذا مقدار ممان اینرسی مذکور با استفاده از قضیه انتقال به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$I_{AA} = \left[\frac{1}{36} \times 4 \times 2^3 \right] + \left[\frac{2 \times 4}{2} \times \left(\frac{4}{3} \right)^2 \right] = 8 \text{ m}^4$$

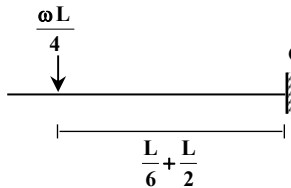


۲۵- گزینه «۱» از آنجائیکه اعضاء خرپا، اعضا دو نیرویی هستند لذا فقط نیروهای محوری (کششی یا فشاری) تحمل می‌کنند.

۲۶- گزینه «۳» شکل را به دو شکل منظم و ساده تجزیه کرده (نیم‌دایره و مستطیل) و با استفاده از رابطه میانگین وزنی و محل نقطه O، موقعیت عرض مرکز سطح شکل مرکب را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{\left(\frac{\pi \times 4^2}{2} \times \frac{4 \times 4}{3\pi}\right) + (4 \times 2 \times -1)}{\left(\frac{\pi \times 4^2}{2}\right) + (4 \times 2)} = \frac{34/67}{32/12} = 1/04$$

۲۷- گزینه «۳» ابتدا بار گسترده‌ی مثلثی را به یک نیروی متمرکز تبدیل می‌نماییم، لذا:



$$M_c = \frac{\omega L}{4} \times \frac{2L}{3} = \frac{\omega L^2}{6}$$

۲۸- گزینه «۴» در محدوده $0 < x < 2L$ ، بدلیل اعمال بار گسترده مستطیلی بر روی شکل، دیاگرام گشتاور خمشی دارای شکل سهمی و در محدوده $2L < x < 3L$ دیاگرام دارای تغییرات خطی می‌باشد، ضمناً در محل تکیه گاه‌های ساده دو سر تیر، مقادیر گشتاور خمشی صفر است.

۲۹- گزینه «۴» از آنجائیکه نیروی P بر یک صفحه صلب وارد می‌شود، لذا میزان کاهش طول لوله و میله برابر خواهند بود، یعنی:

$$\Delta L_{\text{میله}} = \Delta L_{\text{لوله}}$$

۳۰- گزینه «۱» از آنجائیکه میله تحت بار، یک تیر نامعین نیرویی می‌باشد، لذا مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه B برابر است با:

$$N_B = \frac{3 \times 120}{12} = 30 \text{ N}$$

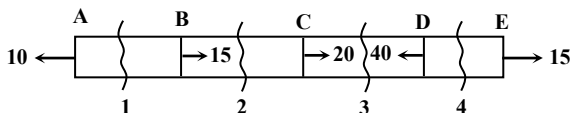
۳۱- گزینه «۲» بر روی شفت، گشتاور پیچشی اعمال می‌شود، لذا تنش برشی در آن بوجود می‌آید. مقدار گشتاور پیچشی در قسمت CD از شفت برابر است با:

$$T_{CD} = 110 + 270 - 90 = 290 \text{ N.M} = 290 \times 10^3 \text{ N.mm} = 29 \times 10^4 \text{ N.mm}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T.R}{j} = \frac{29 \times 10^4 \times 10}{\frac{\pi \times 10^4}{2}} = \frac{2 \times 29 \times 10^5}{\pi \times 10^4} = 184/7$$

۳۲- گزینه «۳» از آنجائیکه سطح مقطع در سراسر میله AE ثابت است،

لذا تنش حداکثر در قسمتی از میله بوجود می‌آید که دارای بیشترین مقدار نیروی باشد در نتیجه:



$$\begin{cases} F_{AB} = 10 \text{ kN} \\ F_{BC} = 15 \text{ kN} \\ F_{CD} = 40 \text{ kN} \\ F_{DE} = 15 \text{ kN} \end{cases} \Rightarrow \text{در قسمت CD بدلیل بیشتر بودن مقدار نیرو، تنش نیز حداکثر مقدار ممکن را دارا می‌باشد.}$$